

摘要

空间结构的稳定分析，是结构工程设计中非常重要的问题，结构设计中必须考虑稳定问题以防止结构发生失稳。然而迄今为止，科学而较为方便地确定包括板片空间结构在内的空间结构壳体的临界荷载仍是一个没有很好解决的难题。如何定量寻求一种比较全面、客观而又方便的确定空间结构稳定性的方法是此类结构工程设计与应用中必须深入研究和亟待解决的课题。

在板片空间结构体系中，板片与金属骨架的非协调接触处通过摩擦接触作用传递相互作用力，来实现板片与金属骨架的共同工作。在板片空间结构体系共同工作问题已有的研究中，大都局限于一般应力问题的分析，而且往往把共同工作问题简化为公共结点处的位移协调问题，对实际存在的摩擦接触问题不加考虑。

理论和试验研究发现接触共同工作对结构的稳定性确实有很大的影响，接触问题一直是理论研究及工程设计中的一个复杂问题，接触状态的约束方程作为非线性约束控制全过程，接触问题表现出很强的非线性特征。

本文首先对稳定的基本概念和原理进行了归纳和阐述，包括失稳机理、失稳特征、稳定问题的分类、稳定问题与强度问题的对比等，然后详细描述了接触问题的力学分析方法，根据分析问题的需要对传统接触模型加以改进，并给出了基于接触共同工作稳定性分析的有限元数值求解方法的迭代格式。

针对板片空间结构体系，研究了基于接触共同工作稳定问题的有限元模型的实现方法，详细考察了多种关键因素（接触单元数量、接触刚度、摩擦系数、接触间隙等）对板片结构稳定极限承载力和屈曲挠度计算结果的影响，得出了一些非常有益的结论。

在以上工作的基础上，针对三个板片空间结构的试验模型，采用本文提出的基于接触共同工作板片空间结构稳定分析的数值方法和建立的有限元模型，进行非线性稳定计算和分析。结果显示本文所提出的基于接触共同工作板片空间结构稳定性分析的计算模型能够较为真实的反映板片空间结构的稳定性能，也表明了板片空间结构稳定分析中考虑接触共同工作的合理性和必要性。所得出的结论可望对进一步完善板片空间结构体系有积极的意义，为该结构体系的设计计算提供一个实际可行的方法。

关键词： 稳定分析；临界荷载；板片空间结构；接触；增广拉格朗日乘子法；有限元模型

Abstract

The stability analysis of space structures is very important problems in structure designing. However, scientifically and conveniently determining critical load of space structure including sheet space structure is unsolved nicely yet in designing.

Comprehensive and objective methods used to stability analysis in structure designing and application are necessarily to be studied.

In the sheet space structure system, sheets and metal skeleton interact by transmitting mutual contact force in their uncoordinated joint. The previous researches concerning the interactive problem in the sheet space structure system, are mostly confined to general static analysis. Moreover the interaction of sheet and metal skeleton is often simplified to completed coordination of displacement in common joints.

However the theory and trial researches show that the interaction of sheet and metal skeleton has great effect to the stability of the sheet space structure. But contact problem has always been a complex problem in theoretical researches and engineering designs. The constraint equations for a contact state are taken as the essential nonlinear behavior which usually controls the entire process of the deformation.

In this thesis, some of the concepts and principles of the stability are induced and elaborated, including mechanism, characteristic, classification, comparison of strength and stability; constraint equation of mechanical state for contact problem is described in detail, the traditional contact model is improved according to nonlinear stability analysis including large deformation and large slippage in the contact part.

The finite element method about structure stability analysis considering contact interactive problem is realized aim at the sheet space structure system. The effect of some key points -number of contact elements, contact stiffness, coefficient of friction, contact gap et al, on the solution result of the structure stability analysis is investigated, some useful results are obtained eventually.

On the basis of above researches, aiming at three trial models about the sheet space structure system, with the computational models considering contact interactive problem, the stability of the sheet space structure are analyzed. The computational results are compared with the experimental data. And it is shown that finite model put forward in this thesis can reflect the real stability state of the sheet space structure system, and satisfy the requirement of the engineering computation.

It is believed that the methods proposed in this dissertation will be useful to improve the structure of sheet space system, and provide a feasible method for the design of sheet space structure system.

Key words: stability analysis; critical load; sheet space structure; contact; Augmented Lagrangian method; finite element model

东南大学学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得东南大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

研究生签名：宋钟凌 日期：6.3.18

东南大学学位论文使用授权声明

东南大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆有权保留本人所送交学位论文的复印件和电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅，可以公布（包括刊登）论文的全部或部分内容。论文的公布（包括刊登）授权东南大学研究生院办理。

研究生签名：宋钟凌 导师签名：王川川 日期：6.3.18

第一章 绪论

§ 1.1 结构稳定分析的重要性

稳定问题是结构分析中的一个基本问题。结构的稳定分析，是结构工程设计中与强度计算同样重要的问题，结构设计中必须考虑稳定问题以防止结构发生失稳。如果对结构稳定问题没有足够的重视或考虑不周，就会导致结构丧失稳定，产生严重事故。由于习惯上对结构稳定性重视不够，因而，结构稳定性分析的重要性往往在结构失稳造成巨大的灾难和损失之后才被人们意识到^[1]。

例如，1940 年美国华盛顿州塔科马大桥因风振致毁，这一严重的桥梁事故，开始促使人们对悬索桥结构的空气动力稳定问题进行研究。1963 年罗马尼亚布加勒斯特市一座直径 93 米的国家经济展览馆穹顶网壳在近 1 米厚的积雪作用下失稳破坏。1980 年 30 米跨度的西柏林会议厅马鞍形混凝土薄壳突然失稳破坏，自此之后，空间结构的稳定问题成为人们研究的热点。

研究和试验发现^[2-7]，结构的失稳破坏形式和临界荷载与结构的几何非线性、材料非线性以及各种初始缺陷等有密切关系，由于各种因素的影响，单纯地用理论分析或数值计算很难得到可用于实际应用的临界荷载值，在结构设计过程中仍要采用较大的安全系数保证结构的稳定性。

因此，寻求一种比较全面、客观而又方便的确定结构稳定性的方法是结构设计中必须深入研究的课题，具有很重要的工程意义。

§ 1.2 结构稳定的研究方法及现状

结构稳定问题是一门古老而具有活力的学科。早在 1744 年，欧拉就发表了关于柱子稳定的研究，给出了基于小挠度理论的欧拉屈曲荷载。18 世纪，拉格朗日基于大变形理论，研究了柱子的后屈曲性能。20 世纪 30 年代，唐奈尔 (Donell)^[8] 等对轴压圆柱薄壳的失稳问题进行了研究。冯·卡门 (Von Kaiman) 和钱学森^[9] 论证了结构屈曲荷载理论与实验之间的差别在于结构的不稳定后屈曲形态，形成了考虑前屈曲变形的后屈曲形态研究的弹性稳定大挠度理论。柯依脱 (Koiter)^[10] 也研究了后屈曲问题，解决了分支点附近的初始后屈曲模态和后续平衡路径问题以及结构初始缺陷对屈曲的影响，建立了保守力作用下的弹性结构稳定性的初始后屈曲理论。60 年代初期，许多学者对不同荷载条件下的薄壳结构进行了研究，并得到了较为精确的结果。

在早期的结构非线性稳定性分析中，摄动法占有极其重要的地位。Morin 和 Connor^[11] 采用摄动法不仅得到了壳体的屈曲荷载和屈曲前的结构形态，而且还追踪到结构的后屈曲平衡路径。这一时期，网壳结构的稳定性分析大都引用关于连续薄壳的研究成果，这种方法对估算某些特定形式的网

壳的承载力起过重要作用。但是，连续化壳体理论本身并不完善，缺乏统一的理论模式，需要针对不同问题假定可能的失稳模态，并作出相应的近似假设；而且，反映不出不同部位采用不同规格杆件的真实情况。因而在理论验算的同时，很多时候还必须通过试验进一步测试。

随着电子计算机的广泛应用和计算技术的发展，非线性有限元逐渐成为结构稳定性分析的强有力手段，其中基于切线刚度矩阵的有限单元法应用最为广泛，可以考虑影响屈曲的各种因素。国内外许多学者在非线性问题的理论分析、平衡路径跟踪和试验研究等方面作了大量工作^[12-22]。由于结构失稳时发生状态突变，导致非线性迭代过程出现奇异和发散，研究者们在计算技术方面作了很多探索，提出了增量牛顿—拉普森法(Incremental New-Raphson Method)、人工弹簧法(Artificial Spring Method)、位移控制法(Displacement Control Method)、功能控制法(Work Control Method)和弧长法(Arc-Length Method)等许多方法，虽然各种方法都有不同程度的局限性，但普遍认为，弧长法具有较强的适应性。

近年来，结构稳定理论在空间结构中得到了更为广泛的应用，沈世钊教授^[3]采用大规模参数分析的方法，研究了包括球面网壳、柱面网壳、双曲扁网壳和鞍型网壳等各种网壳结构的稳定性，提出了一些实用计算公式。

空间结构的稳定性研究取得了许多新的进展，旧有的稳定方面的概念被重新定义，但很多问题仍然处于探讨阶段。

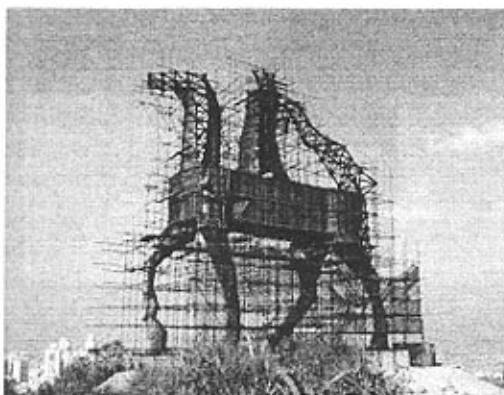
板片空间结构体系^[23-25,30-34]是一种新型组合空间结构体系，对其稳定性能的研究已经开展了一系列的工作，但就目前的研究来看，其稳定分析中还有许多问题有待进一步研究，比如，动力稳定问题；共同工作问题；结构的失效机理；强度破坏和失稳的判别法则等等。

§ 1.3 板片空间结构体系的介绍

板片空间结构体系是由薄壁金属骨架和轻质板材通过必要的连接组合而成，集结构承力、围护和装饰于一体，是一种新型的空间组合结构。

20世纪80年代，东南大学空间结构及形态研究所开始致力于板片空间结构体系的研究，曾连续三轮获得国家自然科学基金资助，共获国家级、部省级奖12项，并成为深圳市的重点科技推广项目，现正处于科技成果转化为生产力，形成产业化的过程。目前，这种结构体系已经用于30多项工程实践，其工程图片如图1.1所示。实践证明该结构体系性能良好。

板片空间结构中，板片与金属骨架共同工作，提高了结构的整体刚度，这正是板片结构区别于网架等其它普通空间结构的本质特征。



郑成功大型雕塑



苏州某大学体育馆屋盖

图 1.1 板片空间结构工程实践

§ 1.4 基于接触共同工作的板片结构稳定性研究

共同工作问题是组合类空间结构体系研究领域的一个热点同时又是难点，该问题的关键技术在于对共同工作问题的如何处理以及在数值求解手段上的具体实现。

目前，通常的处理方法是采用协调的有限元方法分析，此类方法假设板与梁之间在有连接的地方位移是完全协调的，而在非连接处只是竖向位移是协调的。但是，实际结构中，板片和骨架之间是存在接触和间隙两种状态的，尤其是在整个结构经历大变形屈曲阶段时，这两种状态更是交替出现异常复杂，而以上方法未能考虑到这种实际状态。因此，在板片结构分析中引入接触问题的研究是当前较为直接有效的方法，接触问题的引入可以较为理想地实现数值模型的精细化^[30]。

在文献[34]中，作者对板片空间结构体系的稳定性进行了分析与研究；文献[25]的作者在板片空间结构体系稳定分析中考虑了缺陷的影响，就板片空间结构体系的缺陷稳定问题进行了分析研究。但以上研究同样把共同工作问题简单处理为位移的完全协调问题。在文献[30]中，作者则对板片空间结构接触共同工作问题建立了非常精细的数值模型，详尽地分析了连接情况、接触状态、初始间隙等因素对板片空间结构的影响，得到了很有价值的结论。

在文献[31]中，作者在结构接触问题中考虑了大变形及摩擦问题，但没有涉及结构体系的稳定问题，而文献[50,54]中，作者在对拱结构受间接集中载荷下的稳定问题分析时引入了接触共同工作条件，并且在大型商用有限元软件 ABAQUS 中跟踪到了后屈曲阶段，证明了在结构稳定问题分析中引入接触条件的重要性和可行性以及数值模拟的可能性，但是该类方法没有推广到复杂的实际结构中去。

当然，在稳定分析中引入接触问题不容易，因为结构稳定问题本身具有高度的非线性（几何

非线性、材料非线性等)，而接触问题本质上又是状态非线性问题。在实际分析计算过程中，对于非线性过程的追踪（稳定问题中即为荷载一位移全过程的跟踪）必然涉及到三种非线性的耦合问题，即程序计算包括三层大的循环过程：最外层增量加载循环、中层塑性修正迭代和内层接触迭代。

从板片空间结构共同工作问题研究的现状分析，一方面，接触共同工作问题对结构变形和承载力的影响不可忽略；另一方面，过多的循环和迭代也将使得计算代价大大增加。如何解决这一矛盾，使研究具有实际的工程应用价值，而一旦考虑了接触共同工作问题，稳定问题的计算效率问题将显得更为突出。因此，对考虑接触共同工作的板片空间结构体系进行稳定性分析，解决数值分析中的各种问题有着重要的现实意义。

本文在基于共同工作的板片空间结构稳定问题分析中引入状态非线性，并在有限元模型方面进行初步研究，针对板片空间结构体系的特点，建立合理的接触模型，以较小的计算代价获得较好的计算效果。

§ 1.5 本文的主要研究工作

在板片空间结构体系共同工作问题已有的研究中，大都局限于一般强度问题的研究，而涉及到稳定性问题时又往往把共同作用简化为连接点处的位移耦合问题，对实际存在的接触问题不加考虑，考虑接触共同工作的板片结构稳定性的问题与分析，尚未见诸于文献。

如何合理有效地把接触问题引入到板片空间结构稳定分析中是本文研究的核心问题，通过有限元数值方法，建立精细、合理的有限元模型是处理该问题的关键技术。

在已有研究成果的基础上，本文的研究工作主要集中在以下几个方面：

1. 对稳定问题的基本概念和原理加以阐述，包括失稳机理、失稳特征、稳定问题的分类、稳定问题与强度问题的对比等，为稳定分析计算提供依据。
2. 针对稳定分析中的接触共同工作问题，本文采用改进的新型动态接触模型和更新搜索技术，把摩擦接触问题引入到有限元方法中。所提出的有限元模型能够应用于接触区域存在有限变形和较大滑移的情形。接触算法采用增广拉格朗日乘子法，给出的迭代公式能够适应几何大变形屈曲分析的需要，结合两个经典算例，分析接触区域对失稳临界荷载的影响。
3. 介绍板片空间结构体系共同工作问题的特点，并在非线性分析理论的基础上，给出空间梁单元、板壳元及接触单元的具体描述。
4. 研究设计了板片空间结构体系的有限元模型，分析各种因素对板片结构稳定性计算结果的影响，从而为研究分析基于接触共同工作板片空间结构的稳定问题提供了条件。
5. 针对三个板片空间结构的试验模型，采用本文介绍的数值计算方法和建立的有限元模型，对板

片空间结构进行非线性稳定计算和分析。通过对计算结果和试验结果的比较，表明板片空间结构稳定分析中考虑接触共同工作的合理性和必要性。

第二章 结构稳定性原理

在结构内力分析中主要研究的是平衡现象，也就是研究结构处于平衡状态时的力学特性以及内力分布规律，而结构稳定分析则是研究结构所处的一种状态。由于习惯上对稳定状态重视不够，在描述稳定状态时更多的是以失稳现象来反衬，从分析的方法来讲是一种逆分析。

本章对稳定的基本概念和原理加以阐述，包括稳定性的定义、稳定判别准则、稳定问题的分类、稳定问题与强度问题的对比以及影响失稳的因素和失稳全过程的分析方法，为稳定分析计算提供依据。

§ 2.1 稳定的概念

§ 2.1.1 稳定性的定义

稳定性的定义基本上都与一个系统对某些扰动的响应有关，都是用来刻画系统受扰动后的行为。从科学哲学范畴讲：“事物的存在方式或运动状态，不会因为扰动、起伏涨落而改变就谓之稳定。如果有任何一个或多个小的扰动，使系统的存在方式或运动状态发生了改变，而后，系统有能克服扰动自动回到未受扰动前的状态，此系统就是稳定的”^[3]。

在结构设计中，一个常用的稳定性概念是：设结构原来处于某个平衡状态，后来由于受到轻微的干扰而稍微偏离其原来位置。当干扰消失后，如果结构能够回到原来的平衡位置，则原来的平衡状态称为稳定平衡状态；如果结构继续偏离，不能回到原来位置，则原来的平衡状态称为不稳定平衡状态。结构由稳定平衡到不稳定平衡过渡的中间状态称之为随遇平衡状态。

图 2.1 显示了在文献中经常被引用于说明稳定性概念。显然，图 2.1(a)，当小球受到微小干扰后，小球暂时离开原平衡位置，其势能也相应增大，一旦撤去干扰，小球还可回复到原平衡位置，可见

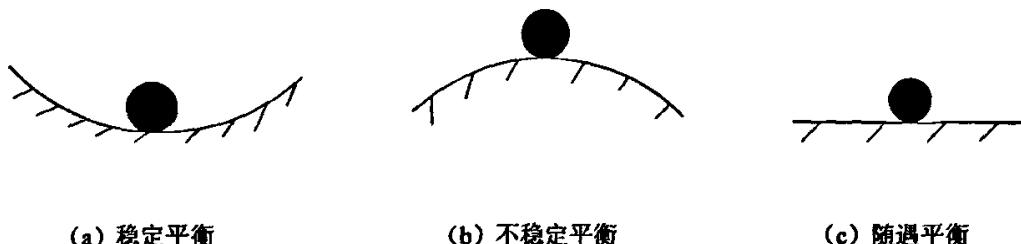


图 2.1 平衡状态的稳定性

这种平衡状态是稳定的；图 2.1(b)则不然，经干扰后小球不可能回复到原平衡位置，因此相应的平衡状态是不稳定的；图 2.1(c)所示为随遇平衡状态。

当结构原来的平衡状态由稳定平衡状态转变为不稳定平衡状态时，原来处于平衡状态的结构丧失其稳定性，简称为失稳。失稳的真正含义是几何突变，图 2.2 可以形象的说明失稳定义的物体，图中，位于山峰上的球处于临界的平衡状态，山谷内的球处于稳定的平衡状态。失稳是结构由平衡的临界状态向稳定的平衡状态运动的过程，研究失稳必须建立平衡稳定性判别准则。

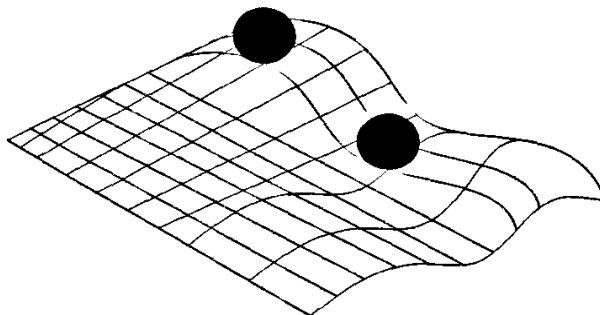


图 2.2 临界状态和稳定状态

§ 2.1.2 失稳的原因

关于失稳的原因，人们的研究是从最简单的细长杆的失稳着手的，Salvadori 和 Heller 在文献[40]中就细长杆的失稳原因作了如下解释：“一根细长柱子，在端部荷载作用下受压时要缩短，与此同时，荷载位置降低，荷载要降低位置的趋势是一个基本的自然规律。当这种趋势有不同的路线可以选择时，一个物理现象将按最容易的线路发生，这也是一个基本的自然规律。因而，对弯出去还是缩短的选择，就柱子而言，当荷载相当小时，缩短较容易些；而当荷载大到某一数值时，弯出去则较容易。换言之，当荷载达到临界值时，弯曲的办法比缩短的方式更容易使柱子的荷载位置降低。”自然界一切物理现象无一不是按照最容易的路径发生，这是存在失稳现象的客观原因。

大跨度和超大跨度空间结构体系的出现与发展，要求结构的设计越来越优化，即要求结构构件和材料充分发挥潜力，从而导致设计和制造的结构构件往往比较细长，截面相对较小，组成构件的板件宽而薄。这些构件在压力作用下呈现薄膜受力状态，很有可能失稳，此是存在失稳现象的主观原因。

§ 2.1.3 稳定判别准则

分析研究结构的平衡状态是否稳定，必须建立平衡稳定性的判别准则。

判别平衡稳定的根本准则从稳定性定义出发，即假设对处于平衡状态的体系施加一个或若干个微小扰动，当干扰去处后，如果体系回复到原来的平衡位置，则该平衡状态是稳定的；反之，若体系继续偏离，则该平衡状态就是不稳定的^[36-38]。

以上述最根本的准则为理论出发点，从随遇平衡的静力特征可得到判断平衡稳定性的静力准则；从初始缺陷对理想体系的影响特征可得到判断平衡稳定的初始缺陷准则；从不同平衡状态的能量特征可得到判断平衡稳定的能量准则；从稳定平衡和随遇平衡的动力特征可得到判断平衡稳定性的动力准则。相应于以上四种判断准则，稳定问题的计算方法为：静力平衡法（欧拉方法）、缺陷法、能量法、振动法。

1. 平衡法 (Equilibrium Method) 研究载荷增加到多大时，弹性系统可以出现不同的平衡状态，也即求解弹性系统的平衡路径的分支点所对应的载荷值（临界荷载）。
2. 缺陷法 (Imperfect Method) 认为完善而无缺陷的理想结构是不存在的，它是求解具有初始缺陷的结构的变形过大时的载荷值。
3. 能量法 (Energy Method) 基于拉格朗日定理：对于保守系统，如果总能量泛函是连续的，若总势能是完全的相对性极小且正定的，则平衡是稳定的。而定理的逆定理不成立，即拉格朗日定理仅是稳定性的充分条件，而稳定性的必要条件还没最一般地加以解决。目前，对相对广泛的一些系统，拉格朗日定理是能给出直接结果的唯一的一个普遍原理，且与系统的方程是否线性无关，所以它在数值方法中广泛应用。
4. 振动法 (Vibration Method) 以动力学的观点来研究稳定问题。假定体系由于某种原因（扰动）绕所讨论的平衡位置作微小自由振动，其振动频率与体系上的荷载有关。当荷载增大时，频率会变小。当荷载趋于临界值时，振动频率趋于零。

在以上四种经典方法中，平衡法和缺陷法在处理一些简单问题时可用来求精确解，但只能得到屈曲荷载，不能判断结构平衡状态的稳定性；而能量法可以求解精确解和屈曲荷载，也可以判断屈曲后平衡的稳定性，而且它是其中最适合用来求复杂问题的数值近似解的方法。这三种方法都属于静力学范畴，适用于保守系统。振动法由动力学观点出发，可用于非保守系统，然而由于系统的运动是由一组偏微分方程来描述的，因此其在数学上处理起来较困难。

§ 2.2 结构稳定性分析的能量准则

能量准则是当前被普遍采用的、分析保守系统下结构稳定性的准则，但是要阐述能量准则又不

得不回溯到对稳定所下的定义，事实上自从开始研究失稳现象以来对此就没有一个统一的定义，其关键在于将这种现象放在何种理论系统下研究，早先，一种比较能被广泛接受的解释是：失稳的发生意味着稳定平衡向不稳定平衡的转移。

辽伯诺夫(Lyapunov)对离散的力学系统动态平衡下了如下定义：如果在运动中发生一个足够小的以初始位移和速度表示的平衡扰动，系统的局部位移和速度的微小变化依然如初，那么平衡是稳定的。

现代的非线性稳定分析理论就是建立在上述平衡状态因任意微小扰动向邻近平衡状态转移过程中能量变换规律的基础之上的。简言之，就是通过考察结构在平衡状态时的总势能 Π 及相邻状态的总势能 $\Pi + \Delta \Pi$ ，由这两个状态势能的增量 $\Delta \Pi$ 来建立平衡准则和稳定性准则。

在非线性稳定分析理论中，一个常用且很方便的做法是将系统由一组经过定义的广义坐标来表示。

广义坐标是对自然坐标的一种变换，一般来说，是线性变换。这样，结构的性状就可以在广义坐标空间中研究^[36]。

一个广义弹性保守系统可由 N 个广义坐标 q_i 和荷载参变量 λ 描述，一组广义坐标 q_i ($i=1, 2, \dots, N$) 可以完全定义系统的平衡图形。 δq_i 为广义坐标 q_i 满足边界条件下任意可能的变分，而变量 λ 则代表外荷载的量值，通常称为荷载参数。它与不变的参考荷载向量 p 一起构成了作用于系统的荷载向量。

对应于每个 λ 值，系统具有相应的总势能。总势能是由内力势能，即应变势能和外力势能组成。于是，系统的总势能泛函为

$$\Pi = \Pi(q_i, \lambda) \quad (2.1)$$

系统平衡的必要和充分条件以总势能驻值原理来表示。根据这个原理，总势能的变分为零

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.2)$$

即意味着存在 N 个平衡方程

$$\frac{\partial\Pi}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (2.3)$$

由上式可解出定义平衡图形的广义坐标 q_i ，然而，关于平衡稳定的概念则必须与总势能泛函的二阶和更高阶变分相联系。

现考虑一个任意相邻系统的平衡状态 F ， F 位于式 (2.3) 决定的平衡路线上且荷载参数 λ_p 为常量。于是，在平衡状态 Q 的邻域 $Q + \delta Q$ 内，系统相应的总势能为

$$\Pi_F = \Pi(q_i + \delta q_i, \lambda_F) \quad (2.4)$$

势能 Π_F 可想象为在荷载一位移空间中通过 F 的一个曲面。系统位于 F 点的势能具有相对极小的充分条件是，由式 (2.4) 所表示的能量泛函的二阶变分是正定的，这个条件也是稳定的充分条件。但是倘若能量泛函的二阶变分是负定的、半负定或不定的，即表示二阶变分的二次型是负值，这样就排除了势能相对极小和稳定的可能性。

