

## 摘 要

本文在分析评价现有的边坡稳定性分析方法的基础上，综合岩土力学、弹塑性力学、非线性有限元方法、概率论与数理统计、可靠度数学、计算机科学等多学科的知识，详细研究了边坡稳定非线性有限元可靠度分析的有关方法，推导了相关公式，编制了相应的计算程序，进行了均质土坡及非均质土坡的可靠度分析。主要研究成果与结论如下：

1) 提出基于强度折减的边坡稳定有限元可靠度分析方法。研究表明，这种方法无需对各有限单元求单元的可靠指标，能一次性得出边坡的整体可靠指标；不需对定值法有限元分析程序作任何修改，无论是线性有限元问题还是非线性有限元问题都适用，因而方便易用，适用性广。

2) 基于增量初应力法及偏微分技术，研究了基于滑面应力分析的非线性有限元可靠度分析方法中边坡整体可靠指标及其对应滑面位置的求解方法，探讨有限元分析中功能函数形式对计算结果的影响。研究表明，在这种方法中，功能函数的形式对滑面可靠指标的影响很大，计算中应采用考虑滑面方向的函数形式作为功能函数，它能更好地反映滑面方向对边坡可靠指标的影响，物理概念明确，因而更为合理。

3) 分析比较了上述两种方法的异同点。研究表明，基于强度折减的有限元可靠度分析方法编程简单，可调用现有的定值法程序，但计算速度较慢；基于滑面应力分析的有限元可靠度分析方法编程复杂，需对现有的定值法分析程序进行较大修改，但计算速度较快，并且能得到边坡整体可靠指标对应的滑面位置。理论分析还表明，基于强度折减与基于滑面应力分析的边坡稳定非线性有限元可靠度分析方法本质相同，其计算结果的差异主要是由于这两种方法具体实现过程的不同而引起的。

4) 针对当前响应面法中的一些不足之处，提出了一种改进的响应面法——FORM-RSM二步法。其主要的计算分二步，一是用验算点法求解可靠指标及验算点的位置，二是在此验算点处进行响应面的拟合，并对此响应面函数用常规的可靠度分析方法求解相应的可靠指标。不同算例表明：该方法在计算精度及效率上均比常用的基于响应面迭代的响应面法有所提高。

5) 研究边坡有限元可靠度分析中的敏感性计算方法，推导基本变量相关时在原始空间中求解可靠指标对参数敏感性的计算公式，提出进行参数的相对敏感性分析方法及公式。研究表明：基本变量相关时在原始空间中求解可靠指标对参数敏感性的优点是无需求解转换矩阵，计算更加简单直接；对参数进行相对敏感性分析能剔除变量的单位对计算结果的干扰，因而敏感性分析的结果更具有可比性。

6) 研究既考虑边坡的弹塑性材料非线性又考虑其大变形几何非线性的有限元可靠度分析方法，比较大小变形情况下的相应结果。研究表明：在小变形情况下，弹性模量对边坡的安全系数及可靠指标影响很小，在边坡稳定性分析时可以忽略其影响。但是当考虑土体中发生的大变形现象时，弹性模量对边坡安全系数及可靠指标影响很大，不能忽略不计。

7) 为提高非线性有限元程序的收敛性，本文基于常规有限元计算中的 Aitken 加速收敛算法，研究了基于增量切线刚度法的随机有限元分析中相应的加速收敛方法，推导了其计算公式。计算表明：与不采用加速收敛算法的随机有限元相比较，此方法明显提高了有限元计

算的收敛速度，提高了计算效率。

8) 研究了有限步长迭代法在边坡稳定有限元可靠度分析中的应用，分析了初始步长及步长控制系数对一阶可靠度分析中可靠指标迭代过程的影响，得出了常见的取值范围。这种方法克服了常规验算点法中可能出现的可靠指标迭代不收敛的问题。

**关键词：**边坡稳定，有限元，可靠度分析，敏感性分析，大变形

## ABSTRACT

Based on the review of the analysis methods of slope stability and a lot of knowledge, such as geomechanics, elasto-plastic mechanics, nonlinear finite element method (FEM), probability theory and mathematics statistics, reliability mathematics, computer science, some methods of nonlinear FEM reliability analysis of slope stability are studied in detail in this thesis. Main achievements and conclusions are as follows.

A FEM reliability analysis method of slope stability which is based on the strength reduction method (SRM) is proposed. The advantage of this method is that it can calculate the overall reliability index instead of the calculation of each element's reliability index. Another advantage is that this method can make use of any definite FEM software, no matter the research object is linear or nonlinear. Therefore, it is very convenient for anyone to use it.

Based on incremental initial stress method and partial differential technique, another FEM reliability analysis method of slope stability which is based on the slip surface stress analysis (SSA) is studied. The main problems of this method are the calculation methods of the overall reliability index and the location of the corresponding slip surface of a slope. It's concluded that the type of the limit state function has great influence to the overall reliability index, and the yielding function which can consider the sliding direction should be selected as the limit state function for it can reflect the influence of the sliding direction properly.

The similarities and differences of the above two methods are compared. It's proved that the first method is simple in programming and can make use of any definite software, but the running speed is very slow. On the contrary, the programming procedure is very complicate in the second method, but the running speed is very quick. At the same time, it can also calculate the location of the slip surface in the second method. It's also testified that the above two methods are the same substantially, and the difference of the two methods may come from their different implementation procedures.

An improved response surface method – FORM-RSM – is proposed in this thesis. This new method can overcome the shortcomings of the general used RSM, which is based on the iteration of response surfaces. The first step of this method is to calculate the reliability index and the design point by using first order reliability method, and the second step is to fit a response surface on the design point. Then, the reliability index can be calculated by using some normal first order reliability method. It's demonstrated from several examples that the accuracy and efficiency of this new method are better than that of the general used RSM.

The sensitivity calculation method in the FEM reliability analysis is studied, and the formulas of the sensitivity of reliability index to the basic parameters in the original space when they are correlated are derived. And then, a relative sensitivity analysis method and formula are suggested. It's showed that the transforming matrix, which is needed in the computation in the transformed space, is now unnecessary in this method. And the disturb of the different units of each parameter can now be eliminate in the relative sensitivity analysis method, so it's more proper to compare the influence of all kinds of parameters.

In the reliability analysis of a slope using finite element method, what is usually considered is only the property of elasto-plasticity or material nonlinearity. However, there exists local large strain

in most soil slopes. Therefore, the FEM reliability analysis method, which can consider both the material nonlinearity and the large deformation geometric nonlinearity, is studied, and the differences of the results of small and large deformation methods are compared. It's proved that the parameter of elastic module has little influence on the safety factor and the reliability index in the normally used small deformation FEM analysis. However, if there is some large deformation, the influence of elastic module to the safety factor and the reliability index will become large, and it should not be omitted.

Based on the accelerating convergence method of Aitken and the method of incremental tangent stiffness method in the definite FEM analysis, a corresponding accelerating convergence method and its formulas are studied in the stochastic finite element analysis. Through the comparison of the methods which consider and don't consider the accelerating one, it's demonstrated that this new accelerating method can improve the convergence speed greatly.

The application of the limit step length iteration method to the FEM reliability analysis of the slope stability is studied. Through many times of calculation, the influence of the initial step length and the step length adjustment coefficient to the iteration procedure of the reliability index and their range of values are studied. It's proved that this method can conquer the probably non-convergence phenomenon of the iteration of the normally used first order reliability method.

**Key words:** Slope stability; Finite element method; Reliability analysis; Sensitivity analysis; Large deformation

## 插图清单

图 2.1-1 极限状态方程 (a)两个变量 (b)一般情况.....	11
图 2.4-1 不同情况下计算失效概率与精确失效概率的关系.....	17
图 2.4-2 非正态随机变量的当量正态化.....	18
图 3.1-1 土条及作用于土条上的力.....	23
图 3.2-1 瑞典法计算图式.....	24
图 3.3-1 毕肖普法计算图式 .....	26
图 4.2-1 莫尔圆与莫尔-库仑屈服准则.....	29
图 4.2-2 $\pi$ 平面上的莫尔-库仑屈服曲线 .....	30
图 4.3-1 过渡区域应力增量的计算.....	34
图 4.4-1 应力方向的定义及应力莫尔圆.....	38
图 4.4-2 $\theta$ 的符号定义 (a) $\theta \geq 0$ (b) $\theta < 0$ .....	38
图 5.1-1 八结点四边形的单元编号.....	42
图 5.1-2 基于强度折减法的边坡有限元可靠度分析流程图 (FORM) .....	43
图 5.2-1 例 5.2-1 的求导结果 ( $x=1.00$ ) .....	47
图 5.2-2 例 5.2-1 的求导结果 ( $x=1.53$ ) .....	47
图 5.2-3 例 5.2-2 的求导结果 .....	48
图 5.3-1 可靠指标与相关系数的关系 (有限元强度折减法) .....	50
图 5.3-2 可靠指标与相关系数的关系 (Bishop 法) .....	50
图 5.3-3 $F_S$ 的频率分布图 ( $\rho_{\alpha\beta}=0$ ) .....	51
图 5.4-1 极限响应面 (例 5.4-1) .....	53
图 5.4-2 极限响应面 (例 5.4-2) .....	54
图 5.4-3 边坡剖面图 .....	55
图 6.2-1 基于滑面应力分析的边坡有限元可靠度分析主程序流程图 (FORM) .....	62
图 6.2-2 求解滑面可靠指标的子程序流程图.....	63
图 6.3-1 边坡剖面图 .....	63
图 6.3-2 (a) 积分点上功能函数均值等值线图 .....	64
图 6.3-2 (b) 积分点上功能函数均方差等值线图 .....	64
图 6.3-2 (c) 积分点上可靠指标等值线图 .....	64
图 6.3-3 可靠指标与变异系数的关系 (MFORM) .....	66
图 6.3-4 滑面位置图 .....	66
图 7.3-1 参数的敏感性与相关系数 $\rho_{\alpha\beta}$ 关系图 .....	75
图 7.3-2 可靠指标与变异系数的关系 (方法 3) .....	76
图 8.1-1 直角坐标系内物体的运动和变形.....	78
图 8.1-2 斜截面上的应力矢量.....	80
图 8.4-1 边坡剖面图 .....	90

图 8.4-2 安全系数与土工参数关系曲线 ( $E=10^8\text{Pa}$ ) .....	91
图 8.4-3 可靠指标与土工参数变异系数关系曲线 ( $E=10^8\text{Pa}$ , $Z=Fs-1$ ).....	92
图 8.4-4 可靠指标与土工参数变异系数关系曲线 ( $E=10^8\text{Pa}$ , $Z=\ln Fs$ ).....	93
图 8.4-5 安全系数与土工参数关系曲线 ( $E=10^7\text{Pa}$ ) .....	94
图 8.4-6 可靠指标与土工参数变异系数关系曲线 ( $E=10^7\text{Pa}$ , $Z=Fs-1$ ).....	95
图 8.4-7 可靠指标与土工参数变异系数关系曲线 ( $E=10^7\text{Pa}$ , $Z=\ln Fs$ ).....	96
图 9.2-1 有 Aitken 加速的增量切线刚度法迭代.....	99
图 9.4-1 边坡外形图 .....	103
图 9.4-2 网格剖分图 .....	103
图 9.4-3 边坡安全系数与 $c_2$ 关系曲线.....	104
图 9.4-4 滑面位置图 ( $c_1=50\text{kPa}$ ) .....	105
图 9.4-5 (a) 网格变形图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=25\text{kPa}$ ) .....	105
图 9.4-5 (b) 位移等值线图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=25\text{kPa}$ ) .....	105
图 9.4-6 (a) 网格变形图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=50\text{kPa}$ ) .....	106
图 9.4-6 (b) 位移等值线图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=50\text{kPa}$ ) .....	106
图 9.4-7 (a) 网格变形图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=73.1\text{kPa}$ ) .....	106
图 9.4-7 (b) 位移等值线图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=73.1\text{kPa}$ ) .....	106
图 9.4-8 (a) 网格变形图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=75\text{kPa}$ ) .....	107
图 9.4-8 (b) 位移等值线图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=75\text{kPa}$ ) .....	107
图 9.4-9 (a) 网格变形图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=100\text{kPa}$ ) .....	107
图 9.4-9 (b) 位移等值线图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=100\text{kPa}$ ) .....	107
图 9.4-10 可靠指标与迭代次数关系图.....	109
图 9.4-11 (a) 积分点上功能函数均值等值线图 .....	109
图 9.4-11 (b) 积分点上功能函数均方差等值线图 .....	109
图 9.4-11 (c) 积分点上可靠指标等值线图 .....	109
图 9.4-12 (a) 可靠指标与变异系数的关系 ( $\delta_{cl}=0.1$ ) .....	111
图 9.4-12 (b) 可靠指标与变异系数的关系 ( $\delta_{cl}=\delta_{c2}=\delta_c$ ) .....	111
图 9.4-13 滑面位置图 .....	112
图 9.4-14 验算点的迭代过程 .....	113

## 表格清单

表 2.3-1 失效概率与可靠指标的对应关系.....	12
表 3.1-1 边坡稳定性分析的未知数.....	24
表 5.2-1 关于变量 $x_1$ 的有理多项式系数.....	45
表 5.3-1 不同方法对应的可靠指标 ( $\rho_{cp}=0$ ) .....	49
表 5.4-1 不同方法对应的可靠指标 (例 5.4-1) .....	53
表 5.4-2 不同方法对应的可靠指标 (例 5.4-2) .....	54
表 5.4-3 土层参数表 .....	55
表 5.4-4 不同方法对应的可靠指标 (例 5.4-3) .....	55
表 5.4-5 RSM 与 FORM-RSM 之比较 (例 5.4-3) .....	55
表 7.3-1 可靠指标对参数的敏感性分析 ( $\rho_{cp}=0.0$ ) .....	74
表 7.3-2 可靠指标对参数的敏感性分析 ( $\rho_{cp}=-0.2$ ) .....	74
表 7.3-3 可靠指标对参数的敏感性分析 ( $\rho_{cp}=-0.4$ ) .....	74
表 7.3-4 不同基本变量时的可靠指标.....	75
表 8.2-1 TL 法和 UL 法的状态量 .....	82
表 9.4-1 土层参数表 .....	103
表 9.4-2 不同方法对应的安全系数 ( $c_1=50\text{kPa}$ , $c_2=73.1\text{kPa}$ ) .....	103
表 9.4-3 迭代次数的对比分析 (验算点法) .....	108
表 9.4-4 迭代次数的对比分析 (有限步长迭代法) .....	108
表 9.4-5 滑面可靠指标与滑面位置的对比分析.....	112

## 独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得合肥工业大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名: 谭晓慧 签字日期: 2007年6月1日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解合肥工业大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权合肥工业大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名: 谭晓慧

导师签名: 王建国

签字日期: 2007年6月1日

签字日期: 2007年6月5日

学位论文作者毕业去向: 合肥

工作单位: 合肥工业大学

电话: 2901523

通讯地址: 合肥工业大学

邮编: 230009

## 致 谢

本文是在导师王建国教授的悉心指导下完成的。在课题选定、研究思路和研究方法确定方面，导师都给予了我极大的帮助。在我最困难的时候，是导师的鼓励和启发使我有了新的突破。导师的敬业精神、渊博的知识和严谨的治学态度使我受益非浅。在此，向王建国教授表示最真诚的谢意！

感谢在我的论文完成过程中，曾经给予我帮助的各位领导、老师和同事！没有他们提供的条件和便利，不可能将论文做得完善。

感谢给我的论文进行评审的各位老师！是他们的精心评审和中肯建议，使我在做论文的过程中有了逐步完善和提高。

感谢我的爱人范方楼先生和孩子范书宇！是他们多年来在各方面对我给予的支持和鼓励，让我充满信心地去迎接一个又一个挑战！

感谢我的父母！他们一直在精神上和生活上给予我无私的关心和支持，让我能够专业完成学业。

最后，向所有关心、帮助和支持我的老师、同学和朋友们表示衷心的感谢！谢谢你们！

作者： 谭晓慧

2007年4月7日

# 1 绪 言

## 1.1 研究背景

滑坡是一种重要的地质灾害，它可导致交通中断，河道阻塞，厂矿城镇被掩埋，工程建设受阻，人类的生命财产受到威胁。我国正处于经济建设高速发展的时期。在建设过程中，滑坡给水利、铁路、公路、矿山等建设都造成了巨大损失。

边坡问题是一个古老的问题，已经有很多学者从不同的角度对边坡稳定进行了分析，但实际问题是，不仅建国以来，在水利、水电、铁道、公路、建筑等各工程领域中滑坡事故都是最常见的、重要的地质灾害，而且要及时预报、合理分析，还存在着很多问题与困难。今后，随着大型工程建设的日益增多，高边坡问题也将愈加突出。因此，仍需进一步研究与边坡有关的问题，如：滑坡产生的地质背景、破坏机理，岩土力学特征，边坡稳定性分析方法、治理方法等。本论文主要研究其中内容之——边坡稳定性的分析方法。

边坡稳定性分析方法很多，如：各种极限平衡条分法，有限元法，极限分析法，边界元法等（陈祖煜，2003）<sup>[1]</sup>。在边坡稳定性分析的各种方法中，有限元法(Finite Element Method，简称 FEM)由于全面满足了静力许可、应变相容和应力应变之间的本构关系，并且不受边坡几何形状的不规则和材料不均匀性的限制，因而在边坡稳定性分析中得到了广泛的应用。

但是，各种边坡稳定分析的定值法存在一个共同的缺点——没有考虑边坡工程中存在的不确定性，这就造成了一些边坡的安全系数大于临界安全系数，可事实上还是发生破坏的现象。要想正确分析边坡的稳定性，必须考虑边坡工程中存在的种种不确定性。结构工程中不确定性的主要来源有：物理不确定性，如荷载大小、材料强度、几何尺寸等的不确定性；统计不确定性，如参数分布类型的不确定性，参数统计方法的不确定性；模型不确定性，这是由计算模型的简化假设等引起的（常大民，1995）<sup>[2]</sup>。对于边坡工程而言，地层（土层）剖面与边界条件的不确定性；现场与实验室测定的岩土性质指标的不确定性；土的性质的天然（固有）可变性；勘探取样方法与试验方法的误差；试验数量与勘探数量的不足；外加荷载大小与分布的不确定性；计算模式的不确定性等都可造成边坡稳定分析结果的误差（包承纲，1989）<sup>[3]</sup>。因此，必须进行边坡稳定的可靠度分析。

在将边坡稳定的极限平衡条分法与可靠度分析相合、从而进行边坡稳定的可靠度分析方面，前人已做了大量工作。但在将边坡稳定分析的更严格方法——有限元法与各种可靠度分析方法相结合来研究边坡工程的可靠度方面，前人的工作还相对很少。本论文拟重点研究边坡稳定的非线性有限元可靠度分析方法。

## 1.2 文献综述

### 1.2.1 边坡稳定确定性分析法研究概况

边坡稳定性分析方法有很多，大体上可以分为极限平衡条分法、有限元法、极限分析法（滑移线法）等，其中应用最广泛的是前两种方法。

极限平衡条分法是建立在莫尔-库仑强度准则的基础上的，其特点是只考虑静力平衡条件和土的莫尔-库仑破坏准则。对于边坡稳定性分析中大多数的静不定问题，极限平衡条分法通过引入一些简化假定来使问题变得静定可解。极限分析法（滑移线法）与条分法的区别是滑移线法要求每一单元都达到了极限平衡状态，而条分法只假定土体沿滑裂面达到了极限平衡。因此滑移线法得到的是一个保守解（上限解），而条分法由于并不要求滑体内的每一点均处于极限平衡，因此是下限解。

进入 20 世纪 70 年代后期，随着计算机和有限元分析方法的发展，应用严格的应力应变分析方法分析边坡稳定性问题已成为可能。边坡稳定的有限元分析由于不必对一部分内力和滑裂面形状作出假定，使得分析研究成果的理论基础更为严密，因而边坡稳定分析的有限元法也逐渐受到重视。

### 1.2.1.1 极限平衡条分法

目前常用的极限平衡条分法有：瑞典法、简化 Bishop 法、Janbu 法、Sarma 法、Spencer 法、Morgenstern-Price 法等。

瑞典法(瑞典圆弧法)由 Fellenius(1927)<sup>[4]</sup>提出，又称 Fellenius 法。该法假定滑裂面为圆弧形。在计算安全系数时，简单地将条块重量向滑面法线方向分解来求得法向力。由于滑裂面为圆弧形，因此法向力通过圆心，对圆心取矩时不出现，使计算工作大为简化。

简化 Bishop 法(1955)<sup>[5]</sup>对传统的瑞典法法作了重要改进。这一方法仍保留了滑裂面形状为圆弧形和通过力矩平衡条件来求解这些特点，但是在确定土条底部法向力时，考虑了条间作用力在法线方向的贡献。

对于任意形状的滑裂面，瑞典法和 Bishop 法不再适用。此时，一些学者试图通过力的平衡而不是力矩平衡来确定安全系数。Janbu(1954)<sup>[6]</sup>假定条间力为水平力，由此求得安全系数。但因没有满足力矩平衡要求，因此也是简化法。

随着计算机的出现和普及，在生产实践中采用更为严格的方法已经具备条件，因此一些研究者致力于建立同时满足力的平衡和力矩平衡，对滑裂面形状不作假定的严格分析法。这些方法大体上可分为三类，一是假定条间力大小的分布函数 (Sarma, 1973)<sup>[7]</sup>；二是假定条间力的作用方向 (Morgenstern-Price, 1965<sup>[8]</sup>; Spencer, 1967<sup>[9]</sup>)；三是假定条间力的作用点位置 (Janbu, 1973)<sup>[10]</sup>。在此基础上，一些学者对上述方法作了进一步改进 (Chen-Morgenstern, 1983<sup>[11]</sup>; 郑颖人等, 2001<sup>[12]</sup>; Zhu 等, 2003<sup>[13]</sup>)。

Duncan(1996)<sup>[14]</sup>、陈祖煜(2003)<sup>[11]</sup>对各种传统边坡稳定性分析方法的计算精度和适用范围作了分析评述，指出瑞典法安全系数最小，简化 Bishop 法的安全系数平均高出瑞典法 6%-7%，Spencer 法高出简化 Bishop 法平均 2%-3%；满足全部平衡条件的严格方法是精确的（除非遇到数值分析问题）；对于圆弧滑裂面情况，简化 Bishop 法与 Morgenstern-Price 法的结果十分接近，也即简化 Bishop 法有较高的计算精度，又因其计算简便，因而使用十分广泛。

边坡稳定分析的极限平衡条分法大体上可分为两个步骤，一是利用上述各种条分法对滑坡体内某一滑裂面求其抗滑稳定安全系数；二是在众多可能的滑裂面中，重复上述步骤，找出相应最小安全系数的临界滑面。近年来，最优化方法被广泛应用于这一课题，这些方法总体上可以分为枚举法、数值分析方法、非数值分析方法（如：模拟退火法，遗传算法，神经网络法，蚂蚁算法，仿生算法）等三类，它在边坡稳定分析中的应用研究十分活跃 (Baker, 1980<sup>[15]</sup>; Celestino and Duncan, 1981<sup>[16]</sup>; Li and White, 1987<sup>[17]</sup>; 陈祖煜等, 1988<sup>[18]</sup>; Greco,

1997<sup>[19]</sup>; 莫海鸿等, 1999<sup>[20]</sup>; 房营光等, 2002<sup>[21]</sup>; 李亮等, 2004<sup>[22]</sup>; 高玮等, 2005<sup>[23]</sup>).

### 1.2.1.2 有限元法

和极限平衡条分法相比, 有限元法能更好地反映边坡岩土体的应力应变关系, 并且不受边坡几何形状和材料不均匀的限制, 因而是边坡稳定性分析中一种较为理想的方法。边坡稳定性分析的有限元法大体上可以分为两类: 一是基于滑面应力分析的有限元法 (slip surface stress analysis, 简称 SSA), 它是边坡稳定性有限元分析中一种常规的计算方法 (Zou 等, 1995<sup>[24]</sup>; Duncan, 1996<sup>[14]</sup>); 二是基于强度折减的有限元法 (strength reduction method, 简称 SRM), 这种方法在国外兴起于上世纪九十年代 (Matsui 等, 1992<sup>[25]</sup>; Swan 等, 1999<sup>[26]</sup>; Dawson 等, 1999<sup>[27]</sup>; Griffiths 等, 1999<sup>[28]</sup>)。

边坡稳定有限元法的重要研究内容是如何将有限元计算结果与传统的安全系数挂钩, 成为直接用于边坡设计的判别依据。几乎在有限元法开发的同时, 研究者就开始了其与边坡稳定性分析中传统条分法关系的研究。早期的研究工作 (Wright, 1973<sup>[29]</sup>; Yamagami, 1988<sup>[30]</sup>) 是在边坡中定义一个潜在的滑面, 根据有限元得出的应力分布来计算滑面上各点的应力水平, 然后根据加权平均的原则定义安全系数 (即 SSA 法)。在这一工作的基础上, 研究者进一步研究了整个滑面安全系数的定义及在众多滑面中寻找一个临界滑面的方法。Zou 等 (1995)<sup>[24]</sup> 通过有限元法获得的应力分布规律确定滑面的范围和初始滑面, 再用动态规划法搜索最危险滑面及相应的安全系数。Kim 和 Li (1997)<sup>[31]</sup> 根据有限元应力场的计算结果来求各高斯点应力, 然后用总体应力平滑技术来求总应力场; 基于这一应力场, 对指定滑面用应力积分求安全系数, 然后再进行非圆弧滑面的改进搜索。Giam 和 Donald (1988)<sup>[32]</sup> 提出了一种由已知的应力场求临界滑裂面及最小安全系数的模式搜索法。史恒通, 王成华 (2000)<sup>[33]</sup> 详细探讨了用有限元法分析土坡稳定所遇到的问题及处理方法, 分析了安全系数的定义方法。郑宏等 (2002, 2005)<sup>[34-36]</sup> 讨论了边坡稳定有限元分析中安全系数的定义问题, 指出了 SRM 的合理性。郑宏等 (2004)<sup>[37]</sup>、朱以文等 (2005)<sup>[38]</sup> 提出了一种基于滑移线场理论、利用有限元求解安全系数的新方法。

边坡稳定分析的有限元强度折减法 (SRM) 由于计算简单, 可直接利用现有大型有限元分析软件进行计算, 因而近年来的研究较为活跃 (Woodward, 1999<sup>[39]</sup>; Hamdy Faheem 等, 2004<sup>[40]</sup>; 马建勋等, 2004<sup>[41]</sup>)。其基本原理是将边坡强度参数同时除以一个折减系数, 得到一组新的强度参数值; 然后以这组新的值作为输入参数进行有限元计算; 当计算至边坡达到极限状态时, 对应的折减系数值就是边坡的最小安全系数。目前各种 SRM 的主要区别是边坡失稳判别的标准不同, 其主要类型有: 以迭代过程不收敛为标准, 这是最常用的标准 (如: Dawson 和 Roth, 1999<sup>[27]</sup>; Griffith 和 Lane, 1999<sup>[28]</sup>; Lechman, 2000<sup>[42]</sup>; 赵尚毅, 郑颖人等, 2002<sup>[43-44]</sup>); 以某个特征点的位移为标准 (宋二祥, 1997<sup>[45-46]</sup>; 葛修润, 2003<sup>[47]</sup>); 以广义剪应变或广义塑性应变为标准 (Matsui, 1990<sup>[48]</sup>; 连镇营等, 2001<sup>[49]</sup>; 郑宏等 2002<sup>[36]</sup>; 周翠英等, 2003<sup>[50]</sup>; 栾茂田等, 2003<sup>[51]</sup>)。赵尚毅等 (2005)<sup>[52]</sup> 分析了用计算不收敛作为边坡失稳的判别标准合理性。郑宏, 刘德富 (2005)<sup>[53]</sup> 对 SRM 从理论上给予了证明, 从而为利用等效塑性应变或塑性功的等值线图来判别边坡的极限状态找到了力学依据。

虽然在边坡稳定的有限元分析中可以考虑更为复杂的本构模型 (邵国建等, 2003<sup>[54]</sup>; Hwang 等, 2002<sup>[55]</sup>), 但为了与成熟的极限平衡法相比较, 目前工程中最普遍的还是采用 Mohr-Coulomb (或 Drucker-Prager) 准则的理想弹塑性模型。至于选何种流动法则尚未取得共

识, 一部分学者认为剪胀角对边坡稳定性的影响不大 (Dawson 等, 2000<sup>[56]</sup>; 郑宏等, 2002<sup>[36]</sup>; Griffiths 等, 1999<sup>[28]</sup>; Lechman 等, 2000<sup>[42]</sup>; 赵尚毅等, 2002<sup>[43-44]</sup>); 另一部分学者则认为不应忽视剪胀角对边坡稳定性的影响 (Majid T.Manzari, Mohamed A.Nour. 2000<sup>[57]</sup>; 张鲁渝等, 2003<sup>[58]</sup>; 张培文和陈祖煜, 2004<sup>[59]</sup>)。

### 1.2.1.3 边坡稳定的大变形有限元分析

经典有限元法常假定边坡在荷载作用下发生的应变是微小的, 而实际上, 边坡的破坏往往伴随着大变形条件。研究表明: 当平均应变为 10% 时, 剪切带内的应变可高达 40%<sup>[60]</sup>。因此, 应进行边坡的大变形有限元可靠度分析。

大变形有限元分析已在结构工程 (Imai, Frangopolo, 2002<sup>[61-64]</sup>) 及材料工程 (Leiwis, Khoei, 1998)<sup>[65]</sup> 中得到广泛应用。但由于岩土工程研究对象的复杂性, 它在岩土工程中的应用还不多见, 目前的研究多集中于土体的固结变形及流固耦合分析 (Carte, 1977<sup>[66]</sup>; Prevost, 1982<sup>[67]</sup>; Asaoka, 1995<sup>[68]</sup>; Rowe, 1996<sup>[69]</sup>; Borja 等, 1998<sup>[70]</sup>; Foti 等, 1998<sup>[71]</sup>; Larsson 等, 2002<sup>[72]</sup>; Yuan Di 等, 2003<sup>[73]</sup>; 周正明, 1992<sup>[74]</sup>; 谢永利, 1994, 1995, 1998<sup>[75-77]</sup>; 谢新宇等, 1997<sup>[78]</sup>; 蒋明镜, 沈珠江, 1998<sup>[79]</sup>; 何开胜, 沈珠江, 2000<sup>[80]</sup>; 罗晓辉, 白世伟, 2003<sup>[81]</sup>)。李术才等 (2002)<sup>[82]</sup>; 张玉军等 (2003)<sup>[83]</sup>; 何满潮等 (2004)<sup>[84]</sup> 也采用大变形理论对地下工程进行了分析探讨。大变形理论在边坡工程的应用相对很少, 施斌等 (1999)<sup>[85]</sup> 采用大变形有限元方法分析了边坡体中各单元的应力及变形情况; 周翠英等 (2003)<sup>[86]</sup> 采用有限元强度折减法求解了考虑边坡大变形情况时的边坡总体安全系数。

由上述分析可见, 大变形分析理论在边坡工程中的研究还刚刚起步, 而且还仅局限于定值法研究。因此, 需进行边坡工程的大变形有限元研究及相应的可靠度分析。

## 1.2.2 可靠度分析方法研究概况

### 1.2.2.1 结构可靠度理论研究

可靠度的研究早在 20 世纪 30 年代开始, 当时主要是围绕飞机失效进行研究。可靠度在结构工程中的应用大约从 20 世纪 40 年代开始。自从 1946 年 Freudenthal 在国际上发表“结构的安全度”以来<sup>[86]</sup>, 人们已充分认识到结构工程中的随机因素, 将概率分析和概率设计的思想引入实际工程。到 20 世纪 70 年代, 可靠度方法在结构设计规范中的应用成为可靠度研究的一项重要内容。国际标准化组织于 1986 年颁布了《结构可靠性总原则》(ISO2394)<sup>[87]</sup>, 1988 年又颁布了该标准的修订版本<sup>[88]</sup>, 在推进世界各国结构可靠度设计方面起了重要作用。自 1984 年起, 我国先后完成了第一层次的《工程结构设计可靠度设计统一标准》(GB50153-92)<sup>[89]</sup> 和第二层次的建筑<sup>[90]</sup>、港口<sup>[91]</sup>、水利水电<sup>[92]</sup>、铁路<sup>[93]</sup>和公路<sup>[94]</sup>工程结构可靠度设计统一标准的编制工作, 并完成了相应结构设计规范的修订。目前, 新修订的《建筑结构设计可靠度统一标准》(GB50068)<sup>[95]</sup> 已颁布。这些都说明概率极限状态设计已成为结构设计理论发展的一个重要方向。

结构可靠度方法在结构设计中的应用, 是其理论逐步发展和不断完善的結果。早期的可靠度计算方法只是考虑随机变量平均值和标准差的所谓“二阶矩模式”, 即现在的“中心点法” (Cornell, 1969, 1971)<sup>[96-97]</sup>。由于中心点法不能考虑实际中的非正态随机变量以及可靠指标的不惟一性等缺点, 1974 年 Hasofer and Lind<sup>[98]</sup> 从几何上对可靠指标进行了定义, 将可靠指标定义为标准正态空间内原点到极限状态曲面的最短距离。对于非正态变量, Rackwitz 和

Fiessler(1978)<sup>[99]</sup>提出一种当量正态转换法，可把非正态变量变换为等价的正态变量，同时提出了求设计点的迭代算法。这种方法被国际结构安全度联合委员会（JCSS）推荐使用，因而亦称为 JC 法。对于随机变量相关的情形，需要知道随机变量的联合概率分布函数，然后用 Rosenblatt 变换<sup>[100]</sup>将相关的非正态随机变量变为独立的标准正态随机变量，这种方法统称为验算点法。

上面的方法都只使用了结构功能函数的一次项和随机变量的前二阶矩，因此又称为一次二阶矩法或一阶可靠度分析方法（First Order Reliability Method，简称 FORM）。由于它是以验算点处线性化的极限状态方程来求可靠指标的，没有反映极限状态曲面的凹凸性，因此在极限状态方程的非线性程度较高时，误差较大。于是，学者们又提出了考虑极限状态方程二次项的二次二阶矩方法，又称为二阶可靠性分析方法（Second Order Reliability Method，简称 SORM）(Fiessler 等, 1979<sup>[101]</sup>; Breitung 等, 1984<sup>[102]</sup>; Tvedt 等, 1990<sup>[103]</sup>; Koyluoglu and Nielsen, 1994<sup>[104]</sup>; Yan-gang Zhao 等, 1999<sup>[105-106]</sup>; Der Kiureghian 等, 1987, 1991<sup>[107-108]</sup>)。SORM 比 FORM 的计算精度有所提高，但计算量也大大增加，所以目前常用的还是 FORM。

一次二阶矩法要求计算功能函数的梯度。当功能函数是隐式形式时，梯度的求解较为困难。于是，出现了结构可靠度分析中的响应面法（Response Surface Method，简称 RSM）。RSM 最早由 Box and Wilson (1954)<sup>[109]</sup>提出，当时对于 RSM 的研究仅限于如何用统计的方法得到一个显式函数，用来逼近一个复杂的隐式函数。RSM 在工程结构可靠性分析中的应用始于 80 年代(Wong, 1984, 1985<sup>[110-111]</sup>; Faravelli, 1989, 1992<sup>[112-113]</sup>)；随后，Bucher and Bourgund (1990)<sup>[114]</sup>; Rajashekhar and Ellingwood (1993)<sup>[115]</sup>; Liu and Moses (1994)<sup>[116]</sup>; 佟晓利、赵国藩 (1997)<sup>[117]</sup>; Kim and Na (1997)<sup>[118]</sup>; Y.Zheng, P.K.Das. (2000)<sup>[119]</sup>; S.Adhikari (2004)<sup>[120]</sup>等对 RSM 作了改进。

无论是 FORM、SORM 还是 RSM，其本质都是用极限状态函数的矩为基础来进行可靠度计算的，理论上都存在近似性，都属于可靠度分析的近似方法。所以，寻找一种有效而精确的结构可靠度计算方法是必须的。于是，基于蒙特卡罗模拟法(Monte-Carlo Simulation Method，简称 MCSM) 的结构可靠度数值模拟方法得到了人们的重视，其优点是模拟的收敛速度与基本随机变量的维数无关；极限状态函数的复杂程度与模拟过程无关；无需将极限状态函数线性和随机变量当量正态化；数值模拟的误差容易确定，从而确定模拟的次数和精度，因而常用于检验其它方法的精度。其缺点是随着结构破坏概率的降低，数值模拟的次数就会大大增加，计算时间也会大大延长<sup>[121]</sup>。

上述分析方法还都属于元件的可靠性分析。以上述分析方法为基础，李云贵、赵国藩 (1993)<sup>[122]</sup>; Ditlevsen (1979)<sup>[123]</sup>; Chowdhury 等 (1995)<sup>[124]</sup>; Song, Der Kiureghian (2003)<sup>[125]</sup>进一步研究了整个系统的可靠性。

### 1.2.2.2 结构可靠度理论在边坡稳定分析中的应用——边坡稳定的可靠度分析

随着结构可靠度理论的发展，以及人们对边坡工程中的不确定性认识的逐步深入，边坡工程的可靠度分析也越来越受到重视。可靠度分析首次于 70 年代引入边坡工程(Matsuo 等, 1974, 1976, <sup>[126-127]</sup>; Ang 等, 1975<sup>[128]</sup>; Alonso, 1976<sup>[129]</sup>; Tang 等, 1976<sup>[130]</sup>; Harr, 1977<sup>[131]</sup>; Vanmarcke, 1977<sup>[132]</sup>; Chowdhury, 1978<sup>[133]</sup>)。此后，很多人进行了进一步研究(Ang 等, 1984<sup>[134]</sup>; Chowdhury 等, 1984, 1987, 1993<sup>[135-137]</sup>; Wolff, 1985<sup>[138]</sup>; Nguyen, 1985<sup>[139]</sup>; Li, Lumb, 1987<sup>[140]</sup>; Oka, Wu, 1990<sup>[141]</sup>; Christian, 1994, 1996, 1998<sup>[142-144]</sup>; Low, 1997, 1998, 2005<sup>[145-147]</sup>;

Hassan, 1999<sup>[148]</sup>; Liang, 1999<sup>[149]</sup>; Malkawi, 2000<sup>[150]</sup>; Auvinet, 2000<sup>[151]</sup>; Bhattacharya, 2003<sup>[152]</sup>; 姚耀武, 1994<sup>[153]</sup>; 徐军, 2000<sup>[154]</sup>; 谭晓慧, 1998, 2001<sup>[155-158]</sup>; 陈晓平等, 2004<sup>[159]</sup>)。 Duncan (2000)<sup>[160]</sup>针对当时的情况进行了当代水平评述。 Ramly 等 (2002)<sup>[161]</sup>就一个具体的边坡问题全面阐述了可靠度方法在边坡中的应用。上述文献的共同特点是：将边坡稳定的各种极限平衡条分法与某种可靠度分析方法（主要是 MFORM, FORM, MCSM）相结合，从而得到边坡的可靠指标或破坏概率。分析表明：可靠度分析中边坡的最小可靠指标面与定值法分析中边坡的最小安全系数面是不同的；边坡稳定的可靠度分析中，FORM 法从理论上比 MFORM 更合理，但由于 MFORM 法计算简单，对于近似线性问题，其误差也不大，因此 MFORM 与 FORM 都是边坡工程中经常使用的可靠度分析方法。

### 1.2.3 有限元可靠度分析方法研究概况

随着定值法有限元计算精度的提高及计算机计算能力的增强，人们想到了将有限元方法与可靠度理论相结合来进行复杂结构的可靠度分析，从而产生了随机有限元 (Stochastic Finite Element Method, 简称 SFEM)，也称概率有限元 (Probabilistic Finite Element Method, 简称 PFEM)。

在进行结构的随机分析时，随机参数可视为随机变量或随机场 (Mellah 等, 2001<sup>[162]</sup>)。当视参数为随机场时，人们研究了多种随机场的离散方法，如空间离散法，谱分解法等，以反映随机介质的空间变异性。随机有限元更重要的研究是随机有限元控制方程的建立及求解<sup>[163-166]</sup>。

在进行随机有限元研究之初，研究思路是 MCSM 与有限元法直接结合，这可称为直接 Monte Carlo 法 (Shinozuka, 1976<sup>[167]</sup>)。由于直接 Monte Carlo 法是建立在大量确定性 FEM 计算的基础上的，对于大型结构，其计算量极大，因而很不实用。严格说来，这还不是真正的随机有限元。

真正的随机有限元始于 70 年代。Cambou (1971)<sup>[168]</sup>首次采用一次二阶矩法研究了线弹性问题，接着 Dendrou 和 Housh (1978)<sup>[169]</sup>, Baecher 和 Ingri(1981)<sup>[170]</sup>在解决岩土工程的不确定问题时用了类似的方法。由于这种方法是将随机变量影响量进行 Taylor 级数展开，因此又称 Taylor 展开法随机有限元 (Taylor SFEM, 简称 TSFEM)。接着, Hisada (1981, 1985<sup>[171-172]</sup>), Handa (1981<sup>[173]</sup>) 在考虑随机变量波动时采用一阶、二阶摄动技术，提出了极有效的摄动随机有限元法 (Perturbation SFEM, 简称 PSFEM)。Handa 将其用于框架结构分析，而 Hisada 则将其用在各种复杂结构的应力、位移随机分析。20 世纪 80 年代后期, Shinozuka, Yamazaki (1988)<sup>[174-176]</sup>创造性地将 Neumann 展开法与 Monte Carlo 有限元相结合，提出了精度、效率均较高的 Neumann Monte-Carlo SFEM (NSFEM)，使 Monte-Carlo 法与 FEM 得以完美结合。

非线性 SFEM 的研究开展较晚，目前主要有摄动法和偏微分法。Hisada 最初是将摄动法用于非线性结构的灵敏度分析，1989 年<sup>[177]</sup>他才将其用于随机有限元分析，提出了摄动法非线性随机有限元。Liu PL 等人 (1988)<sup>[178]</sup>最早将偏微分法用于随机有限元分析，并对几何非线性问题给出了二维非线性随机有限元计算式，同时指出他们的方法也用于材料非线性问题。Haldar, Zhou (1992)<sup>[179]</sup>等也提出了类似的方法。但这些方法的实质是基于全量理论的非线性随机有限元，故不能反映加载历史。吴世伟<sup>[180-184]</sup>，刘宁等<sup>[185-186]</sup>认为偏微分法计算效率相对较高，且能反映加载路径的影响，因此进一步研究了基于偏微分法的弹塑性随机有限元分

析。

随机结构分析的最终目的是进行可靠度分析，基于 SFEM 的可靠度计算中最为代表性的当属 Kiureghian 的方法<sup>[187-191]</sup>。该法将 Rackwitz, Fiessler (1978) 的可靠指标算法 FORM 与 SFEM 相结合，并有效地计算了框架结构的可靠度。吴世伟等 (1989, 1990, 1992) 则将该法推广至二维、三维，并计算了大型复杂块体如重力坝和拱坝的可靠度。对水工和岩土等实际工程中大多数具有非线性的复杂结构，我国学者作出了卓越贡献（武清玺，1995<sup>[192]</sup>；姚耀武等，1996<sup>[193]</sup>；严春风等，1999<sup>[194]</sup>；徐建平等，2000<sup>[195]</sup>；徐军等，2002<sup>[196]</sup>）。但是，这些工作的共同点是只研究了边坡体中各高斯点或单元的可靠度，即“点可靠度”；然后以此为基础进行边坡稳定分析评价。但工程实践中更需要的是边坡的整体可靠指标及滑面的位置。傅旭东等 (2001)<sup>[197]</sup>采用 PSFEM 对线弹性边坡体进行了整体体可靠度的计算。然而，边坡岩土体更应被视为非线性弹塑性体。