然而，当二阶变分是半正定的且二次型可能为零，就产生了另一种情况。这类平衡状态将被称为第一临界状态。显然，系统处于平衡临界态时的稳定行列式为零，即

$$\det \left| \frac{\partial^2 \Pi_F}{\partial q_i^2} \right| = 0 \quad (2.5)$$

现仍继续考察位于荷载一位移空间中的任意平衡状态 F ，亦即系统平衡状态 Q 的任意邻近平衡状态。结构体系在平衡状态 F 的总势能展开成关于平衡状态 Q 的泰勒级数

$$\Pi(q_i + \delta q_i, \lambda_F) = \Pi(q_i, \lambda) + \delta \Pi + \delta^2 \Pi + \delta^3 \Pi + \delta^4 \Pi + \dots \quad (2.6)$$

而结构体系在平衡状态与其临近状态的总势能能量差，亦即由广义坐标的变分 δq_i 和荷载参数的变分 $\delta \lambda$ 所引起的总势能增量

$$\Delta \Pi = \Pi(q_i + \delta q_i, \lambda_F) - \Pi(q_i, \lambda) = \delta \Pi + \delta^2 \Pi + \delta^3 \Pi + \delta^4 \Pi + \dots \quad (2.7)$$

因处于平衡状态时系统总势能的一阶变分 $\delta \Pi$ 为零，上式可改写为

$$\Delta \Pi = \delta^2 \Pi + \delta^3 \Pi + \delta^4 \Pi + \dots \quad (2.8)$$

其中

$$\delta^2 \Pi = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i^2} \delta^2 q_i + 2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial \lambda} \delta q_i \delta \lambda + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \lambda^2} \delta^2 \lambda \right)$$

$$\delta^3 \Pi = \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial q_i^3} \delta^3 q_i + 3 \frac{\partial^3 \Pi}{\partial q_i^2 \partial \lambda} \delta^2 q_i \delta \lambda + 3 \frac{\partial^3 \Pi}{\partial q_i \partial \lambda^2} \delta q_i \delta^2 \lambda + \frac{\partial^3 \Pi}{\partial \lambda^3} \delta^3 \lambda \right) \quad (2.9)$$

$$\delta^4 \Pi = \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 \Pi}{\partial q_i^4} \delta^4 q_i + 4 \frac{\partial^4 \Pi}{\partial q_i^3 \partial \lambda} \delta^3 q_i \delta \lambda + 6 \frac{\partial^4 \Pi}{\partial q_i^2 \partial \lambda^2} \delta^2 q_i \delta^2 \lambda + 4 \frac{\partial^4 \Pi}{\partial q_i \partial \lambda^3} \delta q_i \delta^3 \lambda + \frac{\partial^4 \Pi}{\partial \lambda^4} \delta^4 \lambda \right)$$

式(2.8)所示总势能增量表示了结构系统在某平衡状态向其任意邻近平衡状态转移过程中能量的变换规律。稍进一步考察就不难发现，如果由式 (2.1)的表达式来表示系统的总势能，当荷载参变量是线性时，那么在式(2.9)中涉及到总势能关于荷载参数 λ 的一阶、二阶及高阶导数均应为零。所以，对于只具有简单荷载工况的系统，式(2.9)就具有更为简单的形式，即

$$\begin{aligned}\delta^2\Pi &= \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i^2} \delta^2 q_i \\ \delta^3\Pi &= \frac{1}{3!} \frac{\partial^3\Pi}{\partial q_i^3} \delta^3 q_i \\ \delta^4\Pi &= \frac{1}{4!} \frac{\partial^4\Pi}{\partial q_i^4} \delta^4 q_i\end{aligned}\quad (2.10)$$

现在可以想象在 $N + \lambda$ 维荷载一位移空间中的平衡图形，来具体地分析平衡点任意邻近的平衡状态。由平衡状态向其邻近平衡状态转移过程中的总势能增量由式(2.8)表示，显然，式中的各项都显著地小于它以前的各项，这样势能驻值的形态决定于势能二阶变分的符号是显而易见的，如果二阶变分是正的，也就是二阶变分是正定的，则决定了由式(2.8)所表示的势能增量也是正的。它说明了结构系统从平衡状态转移到其任意邻近的平衡状态时它的总势能增加了，也表明结构系统位于原平衡图形时总势能量相对极小的，所以平衡是稳定的。反之，如果二阶变分是负的，则平衡是不稳定的，因为结构系统由平衡状态向其邻近状态下发生平衡转移时，系统总势能增量为负。系统总势能增量的符号决定于总势能二阶变分的符号，总势能增量为负，表明系统在平衡图形中的任意邻近状态时总势能更小，所以在平衡图形中系统的总势能并非相对极小。由此可见，结构系统的平衡稳定性取决于总势能二阶变分的符号。

进一步分析，如果总势能的二阶变分 $\delta^2\Pi$ 等于零，则系统处于临界状态。于是需进一步考察总势能的三阶变分 $\delta^3\Pi$ ，以便确定平衡状态的性状，如果三阶变分 $\delta^3\Pi$ 不等于零，不论是正的或是负的，系统总势能并非相对极小值，故平衡是不稳定的。但若三阶变分 $\delta^3\Pi$ 等于零，则需进一步研究总势能的四阶变分 $\delta^4\Pi$ ，如四阶变分 $\delta^4\Pi$ 大于零，则位于临界点处的系统总势能为局部极小，平衡无疑是稳定的，反之，若 $\delta^4\Pi$ 小于零，则临界点的平衡是不稳定的。最后，若四阶变分等于零，那么需进一步研究势能变分的更高阶项。

由式(2.5)所定义的稳定行列式，不仅可用于判断平衡的临界状态，也可用于平衡稳定的判断。当将势能的二次型对角化后，稳定行列式可表示为

$$\det \left| \frac{\partial^2\Pi}{\partial q_i^2} \right| = \prod_{i=1}^N d_i \quad (2.11)$$

式中 d_i 为稳定系数。

利用稳定系数可以很方便地讨论系统在平衡图形上的平衡状态。如果所有的 d_i 都大于零，则势

能的二次型是正定的且在平衡图形上系统的平衡是稳定的。如存在任意一个 d_i 小于零，则势能的二次型将是负值且在平衡图形上系统处于不稳定平衡。若系统处于平衡的临界状态，则至少有一个稳定系数为零，若只有一个稳定系数为零，则系统所处的平衡临界状态属单(离散)临界点。如同时有两个或更多个稳定系数为零，则属重临界点。

在采用有限单元法分析结构系统，例如板片空间结构时，需将结构进行离散，把它视为有限个单元的集合体。在不考虑任何初始缺陷时单元总势能的泛函，可表示为

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_v \varepsilon^T D \varepsilon dv - \int_s u^T Z dv - \int_s u^T \bar{z} ds \quad (2.12)$$

其中 u 为单元的位移向量，它可以用单元节点的位移 u_e 来表示，即

$$u = a u_e$$

ε 为单元的应变向量，它也可以用单元节点位移 u_e 来表示，即

$$\varepsilon = (B_L + B_{NL}) u_e$$

单元的应变已考虑了线性和非线性的影响，将单元的应变表达式代入总势能的泛函中，得以节点位移为未知数的能量表达式。而有限元集合体的总势能泛函

$$\Pi = \sum_e^M \Pi_e$$

于是，系统的总势能的一阶变分为

$$\delta \Pi = K_T U - P \quad (2.13)$$

其中， K_T 是结构系统在平衡位置 U 时的切线刚度矩阵。

结构系统总势能的二阶变分 $\delta^2 \Pi$ 可表示为位移变分的二次型

$$\delta^2 \Pi = \delta(\delta \Pi) = \delta U^T K_T \delta U \quad (2.14)$$

前面已经阐明结构系统总势能二阶变分的符号决定了系统平衡的稳定性，如果结构系统处于稳定的平衡状态，则对于任意向量 $\delta U \neq 0$ ，二次型

$$\delta^2 \Pi = \delta U^T K_T \delta U > 0$$

那么，这个二次型就是正定的二次型，正定的二次型对应的对称矩阵 K_T 是正定的。由此可得到如下结论：

- (1) 对称矩阵 K_T 的特征值都大于零；

(2) 对称矩阵 K_T 的系数行列式大于零, 即

$$\det|K_T| > 0$$

结构平衡的稳定与否可以由上述结论作为判断的充分必要条件。假如结构处于不稳定的平衡状态, 则对于任意向量 $\delta U \neq 0$, 二次型

$$\delta^2 \Pi = \delta U^T K_T \delta U < 0$$

这个二次型就是负定的二次型。

结构系统平衡临界状态就是二次型 $\delta^2 \Pi = \delta U^T K_T \delta U$ 为正定时的极限状态, 二次型为正定的极限条件, 是它对应的对称矩阵 K_T 的系数行列式为零。由此可以认为, 所谓临界荷载就是二次型为非正定时的最低荷载^[4]。

§ 2.3 稳定问题的分类

稳定问题的分类是根据失稳类型的不同加以区分的, 对失稳类型的不同理解导致对稳定问题的分类也不尽相同。文献[38]将稳定问题分为三类: 平衡分岔失稳(第一类失稳); 极值点失稳(第二类失稳); 跃越失稳。文献[39]将稳定问题分为具有平衡分岔的稳定问题(分支点失稳)和无平衡分岔的稳定问题(极值点失稳)。文献[4]则根据网壳失稳的特征将失稳分为两类: 一类是极值点屈曲, 一类是分枝点屈曲。值得注意的是在文献[31]中, 作者在分析大型复杂空间结构稳定性时, 提出了非线性分叉失稳的概念。

由以上的分类可见, 对结构的失稳类型还没有统一的认识。然而, 区分结构失稳类型的性质十分必要, 这样才有可能正确评价结构的稳定性。综合前人对稳定问题的分类, 本文将稳定问题分为如下四类:

一、 分枝点失稳

分枝点失稳也叫平衡分岔失稳。其基本特征是在稳定平衡的基本状态附近存在着另一个相邻的平衡状态。在分枝点处将发生平衡状态的转移, 即由原来的平衡状态转换到不同性质的平衡状态, 从而导致结构的应力分布和变形发生突变。

分枝点失稳主要可分为不对称失稳、稳定对称失稳和不稳定对称失稳, 如图 2.3 a、b、c。不对称的分枝点失稳更普遍于其他两种分枝点失稳形态。与基本路径相交的那条路线通常被称为后屈曲路线, 后屈曲路线具有非零斜率的分枝点是不对称的。在一些并不经常发生的特殊情况下, 后屈曲路线的斜率为零, 这时分枝点是对称的。至于稳定状态则取决于分枝点处曲率的正负, 实际上, 结构通常是沿着最不稳定的后屈曲路线前进, 因为结构总是试图达到势能最小。

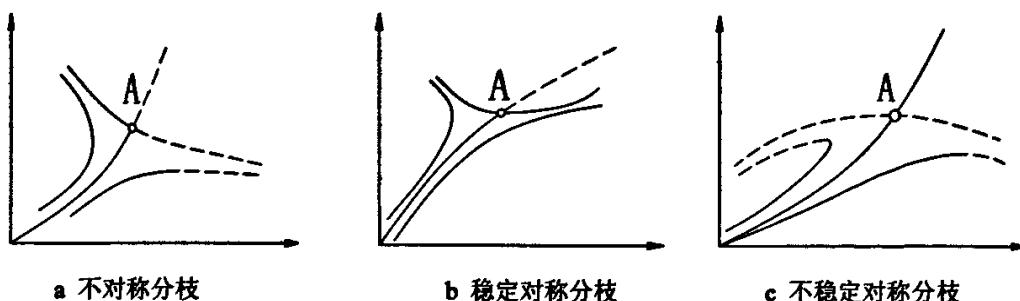


图 2.3 分岔屈曲类型

二、 极值点失稳

所谓极值点失稳是在屈曲过程中，仅一条平衡路径，结构刚度随变形的增加逐渐减小，直到临界点处为零。在极值点失稳过程中不出现分枝点，即平衡状态不发生质的改变。整个过程只是平衡形态的数量发生变化，在极值点处存在最大荷载值，当达到最大荷载后，变形迅速增加，而荷载下降。偏心压杆（图 2.4）失稳就属于极值点失稳。实际工程结构总是在不同程度上存在各种各样的缺陷，对于缺陷敏感的结构，较小的几何缺陷可能使分枝失稳转化为极值失稳。

三、 跳跃失稳

结构在静载作用下，当载荷增大到失稳点时，平衡状态发生一明显跳跃，突然过渡到另一具有较大位移的平衡状态，这类失稳现象称为跳跃失稳（Snap-through buckling）。它既无平衡分岔点，又无极值点，但和不稳定分岔失稳又有某些相似的现象，都在丧失稳定平衡之后又跳跃到另一个稳定平衡状态。受横向均布压力的球面扁壳或拱结构（如图 2.5）的失稳属于跳跃失稳。

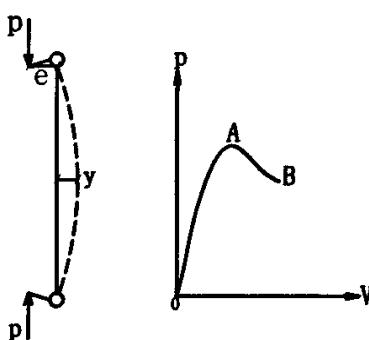


图 2.4 极值点失稳

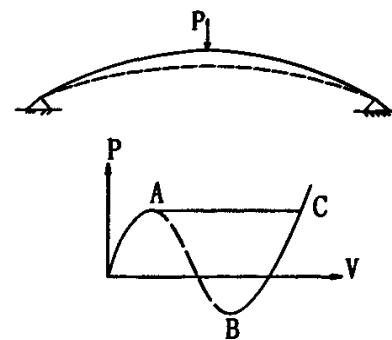


图 2.5 跳跃失稳

四、 非线性分叉失稳

非线性分叉失稳的基本特征是：通过非线性全过程的分析，存在有一条基本路径，在基本路径中可能存在一个或多个分叉点，而在每个分叉点可能有一条或多条平衡路径，每条路径(包括基本路

径)又分别是极值点失稳或跳跃失稳。

但是,要想得到结构的分叉路径不容易,必须适当的引入相应的扰动,并且扰动量的大小、方向和作用位置要取得合适,不同的扰动可能得到截然不同的分叉路径。

分析非线性分叉失稳的基本特征,可以说明非线性分叉失稳最有可能发生在极其对称的结构上(几何、荷载均对称),对此类结构进行非线性分析当进行到分叉点时会有不同的选择,如果不施加任何扰动,则将沿基本路径前进;如果加扰动则可使其进入相应的分叉路径。文献[33]采用位移扰动法对单元铰接穹顶结构进行了非线性路径的跟踪(图2.6)。

以上是按照结构在增量加载过程中平衡形式的性质对稳定性问题加以分类,当然还可以根据其它原则对其进行分类,此处不再赘述。

分枝点和极值点统称为临界点(critical point),与临界点对应的荷载均为临界荷载(critical load),与临界点对应的平衡位形称为屈曲构形(buckling configuration)。在临界状态之前的平衡状态称为前屈曲平衡状态(pre-buckling equilibrium configuration),越过临界状态之后的平衡状态称为后屈曲平衡状态(post-buckling equilibrium configuration)。

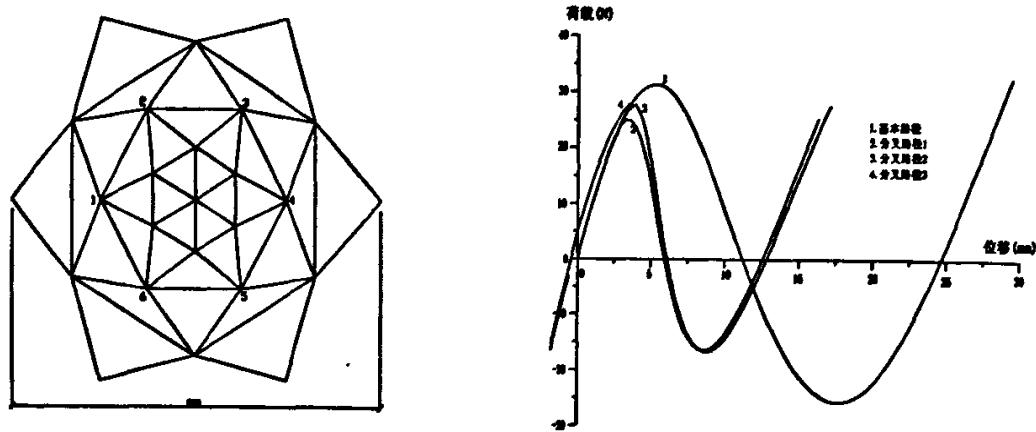


图 2.6 非线性分叉失稳

§ 2.4 稳定问题与强度问题的关系

稳定性是结构或构件在荷载作用下保持原有平衡状态的能力,其能力的丧失表现为失稳;强度是结构或构件在荷载作用下抵抗材料破坏的能力,其能力的丧失体现为局部材料的破坏。目前,大多学者认为二者存在以下区别和联系。

1. 研究的目的

研究稳定问题的目的是要找出与临界荷载对应的临界状态，稳定计算必须根据其变形过程来进行。一般认为结构一旦发生失稳，只是几何突变，并不伴随极大的应力改变。但是，必须清楚由于应变能的形式发生了改变，应力的形式也可能由薄膜应力转化为弯曲应力。

强度问题中，是要找出结构在稳定的平衡状态下的最大应力，故为应力问题。结构强度的研究可以保证实际的最大应力不超过材料的某一强度指标。

2. 计算理论

稳定问题本质上是非线性力学问题，因此稳定问题必须以非线性的二阶理论甚或三阶理论来建立其计算理论；而大多数强度问题以一阶理论来建立力的平衡条件已具有足够的精度，只有少数特殊的结构，例如，悬索结构的强度需采用二阶分析。

非线性理论的研究与发展使现代稳定问题具有不同于强度问题、也有区别于早先的线性稳定理论的特点：1) 必须考虑变形对作用效应的影响；2) 静定和超静定结构的区分失去意义；3) 叠加原理不再适用^[39]。

3. 破坏形式

稳定破坏是结构或构件刚度退化之后的几何突变，破坏时伴随能量释放和转换，没有明显征兆，呈现脆性破坏的特征，这也是失稳的特点和标志。强度破坏是材料在外界作用下达到其极限强度而失效，是应力在量上的积累，破坏前一般会有先兆，属延性破坏范畴。

4. 初始缺陷的影响

初始缺陷（几何缺陷、物理缺陷等）对结构或构件的稳定性和强度都有影响，只不过对不同的结构形式（薄膜应力为主的结构抑或弯曲应力为主的结构）或不同的材料组成（脆性材料抑或延性材料），初始缺陷对稳定性和强度的影响有所侧重而已。

稳定性和强度是结构或构件自身能力的两个方面，二者不能割裂，失稳和强度破坏则不过是在不同案例中显示出来的不同的倾向性。显然，在研究方法上，就要求把失稳和强度破坏结合起来进行研究，建立起统一的关于结构失效机理的理论框架，但是这方面的研究工作还远远不够。

第三章 板片结构体系接触共同工作问题的力学分析

§ 3.1 板片空间结构体系的特点

板片空间结构体系是一种新型组合类空间结构，是由厚度很薄的板片和金属骨架或完全由板片通过特定方法组合而成（图 3.1）。

板片空间结构研究的一个重要课题就是板片空间结构体系的共同工作问题。本质上，共同工作问题就是不同界面之间的接触问题。在这种结构体系中，板片与骨架之间在有限个点上是靠螺钉或焊接进行连接的，而在大部分边界上则是通过接触来传递作用力的，连接件的安置及板片与金属骨架间的接触情况是影响其共同工作程度的主要因素。研究此类接触问题，对于深入研究板片与骨架共同工作的机理、板片空间结构的稳定性等有理论和实际应用价值 [41]。

该课题的研究已取得相当多的成果，在文献[34]中，作者对板片空间结构体系的非线性稳定进行了分析研究；在文献[30]中，作者则主要研究了弹塑性摩擦接触问题的优化计算模型及其在板片空间结构中的应用；在文献[31]中，作者针对大型复杂组合结构接触共同工作问题进行了强度问题的研究。

但是，以上针对接触共同工作问题的研究大多侧重于有限变形及小滑移接触问题的研究，而对于实际的板片空间结构而言，结构在承重过程中往往要经历大变形并伴随较大的滑移运动。因此，在实际结构设计中，需要考虑大变形、大滑移接触问题。

为了解决上述问题，在已有研究成果的基础上，本文重点研究空间弹塑性大变形、大滑移摩擦接触问题。

§ 3.2 大变形及大滑移接触问题

以往的有限元方法分析接触问题时多采用点对接触、面对接触模型^[44]。点对接触模型假设物体接触时力的传递是通过具有相同或相近坐标的接触面上的点对来实现的，以此建立接触边界的力学模型，该方法理论简单、直观。但是，点对接触模型无法适应大变形、大滑移情况，尤其是刚体运

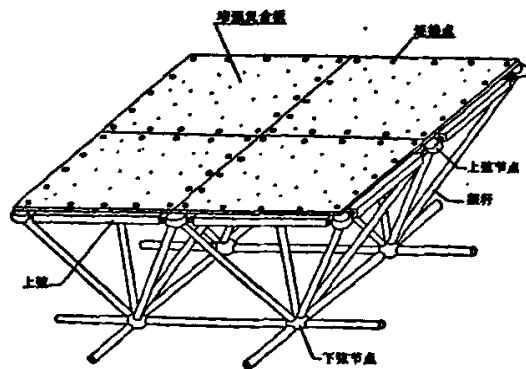


图 3.1 板片空间结构体系组合示意图（局部）

动和几何突变(稳定问题)。

而面对接触模型则克服了点对接触模型的上述缺点,能支持有大滑动和摩擦的大变形接触问题,但是,空间面对接触单元需要较多的四节点或更多的四边形等参单元,而每个节点又有六个自由度,如果用于模拟多自由度的板片空间空间结构,其计算量将是惊人的。

那么,如何解决以上存在的问题呢?实际上,国内外已有很多学者对此类问题产生了兴趣,并提出了各种各样的力学模型和有限元模型^[48,50-54]。但是,应用到实际工程中的并不多见。

所以,如果把接触问题中的点对接触模型和面对接触模型结合起来,取利祛弊、扬长避短,那么研究工作将具有理论价值和实际工程意义,这也是本文需要重点解决的问题。

§ 3.3 接触问题的描述

§ 3.3.1 接触面与接触条件

为了叙述方便,假定整个接触体系由两个物体组成(图 3.2a),分别记为 $\Omega^{(1)}$ 和 $\Omega^{(2)}$,
 $\Omega = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)}$,虽然接触也可以发生在一个物体的几个部分或多个物体之间,但原理是一样的。
又记 $\Gamma^{(1)}$ 和 $\Gamma^{(2)}$ 分别为 $\Omega^{(1)}$ 和 $\Omega^{(2)}$ 的边界,边界的外法向单位向量记为 n ,切向单位向量记为 τ ,
 n 和 τ 组成了边界上一点的局部坐标系(图 3.2b)。

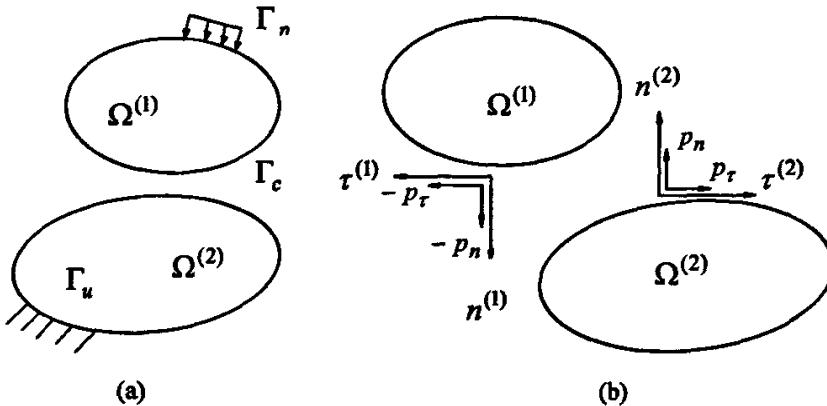


图 3.2 接触体系模型

两个物体间的初始接触面可以是一个或数个点,也可以是一条或数条曲线—通称为接触面,两个接触面之间对应的接触点组成的节点对称之为接触点对。

如果物体间分别有足够的支撑存在,即体系中无刚体运动,则初始接触面允许脱开或有间隙,此时接触力为零,只是荷载达到一定程度时,才发生接触。一般来说,接触面将依赖于加载方式、加载水准、接触材料和接触面性质。

物体的边界可以区分为给定外力的边界 Γ_p^α , 给定位移的边界 Γ_u^α 和可能发生接触的边界 Γ_c^α ,

对于图 3.1 所示体系, 上标 $\alpha = 1, 2$, 指两个可能发生接触的物体。

体系 Ω 总边界条件 Γ 可写成:

$$\Gamma = \Gamma_c + \Gamma_p^{(1)} + \Gamma_p^{(2)} + \Gamma_u^{(1)} + \Gamma_u^{(2)} \quad (3.1)$$

我们假定整个系统处于小变形状态下, 位于已接触面和可能接触面上的两条边界线处处相切, 因此在变形过程中, 体系各部分的几何形状基本保持不变, 可能接触面上的间隙一定很小, 接触面两侧几乎处处满足:

$$n^{(1)} = -n^{(2)}, \tau^{(1)} = -\tau^{(2)} \quad (3.2)$$

其中, $n^{(\alpha)}, \tau^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) 分别为两物体的外法向单位矢量和切向单位矢量, 以下均以 $n^{(2)}, \tau^{(2)}$ 作为边界 Γ_c 上一点的局部坐标系, 在不混淆的前提下记为 n, τ 。

Γ_c 上一点的接触力可分解为法向和切向两个分量, 记为 P_n 和 P_τ , 两者满足 Coulmb 摩擦定律

$$|P_\tau| \leq -\mu P_n \quad (3.3)$$

其中, μ 为摩擦系数。

法向接触力应满足不受拉的条件, 即

$$P_n \leq 0 \quad (3.4)$$

§ 3.3.2 接触位移与接触力的关系

接触位移 u 可表示为

$$u = \{u_n, u_\tau\}^T = \{u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + \alpha_0, u_\tau^{(1)} - u_\tau^{(2)}\}^T \quad (3.5)$$

这种定义与接触力和局部坐标系定义是一致的, 其中 α_0 为接触初始间隙。

接触位移可分解为弹性相对位移 u^e 和滑动相对位移 u^s , 前者是发生接触但未发生滑动时的相对位移。即

$$u = u^e + u^s \quad (3.6)$$

对于 u^e , 由 Hooke 定律, 可得到与接触力 $P_c = \{P_n, P_\tau\}^T$ 之间的关系为

$$P_c = D \cdot u^e \quad (3.7)$$

式中 D 为接触面弹性矩阵

$$D = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_t \end{bmatrix}$$

其中, E_n, E_t 分别是接触面法向弹性模量和切向弹性模量, 由试验确定。

由 (3.6)、(3.7) 可得

$$P_c = D(u - u^*) \quad (3.8)$$

对于弹性相对位移 u^e , 仅当物体发生接触时存在, 若未接触或已脱开时, u^e 自动为 0, 此时法向力也为 0, 当物体发生切向接触滑动之后, 滑动量随相对位移增加而增加, 但切向弹性相对位移不再改变, 库仑摩擦定律自动满足。