将 FORM 与 SFEM 算法相结合以进行结构可靠度计算的优点是随机有限元的计算工作量相对较小，但程序开发较为复杂。为了利用现有定值法有限元程序进行分析，又产生了其它一些方法，如 Marinilli 等 (1999)<sup>[198]</sup>，Nour 等 (2002)<sup>[199]</sup> 将定值法 FEM 程序及 MCSM 相结合，从而进行了地基沉降的可靠度分析。Fenton 及 Griffiths 等<sup>[200-204]</sup>也将定值法 FEM 与 MCSM 相结合，进行了地基工程及边坡工程的可靠度分析。这种方法虽然简单，但它需多次调用定值法有限元程序，计算量相对较大。

为减少计算计算量、提高计算效率，又有学者将 FEM 与 RSM 结合起来进行可靠度分析，如苏永华等，2000<sup>[205]</sup>；何满潮等，2001<sup>[206]</sup>；徐军，2002<sup>[207]</sup>；邓建等，2002<sup>[208]</sup>；宋玉香等，2004<sup>[209]</sup>；陈建康等，2005<sup>[210]</sup>；武清玺等，2005<sup>[211]</sup> 采都采用 RSM 进行了地下结构的可靠度分析。但是，当响应面为二次多项式时，可能存在多个设计点，从而可求出错误设计点，阻止了真正的坐标计算 (Bauer 等，2000)<sup>[212]</sup>。因此，当将 FEM 与 RSM 结合起来进行可靠度分析时，RSM 自身的算法仍需进一步改进。

由于边坡稳定的有限元可靠度计算工作量较大，因此，对于具体的边坡应先进行参数的敏感性分析，找出边坡稳定可靠度的主要影响因素，从而有针对性的减少可靠度分析中的参数个数，提高计算效率。在参数的可靠度敏感性分析方面，Low (1998)<sup>[146]</sup>，Madsen (1986)<sup>[213]</sup> 提出了基本随机变量互为独立时在原始空间中可靠指标对随机变量分布参数的敏感性计算公式；Imai (2000)<sup>[61]</sup>，刘宁 (2003)<sup>[214]</sup> 分析了基本变量相关时在标准正态空间中可靠指标对随机变量分布参数及极限状态方程参数的敏感性计算方法；Sudret (2002)<sup>[215]</sup> 探讨了有限元可靠度分析中位移、应力对基本变量的敏感性计算。由于有限元计算是在原始空间中进行的，因此，需要进行一步研究基本随机变量相关时在原始空间中求解可靠指标对参数敏感性的方法。

综上所述，边坡工程中的非线性 SFEM 已有了一定研究，取得了较大进展，但要达到实用化、通用化还有很多问题有待研究。

### 1.3 论文的研究目的、意义和内容

#### 1.3.1 研究目的

由上一节的文献综述可知，边坡稳定性分析方法的研究尽管是一个古老的课题，但随着

现代计算技术的进步及工程建设的要求，仍有很多内容需要进一步探索。因此，本论文的研究目的是探索一种新的边坡稳定可靠度分析方法——边坡稳定的非线性有限元可靠度分析方法。该方法应能反映实际岩土体的非线性性质（如材料非线性，几何非线性）和边坡工程中的随机不确定性，从而能更准确地评价边坡工程的稳定性；该方法应能得出边坡体的整体可靠指标及相应的滑面位置，从而为滑坡灾害的风险分析、风险管理、预测预报及加固设计提供科学依据，达到减灾防灾、安全经济的目的。

### 1.3.2 研究意义

该项研究具有十分重要的科学意义及实用价值。从科学意义来看，该项目属于力学前沿课题。它综合了工程地质学、岩土力学、弹塑性力学、非线性有限元方法、概率论与数理统计、可靠度数学、计算机科学等多学科的知识，是一门交叉学科，其研究成果将促进各相关学科的发展。从实用价值来看，这种方法能更真实地反映边坡工程的本质规律，克服了现有边坡稳定性分析方法中含有诸多不合理简化假设的限制，因而能更准确地评价边坡的可靠度及破坏概率。工程人员利用这种方法可更好地考虑边坡工程中各种不确定因素及各种复杂边界条件对边坡稳定性的影响，可更科学地进行滑坡灾害的风险分析、风险管理、预测预报及加固设计。

### 1.3.3 研究内容

本课题主要研究边坡稳定的非线性有限元可靠度分析中的各种方法。主要的研究内容有：

- 1) 边坡稳定可靠度分析的各种方法，如中心点法、验算点法、响应面法等，提出改进的响应面法，探讨边坡稳定可靠度分析中各种数值求导方法的区别。
- 2) 边坡稳定性分析的各种定值分析方法，如：极限平衡条分法，有限元法等。重点是研究边破稳定性分析的有限元法中，边坡安全系数的求解方法及非线性有限元的迭代格式，从而为后续的可靠度分析打下基础。
- 3) 基于强度折减的边坡稳定有限元可靠度分析方法的研究：将有限元强度折减法应用于边坡稳定的可靠度分析，研究基于有限元强度折减法与基于极限平衡条分法（Bishop 法）的可靠度分析结果间的关系，研究这种方法的优缺点。
- 4) 基于滑面应力分析的边坡稳定有限元可靠度分析方法的研究：研究根据有限元求解结果进行边坡中各单元可靠指标、边坡整体可靠指标及其对应滑面位置的确定方法，探讨有限元分析中功能函数形式对计算结果的影响。
- 5) 边坡稳定的有限元可靠度敏感性分析：针对边坡工程中的高度非线性功能函数及非线性有限元计算量大的问题，研究边坡有限元可靠度分析中的敏感性计算方法，推导基本变量相关时在原始空间中求解可靠指标对参数敏感性的计算公式，提出进行参数的相对敏感性分析方法及公式。
- 6) 边坡稳定的弹塑性大变形有限元可靠度分析：针对边坡工程中的大变形现象，研究既考虑边坡的弹塑性材料非线性又考虑其大变形几何非线性的有限元可靠度分析方法，推导其计算公式，比较大小变形情况下的相应结果。

- 
- 7) 有限元可靠度分析中加速收敛算法的研究：针对有限元可靠度分析中，结点位移对基本变量的偏导数迭代收敛速度慢的问题，研究随机有限元中加速收敛的方法，推导其计算公式，分析比较其优点。
  - 8) 可靠度分析中有限步长迭代法在边坡稳定有限元可靠度分析中的应用：由于研究对象的复杂性，边坡稳定可靠分析中功能函数的形式一般是高度非线性的，用常规的验算点法求可靠指标可能会出现迭代计算不收敛的现象。为此，本文研究有限步长迭代法在边坡稳定有限元可靠度分析中的应用，研究初始步长和步长调整系数的取值范围。

综上所述，本课题利用弹塑性有限元法分析边坡的可靠度，分析思路新颖，具有较大的理论意义和工程实用价值，也有相当的研究深度。

## 2 结构可靠度分析的基本原理

### 2.1 结构的极限状态

按照工程结构可靠度设计统一标准，工程结构需满足下列功能要求：

- 1) 在正常施工和使用时，能承受出现的各种作用；
- 2) 在正常使用时，具有良好的工作性能；
- 3) 在正常维护下，具有足够的耐久性能；
- 4) 在设计规定的偶然事件发生及发生后，能保持必要的稳定性。

在上面规定的结构必须完成的四项功能中，第一项是对结构承载能力的要求，关系到结构的安全性；第二项是对结构正常使用性能的要求，关系到结构能否满足规定的使用要求。这两项对应的极限状态分别称为承载能力极限状态和正常使用极限状态，有明确的标志和限值。第三项是对结构耐久性方面的要求，目前一般从材料选择、设计、施工、养护、使用中的维护等方面加以考虑和解决；第四项是对结构坚固性方面的要求，目前一般通过结构选型、要领设计、构造处理等手段解决。

为满足结构各项功能的要求，在具体进行设计或可靠度分析时，要进行必要的数学运算。在这种情况下，需建立描述上述功能的数学函数，即结构功能函数，或称为极限状态函数。如结构的某一功能可用  $n$  个随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  表示（其中  $X_i$  是只包含具有不定性的随机变量，又称为基本变量），则该功能函数可表示为

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.1.1)$$

结构在其使用过程中，可能能够完成要求的功能，也可能不能完成要求的功能。如果结构能够完成要求的功能，则结构处于可靠状态；如果结构不能完成要求的功能，则结构处于不可靠状态，或失效状态。结构由可靠状态到不可靠状态需有一个界限，这一界限称为结构的极限状态。极限状态是结构可靠与不可靠的临界状态。工程结构可靠度设计统一标准对结构极限状态的定义是：当结构或结构的一部分超过某一特定状态就不能满足设计规定的某一功能要求时，此特定状态就称为该功能的极限状态。如果利用式 (2.1.1) 表示的结构功能函数进行描述，则

$Z > 0$ ：表示结构处于可靠状态；

$Z < 0$ ：表示结构处于失效状态；

$Z = 0$ ：表示结构处于极限状态。

根据结构需完成的功能和结构达到极限状态的标志，可建立结构的功能函数或极限状态方程。如结构的抗力为  $R$ ，荷载效应为  $S$ ，则  $R > S$  时结构处于可靠状态， $R < S$  时结构处于失效状态， $R = S$  时结构处于极限状态，所以结构的功能函数可表示为  $Z = R - S$ ，也可表示为  $Z = R/S - 1$  或其它形式。如果随机变量相互独立，如图 2.1-1(a)所示，则可在直角坐标系中描述结构的状态： $R = S$  表示极限状态直线， $R > S$  的区域表示可靠域， $R < S$  的区域表示失效域。对于一般的情形，结构功能函数如式(2.1.1)，在图 2.1-1(b)中，相应的曲线（曲面）称为极限状态曲线（曲面）<sup>[216]</sup>。

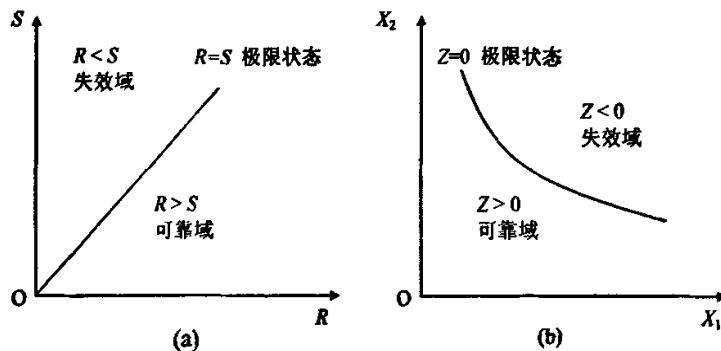


图 2.1-1 极限状态方程 (a)两个变量 (b)一般情况

## 2.2 结构的可靠度与失效概率

由式(2.1.1)知, 结构的功能函数是多个随机变量的函数, 所以结构的功能函数本身也是一个随机变量。这样, 在结构使用过程中, 功能函数是大于零(可靠)还是小于零(失效)是不确定的, 工程中需要分析的是结构使用期内功能函数至少一次小于零的概率。以图 2.1-1(b)为例,  $(X_1, X_2)$  构成一个随机点, 当该点落入可靠域时, 结构处于可靠状态; 当该点落入失效域时, 结构处于失效状态。随机点落入可靠域的概率称为可靠度, 用  $P_r$  表示; 落入失效域的概率称为失效概率(破坏概率), 用  $P_f$  表示。显然,  $P_r + P_f = 1$ 。由于结构的可靠度  $P_r$  在数值上非常接近于 1, 没有用失效概率表达起来方便, 习惯上多用失效概率  $P_f$  来表示结构的可靠度。

一般地, 设结构功能函数  $Z$  的概率密度函数  $f_Z(z)$  是已知的, 则结构的失效概率可由下式计算

$$P_f = P(Z < 0) = \int_{-\infty}^0 f_Z(z) dz \quad (2.2.1)$$

而实际上, 很难知道结构功能函数的概率分布, 一般情况下可能知道的是其表达式中各随机变量的概率分布。如结构的抗力为  $R$ , 荷载效应为  $S$ , 联合概率密度函数为  $f_{RS}(r,s)$ , 则随机点落入  $[r, r+dr]$  和  $[s, s+ds]$  所构成矩形区域的概率为  $f_{RS}(r,s)drds$ 。若结构功能函数为  $Z = R - S$ , 则由概率论的原理可得结构的失效概率为

$$P_f = P(Z < 0) = P(R < S) = \iint_{R < S} f_{RS}(r,s) dr ds \quad (2.2.2)$$

如果  $R$  与  $S$  相互独立, 则联合概率密度函数为  $f_R(r)f_S(s)$ 。此时, 在积分域内先沿  $r$  轴方向积分, 再沿  $s$  轴方向积分, 可得

$$\begin{aligned} P_f &= P(R < S) = \int_0^{+\infty} ds \int_0^s f_R(r) f_S(s) dr \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^s f_R(r) dr \right] f_S(s) ds = \int_0^{+\infty} F_R(s) f_S(s) ds \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

也可先沿  $s$  轴方向积分, 得

$$\begin{aligned} P_f &= P(R < S) = \int_0^{+\infty} dr \int_0^{+\infty} f_R(r) f_S(s) ds \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \int_0^{+\infty} f_S(s) ds \right] f_R(r) dr = \int_0^{+\infty} [1 - F_S(r)] f_R(r) dr \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

作为更一般的情况，若功能函数中包含  $n$  个基本随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ，其联合概率密度函数为  $f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，则结构的失效概率可表示为

$$P_f = P(R < S) = \iint_{Z < 0} \cdots \int f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2.2.5)$$

若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立，则

$$P_f = P(R < S) = \iint_{Z < 0} \cdots \int f_X(x_1) f_X(x_2) \cdots f_X(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2.2.6)$$

## 2.3 结构的可靠指标

由式(2.2.5)和式(2.2.6)可见，经典的结构失效概率表达式是一个高维积分，积分的维数与随机变量的数目相同。当随机变量的数目较多时，直接进行积分计算是非常困难的。为此，工程中引入了可靠指标的概念。

式(2.2.1)给出了当结构功能函数的概率分布已知时失效概率的计算公式。一般情况下，结构的功能  $Z$  的分布取决于其包含的随机变量的概率分布和功能函数的形式。假定  $Z$  服从正态分布，其平均值为  $\mu_Z$ ，标准差为  $\sigma_Z$ ，则结构的失效概率为

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_z(z) dz = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Z} \exp\left[-\frac{(z-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] dz \quad (2.3.1)$$

作变换  $z = \mu_Z + \sigma_Z t$ ，则  $dz = \sigma_Z dt$ ，当  $z = 0$  时  $t = -\mu_Z / \sigma_Z$ ， $z \rightarrow -\infty$  时  $t \rightarrow -\infty$ ，所以式(2.3.1)变为

$$P_f = \int_{-\infty}^{-\mu_Z/\sigma_Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta) \quad (2.3.2)$$

式中

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (2.3.3)$$

称为结构可靠指标，它与结构失效概率具有一一对应的关系。求得了可靠指标  $\beta$ ，也就求得了结构的失效概率  $P_f$  或可靠度  $P_s$ 。表 2.3-1 给出了  $P_f$  与  $\beta$  的对应关系。

表 2.3-1 失效概率与可靠指标的对应关系

$P_f$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
$\beta$	1.282	2.326	3.090	3.719	4.265	4.753	4.199

由概率论知识可知，分布函数是单调函数， $\beta$  越大，结构的失效概率  $P_f$  就越小，而相应的结构可靠度  $P_s$  就增加，因此，亦可直接由结构的可靠指标  $\beta$  值来描述结构的可靠性。

需要注意的是，式(2.3.3)是在功能函数  $Z$  服从正态分布的条件下建立的，如功能函数不服从正态分布，则需将  $Z$  等效或近似为正态分布的随机变量，此时求得的可靠指标与失效概率不再具有式(2.3.3)表示的精确关系，但此时仍由可靠指标判别结构的可靠度水平。

考虑一种比较简单的情况，设结构的抗力  $R$  和荷载效应  $S$  均服从正态分布且相互独立，结构的功能函数为  $Z = R - S$ 。由于  $Z$  是  $R$  和  $S$  的线性函数，因此  $Z$  也服从正态分布，且

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad (2.3.4)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (2.3.5)$$

则可靠指标为

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (2.3.6)$$

如果结构的抗力  $R$  和荷载效应  $S$  均服从对数正态分布，结构的功能函数为  $Z=\ln R - \ln S$ ，则此时  $\ln R$  与  $\ln S$  均服从正态分布， $Z$  也服从正态分布，其平均值及标准差可由式(2.3.7)及式(2.3.8)求得：

$$\mu_z = \mu_{\ln R} - \mu_{\ln S} \quad (2.3.7)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_{\ln R}^2 + \sigma_{\ln S}^2} \quad (2.3.8)$$

则可靠指标为

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{\mu_{\ln R} - \mu_{\ln S}}{\sqrt{\sigma_{\ln R}^2 + \sigma_{\ln S}^2}} \quad (2.3.9)$$

由于对于对数正态分布，有

$$\mu_{\ln X} = \ln \mu_X - \frac{1}{2} \ln(1 + \delta_X^2) \quad (2.3.10)$$

$$\sigma_{\ln X} = \sqrt{\ln(1 + \delta_X^2)} \quad (2.3.11)$$

式中  $\delta_X$  为  $X$  的变异系数，

$$\delta_X = \sigma_X / \mu_X \quad (2.3.12)$$

因此，

$$\mu_z = \mu_{\ln R} - \mu_{\ln S} = \ln \frac{\mu_R \sqrt{1 + \delta_S^2}}{\mu_S \sqrt{1 + \delta_R^2}} \quad (2.3.13)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\ln(1 + \delta_R^2)(1 + \delta_S^2)} \quad (2.3.14)$$

则

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{\ln \frac{\mu_R \sqrt{1 + \delta_S^2}}{\mu_S \sqrt{1 + \delta_R^2}}}{\sqrt{\ln(1 + \delta_R^2)(1 + \delta_S^2)}} \quad (2.3.15)$$

当  $R$  和  $S$  的变异系数数值较小时 ( $\delta_R \leq 0.3$ ,  $\delta_S \leq 0.3$ )，可靠指标可按下式近似计算

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{\ln \mu_R - \ln \mu_S}{\sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}} \quad (2.3.16)$$

如果抗力  $R$  和荷载效应  $S$  不同时服从正态分布或对数正态分布，或  $R$  和  $S$  同时服从正态分布或对数正态分布但极限状态方程不为线性方程，则不能再直接由上述方法求得可靠指标，此时需要采用各种近似方法。

## 2.4 一阶可靠度分析方法

从本质上讲，计算结构的可靠度就是计算结构在规定的时间内和规定的条件下完成预定功能的概率，而这一概率是与随机变量数目有关的高维积分。随机变量数越多，相应的积分

阶数也就高，这就导致了数值计算的困难。因此，出现了各种结构可靠度计算的近似方法，如一阶可靠性方法、二阶可靠性方法、点估计法、响应面法、蒙特卡罗模拟法等。其中，一阶可靠性方法使用最广泛<sup>[216-218]</sup>。

结构可靠度分析的一阶可靠性分析方法（First Order Reliability Method，简称 FORM）是相对于二阶可靠性分析方法（Second Order Reliability Method，简称 SORM）而言的。由于一阶可靠性方法在分析过程中只用到了结构功能函数的一次泰勒级数展开项及基本变量的前两阶矩，因此又称为一次二阶矩法（First Order Second Moment，简称 FOSM）。这种方法又可分为两种：中心点法和验算点法。

#### 2.4.1 中心点法（均值一阶可靠度方法，MFORM）

由于中心点法是在中心点处将极限状态方程进行线性展开，因此又称为均值一阶可靠度方法（Mean FORM，简称 MFORM）。中心点法是结构可靠度理论研究初期提出的分析方法。该方法的思想最早由 Mayer 提出，最后由 Cornell 等人建立了实用的分析体系。其特点是对基本变量不作分布类型的假定。

设结构的功能函数为  $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  (2.4.1)

式中  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是结构的  $n$  个互为独立的基本变量， $X_i$  的均值及均方差分别为  $\mu_{X_i}$  和  $\sigma_{X_i}$ 。

记点  $M = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})$  为“中心点”，中心点法就是在中心点  $M$  将结构的功能函数展开成泰勒级数，并只取到一次项，

$$Z \approx Z' = g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) + \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_{X_i}) \frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i} \quad (2.4.2)$$

式中， $\frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i}$  表示在中心点求解功能函数对基本变时的导数。此时， $Z$  的统计参数为

$$\mu_Z \approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}) \quad (2.4.3)$$

$$\sigma_Z \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right]^2} \quad (2.4.4)$$

从而可得中心点法的可靠指标计算公式

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \approx \frac{g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right]^2}} \quad (2.4.5)$$

中心点法的优点是概念清楚，计算简单，便于实际应用，因此是目前常用的结构可靠度分析方法之一。但中心点法也存在着一些缺点，这主要表现在：1) 该方法没有考虑基本变量的概率分布；2) 当功能函数为非线性时，由于该方法在中心点处取线性近似，因此所得的可靠指标也是近似的，其近似程度取决于线性近似的极限状态超曲面与真正的极限状态超曲面之间的差异程度；3) 对于力学意义相同但数学表达形式不同的功能函数，中心点法计算所得可靠指标可能不同，即可靠指标与极限状态函数的列式形式有关。

### 2.4.2 验算点法（改进的一阶可靠度方法，FORM）

由于中心点法存在缺点，因此需进一步改进。1974年，Hasofer 和 Lind<sup>[98]</sup>更加科学地对可靠指标加以定义，并引入了验算点的概念，才使可靠度分析的一阶可靠度方法有了更进一步的发展。由于分析中要迭代求解验算点，且验算点是可靠度分析中的一个关键点，因此称这种方法为验算点法，亦称为 HL 算法。由于这种方法是对中心点法（或：均值一阶可靠度方法）的改进，因此又称改进的一阶可靠度方法（AFORM）或改进的一次二阶矩法（AFOSM）。对于非正态变量，Rackwitz 和 Fiessler(1978)<sup>[99]</sup>提出一种当量正态转换法，可把非正态变量转换为等价的正态变量，同时提出了求设计点的迭代算法，亦称为 HL-RF 算法。这种方法被国际结构安全度联合委员会（JCSS）推荐使用，因而也称为 JC 法。对于随机变量相关的情形，需要知道随机变量的联合概率分布函数，然后用 Rosenblatt 变换<sup>[100]</sup>将相关的非正态随机变量变为独立的标准正态随机变量。

为统一起见，本文把中心点法（或均值一阶可靠度方法）简记为 MFORM；把验算点法及其各种改进统称为验算点法（或改进的一阶可靠度分析方法），简记为 FORM。

验算点法作为对中心点法的改进，主要有两个特点：

- 1) 当功能函数  $Z$  为非线性时，不以通过中心点的超切平面作线性近似，而以通过  $Z=0$  上的某一点的超切平面作为近似，以避免中心点法的误差；
- 2) 当基本变量  $X_i$  具有分布类型的信息时，将  $X_i$  的分布在  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  处以与正态分布等价的条件，变换为当量正态分布，这样可使所得的可靠指标  $\beta$  与失效概率  $P_f$  之间有一个明确的对应关系，从而在  $\beta$  中合理地反映了分布类型的影响。这个特定点  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  就称为验算点  $P^*$ 。

#### 2.4.2.1 随机变量服从正态分布的情况

##### 1. 可靠指标的几何意义

设结构中  $n$  个基本变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是互为独立的正态随机变量，其平均值为  $\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}$ ，均方差为  $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}, \dots, \sigma_{X_n}$ ，结构的功能函数为

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.4.6)$$

按下式将随机变量  $X_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 变换为标准正态随机变量  $Y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )：

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.4.7)$$

则功能函数可表示为

$$Z = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad (2.4.8)$$

将极限状态方程在通过极限状态超曲面  $Z=0$  上的验算点处  $P^*$  处展开，得

$$Z \approx Z^* = G(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(y^*)}{\partial Y_i} (Y_i - y_i^*) \quad (2.4.9)$$

从而可得功能函数  $Z$  的平均值和标准差为

$$\mu_Z = G(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(y^*)}{\partial Y_i} \cdot y_i^* \quad (2.4.10)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \right)^2} \quad (2.4.11)$$

因此,

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{G(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \cdot y_i^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \right)^2}} \quad (2.4.12)$$

另一方面, 线性化的极限状态方程式(2.4.9)可变形为

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \cdot Y + G(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \cdot y_i^* = 0 \quad (2.4.13)$$

两边同除  $-\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_j} \right)^2}$ , 可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{-\frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \cdot Y - G(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \cdot y_i^*}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_j} \right)^2}} = 0 \quad (2.4.14)$$

将式(2.4.12)与(2.4.14)进行比较, 显然, 方程的常数项即为可靠指标  $\beta$ , 从而有

$$\sum_{i=1}^n \frac{-\frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \cdot Y}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_j} \right)^2}} - \beta = 0 \quad (2.4.15)$$

令

$$\alpha_{Y_i} = \frac{-\frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_j} \right)^2}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.4.16)$$

则

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{Y_i} Y_i - \beta = 0 \quad (2.4.17)$$

由解析几何可知, 式(2.4.17)所表示的是一法线式方程,  $\alpha_{Y_i}$  为直线的法线与坐标轴夹角的方向余弦, 显然,  $\alpha_{Y_i}$  满足

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{Y_i}^2 = 1 \quad (2.4.18)$$

且

$$y_i^* = \alpha_{Y_i} \beta \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.4.19)$$

可见,  $\alpha_{Y_i}$  反映了各基本变量的不定性对结构可靠度影响的权, 可称为敏感性系数; 同时, 亦可看出  $\beta$  是坐标原点到直线的最短距离, 这就是  $\beta$  的几何意义, 即:  $\beta$  是标准正态空间中, 坐标原点到极限状态曲面的最短距离。相应地, 标准正态空间中极限状态曲面上到原点距离

最近的点就称为验算点。式(2.4.12)、(2.4.16)、(2.4.19) 共有  $2n+1$  个方程中，其中包含了  $y_i^*$ 、 $\alpha_{Y_i}$  及  $\beta$  共  $2n+1$  个未知数，因此可联立求解，以确定验算点的位置及相应的可靠指标。

## 2. 可靠指标与失效概率的关系

求得了结构的可靠指标后，仍可用下式求解结构的失效概率：

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (2.4.20)$$

需要注意的是，将原极限状态曲面线性展开后所计算的可靠指标是与切平面相对应的，不能完全反映结构的失效概率，或者说由可靠指标计算所得的失效概率是精确失效概率的一阶近似结果。若要获得更准确的结果，还需考虑原极限状态曲面的弯曲程度及弯曲方向。典型的由验算点法计算的失效概率与精确失效概率的关系如图 2.4.1 所示<sup>[216]82-85</sup>。

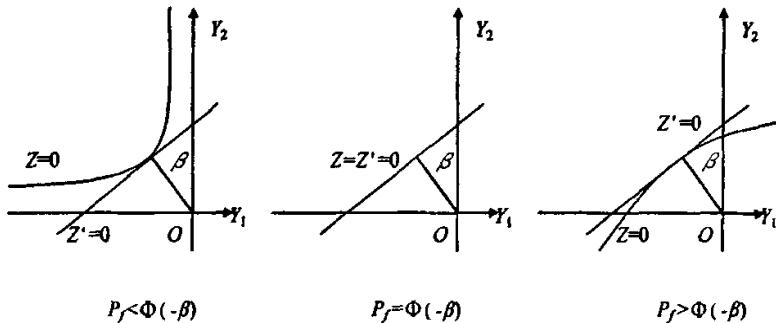


图 2.4.1 不同情况下计算失效概率与精确失效概率的关系

## 3. 原始空间中可靠指标的计算

下面将基本变量由  $Y$  空间变回  $X$  空间。

$$\because \text{由式(2.4.7)可得} \quad \frac{\partial G(y^*)}{\partial Y_i} = \frac{\partial g(x^*)}{\partial X_i} \cdot \sigma_{X_i} \quad (2.4.21)$$

$$\therefore \alpha_{Y_i} = -\frac{\frac{\partial G(y^*)}{\partial Y_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (\frac{\partial G(y^*)}{\partial Y_j})^2}} = -\frac{-\frac{\partial g(x^*)}{\partial X_i} \cdot \sigma_{X_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (\frac{\partial g(x^*)}{\partial X_j} \cdot \sigma_{X_j})^2}} = \alpha_{X_i} \quad (2.4.22)$$

$$\therefore X \text{ 空间中验算点的坐标为 } x_i^* = \mu_{X_i} + y_i^* \sigma_{X_i} = \mu_{X_i} + \alpha_{X_i} \beta \sigma_{X_i} \quad (2.4.23)$$

相应地，

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x^*)}{\partial X_i} \cdot (x_i^* - \mu_{X_i})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\frac{\partial g(x^*)}{\partial X_i} \cdot \sigma_{X_i})^2}} \quad (2.4.24)$$

$\therefore$  联立求解式(2.4.22)、(2.4.23)、(2.4.24)，即可求得可靠指标。

### 2.4.2.2 随机变量不服从正态分布的情况

当基本随机变量不服从正态分布时, Rackwitz-Fiessler 提出可采用当量正态化的方法, 将随机变量  $X_i$  转化为当量正态变量  $X_i^*$ 。具体方法是: 将非正态变量  $X_i$  在验算点处, 根据分布函数  $F_{X_i}(x)$  与概率密度函数  $f_{X_i}(x)$  相等的原则等价变换为当量正态变量  $X_i^*$ , 并确定  $X_i^*$  的平均值和标准差<sup>[217]</sup>。

如图 2.4-2, 按在验算点上分布函数相等的条件

$$F_{X_i}(x_i^*) = F_{X_i^*}(x_i^*) = \Phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i^*}}{\sigma_{X_i^*}}\right) \quad (2.4.25)$$

可得

$$\mu_{X_i^*} = x_i^* - \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\sigma_{X_i^*} \quad (2.4.26)$$

按在验算点在密度函数相等的条件

$$f_{X_i}(x_i^*) = f_{X_i^*}(x_i^*) = \frac{1}{\sigma_{X_i^*}} \phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i^*}}{\sigma_{X_i^*}}\right) \quad (2.4.27)$$

可得

$$\sigma_{X_i^*} = \phi\left(\frac{x_i^* - \mu_{X_i^*}}{\sigma_{X_i^*}}\right) / f_{X_i^*}(x_i^*) = \phi\{\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\} / f_{X_i^*}(x_i^*) \quad (2.4.28)$$

式中  $\Phi(\cdot)$  和  $\Phi^{-1}(\cdot)$  为标准正态分布函数和它的反函数,  $\phi(\cdot)$  为标准正态分布的概率密度函数。

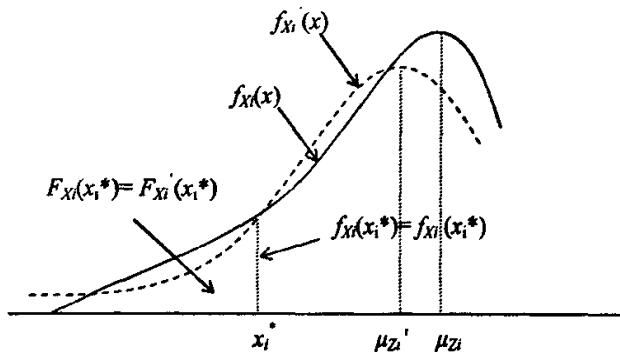


图 2.4-2 非正态随机变量的当量正态化

当基本变量  $X_i$  为对数正态分布时, 其当量正态变量的平均值和标准差的公式可导出如下: 对于对数正态分布的基本变量  $X_i$ , 有

$$F_{X_i}(x_i^*) = \Phi\left(\frac{\ln x_i^* - \mu_{\ln X_i^*}}{\sigma_{\ln X_i^*}}\right) \quad (2.4.29)$$

$$f_{X_i}(x_i^*) = \frac{1}{x_i^* \sigma_{\ln X_i^*}} \phi\left(\frac{\ln x_i^* - \mu_{\ln X_i^*}}{\sigma_{\ln X_i^*}}\right) \quad (2.4.30)$$

由式(2.4.28)~(2.4.30)可得

$$\sigma_{X_i^*} = \phi\left(\frac{\ln X_i^* - \mu_{\ln X_i}}{\sigma_{\ln X_i}}\right) / f_{X_i}(x_i^*) = x_i^* \sigma_{\ln X_i} = x_i^* \sqrt{\ln(1 + \delta_{X_i}^2)} \quad (2.4.31)$$

式中  $\delta_{X_i}$  为  $X_i$  的变异系数。

由式(2.4.26)和式(2.4.29)~(2.4.30)可得

$$\begin{aligned} \mu_{X_i^*} &= x_i^* - \frac{\ln x_i^* - \mu_{\ln X_i}}{\sigma_{\ln X_i}} x_i^* \sigma_{\ln X_i} = x_i^* (1 - \ln x_i^* + \mu_{\ln X_i}) \\ &= x_i^* (1 - \ln x_i^* + \ln \frac{\mu_{X_i}}{\sqrt{1 + \delta_{X_i}^2}}) \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

#### 2.4.2.3 验算点法的迭代步骤

上文分析推导了验算法中可靠指标的计算公式。由于公式中验算点的位置是未知的，因此需迭代求解，具体的迭代步骤如下：

- 1) 列出极限状态条件  $g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$ ，并确定所有基本变量  $X_i$  的分布类型和统计参数  $\mu_{X_i}$  及  $\sigma_{X_i}$  ( $i=1,2,\dots,n$ )；
- 2) 假定验算点的初值  $\mathbf{x}^{*(0)} = (x_1^{*(0)}, x_2^{*(0)}, \dots, x_n^{*(0)})^T$ ，一般可取  $\mathbf{x}^{*(0)} = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})^T$ ；
- 3) 对非正态基本变量在验算点的初值处按公式(2.4.26)和式(2.4.28)计算其当量正态变量的平均值和标准差，并分别替代原有的平均值和标准差；
- 4) 由式(2.4.24)计算可靠指标  $\beta$ ；
- 5) 由式(2.4.22)计算方向余弦  $\alpha_{X_i}$ ；
- 6) 由式(2.4.23)计算新的验算点  $\mathbf{x}^{*(1)} = (x_1^{*(1)}, x_2^{*(1)}, \dots, x_n^{*(1)})^T$ ；
- 7) 若前后两次迭代计算所得  $\beta$  之差小于  $\varepsilon$ （或前后两次迭代的设计点间的距离  $\|\mathbf{x}^{*(1)} - \mathbf{x}^{*(0)}\| < \varepsilon$ ）， $\varepsilon$  为规定的允许误差，则停止迭代，所求  $\beta$  即为要求的可靠指标；否则，取  $\mathbf{x}^{*(0)} = \mathbf{x}^{*(1)}$ ，转至 3) 继续进行迭代。

## 2.5 蒙特卡罗模拟法 (MCSM)

蒙特卡洛模拟法 (Monte-Carlo Simulation Method, 简称 MCSM) 又称为随机抽样法，概率模拟法或统计试验法。该法是通过随机模拟和统计试验来求解结构可靠性的数值方法。由于它以概率论和数理统计理论为基础，故被一些物理学家以位于法国与意大利接壤的闻名于世的赌城蒙特卡罗命名，以此来表示其随机性的特征。在目前的结构可靠度分析中，它被认为是一种相对精确的方法<sup>[216, 218]</sup>。

蒙特卡洛模拟法用于结构可靠度分析的基本思想是：当已知基本变量  $\mathbf{X}$  的概率分布时，可利用适当的随机数发生器，产生符合状态变量  $\mathbf{X}$  的概率分布的一组随机数  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，以之代入状态函数  $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，计算状态函数的一个随机数  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，并看它是否小于零。以同样方法产生  $N$  个状态函数的随机数据。若  $N$  个状态函数的随机数中有  $m$  个小

于零，则当  $N$  足够大时，由大数定律可知系统的失效概率  $P_f$  为：

$$P_f = P[g(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0] = m/N \quad (2.5.1)$$

为与其它方法的计算结果进行比较，取

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - P_f) \quad (2.5.2)$$

可以证明：当规定了模拟的精度 ( $P_f$  的变异系数  $\delta_{P_f}$ ) 后，可由下式近似估算需要的模拟次数 [216][330-331]：

$$N = \frac{1 - P_f}{\delta_{P_f}^2 P_f} \quad (2.5.3)$$

对于实际工程而言， $P_f$  的数量级一般是已知的。因此，给定一个模拟精度后，即可预估模拟次数。由上式可见，为了达到预定的精度，所需的模拟次数相对较多，计算量较大，因而 MCSM 多用于理论方面，以便检验一些新提出的计算方法的计算精度，或者进行某种比较。

由上述分析可知，在结构可靠度分析的 MCSM 中，如何由随机变量的已知分布进行随机抽样是十分重要的。

首先考察各基本变量互相独立的情况。设基本变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  分别有分布函数  $F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)$ ，因为  $F_{X_i}(x_i)$  为是一个服从  $[0,1]$  区间上均匀分布的随机变量，可以将其与蒙特卡罗法中产生的随机数相对应，即令  $F_{X_i}(x_i) = r_i$ ，这里  $r_i$  是由蒙特卡罗法产生的  $[0,1]$  区间上均匀分布的一个随机数，由此可得  $x_i = F_{X_i}^{-1}(r_i), i = 1, 2, \dots, n$ ，从而可得基本变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的一组实现  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 。

若基本变量互相关，可以利用条件概率密度，把多维问题化成一维问题来解决。设结构基本变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  彼此相关，则可将联合密度函数用条件密度函数表示为

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2 | x_1) f_{X_3}(x_3 | x_1, x_2) \cdots f_{X_n}(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (2.5.4)$$

式中右边各个因子都是一维概率密度，因此可仿独立情况，对于每个  $r_j$  产生一组基本变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，其公式为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= F_{X_1}^{-1}(r_1) \\ x_2 &= F_{X_2|X_1}^{-1}(r_2 | x_1) \\ &\dots \\ x_n &= F_{X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}}^{-1}(r_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.5.5)$$

## 2.6 响应面法(RSM)

### 2.6.1 响应面法的原理

结构可靠度常用的分析方法是一阶可靠度方法或蒙特卡罗模拟法。但是，对于复杂结构的可靠度分析，功能函数通常无法用显式表达，只能通过一些数值算法（如有限元法）得到其离散值。因为一阶可靠度方法需计算功能函数的导数，计算较为复杂；蒙特卡罗模拟法又

需多次进行有限元计算，计算工作量极大。在这种情况下，常采用响应面法(Response Surface Method，简称 RSM)来进行可靠度分析。

RSM 是统计学的综合试验技术，用于处理复杂系统的输入（基本变量）和输出（系统响应）之间的转换关系。其基本思想是用响应面函数（RSF）来拟合原有的隐式极限状态函数。常用的响应面函数是下面的二次多项式形式

$$g(x) \approx \hat{g}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (2.6.1)$$

式中， $a_0, a_i, a_{ii}, a_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$ ) 分别是常数项及线性项、平方项及二次交叉项的系数，需要计算确定。其方法是先按一定方式选择一系列取样点（拟合点） $\{x^k, k=1, 2, \dots, n_f\}$ ；然后，在这些取样点处计算对应的响应量，再用最小二乘法等方法来求解响应面的系数。当上式中待定系数确定之后，即可视这一响应面函数为近似的极限状态函数，从而可用常规的可靠度分析方法，如一阶可靠度方法、二阶可靠度方法、蒙特卡罗模拟法等进行分析。

目前，对于 RSM 探讨比较多的问题集中于取样点点位的选择及响应面形式的确定。

Wong (1985)<sup>[111]</sup>提出了包含一次项及二次交叉项的响应面函数。对每个随机变量  $X_i$ ，分别取其下界  $x_i^- = \mu_{X_i} - \sigma_{X_i}$  和上界  $x_i^+ = \mu_{X_i} + \sigma_{X_i}$ （式中， $\mu_{X_i}$  和  $\sigma_{X_i}$  分别为随机变量  $X_i$  的均值和均方差）。因此，对  $n$  个随机变量，这样的组合共有  $2^n$  种方式，即为了求解响应面的系数，共需在  $2^n$  个拟合点处计算结构的功能函数值。由于响应面法一般是用于极限状态函数无法显式表示的情况，相应的功能函数值常需有限元等数值计算方法实现，计算量较大。因此，当随机变量数较多时，这种方法计算量太大，不便于实用。

为了减少计算工作量，Bucher 和 Bourgund (1990)<sup>[114]</sup>提出了不考虑交叉项的二次多项式形式的功能函数，因此只需计算  $2n+1$  个待定系数。这种方法分两步，第一步：选随机向量  $\mathbf{X}$  的均值向量  $\mu_X$  作为中心拟合点，并沿每一坐标轴方向各取两个点  $x_i^\pm = \mu_{X_i} \pm f\sigma_{X_i}$ ，其中  $f$  是拟合点的点位控制系数，Bucher 和 Bourgund 取  $f=3$ 。因此，只需进行  $2n+1$  次有限元计算，即可确定响应面的待定系数，从而可确定响应面的形式及其设计点  $x^*$ 。第二步，对  $\mu_X$  和  $x^*$  进行线性内插，以确定新的验算点  $x_M$ （其对应的极限状态函数值为 0），以便拟合中心点更接近响应面。点  $x_M$  的计算公式为

$$x_M = \mu_X + (x^* - \mu_X) \frac{g(\mu_X)}{g(\mu_X) - g(x^*)} \quad (2.6.2)$$

然后，以  $x_M$  为中心点再次进行响应面的拟合。因此，这种方法中共需进行  $4n+3$  次有限元计算，计算次数比 Wong 的方法大大减少。

上述方法很自然地被 Rajashekhar 和 Ellingwood (1993)<sup>[115]</sup>推广至响应面的多次迭代，直至新的内插点处功能函数值真正趋于零为止。他们考虑了交叉项的影响，并建议在响应面的初次迭代时取  $f=3$ 、后序迭代中取  $f=1$ ，以改进响应面的迭代过程。

Kim, Na (1997)<sup>[118]</sup>分析指出：上述三种方法中，拟合点的选取没有考虑到原始极限状态曲面的影响，因而迭代有可能不收敛于真正的设计点。他们提出了基于一系列线性响应面迭代计算的向量投影法，以使拟合点更靠近响应面。Zheng, Das (2000)<sup>[119]</sup>对这种方法进行了进一步改进，将上述方法中的线性响应面改为二阶响应面，并用 SORM 进行可靠度计算。但是，由于这种算法十分复杂，当前应用较多的仍是 Bucher 的响应面法及其局部改进。

### 2.6.2 常规响应面法的迭代步骤

响应面法的实质是用近似的功能函数来代替真实的功能函数。当由响应面法得到这一近似的功能函数后，还需结合一定的可靠度分析方法（如一阶可靠度分析方法 FORM、二阶可靠度分析方法 SORM、蒙特卡罗模拟法 MCSM 等）进行可靠度计算，常用的是 FORM。

对  $n$  个随机变量，通常取如下形式的二次多项式作为响应面函数：

$$Z = g(X) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 \quad (2.6.3)$$

式中， $a, b_i, c_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 为待定因子。

与 FORM 相结合的 RSM 的常用步骤是<sup>[117,205]</sup>：

- 1) 假定初始点  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ，一般取均值点；
- 2) 利用数值模拟方法计算功能函数  $g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  以及  $g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \pm f \sigma_{x_1}, \dots, x_n^*)$ ，得到  $2n+1$  个点估计值。其中系数  $f$  一般第一步取 3，以后各步取 1；
- 3) 解由表达式(2.6.3)确定的含有  $2n+1$  个待定系数的线性方程组，求出待定因子  $a, b_i, c_i$ ，得到以二次多项式表达的近似功能函数，从而确定极限状态方程；
- 4) 用 FORM 求解可靠指标  $\beta^k$  及其相应的验算点  $X_D^k$ ，其中上标  $k$  表示响应面的第  $k$  次迭代；
- 5) 计算  $|\beta^k - \beta^{k-1}| < \epsilon$  (给定精度) 是否满足。若满足，则输出结果，计算结束。否则，用插值法计算新的展开点  $X_M^k$ ：

$$X_M^k = X^k + (X_D^k - X^k) \cdot \frac{g(X^k)}{g(X^k) - g(X_D^k)} \quad (2.6.4)$$

然后取  $X_M^k$  和  $X_D^k$  中距离极限状态面更近的点作为下一次迭代的起点进行下一步迭代。

### 3 边坡稳定分析的极限平衡条分法

边坡稳定的定值分析方法很多，如：极限平衡条分法、有限元法、边界元法、极限分析法等。本论文的研究重点是有限元法。为了对计算结果进行分析、验证，也采用极限平衡条分法进行了相应计算，故此处先介绍极限平衡条分法。

#### 3.1 概述

边坡稳定分析的极限平衡条分法是将滑动土体分成若干条块，分析每一条块上的作用力，然后利用每一条上的力和力矩的静力平衡条件来求边坡的安全系数。该法最早由瑞典铁路工程师彼得森和费伦纽斯提出，可用于圆弧滑面及非圆弧滑面，并可用来考虑各种复杂外形、成层土坡以及渗透力、地震力等复杂情况的求解，因此在边坡工程中得到了广泛的应用。

极限平衡条分法是建立在莫尔-库仑强度准则的基础上的，其特点是只考虑静力平衡条件和土的莫尔-库仑破坏准则。对于边坡稳定性分析中大多数的静不定问题，极限平衡条分法通过引入一些简化假定来使问题变得静定可解。

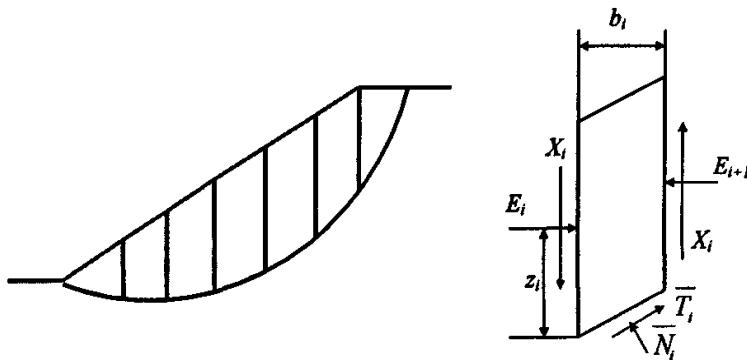


图 3.1-1 土条及作用于土条上的力

图 3.1-1 表示一任意形状的滑动土体，它被分成若干土条，每一土条上作用的力有<sup>[219][226-227]</sup>：自重  $W_i$ ，作用于土条底面的法向力  $\bar{N}_i$  和切向反力  $\bar{T}_i$ ，作用于土条两侧的法向力  $E_i$ ， $E_{i+1}$  和切向力  $X_i$ ， $X_{i+1}$ 。如果土条分得足够多，也即土条宽度足够小时，可以足够精确地认为  $\bar{N}_i$  作用于土条底面的中点。而根据安全系数的定义和莫尔-库仑破坏准则，可以得出  $\bar{N}_i$  与  $\bar{T}_i$  的关系为

$$\frac{\bar{T}_i}{\bar{F}_s} = \frac{\bar{T}_f}{\bar{F}_s} = \frac{c_i l_i + \bar{N}_i \tan \varphi_i}{\bar{F}_s} \quad (3.1.1)$$

式中， $l_i$  为土条底面长度， $c_i$  和  $\varphi_i$  分别为土条底面土层的粘聚力和内摩擦角。如果划分的土条数为  $n$ ，则进行边坡稳定分析时总的未知数可用表 3.1-1 表示。

由于每个土条只能列出两个力的平衡条件及一个力矩平衡条件，因此平衡方程的总数为  $3n$  个。这样，有  $(n-2)$  个未知数无法求解。因此，一般的土坡稳定分析总是超静定问题。要使

它转为静定问题，必须对土条分界面上的作用力作出假定。

表 3.1-1 边坡稳定性分析的未知数

未知量	个数
安全系数 $F_s$	1
土条底面法向反力 $\bar{N}_i$	$n$
法向条间力 $E_i$	$n-1$
切向条间力 $X_i$	$n-1$
条间力作用点位置 $z_i$	$n-1$
合计	$4n-2$

现有的各种极限平衡条分法种类很多，但这些方法可根据对条间力的假定不同而划分为如下三类：一是对条间力大小或其分布函数进行假定，如 Sarma 法；二是对条间力的作用方向进行假定，如瑞典条分法，简化的 Bishop 法，Morgenstern-Price 法，Spencer 法；三是对条间力的作用点位置进行假定，如 Janbu 法。文献[1]通过将 Bishop 法与更严格的 Morgenstern-Price 进行比较，指出：简化的 Bishop 法计算简单，对于没有软弱土层或结构面的边坡，采用圆弧滑面的 Bishop 法能得到足够的精度。因此，本论文在进行边坡稳定的极限平衡条分法计算时，也将采用简化的 Bishop 法。由于 Bishop 法是在瑞典条分法基础上发展起来的，因此先介绍瑞典条分法。

### 3.2 瑞典条分法

瑞典条分法是边坡稳定分析中最古老而又最简单的方法。它假定：滑动面为圆弧面，滑动土体为不变形的刚体；不考虑土条两侧面上的作用力。这样，边坡稳定性分析时总未知量的个数就减少为  $n+1$  个，这  $n+1$  个未知量可利用土条底面法向力的平衡条件和整个土体的力矩平衡条件进行求解。现以均质土坡为例进行说明<sup>[219][227-228]</sup>。

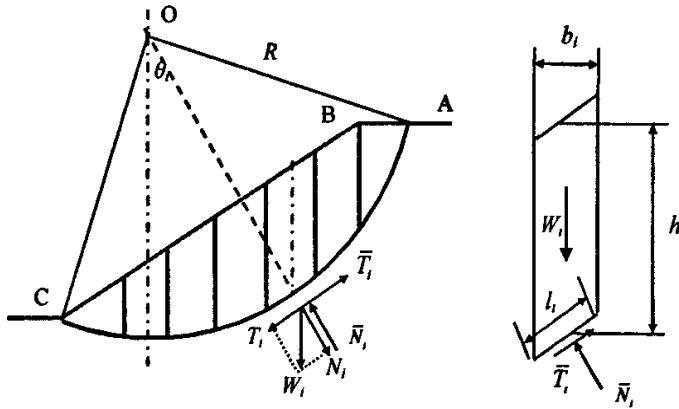


图 3.2-1 瑞典法计算图式

图 3.2-1(a)为一均质土坡，AC 是假定的滑动面，其圆心为 O，半径为 R。现将滑动土体 ABC 分成若干土条，取其第  $i$  土条分析其受力情况。

如图 3.2-1(b)所示, 若不考虑土条侧面上的作用力, 则土条上作用的力有:

- 1) 土条自重  $W_i$ , 方向竖直向下, 其值为

$$W_i = \gamma_i b_i h_i \quad (3.2.1)$$

式中,  $\gamma_i$  为土的重度;  $b_i$ 、 $h_i$  分别为土条的宽度和平均高度。将  $W_i$  引至分条滑动面上, 分解为通过滑弧圆心的法向力  $N_i$  和与滑弧相切的剪切力  $T_i$ 。若以  $\theta_i$  表示该土条底面中点的法线与竖直线的交角, 则有

$$N_i = W_i \cos \theta_i$$

$$T_i = W_i \sin \theta_i$$

- 2) 作用在土条底面的法向反力  $\bar{N}_i$ ;
- 3) 作用土条底面的抗剪力  $\bar{T}_i$ , 其可能发挥的最大值等于土条底面的抗剪强度与滑弧长度的乘积, 方向与滑动方向相反。当土坡处于稳定状态并假定各土条底部滑动面上的安全系数均等于整个滑动面上的安全系数时, 实际发挥的抗剪力为

$$\bar{T}_i = \frac{\tau_p l_i}{F_s} = \frac{(c_i + \sigma_i \tan \varphi_i) l_i}{F_s} = \frac{c_i l_i + \bar{N}_i \tan \varphi_i}{F_s} \quad (3.2.2)$$

瑞典条分法取的平衡条件是:

- 1) 土条底面法线方向上的静力平衡

$$\bar{N}_i = N_i = W_i \cos \theta_i \quad (3.2.3)$$

- 2) 整个土体的力矩平衡

将整个滑动土体内各土条对点 O 取力矩平衡, 可得

$$\sum T_i R = \sum \bar{T}_i R \quad (3.2.4)$$

即 
$$\sum W_i \sin \theta_i R = \sum \frac{c_i l_i + \bar{N}_i \tan \varphi_i}{F_s} R \quad (3.2.5)$$

由此可得安全系数的计算公式为

$$F_s = \frac{\sum (c_i l_i + \bar{N}_i \tan \varphi_i)}{\sum W_i \sin \theta_i} = \frac{\sum (c_i l_i + W_i \cos \theta_i \tan \varphi_i)}{\sum W_i \sin \theta_i} = \frac{\sum (c_i l_i + \gamma_i b_i h_i \cos \theta_i \tan \varphi_i)}{\sum \gamma_i b_i h_i \sin \theta_i} \quad (3.2.6)$$

假定不同的滑弧, 就能得出不同的安全系数值, 从中可找出最小的值, 此即土坡的稳定安全系数。

瑞典法也可用有效应力法进行分析, 此时土条底部实际发挥的剪应力为

$$\begin{aligned} \bar{T}_i &= \frac{\tau_p l_i}{F_s} = \frac{(c_i + \sigma_i \tan \varphi_i) l_i}{F_s} = \frac{[c_i + (\sigma_i - u_i) \tan \varphi_i] l_i}{F_s} \\ &= \frac{c_i l_i + (W_i \cos \theta_i - u_i l_i) \tan \varphi_i}{F_s} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

式中,  $c_i$  和  $\varphi_i$  分别为第  $i$  土条底面土层的有效粘聚力和有效内摩擦角,

因此 
$$F_s = \frac{\sum [c_i l_i + (W_i \cos \theta_i - u_i l_i) \tan \varphi_i]}{\sum W_i \sin \theta_i} \quad (3.2.8)$$

### 3.3 Bishop 法

1955 年 Bishop 提出了一种考虑土条侧面作用力的土坡稳定分析法。这种方法假定：滑动面为圆弧面，滑动土体为不变形的刚体；设土体两侧面上的作用力方向水平。Bishop 法取土条竖向力的平衡条件和整个土体的力矩平衡条件进行求解。仍以均质土坡为例进行说明。

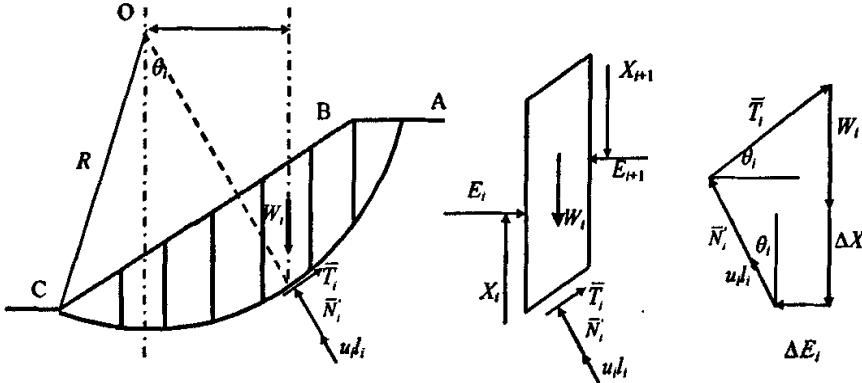


图 3.3-1 毕肖普法计算图式

如图 3.3-1 是一圆心为 O、半径为 R 的圆弧。任取一土条  $i$ ，其上的作用力有<sup>[219][233-234]</sup>：

- 1) 土条自重  $W_i$ ；
- 2) 土条底面的抗剪力  $\bar{T}_i$ ，有效法向力  $\bar{N}_i$ ，孔隙水压力  $u_i l_i$ ；假定这些力都作用于土条底面中点，其中  $\bar{T}_i = \frac{\tau_p l_i}{F_s} = \frac{(c_i + \sigma_i \tan \phi_i) l_i}{F_s} = \frac{c_i l_i + \bar{N}_i \tan \phi_i}{F_s}$
- 3) 土条两侧的法向力  $E_i$ ， $E_{i+1}$  及切向力  $X_i$ ， $X_{i+1}$ ，令  $X_{i+1} - X_i = \Delta X_i$ 。

简化的 Bishop 法取的平衡条件是：

- 1) 土条底面竖向力的平衡

$$W_i + \Delta X_i - \bar{T}_i \sin \theta_i - \bar{N}_i \cos \theta_i - u_i l_i \cos \theta_i = 0 \quad (3.3.2)$$

- 2) 整个土体的力矩平衡

此时，相邻土条之间侧壁作用力的力矩将相互抵消，而各土条的  $N_i$  及  $u_i l_i$  的作用线均通过圆心，故有

$$\sum W_i R_i \sin \theta_i = \sum \bar{T}_i R \quad (3.3.3)$$

即  $\sum W_i \sin \theta_i R = \sum \frac{c_i l_i + \bar{N}_i \tan \phi_i}{F_s} R \quad (3.3.4)$

联立式(3.3.1)、(3.3.2)、(3.3.3)，并令

$$m_{\theta_i} = \cos \theta_i + \frac{\tan \phi_i}{F_s} \sin \theta_i \quad (3.3.5)$$

则可得安全系数的计算公式为

$$Fs = \frac{\sum \frac{1}{m_{\theta_i}} [c_i b_i + (W_i - u_i b_i + \Delta X_i) \tan \varphi_i]}{\sum W_i \sin \theta_i} \quad (3.3.6)$$

上式即为 Bishop 求土坡安全系数的普遍公式，式中  $\Delta X_i$  仍是未知的。Bishop 已证明，若假设  $\Delta X_i=0$ ，所产生的误差仅为 1%，此时上式可简化为

$$Fs = \frac{\sum \frac{1}{m_{\theta_i}} [c_i b_i + (W_i - u_i b_i) \tan \varphi_i]}{\sum W_i \sin \theta_i} \quad (3.3.7)$$

这就是国内外使用相当普遍的简化 Bishop 公式。因为  $m_{\theta_i}$  中也有  $Fs$  值，所以要进行迭代求解。

当略去孔隙水压力，而且强度指标使用总应力强度指标时，Bishop 法同样可用总应力法分析，此时

$$Fs = \frac{\sum \frac{1}{m_{\theta_i}} (c_i b_i + W_i \tan \varphi_i)}{\sum W_i \sin \theta_i} \quad (3.3.8)$$

## 4 边坡稳定分析的有限元法

### 4.1 概述

随着计算机软硬件的发展，采用理论上更为严格的方法进行边坡稳定性分析已成为可能。有限单元法由于全面满足了静力许可、应变相容及应力应变之间的本构关系，并且可以不受边坡几何形状的不规则和材料不均匀性的限制，因而是一种比较理想的分析边坡应力、变形和稳定性的方法。

与传统的极限平衡法相比，边坡稳定的有限元法的优点是（Swan, Seo, 1999）<sup>[26]</sup>：

- 1) 可精确求解土体中平衡应力、应变、剪切强度；
- 2) 可采用一般土的材料模型（如 Mohr-Coulomb 模型，Drucker-Prager 模型等）；
- 3) 可考虑复杂的边坡外形；
- 4) 临界破坏面形状是一般的，不需假定是圆弧或对数螺旋线。

鉴于上述原因，有限元法在边坡稳定性分析中得到了重视。对于边坡稳定的有限元分析，其重点是将有限元的计算成果与传统的安全系数挂钩，成为直接用于边坡设计的判据。从这一角度出发，可将边坡稳定分析的有限元法分为两类：一是基于滑面应力分析的有限元法，二是基于强度折减的有限元法。

### 4.2 岩土体的弹塑性本构关系

#### 4.2.1 本构方程的普遍表达式

描述岩土体的本构模型很多，如线弹性模型、非线性弹性模型、理想弹塑性模型、弹塑性硬化模型等。其中，理想弹塑性模型由于能反映岩土体的弹塑性本构关系且计算相对简单，因而在岩土工程中得到了广泛的应用。特别是在边坡稳定性分析中，由于理想弹塑性模型计算所得的边坡安全系数与传统的极限平衡法的计算结果具有可比性，因而边坡稳定的非线性有限元法一般都使用理想弹塑性模型。本论文也采用这种模型进行分析。

由于弹塑性应力-应变关系不是一一对应的，因而通常写成如下的增量形式

$$d\sigma = D_{ep} d\epsilon = [D_e - D_p] d\epsilon \quad (4.2.1)$$

式中， $d\sigma$  和  $d\epsilon$  分别为应力增量和应变增量； $D_e$ 、 $D_p$ 、 $D_{ep}$  分别为弹性矩阵、塑性矩阵和弹塑性矩阵。

对于理想弹塑性体，可推导出  $D_p$  的通式为<sup>[220][41-157]</sup>：

$$D_p = \frac{D_e \frac{\partial Q}{\partial \sigma} (\frac{\partial F}{\partial \sigma})^T D_e}{(\frac{\partial F}{\partial \sigma})^T D_e \frac{\partial Q}{\partial \sigma}} \quad (4.2.2)$$

式中， $F$  和  $Q$  分别是材料的屈服函数和塑性势函数，一般假定塑性势函数与屈服函数有类似的形式，只是参数取值有所不同。

### 4.2.2 岩土材料的屈服准则

由式(4.2.1)和式(4.2.2)可见, 理想弹塑性模型中最基本的是屈服准则(及塑性势函数)的选择。只要选定了材料的屈服函数  $F$  和塑性势函数  $Q$ , 就可以根据弹性矩阵  $D_e$  确定弹塑性矩阵  $D_{ep}$ 。如果是关联流动, 则应有  $F=Q$ , 弹塑性矩阵是对称的; 否则, 若为非关联流动, 则弹塑性矩阵为非对称的。

岩土工程中最常用的屈服准则是莫尔-库仑准则(Mohr-Coulomb准则, 简称MC准则)。MC准则的表示形式很多, 此处只列出后续的边坡稳定性分析程序所用的几种形式。为与常规有限元法的符号体系相一致, 本论文规定正应力以受拉为正。

对于一般受力下的岩土体的任一个受力面, 其极限抗剪强度通常可用库仑定律表示为

$$\tau_f = -\sigma_n \tan \varphi + c \quad (4.2.3)$$

式中,  $\tau_f$  和  $\sigma_n$  分别为受剪面上的抗剪强度和法向应力;  $c$ 、 $\varphi$  分别为岩土的粘聚力和内摩擦角。上式在  $\sigma - \tau$  平面上是线性关系, 如图 4.2.1 所示。

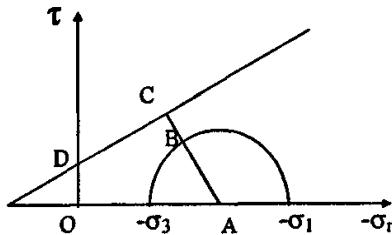


图 4.2.1 莫尔圆与莫尔-库仑屈服准则

利用莫尔圆和抗剪强度线的关系, 可把上式改写为用主应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_3$  表示的屈服函数形式:

$$F = AB - AC = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - (c \cos \varphi - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi) \quad (4.2.4a)$$

上式亦可改写为用应力向量  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$  表示的形式:

$$F = AB - AC = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} - (c \cos \varphi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \varphi) \quad (4.2.4b)$$

更一般地, MC 准则还可用应力不变量的形式表示如下:

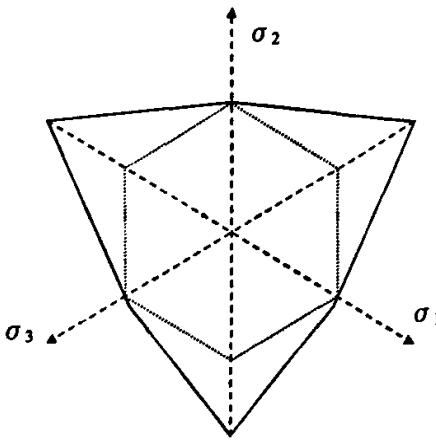
$$F = \sigma_m \sin \varphi + \sqrt{J_2} (\cos \theta_\sigma - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta_\sigma \sin \varphi) - c \cos \varphi \quad (4.2.5)$$

式中,  $\sigma_m$ 、 $J_2$  及  $\theta_\sigma$  分别为平均应力、应力偏量的第二不变量及洛德角, 其计算公式如下:

$$J_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \quad J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]; \quad \theta_\sigma = \frac{1}{3} \arcsin \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

式中,  $J_3$  为应力偏量的第三不变量,  $J_3 = (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)$ 。

MC 准则的屈服面在主应力空间中是一个不规则的六角形截面的角锥体表面, 在  $\pi$  平面上的投影如图 4.2.2 所示<sup>[22][32-55]</sup>。

图 4.2-2  $\pi$  平面上的莫尔-库仑屈服曲线

一般假定塑性势函数与屈服函数有类似的形式，因此当屈服准则选定之后，即可确定相应的塑性势函数。一般地，可取下式作为塑性势函数：

$$Q = \sigma_m \sin \phi + \sqrt{J_2} \left( \cos \theta_\sigma - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta_\sigma \sin \phi \right) - c \cos \phi \quad (4.2.6)$$

式中  $\phi$  是描述塑性势的角度，即剪胀角。当  $\varphi = \phi$  时，即为相关联的流动法则，否则为不相关的流动法则。

### 4.2.3 岩土材料的弹塑性矩阵

当屈服准则和塑性势函数选定之后，即可求出它们对应力分量的导数，再结合弹性矩阵，由式(4.2.2)即可求得相应的塑性矩阵。由于边坡失稳一般可视为平面应变问题，下面讨论平面应变状态下屈服函数对应力分量导数的计算方法。

因为屈服函数  $F$  是  $\sigma_m$ 、 $J_2$ 、 $J_3$  的函数，所以

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \quad (4.2.7)$$

上式可改写为如下形式

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = (c_1 M_1 + c_2 M_2 + c_3 M_3) \sigma \quad (4.2.8)$$

式中， $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$  为系数， $c_1 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m}$ ， $c_2 = \frac{\partial F}{\partial J_2}$ ， $c_3 = \frac{\partial F}{\partial J_3}$ ，与具体的屈服函数形式有关； $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$  为流动矢量，它可表示为相应的系数矩阵  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$  及应力向量  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z)^T$  的乘积形式，其计算公式如下：

$$a_1 = \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} = M_1 \sigma = \frac{1}{3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma \quad (4.2.9a)$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = \mathbf{M}_2 \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.2.9b)$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = \mathbf{M}_3 \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} s_x & s_z & \tau_{yz} & s_y \\ s_z & s_y & \tau_{xy} & s_x \\ \tau_{yz} & \tau_{xy} & -3s_z & -2\tau_{xy} \\ s_y & s_x & -2\tau_{xy} & s_z \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.2.9c)$$

由上述分析可见，对于不同的材料，关键是求解式(4.2.8)中系数  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c_3$ 。

当屈服准则采用莫尔-库仑准则式(4.2.5)时，可得

$$c_1 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} = \sin \varphi \quad (4.2.10a)$$

$$c_2 = \frac{\partial F}{\partial J_2} = \frac{\cos \theta_c}{2\sqrt{J_2}} [1 + \tan \theta_c \tan 3\theta_c + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} (\tan 3\theta_c - \tan \theta_c)] \quad (4.2.10b)$$

$$c_3 = \frac{\partial F}{\partial J_3} = \frac{\sqrt{3} \sin \theta_c + \sin \varphi \cos \theta_c}{2J_2 \cos 3\theta_c} \quad (4.2.10c)$$

但是，对于 MC 准则，当角度  $\theta_c = \pm 30^\circ$  时，偏导的求解由于棱角的存在而难以实现。本文假定<sup>[222][184-187]</sup>：在满足下列条件  $|\sin \theta_c| > 0.49$  时，用一个光滑的圆锥面取代 MC 准则的六边形面，其中光滑圆锥面是将  $\theta_c = \pm 30^\circ$  代入式(4.2.5)而得的，其表达式如下：

$$F = \sigma_m \sin \varphi + \frac{\sqrt{3} J_2}{2} (1 \mp \frac{\sin \varphi}{3}) - c \cos \varphi \quad (4.2.11)$$

式中， $\sin \theta_c > 0.49$  时取负号，否则取正号。此时，

$$c_1 = \frac{\partial F}{\partial \sigma_m} = \sin \varphi, \quad c_2 = \frac{\partial F}{\partial J_2} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{J_2}} (1 \mp \frac{\sin \varphi}{3}), \quad c_3 = \frac{\partial F}{\partial J_3} = 0 \quad (4.2.12)$$

根据以上公式，可写出平面应变条件下岩土体塑性矩阵的详细公式(见附录 I)。

### 4.3 非线性有限元方程组的求解

非线性有限元分析的思路就是采用载荷分级和线性化本构关系，将非线性问题归结为求解一系列线性化方程。

#### 4.3.1 增量切线刚度法

当材料的本构关系为弹塑性非线性时，可采用载荷增量法与 Newton-Raphson 迭代法相结合，用以求解整个载荷变化过程中研究对象的运动和变形规律。这种方法就是增量切线刚度法，或称为增量 Newton-Raphson 法。若取每一增量步中的刚度矩阵始终保持某时刻的数值，则为修正的 Newton-Raphson 法，简称为 mN-R 法<sup>[223-227]</sup>。

### 4.3.1.1 迭代格式的推导

将求解的时间域分成  $N$  份, 记时间分点为  $0=t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , 每一个时刻对应一定的荷载水平, 即时间与荷载存在对应关系。 $t = t_0$  时刻有限元系统的位移、应变、应力等变量已知。现考虑一个典型的时间步  $[t_k, t_{k+1}]$ , 在该时间步内, 载荷增量的等效结点力为

$$\Delta\mathbf{F}^{k+1} = \mathbf{F}^{k+1} - \mathbf{F}^k \quad (4.3.1)$$

式中,  $\mathbf{F}^k$  和  $\mathbf{F}^{k+1}$  分别为  $t = t_k$  和  $t = t_{k+1}$  时刻的外荷载等效结点力,  $\mathbf{F}^k$  可由下式计算:

$$\mathbf{F}^k = \sum_e \int_{V_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{F}}^k dV + \sum_e \int_{S_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}}^k dS \quad (4.3.2)$$

式中,  $\bar{\mathbf{F}}^k$  和  $\bar{\mathbf{T}}^k$  分别为体积  $V_e$  上的体力和面积  $S_e$  上的面力,  $\mathbf{N}$  为形函矩阵, 上标  $T$  表示矩阵的转置。

假设  $t_i$  ( $0 \leq i \leq k$ ) 时刻结构的位移  $\mathbf{u}^k$ 、应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^k$ 、应力  $\boldsymbol{\sigma}^k$  已知, 由于载荷增量  $\Delta\mathbf{F}^{k+1}$  的作用, 位移、应变、应力的变化分别为  $\Delta\mathbf{u}^{k+1}$ 、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}$ 、 $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$ , 即

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta\mathbf{u}^{k+1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} \\ \boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^k + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{k+1} \end{cases} \quad (4.3.3)$$

现推导  $t_{k+1}$  时刻的增量有限元格式。

由一般的有限元知识可得, 在  $t_{k+1}$  时刻, 应力  $\boldsymbol{\sigma}$ 、应变  $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、结点位移  $\mathbf{d}$  满足如下三类方程:

平衡方程:  $\sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{k+1} dV = \mathbf{F}^{k+1} \quad (4.3.4)$

几何方程:  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} = \mathbf{B}\Delta\mathbf{d}^{k+1} \quad (4.3.5)$

物理方程:  $d\boldsymbol{\sigma} = D_{\eta\eta} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.3.6a)$

当载荷增量较小时, 物理方程可简化为

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = D_{\eta\eta}^{-1} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} \quad (4.3.6b)$$

式中,  $\mathbf{d}^k$  是  $t_k$  时刻有限元系统的结点位移矢量,  $\Delta\mathbf{d}^{k+1}$  代表时间步  $[t_k, t_{k+1}]$  上结点位移增量。

为便于增量迭代, 将  $\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$  写成如下的迭代格式:

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_i^{k+1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{k+1} \quad (4.3.7)$$

式中,  $\boldsymbol{\sigma}_i^{k+1}$  及  $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{k+1}$  分别为第  $k+1$  荷载增量步第  $i$  及  $i+1$  次迭代后的应力值;  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{k+1}$  为第  $k+1$  荷载增量步第  $i+1$  次迭代的应力增量 ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ;  $i=0, 1, \dots$ )。将式(4.3.7)代入式(4.3.4), 得

$$\sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}_i^{k+1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{k+1}) dV = \mathbf{F}^{k+1}$$

即  $\sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T \Delta\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{k+1} dV = \mathbf{F}^{k+1} - \sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i^{k+1} dV$

再将式(4.3.6b) 及式(4.3.5)代入上式, 得

$$\sum_e \int_e \mathbf{B}^T (\mathbf{D}_e)_{i+1}^{k+1} \Delta \epsilon_{i+1}^{k+1} dV = \sum_e \int_e \mathbf{B}^T (\mathbf{D}_e)_{i+1}^{k+1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} dV = \mathbf{F}^{k+1} - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \sigma_i^{k+1} dV$$

即

$$(\mathbf{K}_{ep})_{i+1}^{k+1} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{F}^{k+1} - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \sigma_i^{k+1} dV \quad (4.3.8a)$$

或

$$(\mathbf{K}_{ep})_{i+1}^{k+1} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{F}^{k+1} + \mathbf{R}_i^{k+1} \quad (4.3.8b)$$

上式即为增量切线刚度法的迭代公式，式中  $(\mathbf{K}_{ep})_{i+1}^{k+1}$  及  $\mathbf{R}_i^{k+1}$  分别为结构的弹塑性刚度矩阵及内力向量（矫正荷载），其计算公式为

$$(\mathbf{K}_{ep})_{i+1}^{k+1} = \sum_e \int_e \mathbf{B}^T (\mathbf{D}_e)_{i+1}^{k+1} \mathbf{B} dV \quad (4.3.9)$$

$$\mathbf{R}_i^{k+1} = - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \sigma_i^{k+1} dV \quad (4.3.10)$$

由式(4.3.8a)可得

$$\Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = [(\mathbf{K}_{ep})_{i+1}^{k+1}]^{-1} (\mathbf{F}^{k+1} - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \sigma_i^{k+1} dV) \quad (4.3.11)$$

求得  $\Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1}$  后，即可由式(4.3.12)求下一迭代步的结点位移值

$$\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{d}_i^{k+1} + \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \quad (4.3.12)$$

注意到增量切线刚度法的迭代式(4.3.8)中需求解结构的弹塑性刚度矩阵。若令其始终保持某时刻的数值，就是具有常刚度迭代的增量解法（mN-R 迭代）。当取其为每一增量步开始时刻的数值时，就是起点切线刚度法。此时，

$$(\mathbf{K}_{ep})_{i+1}^{k+1} = (\mathbf{K}_{ep})_1^{k+1} = \sum_e \int_e \mathbf{B}^T (\mathbf{D}_T)_1^{k+1} \mathbf{B} dV = \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \mathbf{D}_T^k \mathbf{B} dV \quad (4.3.13)$$

#### 4.3.1.2 塑性状态的判断及应力增量的计算

由于在应力增量  $\Delta \sigma_{i+1}^{k+1}$  的作用下，当前应力状态的变化可能是：弹性状态至弹性状态，弹性状态至塑性状态，塑性状态至塑性状态。因此， $\sigma_{i+1}^{k+1}$  的值应试算确定，步骤如下：

- 1) 按弹性应变关系计算应变增量对应的弹性应力增量  $(\Delta \sigma_e)_{i+1}^{k+1} = \mathbf{D}_e \Delta \epsilon_{i+1}^{k+1}$  和试算应力  $(\sigma_i)_{i+1}^{k+1} = \sigma_i^{k+1} + (\Delta \sigma_e)_{i+1}^{k+1}$ ；
- 2) 计算屈服函数值  $F_1 = F[(\sigma_i)_{i+1}^{k+1}]$ ，根据计算结果分三种情况进行讨论<sup>[226]</sup>：

若  $F_1 \leq 0$ ，则该点为弹性变形，满足线性弹性应变本构关系，试算应力就是当前荷载步或迭代步的真实应力。为统一起见，令  $m=1$ 。

若  $F_1 > 0$ ，且  $F_0 = F(\sigma_i^{k+1}) < 0$ ，则该点为由弹性进入塑性的过渡过程。为简化起见，设载荷增量过程中应变增量成比例变化，则可由下式计算比例因子  $m$ （参见图 4.3-1）：

$$m = \frac{AF}{AE} = \frac{CF}{BE} = \frac{-F_0}{F_1 - F_0} \quad (4.3.14)$$

若  $F_1 > 0$ ，且  $F_0 = 0$ ，则该点为塑性加载，取  $m=0$ 。

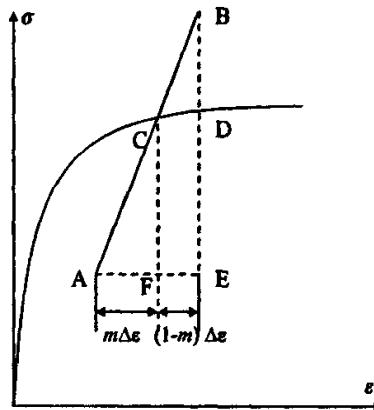


图 4.3-1 过渡区域应力增量的计算

3) 根据  $m$  将应变分成弹性和弹塑性两部分, 由下述方法求应力增量 (参见图 4.3-1):

$$\begin{aligned} d\sigma &= \int_0^{m\Delta\epsilon} D_e d\epsilon + \int_{m\Delta\epsilon}^{\Delta\epsilon} D_{ep} d\epsilon \\ \therefore &= \int_0^{\Delta\epsilon} D_e d\epsilon - \int_{m\Delta\epsilon}^{\Delta\epsilon} D_e d\epsilon + \int_{m\Delta\epsilon}^{\Delta\epsilon} (D_e - D_p) d\epsilon = \int_0^{\Delta\epsilon} D_e d\epsilon - \int_{m\Delta\epsilon}^{\Delta\epsilon} D_p d\epsilon \end{aligned}$$

∴ 如果荷载增量充分地小, 上式可近似线性化为

$$\Delta\sigma_{i+1}^{k+1} = D_e \Delta\epsilon_{i+1}^{k+1} - (1-m)(D_p)_{i+1}^{k+1} \Delta\epsilon_{i+1}^{k+1} = (\Delta\sigma_e)_{i+1}^{k+1} - (\Delta\sigma_p)_{i+1}^{k+1} \quad (4.3.15a)$$

式中,  $(\Delta\sigma_e)_{i+1}^{k+1}$  和  $(\Delta\sigma_p)_{i+1}^{k+1}$  分别为第  $k+1$  荷载增量步中第  $i+1$  迭代步的虚拟弹性应力增量及塑性回归应力,  $(D_p)_{i+1}^{k+1}$  取图 4.3-1 中 C 点的应力值进行计算, 它们的计算公式如下:

$$(\Delta\sigma_e)_{i+1}^{k+1} = D_e \Delta\epsilon_{i+1}^{k+1} \quad (4.3.15b)$$

$$(\Delta\sigma_p)_{i+1}^{k+1} = (1-m)(D_p)_{i+1}^{k+1} \Delta\epsilon_{i+1}^{k+1} \quad (4.3.15c)$$

$$(D_p)_{i+1}^{k+1} = D_p [X, \sigma_i^{k+1} + m D_e \Delta\epsilon_{i+1}^{k+1}] = D_p [X, \sigma_i^{k+1} + m (\Delta\sigma_e)_{i+1}^{k+1}] \quad (4.3.15d)$$

式中,  $X$  表示材料参数, 如弹性模量、泊松比、粘聚力、内摩擦角、膨胀角。

因此, 该迭代步结束时的应力为

$$\sigma_{i+1}^{k+1} = \sigma_i^{k+1} + \Delta\sigma_{i+1}^{k+1} = \sigma_i^{k+1} + (\Delta\sigma_e)_{i+1}^{k+1} - (\Delta\sigma_p)_{i+1}^{k+1} \quad (4.3.16)$$

#### 4.3.1.3 迭代步骤

综上所述, 可写出增量切线刚度法的具体迭代步骤:

- 1) 赋迭代初值 (令  $k=0$ ,  $i=0$ ,  $\mathbf{d}^0=0$ ,  $\sigma_0=0$ ,  $\mathbf{R}^0=0$ );
- 2) 对第  $k+1$  级荷载增量 ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ), 令位移、应力、体力的初值分别为上一荷载步结束时的相应值:  $\mathbf{d}_0^{k+1}=\mathbf{d}^k$ ,  $\sigma_0^{k+1}=\sigma^k$ ,  $\mathbf{R}_0^{k+1}=\mathbf{R}^k$ ;
- 3) 对第  $i+1$  次迭代 ( $i=0, 1, \dots$ ), 计算本次迭代的弹塑性刚度矩阵  $(K_{ep})_{i+1}^{k+1}$ 、结点位移增量  $\Delta\mathbf{d}_{i+1}^{k+1}$  及迭代后的结点位移值  $\mathbf{d}_{i+1}^{k+1}$ ;
- 4) 按下式计算各单元应变增量  $\Delta\epsilon_{i+1}^{k+1}$ :  $\epsilon_{i+1}^{k+1} = \epsilon_i^{k+1} + \Delta\epsilon_{i+1}^{k+1}$ ;

- 5) 计算各单元弹性应力增量  $(\Delta\sigma_e)_{i+1}^{k+1}$  及当前试算应力  $(\sigma_i)_{i+1}^{k+1}$ ;
- 6) 计算屈服函数值  $F[(\sigma_i)_{i+1}^{k+1}]$ , 判断是否进入塑性状态。若已进入塑性, 则计算相应的比值  $m$ 、塑性矩阵  $(D_p)_{i+1}^{k+1}$ 、应力增量  $\Delta\sigma_{i+1}^{k+1}$ ;
- 7) 计算本次迭代后的应力值  $\sigma_{i+1}^{k+1}$  及矫正荷载  $R_{i+1}^{k+1}$ ;
- 8) 判断本次迭代是否收敛。若迭代计算收敛, 则令  $k=k+1$ , 转 2) 进入下一增量步分析; 否则, 令  $i=i+1$ , 转 3) 进入下一迭代步分析。

### 4.3.2 增量初应力建立

#### 4.3.2.1 迭代格式的推导

对于弹塑性问题, 增量形式的应力应变关系可写为

$$d\sigma = D_e d\varepsilon + d\sigma_0 \quad (4.3.17a)$$

$$\text{线性化, 得} \quad \Delta\sigma = D_e \Delta\varepsilon + \Delta\sigma_0 \quad (4.3.17b)$$

$$\text{写成迭代形式:} \quad \Delta\sigma_{i+1}^{k+1} = D_e \Delta\varepsilon_{i+1}^{k+1} + \Delta\sigma_{0i}^{k+1} \quad (4.3.17c)$$

式中,  $\Delta\sigma_{i+1}^{k+1}$  和  $\Delta\varepsilon_{i+1}^{k+1}$  分别为第  $k+1$  增量步第  $i+1$  次迭代的应力增量和应变增量;  $\Delta\sigma_{0i}^{k+1}$  为第  $k+1$  增量步第  $i$  次迭代的初应力增量, 由第  $i$  次迭代时的  $\Delta\sigma_i^{k+1}$  及  $\Delta\varepsilon_i^{k+1}$  求得。

另一方面, 将  $\sigma^{k+1}$  写成如下的迭代格式:

$$\sigma_{i+1}^{k+1} = \sigma^k + \Delta\sigma_{i+1}^{k+1} \quad (4.3.18)$$

式中,  $\Delta\sigma_{i+1}^{k+1}$  表示是第  $k+1$  增量步第  $i+1$  次迭代的应力增量。

$$\text{将式(4.3.17c)代入(4.3.18), 得} \quad \sigma_{i+1}^{k+1} = \sigma^k + D_e \Delta\varepsilon_{i+1}^{k+1} + \Delta\sigma_{0i}^{k+1}$$

$$\text{再将上式代入平衡方程} \quad \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \sigma^{k+1} dV = \mathbf{F}^{k+1} \quad (4.3.4)$$

$$\text{得} \quad \sum_e \int_e \mathbf{B}^T (\sigma^k + D_e \Delta\varepsilon_{i+1}^{k+1} + \Delta\sigma_{0i}^{k+1}) dV = \mathbf{F}^{k+1}$$

即

$$\sum_e \int_e \mathbf{B}^T D_e \Delta\varepsilon_{i+1}^{k+1} dV = \mathbf{F}^{k+1} - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T (\sigma^k + \Delta\sigma_{0i}^{k+1}) dV = \Delta\mathbf{F}^{k+1} + \mathbf{F}^k - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \sigma^k dV - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \Delta\sigma_{0i}^{k+1} dV$$

若  $\sigma^k$  是时刻  $t_k$  有限元问题的精确解, 则有

$$\mathbf{F}^k - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \sigma^k dV = 0 \quad (4.3.19)$$

$$\therefore \sum_e \int_e \mathbf{B}^T D_e \mathbf{B} dV \cdot \Delta\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \Delta\mathbf{F}^{k+1} - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T (\Delta\sigma_{0i}^{k+1}) dV$$

$$\text{即} \quad \mathbf{K}_0 \Delta\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \Delta\mathbf{F}^{k+1} + \Delta\mathbf{R}_i^{k+1} \quad (4.3.20)$$

上式即为增量初应力建立的迭代格式, 式中  $\mathbf{K}_0$  结构的弹性刚度矩阵 (初始刚度矩阵);  $\Delta\mathbf{R}_i^{k+1}$  为初应力引起的体力向量 (矫正荷载)。其计算公式为

$$\mathbf{K}_0 = \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \mathbf{D}_e \mathbf{B} dV \quad (4.3.21)$$

$$\Delta \mathbf{R}_0^{k+1} = - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \Delta \sigma_0^{k+1} dV \quad (4.3.22)$$