§ 3.4 空间接触问题

§ 3.4.1 空间接触问题的描述

对于空间问题, 接触边界 Γ_c 上任一点的滑移切线向量 τ 可在切平面内分解为两个分量的直角坐标系 τ_1, τ_2 , 见图 3.3。空间接触模型如图 3.4 所示, 其中主动接触单元与被动接触面在 P 点接触, 其法向为被动接触面的法线方向 n 。

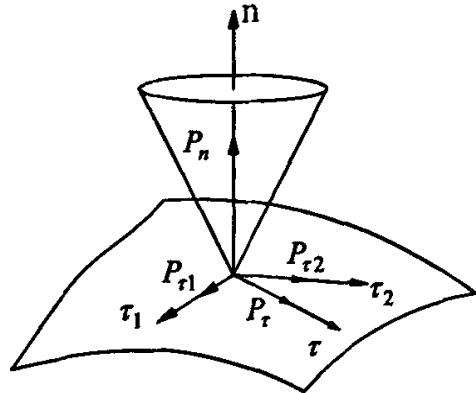


图 3.3 空间接触问题

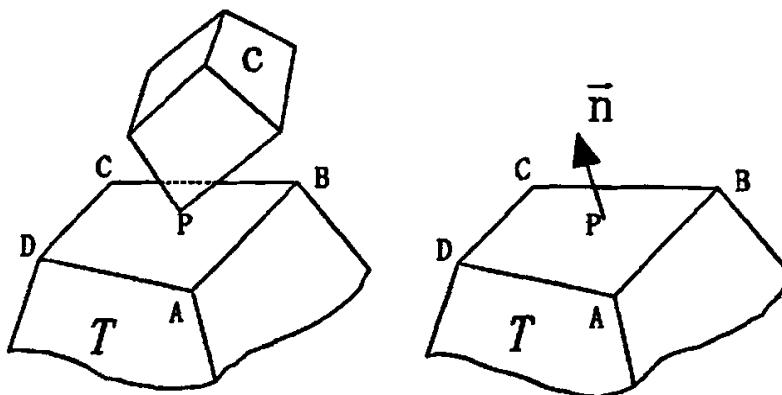


图 3.4 空间接触模型

此时在 Γ_c 任一点的接触力 P_c 和相对位移 u 可写成

$$P_c = \{P_n, P_{\tau_1}, P_{\tau_2}\}^T \quad (3.9)$$

$$u = \begin{Bmatrix} u_n \\ u_{\tau_1} \\ u_{\tau_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + \alpha_0 \\ u_{\tau_1}^{(1)} - u_{\tau_1}^{(2)} \\ u_{\tau_2}^{(1)} - u_{\tau_2}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

对于点对接触模型来说, 由于接触单元为两节点单元, 在小滑移、小变形的假定下接触面之间的两条边界线处处相切。因此在变形过程中, 接触区域的位移是协调一致的, 接触面两侧的节点对处处满足:

$$n^{(1)} = -n^{(2)}, \tau_1^{(1)} = -\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(1)} = -\tau_2^{(2)} \quad (3.11)$$

其中, $n^{(\alpha)}, \tau_1^{(\alpha)}, \tau_2^{(\alpha)}$ ($\alpha=1,2$) 分别为两物体的外法向单位矢量和两个切向单位矢量。

但是, 这个设定在大滑移、大变形的情况下不完全适用, 为研究问题的需要, 必须对接触边界的接触点对即接触边界作一定的处理。

为方便描述空间接触问题, 以下均以 $n^{(2)}, \tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}$ 作为边界 Γ_c 上一点的局部坐标系, 在不混淆的前提下记为 n, τ_1, τ_2 。

§ 3.4.2 滑动条件、滑动法则和摩擦定律^[30,31]

大多接触问题都伴随着摩擦问题, 由于物体间的滑动方向不能保持在一个平面内, 因此空间接触摩擦问题和摩擦定律是非线性的。

在可能发生摩擦接触边界 Γ_c 上, 可以采用可考虑界面弱抗拉强度的 Mohr-Coulomb 准则与无塑性膨胀的非关联流动法则, 如图 3.5 所示。界面的屈服函数 Φ 为

$$\Phi(P_n, P_\tau, \sigma_t) = \begin{cases} |P_\tau| - \mu P_n - C_0, & P_n > -\sigma_t \\ P_n + \sigma_t, & P_n \leq -\sigma_t \end{cases} \quad (3.12)$$

式中, μ, C_0, σ_t 分别是界面的摩擦系数, 粘结力和界面的抗拉强度。

在两个接触面中, 其无外加荷载时的粘结力 $C_0 \rightarrow 0$, 两个界面之间的抗拉强度也因此趋于 0。所以由此可以得到接触系统滑动状态约束方程:

$$\Phi(P_n, P_\tau) = |P_\tau| - \mu P_n \leq 0 \quad (3.13)$$

$$\dot{u}_\tau = \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial P_\tau}(P_n, P_\tau) \quad (3.14)$$

$$\zeta \geq 0 \quad (3.15)$$

$$\zeta \Phi = 0 \quad (3.16)$$

其中，式 (3.14) 为无膨胀非关联流动法则， ζ 为滑动比例因子或参量，代表滑动量的大小。

$\frac{\partial \Phi}{\partial P_\tau}(P_n, P_\tau)$ 表示滑动只能沿界面切向发生。式 (3.16) 称为接触界面上的滑移互补约束条件。

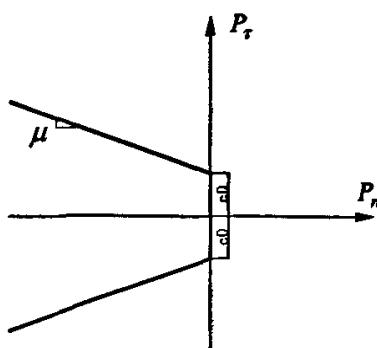


图 3.5 接触力空间

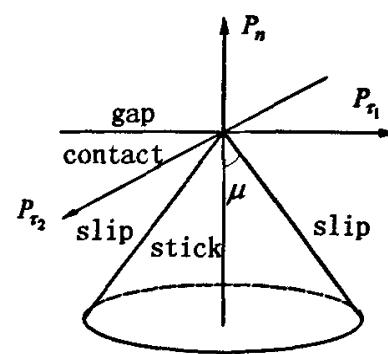


图 3.6 库仑圆锥体

在空间接触问题中， $\Phi(P_n, P_\tau) = 0$ 表示一个滑动锥体，如图 3.6 所示。 $\Phi(P_n, P_\tau) < 0$ ，接触力状态处于 $\Phi(P_n, P_\tau) = 0$ 所围区域之内，虽发生接触，但未滑动； $\Phi(P_n, P_\tau) > 0$ ，状态点处于区域边界，物体可能发生切向滑动或脱开。可见，式 (3.13) 表示了接触边界任一点是否接触和滑动的状态，称之为滑动条件。

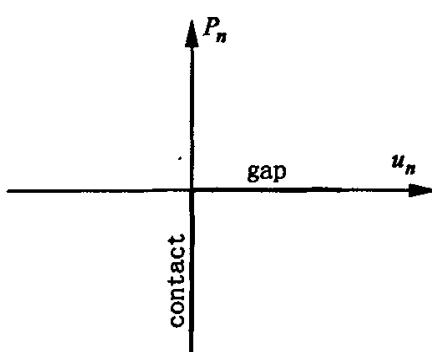


图 3.7 接触条件

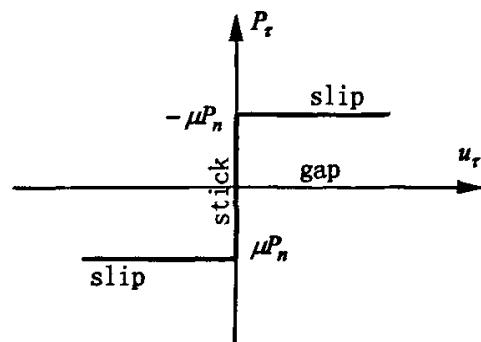


图 3.8 滑动条件

图 3.7—3.8 表示了以上所描述的接触条件与滑动条件。

图 3.6 为库仑圆锥体，在图中可以清楚地看出不同区域的接触状态。

图 3.7 表示接触状态，分离： $u_n > 0, P_n = 0$ ；接触： $u_n = 0, P_n < 0$ 。

图 3.8 表示在接触时，即 $u_n = 0, P_n < 0$ 时的滑动条件，若 $|P_\tau| < -\mu P_n, u_\tau = 0$ ，不发生滑动；

若 $|P_\tau| = -\mu P_n, \text{sign}(P_\tau u_\tau) \geq 0$ ，发生滑动。

§ 3.5 动态点对接触模型

正如前文所述，点对接触模型因其计算工作量较小，在分析多自由度结构时有相当大的优势，面对接触模型因其单元适应性较强，在分析复杂接触问题方面有优越性。板片空间结构是典型的多自由度结构，因此，接触共同工作问题中要引入接触模型，易选用点对接触模型，然而，点对接触模型较难适应大变形、大滑移摩擦接触问题，所以，必须对原有的点对接触模型加以改进，使其能够比较合理地模拟板片空间结构在受力变形过程中的接触状态。

§ 3.5.1 传统点对接触模型的缺陷

如果在结构极限承载力分析中采用传统点对接触模型，当结构进入塑性变形阶段，变形增大，而且在摩擦系数较小的情况下，结构接触界面的相对滑移量增加，这样就会导致两种现象：“伪脱开”现象（见图 3.9）和“伪穿透”现象（见图 3.10）。

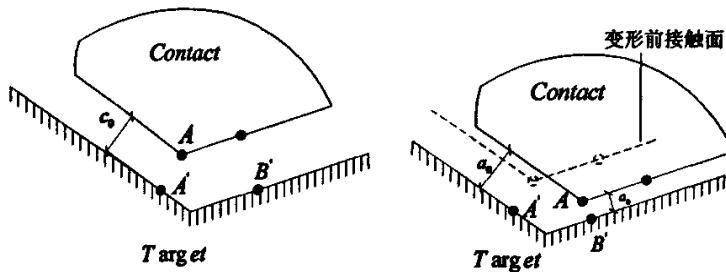


图 3.9 伪脱开

所谓“伪脱开”现象，根据图 3.9 显示，在结构变形滑移之前，接触点对为 $A-A'$ ，其初始接触间隙为 c_0 ，在变形后，按照传统点对接触设定，接触点保持不变，所以根据被动接触面的法线方向，可知， $A-A'$ 的法向距离为 a_0 ，与初始间隙 c_0 相比， $a_0 > c_0$ ，这似乎说明主动接触体与被动接触

体脱开了，而事实上， A 和 B' 点靠得更近，其法向距离为 a'_0 比 a_0 小很多，这两点很可能真正接触了，如果按照 $A-A'$ 点的间隙向量判断，其后果就是 A 点侵入 B 点所在面，导致“穿透”现象发生。

再来看“伪穿透”现象(图 3.10)，结构初始接触点对为 $C-C'$ ，初始间隙为 d_0 ，在变形后， $C-C'$ 的间隙变为 b_0 ，按照这个间隙向量，接触部分已经发生“穿透”现象，需要更新刚度矩阵，重新迭代。但是实际情况并非如此，结构滑移变形后，接触点对实际上更应该是 $C-D'$ ，其接触间隙为 b'_0 ，明显没有发生穿透。所以如果以传统点对接触模型来分析这种情况，只会导致结构分析难以收敛，不得不放大渗透容许误差，这样最终还是会走上“穿透”老路。

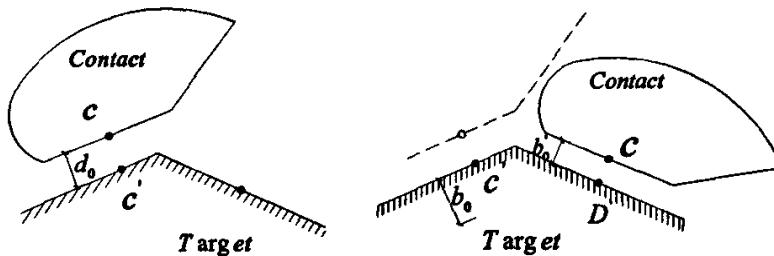


图 3.10 伪渗透

§ 3.5.2 动态更新点对接触原理

对于存在大变形、大滑移的板片空间结构，采用面对接触模型较为合理。但是，对实际板片空间结构进行稳定性分析时，面对接触模型的计算量令人难以接受，那么，问题还要回到点对接触问题上来考虑。

要想在板片空间结构接触共同工作问题分析中引入点对接触模型，必须首先要克服传统点对接触模型的缺点。

通过对 § 3.5.1 中的“伪问题”的分析，可以发现点对接触之所以会发生“伪穿透”和“伪脱开”现象，根本原因就在于这个模型一开始确定了接触单元，而且在结构加载过程中一成不变。要想避免这两种现象发生根本的解决办法就是要及时获得真正的接触点对。

动态更新点对接触原理就是随着结构发生的变化动态生成接触点对，这样能够及时跟踪接触区域，得到比较合理的结果。其本质就是借鉴面对接触问题的概念，把结构分为主动体和被动体，主

动接触面上的接触节点数不变，而被动接触区域上的节点需要更多。

因此，可以说动态更新点对接触模型较传统接触点对更能适应接触区域的变化。那么如何实现接触点对的时式更新即如何动态更新接触单元，这就需要接触单元更新搜速算法来完成。

§ 3.5.3 接触单元更新搜索算法

根据两个接触面中的节点距离动态更新接触单元，其本质也就是要依照节点对之间的距离重新生成接触节点对，也就是求

$$\begin{cases} \min f(x) = \|x_c - x_i\| \\ x_c = \{x_{c1}, x_{c2}, \dots, x_{cn}\} \in R^c \\ x_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\} \in R^i \end{cases}$$

式中： R^c 为主动接触面节点空间， R^i 为被动接触面节点空间； n, m 分别为主动体上接触节点数和被动体上接触节点数。这是一个离散变量优化问题，实现这一问题一般可以通过以下两种方法：

➤ 遍历法

如果计算模型中，接触面积不大，接触节点较少，采用该方法简单可行。

- 首先，建立当前的节点对索引数组， $\text{IndexCur1}(n)$, $\text{IndexCur2}(n)$ 分别存储当前主动接触面的节点序号和在结构节点号。 $\text{IndexCur3}(n)$, $\text{IndexCur4}(m)$ 分别存储当前被动接触面的节点序号和在结构节点号。计算将所有的主动接触面和被动接触面之间的欧拉距离。

$$f_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad (i=1, 2, \dots, n, \quad j=1, 2, \dots, m)$$

- 求出组成距离矩阵 $[D]$

$$[D] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix}$$

- 利用最小函数求 $[D]$ 中的最小距离值。
- 然后将距离最小值和按照对应的节点编号从距离矩阵数组中抽出，引入更新配对后的索引数组 $\text{IndexUp1}(j)$ 和 $\text{IndexUp2}(j)$ 分别记录抽出的主动接触面节点序号和被动接触面节点序号。
- 重复第 3 步，直到所有主动接触面节点均有了一一对应被动接触面节点。
- 根据索引数组，建立新的接触单元。

➤ 筛选法

当接触节点较少时，采用遍历法还是比较快的，因其迭代循环较少，但是对于较多的接触节点数情况，遍历法会明显拖慢计算速度。对于较多接触单元的计算，采用筛选法较为合适。

1. 同样需要建立当前的节点对索引数组。设定步数参数

```
int Nstep=0
```

2. 进行筛选双重循环，建立临时距离参数 TempDis;

```
for (i=0; i<n+1; i++)
    {for(j=0; j<m+1; j++)
```

3. 判断节点序号是否在索引数组 IndexUp1, IndexUp2 中有记录。有则 goto 2，无则继续。

4. 在第 i 步求得与第 j 点对应的距离 f_{ij} 后，TempDis = f_{ij} ，如果 $j+1$ 点与 j 点的坐标存在如下关系：

$$x_{j+1} - x_j \geq \sqrt{f_{ij}} \quad \text{or} \quad y_{j+1} - y_j \geq \sqrt{f_{ij}} \quad \text{or} \quad z_{j+1} - z_j \geq \sqrt{f_{ij}}$$

就跳过 $j+1$ 步，无需计算 f_{j+1} ，转到第 2 步，反之，以上条件不满足，则继续第 5 步。

5. 进行距离比较， $f_{j+1} > f_j$ 则 goto 2。如果 $f_{j+1} < f_j$ ，则 TempDis = f_{j+1} 。

6. 最终求得最小距离 f_k ，则 IndexUp1(Nstep)=k, IndexUp1(Nstep)=p; Nstep=Nstep+1

7. 返回 2 进行重复筛选。

筛选法最终目的也是要将索引数组更新，以生成新的接触单元。从筛选法的算法步骤可以看出，与遍历法相比较，筛选法的循环明显增多，但是筛选法中没有存储大数组，能够大大减少内存占用。

§ 3.6 接触问题的虚位移原理

根据 Hamilton 原理，物体在变形过程中，真实的变形总是使系统的总势能最小，在此，将接触物 A 和 B 作为两个求解区域(图 3.11、3.12)，那么各自在接触面上的边界可以视为给定面力边界条件。

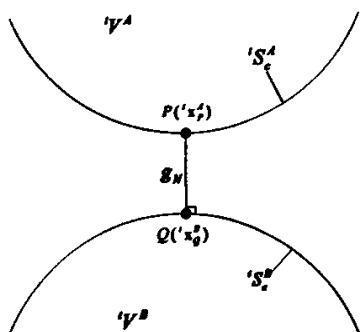


图 3.11 接触间隙

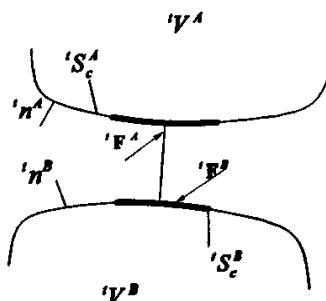


图 3.12 接触位移和接触力

这样，与平衡条件等效的虚功方程可以表示为：

$$\int \tau_y \delta e_y dV - W_L - W_I - W_c = \sum_{e=1}^{A,B} \left[\int_e \tau'_y \delta e'_y dV - W'_L - W'_I - W'_c \right] = 0 \quad (3.17)$$

式中， W_L 、 W_I 、 W_c 分别是外荷载、惯性力和接触面上接触力的虚功。

其中，

$$W_c = \sum_{e=1}^{A,B} W'_c = \sum_{e=1}^{A,B} \int_{\Gamma_e} F'_I \delta u'_I dS \quad (3.18)$$

根据引入接触界面约束条件的不同，(3.14) 式所描述的虚功方程又有不同的表达方式：

基于罚函数法 (Penalty method) 的虚功方程写成

$$\int_v \tau_{ij} \delta e_{ij} - W_L - W_I - \int_{\Gamma_e} k_c g_N(\Delta u) \delta \Delta u ds = 0 \quad (3.19)$$

其中， k_c 为接触罚刚度， $g_N(\Delta u)$ 为接触边界间隙函数。

基于拉格朗日乘子法 (Lagrangian multiplier method) 的虚功方程写成

$$\int_v \tau_{ij} \delta e_{ij} - W_L - W_I - \int_{\Gamma_e} \lambda \delta \Delta u ds = 0 \quad (3.20)$$

其中， λ 为 Lagrangian 乘子，其物理意义为接触力的大小。

如果将以上两种方法合并，则可以得到增广拉格朗日乘子法(Augmented Lagrangian method)，其虚功方程可写成

$$\int_v \tau_{ij} \delta e_{ij} - W_L - W_I - \int_{\Gamma_e} [k_c g_N(\Delta u) + \lambda] \delta \Delta u ds = 0 \quad (3.21)$$

下面来更具体地来描述增广拉格朗日乘子法。

§ 3.7 增广拉格朗日乘子法(Augmented Lagrangian method)

分析接触问题有两种基本方法：拉格朗日乘子法 (Lagrangian multiplier method) 和罚函数法 (Penalty method)，二者各有优缺点。

拉格朗日乘子法是用来求解带约束的函数或泛函极值问题的最基本的方法，其思想是通过引入拉格朗日乘子将约束极值问题转化为无约束极值问题，用拉格朗日乘子法引入接触界面约束条件可以使约束条件得到精确的满足。但是，不足之处是刚度矩阵中出现了对角线元素为零的子矩阵，这对计算带来麻烦，需要在算法上作特殊处理，对三维问题尤为不利。

罚函数法和拉格朗日乘子法一样，也适用于求解带约束泛函极值问题。罚函数法通过引入罚参

来使约束条件近似满足，其不增加问题的自由度，而且使求解方程的系数矩阵保持正定，克服了拉格朗日乘子法中出现零对角线子矩阵的缺点，但是，罚函数不可避免地会出现接触穿透现象，若罚参数太大，在计算时会产生高频振荡。

为了克服以上两种方法的不足，又保留它们各自的优点，一些学者提出了修正的拉格朗日乘子法——增广拉格朗日乘子法(Augmented Lagrangian method)。

增广拉格朗日乘子法最早由 Hestenes 与 Powell^[65,66] 在求解等式约束的优化问题时提出的，Rockefeller^[67]等人将该方法推广到不等式约束优化问题。J.C.Simo 在文献[46]中详细描述了二维增广拉格朗日乘子法的基本理论，并成功地将其应用到二维弹性接触问题。

增广拉格朗日乘子法可以说是拉格朗日乘子法和罚函数法的合并，同时吸取了两种方法各自的优点，并克服了它们的某些缺点。增广拉格朗日乘子法应用初始罚参，通过增广拉格朗日乘子迭代，最终求得满足精度要求的接触力，在整个过程中不增加总体方程的自由度个数，而且通过迭代求解大大降低对罚参选取的要求，同时数值实施较方便，对界面的约束条件及本构关系考虑得比较充分。

目前，一些工作已经证明增广拉格朗日乘子法具有明显的优越性。利用该方法，Alart 和 Curnier^[45]求解了小滑移摩擦接触问题；Heegaard 和 Curnier^[44]成功处理了大滑移无摩擦接触问题；Pietrzak 和 Curnier 在文献[43]中把连续接触力学的概念引入到增广拉格朗日乘子法中，较好地解决了大变形摩擦接触问题的求解问题。

本文采用增广拉格朗日乘子法(Augmented Lagrangian method)来分析接触问题，增广拉格朗日乘子法的迭代格式及数值分析过程在第四章中有详细介绍。

第四章 基于接触共同工作结构稳定的分析方法

§ 4.1 概述

对于结构屈曲问题，国内外很多学者在其数值求解方法和技术上作了大量卓有成效的研究工作。现在，相当复杂的非线性问题，比如结构跳跃失稳的求解和全过程跟踪已不是难题。但是，如果结构在屈曲过程中存在状态改变（接触和摩擦问题），那么问题就变得不简单了。这主要是因为非线性大变形屈曲分析耦合了接触约束问题之后，非线性结构的数值求解过程将变的不稳定，尤其是在后屈曲阶段更为明显^[52]。

所以，在此类问题分析中必须引入新的路径跟踪策略，以保证数值求解的有效性和稳定性。目前，这方面的工作已取得了一些进展^[52-59]。

正如本文第三章所述，分析接触问题的基本方法主要有罚方法、拉格朗日乘子法和增广拉格朗日乘子法。罚方法的优点是引入接触条件并不增加求解问题的自由度，可以保证刚度矩阵正定，然而，罚方法要求罚参数足够大才能满足接触约束条件，但罚参数过大却可能造成刚度矩阵病态闭锁，特别是在屈曲分析进行到临界点时更容易出现病态现象。

拉格朗日乘子法可以精确满足约束接触条件，这是其优越于罚方法的一点。但是，在拉格朗日乘子中，在刚度矩阵中出现了对角线元素为零的子矩阵，这给计算带来麻烦，需要在计算上作特殊处理，对三维问题尤为不利。

增广拉格朗日乘子法同时吸取了罚方法和拉格朗日乘子法的优点，并克服了它们各自的某些缺点。增广拉格朗日法乘子法应用初始罚参数，通过增广拉格朗日乘子迭代，最终求得满足容许精度的接触力。

文献[55,56,58]在结构屈曲分析中分别利用罚方法、拉格朗日乘子法、增广拉格朗日乘子法把接触约束条件引入到弧长法求解格式中，分析求解结果表明增广拉格朗日乘子法较罚方法和拉格朗日乘子法稳定性好。

本文采用增广拉格朗日乘子法并结合基于牛顿—拉普森方法的弧长法来研究结构的接触失稳问题。

目前流行的通用有限元分析软件（ANSYS,ABQUS,NASTRAN,ADINA）都可以作为分析结构稳定性的工具。本文利用 ANSYS 程序作为结构稳定性分析研究的工具和平台。ANSYS 提供两种分析结构稳定性的方法：特征值屈曲分析（线弹性稳定分析）和非线性屈曲分析。

§ 4.2 特征值屈曲分析

基本假定：小位移线弹性，即不考虑几何非线性对平衡方程和几何方程的影响，同时材料处于弹性状态。

小位移线弹性理论假设在结构受荷变形过程中忽略结构的构形变化，即外载在各个阶段总是在结构原始构形上产生平衡。

基于上述假设，由平衡法或能量法就可推导出特征值屈曲分析的特征方程：

$$[\mathbf{K}] + \lambda [\mathbf{K}_G] \{\Psi\} = 0 \quad (4.1)$$

其中， $[\mathbf{K}]$ —线弹性刚度矩阵

$[\mathbf{K}_G]$ —初始几何刚度矩阵

$\{\Psi\}$ —位移特征矢量（屈曲模态）

λ —特征值（载荷因子）

式(4.1)所表示的齐次方程组有非零解的条件是系数矩阵行列式为零，即：

$$|[\mathbf{K}] + \lambda [\mathbf{K}_G]| = 0 \quad (4.2)$$

由此可见，线弹性稳定问题最终是广义特征值问题，如果给定的荷载是单位荷载，其特征值和相应的特征值向量分别表示各阶临界荷载值和对应的屈曲构形。

对结构进行特征值屈曲分析，要注意以下几点：

1. 由于特征值屈曲分析不考虑任何非线性和初始缺陷，因此其通常产生非保守结果，所得到的屈曲载荷通常不适用于实际结构的设计；
2. 特征值屈曲分析只允许线性行为，如果定义了非线性单元，也将按线性对待。例如，如果使用接触单元，它们的刚度是基于静态预应力运行之后的状态进行计算，并且不能改变；
3. 由特征值屈曲分析计算出的结果（位移和应力）并不是真实的位移和应力，而是给出各个模态下一个相对位移和相对应力的概念，显示的是屈曲模态形状和相对应力分布。

因此，由于以上原因特征值屈曲分析不适合于本文要研究的问题。

§ 4.3 结构非线性稳定分析

对于很多现代结构问题，特别是大型复杂的结构体系，其受力状态的确定及屈曲平衡路径的跟踪是非常重要甚至是必需的。

对结构非线性稳定全过程分析的目的是：

(一) 结构在前屈曲状态的平衡;

(二) 平衡路线上临界点(极值点和分支点)的确定以及相应临界荷载的计算;

(三) 跟踪结构的后屈曲反应。

不少学者在早期的有限元增量迭代过程的基础上对结构的非线性平衡路径的分析及跟踪策略作了大量的研究。这些研究主要涉及:

(一) 荷载水平的确定;

(二) 临界点的计算方法及判断准则;

(三) 越过临界点的方法;

(四) 后屈曲路线的跟踪算法等。

§ 4.3.1 非线性代数方程组迭代求解方法

几何非线性有限元分析中, 通常采用增量迭代求解技术。增量分析方法一般包括两种不同的表达格式: 完全拉格朗日格式(简称 L.T. 格式) 和更新的拉格朗日格式(简称 U.L. 格式)。

有限元增量平衡方程可描述如下:

$$\mathbf{K}^{(m,j-1)} \Delta \mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{R}^{(m,j)} - \mathbf{F}^{(m,j-1)} \quad (4.3)$$

其中, \mathbf{K} 为结构切线刚度矩阵, $\Delta \mathbf{u}$ 为位移增量矢量, \mathbf{R} 为参考荷载矢量(包括接触力矢量), \mathbf{F} 为内部节点力矢量。右上角标 (m, j) 表示增量迭代次数为第 m 增量步第 j 迭代步。

假定结构按比例加载, 则 (4.3) 可以写成:

$$\mathbf{K}^{(m,j-1)} \Delta \mathbf{u}^{(j)} = \lambda^{(m,j)} \mathbf{R} - \mathbf{F}^{(m,j-1)} \quad (4.4)$$

其中, λ 为荷载增量系数。

采用子结构的思想, 这里把 (4.4) 中的位移增量矢量 $\Delta \mathbf{u}$ 分解为接触面(潜在接触面)位移增量矢量 $\Delta \mathbf{u}_c$ 和内部节点位移增量矢量 $\Delta \mathbf{u}_i$, 则 (4.4) 又可以分解为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ic} \\ \mathbf{K}_{ci} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix}^{(m,j-1)} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i \\ \Delta \mathbf{u}_c \end{Bmatrix}^{(j)} = \begin{Bmatrix} \lambda^{(m,j)} \mathbf{R}_i \\ \mathbf{R}_c^{(m,j)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_c \end{Bmatrix}^{(m,j-1)} \quad (4.5)$$

如果凝聚掉内部节点位移增量 $\Delta \mathbf{u}_i$, 可以得到凝聚后关于 $\Delta \mathbf{u}_c$ 的增量方程, 即

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(m,j-1)} \Delta \mathbf{u}_c^{(j)} = \mathbf{R}_c^{(m,j)} - \mathbf{F}_c^{(m,j-1)} - \mathbf{K}_f^{(m,j-1)} (\lambda^{(m,j)} \mathbf{R}_i - \mathbf{F}_i^{(m,j-1)}) \quad (4.6)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{ci} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ic}$$

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{K}_{ci} \mathbf{K}_{ii}^{-1}$$

另一方面，被凝聚掉的内部节点位移增量矢量 Δu_i 通过 (4.5) 可以建立如下关系：

$$\mathbf{K}_{ii}^{(m,j-1)} \Delta u_i^{(j)} = \lambda^{(m,j)} R_i - F_i^{(m,j-1)} - \mathbf{K}_{ic}^{(m,j-1)} \Delta u_c^{(j)} \quad (4.7)$$

为描述接触条件的方便需要，这里把 Δu_c 在整体坐标系下分解为法向位移增量矢量 Δu_n 和切向位移增量矢量 Δu_t 。定义坐标转换矩阵 \mathbf{M} 及潜在接触面处局部坐标系下的接触位移增量矢量 $\hat{\Delta u}_c$ ($\Delta u_n^T, \Delta u_t^T$)，则可以得到以下转换关系式：

$$\Delta u_c^{(j)} = \mathbf{M}^{(m,j-1)} \hat{\Delta u}_c^{(j)} \quad (4.8)$$

把 (4.8) 式代入 (4.6) 则得到转换后的平衡方程式：

$$\hat{\mathbf{K}}^{(m,j-1)} \hat{\Delta u}_c^{(j)} = \hat{R}_c^{(m,j)} + \lambda^{(m,j)} \hat{R}_f - \hat{F}_f^{(m,j-1)} \quad (4.9)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &= \mathbf{M}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{M}, \quad \hat{R}_c = \mathbf{M}^T R_c \\ \hat{R}_f &= -\mathbf{M}^T \mathbf{K}_f R_i, \quad \hat{F}_f = \mathbf{M}^T (F_c - \mathbf{K}_f F_i) \end{aligned}$$

若把法向接触力 P_n 和切向接触力 P_τ 代入 (4.9) 式，则 (4.9) 式可重新写成：

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{nn} & \hat{\mathbf{K}}_{n\tau} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\tau n} & \hat{\mathbf{K}}_{\tau\tau} \end{bmatrix}^{(m,j-1)} \begin{Bmatrix} \Delta u_n \\ \Delta u_\tau \end{Bmatrix}^{(j)} = - \begin{Bmatrix} P_n \\ P_\tau \end{Bmatrix}^{(m,j)} + \lambda^{(m,j)} \begin{Bmatrix} \hat{R}_{fn} \\ \hat{R}_{f\tau} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \hat{F}_{fn} \\ \hat{F}_{f\tau} \end{Bmatrix}^{(m,j-1)} \quad (4.10)$$

对 (4.10) 式解耦，即分别凝聚出 $\Delta u_n, \Delta u_\tau$ ，可以分别得到关于 $\Delta u_n, \Delta u_\tau$ 的关系式：

$$\mathbf{K}_{nn}^{(m,j-1)} \Delta u_n^{(j)} = -P_n^{(m,j)} + \mathbf{K}_{fn}^{(m,j-1)} P_\tau^{(m,j)} + \lambda^{(m,j)} R_n - F_n^{(m,j-1)} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{K}_{\tau\tau}^{(m,j-1)} \Delta u_\tau^{(j)} = -P_\tau^{(m,j)} + \mathbf{K}_{f\tau}^{(m,j-1)} P_n^{(m,j)} + \lambda^{(m,j)} R_\tau - F_\tau^{(m,j-1)} \quad (4.12)$$

其中

$$\mathbf{K}_{nn} = \hat{\mathbf{K}}_{nn} - \hat{\mathbf{K}}_{n\tau} \hat{\mathbf{K}}_{\tau\tau}^{-1} \hat{\mathbf{K}}_{\tau n}, \quad \mathbf{K}_{fn} = \hat{\mathbf{K}}_{n\tau} \hat{\mathbf{K}}_{\tau\tau}^{-1}, \quad \mathbf{K}_{\tau\tau} = \hat{\mathbf{K}}_{\tau\tau} - \hat{\mathbf{K}}_{\tau n} \hat{\mathbf{K}}_{nn}^{-1} \hat{\mathbf{K}}_{n\tau}$$

$$\mathbf{K}_{f\tau} = \hat{\mathbf{K}}_{\tau n} \hat{\mathbf{K}}_{nn}^{-1}, \quad R_n = \hat{R}_{fn} - \mathbf{K}_{fn} \hat{R}_{f\tau}, \quad R_\tau = \hat{R}_{f\tau} - \mathbf{K}_{f\tau} \hat{R}_{fn}$$

$$F_n = \hat{F}_{fn} - \hat{\mathbf{K}}_{f\tau}, \quad F_\tau = \hat{F}_{f\tau} - \mathbf{K}_{f\tau} \hat{F}_{fn}$$

在不致造成混淆的前提下，这里省略了右上角标。

从式 (4.11)、(4.12) 可以看出，平衡方程共有 $2n$ 个，但未知变量共有 $2n+3$ 个，即位移增量 ($\Delta u_n, \Delta u_\tau$)，接触力 (P_n, P_τ) 以及荷载增量系数 λ 。需要补充三个约束关系，即接触条件，摩擦定律以及弧长法约束方程。

§ 4.3.2 增广拉格朗日乘子法迭代格式

本节中采用增广拉格朗日乘子法引入接触条件和摩擦定律，并给出空间点对摩擦接触问题的增量迭代格式（法向和切向）。

首先，定义可能发生接触面上的法向与切向拉格朗日乘子分别为 λ_n, λ_τ ，令：

$$\Delta\lambda_n^{(m,j)} = \lambda_n^{(m,j)} - \lambda_n^{(m,j-1)}$$

$$\Delta\lambda_\tau^{(m,j)} = \lambda_\tau^{(m,j)} - \lambda_\tau^{(m,j-1)} \text{ 且 } \Delta\lambda_\tau = \{\Delta\lambda_{\tau 1}, \Delta\lambda_{\tau 2}\}$$

则法向接触力的增量增广拉格朗日乘子迭代格式可写成：

$$\Delta R_n^{(j)} = < \Delta\lambda_n^{(j)} + k_n \Delta g_n^{(j)} + \lambda_n^{(j)} > - \lambda_n^{(j)}$$

式中， j 表示当前加载步内进行接触处理的第 j 次迭代，符号 $< >$ 为 Macauley 括号

$$(\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|)), \quad \Delta g_n^{(j)} \text{ 为第 } j \text{ 次迭代间隙向量的法向分量增量。}$$

引入罚方法将切向滑动法则 (3.11) 改写成如下形式：

$$\dot{u}_\tau - \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial P_\tau} = \frac{(\dot{P}_\tau - \dot{\lambda}_\tau)}{\alpha} \quad (4.13)$$

其中， $\frac{(\dot{P}_\tau - \dot{\lambda}_\tau)}{\alpha}$ 为接触部分的切向接触力相对增长速率。将 (4.13) 和 (3.11) 对照，可以发现

只有当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时，切向滑动法则才能精确满足。因此，在实际计算中，需要经过反复迭代，使得 $|\dot{P}_\tau - \dot{\lambda}_\tau| \leq \varepsilon$ 或 $\dot{P}_\tau = \dot{\lambda}_\tau = 0$ 。

采用向前差分法，可以将 (4.13) 表示为：

$$\left[\Delta g_\tau - \Delta \zeta \frac{P_\tau^{(j)}}{|P_\tau^{(j)}|} \right] k_\tau = \Delta P_\tau - \Delta \lambda_\tau \quad (4.14)$$

其中

$$\Delta \zeta = \begin{cases} 0 & \Phi^{(j)} \leq 0 \\ \frac{\Phi^{(j)}}{\alpha} \geq 0 & \Phi^{(j)} > 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\Phi^{(j)} = |P_\tau^{(j)}| - \mu P_n^{(j)} \leq 0 \quad (4.16)$$

式 (4.16) 中 $\Phi^{(j)}$ 为切向滑动屈服函数的预测值。式 (4.15) 与 (3.13) 等价，其物理意义为：当

接触面的切向接触力未达到临界摩擦阻力时，接触面间无相对滑动，处于粘合状态；当切向接触力邻近摩擦阻力时，通过切向罚弹簧的作用使接触面逐步达到滑动状态，从而使相对滑动因子逐步趋近精确解。

当 $|\Delta P_\tau - \Delta \lambda_\tau| \leq \varepsilon$ 或 $\Delta P_\tau = \Delta \lambda_\tau = 0$ 时，滑动接触收敛，滑动法则满足。式(4.14)中的 $P_\tau^{(j)}$

为真实切向接触力在第 j 迭代步末的一个预测值，可以直接表示为增广拉格朗日乘子法的形式：

$$P_\tau^{(j)} = P_\tau^{(j-1)} + \Delta \lambda_\tau^{(j-1)} + k_\tau \Delta g_\tau^{(j-1)} \quad (4.17)$$

将式(4.14)代入式(4.17)，则得到

$$P_\tau^{(j)} = P_\tau^{(j-1)} + \Delta \lambda_\tau^{(j-1)} + \left[\Delta g_\tau^{(j-1)} - \Delta \xi \frac{P_\tau^{(j-1)}}{|P_\tau^{(j-1)}|} \right] k_\tau \quad (4.18)$$

于是关于切向拉格朗日乘子的相应增量迭代格式可写成

$$\Delta \lambda_\tau^{(j)} = \Delta \lambda_\tau^{(j-1)} + \left[\Delta g_\tau^{(j-1)} - \Delta \xi \frac{P_\tau^{(j-1)}}{|P_\tau^{(j-1)}|} \right] k_\tau \quad (4.19)$$

从以上推导过程可以看出，增量增广拉格朗日乘子法充分考虑了接触面的物理约束与几何约束条件，其理论比较完善，将其与有限元方法结合起来，能够较好的解决工程中的接触问题。

§ 4.3.3 基于全牛顿—拉普森迭代策略的弧长法

对结构进行变形全过程的非线性跟踪分析，是全面了解该结构的受力性能所必须进行的一项复杂工作。近十几年来，国内外许多学者都致力于非线性跟踪技术的研究，并提出了相当数量的不同方法，在这些非线性跟踪分析方法中，弧长控制类方法和能量控制类方法是两类最主要的方法。

近年来，各种类型的弧长法由于概念简单明了，计算方便可靠，得到了更为广泛的应用。它最初由 Wempner(1971)^[62]和 Riks(1979)^[63]提出，继而由 Crisfield(1980)^[14]加以改进。其主要思想是：将结构的平衡路径描述在N维空间，控制参数不作为整体变量，仅在原有结构平衡方程的基础上，追加一约束条件，然后，通过增量迭代过程求解出每步对应的平衡点。各类弧长法名称的不同就缘于所加约束条件的不同。

一般的，弧长约束方程可写成：

$$C(\{\Delta u\}, \Delta \lambda) = 0 \quad (4.20)$$

对应于弧长类方法约束方程的具体形式为：

$$\{\Delta u_i\}^T \{\Delta u_i\} + \alpha^2 (\Delta \lambda)^2 = (\Delta L_i)^2 \quad (4.21)$$

其中, α^2 是比例因子, 在柱面弧长法中取 0, 在椭球面弧长法中取 $S_p \|\{P\}\|^2$ (S_p -当前刚度参数), 其它方法中均取 $\|\{P\}\|^2$.

在弧长法中, 应用 Batz 和 Dhatt^[6]的两个位移向量同时求解技术, 平衡方程可更一般地写成:

$$[\mathbf{K}_i^T \{\Delta u\} - \Delta \lambda \{P\}] = (\lambda_n + \Delta \lambda_i) \{P\} - \{F(\{u_i\})\} = \{R_i\} \quad (4.22)$$

$$\{\Delta u\} = \Delta \lambda \{\Delta u^P\} + \{\Delta u^r\} \quad (4.23)$$

$$\{\Delta u^P\} = [\mathbf{K}_i^T]^{-1} \{P\} \quad (4.24)$$

$$\{\Delta u^r\} = [\mathbf{K}_i^T]^{-1} \{R_i\} \quad (4.25)$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_n\} + \{\Delta u_i\} + \{\Delta u\} = \{u_i\} + \{\Delta u\} \quad (4.26)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_n + \Delta \lambda_i + \Delta \lambda = \lambda_i + \Delta \lambda \quad (4.27)$$

其中, $\{\Delta u^P\}$ 是由参考荷载向量产生的位移向量, $\{\Delta u^r\}$ 是由不平衡力产生的余量位移向量.

图 4.1 描述的是弧长法增量迭代过程。图中, EF 的斜率的物理意义是当前切线刚度矩阵 $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{K}_i^T \\ \{P\} \end{smallmatrix} \right]$,

每一步迭代都作修正 (全牛顿-拉普森法)。D 点和 E 点的距离就代表不平衡力的大小 $\frac{\{R_i\}}{\{P\}}$ 。

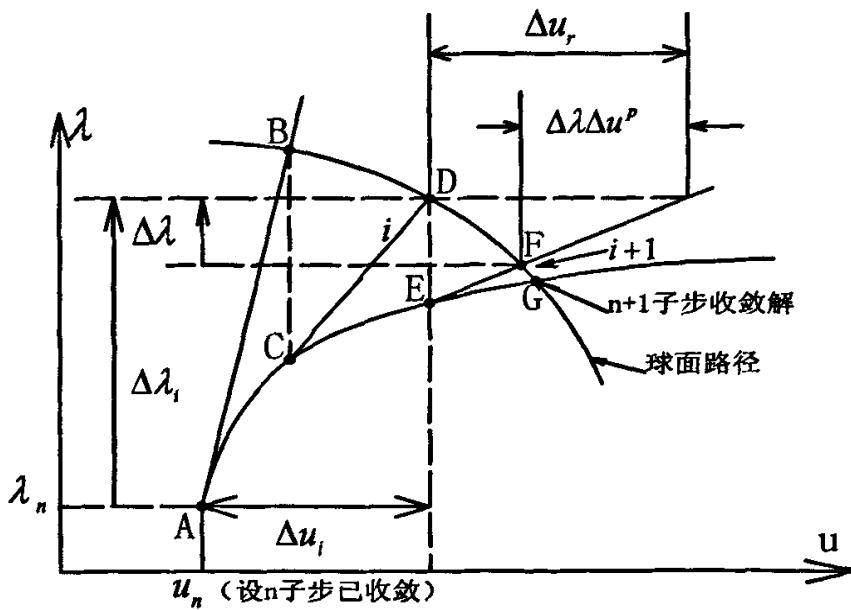


图 4.1 弧长法求解增量迭代过程

§ 4.4 荷载增量的自动选取策略

§ 4.4.1 初始荷载增量参数确定

引入柱面弧长法约束方程，即 (4.21) 中取 $\alpha = 0$ ，则约束方程可写成：

$$\left\{ \Delta u_i^{(j)} \right\}^T \left\{ \Delta u_i^{(j)} \right\} = (\Delta l_i)^2 \quad (4.28)$$

其中， Δl_i 为第 i 增量步的弧长增量，迭代过程中的荷载增量受到弧长增量的控制。若求得 Δl_i 则可通过 (4.22) ~ (4.26) 确定第 i 增量步的荷载增量系数 $\Delta \lambda_i$ ，再有式 (4.27) 求得总的荷载增量系数，从而能够确定相应的荷载增量水平。

在增量迭代过程中，为了使各增量步中迭代次数大致相当从而避免迭代不收敛或增量步太小影响计算效率，必须根据上一步收敛后的一些信息进行分析以自动确定下一步增量步的初始荷载增量 $\Delta \lambda_i^0$ 。

根据经验，选取 $\Delta \lambda_i^0$ 的原则，是使得 $\Delta \lambda_i^0 \{\Delta P\}$ 的值约为荷载一位移曲线最大荷载的 $1/3$ ，再根据柱面弧长法的约束方程可得到本次增量步的初始荷载增量参数

$$\Delta \lambda_i^0 = \pm \frac{\Delta l_i}{\sqrt{\{u_i\}^T \{u_i\}}} \quad (4.29)$$

其中， $\{u_i\}$ 为参考荷载向量所产生的位移向量。

§ 4.4.2 初始荷载增量符号的确定

确定初始荷载增量的大小后，还需要进一步正确确定初始荷载增量的符号。符号的确定非常重要，其决定了当前跟踪分析的方向，如果初始荷载增量的符号错误，将导致出现“回漂”或“振荡”现象，从而不能得到正确的结果。正确地确定初始荷载增量的符号才能保证在出现跳回 (Snap-back) 或跳跃 (Snap-through) 现象时 (图 4.2)，仍跟踪到正确的路径。

目前，常用的符号确定方法有以下几种：

1. 根据当前切线刚度矩阵的行列式的符号判断^[18]，判断条件为

$$\text{sign}(\Delta \lambda_i^0) = \text{sign}(|K_i|) \quad (4.30)$$

当切线刚度矩阵正定时，其行列式为正，结构处于加载阶段，初始荷载增量取正号；反之，初始荷载增量取负号。切线刚度矩阵的行列式计算方便，这种判断方法应用最为广泛，并且在迄今为止的大多问题中取得了良好的效果。但行列式为负只是切线刚度矩阵为负定的必要条件而非充分条件。

件，采用切线刚度矩阵行列式判断结构处于加载或卸载阶段并非总是正确的。

2. 根据当前刚度参数 S_p 的符号判断，判断条件为

$$\text{sign}(\Delta\lambda_i^0) = \text{sign}(S_p) \quad (4.31)$$

当前刚度参数法的物理概念明确，计算比较简便，对大多数问题有良好的效果。但是当所跟踪的路径出现跳回位移极值点时（图 4.2(b)）， S_p 趋于无穷大，给数值计算带来麻烦。在越过位移极值点后， S_p 将不能正确地改变符号，不能跟踪到 AB 段。为了解决这个问题，文献[12]根据 S_p 的值和位移极值点出现的次数进行修正

$$\Delta\lambda_i^0 = \begin{cases} (-1)^n \text{sign}(S_p) |\Delta\lambda_i^0| & (S_p \neq 0) \\ -\text{sign}(\Delta\lambda_i^0) |\Delta\lambda_i^0| & (S_p = 0) \end{cases} \quad (4.32)$$

其中， n 为当前步以前出现位移极值点的个数。

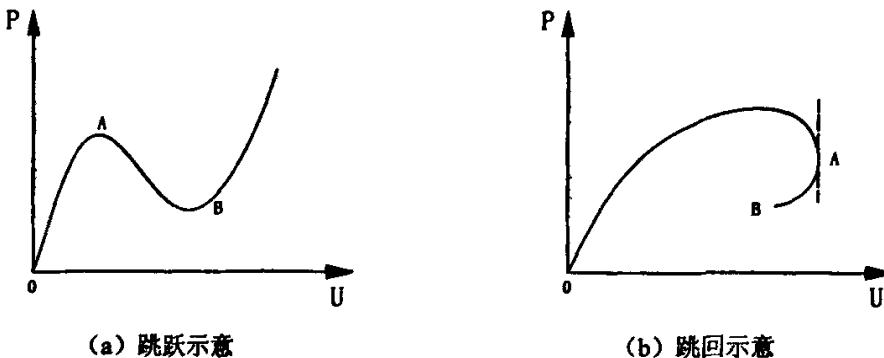


图 4.2 全过程荷载一位移曲线

3. 根据 $\{\boldsymbol{u}_{i-1}^s\}^T \{\boldsymbol{u}_i\}$ 的符号判断，判断条件为

$$\text{sign}(\Delta\lambda_i^0) = \text{sign}\left(\{\boldsymbol{u}_{i-1}^s\}^T \{\boldsymbol{u}_i\}\right) \quad (4.33)$$

式 (4.33) 中， $\{\boldsymbol{u}_{i-1}^s\}$ 为上一增量步的总的位移向量。 $\{\boldsymbol{u}_{i-1}^s\}^T \{\boldsymbol{u}_i\}$ 的符号代表 $\{\boldsymbol{u}_{i-1}^s\}$ 与 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ 之间的夹角的方向。上式的几何意义为当前增量步的初始荷载增量位移应与上一增量步的总的位移向量成锐角。该判断方法计算简单，适用性较好。

§ 4.5 算例分析

本文利用增广拉格朗日乘子法与弧长法相结合的方法对存在接触问题的结构失稳屈曲的全过程路径进行跟踪，并与相关文献结果进行比较，以验证上述方法的可行性。

§ 4.5.1 双板接触模型

模型如图 4.3 所示，模型由上下两块板组成，两块板的大小尺寸相同，都为 $80\text{mm} \times 20\text{mm}$ 、厚度为 0.7mm 的矩形板。每块板材料的弹性模量为 $E=1.92 \times 10^5\text{MPa}$ ，泊松比为 $\nu=0.3$ ，屈服强度 $f=195\text{MPa}$ ，板间摩擦系数 $\mu=0.2$ 。两块板的端部都采用完全固定约束。板 1 的端部中央位置作用一集中荷载 P 。

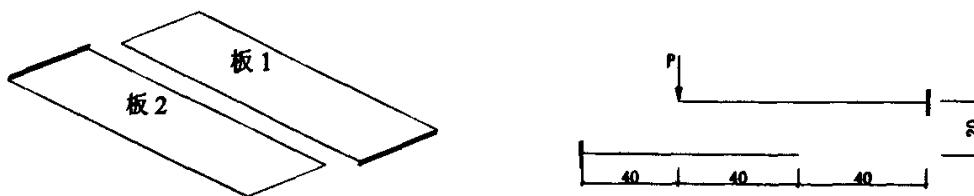


图 4.3 模型几何尺寸示意图

该算例所分析的问题属于典型的大变形、大滑移问题，其中涉及到几何非线性、材料非线性和状态非线性问题。几何非线性按大变形小应变来处理，材料非线性采用理想弹塑性模型。

板 1 端部的荷载按比例增加，随着荷载的增加，板 1 的变形也随之增大，并在某一时刻和板 2 发生接触。为了分析问题的需要，并考虑到两块板的材性相同，这里等同对待板 1 和板 2 可能发生的接触面，即可能发生接触的表面既是接触面又是目标面。

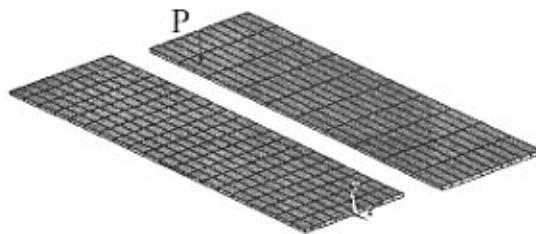


图 4.4 有限元模型网格划分示意

有限元网格划分如图 4.4 所示，板 1 和板 2 均采用四节点矩形等参壳元划分，在板 1 和板 2 最有可能发生接触的表面安置接触对，可能接触区域共有 10 个接触对。