### 4.3.2.2 初应力的计算

由式

$$\Delta \sigma_0^{k+1} = \Delta \sigma_i^{k+1} - \mathbf{D}_e \Delta \varepsilon_i^{k+1} \quad (4.3.23)$$

及

$$\Delta \sigma_i^{k+1} = \Delta \sigma_{ei}^{k+1} - \Delta \sigma_{pi}^{k+1} = \mathbf{D}_e \Delta \varepsilon_i^{k+1} - (1-m) \mathbf{D}_{pi}^{k+1} \Delta \varepsilon_i^{k+1} \quad (4.3.24)$$

可得初应力增量的计算公式

$$\begin{aligned} (\Delta \sigma_0)_i^{k+1} &= \Delta \sigma_i^{k+1} - \mathbf{D}_e \Delta \varepsilon_i^{k+1} \\ &= \mathbf{D}_e \Delta \varepsilon_i^{k+1} - (1-m) (\mathbf{D}_{pi})_i^{k+1} \Delta \varepsilon_i^{k+1} - \mathbf{D}_e \Delta \varepsilon_i^{k+1} \\ &= -(1-m) (\mathbf{D}_{pi})_i^{k+1} \Delta \varepsilon_i^{k+1} \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

相应地，可得体力增量的计算公式

$$\Delta \mathbf{R}_i^{k+1} = - \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \Delta \sigma_0^{k+1} dV = \sum_e \int_e \mathbf{B}^T (1-m) \mathbf{D}_{pi}^{k+1} \Delta \varepsilon_i^{k+1} dV \quad (4.3.26)$$

式中，

$$\mathbf{D}_{pi}^{k+1} = \mathbf{D}_p [\mathbf{X}, \sigma_i^{k+1} + m \mathbf{D}_e \Delta \varepsilon_i^{k+1}] \quad (4.3.15d)$$

需要注意的是，在计算增量初应力时，亦需进行塑性状态的判断，并求解相应的比值  $m$ 。

### 4.3.2.3 迭代步骤

增量初应力法的迭代步骤类似于增量切线刚度法，主要区别是增量初应力法在迭代过程中的刚度矩阵始终取常数（初始刚度矩阵），其迭代步骤如下：

- 1) 赋迭代初值（令  $k=0, i=0, \mathbf{d}^0=0, \sigma^0=0, \mathbf{R}^0=0$ ），组装弹性刚度矩阵  $\mathbf{K}_0$ ；
- 2) 对第  $k+1$  级荷载增量 ( $k=0, 1, \dots, N-1$ )，令位移、应力的初值分别为上一荷载步结束时的相应值： $\mathbf{d}_0^{k+1} = \mathbf{d}^k, \sigma_0^{k+1} = \sigma^k$ ；令体力增量的初值为零： $\Delta \mathbf{R}_0^{k+1} = 0$ ；
- 3) 对第  $i+1$  次迭代 ( $i=0, 1, \dots$ )，求结点位移增量  $\Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1}$ ；
- 4) 按下式计算各单元应变增量  $\Delta \varepsilon_{i+1}^{k+1}$ ： $\varepsilon_{i+1}^{k+1} = \varepsilon_i^{k+1} + \Delta \varepsilon_{i+1}^{k+1}$ ；
- 5) 计算各单元弹性应力增量  $(\Delta \sigma_e)_{i+1}^{k+1}$  及当前试算应力  $(\sigma_i)_{i+1}^{k+1}$ ，其中  
 $(\Delta \sigma_e)_{i+1}^{k+1} = \mathbf{D}_e \Delta \varepsilon_{i+1}^{k+1}$ ；
- 6) 判断是否进入塑性状态。若已进入塑性，则计算相应的比值  $m$ 、塑性矩阵  $(\mathbf{D}_p)_{i+1}^{k+1}$ 、初应力增量  $(\Delta \sigma_0)_{i+1}^{k+1}$  及体力增量  $\Delta \mathbf{R}_{i+1}^{k+1}$ ；
- 7) 判断本次迭代是否收敛。若收敛，则求本级荷载增量下的应力增量  $\Delta \sigma^{k+1}$  及总位移  $\mathbf{d}^{k+1}$ 、总应力  $\sigma^{k+1}$ ，再令  $k=k+1$ ，转 2) 进入下一增量步分析；否则，令  $i=i+1$ ，转 3) 进入下一迭代步分析。其中：

$$\sigma^{k+1} = (\Delta \sigma_e)_{i+1}^{k+1} - \Delta \sigma_{pi+1}^{k+1} = (\Delta \sigma_e)_{i+1}^{k+1} + (\Delta \sigma_0)_{i+1}^{k+1} \quad (4.3.27)$$

$$\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \quad (4.3.28)$$

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta \sigma_{i+1}^{k+1} \quad (4.3.29)$$

### 4.3.3 增量初应变法

对于弹塑性问题，增量形式的应力应变关系可写为

$$d\sigma = D_e(d\epsilon - d\epsilon_0) \quad (4.3.30)$$

$$\therefore \text{线性化, 得} \quad \Delta\sigma = D_e(\Delta\epsilon - \Delta\epsilon_0) \quad (4.3.31)$$

类似于增量初应力法，可推导得其增量迭代方程为

$$K_0 \Delta S_{i+1}^{k+1} = \Delta F^{k+1} + \Delta R_i^{k+1} \quad (4.3.32)$$

及

$$\Delta R_i^{k+1} = \sum_e \int_V B^T D_e \Delta \epsilon_{0i}^{k+1} dV \quad (4.3.33)$$

式中,  $\Delta R_i^{k+1}$  为初应变引起的不平衡力向量(矫正荷载)。增量初应变法的迭代步骤类似于增量初应力法, 此处从略。

## 4.4 基于滑面应力分析的有限元法 (SSA)

几乎在有限元法开发的同时, 研究者就开始了其与边坡稳定分析中传统的条分法关系的研究。早期的边坡稳定有限元分析是建立在基于滑面应力分析 (slip surface stress analysis, 简称 SSA) 的有限元法的基础上的。这种方法先通过有限元分析得到每个结点的应力张量; 然后假定一个滑动面, 即可用有限元数据给出滑动面上一点的法向应力和切向(剪)应力; 再根据某种破坏准则(如 Mohr-Coulomb 准则)可以求得该点的抗滑力, 由此即可求出滑面上每点的下滑力与抗滑力; 最后, 对滑面上的下滑力与抗滑力进行积分, 就可求得每一滑动面的稳定系数; 假定滑面为圆弧形或其它形状, 并不断变换搜索条件进行多个滑面的搜索, 就可得到最小安全系数。因此, 这一方法的重点是滑面安全系数的定义<sup>[31]</sup>。

很多学者研究了基于滑面应力分析的有限元法中边坡安全系数的定义方法, 并提出了多种计算公式。如史恒通等(2000)<sup>[33]</sup>列出了 7 种安全系数的定义公式; 郑宏等(2005)<sup>[35]</sup>和陈祖煜(2003)<sup>[1] 255-256</sup>分别列出了三种安全系数的定义公式。其中, 基于剪应力的定义法具有鲜明的物理意义, 使用十分广泛。因此, 本文也将使用这一方法来求解边坡的安全系数。这种方法定义整个滑面的安全系数为

$$Fs = \frac{\int \tau_f dl}{\int \tau dl} = \frac{\int (-\sigma_n \tan \phi + c) dl}{\int \tau dl} \quad (4.4.1)$$

式中,  $c$  和  $\phi$  分别为土条底面土层的粘聚力和内摩擦角,  $\tau_f$  和  $\tau$  分别为抗剪强度和剪应力。

设滑面上某点的应力状态为  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , 则法向应力  $\sigma_n$  和切向应力  $\tau$  的计算公式为:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.4.2a)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (4.4.2b)$$

式中,  $\alpha$  为  $x$  轴(即  $x$  截面的外法线)与剪切面外法线方向的夹角, 以  $x$  轴逆时针转至该面外法线  $n$  的  $\alpha$  角为正, 如图 4.4-1 所示。

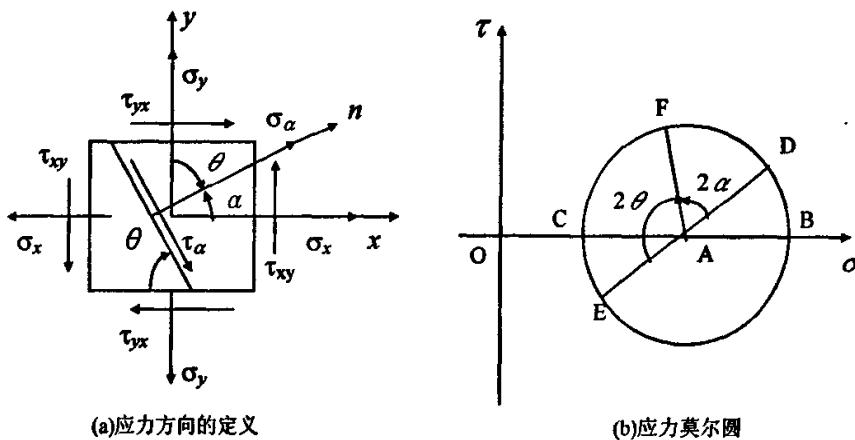


图 4.4-1 应力方向的定义及应力莫尔圆

图 4.4-1(a)中还按弹性力学的定义标明了各应力正值的方向。图 4.4-1(b)是相应的应力莫尔圆，图中，B、C 点分别代表大小主应力作用面，D、E 点分别代表 \$x\$ 截面和 \$y\$ 截面，F 点代表所研究的剪切面。

对于边坡稳定性分析，当潜在滑面方向已知时，很容易求得各单元所截滑面切线方向与水平面间的夹角 \$\theta\$。由图 4.4-1 知，\$\theta\$ 亦表示 \$y\$ 轴（即 \$y\$ 截面的外法线）与剪切面外法线方向的夹角。规定 \$y\$ 轴顺时针转至该面外法线的 \$\theta\$ 角为正，图 4.2.2 中标明了 \$\theta\$ 角分别为正值和负值的情况。由 \$\alpha+\theta=90^\circ\$ 得：

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (4.4.3a)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (4.4.3b)$$

其中 \$\theta\$ 可按下式求解：

$$\theta = -\arctan \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (4.4.3c)$$

式中，\$x\_B\$、\$x\_A\$、\$y\_B\$、\$y\_A\$ 分别表示滑面两端点的横坐标和纵坐标。

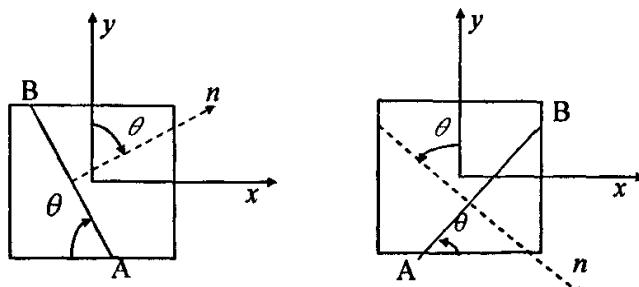


图 4.4-2 \$\theta\$ 的符号定义 (a) \$\theta \geq 0\$ (b) \$\theta &lt; 0\$

根据上述定义, 本论文编写了基于滑面应力分析的边坡有限元分析程序, 可用于计算边坡剖面各单元的安全系数及整个边坡的最小安全系数。程序假定边坡潜在滑动面的形状为圆弧形。只要给定相应边坡的外形及圆心范围, 程序即可自动计算出各单元的安全系数和任一滑面的安全系数, 并自动搜索出整个边坡的最小安全系数及相应滑面的位置。

## 4.5 基于强度折减的有限元法 (SRM)

基于强度折减的有限元法 (strength reduction method, 简称 SRM) 产生于上世纪九十年代, 其基本原理是将边坡强度参数  $c$ 、 $\varphi$ 、 $\phi$  (粘聚力、内摩擦角、膨胀角) 同时除以一个折减系数  $F_s$ , 得到一组新的强度参数值  $c'$ 、 $\varphi'$ 、 $\phi'$ ; 然后以这组新的值作为输入参数进行有限元计算; 当计算至边坡达到极限状态时, 对应的折减系数值就是边坡的最小安全系数。对  $c$ 、 $\varphi$ 、 $\phi$  值的具体折减公式如下:

$$c' = c / F_s \quad (4.5.1)$$

$$\varphi' = \arctan(\tan \varphi / F_s) \quad (4.5.2)$$

$$\phi' = \arctan(\tan \phi / F_s) \quad (4.5.3)$$

边坡稳定的强度折减法由于计算相对简单, 不需事先假定滑动面的形状就可直接求得边坡的安全系数, 并可由变形图表示出滑面的大致位置, 因此近年来在国内外都受到了重视。但是, 由于这种方法相对较新, 因此对它的争论也相对较多。目前, 各种 SRM 的主要区别是边坡失稳判别的标准不同, 其主要类型有:

- 1) 以迭代过程不收敛为标准, 这是最常用的标准, 如: Dawson (1999)<sup>[27]</sup>; Griffiths (1999)<sup>[28]</sup>; Lechman (2000)<sup>[42]</sup>; 赵尚毅 (2002)<sup>[43]</sup>。这种方法认为在指定的最大迭代次数内, 如果算法不收敛, 就意味着没有发现同时既能满足莫尔-库仑破坏准则又能满足整体平衡的应力分布。因此, 边坡破坏就发生了。
- 2) 以某个特征点为标准, 如: 宋二祥 (1997)<sup>[45]</sup>; 葛修润 (2003)<sup>[47]</sup>。认为当边坡达到极限状态时, 某些点的位移会趋近于流动状态, 这在理论上是正确的, 但在选取特征点时应非常谨慎, 否则在某些复杂情况下选取不同的特征点, 可能会得到不同的安全系数。此外, 取位移-强度折减系数曲线上哪点作为极限状态尚未取得共识。
- 3) 广义剪应变标准或广义塑性应变标准, 如: 栾茂田等 (2003)<sup>[52]</sup>; 郑宏等 (2002)<sup>[34]</sup>; 周翠英等 (2003)<sup>[50]</sup>。认为当边坡达到极限平衡状态时, 广义剪应变或广义塑性应变的等值线图中, 必有一条等值线, 通常是数值较小的那条等值线, 由坡底连通到坡顶。这一标准在理论上是合理的, 但因坡内应变值的大小与岩土材料的软硬程度密切相关, 故当坡内含有软硬程度相差很大的材料时, 广义剪应变或广义塑性应变的等值线图会变得非常怪异。

文<sup>[52]</sup>认为: 用计算不收敛作为边坡失稳的判别标准是合理的。因为边坡失稳时, 滑体由稳定静止状态变为运动状态, 同时产生很大的无限发展的位移。这就是边坡破坏的特征。有限元法中通过强度折减使边坡达到极限破坏状态, 滑面上的位移的塑性应变将产生突变, 且此位移和塑性应变的大小不再是一个定值, 有限元程序无法从有限元方程组中找到一个既能满足静力平衡又能满足应力应变关系和强度准则的解, 此时, 不管是从力的收敛标准, 还是从位移的收敛标准来判断有限元计算都不收敛。塑性区从坡脚到坡顶连通并不一定意味着边

坡破坏，塑性区连通是必要条件而非充分条件，还要看是否产生很大的且无限发展的塑性变形和位移，有限元计算中表现为塑性应变和位移产生突变。突变之前计算收敛，突变之后计算不收敛，表征滑面上土体无限流动，因此可把有限元静力平衡方程组是否有解、有限元计算是否收敛作为边坡破坏的依据。

综上所述，本论文涉及有限元强度折减法时亦以计算不收敛作为边坡失稳的判别标准。

## 5 基于强度折减法的边坡稳定弹塑性非线性有限元可靠度分析

边坡稳定性分析是十分重要的问题。目前在工程设计中常用的边坡稳定性分析方法均为定值法。定值方法是经长期工程实践证明的一种有效方法，但这种方法最大的缺点就是没有考虑实际存在的不确定性的影响。因此在工程实践中，有的边坡按定值法算出的安全系数是足够的，但实际工程中却发生了滑动。因此，需要进行边坡的可靠度分析。可靠度理论是建立在概率统计基础上，以随机变量和随机过程为研究对象，它与定值法最大的区别是考虑了变量的随机性，并用严格的概率来度量结构的安全度，因此更符合客观实际。

在边坡稳定的可靠度分析中，目前采用的方法多为各种极限平衡条分法与可靠度分析方法相结合来进行可靠度分析。本文的重点是采用边坡稳定分析的更为严格的方法——有限元法来进行边坡稳定的可靠度分析。本章的边坡稳定有限元方法建立在强度折减法的基础上，而下一章则建立在滑面应力分析的基础上。

### 5.1 基于强度折减法的边坡有限元可靠度分析

#### 5.1.1 基本原理

此处采用可靠度分析中常用的一阶可靠度分析方法进行边坡稳定的可靠度分析。其首要问题是列出相应的极限状态函数  $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的形式；然后是确定极限状态函数对基本变量梯度的求解方法。

在边坡稳定的有限元分析法中，由于强度折减有限元法能求出边坡的全局安全系数  $F_s$ ，因此，可以列出边坡失稳的极限状态函数形式为

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = F_s(X_1, X_2, \dots, X_n) - 1 \quad (5.1.1)$$

$$\text{或} \quad Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \ln F_s(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (5.1.2)$$

二者的本质都是假定  $F_s > 1$  时边坡处于安全状态， $F_s < 1$  时边坡处于失稳状态，后者常用于中心点法中且认为  $Z$  满足对数正态分布时的情况；而在验算点法中，由于可靠度计算结果与极限状态函数的列式形式无关，因此一般都采用式(5.1.1)。以上两种列式形式上与传统的基于条分法的边坡稳定可靠度分析方法一致，反映了用条分法和有限元法进行边坡稳定性分析时本质的一致性。

对于式(5.1.1)，可得

$$\mu_Z = \mu_{F_s} - 1 \quad (5.1.3a)$$

$$\sigma_Z = \sigma_{F_s} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Z}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_s}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)^2} \quad (5.1.3b)$$

因此，对于中心点法，有

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{\mu_{F_s} - 1}{\sigma_{F_s}} = \frac{\mu_{F_s} - 1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F_s}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)^2}} \quad (5.1.3c)$$

对于式(5.1.2), 由式(2.3.10)和式(2.3.11)可得,

$$\sigma_z = \sqrt{\ln(1 + \delta_{F_s}^2)} = \sqrt{\ln(1 + (\sigma_{F_s}/\mu_{F_s})^2)} \quad (5.1.4a)$$

$$\mu_z = \ln \mu_{F_s} - \frac{1}{2} \sigma_z^2 \quad (5.1.4b)$$

因此, 对于中心点法, 有

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{\ln \mu_{F_s} - \frac{1}{2} [\ln(1 + (\sigma_{F_s}/\mu_{F_s})^2)]}{\sqrt{\ln(1 + (\sigma_{F_s}/\mu_{F_s})^2)}} \quad (5.1.4c)$$

当采用验算点法进行可靠度分析时, 可靠指标的计算需迭代求解。由第二章公式知, 在边坡稳定的可靠度分析中, 主要的工作量之一是求解功能函数对基本变量的偏导数(也即求解安全系数对基本变量的偏导数。)

## 5.1.2 计算程序

本论文用到的程序或编程语言有: VISUAL FORTRAN, MATLAB 和 ANSYS<sup>[222,228-230]</sup>。其中, 前处理程序利用 ANSYS 进行网格划分, 再用 FORTRAN 对 ANSYS 的输出结果进行处理; 核心计算程序参考文献<sup>[222]</sup>用 FORTRAN 进行编写; 后处理程序采用 MATLAB 进行编写。

### 5.1.2.1 前处理程序的编制

通过前处理, 可以得到总体坐标信息、总体单元结点编号信息、约束结点自由度信息。具体方法是: 利用 ANSYS 强大的网格划分功能, 在其中进行边坡剖面的网格划分, 并施加相应的约束条件。然后, 对 ANSYS 生成的输出文件进行处理, 以得到 FORTRAN 需要的数据输入格式。主要的工作有:

- 1) 更改结点编号顺序: 如对于八结点四边形而言, ANSYS 中 (plane82 单元) 的结点编号顺序为 1, 7, 5, 3, 8, 6, 4, 2(逆时针方向, 先角点后边点); 而本文的 FORTRAN 程序的结点编号顺序则为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8(顺时针方向, 从角点开始编号)。因此, 需对 ANSYS 输出的单元结点编号等信息进行必要的修改。

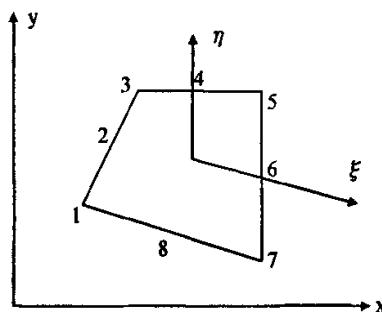


图 5.1-1 八结点四边形的单元编号

- 2) 半带宽优化: ANSYS 生成的结点编号没有规律, 没有进行带宽优化; 而本文的 FORTRAN 程序则是建立在总刚矩阵的半带宽存贮的基础上。若不进行带宽优化, 总刚矩阵的半带宽太大, 从而占用大量内存, 影响计算速度, 致使程序无法正常求解。为此, 本文编写了带宽优化程序, 用于对 ANSYS 生成的结点重新进行编号。

### 5.1.2.2 后处理程序的编制

后处理程序主要是将有限元计算的结果进行图形化显示, 如各种关系曲线和各种等值线图的绘制等等。具体的方法是: 将有限元主程序 FORTRAN 的各种计算结果以数据文件的形式输出, 以此作为 MATLAB 的数据输入文件。需要指出的是, 这种联系 FORTRAN 和 MATLAB 的数据文件中, 数据的具体表现格式是事先设计的, 它可直接作为 MATLAB 的输入数据文件, 无需再进行数据文件格式的调整, 提高了程序的运算效率。

### 5.1.2.3 主程序流程图

由式(5.1.3)和式(5.1.4)可知, 基于强度折减的边坡有限元可靠度分析法的重要工作之一是调用相应的定值法分析程序, 以求解基本变量取不同值时的安全系数。但是, 基本变量改变时, 有限元计算的模型并未改变。因此, 若每次基本变量改变后都完整地调用定值法程序, 无疑会浪费很多重复的建模时间。为此, 本次程序设计时, 将有限元建模放在程序的迭代计算之前一次完成, 从而节省了土工参数改变时有限元建模时间, 提高了程序的运行速度。

以验算点法为例, 基于强度折减法的边坡有限元可靠度分析的流程图如下。

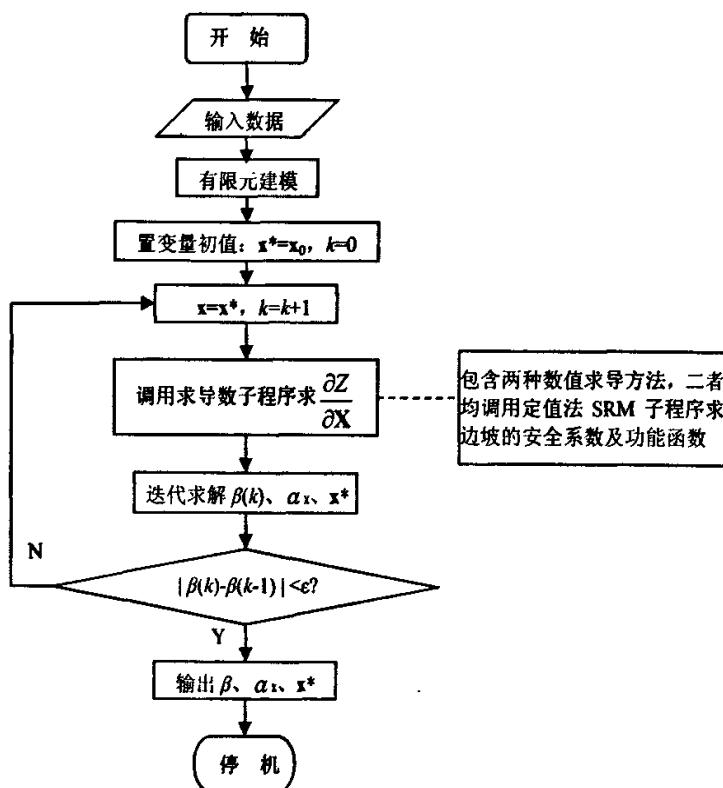


图 5.1-2 基于强度折减法的边坡有限元可靠度分析流程图 (FORM)

## 5.2 梯度的求解方法

对于边坡稳定分析的有限元法,由式(5.1.1)知,功能函数是基本变量  $\mathbf{X}$  的隐式形式,因此需要采用数值方法来求解相应的导数值。下面研究可靠度分析两种常用的数值求导方法:有限差分法<sup>[231]</sup>和有理多项式法<sup>[137, 155]</sup>。

### 5.2.1 有限差分法 (FDM)

有限差分法 (finite difference method, 简称 FDM) 是可靠度分析中最简单的求解梯度的数值算法。按其取点位置的区别,可分为向前差分法、中心差分法、向后差分法,其中常用的是中心差分法。按其取样点数的不同,又可分为 3 点公式法(记为 FDM3)及 5 点公式法(记为 FDM5)。对于函数  $z = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n$  为自变量的个数),它在  $(x_i^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  处对  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 的求导公式分别为:

$$\text{FDM3: } \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{g_i^+ - g_i^-}{2k_i h_i} \quad (5.2.1)$$

$$\text{FDM5: } \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{-g_i^{2+} + 8g_i^+ - 8g_i^- + g_i^{2-}}{12k_i h_i} \quad (5.2.2)$$

式中,

$$g_i^\pm = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \pm k_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$g_i^{2\pm} = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \pm 2k_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$k_i$  为步长控制系数;  $k_i h_i$  为取样步长。在可靠度分析中,对于变量  $X_i$ ,常取  $h_i$  为其均方差  $\sigma_{X_i}$ 。

### 5.2.2 有理多项式法(RPT)

对于有理多项式法 (rational polynomial technique, 简称 RPT), 考虑函数

$$z = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.2.3)$$

它在  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  处的偏导数值可由下列方法求得:

首先,令  $x_2, \dots, x_n$  分别等于  $x_2^*, \dots, x_n^*$ ,再设  $m$  个  $x_1^{(i)}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ,  $m$  一般取 3 或 5) 为已知值,其中  $x_1^{(i)} \in [x_1^* - 3\sigma_{X_1}, x_1^* + 3\sigma_{X_1}]$ ,则可得  $m$  个函数如下:

$$\begin{aligned} g_{11} &= g(x_1^{(1)}, x_2^*, \dots, x_n^*) \\ g_{12} &= g(x_1^{(2)}, x_2^*, \dots, x_n^*) \\ &\dots \\ g_{1m} &= g(x_1^{(m)}, x_2^*, \dots, x_n^*) \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

而  $z = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  关于变量  $x_1$  的函数则可用有理多项式方法近似地表示为一个函数连分数形式如下:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2^*, \dots, x_n^*) &\approx a_1 + \frac{x_1 - x_1^{(1)}}{a_2 + \frac{x_1 - x_1^{(2)}}{a_3 + \dots + \frac{x_1 - x_1^{(m-1)}}{a_m}}} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

上式亦可写成:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \approx \phi_i(x_1) \quad (5.2.6)$$

式中:

$$\phi_i(x_1) = a_i + \frac{x_1 - x_i^{(1)}}{\phi_{i+1}(x_1)} \quad (i=1, 2, \dots, m-1) \quad (5.2.7)$$

$$\phi_m(x_1) = a_m \quad (5.2.8)$$

上式中系数  $a_1, a_2, \dots, a_m$  可由如下表格来求得。

表 5.2.1 关于变量  $x_1$  的有理多项式系数

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...
$a_1 = g_{11}$	/	/	/	/
$a_{21} = g_{12}$	$a_{21} = (x_1^{(2)} - x_1^{(1)}) / (a_{21} - a_1)$	/	/	/
$a_{31} = g_{13}$	$a_{31} = (x_1^{(3)} - x_1^{(2)}) / (a_{31} - a_1)$	$a_{31} = (x_1^{(3)} - x_1^{(2)}) / (a_{32} - a_2)$	/	/
$a_{41} = g_{14}$	$a_{41} = (x_1^{(4)} - x_1^{(3)}) / (a_{41} - a_1)$	$a_{41} = (x_1^{(4)} - x_1^{(3)}) / (a_{42} - a_2)$	$a_{41} = (x_1^{(4)} - x_1^{(3)}) / (a_{43} - a_3)$	/
...	...	...	...	...

则由式(5.2.5)~(5.2.8)可得:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \phi'_i(x_1) = \frac{\phi_2(x_1) - (x_1 - x_i^{(1)}) \cdot \phi'_2(x_1)}{[\phi_2(x_1)]^2} \quad (5.2.9)$$

$$\phi'_i(x_1) = \frac{\phi_{i+1}(x_1) - (x_1 - x_i^{(1)}) \cdot \phi'_{i+1}(x_1)}{[\phi_{i+1}(x_1)]^2} \quad (5.2.10)$$

$$\phi'_m(x_1) = 0 \quad (5.2.11)$$

式中:  $\phi'_i(x_1)$  是函数  $\phi_i(x_1)$  关于自变量  $x_1$  的一阶导数。

综上所述, 对于一个实际问题, 可先由表 5.2.1 求得系数  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , 再由方程(5.2.9)~(5.2.11)求出  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ 。同理可求得  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$  ( $i=2, 3, \dots, n$ )。

### 5.2.3 FDM 与 RPT 之比较

在 RPT 中, 当  $m=3$  时, 对于变量  $x_i$ , 若取这 3 点分别为  $x_i - k_i h_i$ ,  $x_i$  及  $x_i + k_i h_i$ , 并记它们对应的函数值分别为  $g_i^-$ ,  $g_i^0$  及  $g_i^+$ , 即

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_i^- = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^{(1)}, x_{i+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - k_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ g_{11} &= g_i^0 = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^{(2)}, x_{i+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ g_{12} &= g_i^+ = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^{(3)}, x_{i+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + k_i h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

则在  $x_i$  处由式(5.2.7)及(5.2.10)可得:

$$\phi_2(x_i) = a_2 + \frac{x_i - x_i^{(2)}}{\phi_3(x_i)} = a_2 \quad (5.2.13)$$

$$\phi'_2(x_i) = \frac{\phi_3(x_i) - (x_i - x_i^{(2)}) \cdot \phi'_3(x_i)}{[\phi_3(x_i)]^2} = \frac{1}{\phi_3(x_i)} = \frac{1}{a_3} \quad (5.2.14)$$

∴ 由式(5.2.9)得:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\phi_2(x_i) - (x_i - x_i^{(1)}) \cdot \phi_1(x_i)}{[\phi_2(x_i)]^2} = \frac{a_2 a_3 - k_i h_i}{a_2^2 a_3} \quad (5.2.15)$$

又由表 5.2-1 可知,  $a_2, a_3$  可表示成如下形式,

$$a_2 = \frac{x_i^{(2)} - x_i^{(1)}}{a_{21} - a_1} = \frac{x_i^{(2)} - x_i^{(1)}}{g_{i2} - g_{i1}} = \frac{k_i h_i}{g_i^0 - g_i^-} \quad (5.2.16)$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{x_i^{(3)} - x_i^{(2)}}{a_{32} - a_2} = \frac{x_i^{(3)} - x_i^{(2)}}{\frac{x_i^{(3)} - x_i^{(1)}}{a_{31} - a_1} - a_2} = \frac{k_i h_i}{\frac{2k_i \sigma_{x_i}}{g_i^+ - g_i^-} - \frac{k_i \sigma_{x_i}}{g_i^0 - g_i^-}} \\ &= \frac{(g_i^+ - g_i^-)(g_i^0 - g_i^-)}{2(g_i^0 - g_i^-) - (g_i^+ - g_i^-)} \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

则

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{1}{k_i h_i} \cdot \frac{2(g_i^+ - g_i^0)(g_i^0 - g_i^-)}{g_i^+ - g_i^-} \quad (5.2.18)$$

若函数  $z = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是  $x_i$  的线性函数, 则

$$g_i^+ - g_i^0 = g_i^0 - g_i^- = (g_i^+ - g_i^-)/2 \quad (5.2.19)$$

$$\therefore \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{g_i^+ - g_i^-}{2k_i h_i} \quad (5.2.20)$$

因此, 对于线性功能函数, 对于相同的步长控制系数  $k_i$  及取样点位, 3 点 RPT 公式与 3 点 FDM 公式相同, 即 3 点 FDM 公式是 3 点 RPT 公式在线性情况下的特例。

对于 5 点法, 上述结论同样存在, 鉴于解析公式复杂, 此处不再推导。

#### 5.2.4 计算结果分析

对于数值微分方法, 其导数计算结果与步长控制系数的大小有关, 取不同的步长可能会得到不同的导数值, 也就会导致不同的可靠度分析结果。因此, 下面以一简单算例分析上述两种数值方法对导数计算结果的影响。

**例 5.2-1:** 为了比较计算结果, 此处以一显式函数为例, 其函数形式为

$$Z = \tan(X)/X \quad (5.2.21)$$

式中, 随机变量  $X$  的变异系数为 0.1。这是一个弱非线性问题, 并且包含有  $\pi/2$  等断点。其对应梯度求解的典型结果见图 5.2-1~5.2-2。

图 5.2-1、图 5.2-2 均由左右两幅图组成, 其中左图是各种计算方法的求导结果之比较, 右图是针对上图中 RPT3、RPT5 的导数值(纵坐标)十分接近而作的局部细化。图中, AM 表示由解析方法(analytic method)进行求导的结果, 计算时取步长  $h = \sigma_X$ 。

计算结果表明: 当  $x = 1.00$  时, 随着步长控制系数  $k$  的增加, 3 点差分法及 5 点差分法的计算结果与解析解的差值逐渐增加, 而 3 点及 5 点有理多项式法之导数计算结果则与解析解基本一致, 其中 5 点 RPT 法几乎与解析解完全一致, 非常精确。

当  $x = 1.53$  时(函数的断点附近), 对于任何步长控制系数  $k$ , 3 点及 5 点差分法的计算结果与解析解都有较大的差别, 无法得出准确的导数值, 这是由于断点附近函数值的突变而引起的。而此时, 3 点及 5 点有理多项式法的精度仍较高, 其中 5 点有理多项式法在  $k < 1.5$  范围内

的解几乎与解析解完全相同。这体现了有理多项式法在拟合不连续函数断点附近数据点时的优越性。

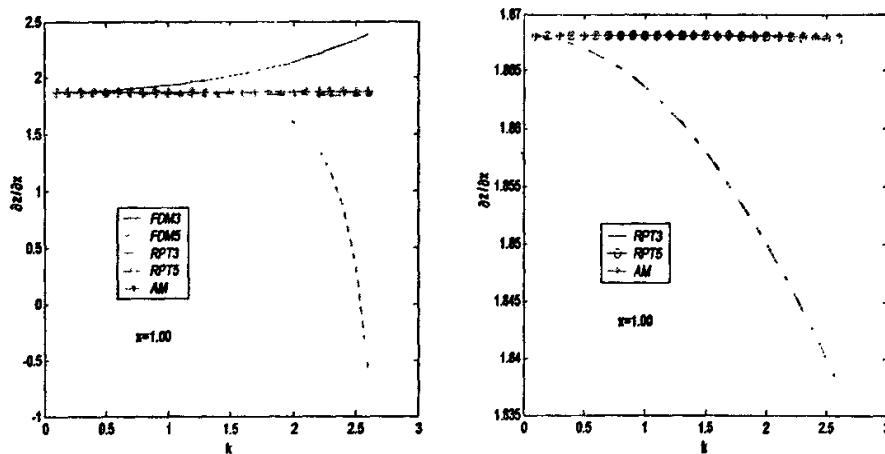


图 5.2-1 例 5.2-1 的求导结果 ( $x = 1.00$ )

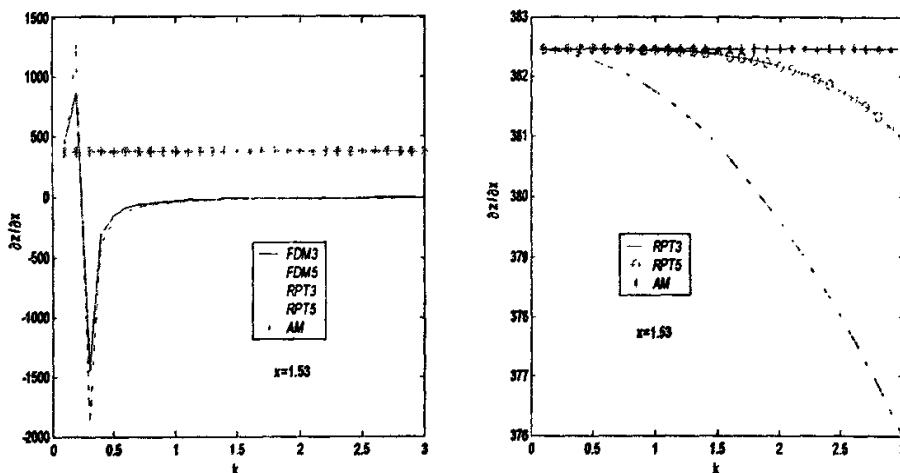


图 5.2-2 例 5.2-1 的求导结果 ( $x = 1.53$ )

目前, 在可靠度分析中求解功能函数对随机变量的梯度时, 常取步长控制系数  $k=1$  或  $k=3$ 。上述算例表明: 取  $k=1$  时计算结果较好; 而  $k=3$  对应的步长过大, 相应的各取样点位相差较远, 影响了计算的精度。对于本例, 在远离函数断点处, 取步长控制系数  $k=1$  时, 各种方法的计算精度由高至低依次为: RPT5, RPT3, FDM5, FDM3。因为 3 点 FDM 计算公式最简单, 5 点 RPT 公式精度最好, 故对于连续线性功能函数, 可直接用 FDM3 求导; 对于连续非线性功能函数, 可用 RPT5 求导。对于非连续功能函数, 则应采用 RPT 求导, 以避免函数断点而引起的较大求导误差。

例 5.2-2：某边坡坐落于刚性基础上，坡比为 1:2。有关土工参数是：内摩擦角  $\varphi=40^\circ$ ，膨胀角  $\psi=0^\circ$ ，容重  $\gamma=20 \text{ kN/m}^3$ ，弹性模量  $E=10^5 \text{ kPa}$ ，泊松比  $\mu=0.3$ ，凝聚力  $c$  与容重  $\gamma$ 、坡高  $H$  的关系是  $c/\gamma H=0.05$ <sup>[222]</sup>。设  $c$ 、 $\varphi$  是互为独立的正态随机变量，变异系数均为 0.3。取极限状态方程式为：

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = Fs(X_1, X_2, \dots, X_n) - 1$$

式中  $Fs$  为边坡的安全系数，由强度折减法求得。

计算时取步长  $h_i=\sigma_{x_i}$ 。这是强非线性问题，其计算结果如图 5.2-3 所示。图 5.2-3 之上下图分别表示极限状态函数对基本变量  $c$ 、 $\varphi$  的导数。

由计算结果可知：各种方法的导数计算结果均随着步长控制系数的变化而有较大的波动，但也有一定的规律。例如，对  $c$  求导时，在  $k=0.8\sim1.4$  的范围内，各种方法的计算结果非常接近。在对  $\varphi$  求导时，在  $k=0.5\sim1.2$  的范围内，各种方法的计算结果也非常接近。当  $k$  较小时，由于取样点太近，使得精度损失较大；而当  $k$  较大时，各取样点相差太远，也不能很好地近似原曲线。因而，实际计算时，可取  $k=1$ 。

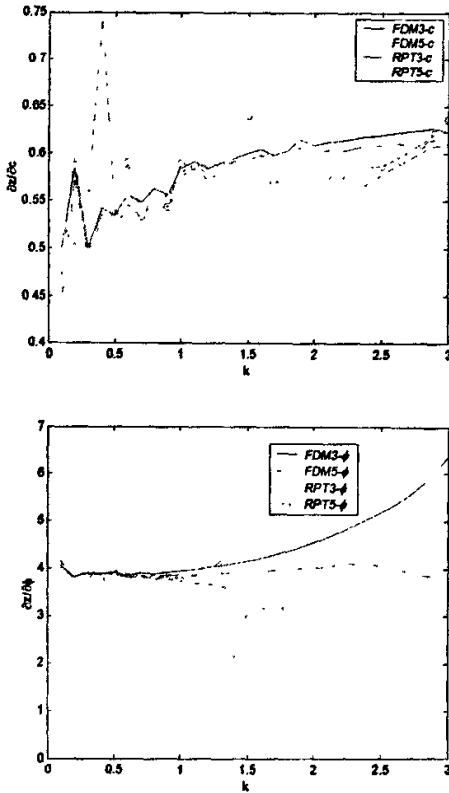


图 5.2-3 例 5.2-2 的求导结果

总结：以上用两个例题详细分析了 3 点、5 点差分法及 3 点、5 点有理多项式法的异同及其导数求解结果与取样步长的关系。结果表明：对于相同的步长控制系数及取样方式，FDM

是 RPT 在线性情况下的特例。因此，在可靠度分析中，对于连续线性功能函数，可直接用简单的 FDM3 求导；对于连续非线性功能函数，用 RPT5 求导已能很好地满足精度要求；对于不连续功能函数，应采用 RPT 求导。各种求导方法的计算结果均与取样步长控制系数  $k$  的大小有关，但  $k=1$  时，各种方法的求导结果基本一致，因此，建议选取步长控制系数  $k=1$ 。

### 5.3 算例分析

取上述例 5.2-2 的均质边坡进行基于强度折减的有限元可靠度分析。计算时取  $c$ 、 $\varphi$  为满足正态分布的基本变量，变异系数均为 0.3。

为分析各种可靠度方法在边坡稳定的有限元可靠度分析中的应用，此处采用三种可靠度分析方法进行计算（中心点法 MFORM，验算点法 FORM，蒙特卡罗模拟法 MCSM）。基于上一节的分析结果，在进行数值求导时采用了中心差分法（FDM3）及有理多项式法（RPT5）。

为了对程序及方法的合理性进行验证，以及探讨边坡的有限元可靠度分析与极限平衡条分法可靠度分析结果的关系，本文还同时采用基于边坡稳定的传统条分法进行了考虑变量  $c$ 、 $\varphi$  相关性的边坡可靠度分析。由于强度参数  $c$ 、 $\varphi$  一般是负相关的<sup>[236]</sup>，因此本文只计算了  $c$ 、 $\varphi$  间相关系数  $\rho_{c\varphi}$  小于等于零的情况。

各种方法的计算结果见表 5.3-1 及图 5.3-1、5.3-2。表 5.3-1 中  $\beta_1$  和  $\beta_2$  分别是基于有限元强度折减法（SRM）及传统的极限平衡条分法（Bishop 法）的可靠指标。由表 5.3-1 可知， $\beta_1$  与  $\beta_2$  十分接近，其比值  $\beta_1/\beta_2 \leq 1.1$ ，这表明在变量互为独立时，基于有限元强度折减法与基于 Bishop 法的可靠度分析结果是一致的，其中前者的结果稍大。图 5.3-2、图 5.3-3 也表明，在考虑变量间相关性时，基于有限元强度折减法与基于 Bishop 法的可靠度分析结果也十分类似，并且二者的可靠指标都随着变量间负相关系数的增加而增加。因此，用有限元强度折减法进行边坡稳定的可靠度分析是可行的、正确的。下面进一步分析各种可靠度分析方法的计算结果。