由于板 1 在和板 2 发生接触之后，当板 1 端部滑动到板 2 表面垂直处（此时的接触反力绝对

值最大(图4.5)),容易导致数值计算的不稳定,所以此时要人为调整载荷步及弧长,保证计算能够顺利通过。

模型计算过程中考虑摩擦的影响,计算结果如图4.5~4.6所示。

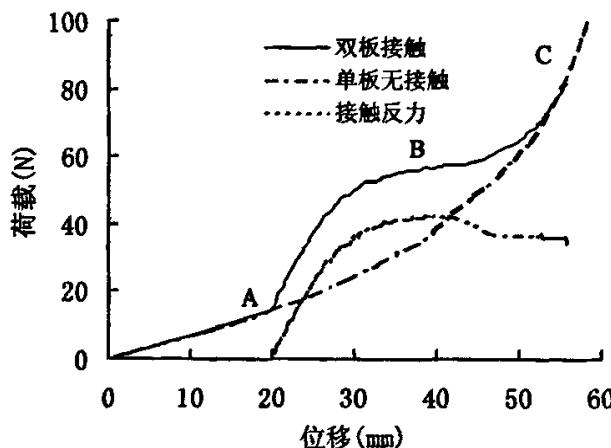


图4.5 模型加载点处荷载一位移曲线

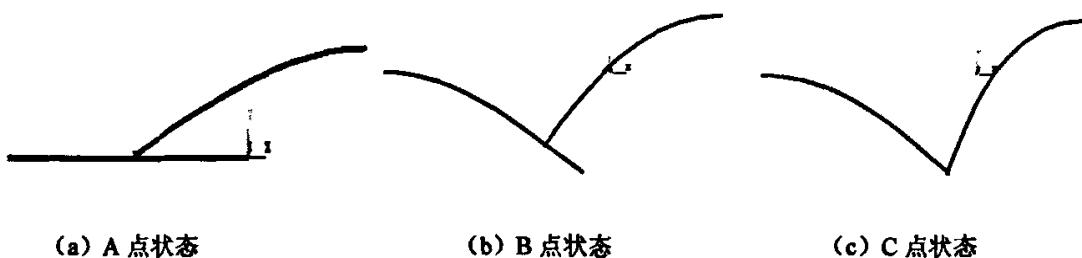


图4.6 板接触作用后的变形

通过图4.5可以看出:在板1变形到达A点之前,板1在荷载作用下处于弯曲为主的变形状态;在A点时刻,板1和板2进入接触状态(图4.6(a))。由于板2的接触共同工作,为板1提供了较大的约束刚度,使得整体刚度明显增大,直到B点时刻板1的刚度出现弱化,此时,板1加载点处的位移增长速度明显加快(图4.6(b)),导致板1刚度弱化的主要原因在于板1和板2接触作用后,板2通过接触作用对板1施加一法向作用力,随着板1在板2上发生滑动,板1的受力状态也发生变化,即由最初以弯曲为主的受力状态转化为以弯压为主的受力状态,板1的弯压刚度比以弯曲为主的刚度明显减小。

但是,板1并没有发生失稳,因为随着几何变形的增大,板1和板2将变的更加刚硬,板2对板1的作用力也有所降低(见图4.5),板1的刚度还可以继续增大,直到C点计算结果收敛。C点时刻对应图4.6(c)的变形状态,此时,板1将要滑离板2,此后的问题属于动力响应问题,不在本文研究范围内。

§ 4.5.2 理想拱结构接触模型

模型如图 4.7 所示, 圆拱半径 $R=3380.6\text{mm}$, 圆拱截面面积为 $25.4 \times 4.7625\text{mm}^2$, 材料的弹性模量 $E=72.395\text{GPa}$ 。考虑到结构的对称性, 对拱结构取半结构分析, 而对圆柱冲头则取四分之一加以研究。在文献[52,53]中, 作者采用弧长法与线性补偿法相结合的方法对该模型进行了基于接触约束作用下的几何非线性稳定分析。本文则用弧长法并结合增广拉格朗日乘子法对该模型进行考虑接触约束作用下的几何非线性稳定分析。

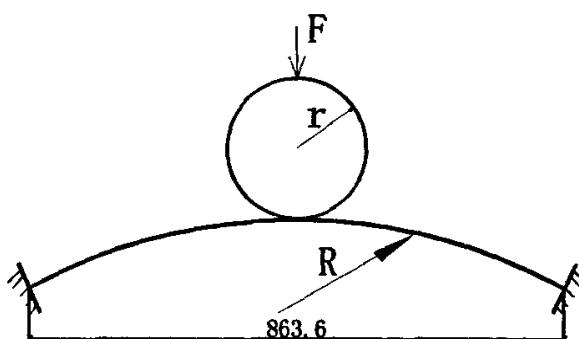
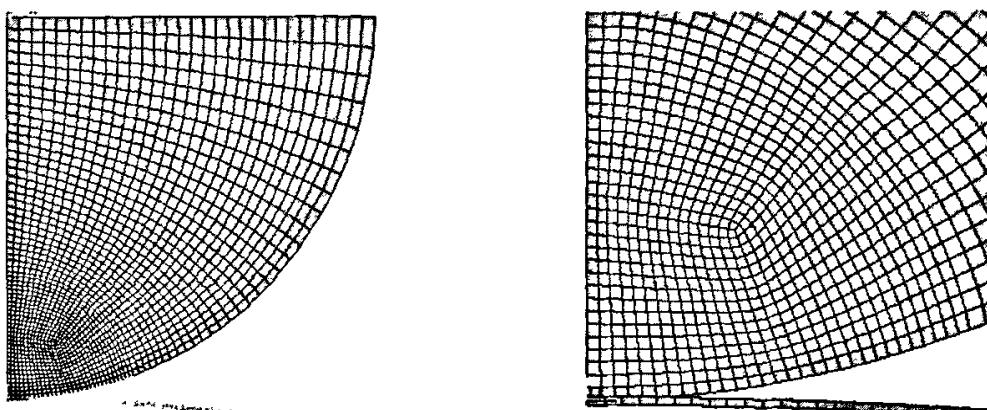


图 4.7 受刚体冲头作用的理想圆拱结构模型

该算例所研究的问题属于典型的大变形、小滑移接触屈曲问题, 必须考虑几何大变形效应和接触状态的变化。利用有限元分析时, 拱结构采用二维梁单元等距划分, 共划分 40 个单元, 对于冲头则采用分区过渡划分的方法, 对可能发生接触的局部区域的网格进行加密, 模型的有限元网格划分如图 4.8。接触区域的范围对该模型的稳定性有很大影响, 所以在建立接触对之前, 先要根据拱结构的变形情况对接触区域进行初步的预测, 然后建立冲头与拱之间的接触对。



(a) 整体有限元网格

(b) 局部有限元网格

图 4.8 模型有限元网格划分

首先,不考虑刚体冲头与理想圆拱之间的摩擦作用,即假定摩擦系数 $\mu=0$ 。在不同 r/R 的情况下,跟踪到圆拱结构中心点处荷载一位移全过程曲线如图4.9所示,并与文献[52]的计算结果(图4.10)进行比较。

图4.11是拱结构失稳时的形态。

图4.12是接触点对的接触状态在不同载荷步之间的变化。

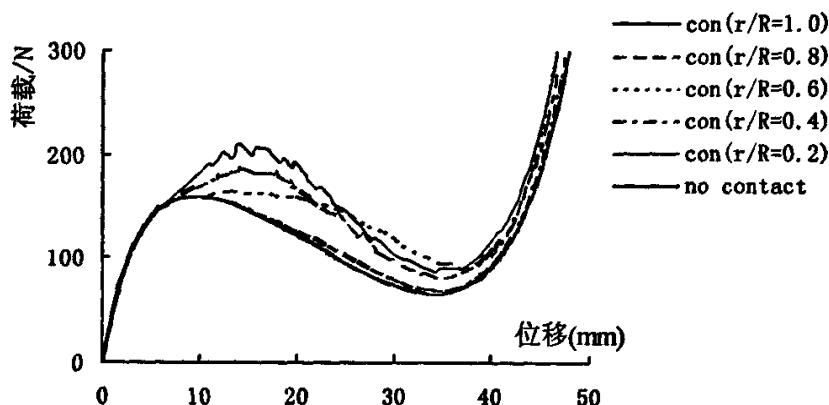


图4.9 拱结构中心点荷载一位移全过程曲线

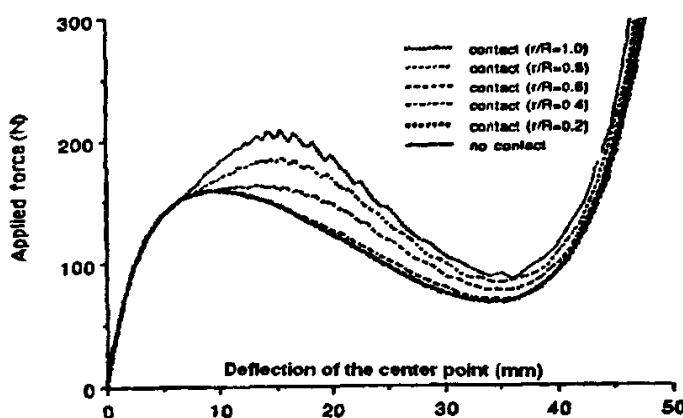
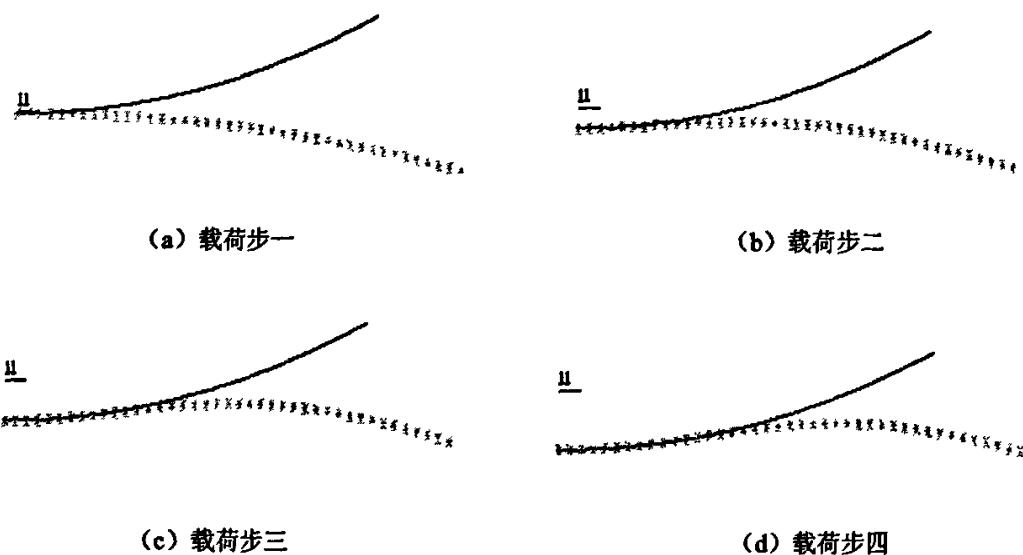


图4.10 文献[52]拱结构中心点荷载一位移全过程曲线



图4.11 拱结构失稳模态

图 4.12 接触点对接触状态随时间的变化($r/R=0.4$)

从计算结果可以看出，本文采用弧长法与增广拉格朗日法相结合的方法计算的结果与文献[52]中的数值计算结果吻合较好，并且通过分析结果表明，随着 r/R 比值 (0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0) 的增大，即随着初始接触区域的扩大，接触约束作用对该模型的屈曲稳定性影响越来越大，与无接触模型相比可以看出： $r/R = 0.2$ 时的平衡路径基本无变化， $r/R = 0.4$ 时平衡路径有微小变化， $r/R \geq 0.6$ 时，则出现较大的差异，尤其在后屈曲阶段更为明显。

上述几种情况下的屈曲荷载的比较如表 4.1。

表 4.1 本文和文献[52]的计算结果比较

r/R	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
文献[52]屈曲荷载增量	1.00000	1.0013	1.0250	1.1640	1.316
本文屈曲荷载增量	1.00013	1.0002	1.0288	1.1739	1.318

从屈曲荷载结果比较看， $r/R = 1.0$ 时的屈曲荷载计算值比无接触模型的屈曲荷载的计算值提高了 31.8%（文献[52]的比较结果为 31.6%），可以说明接触约束作用对结构的屈曲行为，尤其是后屈曲特性有较大影响。

其次，假定刚体冲头与理想圆拱结构之间存在摩擦，即 $\mu > 0$ 。此时，本文针对不同的摩擦系数和两种 r/R 比值 (0.4, 0.6)，对拱结构中心点进行了荷载一位移全过程跟踪（图 4.13）。

从图 4.13 的计算结果可以看出，由于该模型的极好的对称性导致切向的滑动响应不明显，因此

摩擦力的存在对屈曲过程的影响很小。但是，摩擦的存在对切向接触力还是有一定影响（见图 4.14）。

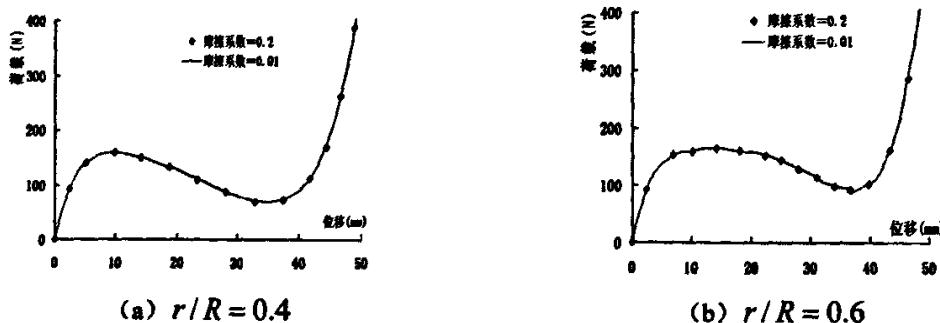


图 4.13 中心点荷载一位移全过程曲线

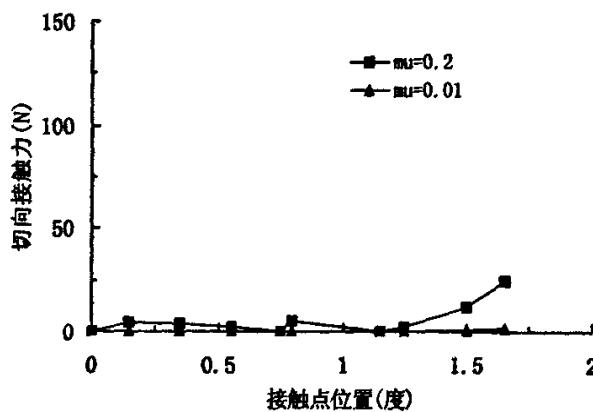


图 4.14 切向接触力的分布 ($r/R = 0.4, F = 500N$)

从对以上结果的分析可以看出，接触共同工作对结构的屈曲稳定性有较大的影响，本文的计算结果与文献[52]的计算结果吻合较好，而且本文所采用的方法在 ANSYS 程序中更容易实现，计算效率较高。因此，可以说明采用增广拉格朗日乘子法与弧长法相结合的数值方法在分析基于接触共同工作结构的稳定性是稳定可行的。

第五章 接触共同工作板片空间结构稳定性的数值模拟

板片空间结构体系中，由于板片与金属骨架的共同工作，板片空间结构不论在强度、刚度，还是稳定性等方面都较普通的网壳、网架结构有明显的提高。

但是，板片空间结构同样是跨度大、厚度薄，多数构件以受压为主，典型的破坏形态为失稳破坏。因此，板片空间结构的整体稳定性是研究、设计过程中必须解决的问题。

目前，对组合类结构基于共同工作问题稳定性的研究，已得到了一些有价值的结论。其中，文献[30-32]对板片空间结构体系共同工作问题的特点、机理及数值模拟作了许多的理论阐述和试验研究，文献[17,18]对组合网壳结构基于共同工作问题的稳定性进行了研究。

然而，在板片空间结构稳定性问题的研究中还有很多的问题有待研究人员深入探索和研究，比如，板片空间结构的动力稳定性问题；板片空间结构的失效机理；强度破坏和失稳的判别法则；共同工作问题等等。

随着有限元数值方法和有限元分析软件的发展，各类商用软件（ANSYS, ABQUS, NASTRAN, ADINA）为以上问题的研究提供了有力的工具。目前有限元方法不仅可以计算出结构某一点或面的应力分布（强度问题），而且还能追踪到结构屈曲失稳的全过程，并给出结构的临界载荷和屈曲模态（稳定性问题）。另外，对于共同工作问题，还可以利用商用软件程序提供的有限元数值模型描绘出结构在变形过程中所有节点的动态分布（接触状态和滑移）。

以上研究将对进一步发展和完善板片空间结构体系打下基础，其研究成果也将为实际工程提供有力的参考。

§ 5.1 共同工作问题的处理方法

板片空间结构中，板片与金属骨架之间在有限个点上靠高强螺栓或焊接连接，而在大部分边界上则是通过板和骨架之间的相互接触来传递作用力的。在共同工作问题中，连接件的安置及板片与金属骨架间的接触情况是影响其共同工作程度的主要因素。目前对于板片结构共同工作问题计算模型的处理方法主要采用以下两种模式：

1. 有效宽度模式^[29]

采用有效宽度法来对板片空间结构进行分析时，把结构的下弦杆和斜腹杆按二力杆来分析，对于上弦杆与板间按组合梁进行计算，把板折算成有效翼缘，有效翼缘宽度 b_{ce} ，按下列公式计算，并取其中的最小值（见图 5.1）。

$$b_{ce} = \frac{l_0}{3}, \quad b_{ce} = b_0 + 12h_c, \quad b_{ce} = b_0 + b_{c1} + b_{c2} \quad (5.1)$$

其中

l_0 -- 钢梁计算跨度;

b_0 -- 钢梁上翼缘宽度;

h_c -- 混凝土翼缘板计算厚度;

b_{c1}, b_{c2} -- 相邻钢梁间净距 S_0 的 $1/2$, b_{c1} 尚不应超过混凝土翼缘板实际外伸长度 S_1 .

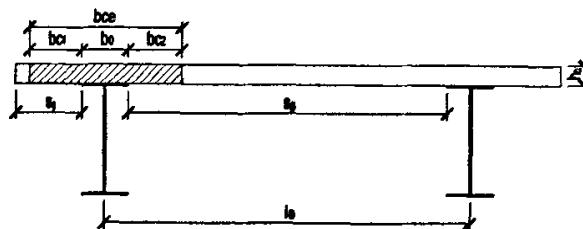


图 5.1 组合梁混凝土翼缘板的有效宽度

可以看出，这种折算方法已经考虑了板参与梁的共同工作，但是，忽略了板与梁之间连接情况对共同工作程度影响这一非常关键的问题。

2. 基于有限元方法的位移协调模式

板片空间结构稳定性分析中，对于板与骨架之间的共同工作问题，大多数文献采用位移完全协调的模式，用有限元方法分析，把结构离散成板壳元、梁单元，这些单元在节点上彼此连接，具体到有限元建模来说就是在有梁出现的地方将面分开，分界线上划分梁单元，而面划分壳单元，以保证梁单元和板壳单元在结合处有公共的节点，公共节点满足平衡条件和变形协调条件，从而建立组合结构的刚度方程，以跟踪到结构的屈曲失稳全过程^[33]。

对于采用高强螺栓作为连接件的结构，考虑到抗扭相应的内力是不能传递的，也就是梁受扭方向的转角与板相应方向的转角是不协调的，有采用只存在五个方向的力学传递关系，即 $u, v, w, \theta_x, \theta_y$ ，的连接件单元（见图 5.2）。

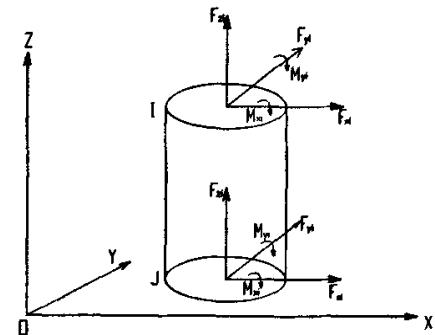


图 5.2 连接件单元

以上处理方法，考虑了板与骨架的位移协调性，但是，并不能真实反映板片空间结构的实际工作状况。尤其是在用有限元法进行分析时，存在以下三个方面的问题：

- (1) 到底在面分开的地方（面板和梁交接处）划分几个单元合适，即要多少节点完全耦合才能反映出真实的工作状况；
- (2) 板与骨架在没有公共节点的地方如何体现出它们之间的相互作用；
- (3) 有限元方法中各种各样的单元（如板壳单元、梁单元等）在公共节点处位移协调如何。

在工程实践中，板片空间结构中板与骨架之间仅有有限个焊接点或螺栓连接，而在其它地方是不连续的，而且存在着一定的初始间隙，当在面板上加载时，板和骨架发生变形，间隙会发生变化，二者就可能发生接触，从而传递作用力。

因此，将接触问题引入到板片空间结构基于共同工作的稳定分析中，既能解决板与骨架之间非连接处的位移协调问题，又能充分考虑到摩擦和力的传递问题，本文的主要工作就是在稳定分析中引入接触模型，分析接触共同工作对此类结构稳定性的影响。

§ 5.2 模型介绍

§ 5.2.1 板片空间结构分析中采用的单元模型

ANSYS 程序中有大量不同类型的单元供用户来选择，单元类型从简单的杆单元和梁单元，到较为复杂的层合壳单元和大应变实体单元，其中大多数可用于结构分析。结合基于共同工作的板片空间结构稳定性分析的特点和实际应用的经验，本文主要采用以下三种单元：

➤ 梁单元 BEAM188

BEAM188 单元是 ANSYS5.5 版开始出现的一种新型梁单元，它基于铁摩辛柯梁理论，适合于细长梁或适度深梁的计算分析，并可考虑剪切变形的影响，其使用及后处理比传统的梁单元来说，更加直观方便，具有广泛的适用性。

BEAM188 单元是两节点 (IJ) 单元，每个节点具有六个或七个自由度，自由度的多少取决于用户对 KEYOPT(1) 的选择。如果选择 KEYOPT(1)=0 (程序默认选择)，则每个节点有六个自由度，即沿节点 X,Y,Z 方向的平动和绕节点 X,Y,Z 轴的转动；如果 KEYOPT(1)=1，则增加一个翘曲自由度。

BEAM188 单元具有应力刚化及大变形特性，并支持弹塑性或蠕变模型，单元形式如图 5.3 所示。

➤ SHELL181 壳单元

SHELL181 壳单元适用于薄壳或中等厚度的壳结构。该单元有四个节点，每个节点有六个自由度，分别为沿 X,Y,Z 方向的平动和绕节点 X,Y,Z 轴的转动。退化的三角形单元只用于网格生成的过渡单元。

SHELL181 壳单元具有应力刚化及大变形功能。该单元有强大的非线性功能，并有截面数据、分析、可视化功能，可以定义截面偏心，单元形式如图 5.4 所示。

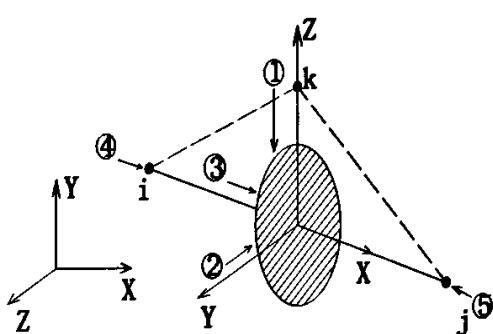


图 5.3 BEAM188 梁单元

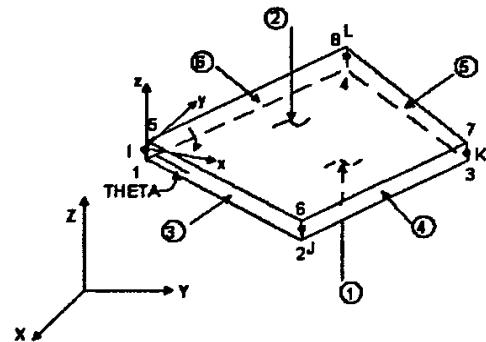


图 5.4 SHELL181 壳单元

➤ CONTACT52 接触单元

CONTACT52 接触单元是空间接触单元，在 CONTACT52 接触单元中，接触面垂直于节点 I,J 的连线。

CONTACT52 接触单元能够模拟空间点对之间的接触状态（接触、滑动），并可以考虑库仑摩擦。

CONTACT52 接触单元需要定义点对之间的初始间隙或默认以初始节点几何位置计算初始间隙；必须定义一个合适的法向接触刚度 KN。

单元形式如图 5.5 所示：

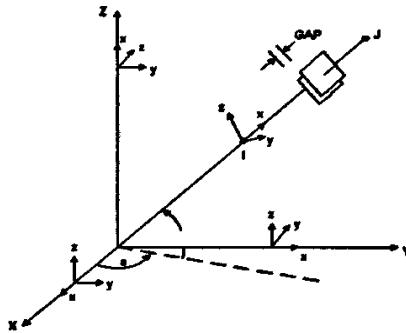


图 5.5 CONTACT52 接触单元

§ 5.2.2 板片空间结构有限元建模

本文首先分析一个常见的三向板杆组合结构模型（见图 5.6），整个结构共由 19 个节点，42 根杆件，24 块板组成。结构模型参数为：跨度 $L = 8m$ ，矢高 $f = 1.6m$ ，所有杆件采用 $\phi 40 \times 2$ 圆钢管，钢板厚 $t = 10mm$ 。杆件之间用螺栓球连接，杆件与板之间点焊连接，且有一定的初始间隙。模型的最外围角点采用固定支座。钢管和钢板的材料弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5 MPa$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ 。

对整个结构进行有限元离散，为描述和分析的方便，我们取其中一个三角形区域加以分析：

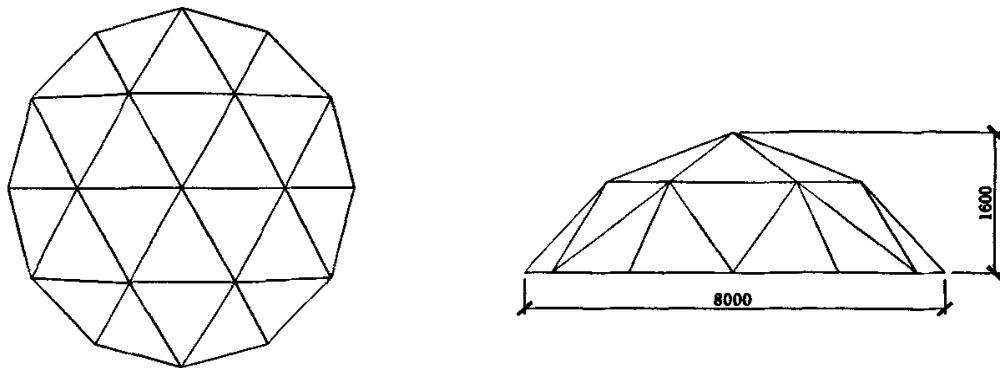


图 5.6 三向板杆组合结构模型

首先，所有的杆件采用梁单元 BEAM188 来划分，所有的面板采用 SHELL181 来划分。每个杆件及面板的边界都定数划分，即所有杆件统一 N 等分。之所以定数划分，是基于以下几点考虑：