#### 5.3.1 中心点法（MFORM）的计算结果

对于中心点法，可靠指标与功能函数的型式有关。为此，分别对式(5.1.1)和式(5.1.2)这两种功能函数形式进行了计算，计算结果见表 5.3-1 及图 5.3-1~2。

表 5.3-1 不同方法对应的可靠指标 ( $\rho_{c\varphi}=0$ )

可靠度分析方法	求偏导方法	功能函数形式	可靠指标 (SRM) $\beta_1$	可靠指标 (Bishop) $\beta_2$	比值 $\beta_1/\beta_2$
MFORM	FDM	Z <sub>1</sub>	1.72	1.67	1.03
		Z <sub>2</sub>	2.51	2.46	1.02
	RPT	Z <sub>1</sub>	1.78	1.72	1.03
		Z <sub>2</sub>	2.60	2.54	1.02
FORM	FDM	/	2.31	2.16	1.07
MCSM	/	/	2.32	2.15	1.08

由表 5.3-1 及图 5.3-1~2 可知：当功能函数采用不同的型式时，可靠指标的计算结果相差很大，而两种求导方法对应的可靠指标则很接近。因此，功能函数的导数计算可采用相对简

单的差分法求解。但对于中心点法而言，功能函数型式的选择非常重要，因此必须结合基本变量的模型通过一定方法（如蒙特卡罗模拟法）来判断  $F_s$  的概率分布类型，从而选择合理的功能函数型式。

### 5.3.2 验算点法 (FORM) 的计算结果

验算点法的可靠指标求解结果与功能函数的列式无关，因此只取第一种功能函数形式进行计算。又因中心点法已得出求导方法对计算结果的影响不大，因此对于验算点法只采用了中心差分法进行求导。由表 5.3-1 可知，与蒙特卡罗法相比，验算点法的求解结果比中心点法的求解结果要好；与中心点法相比，验算点法的求解结果与中心点法中第二种功能函数型式对应的结果更为接近。

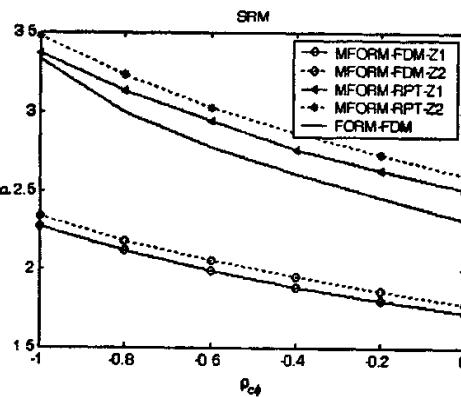


图 5.3-1 可靠指标与相关系数的关系（有限元强度折减法）

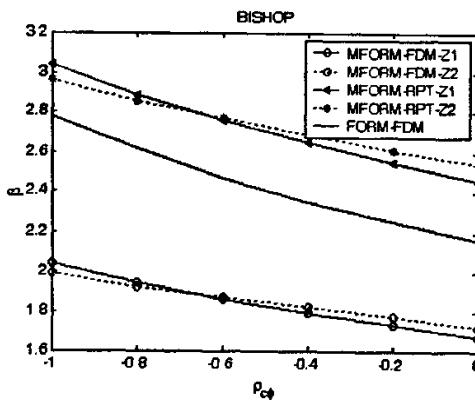
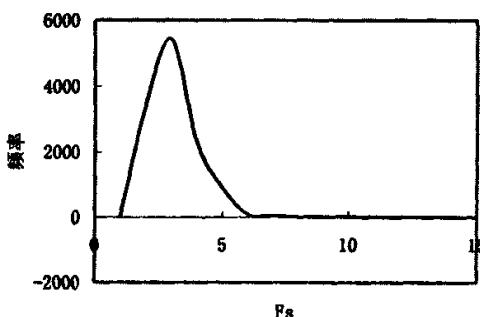


图 5.3-2 可靠指标与相关系数的关系 (Bishop 法)

### 5.3.3 $F_s$ 的概率分布及计算精度的讨论

为了分析比较各种计算方法的正确性，以及探讨  $F_s$  的分布型式，本文作了变量互为独立时的蒙特卡罗模拟 (MCSM, 12000 次)，求得的可靠指标与验算点法的对应解很接近。通过对蒙特卡罗模拟结果的  $\chi^2$  检验可知， $F_s$  属于对数正态分布，其频率分布如图 5.3-3 所示。因此，在中心点法中，取第二种功能函数型式（对应于  $F_s$  属于对数正态分布的情况）是较为合理的。

图 5.3-3  $F_S$  的频率分布图 ( $\rho_{cv}=0$ )

#### 5.3.4 结论

- 1) 在进行边坡稳定的有限元可靠度分析中，采用基于强度折减法的有限元可靠度分析是完全可行的。这种方法不需对定值法的有限元分析程序作任何修改，无论是线性有限元问题还是非线性有限元问题都适用；无需对各有限单元求单元的可靠指标，能一次性得出边坡的整体可靠指标，因而方便易用。
- 2) 基于有限元强度折减法与基于 Bishop 法的可靠度分析结果是一致的，其中前者的结果稍大。因此，用有限元强度折减法进行边坡稳定的可靠度分析是可行的、正确的，它与传统的极限平衡条分法的相应结果具有可比性。边坡稳定的有限元可靠度分析的优点是它可以适用于各种复杂的边坡外形及边界条件。
- 3) 在考虑变量间相关性时，基于有限元强度折减法与基于 Bishop 法的可靠度分析结果也十分类似，并且二者的可靠指标都随着变量间负相关系数的增加而增加。这表明在可靠度分析中若不考虑变量  $c$ 、 $\varphi$  间的负相关性，则所得结果偏于保守。
- 4) 功能函数的导数计算方法对于可靠指标的影响不大，一般可采用中心差分法进行求导。
- 5) 对于中心点法，功能函数的型式对可靠指标有很大的影响，因此必须结合基本变量的模型通过一定方法（如蒙特卡罗模拟法）来判断  $F_S$  的概率分布类型，从而选择合理的功能函数型式。
- 6) 验算点法的计算精度要优于中心点法，但验算点法要对  $\beta$  进行迭代求解。虽然这种迭代求解收敛性很好，但求解过程耦合了非线性有限元分析与可靠度计算，因而计算量偏大。在精度要求不太高的情况下，可用中心点法估算边坡的可靠指标。

#### 5.4 改进的响应面法

前文已阐述了响应面法 (RSM) 的基本原理及迭代计算方法，并指出当前应用较多的仍是 Bucher 的响应面法及其局部改进<sup>[232]</sup>。这类响应面法实际上包含了双重迭代过程，一是对每一个拟合的响应面函数，用验算点法求解可靠指标的内层迭代过程；二是对多个响应面的外层迭代过程。由于每个响应面的形成均需对  $2n+1$  个取样点 ( $n$  为基本随机变量的个数) 进行

有限元计算，当随机变量数较多时，工作量偏大。此外，由于响应面的形式一般为二次多项式，这就很可能会遇到极限响应面会存在两条分支、用验算点法求可靠指标时验算点会收敛到错误分支的情况。若对于某一响应面，用验算点法求解出错误分支上的验算点，则接下来的响应面迭代计算也就不正确。

为此，本文提出一种改进的响应面法，它在整个计算过程中只需拟合一个响应面，大大地减少了计算工作量及收敛到错误分支的可能性。

#### 5.4.1 改进的响应面法之计算步骤

本文亦采用如下的二次多项式作为响应面函数：

$$Z = g(X) = a + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i^2 \quad (5.4.1)$$

式中， $a$ 、 $b_i$ 、 $c_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 为待定因子， $n$  为随机变量的个数。

与常规基于响应面迭代计算的响应面法的区别是：本文不进行响应的迭代计算，主要的计算分二步，一是用验算点法求解可靠指标及验算点的位置，二是在此验算点处进行响应面的拟合，并对此响应面函数用常规的可靠度分析方法求解相应的可靠指标。

由于这种方法不需对响应面进行多次迭代，因而不必多次调用定值法有限元分析程序进行计算，这大大地减少了有限元计算的工作量。同时，这种方法亦可得到原功能函数的显式形式，这对于需要利用有限元等各种数值方法才能求解的隐式功能函数非常有用，可以将这些隐式功能函数用简单的显式表示，以便对此响应面函数用 FORM、SORM 或 MCSM 进一步进行可靠度分析。

具体的迭代过程如下。

- 1) 采用 FORM 进行可靠度分析，其中导数的计算采用 FDM 或 RPT，得验算点坐标  $X_D$  及可靠指标  $\beta_{FORM}$ 。
- 2) 在验算点处分别取  $X_D$  及  $X_D \pm k\sigma_X$  这  $2n+1$  个点，用数值方法计算这  $2n+1$  个点对应的  $g(X)$  值，对原极限状态函数按式(5.4.1)进行响应面拟合，得到以二次多项式表达的近似功能函数。对此近似功能函数用 FORM、SORM 或 MCSM 求解可靠指标  $\beta$  及失效概率  $P_f$ 。

由于本文方法是先用 FORM 求解验算点坐标，再进行 RSM 拟合，因此简称为 FORM-RSM 二步法。

#### 5.4.2 基于响应面迭代的 RSM 和 FORM-RSM 二步法之比较

在 RSM 中，由(5.4.1)式可得功能函数对于基本随机变量的导数是：

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = b_i + 2c_i x_i \quad (5.4.2)$$

而由式(5.4.1)可得，对于  $X_i$  坐标方向上的两个取样点  $x_i \pm k_i \sigma_{X_i}$ ，其对应的功能函数值分别为：

$$g_i^- = a + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_j x_j + \sum_{j=1, j \neq i}^n c_j x_j^2 + b_i(x_i - k_i \sigma_{X_i}) + c_i(x_i - k_i \sigma_{X_i})^2 \quad (5.4.3a)$$

$$g_i^+ = a + \sum_{j=1, j \neq i}^n b_j x_j + \sum_{j=1, j \neq i}^n c_j x_j^2 + b_i(x_i + k_i \sigma_{x_i}) + c_i(x_i + k_i \sigma_{x_i})^2 \quad (5.4.3b)$$

$$\therefore \frac{g_i^+ - g_i^-}{2k_i \sigma_{x_i}} = b_i + 2c_i x_i \quad (5.4.3c)$$

由式(5.4.2)及(5.4.3c)可得

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \frac{g_i^+ - g_i^-}{2k_i \sigma_{x_i}} \quad (5.4.4)$$

而上式正是 FORM 中使用的差分法求导公式。因此，对于可靠度分析中的重要环节——导数的求解，本文方法的第一步——FORM 中的求导方法与基于响应面迭代的 RSM 的求导方法是一致的。

在计算效率上，基于响应面迭代的 RSM 需拟合若干个响应面，其中每个响应面的拟合要进行  $2n+1$  次有限元计算，且对于每个响应面均需进行 FORM 迭代求解。而本文方法只需拟合一个响应面，因而计算效率较高。

此外，正因为本文方法只形成一个响应面，因而就大大地减少了基于响应面迭代的 RSM 中验算点收敛于二次响应面的错误分支的可能性，相对提高了计算的精度。

### 5.4.3 算例分析

#### 5.4.3.1 例 5.4-1

为了便于比较和说明，在此例中取的功能函数是显式的。其功能函数形式为

$$Z = (X_1 + 2)^3 - (X_2 - 1)^2 \quad (5.4.5)$$

其中基本变量  $X_1, X_2$  均为标准正态随机变量。这是一个弱非线性问题。计算结果见图 5.4-1 及表 5.4-1 所示。

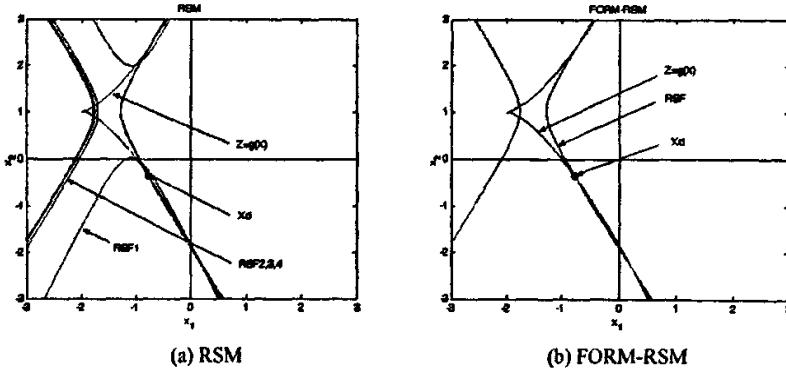


图 5.4-1 极限响应面（例 5.4-1）

表 5.4-1 不同方法对应的可靠指标（例 5.4-1）

MCSM	RSM	FORM-RSM (FORM)	FORM-RSM (MCSM)
0.842	0.852	0.852	0.842

图 5.4-1 中,  $Z=g(X)$  及 RSF 分别表示原极限状态曲面及极限响应面,  $X_d$  表示验算点。表 5.4-1 中, MCSM 是对原极限状态函数(式(5.4.5))进行 10000 次蒙特卡罗模拟的结果, 代表可靠指标的真值; RSM 表示基于响应面迭代的响应面法(其中系数  $k$  第一步取 3, 以后各步取 1)的计算结果; FORM-RSM (FORM) 及 FORM-RSM (MCSM) 别表示基于本文 FORM-RSM 二步法所得的二次响应面用 FORM 及 MCSM 进行计算的结果。由上述计算结果可知: 基于响应面迭代的 RSM 在计算过程中共生成 4 个响应面, 其中后三个响应面的位置基本一致; 而本文的 FORM-RSM 二步法只生成一个响应面, 其位置与前者的第四个响应面基本一致。因此, RSM 与 FORM-RSM (FORM) 之计算结果具有相同的精度。同时, FORM-RSM (MCSM) 的计算结果则与真值非常接近, 但此计算是基于显式响应面进行的, 它比基于原功能函数而进行的蒙特卡罗模拟的计算量要小得多, 因而大大地提了计算效率。

#### 5.4.3.2 例 5.4-2

某边坡坡比 1:2。有关土工参数是: 内聚力  $c=1\text{kPa}$ , 内摩擦角  $\varphi=40^\circ$ , 膨胀角  $\phi=0^\circ$ , 容重  $\gamma=20\text{kN/m}^3$ 。弹性模量  $E=10^5\text{kPa}$ , 泊松比  $\mu=0.3$ <sup>[222]</sup>。设  $c$ 、 $\varphi$  是互为独立的正态随机变量, 变异系数均为 0.3。取极限状态方程式为:

$$Z = Fs - 1 \quad (5.4.6)$$

式中  $Fs$  为边坡的安全系数, 由强度折减法求得。各种方法的计算结果如表 5.4-2 及图 5.4-2 所示。

表 5.4-2 不同方法对应的可靠指标(例 5.4-2)

MCSM	RSM	FORM-RSM (FORM)	FORM-RSM (MCSM)
2.320	3.116	2.312	2.330

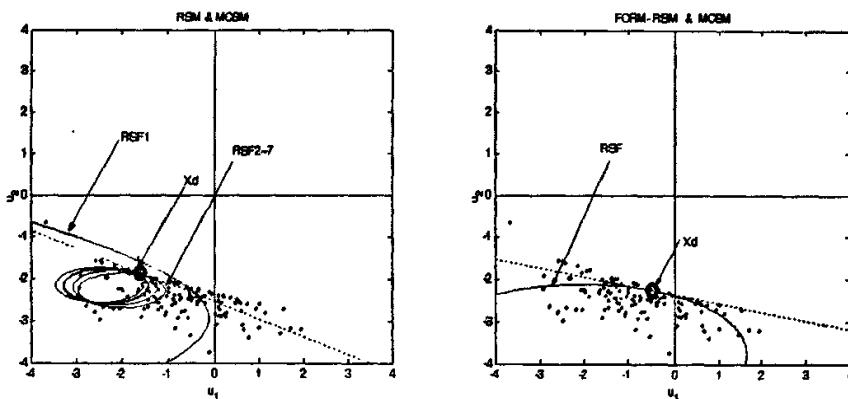


图 5.4-2 极限响应面(例 5.4-2)

图 5.4-2 中的虚线表示过  $X_d$  点的线性切面, 散点表示对原极限状态函数(式(5.4.6))进行 10000 次 MCSM 计算时  $Z \leq 0$  的点。由这些散点的边界可知, 它们的曲率变化较为明显, 因而非线性较强。

计算结果表明, 基于响应面迭代的 RSM 的响应面共有 7 个, 其中后六个极限响应面都是椭圆, 椭圆内为失效域。由图 5.4-2 可知, 此失效域远远不能代表真实的失效域, 因而计算误差

较大。

而对于本文的 FORM-RSM 二步法，其对应的响应面及其失效域能较好地代表原极限状态面及其失效域，因而计算结果与 MCSM 结果十分接近。

### 5.4.3.3 例 5.4.3

某边坡剖面如图 5.4-3 所示<sup>[158, 233]</sup>，其地层由上而下分为三层，有关参数如表 5.4-3 所示，其中强度参数  $c_i$ 、 $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是相互独立的正态随机变量，变异系数均为 0.25。取极限状态方程与式(5.4.6)一致，其中边坡的安全系数  $F_s$  由瑞典条分法及简化 Bishop 法求得。计算结果见图 5.4-3、表 5.4-4、表 5.4-5。图 5.4-3 中的滑面对应于最小可靠指标面。

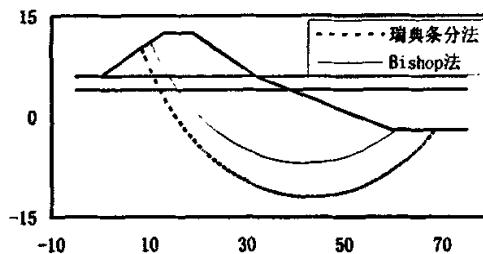


图 5.4-3 边坡剖面图

表 5.4-3 土层参数表

土层号	$H/m$	$\gamma/\text{KN/m}^3$	$\mu_c/k\text{Pa}$	$\mu_\varphi'$
1	6.45	19.4	22	12
2	2.00	19.0	22	13
3	14.00	17.5	23	9

表 5.4-4 不同方法对应的可靠指标（例 5.4-3）

方法	MCSM	FORM	RSM	FORM-RSM (FORM)
Sweden	1.094	1.154	-47.685	1.066
Bishop	1.405	1.461	1.413	1.413

表 5.4-5 RSM 与 FORM-RSM 之比较（例 5.4-3，瑞典条分法）

方 法	RSM		FORM-RSM
	响应面个数	13	1
验算点坐标	$c_1$	-17.38	21.71
	$c_2$	57.59	21.81
	$c_3$	23.00	18.93
	$\varphi_1$	12	11.98
	$\varphi_2$	13	12.94
	$\varphi_3$	9	7.22

由表 5.4-4 可见，对于简化的 Bishop 法，RSM 与 FORM-RSM 的计算结果一致；对于瑞典条分法，基于响应面迭代的 RSM 的计算结果明显有误，这是由于其迭代计算过程中验算点收敛于错误的响应面分支而造成的（见表 5.4-5）。而且，基于响应面迭代的 RSM 的计算过程中共拟合了 13 个响应面，计算工作量远大于本文的 FORM-RSM。

#### 5.4.3.4 结论

不同算例表明：本文提出 FORM-RSM 二步法在计算精度及效率上均比常用的基于响应面迭代的 RSM 有所提高。对于弱非线性功能函数，本文的 FORM-RSM-MCSM 解与真解一致；对于强非线性功能函数，本文的 FORM-RSM 的计算结果比基于 RSM 的计算结果之精度有所提高，但仍与真值有一定差别，这是取 RSF 为二次多项式造成的。为了更好地拟合强非线性功能函数，今后还需研究其它更好的功能函数形式。

## 6 基于滑面应力分析的边坡稳定弹塑性非线性有限元可靠度分析

目前, 进行边坡有限元可靠度分析的方法通常是基于有限元的应力分析结果而进行的“点”可靠度计算, 其分析结果主要是各积分点或单元的可靠指标、破坏概率及其等值线, 并由此进行边坡稳定的定性分析。但是, 对于实际工程而言, 求解边坡的整体可靠指标及相应的滑面是十分必要的。因此, 本章在分析现有的非线性随机有限元方法的基础上, 探讨边坡整体可靠指标的求解方法。

### 6.1 非线性随机有限元分析方法

随机有限元分析的实质是在有限元分析的基础上, 考虑各种计算参数的随机性, 计算由于参数的变异性而引起的响应的变异性, 它与定值法有限元分析的主要不同之处在于它在弹塑性有限元的基础上加入了计算位移、应力对随机变量的偏导<sup>[196, 214]</sup>。计算出偏导之后, 再根据功能函数和可靠度理论求解单元及边坡潜在滑面的可靠指标。

为反映材料的弹塑性性质, 本文以增量理论为基础建立弹塑性非线性随机有限元的迭代格式。随机有限元分析中导数的计算采用偏微分法, 偏导数的迭代计算与位移、应力的迭代计算同步进行。下面以增量初应力法为例说明其迭代计算过程。

#### 6.1.1 基于增量初应力法的非线性随机有限元迭代格式

本算法将位移  $\mathbf{d}$ 、应力  $\boldsymbol{\sigma}$  对随机变量的偏导数的计算与有限元算法同步进行, 设  $k$  和  $i$  分别表示荷载步和迭代步 ( $k=0, 1, \dots, N-1, N$  为总荷载步数;  $i=0, 1, \dots$ )。具体的迭代步骤如下。

- 1) 赋迭代初值 ( $k=0, i=0, \mathbf{d}=0, \boldsymbol{\sigma}=0, \partial\mathbf{d}/\partial\mathbf{X}=0, \partial\boldsymbol{\sigma}/\partial\mathbf{X}=0$ ); 组装弹性刚度矩阵  $\mathbf{K}_0$  及其对基本随机变量向量  $\mathbf{X}$  的偏导矩阵  $\partial\mathbf{K}_0/\partial\mathbf{X}$ ;
- 2) 对第  $k+1$  级荷载增量, 令位移、应力及其对基本变量的偏导的初值分别为上一荷载步结束时的相应值:  $\mathbf{d}_0^{k+1}=\mathbf{d}^k, \boldsymbol{\sigma}_0^{k+1}=\boldsymbol{\sigma}^k, (\partial\mathbf{d}/\partial\mathbf{X})_0^{k+1}=(\partial\mathbf{d}/\partial\mathbf{X})^k, (\partial\boldsymbol{\sigma}/\partial\mathbf{X})_0^{k+1}=(\partial\boldsymbol{\sigma}/\partial\mathbf{X})^k$ ; 令体力增量的初值及其偏导为零:  $\Delta\mathbf{R}_0^{k+1}=0, (\partial\Delta\mathbf{R}/\partial\mathbf{X})_0^{k+1}=0$ 。
- 3) 对第  $i+1$  次迭代, 求结点位移增量  $\Delta\mathbf{d}_{i+1}^{k+1}$  及其对  $\mathbf{X}$  的偏导矩阵  $(\partial\Delta\mathbf{d}/\partial\mathbf{X})_{i+1}^{k+1}$ ;
- 4) 计算各单元应变增量  $\Delta\varepsilon_{i+1}^{k+1}$ ;
- 5) 计算各单元的弹性应力增量  $(\Delta\boldsymbol{\sigma}_e)_{i+1}^{k+1}$ 、当前试算应力  $(\boldsymbol{\sigma}_i)_{i+1}^{k+1}$  及其对  $\mathbf{X}$  的偏导  $(\partial\Delta\boldsymbol{\sigma}_e/\partial\mathbf{X})_{i+1}^{k+1}, (\partial\boldsymbol{\sigma}_i/\partial\mathbf{X})_{i+1}^{k+1}$ ;
- 6) 计算屈服函数值  $F[(\boldsymbol{\sigma}_i)_{i+1}^{k+1}]$ , 按 Mohr-Coulomb 条件判断是否进入塑性状态。若已进入塑性, 则计算相应的比值  $m$ 、塑性矩阵  $(\mathbf{D}_p)_{i+1}^{k+1}$ 、初应力增量  $(\Delta\boldsymbol{\sigma}_0)_{i+1}^{k+1}$ 、体力增量  $\Delta\mathbf{R}_{i+1}^{k+1}$  及

$$\text{其偏导数 } \frac{\partial m}{\partial \mathbf{X}}, (\frac{\partial \mathbf{D}_p}{\partial \mathbf{X}})_{i+1}^{k+1}, (\frac{\partial \Delta \sigma_0}{\partial \mathbf{X}})_{i+1}^{k+1}, \frac{\partial \Delta \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}};$$

- 7) 判断本次迭代是否收敛。若迭代计算收敛，则求本级荷载增量下的应力增量  $\Delta \sigma^{k+1}$ 、位移  $\mathbf{d}^{k+1}$ 、应力  $\sigma^{k+1}$  及其偏导  $(\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \mathbf{X}})_{i+1}^{k+1}, (\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}})_{i+1}^{k+1}, (\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}})_{i+1}^{k+1}$ ，再令  $k=k+1$ ，转 2) 进行下一增量步分析。否则，令  $i=i+1$ ，转 3) 进入下一迭代步分析。

### 6.1.2 迭代公式的具体化

$$1) \because \quad \mathbf{K}_0 = \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \mathbf{D}_e \mathbf{B} dV \quad (6.1.1)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \mathbf{K}_0}{\partial \mathbf{X}} = \sum_e \int_e \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}_e}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{B} dV \quad (6.1.2)$$

$$2) \quad \mathbf{d}_0^{k+1} = \mathbf{d}^k, \quad \sigma_0^{k+1} = \sigma^k; \quad (\partial \mathbf{d} / \partial \mathbf{X})_0^{k+1} = (\partial \mathbf{d} / \partial \mathbf{X})^k, \quad (\partial \sigma / \partial \mathbf{X})_0^{k+1} = (\partial \sigma / \partial \mathbf{X})^k$$

$$3) \quad \because \quad \mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \Delta \mathbf{F}^{k+1} + \Delta \mathbf{R}_i^{k+1} \quad (4.3.20)$$

$$\therefore \quad \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{K}_0^{-1} (\Delta \mathbf{F}^{k+1} + \Delta \mathbf{R}_i^{k+1}) \quad (6.1.3)$$

将式(4.3.20)两边同对基本变量  $\mathbf{X}$  求导，得

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_0 \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{i+1}^{k+1} + \frac{\partial \mathbf{K}_0}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{i+1}^{k+1} + \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right)_i^{k+1} \\ \therefore \quad & \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{i+1}^{k+1} = \mathbf{K}_0^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{i+1}^{k+1} + \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \right)_i^{k+1} - \frac{\partial \mathbf{K}_0}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \right] \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

$$4) \quad \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.5)$$

$$5) \quad (\Delta \sigma_e)_{i+1}^{k+1} = \mathbf{D}_e \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.6)$$

$$(\sigma_i)_{i+1}^{k+1} = \sigma^k + (\Delta \sigma_e)_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.7)$$

$$\left( \frac{\partial \Delta \sigma_e}{\partial \mathbf{X}} \right)_{i+1}^{k+1} = \frac{\partial \mathbf{D}_e}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} + \mathbf{D}_e \mathbf{B} \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.8)$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial \mathbf{X}} \right)_{i+1}^{k+1} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}} \right)^k + \left( \frac{\partial \Delta \sigma_e}{\partial \mathbf{X}} \right)_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.9)$$

6) 塑性状态的判断及有关公式：

$$m = \frac{-F(\sigma^k)}{F[(\sigma_i)_{i+1}^{k+1}] - F(\sigma^k)} = \frac{-F_0}{F_1 - F_0} \quad (6.1.10)$$

$$\frac{\partial m}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \left( \frac{-F_0}{F_1 - F_0} \right)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{(F_1 - F_0)^2} (F_0 \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{X}} - F_1 \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{X}}) \quad (6.1.11)$$

$$(\mathbf{D}_p)_{i+1}^{k+1} = \mathbf{D}_p [\mathbf{X}, \sigma^k + m \mathbf{D}_e \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1}] = \mathbf{D}_p [\mathbf{X}, \sigma^k + m (\Delta \sigma_e)_{i+1}^{k+1}] \quad (6.1.12)$$

记

$$(\sigma_C)_{i+1}^{k+1} = \sigma^k + m (\Delta \sigma_e)_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.13)$$

则

$$(\mathbf{D}_p)_{i+1}^{k+1} = \mathbf{D}_p[\mathbf{X}, (\sigma_C)_{i+1}^{k+1}] \quad (6.1.14)$$

$$(\Delta\sigma_0)_{i+1}^{k+1} = -(1-m)(\mathbf{D}_p)_{i+1}^{k+1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.15)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta\sigma_0}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} = -(1-m)\left(\frac{\partial \mathbf{D}_p}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} - (1-m)(\mathbf{D}_p)_{i+1}^{k+1} \mathbf{B} \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} + \frac{\partial m}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{D}_p)_{i+1}^{k+1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.16)$$

$$\Delta \mathbf{R}_{i+1}^{k+1} = -\sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T (\Delta\sigma_0)_{i+1}^{k+1} dV = \sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T (1-m)(\mathbf{D}_p)_{i+1}^{k+1} \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} dV \quad (6.1.17)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} = -\sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T \left(\frac{\partial \Delta\sigma_0}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} dV \quad (6.1.18)$$

下面进一步推导  $\left(\frac{\partial \mathbf{D}_p}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1}$  的计算公式。

注意到  $\mathbf{D}_p$  是基本变量及应力的函数，因此，

$$\left(\frac{\partial \mathbf{D}_p}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} = \frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}, (\sigma_C)_{i+1}^{k+1})}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}^*, (\sigma_C)_{i+1}^{k+1})}{\partial \sigma} \cdot \left(\frac{\partial \sigma_C}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.19)$$

式中，上标\*表示在求导时此参数视为常量。由式(6.1.13)可得，

$$\left(\frac{\partial \sigma_C}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}}\right)^k + m \left(\frac{\partial \Delta\sigma_e}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} + \frac{\partial m}{\partial \mathbf{X}} (\Delta\sigma_e)_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.20)$$

为简单起见，文[214]近似地采用差分法计算  $\frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}^*, (\sigma_C)_{i+1}^{k+1})}{\partial \sigma}$ ，即令

$$\frac{\partial \mathbf{D}_p(\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\mathbf{D}_p(\sigma + \alpha\sigma) - \mathbf{D}_p(\sigma)}{\alpha\sigma} \quad (6.1.21)$$

其中系数  $\alpha$  可取 0.001~0.01。本文为精确起见，详细推导了  $\frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}, (\sigma_C)_{i+1}^{k+1})}{\partial \mathbf{X}}$  和

$\frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}^*, (\sigma_C)_{i+1}^{k+1})}{\partial \sigma}$  的计算公式，具体公式见附录 2。

7)

$$\Delta \sigma_{i+1}^{k+1} = (\Delta\sigma_e)_{i+1}^{k+1} + (\Delta\sigma_0)_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.22)$$

$$\left(\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} = \left(\frac{\partial \Delta\sigma_e}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} + \left(\frac{\partial \Delta\sigma_0}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.23)$$

$$\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{d}^k + \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.24)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} = \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}}\right)^k + \left(\frac{\partial \Delta \mathbf{d}}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.25)$$

$$\sigma_{i+1}^{k+1} = \sigma^k + \Delta \sigma_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.26)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}}\right)^k + \left(\frac{\partial \Delta \sigma}{\partial \mathbf{X}}\right)_{i+1}^{k+1} \quad (6.1.27)$$

## 6.2 边坡的非线性随机有限元可靠度分析

### 6.2.1 功能函数的确定

可靠度分析的首要步骤是确定具体的功能函数形式。当功能函数的具体形式确定之后，即可用各种可靠度分析方法分析边坡的可靠度。

在进行边坡的弹塑性非线性有限元可靠度分析时，本文假定边坡体为 Mohr-Coulomb 理想弹塑性材料，其屈服函数形式详见第四章。因此，可写出剪切破坏时单元的功能函数为

$$Z_1 = g(\mathbf{X}) = c \cos \varphi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin \varphi - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.2.1)$$

或

$$Z_2 = g(\mathbf{X}) = \tau_f - \tau = -\sigma_n \tan \varphi + c - \tau \quad (6.2.2)$$

式中， $\mathbf{X}$  为基本变量； $c$ 、 $\varphi$  为岩土的粘聚力和内摩擦角； $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$  为应力向量； $\tau_f$  和  $\sigma_n$  分别为受剪面上的抗剪强度和法向应力。

上述两个式子中，前者不考虑剪切破坏面的方向，适用于求解单元的可靠指标，从而分析边坡中各单元的可靠度水平；后者中，受剪面上的抗剪强度  $\tau_f$  和法向应力  $\sigma_n$  与剪切面的方向有关，因此适用于潜在滑面方向已知时可靠指标的求解。

设  $\theta$  为单元所截滑面切线方向与水平面间的夹角，由第四章公式知

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (6.2.3a)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (6.2.3b)$$

将上式代入式(6.2.2)，得考虑滑动方向时的单元功能函数为

$$Z_2 = g(\mathbf{X}) = -\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta\right) \tan \varphi + c - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\right) \quad (6.2.4)$$

### 6.2.2 单元可靠指标的求解

由于一阶可靠度分析方法中需要求解功能函数对基本变量的导数，下面分析导数的计算公式。

记应力向量  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$ ，基本变量  $\mathbf{X} = (c, \varphi, \phi, \gamma, E, \mu)^T$ ， $(c, \varphi, \phi, \gamma, E, \mu)$  分别为内聚力、内摩擦角、膨胀角、容重、弹性模量、泊松比，则对于第  $i$  单元 ( $i=1, \dots, nele$ ； $nele$  为有限单元的个数)，功能函数对基本变量的导数为

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}^*)}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial g_i(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} \quad (6.2.5)$$

式中上标\*表示在求导时此参数视为常量， $\boldsymbol{\sigma}$  及  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{X}}$  均可由随机有限元计算而得。下面分别讨论上述两种功能函数的导数计算公式。

对于式(6.2.1)，有

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \sigma^*)}{\partial \mathbf{X}} = \left\{ \cos \varphi, -c \sin \varphi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cos \varphi, 0, 0, 0, 0 \right\}^T \quad (6.2.6)$$

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{X}^*, \sigma)}{\partial \sigma} = \left\{ -\frac{\sin \varphi}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}, -\frac{\sin \varphi}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}, -\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \right\} \quad (6.2.7)$$

对于式(6.2.4), 有

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \sigma^*)}{\partial \mathbf{X}} = \left\{ 1, \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \right) \sec^2 \varphi, 0, 0, 0, 0 \right\}^T \quad (6.2.8)$$

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{X}^*, \sigma)}{\partial \sigma} = \left\{ -\frac{1}{2} [(1 - \cos 2\theta) \tan \varphi + \sin 2\theta], -\frac{1}{2} [(1 + \cos 2\theta) \tan \varphi - \sin 2\theta], -\sin 2\theta \tan \varphi - \cos 2\theta \right\} \quad (6.2.9)$$

当导数公式确定之后, 即可由各种可靠度方法求解单元的可靠指标。

### 6.2.3 滑面总体可靠指标的求解

边坡稳定可靠度分析的目的之一是得到边坡中最小可靠指标及其滑面位置, 本文采用与定值法中求解边坡最小安全系数相同的方法来求边坡的最小可靠指标, 即: 先假定一个滑动面, 求解此滑面的可靠指标; 再用简单枚举法或各种优化方法搜索整个边坡的最小可靠指标。本文探讨如下几种由随机有限元计算结果求解滑面可靠指标的方法:

**方法 1:** 取单元功能函数  $Z_i$  为不考虑滑面方向的(6.2.1)式, 并设滑面功能函数

$$Z = \sum_{i=1}^{ne} Z_i \Delta l_i \quad (6.2.10)$$

则

$$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{ne} \frac{\partial Z_i}{\partial \mathbf{X}} \Delta l_i \quad (6.2.11)$$

其中  $\frac{\partial Z_i}{\partial \mathbf{X}}$  的计算方法见前述单元可靠指标的计算。式中,  $ne$  为滑弧上的单元个数;  $\Delta l_i$ 、 $Z_i$  分别为第  $i$  单元切割的滑弧长度及功能函数。

**方法 2:** 取单元功能函数  $Z_i$  为不考虑滑面方向的式(6.2.1), 由此计算滑面上各单元的可靠指标, 再设滑面可靠指标为滑面上各单元可靠指标对滑弧长度的加权平均, 则

$$\beta = \sum_{i=1}^{ne} \beta_i \Delta l_i / \sum_{i=1}^{ne} \Delta l_i \quad (6.2.12)$$

其中  $\beta_i$  的计算类似于方法 1。

**方法 3:** 在求解滑面可靠指标时, 对于某一固定滑面, 其上各单元的滑动方向已知, 因此单元功能函数  $Z_i$  可取为考虑滑面方向的式(6.2.2), 并设滑面功能函数为式(6.2.10)。

**方法 4:** 对于某一固定滑面, 取单元功能函数  $Z_i$  为考虑滑面方向的(6.2.2)式, 其它同方法 2。

#### 6.2.4 程序流程图

基于上述分析，本文用 VISUAL FORTRAN 6.5 编写了边坡弹塑性随机有限元可靠度计算程序，并将相应的计算结果输出至数据文件中，以便进行绘图、结果分析等后处理。同时，为了对比分析，也编制了相应的定值法计算程序，用以求解边坡的安全系数。基于滑面应力分析的边坡有限元可靠度分析的程序流程图见图 6.2-1。其中，各积分点的应力  $\sigma$  及应力对基本变量的偏导  $\frac{\partial\sigma}{\partial X}$  由基于增量初应力法的随机有限元子程序求得；滑面可靠指标  $\beta$  的求解流程见图 6.2-2。

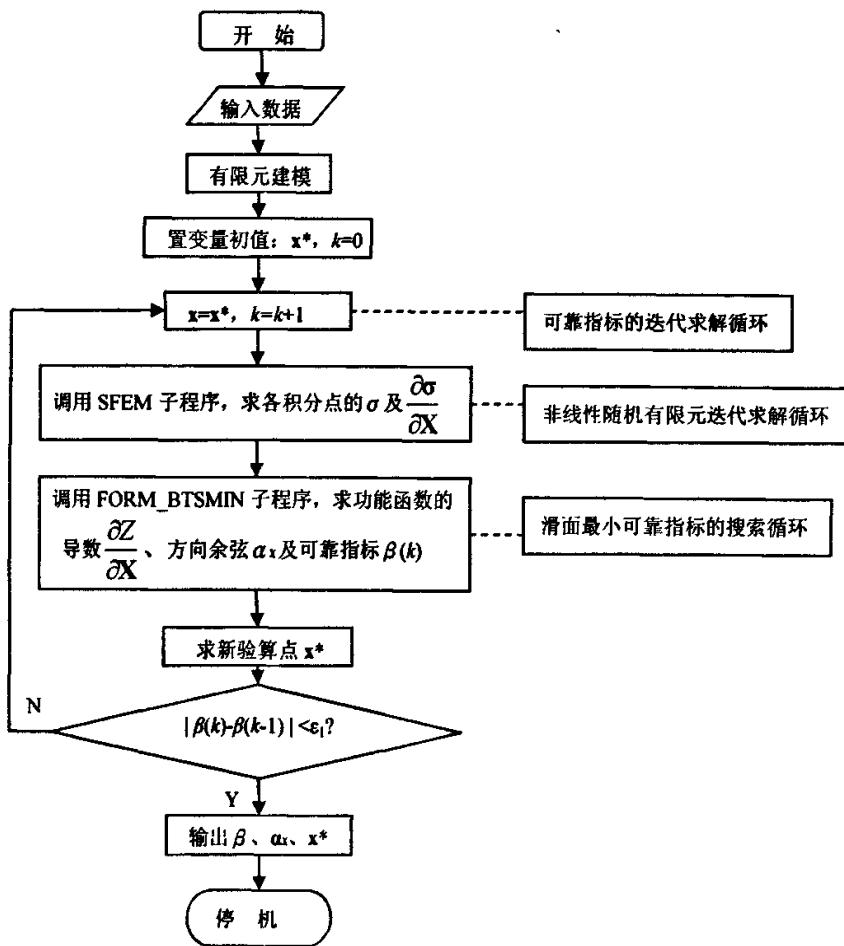


图 6.2-1 基于滑面应力分析的边坡有限元可靠度分析主程序流程图 (FORM)

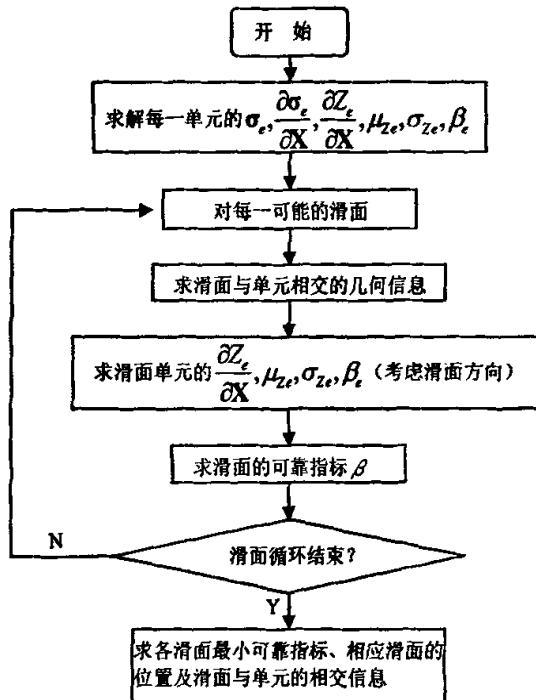


图 6.2-2 求解滑面可靠指标的子程序流程图

### 6.3 算例分析

有一坡比为 1:1 的均质土坡，高  $H=20m$ ，内聚力  $c=40kPa$ ，内摩擦角  $\varphi=20^\circ$ ，膨胀角  $\phi=20^\circ$ ，容重  $\gamma=20kN/m^3$ ，弹性模量  $E=20MPa$ ，泊松比  $\mu=0.3^{[234]}$ 。设  $c$ 、 $\varphi$  为相互独立的正态基本变量，其余参数为定值。边坡剖面如图 6.3-1 所示。有限元计算采用 8 结点四边形网格，共划分个 331 结点，94 个单元。约束条件是底边界固定，左右边界水平约束。土体采用 Mohr-Coulomb 理想弹塑性模型。

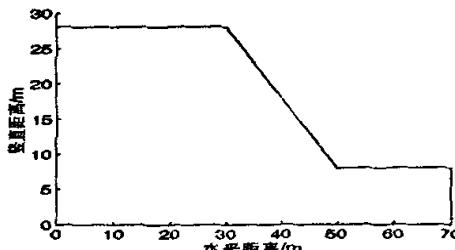


图 6.3-1 边坡剖面图

#### 6.3.1 定值分析法的计算结果

在对本例进行可靠度分析的同时，也用定值法进行了相应的计算。根据本文程序，用有限元强度折减法所求边坡整体最小安全系数  $F_s(SRM)=1.31$ ，用滑面应力分析法所求

$F_s(\text{SSA})=1.32$ , 二者基本一致。它们比文献[234]中  $F_s(\text{Bishop})=1.266$ ,  $F_s(\text{Spencer})=1.265$  稍大, 误差不超过 5%, 与文献[235]中关于有限元法与极限平衡条分法误差大小的结论一致。

### 6.3.2 可靠度分析的计算结果

#### 6.3.2.1 单元解

基于滑面应力分析的边坡稳定弹塑性有限元可靠度分析可以求出边坡剖面上各单元、各高斯积分点以及整个滑面上的相应值, 如: 应力, 应力的导数, 功能函数的均值与均方差, 可靠指标, 等等。

下面以  $c$ 、 $\varphi$  的变异系数均为 0.3 时的情况进行分析。图 6.3-2 表示的是基于滑面应力分析的有限元可靠度结果(中心点法), 图中(a)、(b)、(c)分别表示各积分点上功能函数均值、均方差及可靠指标等值线图。

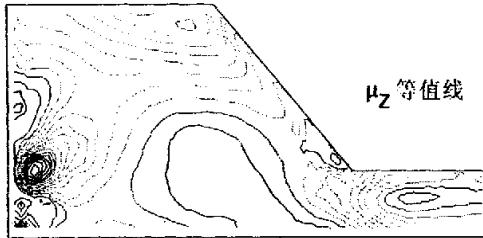


图 6.3-2 (a) 积分点上功能函数均值等值线图

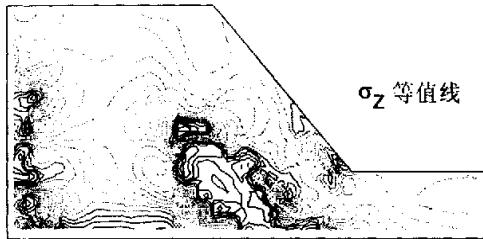


图 6.3-2 (b) 积分点上功能函数均方差等值线图

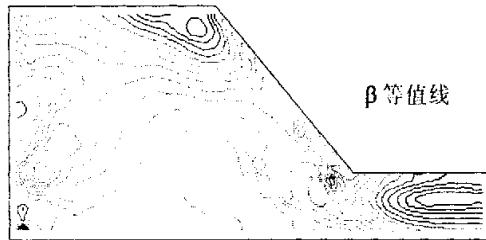


图 6.3-2 (c) 积分点上可靠指标等值线图

由上述等值线图可见: 各高斯积分点上功能函数均值的等值线图与功能函数均方差的等值

线图形状并不一致，由此导致的可靠指标等值线图也与功能函数均值的等值线图不一致。因此，根据传统定值法所得安全系数进行边坡的安全性评价是不充分的。只有采用可靠度分析方法，并与定值分析法相结合，才能全面考虑边坡中各种不确定性的影响，从而正确评价边坡的安全水平。

从边坡的可靠指标等值线图上大致可以看出，在靠近边坡面下部的可靠指标相对较低，破坏概率相对较大。但这只是定性分析，边坡破坏面的具体位置及相应的可靠指标的大小仍需采用本文方法求得。

### 6.3.2.2 滑面解

为了计算滑面位置及相应的可靠指标，本文采用四种方法进行了计算，具体方法如前所述，结果如图 6.3-3 及图 6.3-4。图 6.3-3 表示的是可靠指标与变异系数的关系曲线（中心点法），其中  $\delta_c$ 、 $\delta_\varphi$  是滑面强度参数  $c$ 、 $\varphi$  的变异系数，它们的变化范围分别为 0.1、0.2、0.3； $\beta$  表示滑面可靠指标。为了与强度折减法进行对比，图中也列出了强度折减法的相应计算结果。图中 SSA( $m=1$ )、SSA( $m=2$ )、SSA( $m=3$ )、SSA( $m=4$ ) 分别表示基于滑面应力分析的四种方法计算结果，SRM 表示基于强度折减法的计算结果。

由图 6.3-3 可知：在进行边坡的弹塑性有限元可靠度分析时，与强度折减法相比，基于滑面应力分析的各种方法中，方法 3 最好，其次为方法 4。这是因为方法 3、4 充分考虑了滑动方向的影响，建立的功能函数更符合实际。其中，方法 3 根据整个滑面的功能函数来求解滑面的可靠指标，物理概念明确，因而计算更合理，与强度折减法的结果非常接近；方法 4 是方法 3 的简化形式，它简单地视滑面的可靠指标为滑面上各单元可靠指标的均值，故计算结果与方法 3 的结果有一定差别。方法 1、2 由于其功能函数没有考虑滑动面方向，因而可靠指标的计算结果与 SRM 的相应值有较大差别。与方法 3、4 的关系类似，方法 2 也是方法 1 的简化形式，二者的计算结果较为接近。采用这种不考虑滑面方向的功能函数的优点在于它亦可求出边坡剖面上任一点的点可靠指标，从而进行边坡稳定的定性分析。

在求解滑面可靠指标的同时，基于滑面应力分析法的程序还能求出边坡整体最小可靠指标对应的滑面位置，计算结果表明方法 1、2 及方法 3、4 对应的潜在滑面的位置各自相同，如图 6.3-4 为  $c$ 、 $\varphi$  的变异系数  $\delta_c$ 、 $\delta_\varphi$  为 0.3 时的滑面位置图。可见造成这种滑面位置差异的原因主要是功能函数形式的影响。功能函数形式确定后，滑面的位置也相应确定。同时，该图中还绘出了相应的定值法分析所得的最小安全系数面。很明显，它与可靠度分析所得滑面位置是不同的。因此，在进行边坡稳定的可靠度分析时，不能简单地以定值法分析所得潜在滑面为可靠度分析的滑面，而应在可靠度分析中重新搜索其滑面位置。只有这样，所求可靠指标才能保证是整个边坡的最小可靠指标。

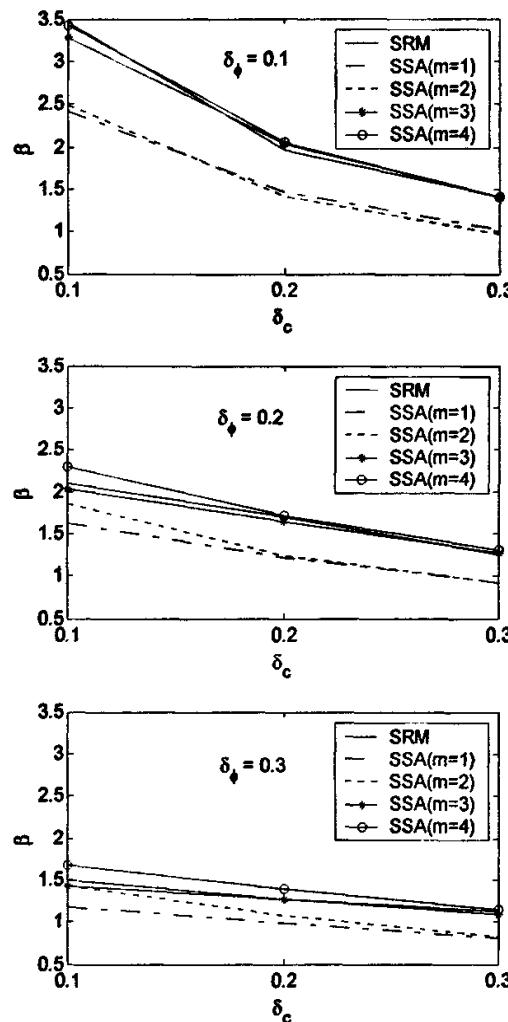


图 6.3-3 可靠指标与变异系数的关系 (MFORM)

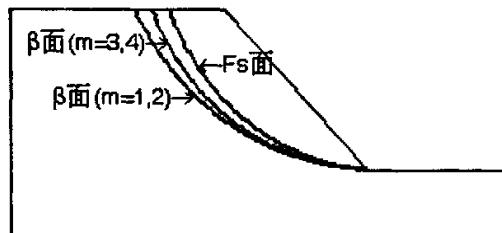


图 6.3-4 滑面位置图

### 6.3.3 结论

与基于强度折减法的边坡有限元可靠度分析方法相比，基于滑面应力分析法所得的计算结果更为全面，它既能计算出边坡剖面上各单元或各积分点上的可靠指标，又能计算出边坡

的总体可靠指标及相应滑面的位置，这更有助于边坡的防治。

基于滑面应力分析的弹塑性随机有限元可靠度分析中，滑面可靠指标的求解方法对计算结果影响很大。在分析边坡中各点的可靠指标时，其功能函数可采用不考虑滑面方向的函数形式（方法 1、2），从而可得到边坡剖面中各点可靠指标的相对大小，进行边坡稳定的定性分析。但在求解边坡整体可靠指标时，应采用考虑滑面方向的函数形式作为功能函数（方法 3、4），它能更好地反映滑面方向对边坡可靠指标的影响，其中方法 3 根据整个滑面的功能函数来求解滑面的可靠指标，物理概念明确，因而更为合理。

本论文以下部分如不作说明，基于滑面应力法求解边坡整体可靠指标的方法均为此处的方法 3。

## 7 边坡稳定的有限元可靠度敏感性分析

### 7.1 随机变量相关时的可靠度分析方法

在实际工程中，随机变量之间可能是相关的，如：岩土体的粘聚力和内摩擦角之间常呈现负相关性<sup>[236]</sup>。因此，需要讨论随机变量相关时的可靠度计算方法。对于正态相关随机变量的情况，早期的可靠度分析方法是利用协方差的特征向量构成的正交矩阵，将相关随机变量变为独立的正态随机变量，然后按照独立随机变量的可靠度方法进行分析。后来又发展了不需进行正交变换的广义随机空间内的可靠度分析方法<sup>[237]</sup>。

下面以验算点法(FORM)为例进行分析，公式记法采用向量形式<sup>[216]154-158</sup>。

设结构的功能函数为  $Z = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ；  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  是由  $n$  个相关的正态随机变量构成的随机向量，即  $\mathbf{X} \sim N(\mu_{\mathbf{X}}, \mathbf{C}_{\mathbf{X}})$ ，其中  $\mu_{\mathbf{X}} = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})^T$  为随机向量  $\mathbf{X}$  的平均值向量， $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$  为随机向量  $\mathbf{X}$  的协方差矩阵，其表达式如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_1, X_2) & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \rho_{X_1, X_2} \sigma_{X_1} \sigma_{X_2} & \cdots & \rho_{X_1, X_n} \sigma_{X_1} \sigma_{X_n} \\ \rho_{X_2, X_1} \sigma_{X_2} \sigma_{X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \rho_{X_2, X_n} \sigma_{X_2} \sigma_{X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_n, X_1} \sigma_{X_n} \sigma_{X_1} & \rho_{X_n, X_2} \sigma_{X_n} \sigma_{X_2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (7.1.1)$$

协方差矩阵  $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$  亦可用相关系数矩阵  $\rho_{\mathbf{X}}$  表示为

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}} = \sigma_{\mathbf{X}} \rho_{\mathbf{X}} \sigma_{\mathbf{X}} \quad (7.1.2)$$

其中

$$\rho_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{X_1, X_2} & \cdots & \rho_{X_1, X_n} \\ \rho_{X_2, X_1} & 1 & \cdots & \rho_{X_2, X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{X_n, X_1} & \rho_{X_n, X_2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (7.1.3)$$

$$\sigma_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{X_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{X_n} \end{bmatrix} = diag(\sigma_{X_1}, \dots, \sigma_{X_n}) \quad (7.1.4)$$

式中， $\rho_{X_i, X_j}$  是变量  $X_i$  和  $X_j$  间的相关系数， $\sigma_{\mathbf{X}}$  为随机变量  $\mathbf{X}$  的均方差向量。

先用下式将基本变量  $\mathbf{X}$  转化为标准正态随机变量  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{X} = \sigma_{\mathbf{X}} \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mu_{\mathbf{X}} \quad (7.1.5)$$

即

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} \sigma_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}}) \quad (7.1.6)$$

式中,  $\mathbf{A}$  为下三角矩阵, 设其元素为  $a_{ij}$ , 则

$$a_{ij} = \frac{\rho_{x_i x_j} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk}}{\sqrt{1 - \sum_{k=1}^{j-1} a_{kk}^2}} \quad (7.1.7)$$

$$\sum_{k=1}^0 a_{ik} a_{jk} = 0, \quad 0 \leq j \leq i \leq n \quad (7.1.8)$$

将式(7.1.5)代入功能函数式  $g(\mathbf{X})$ , 即可得到标准正态空间内的功能函数  $G(\mathbf{Y})$ 。在标准正态空间中, 可靠指标是坐标原点到极限状态曲面的最短距离, 即

$$\beta = ((\mathbf{y}^*)^T (\mathbf{y}^*))^{1/2} \quad (7.1.9)$$

上式中  $\mathbf{y}^*$  为标准正态空间中极限状态曲面上离坐标原点最近的点(验算点)的坐标, 此坐标需迭代求解, 第三章中已有其标量形式的迭代公式, 当写为向量形式时, 其迭代格式如下:

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{G(\mathbf{y}^*) - \nabla G(\mathbf{y}^*)^T \mathbf{y}^*}{\|\nabla G(\mathbf{y}^*)\|} \quad (7.1.10)$$

$$\alpha_y = -\frac{\nabla G(\mathbf{y}^*)}{\|\nabla G(\mathbf{y}^*)\|} \quad (7.1.11)$$

$$\mathbf{y}^* = \alpha_y \beta \quad (7.1.12)$$

式中,  $\nabla G(\mathbf{y}^*) = (\frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_1}, \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_2}, \dots, \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_n})^T$  为功能函数在验算点  $\mathbf{y}^*$  处的梯度向量,

$$\|\nabla G(\mathbf{y}^*)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i})^2}.$$

由于在有限元可靠度分析中位移、应力对基本随机变量的偏导数都是在原始空间中求解的, 因此, 可靠度计算在原始空间中进行更为方便。

记将  $\mathbf{X}$  变换为  $\mathbf{Y}$  的 Jacobian 矩阵为  $J_{XY}$ , 则由式(7.1.5)可得

$$J_{XY} = (\sigma_{\mathbf{X}} \mathbf{A})^T \quad (7.1.13)$$

$$\text{因此, } \nabla G(\mathbf{y}^*) = J_{XY} \nabla g(\mathbf{x}^*) = (\sigma_{\mathbf{X}} \mathbf{A})^T \nabla g(\mathbf{x}^*) \quad (7.1.14)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla G(\mathbf{y}^*)\| &= \|(\sigma_{\mathbf{X}} \mathbf{A})^T \nabla g(\mathbf{x}^*)\| \\ &= [\nabla g(\mathbf{x}^*)^T \sigma_{\mathbf{X}} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \sigma_{\mathbf{X}} \nabla g(\mathbf{x}^*)]^{1/2} \\ &= [\nabla g(\mathbf{x}^*)^T C_{\mathbf{X}} \nabla g(\mathbf{x}^*)]^{1/2} \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

将式(7.1.14)~(7.1.15)代入式(7.1.10)~(7.1.12), 可得直接在基本变量空间中求解可靠指标的迭代公式为:

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{g(\mathbf{x}^*) - \nabla g(\mathbf{x}^*)^T (\mathbf{x}^* - \boldsymbol{\mu}_x)}{\|\nabla g(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{C}_x \nabla g(\mathbf{x}^*)\|^{\frac{1}{2}}} \quad (7.1.16)$$

$$\alpha_x = -\frac{\rho_x \sigma_x \nabla g(\mathbf{x}^*)}{\|\nabla g(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{C}_x \nabla g(\mathbf{x}^*)\|^{\frac{1}{2}}} \quad (7.1.17)$$

$$\mathbf{x}^* = \boldsymbol{\mu}_x + \sigma_x \alpha_x \beta \quad (7.1.18)$$

特别地, 若取  $\mathbf{X}^*$  的迭代初值  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\mu}_x$ , 且不进行迭代求解, 则验算点法简化为中心点法。

上述公式亦可采用标量形式表示, 即

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = \frac{g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial X_i} \cdot (x_i^* - \mu_{x_i})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial X_i} \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial X_j} \rho_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}} \quad (7.1.19)$$

$$\alpha_{x_i} = -\frac{\sum_{k=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial X_k} \rho_{x_i x_k} \sigma_{x_k}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial X_i} \frac{\partial g(\mathbf{x}^*)}{\partial X_j} \rho_{x_i x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}} \quad (7.1.20)$$

$$x_i^* = \mu_{x_i} + \alpha_{x_i} \beta \sigma_{x_i} \quad (7.1.21)$$

## 7.2 有限元可靠度敏感性分析

虽然按常规有限元法也可估算参数的敏感性, 但一般是通过改变参数试算的方法<sup>[238]</sup>。当参数较多时一方面计算量很大, 另一方面为避免参数间的相互影响, 多个参数的改变如何组合很难确定。

可靠度分析的 FORM 法的优点之一是可以同时求出  $\alpha_y$  或  $\alpha_x$  值。由式(7.1.11)可知:  $\alpha_y$  表示在标准正态空间中各变量对可靠指标  $\beta$  的相对影响大小, 所以又称为敏感性系数。当随机变量相互独立时,  $\alpha_x$  亦具有同样的物理意义。但是, 当基本变量互为相关时,  $\alpha_x$  无法反映各基本变量对可靠指标的相对影响, 此时需用其它方法来求随机变量及其分布参数对可靠指标的敏感性。文献[214, 61]分析了基本变量相关时在标准正态空间中可靠指标对随机变量分布参数及极限状态方程参数的敏感性计算方法, 本文在此基础上进一步推导原始空间中的相应计算公式。

### 7.2.1 可靠指标对随机变量分布参数的敏感性分析

已知在  $\mathbf{Y}$  空间中, 可靠指标对随机变量的分布参数  $b_j (j=1, \dots, m)$  的敏感性可表示为<sup>[214]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial b_j} &= \frac{\partial (\mathbf{y}^T \mathbf{y})^{\frac{1}{2}}}{\partial b_j} = \frac{1}{2} (\mathbf{y}^T \mathbf{y})^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial (\mathbf{y}^T \mathbf{y})}{\partial b_j} \\ &= \frac{\mathbf{y}^T \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial b_j}}{\beta} = [\alpha_y(\mathbf{y}^*)]^T \frac{\partial \mathbf{y}^*}{\partial b_j} = -\frac{\nabla G(\mathbf{y}^*)^T}{\|\nabla G(\mathbf{y}^*)\|} \frac{\partial \mathbf{y}^*}{\partial b_j} \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

式中,  $y^*$  和  $\alpha_Y$  分别为  $Y$  空间中验算点坐标和敏感性系数。为了计算  $\frac{\partial y^*}{\partial b_j}$ , 下面推导  $\frac{\partial Y}{\partial b_j}$  的计算公式。为简单起见, 记

$$T = A^{-1} \sigma_X^{-1}, \quad B = -A^{-1} \sigma_X^{-1} \mu_X \quad (7.2.2)$$

式中  $T$  是大小为  $n^*n$  的矩阵,  $B$  是大小为  $n^*1$  的矩阵。

则式(7.1.6)变为

$$Y = TX + B \quad (7.2.3)$$

$$\therefore \frac{\partial Y}{\partial b_j} = \frac{\partial(TX + B)}{\partial b_j} \approx \frac{\partial T}{\partial b_j} X + \frac{\partial B}{\partial b_j} \quad (7.2.4)$$

$$\therefore \frac{\partial T}{\partial \mu_{x_i}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Bmatrix} = \{0, 0, \cdots, 0\} \quad (7.2.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma_{x_i}} = A^{-1} \text{diag}(0, \cdots, 0, -\frac{1}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \cdots, 0)^T \quad (7.2.6)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \mu_{x_i}} = A^{-1}(0, \cdots, 0, -\frac{1}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \cdots, 0)^T \quad (7.2.7)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{x_i}} = A^{-1}(0, \cdots, 0, \frac{\mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \cdots, 0)^T \quad (7.2.8)$$

$$\therefore \frac{\partial Y}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\partial T}{\partial \mu_{x_i}} X + \frac{\partial B}{\partial \mu_{x_i}} = A^{-1}\{0, \cdots, 0, -\frac{1}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \cdots, 0\}^T \quad (7.2.9)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{x_i}} = \frac{\partial T}{\partial \sigma_{x_i}} X + \frac{\partial B}{\partial \sigma_{x_i}} = A^{-1}\{0, \cdots, 0, -\frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \cdots, 0\}^T \quad (7.2.10)$$

将式(7.2.9)、(7.2.10)代入式(7.2.1), 得

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} = -\frac{\nabla G(y^*)^T}{\|\nabla G(y^*)\|} A^{-1}\{0, \cdots, 0, -\frac{1}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \cdots, 0\}^T \quad (7.2.11)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} = -\frac{\nabla G(y^*)^T}{\|\nabla G(y^*)\|} A^{-1}\{0, \cdots, 0, -\frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \cdots, 0\}^T \quad (7.2.12)$$

利用式(7.1.14)、(7.1.15), 将式(7.2.11)、(7.2.12)变回  $X$  空间, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} &= -\frac{\nabla g(x^*)^T \sigma_X A}{[\nabla g(x^*)^T C_X \nabla g(x^*)]^{\frac{1}{2}}} \cdot A^{-1}\{0, \cdots, 0, -\frac{1}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \cdots, 0\}^T \\ &= \frac{1}{[\nabla g(x^*)^T C_X \nabla g(x^*)]^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial g(x^*)}{\partial X_i} \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} &= -\frac{\nabla g(\bar{x})^T \sigma_x A}{[\nabla g(\bar{x})^T C_x \nabla g(\bar{x})]^{\frac{1}{2}}} \cdot A^{-1} \{0, \dots, 0, -\frac{X_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \dots, 0\}^T \\ &= \frac{1}{[\nabla g(\bar{x})^T C_x \nabla g(\bar{x})]^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial g(\bar{x})}{\partial X_i} \frac{\bar{x}_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} = \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \frac{\bar{x}_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}\end{aligned}\quad (7.2.14)$$

### 7.2.2 可靠指标对极限状态方程参数的敏感性分析

由文献[214, 61]知：在  $\mathbf{Y}$  空间中

$$\frac{\partial \beta}{\partial Y_i} = \frac{1}{\|\nabla G(\bar{y})\|} \frac{\partial G(\bar{y})}{\partial Y_i} \quad (7.2.15)$$

又因在  $\mathbf{X}$  空间中

$$\frac{\partial \beta}{\partial X_i} = \left\{ \frac{\partial Y_1}{\partial X_i}, \frac{\partial Y_2}{\partial X_i}, \dots, \frac{\partial Y_n}{\partial X_i} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial Y_1}, \frac{\partial \beta}{\partial Y_2}, \dots, \frac{\partial \beta}{\partial Y_n} \right\}^T \quad (7.2.16)$$

$$\text{即 } \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1}, \frac{\partial Y_2}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial Y_n}{\partial X_1} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial X_2}, \frac{\partial Y_2}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial Y_n}{\partial X_2} \\ \dots \\ \frac{\partial Y_1}{\partial X_n}, \frac{\partial Y_2}{\partial X_n}, \dots, \frac{\partial Y_n}{\partial X_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial Y_1} \\ \frac{\partial \beta}{\partial Y_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \beta}{\partial Y_n} \end{pmatrix} = J_{XY} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial Y_1}, \frac{\partial \beta}{\partial Y_2}, \dots, \frac{\partial \beta}{\partial Y_n} \right\}^T \quad (7.2.17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{X}} &= J_{XY}^{-1} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{Y}} = J_{XY}^{-1} \frac{1}{\|\nabla G(\bar{y})\|} \frac{\partial G(\bar{y})}{\partial \mathbf{Y}} \\ &\therefore = \frac{J_{XY}^{-1} J_{XY} \nabla g_x(\bar{x})}{[\nabla g(\bar{x})^T C_x \nabla g(\bar{x})]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{[\nabla g(\bar{x})^T C_x \nabla g(\bar{x})]^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}}\end{aligned}\quad (7.2.18)$$

$$\text{即 } \frac{\partial \beta}{\partial X_i} = \frac{1}{[\nabla g(\bar{x})^T C_x \nabla g(\bar{x})]^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial g(\bar{x})}{\partial X_i} \quad (7.2.19)$$

### 7.2.3 可靠指标对随机变量分布参数的相对敏感性分析

比较式 (7.3.13)、式 (7.3.19)，可见： $\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{\mathbf{X}}}$ ，亦即在随机变量的原始空间中，可靠指标对极限状态方程参数的敏感性与可靠指标对参数均值的敏感性本质相同。

此外，由式 (7.3.13)、式 (7.3.19) 可知：在原始空间中进行参数的可靠度分析，不需计算转换矩阵  $A$ ，计算更为简单。

但是，由于随机变量  $X_i$  的单位各不相同，因此式 (7.3.13)、式 (7.3.19) 并不能反映各参数对可靠指标敏感性的相对大小。故本文提出用  $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_{x_i}$  及  $\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} \sigma_{x_i}$  进行参数的相对敏感性分析，由式 (7.3.13)、式 (7.3.19) 可得其计算公式为：

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_{x_i} = \frac{1}{[\nabla g(\bar{x})^T C_x \nabla g(\bar{x})]^{1/2}} \frac{\partial g(\bar{x})}{\partial X_i} \sigma_{x_i} \quad (7.2.20)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} \sigma_{x_i} = \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} (\bar{x}_i - \mu_{x_i}) \quad (7.2.21)$$

注意到基本变量互为独立时,

$$C_x = \sigma_x \sigma_x \quad (7.2.22)$$

$$\begin{aligned} [\nabla g(\bar{x})^T C_x \nabla g(\bar{x})]^{\frac{1}{2}} &= [\nabla g(\bar{x})^T \sigma_x \sigma_x \nabla g(\bar{x})]^{\frac{1}{2}} = [\nabla g(\bar{x})^T (\sigma_x)^T \sigma_x \nabla g(\bar{x})]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(\sigma_x \nabla g(\bar{x}))^T \sigma_x \nabla g(\bar{x})]^{\frac{1}{2}} = \|\sigma_x \nabla g(\bar{x})\| \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (7.2.23)$$

因此

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_{x_i} = \frac{\frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{x_i}}{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = -\alpha_{x_i} \quad (7.2.24)$$

即  $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_{x_i}$  就是变量相关时的敏感性系数  $\alpha_{x_i}$  (相差一正负号)。因此, 本文公式是变量互为独立时敏感性分析公式的推广, 它的含义比敏感性系数  $\alpha_{x_i}$  更具有一般性。

### 7.3 算例分析

仍对上一章算例进行分析。由于上一章已得出在进行滑面可靠指标的计算中, 方法 3 最合理, 因此本章的计算是建立在方法 3 的基础上的。可靠度分析方法采用的是验算点法。

参照文献[239]中有关土工参数的变异系数资料, 本文假设参数  $c$ 、 $\varphi$ 、 $\psi$ 、 $\gamma$ 、 $E$ 、 $\mu$  的变异系数最大值分别为 0.3, 0.3, 0.3, 0.03, 0.3, 0.3。由于参数  $c$ 、 $\varphi$  间常为负相关的<sup>[236]</sup>, 本文假设  $c$ 、 $\varphi$  间相关系数  $\rho_{c\varphi}$  为 [-0.4, 0], 其它参数互相独立。

#### 7.3.1 变异系数 $\delta_x=(0.3, 0.3, 0.3, 0.03, 0.3, 0.3)^T$ 时的敏感性分析

为了分析有限元计算中各种参数对计算结果的影响, 首先取各参数的变异系数分别为其最大值, 即  $\delta_x=(0.3, 0.3, 0.3, 0.03, 0.3, 0.3)^T$ 。表 7.3-1、7.3-2、7.3-3 分别为不考虑参数的相关性、假设参数  $c$ 、 $\varphi$  间的相关系数  $\rho_{c\varphi}=-0.2$  及  $\rho_{c\varphi}=-0.4$  时的计算结果。

由计算结果可知:

1) 各参数由于单位不同,  $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}}$  和  $\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}}$  的值对各参数变化很大, 缺乏可比性; 相反,

本文提出的相对敏感性指标  $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_{x_i}$  及  $\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} \sigma_{x_i}$  则消除了参数单位的影响, 因而

能较好地反映各参数对可靠指标的相对影响大小。

2) 在各种相关系数的情况下, 都可由  $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_{x_i}$  及  $\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} \sigma_{x_i}$  值看出参数  $c$ 、 $\varphi$  对可靠指标的影响最大, 其余四个参数对可靠指标的影响非常小, 因此可以视  $\psi$ 、 $\gamma$ 、 $E$ 、 $\mu$  这四个参数为常数, 这将大大减少有限元计算的工作量。

表 7.3-1 可靠指标对参数的敏感性分析 ( $\rho_{\psi\varphi} = 0.0$ )

X	$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_{x_i}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} \sigma_{x_i}$
$c$	0.064	0.769	-0.063	-0.750
$\varphi$	6.097	0.638	-4.942	-0.517
$\psi$	0.066	0.007	-0.001	-0.000
$\gamma$	-0.048	-0.029	-0.002	-0.001
$E$	0.000	0.000	0.000	0.000
$\mu$	0.384	0.035	-0.017	-0.002

表 7.3-2 可靠指标对参数的敏感性分析 ( $\rho_{\psi\varphi} = -0.2$ )

X	$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_{x_i}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} \sigma_{x_i}$
$c$	0.071	0.8514	-0.0704	-0.8454
$\varphi$	6.886	0.7208	-5.3209	-0.5569
$\psi$	0.1564	0.0164	-0.0036	-0.0004
$\gamma$	-0.0381	-0.0229	-0.0012	-0.0007
$E$	0	-0.0053	0	0
$\mu$	0.1605	0.0144	-0.0033	-0.0003

表 7.3-3 可靠指标对参数的敏感性分析 ( $\rho_{\psi\varphi} = -0.4$ )

X	$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_{x_i}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} \sigma_{x_i}$
$c$	0.0881	1.0568	-0.1149	-1.3794
$\varphi$	6.377	0.6675	-2.5793	-0.27
$\psi$	0.2932	0.0307	-0.0149	-0.0016
$\gamma$	-0.042	-0.0252	-0.0017	-0.001
$E$	0	-0.004	0	0
$\mu$	0.2045	0.0184	-0.0062	-0.0006

注: 上述三种情况下 ( $\rho_{\psi\varphi} = 0, -0.2, -0.4$ ) 边坡的整体可靠指标分别为 1.27、1.40、1.65。

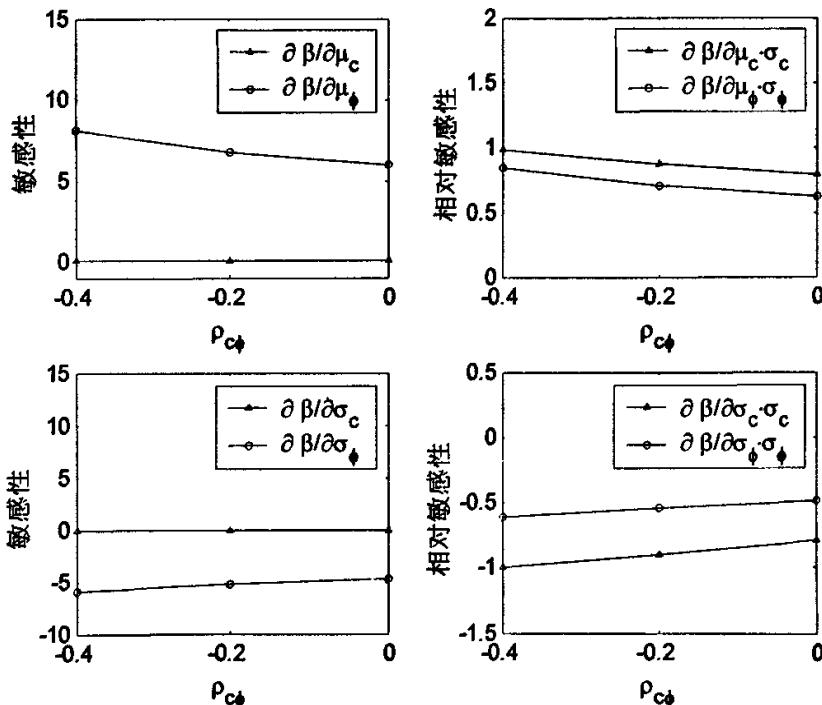
### 7.3.2 变异系数 $\delta_x=(0.3, 0.3, 0, 0, 0, 0)^T$ 时的敏感性分析

上述计算结果表明参数  $c$ 、 $\varphi$  对可靠指标的影响最大, 因此以下的计算只考虑参数  $c$ 、 $\varphi$  的变异性, 即假设  $\delta_x=(0.3, 0.3, 0, 0, 0, 0)^T$ 。它与上述情况下的可靠指标计算结果之比较如表 7.3-4

及图 7.3-1 所示。

表 7.3-4 不同基本变量时的可靠指标

基本变量	相关系数 $\rho_{c\phi}$		
	$\rho_{c\phi} = 0$	$\rho_{c\phi} = -0.2$	$\rho_{c\phi} = -0.4$
$c, \varphi, \psi, \gamma, E, \mu$	1.27	1.40	1.65
$c, \varphi$	1.27	1.41	1.62

图 7.3-1 参数的敏感性与相关系数  $\rho_{c\phi}$  关系图

由表 7.3-4 可知：可靠指标的计算结果印证了本文的敏感性分析结果，即：视所有参数为基本变量与只视参数  $c, \varphi$  为基本变量时的可靠指标基本一致，也即参数  $c, \varphi$  对可靠指标的影响最大而其它参数的影响可以忽略不计。由表 7.3-4 还可以看出，随着参数间负相关性的增加，两种情况下计算结果的差异也呈小幅增加趋势。这也从另一个侧面说明，随着参数间负相关性的增加，各参数对可靠指标的影响也相应增加。这与图 7.3-1 的敏感性分析结果也是一致的。

图 7.3-1 表示的是只考虑参数  $c, \varphi$  的变异性时二者对可靠指标的敏感性分析结果。由该图可更直观地看出用  $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_x}$  及  $\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_x}$  表示参数的敏感性是不合适的。如：由左上图可看出  $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_c}$  远远小于  $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_\phi}$ ，但就相对敏感性而言，本题的  $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_c} \sigma_c$  反而大于  $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_\phi} \sigma_\phi$ ，即参数  $c$  的均值对可靠

指标的影响比参数  $\varphi$  的影响稍大。参数的均方差对可靠指标的影响也有类似的规律。

### 7.3.3 变异系数 $\delta_x = (0.3, 0.3, 0, 0, 0, 0)^T$ 时的一阶可靠性分析

上面已分析了各参数对可靠指标的相对影响大小，并指出在可靠度分析中，为了节省计算工作量，可只取参数  $c$ 、 $\varphi$  为基本变量。因此，下面只讨论考虑参数  $c$ 、 $\varphi$  为基本变量时的一阶可靠性分析。

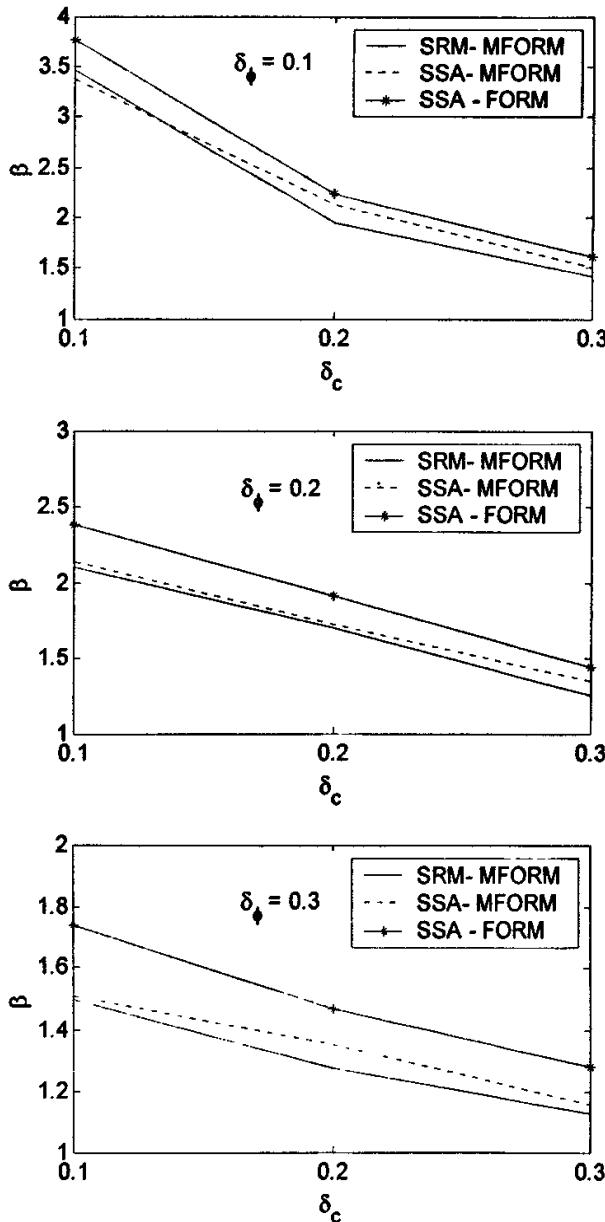


图 7.3-2 可靠指标与变异系数的关系（方法 3）

图 7.3-2 表示的是只考虑参数  $c$ 、 $\varphi$  为基本变量且二者相互独立时的可靠指标计算结果。其中，基于滑面应力分析法（SSA）的可靠指标是按上一章的方法 3 求解的。为了进行对比，

图中也列出了基于(SRM)的相应结果(中心点法)。可见,基于SSA与基于SRM的中心点法可靠度分析结果基本一致,而基于SSA的验算点法可靠指标比相应的中心点法的计算结果稍大。因此,中心点法的计算结果偏于安全。

### 7.3.4 结论

本文推导了基本变量相关时在原始空间中求解可靠指标对参数敏感性的计算公式,其优点是无需求解转换矩阵,计算更加简单直接。公式表明,在随机变量的原始空间中,可靠指标对参数均值的敏感性 $\partial\beta/\partial\mu_x$ 与可靠指标对极限状态方程参数的敏感性 $\partial\beta/\partial X$ 本质相同。

考虑到基本变量的单位不同,指出由于随机变量 $X_i$ 的单位各不相同,用 $\partial\beta/\partial\mu_x$ 和 $\partial\beta/\partial\sigma_x$ 并不能反映各参数对可靠指标敏感性的相对大小,提出用 $\frac{\partial\beta}{\partial\mu_{X_i}}\sigma_{x_i}$ 及 $\frac{\partial\beta}{\partial\sigma_{X_i}}\sigma_{x_i}$ 进行参数的相对敏感性分析,推导了其计算公式。算例分析表明:在进行边坡稳定的可靠度分析中,参数 $c$ 、 $\varphi$ 对可靠指标的相对影响比其它参数的影响要大得多;随着参数 $c$ 、 $\varphi$ 间负相关系数的增加,它们对可靠指标的影响也相应增加。

## 8 边坡稳定的弹塑性大变形有限元可靠度分析

### 8.1 大变形情况下应力和应变的度量

#### 8.1.1 非线性问题的分类

前述各章讨论的非线性问题都是由材料的应力-应变的非线性关系而产生，称为材料非线性问题。这类非线性问题采用的是小变形假设，即假定物体所发生的位移远远小于物体自身的几何尺度，应变远小于1。在此前提下，建立物体或微元体的平衡条件时可以不考虑物体的位置和形状的变化，因此分析中不必区分变形前和变形后的位形。同时，在加载和变形过程中的应变可用一阶无穷小的线性应变进行度量。也即在材料非线性问题中，平衡方程和几何方程都是线性的，只有材料的本构方程才是非线性的。

实际上，当材料的变形很大时，必须考虑变形对平衡的影响，即平衡条件应建立在变形后的位形上，同时应变表达式也应包括位移的二次项。因此，平衡方程和几何方程都将是非线性的。这种由于大位移引起的非线性问题称为几何非线性问题，又称为有限变形非线性问题。它又可以分为两类，一类是大位移小应变非线性问题，其特点是线元的位移和转动充分大，但线元的伸长和线元间角度改变无限小。另一类是大位移大应变非线性问题，其特点是线元的伸长应变和线元间的转角也充分大；此时，应力应变关系也是非线性的，因此是混合非线性问题。

#### 8.1.2 物体运动的描述

在大变形情况下，由于物体的变形很大，必须考虑物体变形前后所在空间位置的改变。通常称某一时刻物体在空间占据的区域  $V$  为物体的位形。称  $t=0$  时刻物体的位形  $V_0$  为初始位形，称当前时刻  $t$  物体的位形为现时位形<sup>[223-227]</sup>。

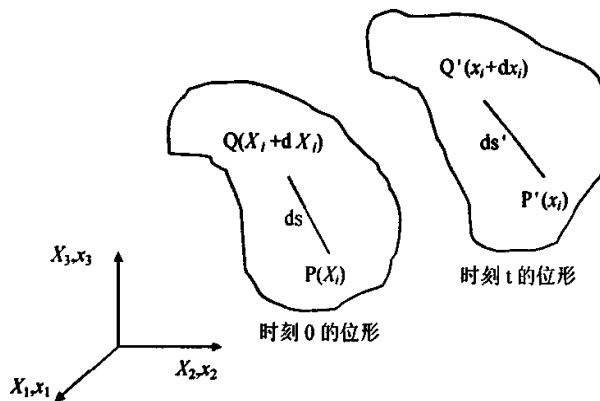


图 8.1-1 直角坐标系内物体的运动和变形

考虑一固定的空间直角坐标系内的物体，它在某种外力的作用下连续地改变其位形，如

图 8.1-1 所示。图中有两个坐标系:  $X_i$  用来表示物体原来的未变形的位形,  $x_i$  用来表示物体变形后的位形。为简便起见,  $X_i$  和  $x_i$  的坐标原点是重合的。

设在初始时刻  $t=0$ , 某质点的坐标为  $X_i (i=1,2,3)$ , 则在时刻  $t$ , 这个质点在空间的位置可用如下的数学变换方程来表示 (张量记法):

$$x_i = x_i(X_j, t) \quad (i=1,2,3; j=1,2,3) \quad (8.1.1)$$

根据变形的连续性要求, 这种变换必须是一一对应的, 因此上述变换必须有唯一的逆变换, 也即存在下列单值连续的逆变换:

$$X_i = X_i(x_j, t) \quad (i=1,2,3; j=1,2,3) \quad (8.1.2)$$

注意到式(8.1.1)和式(8.1.2)采用的变量不同, 也就是描述物体位形时采用的基准不同。式(8.1.1)以未变形的位形  $V_0$  为基准, 用初始时刻质点的坐标  $X_i$  和时间  $t$  来描述物体的运动和变形。这种借助于运动着的具体物质点来描述运动和变形的方法称为物质描述(material description)或拉格朗日(Lagrangian)描述, 称  $X_i$  为物质坐标, 称  $X_i$  和  $t$  为拉格朗日变量。式(8.1.2)以变形后的位形  $V$  为基准, 用现时位形中质点的坐标  $x_i$  和时间  $t$  来描述物体的运动和变形, 这种描述方法称为空间描述(spatial description)或欧拉(Euler)描述, 称  $x_i$  为空间坐标, 称  $x_i$  和  $t$  为欧拉变量。