1. 考虑到每个杆件轴线长度相差较小，定数划分可以保证所有单元几何尺寸相当。
2. 考虑到方便与完全协调模型进行对比，在完全协调模型中，杆件作为面板的分界线，梁单元和板壳单元在结合处有公共的节点，定数划分可以实现结合处有公共节点。
3. 考虑到接触模型建模的需要，即除板杆焊接处完全耦合外，其它非连续处需建立接触对，定数划分可以保证接触单元建模简单方便。

其次，针对梁单元和壳单元在节点处的连接问题，可以通过耦合梁单元和壳单元公共节点的自由度来实现，所谓耦合节点自由度，就是迫使自由度列向量中某些数值相等，具体就是耦合 SHELL181 和 BEAM188 在公共节点处的三个线位移及三个转角位移，使其相等。

最后，就是杆件与板片非连续处单元的处理，这是整个结构共同工作问题数值模拟的关键。

单独从结构中取出如图 5.7 所示的三角形区域，在面板周边与杆件相对应处，按照各个节点对应关系，安置点对接触单元 CONTACT52 单元。本文利用 ANSYS 程序提供的参数化语言 (APDL) [60,61]，可以非常方便准确地建立所有的接触对。

以上就是建立板片空间结构有限元模型的基本步骤和方法。

利用 APDL 语言建立接触单元，程序命令流如下所示：

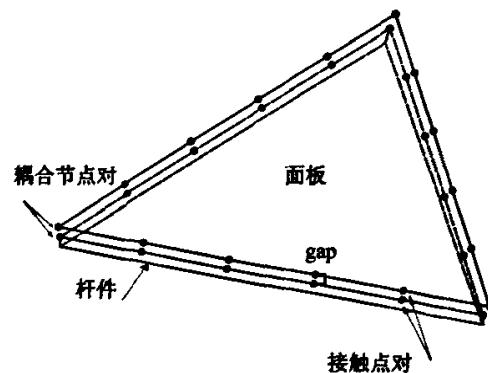


图 5.7 板与杆件之间接触单元的安置示意图

KSEL,S,,,	! 选择需要建立位移耦合关系的关键点
KPLOT	! 显示所有被选中的关键点
CM,CPKP,KP	! 建立以上被选择关键点的集合组件 CPKP
CMSEL,CPKP	! 重新选择关键点集合 CPKP
NSLK,S	! 选择关键点集合 CPKP 上附属的单元节点
CPINTF,ALL,JX	! 耦合所有满足节点距离小于 JX 的节点对
ALLSEL,ALL	! 选择所有元素
ET,ENUM,CONTAC52	! 采用接触单元 CONTAC52 模拟空间点对接触
KEYOPT, ENUM,1,0	
KEYOPT, ENUM,3,0	
KEYOPT, ENUM,4,0	
KEYOPT, ENUM,7,0	
R,RNUM,KN,0.01,,,,	! 接触单元实参, KN 为空间点对接触刚度
TYPE, ENUM	! 赋予接触单元属性
MAT, MNUM	! 赋予接触单元材料属性
REAL, RNUM	! 赋予接触单元实参
ESYS, 0	! 在世界坐标行下建立接触单元
SECNUM,,	
TSHAP,LINE	
CMSEL,CPKP	! 重新选择关键点集合 CPKP
NSLK,U	! 剔除关键点集合 CPKP 上附属的单元节点
EINTF,JX, ,LOW,,,,	! 在所有满足节点距离小于 JX 的节点对之间建立接触单元

§ 5.3 板片空间结构稳定分析有限元数值计算

§ 5.3.1 影响数值计算的关键因素

影响板片空间结构模型数值计算的因素有很多, 关键因素主要有以下四个方面:

- 不同精细程度接触单元, 即图 5.7 中每条边界上接触对的个数。
- 不同的接触刚度, 即选取多大的接触刚度是合适的。
- 不同的接触间隙, 即接触对之间的初始间隙。
- 不同的摩擦系数。

一、首先考察接触单元个数对稳定分析的影响

接触点对个数的设置是影响板片空间结构数值模拟结果的因素之一,文献[32]就接触单元个数对该类结构的一般力学性能计算结果的模拟的影响问题作了大量工作,并给出有益结论:

随着单元个数安置的细化,结构各部分的力学参数(应力、位移)相对变化率的数值趋于平缓,也即计算结果趋于一个稳定值,同时也说明盲目细化单元的划分并不可取,一般每条边界安置一定数量的接触单元,数值计算结果基本稳定。

那么,在板片空间结构稳定性分析中,这一结论是否可以成立呢?我们就图 5.6 所示模型对这一问题进行分析。

首先分析单元划分精度对完全协调模型的影响,这有助于了解梁单元和壳单元划分情况(耦合点对个数)对板片空间结构稳定分析的影响,图 5.8 为结构在不同耦合节点对个数下的荷载一位移曲线。

图 5.9 为不同耦合节点个数下临界荷载和屈曲挠度计算值的变化规律。

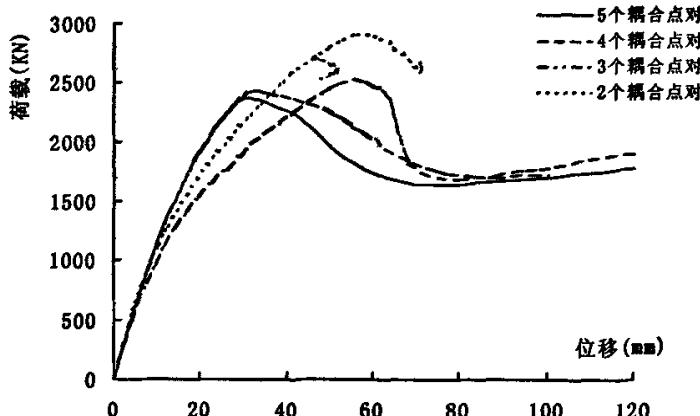


图 5.8 顶点处节点荷载一位移全过程曲线(完全协调模型)

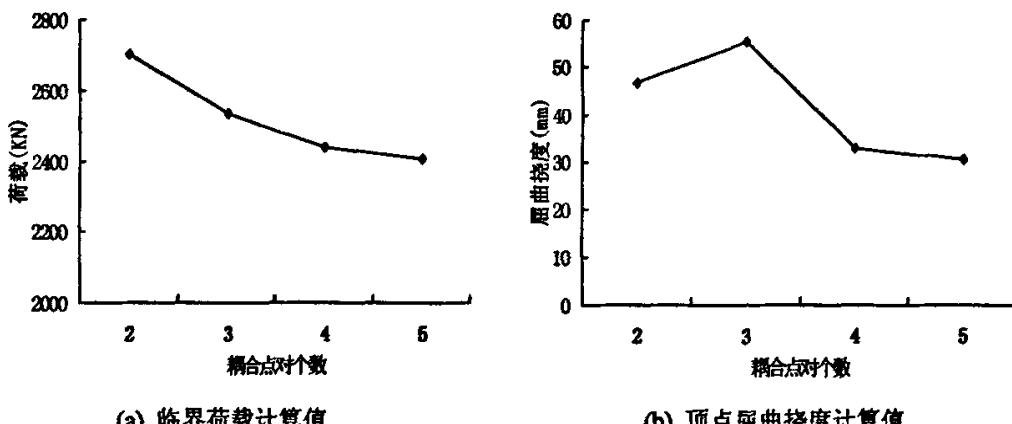


图 5.9 耦合点对个数对结构稳定性计算结果的影响(完全协调模型)

从图 5.8—图 5.9 中可以看出：

对于完全协调模型，耦合节点的个数对结构的稳定性计算结果有较大影响，结构的临界荷载计算值从 2 个耦合节点对时的 2705kN 降至 5 个耦合节点对时的 2372kN，临界荷载计算值降低了 12.3%；而结构的屈曲挠度计算值则从 46.7mm 增大到 55.5mm 而后又降至 30.5mm，计算值变化幅度达 45%。可见，耦合节点对的个数（耦合单元个数）对结构模型的临界荷载和屈曲挠度的计算值影响较大。

但是，当耦合节点对个数安置 4—5 个时，结构的荷载一位移关系曲线差异较小，临界荷载和屈曲挠度计算值的变化趋于平缓。

下面，主要针对接触模型进行详细研究分析。按照完全耦合模型分析的思路，接触点对的个数也分别安置 2—5 个，计算结果见图 5.10 和图 5.11。

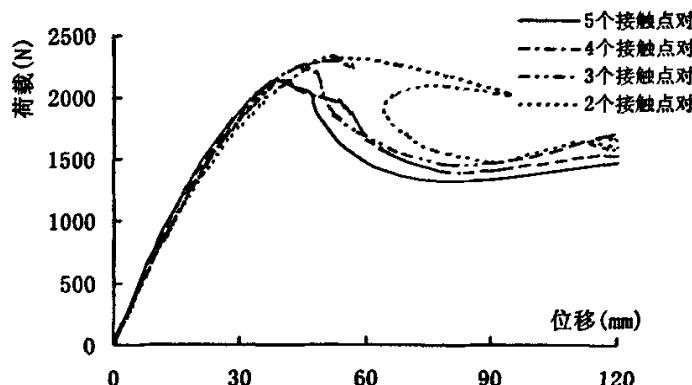


图 5.10 顶点处节点荷载一位移全过程曲线

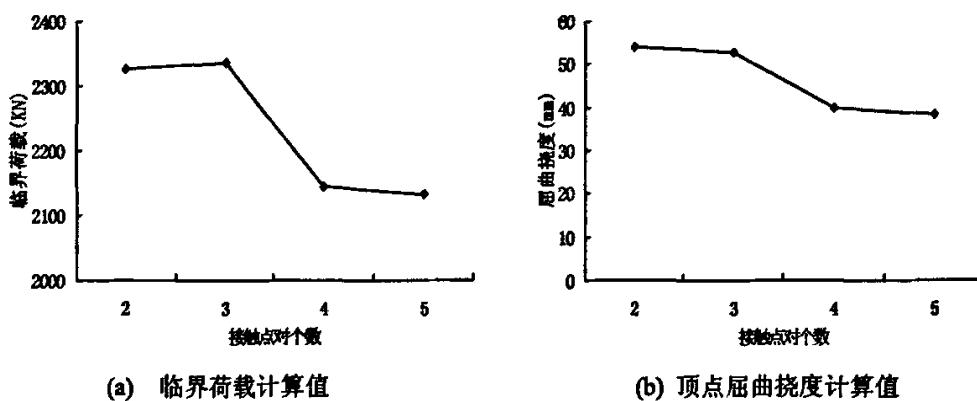


图 5.11 接触点对个数对结构稳定性计算结果的影响

从结构模型的荷载一位移关系曲线和不同接触点对个数与临界荷载及屈曲挠度计算值的关系可以看出：

对于接触模型，接触点对的个数的设置对结构稳定性的计算结果影响较大，结构的临界荷载的计算值从2个接触点对个数时的2326KN降至5个接触点对时的2132KN，临界荷载计算值降低了8.4%；而结构的屈曲挠度的计算值则从54.1mm降至38.4mm，屈曲挠度计算值降低了29.0%。

而且，当接触点对个数为2—3时，荷载一位移曲线在跟踪过程中出现了“回漂”现象，说明在临界荷载点处出现了数值计算的不稳定。

但是，当接触点对个数设置到一定数量时，荷载一位移关系曲线在跟踪过程差异较小，临界荷载和屈曲挠度的计算值变化趋于平缓。

二、考察接触刚度对稳定分析计算的影响

接触刚度是影响板片空间结构稳定分析的又一个主要因素，接触刚度的大小直接决定了计算结果的精度和计算过程的收敛性。

一般的接触分析中，单元的法向刚度和切向刚度根据下面的公式计算

$$K_n = fEh \quad (5.2)$$

其中， E 是较柔材料的弹性模量， f 取值范围为：0.01~100， h 是接触厚度。

但是，式(5.2)中 f 的取值范围太大，带有一定的经验性。

确定接触刚度理想的方法就是根据结构刚度的定义式：

$$P = K\Delta \quad (5.3)$$

即结构产生单位位移所需要施加的力。然而(5.3)式的方法却要以二次建模为代价，不便采用。

这里，为了找到最合适的接触刚度取值范围，以便更清楚地了解接触刚度对结构稳定分析的影响，我们取五个不同数量级的接触刚度(2.0E3~2.0E7)进行计算。

计算结果见图5.12~图5.14。

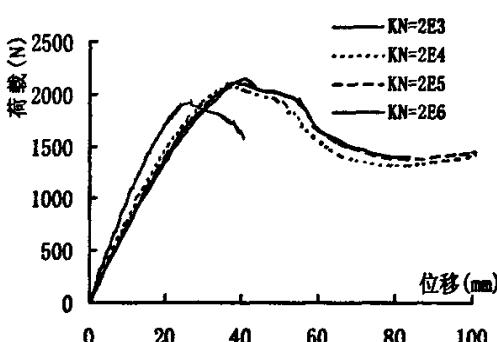


图5.12 顶点处节点荷载一位移全过程曲线

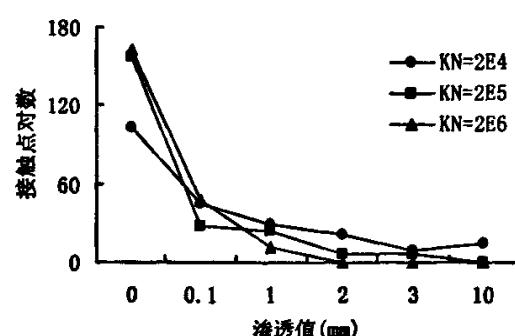


图5.13 接触点对的伪渗透

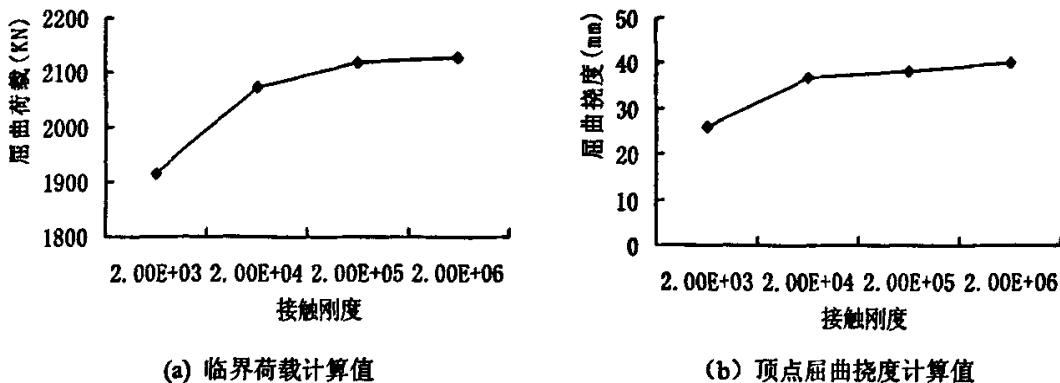


图 5.14 接触刚度对结构稳定性计算结果的影响

从计算结果图 5.12~图 5.14 可以看出：

接触刚度对结构的稳定性计算有较大影响，结构的临界荷载计算值从接触刚度 $KN=2.0E3$ 时的 1915KN 增大到接触刚度 $KN=2.0E6$ 时的 2144KN，临界荷载计算值增加了 12.1%；而屈曲挠度计算值则从 26mm 增大至 40mm，增加了 87.5%。

而且接触刚度 $KN=2.0E3$ 时，由于接触刚度太小导致前期计算误差积累过大，从而在跟踪到临界点附近时出现计算不收敛现象， $KN=2.0E7$ 时则因接触刚度太大，数值计算前期就出现严重震荡。

另外，当接触刚度 $KN=2.0E3\sim2.0E4$ 时，大多数接触点对出现“伪渗透”现象，最大渗透值达到 10mm，显然是不合理的。

但是，当接触刚度达到 $2.0E5\sim2.0E6$ ($f=0.1\sim1$) 时，结构模型的荷载一位移全过程曲线基本吻合，临界荷载和屈曲挠度的计算值变化趋于平缓，而且，绝大多数接触节点对没有出现“伪渗透”。

三、考察初始间隙 (GAP) 对结构稳定分析计算的影响

文献[30]就接触初始间隙对板片空间结构的一般力学性能计算分析的影响作了精辟的分析，并对加载过程中的接触状态进行了详尽的描述。

这里，主要研究分析初始间隙对板片空间结构稳定性数值计算的影响。数值计算结果见图 5.15~图 5.16。

从图 5.15~图 5.16 的计算结果可以看出：

初始接触间隙对板杆组合结构稳定性计算的影响并不明显。初始间隙(GAP)从 0.01mm 增大至 0.5mm 时，各条荷载位移曲线基本上是重合的，只有到了 $GAP=1mm$ 时，临界荷载和屈曲挠度才有一些变化，但变化幅度并不大。

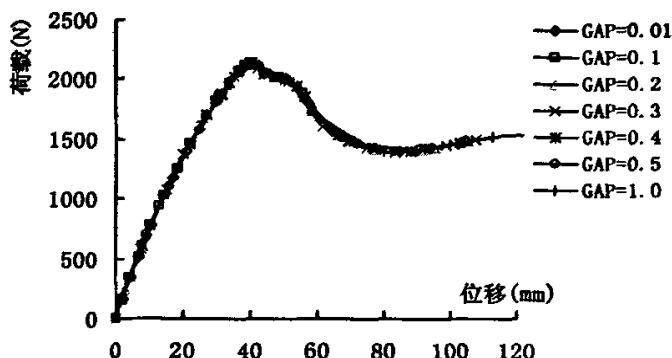


图 5.15 顶点处节点的荷载一位移全过程曲线

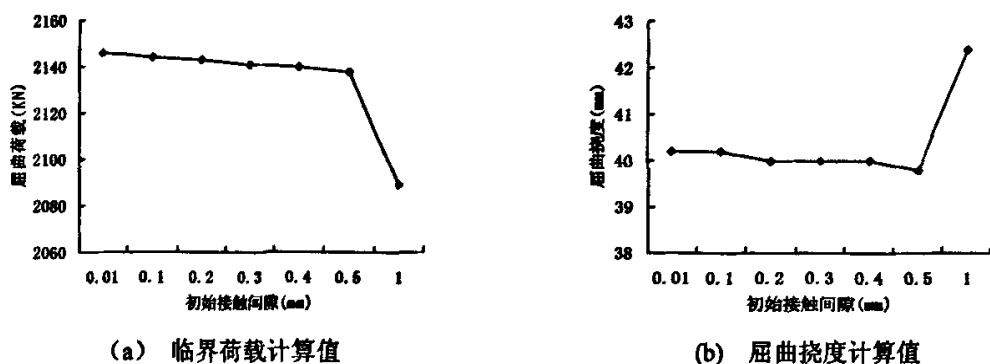


图 5.16 初始接触间隙对结构稳定性计算结果的影响

四、考察摩擦系数对结构稳定分析的影响

由于摩擦系数是一个很难实际确定的因素，所以在计算分析时需要多考虑几种摩擦系数，然后针对不同的设计摩擦系数进行修正。

表 5.1、图 5.17 和图 5.18 是取不同摩擦系数时的数值计算结果。

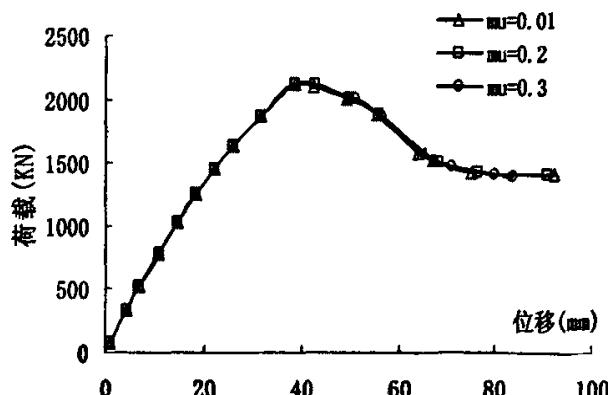


图 5.17 顶点处节点荷载一位移全过程曲线

表 5.1 摩擦系数对临界荷载及屈曲挠度计算值的影响

摩擦系数	0.01	0.2	0.3
临界荷载(KN)	2139	2144	2145
屈曲挠度(mm)	40.1	40.2	40.2

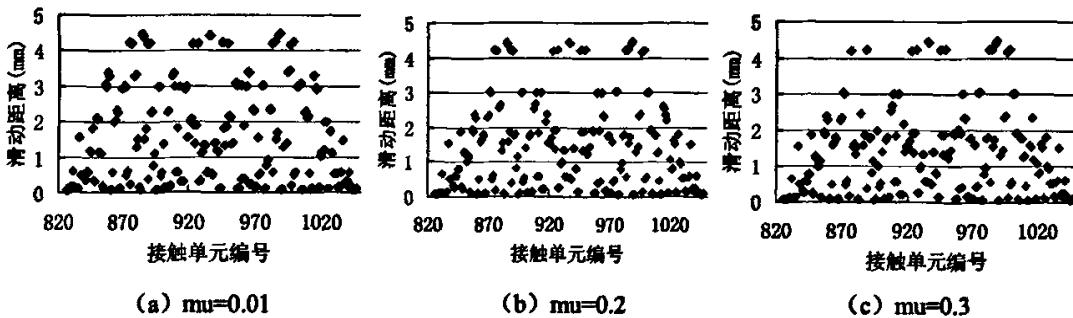


图 5.18 摩擦系数对全部接触点对滑动距离的影响

从图 5.17 和表 5.1 的计算结果可以看出：多数接触点对的相对滑移变形相对于结构尺寸是非常小的量，摩擦系数的取值对结构的稳定性数值计算影响不明显。

图 5.18 是对 200 对接触点对不同摩擦系数下相对滑移距离做的统计，从图中点的分布可以看出，摩擦系数从 0.01 增加到 0.2 时，大部分接触点对的相对滑移距离发生了较大变化，而摩擦系数从 0.2 变化到 0.3 时，多数接触点对之间的相对滑移距离变化不明显。

§ 5.3.2 接触模型与完全协调模型的数值计算结果比较

综合考虑以上各种关键因素的影响，我们还是就图 5.6 所示的三向板杆组合结构的稳定性进行分析比较。

对于完全协调模型，各杆件等分为 5 个梁单元，每个三角形区域的面板和梁在交接处就有 4 对耦合点对。对于接触模型，各杆件也等分为 5 个梁单元，每个三角形区域的面板和梁非连续处就有 4 对接触点对，接触刚度取 $KN=2.0E5$ ，接触初始间隙取 $GAP=0.1mm$ ，摩擦系数取 $\mu=0.2$ 。

两种模型的计算结果见图 5.19~图 5.21，比较接触模型与完全协调模型的计算结果可以看出：

由于完全协调模型强迫板和杆件所有公共节点完全协调，而接触模型只是在板杆连接处位移完全协调，不连续处或有间隙的地方安置接触对，所以前者的约束作用较后者的大许多，前者的临界荷载计算值为 2438KN，屈曲挠度计算值为 33.2mm；后者的临界荷载计算值为 2144KN，屈曲挠度计算值为 40.3mm。前者的线性段刚度约为后者的 1.38 倍。

完全协调模型和接触模型的稳定屈曲形态（图 5.21）基本相似，都属于局部失稳。

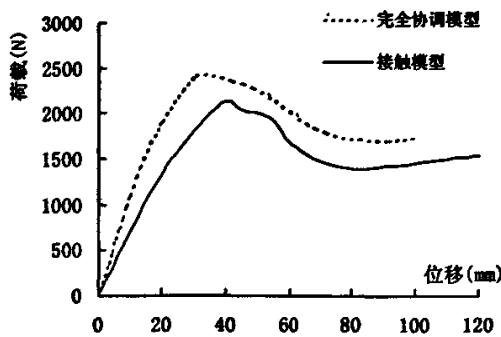


图 5.19 顶点处节点的荷载一位移全过程曲线

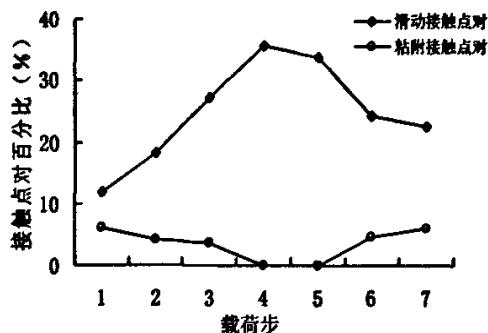
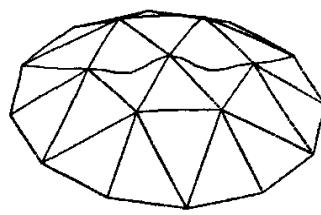
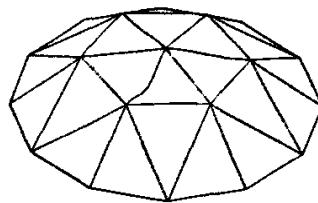


图 5.20 接触模型全过程接触状态



(a) 完全协调模型



(b) 接触模型

图 5.21 板杆组合结构失稳破坏形态

图 5.22 描述的是模型加载过程中，所有接触点对的滑移状态，为图形清楚起见，根据滑移距离最大值 SLDM 的不同分别绘出 (a)-(d)。

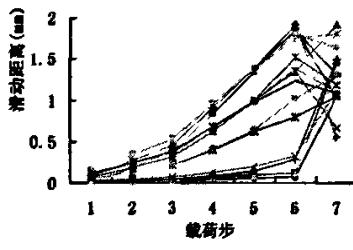
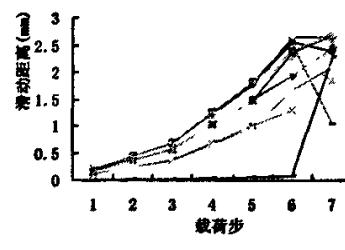
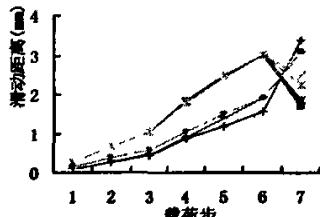
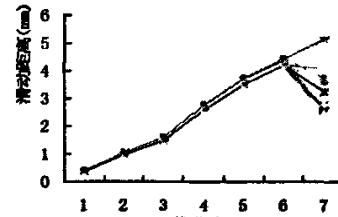
(a) $SLDM < 2\text{mm}$ (b) $SLDM < 3\text{mm}$ (c) $SLDM < 4\text{mm}$ (d) $SLDM < 6\text{mm}$

图 5.22 接触点对滑移状态

从图 5.20 和图 5.22 可以看出，在板片空间结构变形过程中，板杆非连续处的接触状态发生了很大变化。

加载初期，结构开始出现较小的变形，部分安置的节点对进入接触状态，粘附接触和滑动接触现象都有所体现，但节点对相对滑动位移还较小，没有“伪渗透”现象发生；随着载荷的增加，大多数节点对出现相对滑动，而且滑动距离呈现增大趋势，部分节点对之间发生“伪渗透”；当荷载达到临界荷载时（第 4~5 载荷步），结构发生几何突变（失稳），此时接触状态也发生很大变化，滑动接触点对的相对滑动距离出现跳跃，发生“伪渗透”的接触点对的渗透量也出现跳跃，这些现象都生动地展现了结构的整个失稳过程。