### 8.1.3 应变的度量——格林应变、阿尔曼西应变、柯西应变

下面分析图 8.1-1 中 P、Q 两点间长度的变化, 即变形的度量。因为

$$ds^2 = dX_i dX_i, \quad (ds')^2 = dx_i dx_i$$

所以, 长度的变化可定义为

$$\begin{aligned} (ds')^2 - (ds)^2 &= dx_i dx_i - dX_i dX_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_i}{\partial X_n} dX_m dX_n - dX_i dX_i \\ &= \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j = 2E_{ij} dX_i dX_j \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

$$\begin{aligned} (ds')^2 - (ds)^2 &= dx_i dx_i - dX_i dX_i = dx_i dx_i - \frac{\partial X_i}{\partial x_m} \frac{\partial X_i}{\partial x_n} dx_m dx_n \\ &= (\delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}) dx_i dx_j = 2e_{ij} dx_i dx_j \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

由此可得应变的两种定义, 分别为

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \quad (8.1.5)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \quad (8.1.6)$$

式中,  $E_{ij}$  是以原始长度的平方为基准定义的, 称为格林(Green)应变, 又叫做 Green-Lagrangian 应变;  $e_{ij}$  是以变形后长度的平方为基准定义的, 称为阿尔曼西(Almansi)应变, 又称为 Euler-Almansi 应变。可以证明, 格林应变和阿尔曼西应变都是二阶对称张量。

由于位移与坐标间有如下的关系式

$$u_i = x_i - X_i \quad (8.1.7)$$

于是,

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij}, \quad \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (8.1.8)$$

代入式(8.1.5)、(8.1.6), 得

$$E_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_i} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \quad (8.1.9)$$

$$e_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (8.1.10)$$

可以证明, 在微小变形的场合,  $\partial/\partial X_i = \partial/\partial x_i$ , 此式意味着在微小变形条件下, 不需区别质点在现时位形中的坐标  $x_i$  和在初始位形中的坐标  $X_i$ 。此时式(8.1.9)或式(8.1.10)中非线性乘积项相对线性项很小, 可以忽略不计, 则格林应变和阿尔曼西应变就退化为弹性力学中常用的柯西(Cauchy)应变  $\varepsilon_{ij}$ :

$$E_{ij} = e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8.1.11)$$

#### 8.1.4 应力的度量——柯西应力、拉格朗日应力、克希霍夫应力

应力的定义与建立物体的平衡方程和描述材料的本构关系有关。在大变形问题中, 变形前后的位形出现了重大差异, 以变形前后的位形来建立物体的平衡条件将会完全不同。因此, 以何种位形建立平衡方程就应该有与该位形相适应的应力的定义。

线弹性力学中定义的应力是柯西(Cauchy)应力, 亦称欧拉(Euler)应力, 即通常的工程应力, 它是在变形后的物体上定义的, 一般用  $\tau_{ij}$  表示。如果变形充分小, 则此定义与在变形前物体上的定义结果差别很小, 可以看作是一致的。在大变形情况下, 由于常用定义在未变形的位形上的格林应变  $E_{ij}$ , 因此需重新定义一个与之相适应的应力。

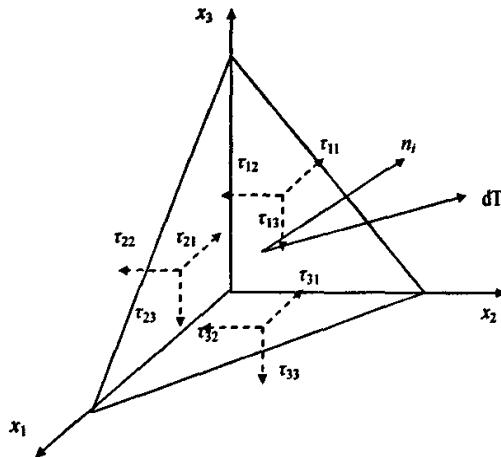


图 8.1-2 斜截面上的应力矢量

如图 8.1-2 所示, 它表示物体中任一点 P 在变形后的微元四面体的平衡, 其中三个面平行

于坐标面。设变形后斜截面的面积为  $dA$ , 单位法线矢量为  $n_i$ , 作用在该面元上的力为  $dT_i = t_i^{(n)} dA$ 。由四体的平衡条件可得

$$t_i^{(n)} = \tau_y n_j \quad (8.1.12)$$

式中,  $\tau_y$  是柯西应力。仿此定义, 假定未变形的 P 点处四面体处于平衡, 则也应有

$$t_i^{(0(n))} = T_y N_j \quad (8.1.13)$$

上式中  $T_y$  称为拉格朗日 (Lagrangian) 应力张量, 或称为第一类皮奥拉-克希霍夫 (Piola-Kirchhoff) 应力张量。 $N_j$  是变形前四面体斜面  $dA^0$  的单位法向矢量。

令变形前后上述两种定义产生的合力相等, 即令

$$dT_i = \tau_y n_j dA = T_y N_j dA^0$$

则利用初始位形和现时位形中物质面元的关系式, 可以得到柯西应力和拉格朗日应力之间的变换关系为

$$T_y = J \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right| \tau_{jk} \quad (8.1.14)$$

由上式可知拉格朗日应力是不对称的, 因此在应用中存在一些不便。为了便于应用, 可对上式进行变形, 即将上式两边同乘以变形梯度  $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ , 并适当地更换指标, 可得

$$S_{lm} = \frac{\partial X_l}{\partial x_i} T_{im} = J \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_m}{\partial x_j} \right| \tau_y \quad (8.1.15)$$

上式中的  $S_{lm}$  即为克希霍夫 (Kirchhoff) 应力张量, 也称为第二类皮奥拉-克希霍夫 (Piola-Kirchhoff) 应力张量。显然, 它是对称的。还可以证明, 克希霍夫应力具有“刚体运动物体的应力不变性及与格林应变是能量共轭的”的特点<sup>[224]</sup>, 因此, 它在几何非线性问题中得到了广泛的应用。

## 8.2 有限变形的虚功方程

### 8.2.1 一般形式的虚功方程

弹性力学中的虚功方程是以积分形式表达的物体平衡条件。如果物体在当前位形是处于平衡的, 则物体由于约束允许的虚位移所产生的虚形变能等于外力虚功, 即

$$\int_V \tau_y \delta \varepsilon_y dV = \int_V p_i \delta u_i dV + \int_A q_i \delta u_i dA \quad (8.2.1)$$

式中,  $\tau_y$  是现时位形中的柯西应力 (欧拉应力),  $\delta \varepsilon_y$  是相应的无限小应变  $\varepsilon_y$  的变分,  $\delta u_i$  是现时位移分量  $u_i$  的变分,  $p_i$ 、 $q_i$  分别是现时位形的、并在同一位形中度量的作用在体积  $V$  内的体力和作用在边界  $A$  上的面力。

对于有限变形问题, 同样可以经过应力和积分域的变换, 将上述在当前位形上写出的虚功方程转化为以初始位形为参考且对于有限变形也适用的形式, 即

$$\int_{V_0} S_{lm} \delta E_{lm} dV_0 = \int_{V_0} p_{0i} \delta u_i dV_0 + \int_{A_0} q_{0i} \delta u_i dA_0 \quad (8.2.2)$$

式中,  $S_{lm}$  是现时位形中的克希霍夫应力,  $\delta E_{lm}$  是相应的格林应变  $E_{lm}$  的变分,  $\delta u_i$  是现时位移分

量  $u_i$  的变分,  $p_{0i}$ 、 $q_{0i}$  分别是现时位形中的作用在体积  $V$  内的体力和作用在边界  $A$  上的面力。与式(8.2.1)不同的是, 它们均是在参考位形中度量的。

### 8.2.2 大变形问题的增量解法——TL 法和 UL 法

式(8.2.2)是一般形式的虚功方程。但是, 式(8.2.2)不能直接用于求解, 因为它所参考的现时位形是未知的。为了得到解答, 所有的变量应参考一个已经求得的平衡位形。常用的有以下两种方法:

表 8.2-1 TL 法和 UL 法的状态量

状态量	位形	TL 法		UL 法
		$t = 0 (X_0, V_0, A_0)$	$t = t (x_t, V, A)$	$t = t (x_t, V, A)$
位移	$t$ 时刻	$u_i = x_i - X_i$		$u_i = \sum (\Delta u_i)$
	$t + \Delta t$ 时刻	$\bar{u}_i = \bar{x}_i - \bar{X}_i$		$\bar{u}_i = \bar{x}_i - \bar{X}_i$
	增量	$\Delta u_i = \bar{u}_i - u_i = \bar{x}_i - x_i$		$\Delta u_i = \bar{u}_i$
应变	$t$ 时刻		$E_y$	$e_y = \sum (\Delta E_y)$
	$t + \Delta t$ 时刻	$\bar{E}_y = E_y + \Delta E_y$		$\bar{E}_y = e_y + \Delta E_y$
应力	$t$ 时刻		$S_y$	$\tau_y = \sum (\Delta S_y)$
	$t + \Delta t$ 时刻	$\bar{S}_y = S_y + \Delta S_y$		$\bar{S}_y = \tau_y + \Delta S_y$

- 1) 全拉格朗日法 (Total Lagrangian 法, 简称 TL 法): 所有变量以时刻  $t=0$  的位形作为参考位形; 即以  $t=0$  的位形为基准, 利用求得的  $t$  时刻的状态量求解  $t+\Delta t$  时刻的状态量。
- 2) 更新的拉格朗日法 (Updated Lagrangian 法, 简称 UL 法): 所有变量以时刻  $t$  的位形作为参考位形; 即以  $t$  时刻的位形为基准去求  $t+\Delta t$  时刻的状态量。这种情况下, 只要求出了位移增量, 就可得到  $t+\Delta t$  时刻的位移。

为了清楚起见, 将 TL 法和 UL 法的基本力学量和几何量用表 8.2-1 表示, 以便进行对比分析。表中,  $t+\Delta t$  时刻的状态量用上加横线表示。

### 8.2.3 TL 法的虚功方程

利用前述一般形式的有限变形的虚功方程式(8.2-2), 结合 TL 法中对状态量的记法, 可以将  $t+\Delta t$  时刻的平衡方程写为:

$$\int_{V_0} \bar{S}_{lm} \delta \bar{E}_{lm} dV_0 = \int_{V_0} \bar{p}_{0l} \delta \bar{u}_l dV_0 + \int_{A_0} \bar{q}_{0l} \delta \bar{u}_l dA_0 \quad (8.2.3)$$

式中, 克希霍夫应力  $\bar{S}_{lm}$ 、格林应变  $\bar{E}_{lm}$ 、荷载  $\bar{p}_{0l}$  和  $\bar{q}_{0l}$ 、位移  $\bar{u}_l$  均为  $t+\Delta t$  时刻的量, 它们是以  $t$  时刻的位形为参考位形表述的。将它们写成以  $t$  时刻状态量表示的增量形式:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{lm} &= S_{lm} + \Delta S_{lm}, \quad \bar{E}_{lm} = E_{lm} + \Delta E_{lm}, \\ \bar{p}_{0l} &= p_{0l} + \Delta p_{0l}, \quad \bar{q}_{0l} = q_{0l} + \Delta q_{0l}, \quad \bar{u}_l = u_l + \Delta u_l \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

再将式(8.2.4)代入式(8.2.3), 并注意到

$$\delta(\bar{E}_{lm}) = \delta(E_{lm} + \Delta E_{lm}) = \delta(\Delta E_{lm}) \quad (8.2.5)$$

$$\delta(\bar{u}_l) = \delta(u_l + \Delta u_l) = \delta(\Delta u_l) \quad (8.2.6)$$

可得

$$\int_{V_0} (S_{lm} + \Delta S_{lm}) \delta(\Delta E_{lm}) dV_0 = \int_{V_0} (p_{0l} + \Delta p_{0l}) \delta(\Delta u_l) dV_0 + \int_{A_0} (q_{0l} + \Delta q_{0l}) \delta(\Delta u_l) dA_0 \quad (8.2.7)$$

上式即以增量形式表达 TL 法的虚功方程。

### 8.2.4 UL 法的虚功方程

同理，利用前述一般形式的有限变形的虚功方程，结合 UL 法中对状态量的记法，可以将  $t+\Delta t$  时刻的平衡方程写为：

$$\int_{V_t} \bar{S}_{lm} \delta \bar{E}_{lm} dV_t = \int_{V_t} \bar{p}_u \delta \bar{u}_l dV_t + \int_{A_t} \bar{q}_u \delta \bar{u}_l dA_t \quad (8.2.8)$$

与 TL 法不同的是，式中  $t+\Delta t$  时刻的克希霍夫应力  $\bar{S}_{lm}$ 、格林应变  $\bar{E}_{lm}$ 、荷载  $\bar{p}_u$  和  $\bar{q}_u$ 、位移  $\bar{u}_l$  均是以  $t$  时刻的位形为参考位形表述的。于是写成以  $t$  时刻状态量表示的增量形式，得

$$\begin{aligned} \bar{S}_{lm} &= S_{lm} + \Delta S_{lm} = \tau_{lm} + \Delta S_{lm}, \quad \bar{E}_{lm} = E_{lm} + \Delta E_{lm} = e_{lm} + \Delta E_{lm}, \\ \bar{p}_u &= p_u + \Delta p_u, \quad \bar{q}_u = q_u + \Delta q_u, \quad \bar{u}_l = \Delta u_l \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

式中， $\tau_{lm}$  为  $t$  时刻的欧拉应力矢量， $e_{lm}$  为  $t$  时刻的阿尔曼西应变矢量。

将式(8.2.5)、(8.2.6)、(8.2.9)代入式(8.2.8)，可得

$$\int_{V_t} (\tau_{lm} + \Delta S_{lm}) \delta(\Delta E_{lm}) dV_t = \int_{V_t} (p_u + \Delta p_u) \delta(\Delta u_l) dV_t + \int_{A_t} (q_u + \Delta q_u) \delta(\Delta u_l) dA_t \quad (8.2.10)$$

上式即以增量形式表达 UL 法的虚功方程。

## 8.3 大变形问题的有限元求解格式

### 8.3.1 TL 法的求解格式

前面以张量记号形式进行了公式推导。在有限元计算中，为编程方便，宜将上述式子改写成矩阵形式。下面以三维问题的等参元为例进行分析。

#### 8.3.1.1 单元定义

采用等参元的概念，单元的位形可以用形函数矩阵定义为

$$t=0 \text{ 时刻: } \mathbf{X} = \mathbf{N} \mathbf{X}^e \quad (8.3.1a)$$

$$t=t \text{ 时刻: } \mathbf{x} = \mathbf{N} \mathbf{x}^e \quad (8.3.1b)$$

$$t=t+\Delta t \text{ 时刻: } \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{N} \bar{\mathbf{x}}^e \quad (8.3.1c)$$

式中  $\mathbf{X}^e$ 、 $\mathbf{x}^e$ 、 $\bar{\mathbf{x}}^e$  分别表示在  $t=0$  时刻、 $t=t$  时刻、 $t=t+\Delta t$  时刻的单元结点坐标， $\mathbf{N}$  为形函数矩阵，设单元结点数为  $nod$ ，单元中第  $i$  结点的形函数值为  $N_i$ ，则

$$\mathbf{X} = \{X_1 \ Y_1 \ Z_1 \ X_2 \ Y_2 \ Z_2 \ \dots \ X_{nod} \ Y_{nod} \ Z_{nod}\}^T$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \mathbf{I} \ N_2 \mathbf{I} \ \dots \ N_{nod} \mathbf{I}]$$

式中为  $\mathbf{I}$  为  $3 \times 3$  的单位矩阵,  $N_i$  为结点的形函数。类似地, 单元的位移也有如上定义。记任意物质点的位移矢量为  $\mathbf{u} = \{u \ v \ w\}^T$ , 则

$$t=t \text{ 时刻: } \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d}^e \quad (8.3.2a)$$

$$t=t+\Delta t \text{ 时刻: } \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{N}} \bar{\mathbf{d}}^e \quad (8.3.2b)$$

$$t \text{ 时刻到 } t+\Delta t \text{ 时刻的位移增量: } \Delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{d}^e \quad (8.3.2c)$$

式中,  $\mathbf{d}^e$ 、 $\bar{\mathbf{d}}^e$  分别表示在  $t=t$  时刻、 $t=t+\Delta t$  时刻的单元结点位移,  $\Delta \mathbf{d}^e$  表示该时段内单元结点位移的增量, 其中,  $\mathbf{d}^e = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_{nod} \ v_{nod} \ w_{nod}\}^T$ 。

### 8.3.1.2 应变的矩阵表示

在几何非线性分析中, 常用未变形的位形为基准, 即常采用格林应变定义式。此时, 若记应变的线性部分和非线性部分分别为  $\varepsilon_y$  和  $\eta_y$ , 则

$$E_y = \varepsilon_y + \eta_y \quad (8.3.3)$$

写成矩阵形式, 即

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\eta} \quad (8.3.4)$$

式中, 应变矢量  $\mathbf{E}$  为  $\mathbf{E} = [E_{11} \ E_{22} \ E_{33} \ 2E_{12} \ 2E_{23} \ 2E_{13}]^T$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  和  $\boldsymbol{\eta}$  分别应变的线性部分和非线性部分的矩阵形式。

根据前面推导出的格林应变的张量形式(8.1.9), 可得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}_N^T \mathbf{u} \quad (8.3.5)$$

式中,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{A}_N$  分别为矩阵大小为  $3 \times 6$  的线性和非线性算子矩阵, 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_N = \frac{1}{2} [\mathbf{P}_x \ \mathbf{P}_y \ \mathbf{P}_z] \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x & 0 & 0 & \mathbf{L}_y & 0 & \mathbf{L}_z \\ 0 & \mathbf{L}_y & 0 & \mathbf{L}_x & \mathbf{L}_z & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_z & 0 & \mathbf{L}_y & \mathbf{L}_x \end{bmatrix}$$

式中记号的含义是

$$\mathbf{P}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_x = \mathbf{P}_x \mathbf{u} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T, \quad \mathbf{L}_y = \mathbf{P}_y \mathbf{u} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T, \quad \mathbf{L}_z = \mathbf{P}_z \mathbf{u} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\}^T$$

若定义

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x & 0 & 0 & \mathbf{L}_y & 0 & \mathbf{L}_z \\ 0 & \mathbf{L}_y & 0 & \mathbf{L}_x & \mathbf{L}_z & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_z & 0 & \mathbf{L}_y & \mathbf{L}_x \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\theta} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x \\ \mathbf{L}_y \\ \mathbf{L}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \mathbf{u} \\ \mathbf{P}_y \mathbf{u} \\ \mathbf{P}_z \mathbf{u} \end{bmatrix} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\}^T \end{aligned}$$

则应变的非线性部分亦可表示为

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \boldsymbol{\theta} \quad (8.3.6)$$

式中  $\boldsymbol{\theta}$  称为位移梯度矢量。

引入有限元中位移矢量  $\mathbf{u}$  和单元结点位移矢量  $\mathbf{d}^e$  的关系式  $\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d}^e$ , 得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}^T \mathbf{N} \mathbf{d}^e \quad (8.3.7)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x \\ \mathbf{L}_y \\ \mathbf{L}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \mathbf{u} \\ \mathbf{P}_y \mathbf{u} \\ \mathbf{P}_z \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \mathbf{N} \\ \mathbf{P}_y \mathbf{N} \\ \mathbf{P}_z \mathbf{N} \end{bmatrix} \mathbf{d}^e = \mathbf{G} \mathbf{d}^e \quad (8.3.8)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \mathbf{G} \mathbf{d}^e \quad (8.3.9)$$

式中,  $\mathbf{G}$  是位移梯度矢量  $\boldsymbol{\theta}$  和单元结点位移矢量  $\mathbf{d}^e$  之间的转换矩阵;  $\mathbf{A}^T \mathbf{N}$  和  $\frac{1}{2} \mathbf{L} \mathbf{G}$  分别相当于线性和非线性位移转换矩阵。

### 8.3.1.3 应变增量的矩阵表示

由格林应变的张量形式表达式容易导出相应的应变增量的表达式为

$$\Delta E_y = \Delta \varepsilon_y + \Delta \eta_y \quad (8.3.10)$$

式中,

$$\Delta \varepsilon_y = [(\Delta E_y)_{L0} + (\Delta E_y)_{L1}] \quad (8.3.11)$$

$$\Delta \eta_y = (\Delta E_y)_N \quad (8.3.12)$$

$$(\Delta E_y)_{L0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} \right) \quad (8.3.13)$$

$$(\Delta E_y)_{L1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_i} \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) \quad (8.3.14)$$

$$(\Delta E_y)_N = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_i} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} \quad (8.3.15)$$

式中,  $\Delta \varepsilon_y$  是应变增量的线性部分, 它由  $(\Delta E_y)_{L0}$  和  $(\Delta E_y)_{L1}$  两部分组成, 前者是与位移增量

无关的线性部分，在形式上与小变形中的应变位移转换矩阵  $\mathbf{B}$  相同；后者与位移增量无关，但与前一步的位移有关，表示在增量应变的线性部分中的初位移效应。 $\Delta\eta_y$  是应变增量的非线性部分。

将它们改写成矩阵形式，得

$$\Delta\mathbf{E} = \Delta\boldsymbol{\epsilon} + \Delta\boldsymbol{\eta} \quad (8.3.16)$$

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon} = [(\Delta\mathbf{E})_{L0} + (\Delta\mathbf{E})_{L1}] \quad (8.3.17)$$

$$\Delta\boldsymbol{\eta} = (\Delta\mathbf{E})_N \quad (8.3.18)$$

式中，

$$(\Delta\mathbf{E})_{L0} = \mathbf{A}^T \mathbf{N} \Delta\mathbf{d}^\epsilon = \mathbf{B}_{L0} \Delta\mathbf{d}^\epsilon, \quad \mathbf{B}_{L0} = \mathbf{A}^T \mathbf{N} \quad (8.3.19)$$

$$(\Delta\mathbf{E})_{L1} = \mathbf{LG} \Delta\mathbf{d}^\epsilon = \mathbf{B}_{L1} \Delta\mathbf{d}^\epsilon, \quad \mathbf{B}_{L1} = \mathbf{LG} \quad (8.3.20)$$

$$(\Delta\mathbf{E})_N = \frac{1}{2} \Delta\mathbf{LG} \Delta\mathbf{d}^\epsilon = \bar{\mathbf{B}}_N \Delta\mathbf{d}^\epsilon, \quad \bar{\mathbf{B}}_N = \frac{1}{2} \Delta\mathbf{LG} \quad (8.3.21)$$

将上述式子合并，得

$$\Delta\mathbf{E} = (\mathbf{A}^T \mathbf{N} + \mathbf{LG} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{LG}) \Delta\mathbf{d}^\epsilon = \bar{\mathbf{B}} \Delta\mathbf{d}^\epsilon, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1} + \bar{\mathbf{B}}_N \quad (8.3.22)$$

### 8.3.1.4 应变增量变分的矩阵表示

利用恒等关系

$$\delta\mathbf{L}\delta\theta = \mathbf{L}\delta(\Delta\theta), \delta(\Delta\mathbf{L})\delta\theta = \Delta\mathbf{L}\delta(\Delta\theta) \text{ 及 } \Delta\theta = \mathbf{G}\Delta\boldsymbol{\delta}^\epsilon$$

可得应变增量的变分

$$\begin{aligned} \delta\Delta\boldsymbol{\epsilon} &= \delta[(\mathbf{A}^T \mathbf{N} + \mathbf{LG}) \Delta\mathbf{d}^\epsilon] = (\mathbf{A}^T \mathbf{N} + \mathbf{LG}) \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon) \\ &= (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1}) \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon) \end{aligned} \quad (8.3.23)$$

$$\delta\Delta\boldsymbol{\eta} = \delta(\frac{1}{2} \Delta\mathbf{LG} \Delta\mathbf{d}^\epsilon) = (\Delta\mathbf{LG}) \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon) = \bar{\mathbf{B}}_N \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon) \quad (8.3.24)$$

因此，

$$\delta(\Delta\mathbf{E}) = \delta(\Delta\boldsymbol{\epsilon} + \Delta\boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1} + \bar{\mathbf{B}}_N) \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon) = \bar{\mathbf{B}} \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon) \quad (8.3.25)$$

上式中， $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1} + \bar{\mathbf{B}}_N$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_N = 2\bar{\mathbf{B}}_N = \Delta\mathbf{LG}$

### 8.3.1.5 平衡方程的线性化

将式(8.2.7)用张量形式表示的虚功方程改写成矩阵形式，得

$$\int_{V_0} \delta\Delta\mathbf{E}^T (\mathbf{S} + \Delta\mathbf{S}) dV_0 = \int_{V_0} \delta(\Delta\mathbf{u})^T (\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}_0) dV_0 + \int_{A_0} \delta(\Delta\mathbf{u})^T (\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}_0) dA_0 \quad (8.3.26)$$

考虑到

$$\delta(\Delta\mathbf{E}) = \bar{\mathbf{B}} \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon)$$

$$\delta(\Delta\mathbf{u}) = \delta(\mathbf{N} \Delta\mathbf{d}^\epsilon) = \mathbf{N} \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon)$$

得单元的平衡方程为

$$\int_{V_0} \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon)^T \bar{\mathbf{B}}^T (\mathbf{S} + \Delta\mathbf{S}) dV_0 = \int_{V_0} \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon)^T \mathbf{N}^T (\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}_0) dV_0 + \int_{A_0} \delta(\Delta\mathbf{d}^\epsilon)^T \mathbf{N}^T (\mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}_0) dA_0 \quad (8.3.27)$$

为简洁起见，此处省略了单元间相互作用引起的等效结点力。根据虚位移的任意性，再

经单元组集，可得离散系统的平衡方程为

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^T (\mathbf{S} + \Delta \mathbf{S}) dV_0 = \bar{\mathbf{R}} \quad (8.3.28)$$

式中， $\bar{\mathbf{R}} = \int_{V_0} \mathbf{N}^T (\mathbf{p}_0 + \Delta \mathbf{p}_0) dV_0 + \int_{A_0} \mathbf{N}^T (\mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}_0) dA_0 \quad (8.3.29)$

它是  $t + \Delta t$  时刻相对于 0 时刻的位形定义的荷载的等效结点力向量。

将  $\mathbf{B}$  的表达式代入上式，得

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{S} dV_0 + \int_{V_0} (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1})^T \mathbf{S} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}_N^T \mathbf{S} dV_0 = \bar{\mathbf{R}}$$

即  $\int_{V_0} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{S} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}_N^T \mathbf{S} dV_0 = \bar{\mathbf{R}} - \int_{V_0} (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1})^T \mathbf{S} dV_0 \quad (8.3.30)$

定义  $\int_{V_0} (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1})^T \mathbf{S} dV_0 = \mathbf{R} \quad (8.3.31)$

则  $\int_{V_0} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{S} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}_N^T \mathbf{S} dV_0 = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \quad (8.3.32)$

式中， $\mathbf{R}$  是  $t$  时刻的内力  $\mathbf{S}$  所产生的等效结点力向量； $\bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$  是不平衡力向量。  
若定义应力向量  $\mathbf{S}$ ：

$$\mathbf{S} = [S_{11} \ S_{22} \ S_{33} \ S_{12} \ S_{23} \ S_{13}]^T$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_N^T \mathbf{S} &= (\Delta \mathbf{L} \mathbf{G})^T \mathbf{S} = \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{L}^T \mathbf{S} = \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{L}_x & 0 & 0 & \Delta \mathbf{L}_y & 0 & \Delta \mathbf{L}_z \\ 0 & \Delta \mathbf{L}_y & 0 & \Delta \mathbf{L}_x & \Delta \mathbf{L}_z & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \mathbf{L}_z & 0 & \Delta \mathbf{L}_y & \Delta \mathbf{L}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{13} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} S_{11} \Delta \mathbf{L}_x + S_{12} \Delta \mathbf{L}_y + S_{13} \Delta \mathbf{L}_z \\ S_{12} \Delta \mathbf{L}_x + S_{22} \Delta \mathbf{L}_y + S_{23} \Delta \mathbf{L}_z \\ S_{13} \Delta \mathbf{L}_x + S_{23} \Delta \mathbf{L}_y + S_{33} \Delta \mathbf{L}_z \end{bmatrix} = \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} S_{11} \mathbf{I} & S_{12} \mathbf{I} & S_{13} \mathbf{I} \\ S_{21} \mathbf{I} & S_{22} \mathbf{I} & S_{23} \mathbf{I} \\ S_{31} \mathbf{I} & S_{32} \mathbf{I} & S_{33} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{L}_x \\ \Delta \mathbf{L}_y \\ \Delta \mathbf{L}_z \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{G}^T \mathbf{M} \Delta \boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} \Delta \boldsymbol{\delta}^e \end{aligned} \quad (8.3.33)$$

式中， $\mathbf{M}$  为应力矩阵， $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} S_{11} \mathbf{I} & S_{12} \mathbf{I} & S_{13} \mathbf{I} \\ S_{21} \mathbf{I} & S_{22} \mathbf{I} & S_{23} \mathbf{I} \\ S_{31} \mathbf{I} & S_{32} \mathbf{I} & S_{33} \mathbf{I} \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{I}$  为  $3 \times 3$  的单位矩阵。

令  $\mathbf{K}_S = \int_{V_0} \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} dV_0 \quad (8.3.34)$

代入式(8.3.32)并对单元进行组装，得

$$\int_{V_0} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{S} dV_0 + \mathbf{K}_S \Delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \quad (8.3.35)$$

为便于求解非线性方程组，将上式中的位移应变和应力应变增量关系线性化，即假设

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1} + \mathbf{B}_N \approx \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1} \quad (8.3.36)$$

$$\Delta S \approx \mathbf{D}_T \Delta \mathbf{E} = \mathbf{D}_T (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1} + \mathbf{B}_N) \Delta \delta^e \approx \mathbf{D}_T (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1}) \Delta \delta^e \quad (8.3.37)$$

则式(8.3.35)可写为

$$[\int_{V_0} (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1})^T \mathbf{D}_T (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{L1}) dV_0 + \mathbf{K}_S] \Delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \quad (8.3.38)$$

再令

$$\mathbf{K}_0 = \int_{V_0} \mathbf{B}_{L0}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_{L0} dV_0 \quad (8.3.39)$$

$$\mathbf{K}_L = \int_{V_0} \mathbf{B}_{L0}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_{L1} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}_{L1}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_{L0} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{B}_{L1}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_{L1} dV_0 \quad (8.3.40)$$

则上式变为

$$[\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_S] \Delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \quad (8.3.41)$$

即

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \quad (8.3.42)$$

其中

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_S \quad (8.3.43)$$

式中,  $\mathbf{K}_T$  为切线刚度矩阵, 它由三个部分组成:  $\mathbf{K}_0$  为小位移刚度矩阵;  $\mathbf{K}_L$  为初位移刚度矩阵(大变形刚度矩阵), 是由初位移引起的;  $\mathbf{K}_S$  为初应力刚度矩阵(几何刚度矩阵), 是由初应力引起的。

### 8.3.2 UL 法的求解格式

UL 法与 TL 法的基本原理相同, 主要区别是, UL 法以  $t$  时刻的位形为参考位形, 即其参考位形是不断地变化的。采用这一方法,  $[t, t+\Delta t]$  时段内的格林应变是相对于  $t$  时刻的状态定义的。因此,  $t+\Delta t$  时刻的位移量与  $[t, t+\Delta t]$  时段内的位移增量相同, 所以

$$\Delta E_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_j} \right) \quad (8.3.44)$$

类似地, 将其分解为线性部分和非线性部分之和, 得

$$\Delta E_y = \Delta \varepsilon_y + \Delta \eta_y \quad (8.3.45)$$

$$\Delta \varepsilon_y = (\Delta E_y)_{L0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8.3.46)$$

$$\Delta \eta_y = (\Delta E_y)_N = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_j} \quad (8.3.47)$$

写成矩阵形式:

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta \varepsilon + \Delta \eta \quad (8.3.48)$$

$$\Delta \varepsilon = (\Delta \mathbf{E})_{L0} = \mathbf{A}^T \mathbf{N} \Delta \mathbf{d}^e = \mathbf{B}_{L0} \Delta \mathbf{d}^e \quad (8.3.49)$$

$$\Delta \eta = (\Delta \mathbf{E})_N = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{L} \mathbf{G} \Delta \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{B}}_N \Delta \mathbf{d}^e \quad (8.3.50)$$

将上述式子合并, 即

$$\Delta \mathbf{E} = (\mathbf{A}^T \mathbf{N} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{L} \mathbf{G}) \Delta \mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{d}^e \quad (8.3.51)$$

式中  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_{L0} + \bar{\mathbf{B}}_N$ ,  $\mathbf{B}_{L0} = \mathbf{A}^T \mathbf{N}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_N = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{LG}$ .

对应变增量进行变分, 得

$$\delta \Delta \mathbf{e} = \delta [\mathbf{A}^T \mathbf{N} \Delta \mathbf{d}^e] = (\mathbf{A}^T \mathbf{N}) \delta (\Delta \mathbf{d}^e) = \mathbf{B}_{L0} \delta (\Delta \mathbf{d}^e) \quad (8.3.52)$$

$$\delta \Delta \eta = \delta \left( \frac{1}{2} \Delta \mathbf{LG} \Delta \mathbf{d}^e \right) = (\Delta \mathbf{LG}) \delta (\Delta \mathbf{d}^e) = \bar{\mathbf{B}}_N \delta (\Delta \mathbf{d}^e) \quad (8.3.53)$$

因此,

$$\delta (\Delta \mathbf{E}) = \delta (\Delta \mathbf{e} + \Delta \eta) = (\mathbf{B}_{L0} + \bar{\mathbf{B}}_N) \delta (\Delta \mathbf{d}^e) = \mathbf{B} \delta (\Delta \mathbf{d}^e) \quad (8.3.54)$$

式中  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{L0} + \bar{\mathbf{B}}_N$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_N = 2\bar{\mathbf{B}}_N = \Delta \mathbf{LG}$ .

可见, 与 TL 法相比, 这里的应变增量线性部分要比 TL 法的线性部分简单。UL 法中,  $\mathbf{B}_{L1} = 0$ .

将式(8.2.8)用张量形式表示的虚功方程改写成矩阵形式, 得

$$\int_{V_t} \delta \Delta \mathbf{E}^T (\tau + \Delta \mathbf{S}) dV_t = \int_{V_t} \delta (\Delta \mathbf{u})^T (\mathbf{p}_t + \Delta \mathbf{p}_t) dV_t + \int_A \delta (\Delta \mathbf{u})^T (\mathbf{q}_t + \Delta \mathbf{q}_t) dA_t \quad (8.3.55)$$

仿 TL 法的推导过程, 可得以切线刚度矩阵表达的增量平衡方程为

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \quad (8.3.56)$$

式中

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_S \quad (8.3.57)$$

$$\mathbf{K}_0 = \int_{V_t} \mathbf{B}_{L0}^T \mathbf{D}_T \mathbf{B}_{L0} dV_t \quad (8.3.58)$$

$$\mathbf{K}_S = \int_{V_t} \mathbf{G}^T \mathbf{M} \mathbf{G} dV_t \quad (8.3.59)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \int_{V_t} \mathbf{N}^T (\mathbf{p}_t + \Delta \mathbf{p}_t) dV_t + \int_A \mathbf{N}^T (\mathbf{q}_t + \Delta \mathbf{q}_t) dA_t \quad (8.3.60)$$

$$\mathbf{R} = \int_{V_t} \mathbf{B}_{L0}^T \boldsymbol{\tau} dV_t \quad (8.3.61)$$

式中,  $\bar{\mathbf{R}}$  是  $t+\Delta t$  时刻相对于  $t$  时刻的位形定义的荷载的等效结点力矢量,  $\mathbf{R}$  是  $t$  时刻的内力  $\boldsymbol{\tau}$  所产生的等效结点力向量,  $\bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$  是不平衡力向量。 $\boldsymbol{\tau}$  是应力矢量,

$$\boldsymbol{\tau} = \{\tau_{11} \ \tau_{22} \ \tau_{33} \ \tau_{12} \ \tau_{23} \ \tau_{13}\}^T, \ \mathbf{M} \text{ 是应力矩阵}, \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \tau_{11} \mathbf{I} & \tau_{12} \mathbf{I} & \tau_{13} \mathbf{I} \\ \tau_{21} \mathbf{I} & \tau_{22} \mathbf{I} & \tau_{23} \mathbf{I} \\ \tau_{31} \mathbf{I} & \tau_{32} \mathbf{I} & \tau_{33} \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

### 8.3.3 大变形非线性方程组的求解

由前面的推导过程可知, TL 法和 UL 法的增量平衡方程形式相同, 主要区别有两点, 一是 UL 法中应变增量的线性部分只有  $(\Delta \mathbf{E})_{L0}$  项, 而 TL 法中还有  $(\Delta \mathbf{E})_{L1}$  项; 二是虽然两种方法的各种状态量在形式上相同, 但它们的参考位形不同。

由于增量初应力法和增量初应变法对求解大变形问题没有优势, 因此一般用增量切线刚度法 (N-R 法或 mN-R 法) 求解大变形问题。

当采用 mN-R 法时, 对第  $k+1$  次荷载增量的第  $i+1$  次迭代 ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ;  $i=0, 1, \dots$ ), 迭代

公式可写为

$$(K_r)_{i+1}^{k+1} \Delta d_{i+1}^{k+1} = \bar{R}_{i+1}^{k+1} - R_i^{k+1} \quad (8.3.62)$$

$$d_i^{k+1} = d_i^{k+1} + \Delta d_{i+1}^{k+1} \quad (8.3.63)$$

式中,  $d_0^{k+1} = d^k$ 。

可见, 大变形几何非线性问题与一般的材料弹塑性非线性问题的主要区别是切线刚度矩阵表达式的不同。在一般的考虑材料弹塑性非线性程序的基础上, 加入考虑材料大变形性质的切线刚度矩阵的求解子程序后, 即可很方便地考虑材料的双重非线性问题。根据上述原理, 本文用 VISUAL FORTRAN 语言编写了相应的可靠度计算程序。

## 8.4 算例分析

### 8.4.1 算例

为了便于对比, 本文选用文献[150]之例 1 作为算例。该均质边坡高  $H=5$  m, 坡比  $V:H=1:2$ , 粘聚力  $c=10$  kPa, 内摩擦角  $\varphi=10^\circ$ , 容重  $\gamma=17.64$  kN/m<sup>3</sup>。原文用条分法进行了可靠度分析, 计算时取  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  为互相独立的正态变量。本文采用有限元进行相应的可靠度分析。按文[222]的建议, 本文取膨胀角  $\phi=\varphi=10^\circ$ , 弹性模量  $E=10^7$  Pa, 泊松比  $\mu=0.3$ 。

边坡剖面如图 8.4-1 所示。有限元计算采用 8 结点四边形网格, 共划分个 3645 结点, 1158 个单元。约束条件是底边界固定, 左右边界水平约束。土体采用 Mohr-Coulomb 理想弹塑性模型。

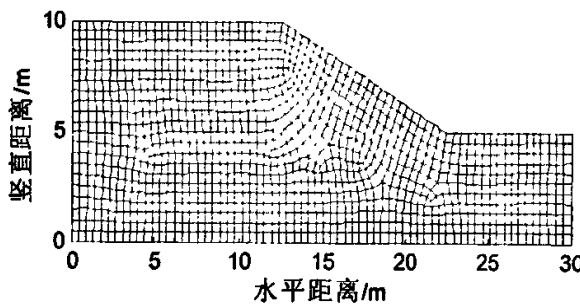
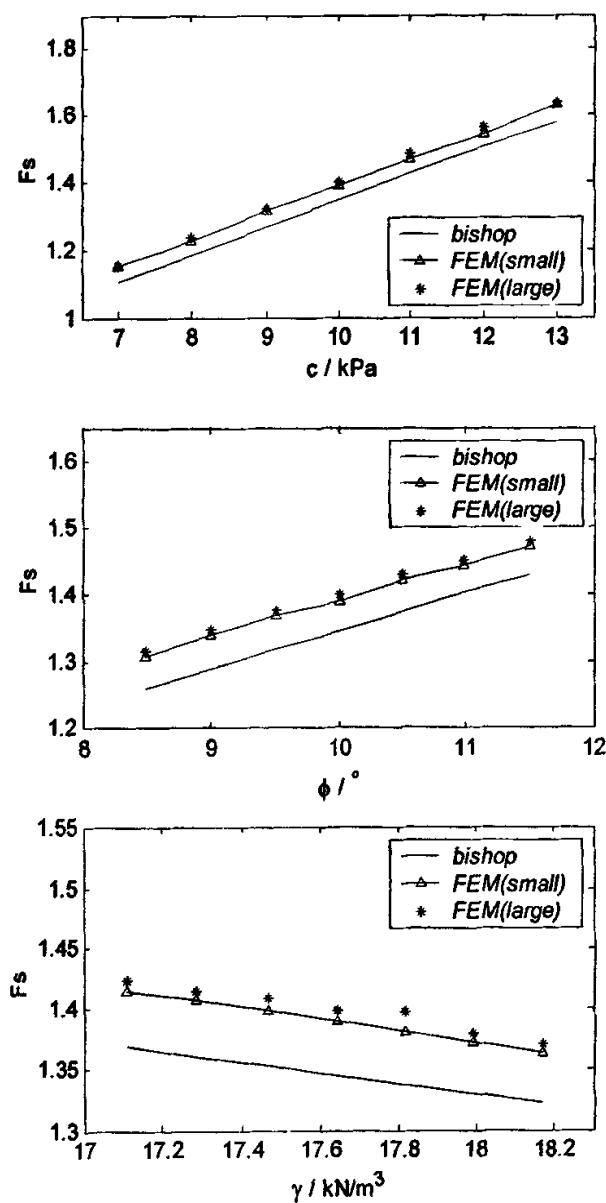


图 8.4-1 边坡剖面图

### 8.4.2 计算结果

文中按上述数据进行了基于强度折减的边坡稳定有限元可靠度分析, 可靠度分析方法为中心点法。为与原文进行比较, 文中取  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  的变异系数范围分别为  $\delta_c=0.1\sim0.3$ ,  $\delta_\varphi=0.05\sim0.15$ ,  $\delta_\gamma=0.01\sim0.03$ 。计算结果如图 8.4-2~8.4-4 所示。图 8.4-2 是安全系数与土工参数关系曲线; 图 8.4-3~4 是可靠指标与土工参数变异系数关系曲线, 其中图 8.4-3 采用的功能函数形式是  $Z=F_s-1$ , 图 8.4-4 采用的功能函数形式是  $Z=\ln F_s$ 。作为对比, 文中也计算了弹性模量  $E=10^7$  Pa 时的情况, 其计算结果如图 8.4-5~7 所示。

图 8.4-2 安全系数与土工参数关系曲线 ( $E=10^8 \text{ Pa}$ )