§ 5.3.3 主要结论分析

从本节的计算分析结果，可以得到以下结论：

1. 以上分析的四种因素对板片空间结构的稳定性计算都有影响，但影响的程度大小不尽相同。其中，单元划分的精细度和接触单元的接触刚度对结构的极限承载力和屈曲挠度计算值影响较大，而接触间隙的大小对结构的影响则不明显，摩擦系数对结构的板杆之间的滑移有一定影响。
2. 单元划分的精细度对完全协调模型和接触模型的分析都有影响。但就本文所研究的常见板片空间结构而言，一般每条边界安置一定数量的耦合点对（对于完全耦合模型）或一定数量的接触点对（对于接触模型），数值计算得到荷载一位移全过程曲线基本稳定，临界荷载和屈曲挠度的计算值变化趋于平缓。因而，盲目细化单元的划分也不可取。
3. 对于接触模型，接触刚度的取值至关重要。接触刚度太小则造成前期数值计算误差积累过大，导致临界点附近计算发散，接触刚度太大则数值计算初期就容易出现严重的震荡。若根据式（5.1）取初始接触刚度，则本文建议 f 取值范围为 0.1~1.0。
4. 接触间隙的大小对板片空间结构稳定性的计算结果影响不明显。
5. 摩擦系数在实际结构计算中较难确定，对于本文研究的板片空间结构，摩擦系数可以通过材性试验得到。
6. 在计算过程中，接触模型可以跟踪到板杆之间在某些关键时间点处的接触状态（接触、滑移），而这对研究板杆之间的共同工作问题非常重要。
7. 通过比较接触模型和完全协调模型的数值计算结果可以看出，接触模型更能反映出结构的实际工作状况，因此基于接触模型基础上的稳定分析的计算结果更能反映出实际情况。

§ 5.4 接触模型与试验结果的比较

下面就三个试验模型，利用本文提出的接触模型加以研究分析，并与完全协调模型的分析结果及试验结果进行比较。这三个模型试验均是东南大学空间结构及形态研究所组织实施的。

§ 5.4.1 模型一

1. 模型简介^[17]

试验模型是由单层网壳骨架和三角形平铺板组合而成的单层板杆组合结构，如图 5.23 所示。试验模型的理论尺寸见图 5.23 (b)，理想节点坐标及试验节点坐标见表 5.2。

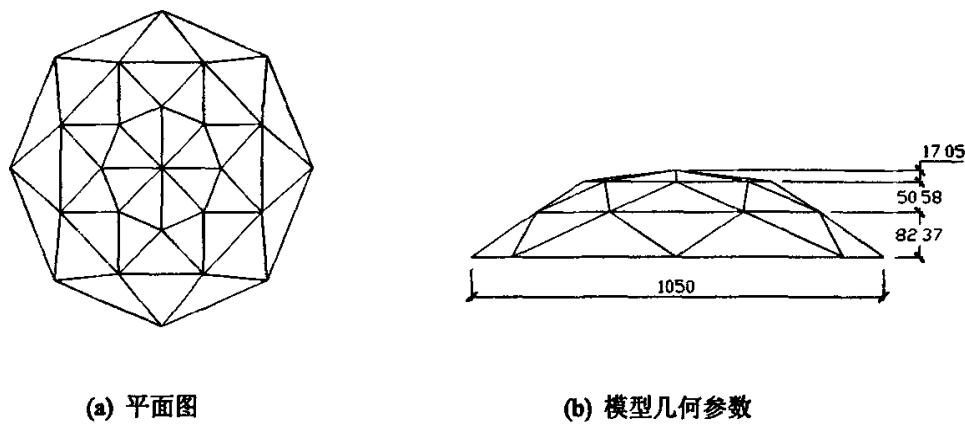


图 5.23 模型示意图

表 5.2 模型节点坐标值（理想值/实测值）

节点	X/mm	Y/mm	Z/mm	节点	X/mm	Y/mm	Z/mm
1	0/0.1	0/0.2	150.0/145.0	14	-332.9/-337.0	137.9/141.0	82.3/85.1
2	183.3/188.0	0/0.10	132.9/134.0	15	-332.9/-336.0	-137.9/141.0	82.3/81.0
3	129.6/131.0	129.6/131.0	132.9/136.0	16	-137.9/-142.0	-332.9/-340.8	82.3/81.0
4	0/0.2	183.3/191.0	132.9/141.0	17	137.9//141.0	-332.9/-338.0	82.3/85.0
5	-129.6/-132.0	129.6/134.0	132.9/137.0	18	371.2/371.0	-371.3/-371.0	0/2.1
6	-183.3/-189.0	0/0.3	132.9/135.0	19	525.0/525.3	0/0.2	0/2.9
7	-129.6/-131.0	-129.6/-130.0	132.9/132.0	20	371.2/371.5	371.2/371.2	0/5.0
8	0/0.1	-183.3/-192.0	132.9/129.0	21	0/0.4	525.0/525.1	0/4.1
9	129.6/132.0	-129.6/-132.0	132.9/131.0	22	-371.2/-371.3	371.2/371.2	0/3.4
10	332.9/340.0	-137.9/-140.0	82.37/80.1	23	-525.0/-525.3	0/0.2	0/3.1
11	332.9/341.0	137.9/141.0	82.3/89.1	24	-371.2/-371.3	-371.2/-371.2	0/3.9
12	137.9/143.0	332.9/337.0	82.3/91.1	25	0/0.1	-525.0/-525.1	0/2.0
13	-137.9/-142.0	332.9/334.0	82.3/83.0				

模型的钢骨架杆件为直径 8mm 的实心圆杆，节点为直径 30mm 的钢球，面板采用厚度为 0.8mm 的 A3 钢板，模型杆件和节点焊接，由于面板较薄，为避免薄板因焊接被烧透，杆件与面板的连接通过直径为 2mm 的螺钉连接。模型的 8 个支承点采用固定支座。

杆件材料屈服强度为 310MPa , 弹性模量为 $2.01 \times 10^5\text{N/mm}^2$, 钢板材料的屈服强度为 290MPa ,

弹性模量为 $2.01 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。模型在中心顶点作用一集中荷载。

基于 ANSYS 程序进行实体建模和有限元数值计算，利用前面介绍的建模方法可以准确地建立板杆之间的接触点对（模型一的有限元模型如图 5.24（图中隐去了板单元）所示）。进行数值计算分析时要注意：

- (一) 激活大变形选项；
- (二) 考虑应力刚化效应；
- (三) 激活弧长法，设置合理稳定的弧长；
- (四) 利用力的收敛准则检查计算过程的收敛性；
- (五) 材料按双线性等向强化模型考虑。

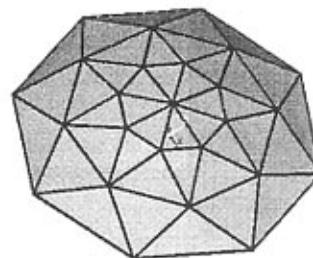


图 5.24 有限元模型

如果在分析过程中出现回漂，有必要中止正在进行的计算，重新检查各个分析选项的设置，然后再重新启动分析计算过程，这可能需要反复多次。

2. 结果分析比较

为了更全面地了解该模型的稳定性能，对模型分别按理想节点坐标和实测节点坐标建模，并分别考虑板无偏心和板有偏心两种情况。

图 5.25 描述的是四种情况下模型顶点处荷载一位移全过程曲线，四种情况下的临界状态的计算值如表 5.3 所示。

通过图 5.25 和表 5.3 可以看出，节点坐标的偏差（几何缺陷）对结构的极限承载力计算值有较大影响，考虑结构几何缺陷的计算结果较之理想模型的计算结果低许多。所以设计中必须考虑缺陷对结构稳定性的影响。

另外面板的几何偏心对结构的极限承载力计算值也有非常大的影响，(a) 和 (c) 比较虽然极限承载力计算值差别不大，但结构的后屈曲性能却有明显的差异，考虑偏心对结构屈曲后性能影响较大。所以设计中应该考虑板的偏心影响。

试验测得的实际模型的稳定临界荷载为 $4.00 \text{ KN}^{[17]}$ ，考虑实际偏心完全协调模型的临界荷载的计算值为 7.74 KN ，本文考虑实际偏心接触模型的临界荷载的计算值为 5.88 KN 。可见，由于本文提出的接触模型更好地考虑了板杆之间实际的连接情况，所以接触模型计算得到的模型临界荷载值较之完全协调模型计算得到的结果和试验结果更加接近。

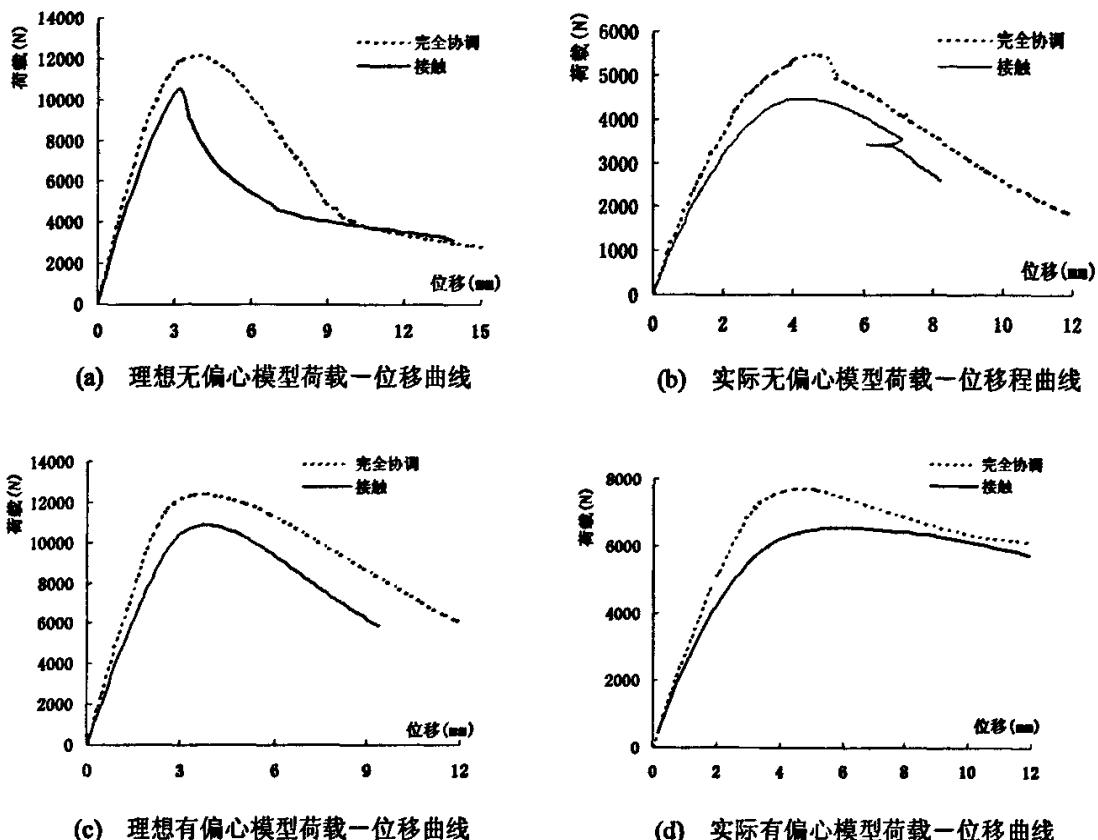


图 5.25 顶点处节点荷载一位移全过程曲线

表 5.3 模型临界状态计算值的比较

模型	理想无偏心	实际无偏心	理想偏心	实际偏心
完全协调模型	临界荷载 (KN)	12.20	5.49	12.45
	屈曲挠度 (mm)	4.00	4.75	3.85
接触模型	临界荷载 (KN)	10.50	4.47	10.90
	屈曲挠度 (mm)	3.20	4.25	3.74

图 5.26 描述的是模型的破坏失稳形态，通过图 5.26（图中均隐去了板单元）可以看出，中心点加载时结构的破坏形态均为中心加载点局部屈曲，这与文献[17]所描述的试验现象吻合。

为了更清楚地了解板杆之间的接触滑移状态，对模型中的接触点对进行了全过程的跟踪，另外，选取一些关键点处（图 5.27）的接触点对加以分析。

图 5.28 描述的是模型板杆之间所有的接触点对接触状态在不同载荷步之间的变化。

图 5.29 描述的是 A 点处（图 5.27）接触点对的接触状态随加载过程的变化。

图 5.30 描述的是 B~D 点处接触点对的接触滑移状态的时间历程。

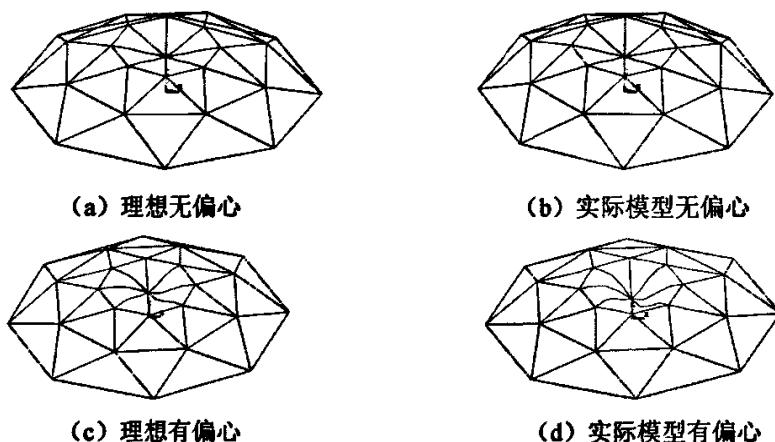


图 5.26 模型失稳破坏形态

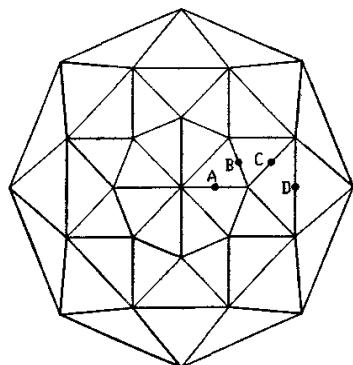


图 5.27 关键点分布示意

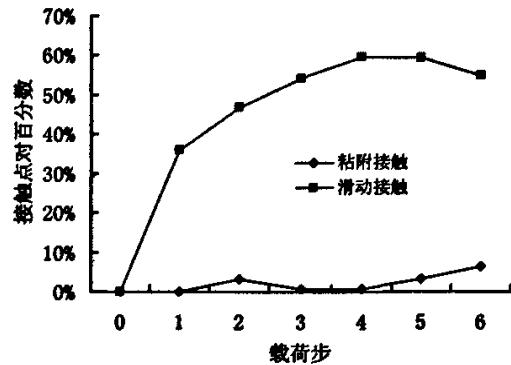


图 5.28 接触状态在不同载荷步之间的变化

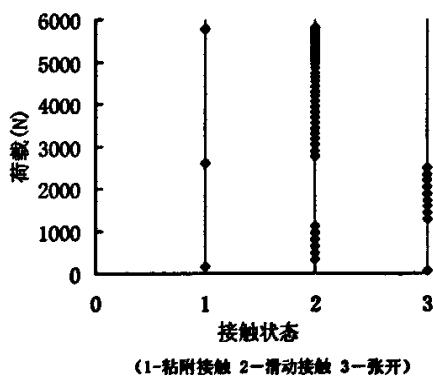


图 5.29 A 点处荷载—接触状态关系

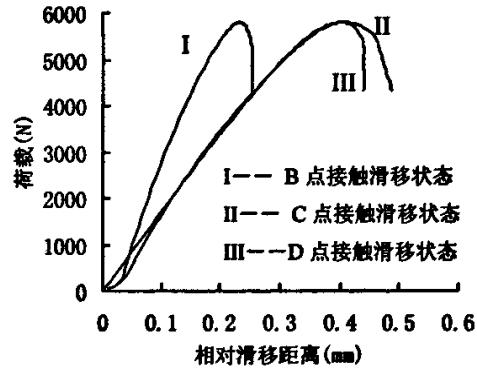


图 5.30 B~D 点处荷载—滑移关系曲线

从图 5.28 可以看出，加载开始时部分接触点对进入接触状态，随着荷载的增大，越来越多的接触点对进入接触状态，而且滑动接触点对个数总体成增长趋势，粘附接触点对个数则时多时少。

从图 5.29 可以看出，A 处的接触点对在加载开始时就进入粘附接触状态，而后随即开始滑动，当荷载增大到 1.30KN 时，又处于张开状态，荷载继续增加到 2.64KN 时，再次发生接触，随后接触点对一直处于滑动接触状态。

从图 5.30 可以看出，本文提出的接触模型可以跟踪到接触点对在整个时间历程中的滑移状态。

从以上的分析可以看出，接触模型计算得到的失稳破坏形态和试验模型的破坏形态十分吻合，相对于完全协调模型，接触模型计算得到临界荷载和试验结果更为接近。而且，本文提出的接触模型可以给出板杆之间接触滑移状态的整个时间历程。

§ 5.4.2 模型二

1. 模型简介^[27]

试验模型是由单层网壳的骨架和三角形平铺面板组合而成的单层板杆组合结构，如图 5.31 所示。

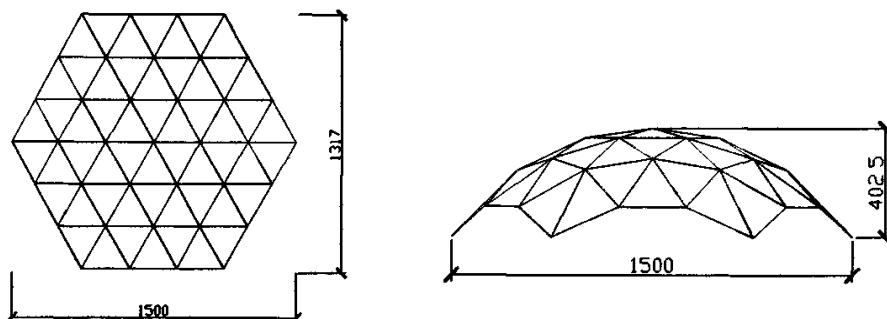


图 5.31 模型尺寸示意图

模型由 90 根直径为 8mm，材料为 Q235 圆形钢杆件，37 个直径为 30mm 的轴承钢实心球节点，和 54 块厚 0.7mm 的三角形板所组成。理论上所有节点均应落在直径为 1800mm 的球面上，模型的对角跨度为 1500mm，矢高为 402.5mm，其平面投影为正六边形；而实际上存在制作误差，表 5.4 给出了模型的实测坐标值。模型的中心顶点作用一集中载荷，模型的六个角点设计成固定支座。

基于 ANSYS 程序进行实体建模，模型的几何点坐标取表 5.4 给出的模型实测坐标，考虑板的偏心影响，该模型的有限元模型如图 5.32（图中隐去了板单元）所示。

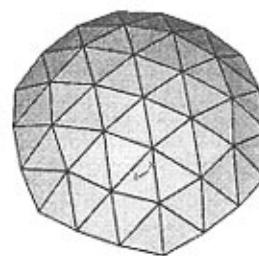


图 5.32 有限元模型

表 5.4 模型二的实测坐标

节点	X/mm	Y/mm	Z/mm	节点	X/mm	Y/mm	Z/mm
1	-367.4	646.6	430.2	20	246.1	0.5	34.0
2	-118.8	649.1	304.0	21	498.6	-0.2	154.7
3	126.2	349.9	305.5	22	752.6	-2.9	429.8
4	374.8	649.1	430.5	23	-617.6	-222.5	305.0
5	-493.3	428.0	300.0	24	-368.6	-218.9	114.8
6	-245.0	433.4	155.5	25	-122.4	-216.6	36.4
7	0.1	433.1	115.0	26	123.6	-217.3	35.8
8	251.2	431.0	156.8	27	371.5	-216.4	111.0
9	500.1	430.2	304.9	28	625.9	-214.5	303.0
10	-617.5	210.9	302.0	29	-488.2	-440.6	303.7
11	-368.5	213.0	113.5	30	-244.1	-437.3	157.5
12	-123.2	216.0	35.0	31	3.0	-436.2	114.2
13	123.1	215.1	33.9	32	250.2	-434.3	156.0
14	370.6	214.8	112.4	33	499.1	-433.2	303.3
15	622.6	212.2	304.5	34	-367.4	-660.6	430.5
16	-745.2	-5.0	430.5	35	-120.1	-659.9	304.0
17	-492.2	-2.18	156.0	36	128.2	-658.8	302.5
18	-245.9	0.5	35.5	37	375.4	-653.4	430.5
19	0	0	0				

利用前面介绍的建模方法可以准确地建立板杆之间的接触点对。进行数值计算分析时要考虑几何非线性和材料非线性的影响，初步预测一个合适的弧长，另外采用力的收敛准则检查非线性计算过程的收敛性。

2. 结果分析比较

模型的计算结果见图 5.33~图 5.34。

图 5.33 描述的是模型顶点处节点的荷载一位移全过程曲线。

图 5.34 描述的是模型失稳破坏的形态。

从图 5.33 可以看出，模型加载初期完全协调模型和接触模型的荷载一位移曲线差别不大，二者

的线刚度基本相同，然而当计算到临界状态及后屈曲阶段时，二者的荷载一位移曲线出现较大差异，可见接触共同工作对模型的后屈曲阶段影响明显。虽然接触模型在计算过程中出现了回飘现象，本文通过重新启动分析，重新调整了加载子步和弧长仍然可以顺利追踪到屈曲后荷载一位移关系曲线。

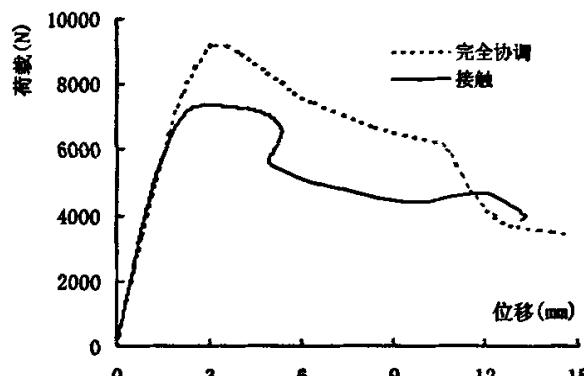


图 5.33 顶点处节点荷载一位移全过程曲线

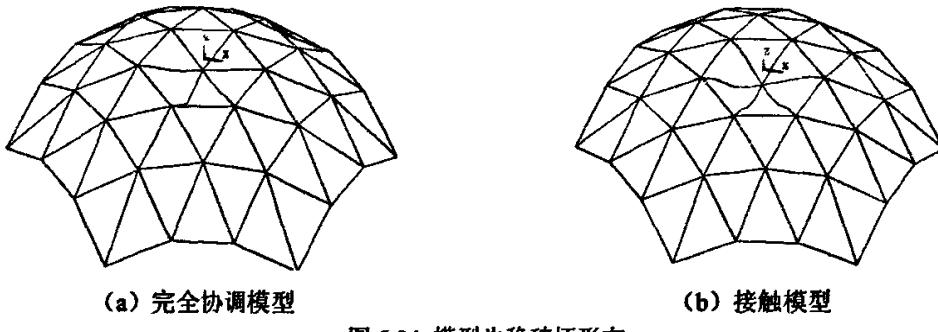


图 5.34 模型失稳破坏形态

通过图 5.34（图中均隐去了板单元）可以看出，中心点加载时结构的破坏形态均为中心加载点局部凹曲，这与文献[27]所描述的试验现象吻合。

在文献[27]中，作者通过试验测得的实际模型的临界荷载为 7.80KN，完全协调模型临界荷载的计算值为 9.23KN，本文考虑实际偏心接触模型临界荷载的计算值为 7.46KN。可见，本文的接触模型由于更好地考虑了板杆之间实际的连接情况，所以，较之完全协调模型计算得到的结果，本文的接触模型计算得到的模型的临界荷载计算值和试验结果非常接近，可见接触模型计算的结果更合理，用于实际设计更安全。

§ 5.4.3 模型三

1. 模型简介

此模型试验是东南大学空间结构及形态研究所在 2004 年 9 月在某航空集团组织实施的。

试验模型的照片如图 5.35, 理想设计轴线尺寸及荷载形式见图 5.36, 测点及支座编号见图 5.37, 模型中都采用实测截面尺寸, 中间杆 $8.02\text{mm} \times 20.19\text{mm}$; 边杆 $10.21\text{mm} \times 20.21\text{mm}$; 板厚 1mm , 支座柱 $\Phi 40$, 高度分别为 37.98mm , 38.37mm , 38.15mm , 38.14mm .

每一幅杆件通过线切割技术加工而成, 并在结点处留有凹口, 拼装后焊接, 板与杆件采用点焊方式连接。

材料试验结果为: 杆件材料弹性模量 $E=203\text{GPa}$, 屈服强度为 355MPa , 泊松比为 0.3 ; 面板材料的弹性模量 $E=201\text{GPa}$, 屈服强度为 182MPa , 泊松比为 0.3 .

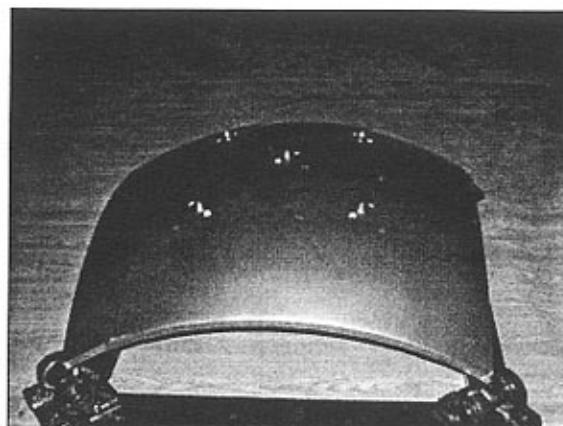


图 5.35 试验模型照片

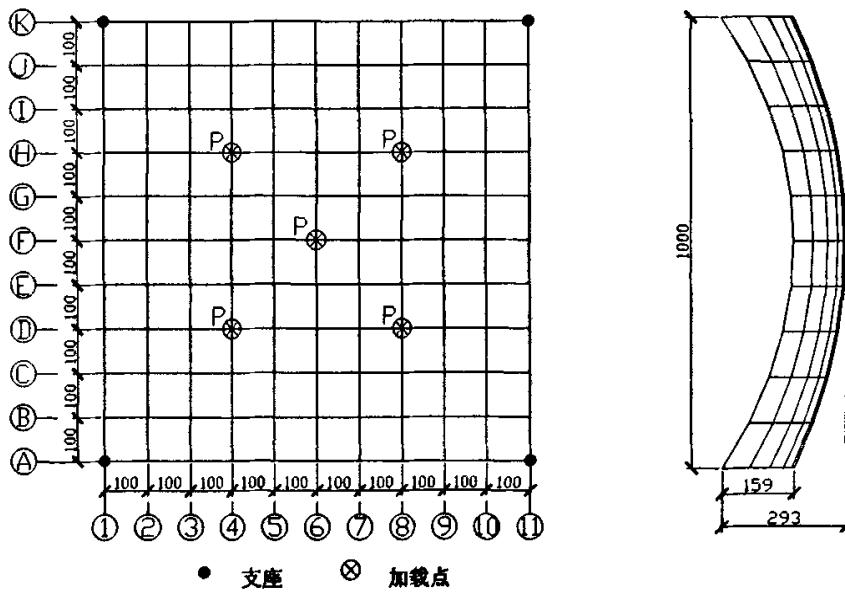


图 5.36 试验模型几何尺寸及加载形式

有限元计算模型(图 5.38)中,每根杆件划分为 4 个单元,相应的每块板划分为 16 个单元,在板杆非焊接处建立接触点对。考虑大变形效应,即采用大变形,小应变假定,材料特性按理想弹塑性模型考虑。非线性求解采用弧长法与增广拉格朗日法相结合的方法,采用力的收敛准则。五个加

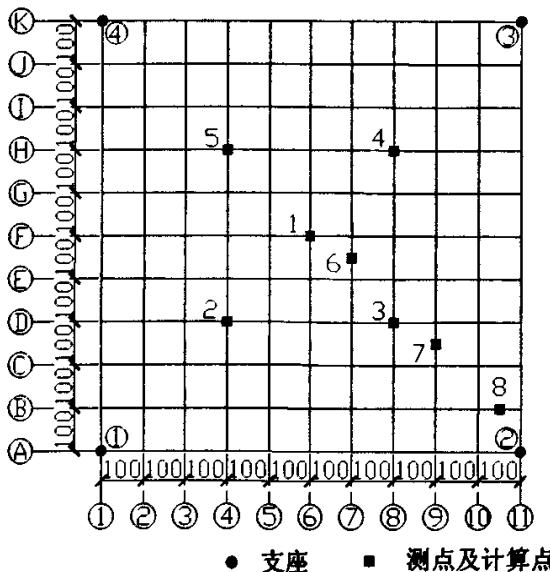


图 5.37 测点及计算点位置和支座编号

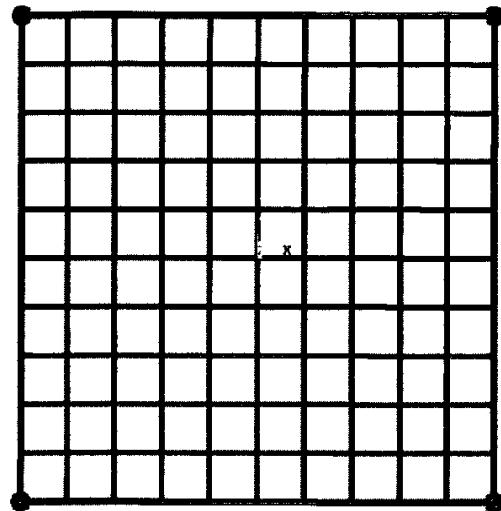


图 5.38 有限元模型

载点荷载大小相等并保持同步增加或减小,忽略自重的影响。

2. 结果分析比较

图 5.39 描述的是模型 5 号位移测点的荷载一位移全过程曲线。

图 5.40 描述的是模型 1 号位移测点的荷载一位移全过程曲线。

图 5.41 描述的是接触模型追踪到的 2 号支座的荷载一位移全过程曲线。

试验破坏形态见图 5.42,计算所得到的模型破坏形态见图 5.43。

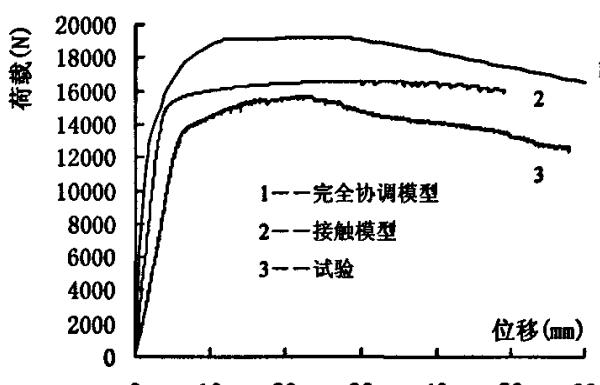


图 5.39 5 号位移测点荷载一位移全过程曲线

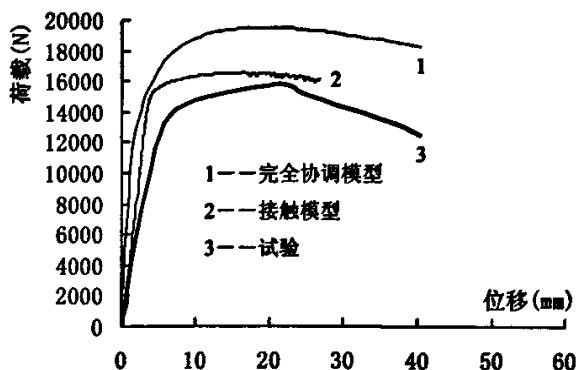


图 5.40 1号位移测点荷载一位移全过程曲线

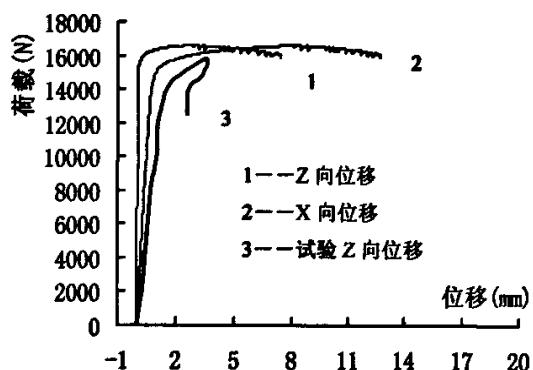
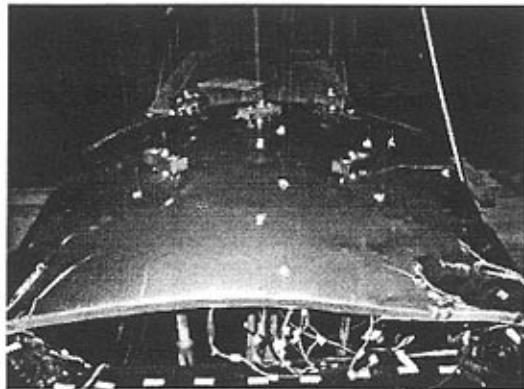
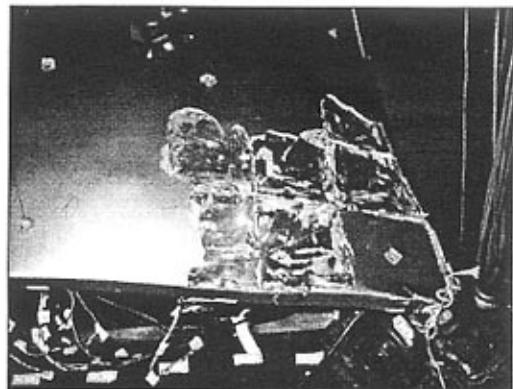


图 5.41 接触模型 2 号支座荷载一位移曲线

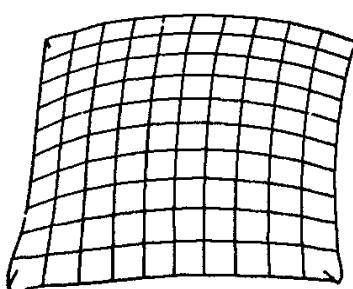


(a) 整体（左下角为第二支座，右下角为第三支座）

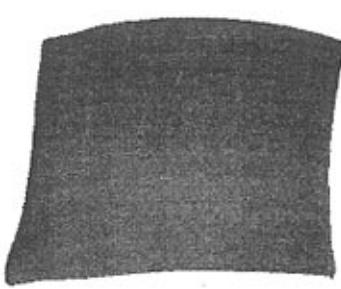


(b) 局部（第三支座）

图 5.42 模型试验破坏形态



(a)



(b)

图 5.43 接触模型失稳破坏形态

通过图 5.39 可以看出，完全协调模型的临界荷载计算值为 19.52KN，接触模型的临界荷载计算值为 16.58KN，模型试验得到的临界荷载为 15.56KN，接触模型的计算结果和试验结果较为接近。

从模型的荷载一位移全过程曲线来看，虽然接触模型的计算结果和试验结果有一定差异，但是较之完全协调模型，接触模型和试验模型的荷载一位移曲线已经非常接近。

从模型的破坏形态可以发现，接触模型计算得到的破坏形态（图 5.43）主要为第一支座和第二支座向外支出，而试验破坏形态（图 5.42）主要为第二支座和第三支座向外支出，图 5.41 给出了第二支座的变形历程，很明显地显示出试验和计算的变形差别。造成这一差别的最主要原因可能是实际支座由于存在摩擦等因素会使得各个支座的灵活程度不相同，当荷载较大时，最灵活的支座就最可能向外支出。

为了更全面地了解板片于骨架之间的接触情况，对模型部分区域的接触状态进行了全过程跟踪，接触模型跟踪到计算点位置处接触点对接触状态的时间历程见图 5.44~图 5.46。

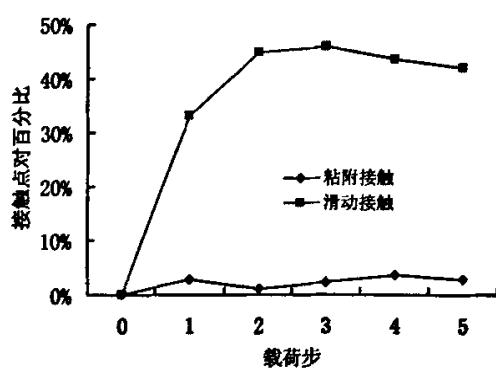


图 5.44 接触点对个数在不同载荷步之间的变化

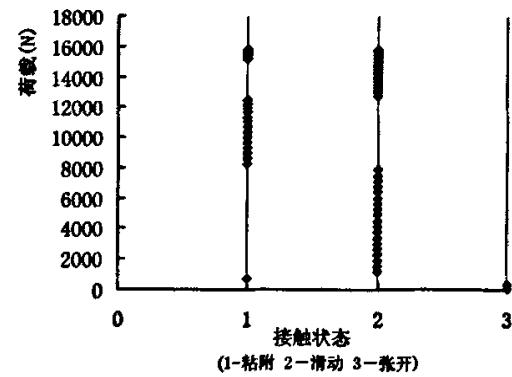


图 5.45 计算点 6 的接触状态

从图 5.44 可以看出，模型加载开始时部分接触点对进入接触状态，随着荷载的增大，越来越多的接触点对开始发生接触滑移。

图 5.45 是计算点 6 在整个加载过程中的接触状态，可以看出在整个加载历程中，接触点对的接触状态在发生交替变化，并不是位移完全耦合的。

从图 5.46 可以看出，7、8 点处的滑动状态在模型到达临界状态时发生了非常大的变化，发生失稳前，8 点滑动距离只有 0.02mm，而后屈曲阶段最大滑动距离为 0.8mm，而且从 7、8 点滑动距离大小可以看出，第二支座处的变形要比 3 号加载点处的变形剧烈的多，由此也说明第二支座有可能较早发生破坏。

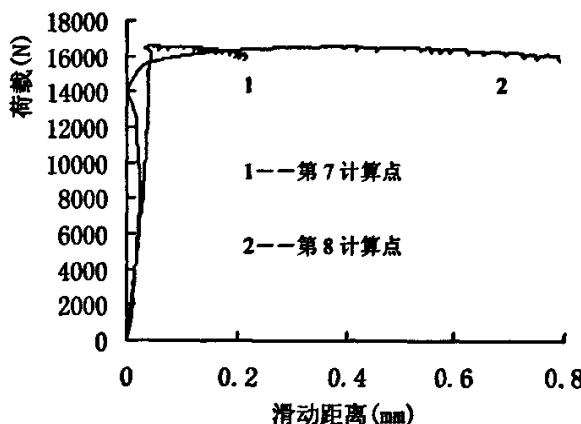


图 5.46 7、8 点处接触点对的相对滑移

通过对以上三个计算模型和试验模型的结果对比可以看出，采用基于接触共同工作问题的数值方法分析板杆组合结构的稳定性所得到的结果与试验结果比较接近，而采用完全协调的有限元方法计算所得到的结果与试验结果相差较大，从模型的极限承载力来看，计算值较试验值都偏大，由此我们至少可以得到以下两个结论：

一、将接触问题引入到板片空间结构的稳定分析中，既能解决板与金属骨架之间非连接处位移的协调问题，又能在加载过程中对接触状态（接触、滑移）进行全过程的跟踪，充分地体现了力的传递及摩擦等问题。这样也就能更加真实地反映板片空间结构中板与骨架之间的实际工作状态，因此，本文所研究的基于接触共同工作问题的数值计算模型是合理和可靠的；

二、在板片空间结构体系设计和计算中，仅仅用完全协调的有限元方法进行数值计算对结构的设计是不安全的，因为完全协调的方法并不能够真实反映实际的工作状态，而只是一种粗略的强迫假设。这样设计的模型计算结果较真实结构的稳定极限承载力高许多，以此结果进行实际设计就显得不安全。这也说明了研究和建立一个能真实反映实际问题工作状态的模型的必要性，因此，本文提出的基于接触共同工作板片空间结构稳定分析的数值计算模型用于板片空间结构体系稳定问题的研究是十分必要和可行的。

第六章 总结与展望

一、 主要研究工作总结

在板片空间结构体系共同工作问题已有的研究中，大都局限于一般静力特性的研究，而涉及到稳定性问题时往往把共同作用简化为节点处的位移耦合问题，对实际存在的接触问题不加考虑。因此，有必要对这一课题的有限元模型进行分析与研究。如何合理有效地把接触问题引入到板片空间结构稳定分析中是本文研究的核心问题，如何通过有限元数值方法，建立精细、合理的有限元模型是处理该问题的关键技术。

本文的研究工作主要有以下几个方面：

1. 对实际工程中普遍存在的接触问题进行了简单介绍，并重点分析了板片空间结构体系共同工作的特点及研究现状。
2. 对稳定问题的基本概念和原理加以阐述，包括失稳机理、失稳特征、稳定问题的分类、稳定问题与强度问题的对比等，为稳定分析计算提供依据。
3. 针对稳定分析中的接触共同工作问题，本文把空间摩擦接触问题引入到有限元方法中，并采用了新型动态接触模型和更新搜索技术。有限元模型能够应用于接触区域存在有限变形和较大滑移的情形，接触算法采用增广拉格朗日乘子法，给出了新的迭代公式以适应大变形屈曲分析的需要。
4. 本文采用 ANSYS 程序作为分析问题的工作平台，在非线性分析理论的基础上，给出空间梁单元、板壳元及接触单元的具体描述。并结合经典算例，分析了接触区域对失稳临界荷载的影响，验证了所采用分析方法的可行性。
5. 为全面了解板片空间结构在考虑接触共同工作条件下的受力性能、失稳破坏形态及机理，设计了常见的板片空间结构体系的有限元模型，并对有限元模型的建模过程加以详细介绍，分析了各种因素对板片结构稳定性能的影响，得出一些有益结论。
6. 针对三个板杆组合结构的试验模型，采用本文介绍的数值计算方法和建模技术，建立了有限元模型，并以结构实测形状为依据考虑缺陷的影响，对板片空间结构进行非线性稳定计算和分析。通过对有限元计算结果和试验结果的比较，表明板片空间结构稳定分析中考虑接触共同工作的合理性和必要性。

本文所作的以上工作可能对进一步研究板片空间结构体系起到促进作用。当然，由于作者的能力和研究时间有限，对于基于接触共同工作问题的板片结构体系稳定性研究还有许多工作可做。

二、 进一步的研究工作

下一步的研究工作可以从以下几个方面着手进行：

1. 接触问题的进一步研究。包括力学模型的研究、数学模型的研究以及有限元数值模型的研究，尤其是接触问题的数值算法需要进一步改进和发展，近年来自适应有限元法和规划方法得到了广泛研究，但是还没有嵌入大型软件中去。
2. 模型的广泛性问题。针对不同的工程实践，需要建立更广泛的、更深入的计算模型，如考虑板片结构中随机缺陷的影响等。
3. 板片空间结构的强度破坏和失稳破坏的耦合问题。板片结构的失稳过程必然伴随着部分构件的强度破坏。
4. 板片空间结构动力稳定性能的研究。应对板片空间结构动力稳定性的有限元分析、缺陷对板片空间结构动力稳定性能的影响及相应的动力稳定试验等问题进行系统研究。

参考文献

- 1 Bažant Z.P. Structural stability. *Int. J. of Solids and Structures*, 2000,37:55-67
- 2 Zhao HL, Ma J, Zhao CQ, She YH, Guo XM. Key points in design of the sheet space structure system. *Int. J. Space Structures*, 2000,15(4):233-238
- 3 沈世钊,陈昕. 网壳结构稳定性[M]. 北京: 科学出版社,1999
- 4 尹德钰,刘善维,钱若军. 网壳结构设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1996
- 5 吴剑国, 张其林. 网壳结构稳定性的研究进展[J]. 空间结构, 2002, 8 (1) :10-18
- 6 Xue Q.,Meek J L. Dynamic response and instability of frame structures. *Comput. Methods Appl. Mech.Engng.*2001,190:5233-5242
- 7 Meek J L, Loganathan S. Geometrically non-linear behavior of space frame structures. *Computer & Structures*, 1989, 31(1) :35-45
- 8 Donnell L H. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Trans ASME*.1934,56(12):795-806
- 9 Von Karman and Tsien HS(钱学森). The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. *J .Aeronaut. Sci*, 1941,8:303-312
- 10 Koiter W T. On the stability of elastic equilibrium, PH.D.Thesis, Delft, H.J.Paris, Amsterdam, 1945;English Traslation issued as NASA TT-10, 833,1967
- 11 Jerome J. Connor,Jr. Robert D. Logcher, Shing-Ching Chen. Nonlinear analysis of Elastic Framed Structures. *J. Struct. Div*,1968,94(6):1525-1547
- 12 李元济,沈祖炎. 弧长法中初始荷载增量参数符号确定法则的改进[J]. 工程力学,2001,18(3):34-39
- 13 李元济,沈祖炎. 弧长控制类方法使用中若干问题的探讨[J]. 计算力学学报, 1998,15(4):414-422
- 14 Crisfield M A. A fast modified Newton-Raphson iteration. *Comp..Meth..Appl.Meth.Engng*,1979,20:267-278
- 15 Crisfield M A. A fast incremental/iteration solution procedure that handle "snap through." *Comput. Structures*, 1989,31(1):35-45
- 16 Hellweg H.B Crisfield M.A.A new arc-length method for handling sharp snap-backs. *Comput. Structures*, 1998, 66(5):705-709
- 17 刘承宗,赵惠麟,周志勇. 单层组合网壳的双重非线性稳定问题[J].东南大学学报, 1998, 28(2):75-81
- 18 朱忠义,董石麟. 球面组合网壳结构的几何非线性稳定分析[J]. 空间结构,1996,2(1):1-11
- 19 Meek J L., Tan H S. Geometrically non-linear analysis of space frames by an incremental iterative technique. *Comp..Meth..Appl .Meth.Engng*,1984,47:261-282
- 20 Meek J L., Loganathan S. Geometrically nonlinear behavior of space frame structures. *Computers & Structures*, 1989,31(1):35-45
- 21 Crisfield M A. An arc-length method including lines searches and accelerations. *Int.J.Numer.Eng.* 1983,19,(12) :1269 -1289
- 22 Bergan P.G., Horrigmoe G., Krakeland B. Soreide T.H. Solution techniques for nonlinear finite element problems. *Int J. Numer. Methods. Eng.*,1978,12: 1677-1679
- 23 Zhao HL,Ma J,Zhao CQ,et al. Sheet space structure system: structural principles and analysis method. *Int. J. Space Structures*,1999,14 (4): 269-279
- 24 杨琦,赵惠麟,马军,等. 板片空间结构体系的结构分析[J]. 工程力学增刊, 1997
- 25 马军. 板片空间结构体系的缺陷稳定分析研究[D]: [博士学位论文]. 南京: 东南大学,1999
- 26 张军. 板片空间结构双重非线性稳定分析及试验研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 东南大学,1996

- 27 曹新民. 组合网壳结构稳定性的理论分析和试验研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 东南大学,1993
- 28 赵惠麟,马军,赵才其,等. 板片空间结构体系的结构原理及工程实践[J]. 工程力学增刊,1997
- 29 中国建筑技术研究院. 高层民用建筑钢结构技术规程[M]. 北京: 中国建筑工业出版社,1998
- 30 郭小明. 弹塑性接触问题的研究及其应用[D]: [博士学位论文]. 南京: 东南大学,2002
- 31 尹凌峰. 大型复杂空间结构关键力学问题研究[D]: [博士学位论文]. 南京: 东南大学,2003
- 32 徐科. 板片空间结构接触问题定量分析有限元模型的研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 东南大学,2004
- 33 唐敢. 板片空间结构体缺陷稳定分析及试验研究[D]: [博士学位论文]. 南京: 东南大学,2005
- 34 杨琦. 板片空间结构体系非线性稳定的分析与研究[D]: [博士学位论文]. 南京: 东南大学,1993
- 35 王德胜等. 科学哲学范畴[M]. 北京: 北京师范大学出版社,1993
- 36 陈铁云,沈惠申. 结构的屈曲[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社,1993
- 37 唐家祥,王仕统,裴若娟. 结构稳定理论[M]. 北京: 中国铁道出版社,1989
- 38 陈骥. 钢结构稳定理论与设计[M]. 北京: 科学出版社,2003
- 39 陈绍藩. 钢结构设计原理[M]. 北京: 科学出版社,2005
- 40 Salvadori and Heller. Structure in Architecture. Englewood Cliffs NJ, Prentice, Hall Inc,1963
- 41 郭小明,赵惠麟. 工程结构接触问题的研究及进展[J]. 东南大学学报, 2003,33(5): 576-582
- 42 彼得·艾伯哈特,胡斌. 现代接触动力学[M]. 南京: 东南大学出版社,2003
- 43 Pietrzak G, Curnier A. Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented Lagrangian treatment. Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1999,177: 351-381
- 44 Heegaard J H., Curnier A. An augmented Langrangian method for discrete large-slip contact problems. Int. J. Numer. Meth. Engng. 1993,36:569-593
- 45 Alart P., Curnier A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1991,92:353-375
- 46 Farahani K., Modfid M. Vafai A. A solution method for general contact-impact problems. Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2000,187:69-77
- 47 刘书,刘晶波,方鄂华. 动接触问题及数值模拟的研究进展[J]. 工程力学,1999,16(6):14-24
- 48 Simo J.C., Laursen T.A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. Computer & Structures. 1992,42(1):97-116
- 49 Ning Hu. A solution method for dynamic contact problems. Computer & Structures. 1997,63(6):1053-1063
- 50 蔡中义,李明哲,陈庆敏. 大变形摩擦接触问题的数值模拟及应用[J]. 应用力学学报,2002,19(2): 1-4
- 51 栾茂田,田荣,杨庆,张大林. 有限覆盖无单元法在岩土类弱拉型材料摩擦接触问题中的应用[J]. 岩土工程学报, 2002, 24 (2) :137-141
- 52 Jeong Seo Koo and Byung Man Kwak. Post-buckling analysis of nonfrictional contact problems using linear complementarity formulation. Computer & Structures. 1995, 57(5):783-794
- 53 Gyu Bong Lee and Byung Man Kwak. Formulation and implementation of beam contact problems under large displacement by a mathematical programming. Computer & Structures. 1989,31(3):365-376
- 54 Endo T., Oden J T., Becker E.B. etla. A numerical analysis of contact and limit-point behavior in a class of problems of finite elastic deformation. Computer & Structures. 1984,18(5):899-910
- 55 Simo J C., Wriggers P. Schweizerhof K.H. etal. Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints. Int. J. Numer. Methods. Eng. 1986, 23:779-800
- 56 Wriggers P., Wagner w., Stein E. Algorithms for non-linear contact constrains with application to stability problems of rods and shells. Comput. Mech. 1987,2:215-230
- 57 Björkman G. Path following and critical points for contact problems. Comput. Mech. 1992, 10:231-246
- 58 Endo T., Oden J T., Becker E B. etla. A numerical analysis of contact and limit-point behavior in a class of problems of finite elastic deformation. Computer & Structures. 1984,18:899-910

- 59 Koo J S., Kwak B .M. Post-buckling analysis with frictional contacts combining complementarity relations and an arc-length method. Int J. Numer. Methods. Eng. 1996,39:1161-1180
- 60 博弈创作室. APDL 参数化有限元分析技术及其应用实例. 北京: 中国水利水电出版社,2004
- 61 ANSYS Inc. ANSYS APDL Programmer's Guide Release 8.0
- 62 Wempner G A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. Int.J.Solids Structures, 1971, 7:1581-1599
- 63 Riks E. An Incremental approach to the solution of snapping and bucking problems. Int. J. Solids Structures,1979,15:529-551
- 64 Batoz J L., Dhatt G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. Int. J. Num. Mech. Eng, 1979,14:1262-1267
- 65 Hestenes M R. Multiplier and gradient methods [J]. Journal of Optimization Theory Applications, 1969 ,4 :303 – 320
- 66 Powell M J D. A method for nonlinear constraints in minimization problems [A]. Fletcher R. Optimization[M]. New York : Academic Press , 1969
- 67 Rockefeller R T. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in non-convex programming [J] . Journal of Control ,SIAM ,1974 ,12 :268 - 285

致谢

本文是在导师郭小明教授的悉心指导下完成的，从论文的改稿到成文，导师都给予了作者认真细心的指导，提出了许多宝贵的意见。在论文成稿阶段，作者学得了很多。导师在近三年来给予作者极大的关怀，作者在此致以诚挚的谢意。

在作者近三年的学习中，力学系其他诸位老师也都曾给予悉心的教诲，作者向他们致以诚挚的谢意。

感谢师兄唐敢、陈东在学习上给予的帮助，师妹王欣、师弟陆壮志在课题研究期间给予的许多便利，和他们的相处很是愉快。

同舍好友李荣、张建波，在论文的写作和成稿过程中给予了帮助，和他们在一起同窗的日子令作者一生难忘。还有许多老师、同学曾给予过作者帮助和关心，藉此一角，由衷地说声“谢谢”。

感谢家人在作者的学习生涯中给予的鼓励与支持。