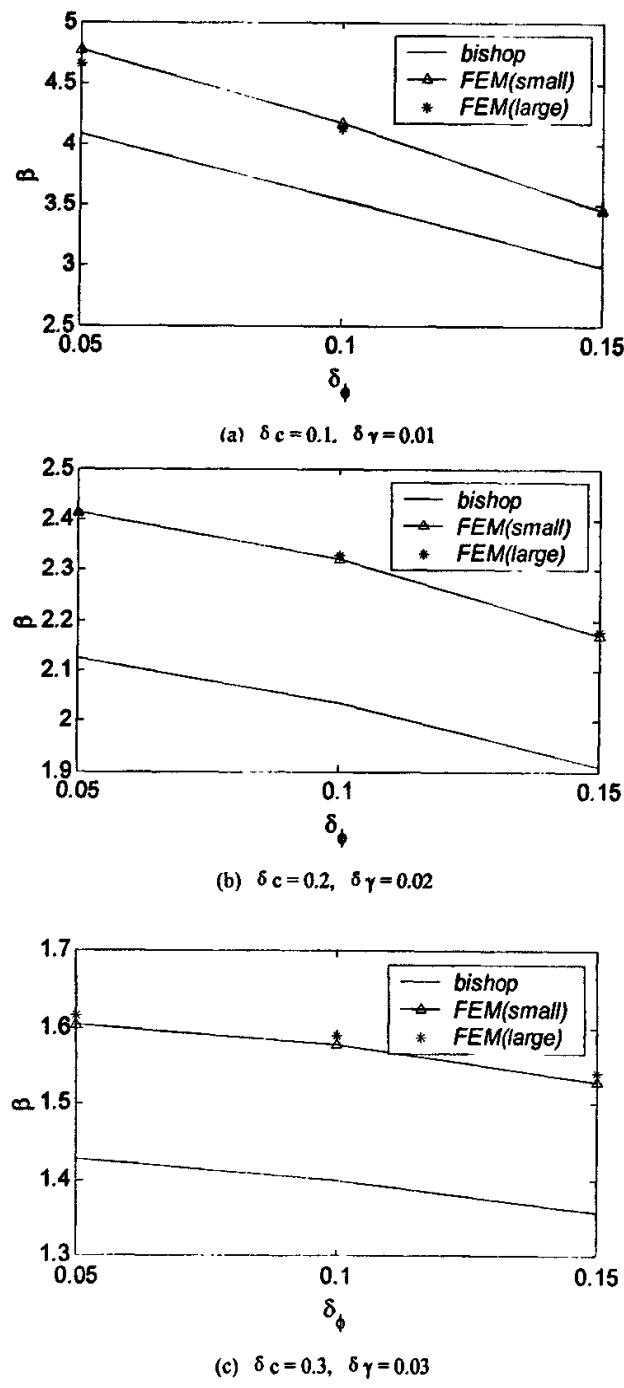
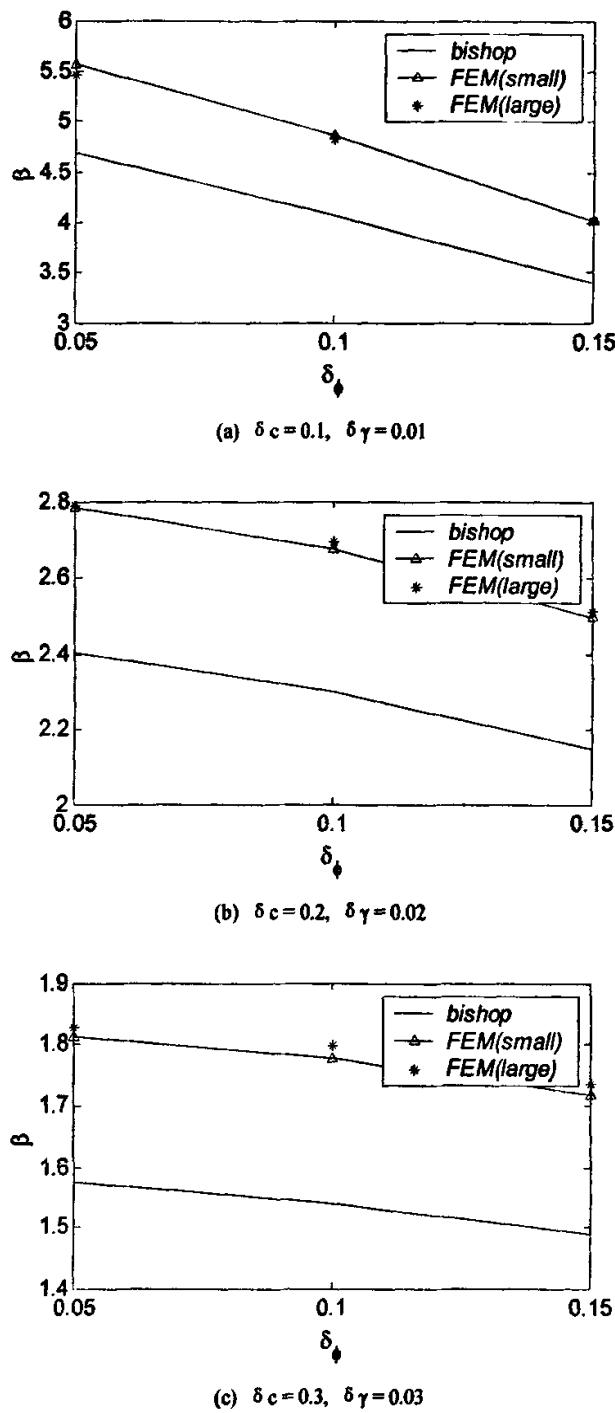


图 8.4-3 可靠指标与土工参数变异系数关系曲线 ( $E=10^8$ Pa,  $Z=F_s-1$ )

图 8.4-4 可靠指标与土工参数变异系数关系曲线 ( $E=10^8$ Pa,  $Z=\ln Fs$ )

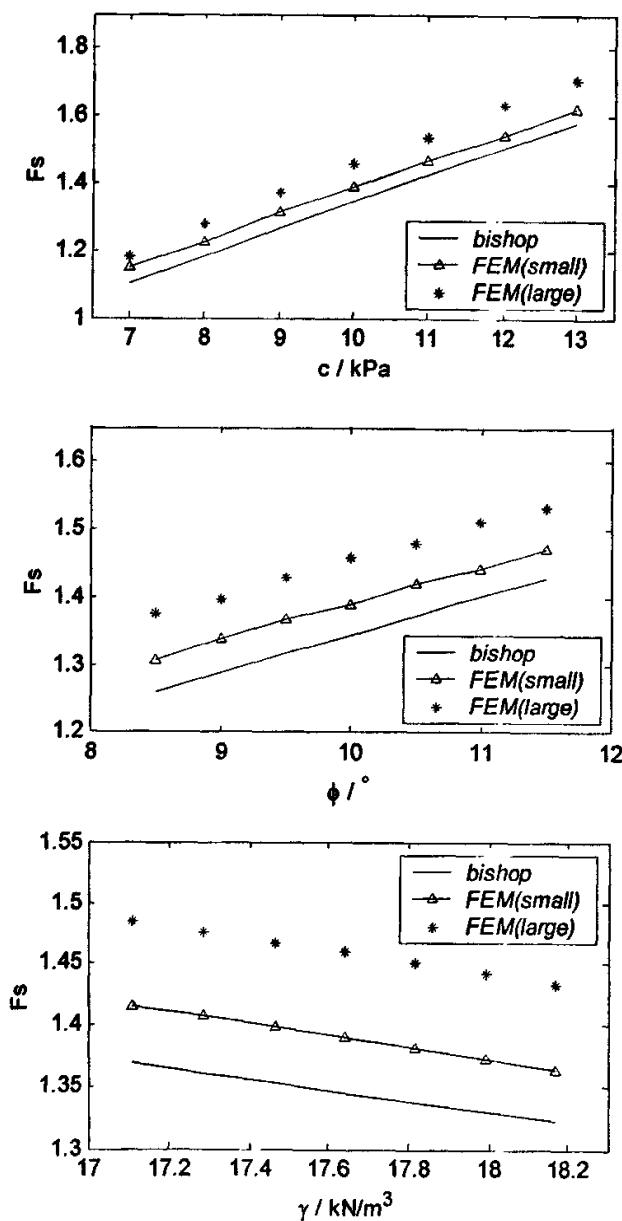
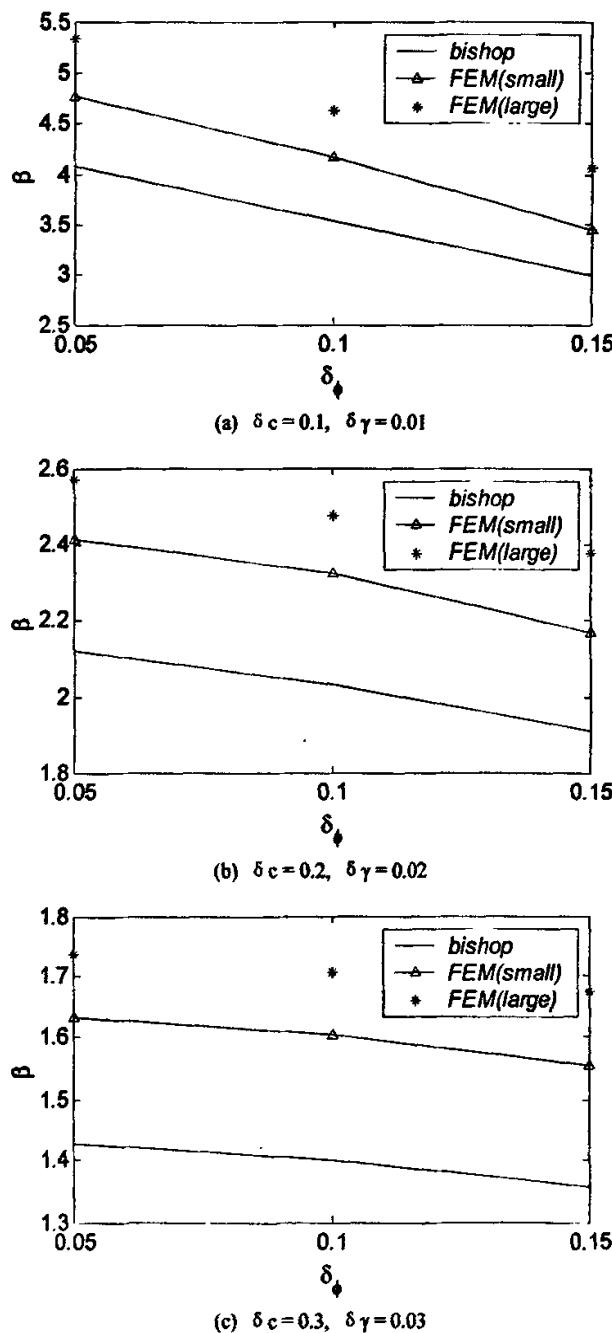


图 8.4-5 安全系数与土工参数关系曲线 ( $E=10^7 \text{ Pa}$ )

图 8.4-6 可靠指标与土工参数变异系数关系曲线 ( $E=10^7$ Pa,  $Z=F_s-1$ )

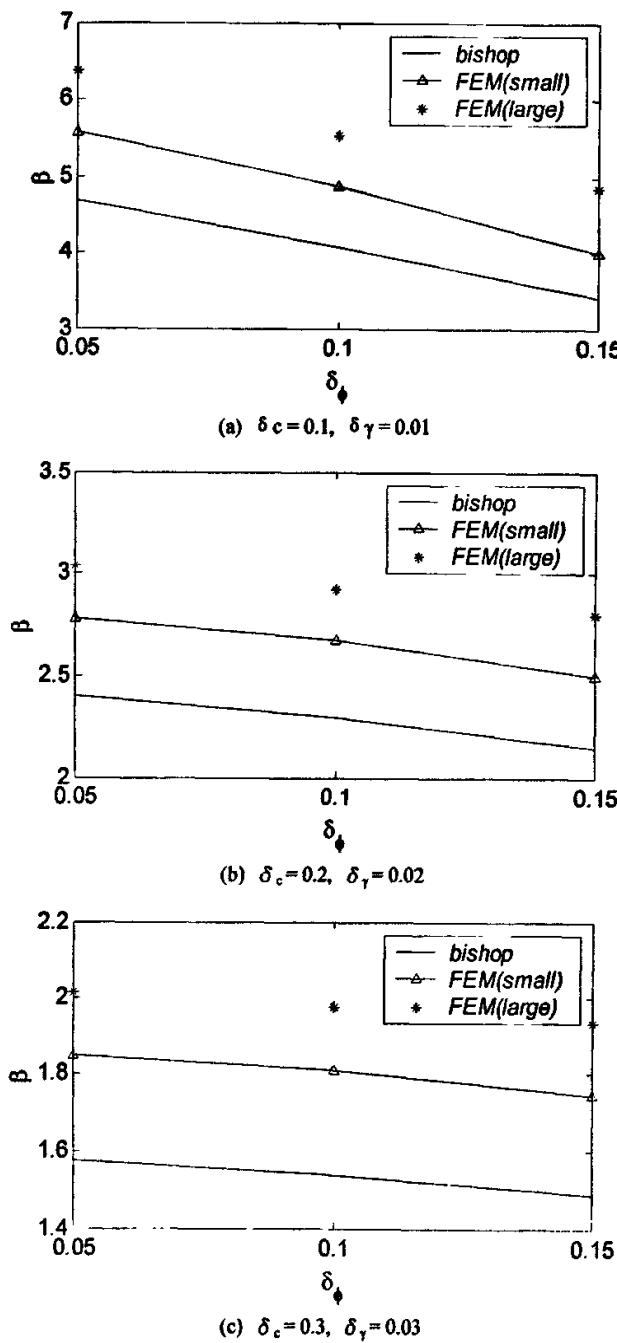


图 8.4-7 可靠指标与土工参数变异系数关系曲线 ( $E=10^7 Pa, Z=\ln F_s$ )

### 8.4.3 结果分析及讨论

#### 8.4.3.1 大小变形安全系数的对比分析

图 8.4-2、图 8.4-5 分别绘制了  $E=10^8 Pa$  时的安全系数  $F_s$  与土工参数  $c, \varphi, \gamma$  间的关系

曲线。由此可知，本文大、小变形有限元分析结果与原文中简化 Bishop 法分析结果具有相同的规律，即：无论采用何种计算方法，边坡的安全系数均随着粘聚力或内摩擦角的增加而增加，随着容重的增加而减小。但是，由该图可知大小变形分析对安全系数的计算结果影响不大。为此，本文又计算了  $E=10^7 Pa$  时的相应结果。此时，大小变形的计算结果有明显的区别。这表明当土体的弹性模量降低时，土体的抵抗变形性质变差，在相同条件下的变形量增加，因而有限元分析中是否考虑大变形现象对计算结果有显著影响。

#### 8.4.3.2 大小变形可靠指标的对比分析

边坡稳定可靠度分析的结果见图 8.4-3~4 及图 8.4-6~7，图中  $\delta_c$ 、 $\delta_\varphi$ 、 $\delta_\gamma$  分别表示  $c$ 、 $\varphi$ 、 $\gamma$  的变异系数。可见：大小变形有限元可靠度计算结果亦与原文基于简化的 Bishop 法的计算结果的变化规律一致，而且有限元法的可靠指标均大于简化 Bishop 法的可靠指标。

上面图形中，图 8.4-2~4 是弹性模量  $E=10^8 Pa$  时的计算结果，图 8.4-5~7 是弹性模量  $E=10^7 Pa$  时的计算结果。可见，当  $E=10^8 Pa$  时，大小变形情况下的计算结果无明显差异。但是，当  $E=10^7 Pa$  时，大小变形的计算之差异很明显。无论是安全系数，还是可靠指标，大变形的计算结果均比相应的小变形情况下有显著增加，而且这种差别较大。因此，若忽略大变形的影响，将对计算结果造成较大误差。

#### 8.4.3.3 结论

目前，在边坡稳定的有限元分析中，一般认为弹性模量对安全系数的影响可以忽略不计。文献[222]指出，弹性模量对变形有一定影响，但对安全系数的影响可以忽略不计。本文通过计算表明，在常规的小变形假设条件下，上述结论是正确的。但是，当考虑土体的大变形现象时，上述结论需要进行一定修正。此时，正如文[28]所述，因为弹性模量对变形有影响，所以当弹性模量较大时（如本文的  $E=10^8 Pa$ ），由于岩土体的抵抗变形性质较强，其应变不大，因此大小变形条件下的计算结果一致。但是，当弹性模量较小时（如本文的  $E=10^7 Pa$ ），土体的抵抗变形能力相对较小，其应变较大。此时，大小变形条件下的计算结果就会有明显的差异，大变形条件下相应的安全系数及可靠指标均有所增加。

## 9 非均质土坡的非线性有限元可靠度分析

### 9.1 计算中存在的问题

前述各章系统地用有限元法分析了边坡的稳定性，但其共性是分析对象都是均质土坡。为验证方法及程序的正确性，本章再以非均质土坡为例进行分析。

在非均质土坡的算例计算过程中，部分情况下遇到了以下两个问题。

**问题一：**在基于增量初应力法的非线性随机有限元迭代过程中，曾出现了有限元迭代计算不收敛的现象。分析其原因，发现是本次自编程序限定了“有限元最多迭代次数为 500 次”的条件而造成的。当增加最多允许迭代次数时，相同土体参数条件下的这些有限元计算就变为收敛。但是，这需要以更多的迭代次数、更慢的计算速度为代价。为此，本章研究随机有限元计算的加速收敛算法。

**问题二：**在一阶可靠度分析的验算点法中，出现了可靠指标迭代计算不收敛或明显发散的现象。这种现象是验算点法的自身算法缺陷造成的。文[157, 216]表明：这种迭代不收敛的现象常出现在极限状态函数的非线性程度比较高的情况。而边坡工程由于其研究对象的复杂性，其极限状态函数的非线性程度一般较高，这就引起了验算点的迭代计算不收敛的问题。为了保证任何情况下可靠指标的迭代都能收敛，本章探讨采用有限步长迭代法进行边坡稳定可靠度分析的方法。

### 9.2 随机有限元迭代中加速收敛方法的研究

本节以修正的增量切线刚度法为例，研究随机有限元算法中加速收敛的方法。

#### 9.2.1 定值法有限元中修正的 Aitken 加速法

Aitken 加速法是一种常见的、简单而有效的加速收敛的方法<sup>[224]</sup>。图 9.2-1 表示了单自由度系统的 Aitken 加速过程。图中， $F_k$  和  $F_{k+1}$  分别表示第  $k$  级和第  $k+1$  级荷载增量步起始时刻时的荷载， $\Delta d_1^{k+1}$  和  $\Delta d_2^{k+1}$  分别是第  $k+1$  级荷载增量步中第一次迭代、第二次迭代时的位移增量， $\tilde{\Delta d}_2^{k+1}$  是第二次迭代时修正后的位移增量。由该图可知，Aitken 加速方法的实质就是以局部割线刚度矩阵  $K_s$  来代替原来的常刚度矩阵  $K_0$ 。通过这种代替，刚度矩阵有所减小，迭代收敛速度有所增加。

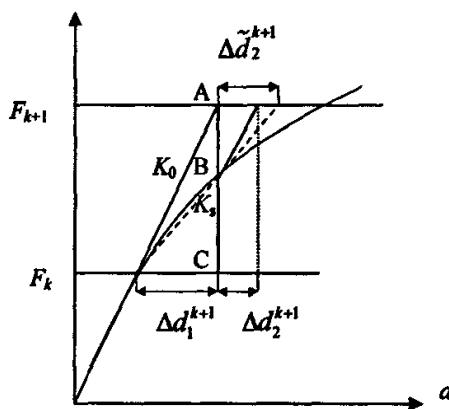


图 9.2-1 有 Aitken 加速的增量切线刚度法迭代

由上图可得:  $BC = AC - AB = K_0 \Delta d_1^{k+1} - K_0 \Delta d_2^{k+1}$ ,  $BC = K_1 \Delta d_1^{k+1}$

因此

$$K_0 \Delta d_1^{k+1} - K_0 \Delta d_2^{k+1} = K_1 \Delta d_1^{k+1} \quad (9.2.1)$$

将上式改写为

$$\frac{K_0}{K_1} = \frac{\Delta d_1^{k+1}}{\Delta d_1^{k+1} - \Delta d_2^{k+1}} \triangleq a \quad (9.2.2)$$

式中  $a$  即为单自由度时的加速因子。

对上式进行适当修正，并对所有自由度取统一的加速因子，可得修正的 Aitken 法的计算公式:

$$a_i = \begin{cases} 1 & (i=1, 2, \dots) \\ \frac{(\Delta d_i^{k+1} - \Delta d_{i+1}^{k+1})^T \Delta d_i^{k+1}}{(\Delta d_i^{k+1} - \Delta d_{i+1}^{k+1})^T (\Delta d_i^{k+1} - \Delta d_{i+1}^{k+1})} & (i=2, 3, \dots) \end{cases} \quad (9.2.3)$$

求得加速因子后，Aitken 加速法的位移更新算法如下：

$$\tilde{\Delta d}_{i+1}^{k+1} = a_i \Delta d_{i+1}^{k+1} \quad (9.2.4)$$

$$\tilde{d}_{i+1}^{k+1} = d_i^{k+1} + \tilde{\Delta d}_{i+1}^{k+1} \quad (9.2.5)$$

式中， $\Delta d_{i+1}^{k+1}$  和  $\tilde{\Delta d}_{i+1}^{k+1}$  分别是第  $k+1$  级荷载增量步中第  $i+1$  次迭代时的不加速和加速后的结点位移增量； $d_i^{k+1}$  是第  $k+1$  级荷载增量步中第  $i$  次迭代后的结点位移值； $\tilde{d}_{i+1}^{k+1}$  是第  $k+1$  级荷载增量步中第  $i+1$  次迭代后经加速修正的结点位移值。

## 9.2.2 随机有限元中修正的 Aitken 加速法

下面根据定值法有限元中修正的 Aitken 加速法公式来推导基于增量切线刚度法的随机有限元迭代中修正的 Aitken 加速法公式。

已在增量切线刚度法中，有限元方程可写为如下的迭代格式

$$(K_0)^{k+1} \Delta d_{i+1}^{k+1} = F^{k+1} + R_i^{k+1} \quad (9.2.6)$$

相应地，位移增量对基本变量的偏导数可用如下公式表示：

$$\left(\frac{\partial \Delta d}{\partial X}\right)_{i+1}^{k+1} = [(\mathbf{K}_0)^{k+1}]^{-1} \left[ \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^{k+1} + \left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)_i^{k+1} - \left(\frac{\partial K_0}{\partial X}\right)^{k+1} \Delta d_{i+1}^{k+1} \right] \quad (9.2.7)$$

式中,  $(\mathbf{K}_0)^{k+1}$  是第  $k+1$  级荷载增量步的起始切线刚度矩阵,  $\mathbf{R}_i^{k+1}$  是第  $k+1$  级荷载增量步第  $i$  次迭代时的内力向量(矫正荷载), 其余符号同前。

以加速后的位移增量代入式(9.2.6), 可得

$$(\mathbf{K}_0)^{k+1} \tilde{\Delta d}_{i+1}^{k+1} / a_i = \mathbf{F}^{k+1} + \mathbf{R}_i^{k+1}$$

即

$$(\mathbf{K}_0)^{k+1} \tilde{\Delta d}_{i+1}^{k+1} = a_i (\mathbf{F}^{k+1} + \mathbf{R}_i^{k+1})$$

将上式两边同对  $X$  求导, 可得

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}_0}{\partial X}\right)^{k+1} \tilde{\Delta d}_{i+1}^{k+1} + \mathbf{K}_0^{k+1} \left(\frac{\partial \Delta d}{\partial X}\right)_{i+1}^{k+1} = a_i \left[ \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^{k+1} + \left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)_i^{k+1} - \left(\frac{\partial K_0}{\partial X}\right)^{k+1} \Delta d_{i+1}^{k+1} \right]$$

即

$$\mathbf{K}_0^{k+1} \left(\frac{\partial \Delta d}{\partial X}\right)_{i+1}^{k+1} = a_i \left[ \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^{k+1} + \left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)_i^{k+1} - \left(\frac{\partial K_0}{\partial X}\right)^{k+1} \Delta d_{i+1}^{k+1} \right]$$

所以

$$\left(\frac{\partial \Delta d}{\partial X}\right)_{i+1}^{k+1} = a_i (\mathbf{K}_0^{k+1})^{-1} \left[ \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)^{k+1} + \left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)_i^{k+1} - \left(\frac{\partial K_0}{\partial X}\right)^{k+1} \Delta d_{i+1}^{k+1} \right]$$

注意到上式右边与  $a_i$  相乘的项正好等于式(9.2.7)的右边, 因此

$$\left(\frac{\partial \Delta d}{\partial X}\right)_{i+1}^{k+1} = a_i \left(\frac{\partial \Delta d}{\partial X}\right)_{i+1}^{k+1} \quad (9.2.8)$$

上式即为增量切线刚度法中位移增量对基本变量偏导数的加速公式。

可以看出, 在有 Aitken 加速的增量切线刚度法中, 位移增量对基本变量的偏导数的加速方法与位移增量的加速方法是一致的, 二者可以同步进行。

实际计算时, 发现由式(9.2.3)求出的加速因子可能会出现小于 1 的情况, 此时, 本文取加速因子  $a_i=1$ , 从而保证了加速方法的正常进行。

### 9.2.3 迭代步骤

与定值法相对应, 考虑 Aitken 加速后的基于增量切线刚度法的非线性随机有限元迭代步骤如下:

- 1) 赋迭代初值(令  $k=0$ ,  $i=0$ ,  $d^0=0$ ,  $\sigma_0^0=0$ ,  $R^0=0$ ,  $\partial d/\partial X=0$ ,  $\partial \sigma/\partial X=0$ );
- 2) 对第  $k+1$  级荷载增量, 求起始切线刚度矩阵  $(\mathbf{K}_0)^{k+1}$  及其对基本变量向量  $X$  的偏导矩阵  $(\partial \mathbf{K}_0/\partial X)^{k+1}$ ; 令位移、应力、体力及其对基本变量向量  $X$  的偏导矩阵的初值分别为上一荷载步结束时的相应值:  $d_0^{k+1}=d^k$ ,  $\sigma_0^{k+1}=\sigma^k$ ,  $R_0^{k+1}=R^k$ ;  $(\partial d/\partial X)_0^{k+1}=(\partial d/\partial X)^k$ ,  $(\partial \sigma/\partial X)_0^{k+1}=(\partial \sigma/\partial X)^k$ ,  $(\partial R/\partial X)_0^{k+1}=(\partial R/\partial X)^k$ 。
- 3) 对第  $i+1$  次迭代, 计算本次迭代的结点位移增量  $\Delta d_{i+1}^{k+1}$  及其对基本变量的偏导  $(\partial \Delta d/\partial X)_{i+1}^{k+1}$ , 对二者进行加速修正; 再求解本次迭代后的结点位移值  $d_{i+1}^{k+1}$  及其对基本变量的偏导  $(\partial d/\partial X)_{i+1}^{k+1}$ ;
- 4) 求各单元应变增量  $\Delta \epsilon_{i+1}^{k+1}$ :  $\epsilon_{i+1}^{k+1}=\epsilon_i^{k+1}+\Delta \epsilon_{i+1}^{k+1}$ ;

- 5) 计算各单元弹性应力增量 $(\Delta\sigma_e)_{i+1}^{k+1}$ 、当前试算应力 $(\sigma_i)_{i+1}^{k+1}$ 及其对基本变量的偏导 $(\partial\Delta\sigma_e/\partial\mathbf{X})_{i+1}^{k+1}$ 、 $(\partial\sigma_i/\partial\mathbf{X})_{i+1}^{k+1}$ ；
- 6) 计算屈服函数值 $F[(\sigma_i)_{i+1}^{k+1}]$ ，判断是否进入塑性状态。若已进入塑性，则计算相应的比值 $m$ 、塑性矩阵 $(\mathbf{D}_p)_{i+1}^{k+1}$ 、应力增量 $\Delta\sigma_{i+1}^{k+1}$ 及其对基本变量的偏导 $\frac{\partial m}{\partial\mathbf{X}}$ 、 $(\frac{\partial\mathbf{D}_p}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1}$ 、 $(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1}$ ；
- 7) 计算本次迭代后的应力值 $\sigma_{i+1}^{k+1}$ 、矫正荷载 $\mathbf{R}_{i+1}^{k+1}$ 及其对基本变量的偏导 $(\frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1}$ 、 $(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1}$ ；
- 8) 判断本次迭代是否收敛。若迭代计算收敛，则令 $k=k+1$ ，转2)进入下一增量步分析；否则，令 $i=i+1$ ，转3)进入下一迭代步分析。

上述迭代过程中的部分公式如下：

$$\Delta\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = [(\mathbf{K}_0)^{k+1}]^{-1} (\mathbf{F}^{k+1} + \mathbf{R}_i^{k+1}) = [(\mathbf{K}_0)^{k+1}]^{-1} (\mathbf{F}^{k+1} - \sum_e \int_V \mathbf{B}^T \sigma_i^{k+1} dV) \quad (9.2.9)$$

$$(\frac{\partial\Delta\mathbf{d}}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} = [(\mathbf{K}_0)^{k+1}]^{-1} \left[ (\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}})^{k+1} + (\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{X}})_i^{k+1} - \frac{\partial\mathbf{K}_0}{\partial\mathbf{X}} \Delta\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \right] \quad (9.2.10)$$

$$\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} = \mathbf{d}_i^{k+1} + \Delta\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \quad (9.2.11)$$

$$(\frac{\partial\mathbf{d}}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} = (\frac{\partial\mathbf{d}}{\partial\mathbf{X}})_i^{k+1} + (\frac{\partial\Delta\mathbf{d}}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} \quad (9.2.12)$$

$$\Delta\sigma_{i+1}^{k+1} = (\Delta\sigma_e)_{i+1}^{k+1} - (\Delta\sigma_p)_{i+1}^{k+1} = \mathbf{D}_e \Delta\varepsilon_{i+1}^{k+1} - (1-m)(\mathbf{D}_p)_{i+1}^{k+1} \mathbf{B} \Delta\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \quad (9.2.13)$$

$$(\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} = (\frac{\partial\Delta\sigma_e}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} - (\frac{\partial\Delta\sigma_p}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} \quad (9.2.14)$$

$$(\frac{\partial\Delta\sigma_p}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} = (1-m)(\frac{\partial\mathbf{D}_p}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} \mathbf{B} \Delta\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} + (1-m)\mathbf{D}_{p(i+1)}^{k+1} \mathbf{B} (\frac{\partial\Delta\mathbf{d}}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} - \frac{\partial m}{\partial\mathbf{X}} \mathbf{D}_{p(i+1)}^{k+1} \mathbf{B} \Delta\mathbf{d}_{i+1}^{k+1} \quad (9.2.15)$$

$$(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} = - \sum_e \int_V \mathbf{B}^T (\frac{\partial\sigma}{\partial\mathbf{X}})_{i+1}^{k+1} dV \quad (9.2.16)$$

其它公式可参见第四章及第六章。

### 9.3 一阶可靠度分析的有限步长迭代法

设基本变量是互为独立的随机变量，文[216]推导了有限步长迭代法的基本公式，列出了在标准正态空间中求解可靠指标的迭代步骤。由于有限元计算是在原始空间中进行的，因此，本文归纳总结出原始空间中的迭代求解步骤如下：

- 1) 选取迭代初始点 $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$ 、初始步长 $\lambda^{(0)}$ 和步长调整系数 $f$ (一般可取 $\mathbf{x}^{(0)} = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n})^T$ ； $\lambda^{(0)} \leq 50.0$ ； $f=1.2\sim1.5$ )；

2) 通过等概率变换, 将随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  变换为正态随机变量  $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ ;

3) 按式(9.3.1)计算方向余弦  $\alpha_{X_i}^{(k+1)} (i=1, \dots, n)$ :

$$\alpha_{X_i}^{(k+1)} = \frac{\frac{x_i^{(k)} - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} - \lambda^{(k)} \frac{\partial g(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \sigma_{X'_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{x_j^{(k)} - \mu_{X'_j}}{\sigma_{X'_j}} - \lambda^{(k)} \frac{\partial g(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j} \sigma_{X'_j} \right)^2}} \quad (9.3.1)$$

4) 按式(9.3.2)计算可靠指标  $\beta^{(k+1)}$ :

$$\beta^{(k+1)} = \frac{g(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} (x_i^{(k)} - \mu_{X_i})}{-\sum_{i=1}^n \alpha_{X_i}^{(k+1)} \frac{\partial g(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} \sigma_{X'_i}} \quad (9.3.2)$$

5) 按式(9.3.3)计算新的迭代点  $X_i^{(k+1)} (i=1, \dots, n)$ :

$$X_i^{(k+1)} = \mu_{X_i} + \alpha_{X_i}^{(k+1)} \sigma_{X'_i} \beta^{(k+1)} \quad (9.3.3)$$

6) 若前后两次迭代计算所得可靠指标之差满足  $|\beta^{(k+1)} - \beta^{(k)}| < \varepsilon$  (或前后两次迭代计算

所得两点在标准正态空间的距离满足  $\left\| \frac{\mathbf{x}^{(k+1)} - \mu_{X^{(k+1)}}}{\sigma_{X^{(k+1)}}} - \frac{\mathbf{x}^{(k)} - \mu_{X^{(k)}}}{\sigma_{X^{(k)}}} \right\| < \varepsilon$ ),  $\varepsilon$  为规定

的允许误差, 则停止迭代, 所求  $\beta^{(k+1)}$  即为要求的可靠指标;

7) 若  $k < l$ , 则转至 2) 继续进行迭代; 若

$$\left\| \frac{\mathbf{x}^{(k+1)} - \mu_{X^{(k+1)}}}{\sigma_{X^{(k+1)}}} - \frac{\mathbf{x}^{(k)} - \mu_{X^{(k)}}}{\sigma_{X^{(k)}}} \right\| > \left\| \frac{\mathbf{x}^{(k)} - \mu_{X^{(k)}}}{\sigma_{X^{(k)}}} - \frac{\mathbf{x}^{(k-1)} - \mu_{X^{(k-1)}}}{\sigma_{X^{(k-1)}}} \right\|, \text{ 则取 } \lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} / f,$$

否则取  $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)}$ , 转至 2) 继续进行迭代。

将上述迭代计算过程与第二章常规的验算点法迭代过程相比, 可知其主要区别是方向余弦的表达式有所不同。常规迭代方法中方向余弦的计算只与该点的导数值有关, 而有限步长迭代法中方向余弦的计算还与该点的坐标值有关。可以证明, 当  $\lambda^{(k)} \rightarrow \infty$  时, 上述两种迭代方法是等价的。因此, 常规的验算点法是有限步长迭代法中步长为无限值时的特例。

有限步长迭代法可以保证在极限状态函数为高度非线性时可靠指标的迭代亦可收敛, 但步长及步长调整系数仍需试算确定。

## 9.4 算例分析

图9.4-1是覆盖于坚硬土层上的非均质二层不排水粘土堤坝边坡, 取自文献<sup>[240-241]</sup>。边坡的几何参数如图所示, 各层土的参数见表9.4-1。

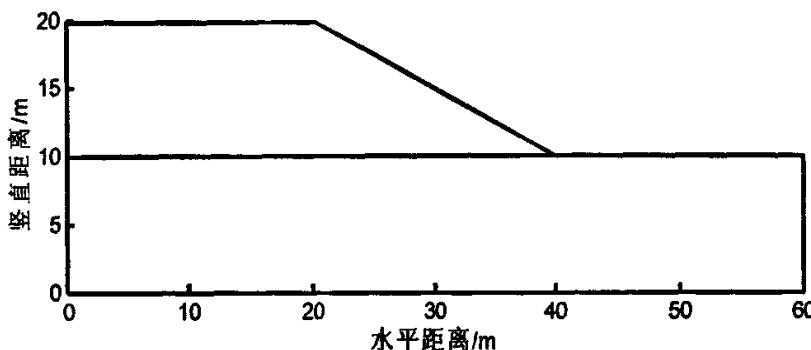


图 9.4-1 边坡外形图

表 9.4-1 土层参数表

土层号	$c/kPa$	$\varphi$	$\phi$	$\gamma/kN/m^3$	$E/kPa$	$\mu$
1(上层)	50.0	0	0	20.0	$10^5$	0.3
2(下层)	73.1	0	0	20.0	$10^5$	0.3

本文采用 8 结点四边形单元进行有限元计算, 共划分个 831 结点, 250 个单元。约束条件是底边界水平及竖直方向双向约束, 左右边界水平约束。土体采用 Mohr-Coulomb 理想弹塑性模型。网格划分结果如图 9.4-2 所示。

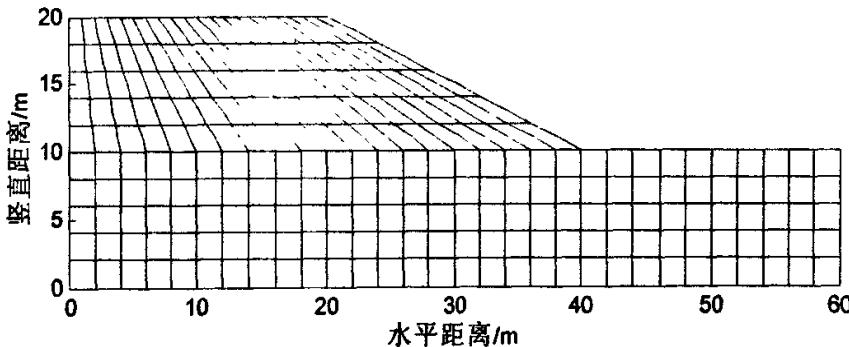


图 9.4-2 网格剖分图

### 9.4.1 定值分析法的计算结果

#### 9.4.1.1 滑面安全系数

为了验证本文方法及程序对于非均质土坡的适用性, 本文先对该算例进行了定值法分析, 结果见表 9.4-2 所示。

表 9.4-2 不同方法对应的安全系数 ( $c_1=50kPa$ ,  $c_2=73.1kPa$ )

Bishop	SRM	SSA	原文
2.013	2.03	2.015	2.0

表中, 原文的计算值  $F_s=2.0$  是由强度折减法算得(由于原文控制安全系数的精度为 0.05, 故与本文的  $F_s$  计算结果有微小差别)<sup>[240]</sup>。由上表可见, 各种方法的安全系数值基本相等, 这也从一个侧面验证了本文定值法程序的正确性。

为进一步验证程序的正确性, 本文还用简化 Bishop 法、强度折减法(SRM)及滑面应力分析法(SSA)计算了  $c_1=50\text{kPa}$  而  $c_2$  发生变化时的各种安全系数, 并与文[241]进行了对比分析, 如图 9.4-3 所示。其中, PHASE 是文[241]中用 phase2 软件及强度折减法的计算结果, PHASE-T6 对应于将边坡体划分为 2538 个 T6 单元(六结点三角形单元)的情况, PHASE-Q8 对应于将边坡体划分为 241 个 Q8 单元(八结点四边形单元)的情况。由此图可见, 各种方法所求安全系数值是基本一致的, 其中又以 SSA 与 Bishop 法的计算结果最为接近, 而各种 SRM 的计算结果则有一定差异, 这可能与 SRM 中采用的破坏标准不统一有关。

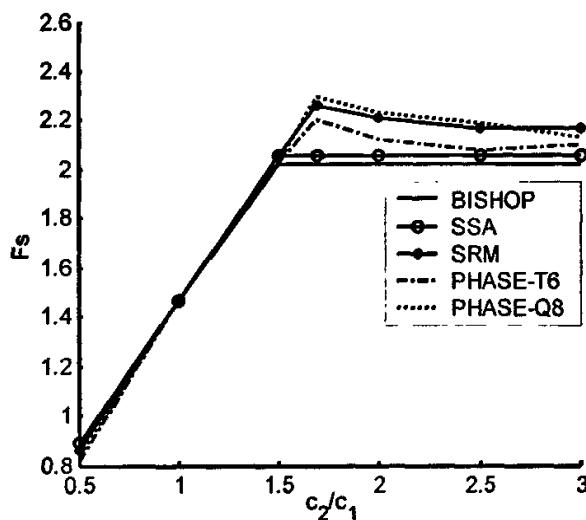


图 9.4-3 边坡安全系数与  $c_2/c_1$  关系曲线

#### 9.4.1.2 滑面位置

在计算安全系数的同时, 本文还计算了有限元网格结点的位移值及滑面的位置, 并绘制了强度折减法(SRM)的网格变形图、位移等值线图及滑面应力分析法(SSA)的滑面位置图。

图 9.4-4 为  $c_1=50\text{kPa}$  而  $c_2$  发生变化时的各种滑面位置图(SSA)。由该图可见,  $c_2=73\sim75\text{kPa}$  是滑面位置的分界点。当  $c_2<73\text{kPa}$  时, 滑面处于第二十层中偏下方。而当  $c_2>75\text{kPa}$  时, 滑面穿过第一土层与第二土层的交界面。由此可见, 当土层参数发生微小变化时, 滑面位置会发生很大变化, 其变形破坏机理很不相同。因此, 在进行边坡边坡稳定性分析时, 需要考虑其参数的变化, 从概率的角度来研究其稳定性, 即很有必要进行边坡稳定的可靠度分析。

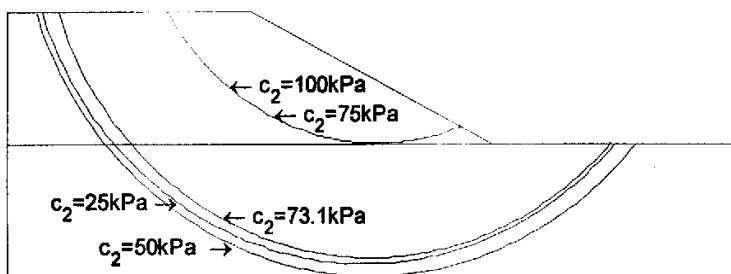
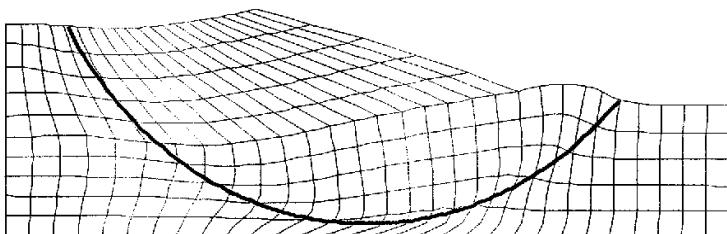
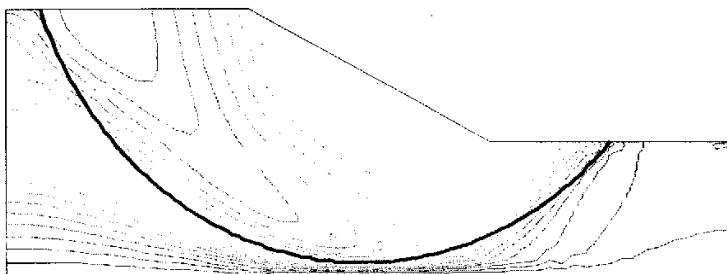
图 9.4-4 滑面位置图 ( $c_1=50\text{kPa}$ )

图 9.4-5~9.4-9 表示的是为  $c_1=50\text{kPa}$  而  $c_2$  发生变化时的强度折减法(SRM)的网格变形图、位移等值线图与滑面应力分析法(SSA)的滑面位置之对应关系(位移等值线图的线条颜色由蓝变红时代表等值线的值逐渐增加)。由这些图形可知,在各种情况下,SRM 与 SSA 所得滑面位置都是基本对应的,这也证明了这两种定值分析方法程序的正确性。同时,由强度折减法的网格变形图及位移等值线图亦可以看出  $c_2=73\sim75\text{kPa}$  是滑面位置的分界点,此时,随着  $c_2$  的增加,边坡中潜在滑面的位置由第二层土向第一层土过渡。

图 9.4-5(a) 网格变形图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=25\text{kPa}$ )图 9.4-5(b) 位移等值线图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=25\text{kPa}$ )

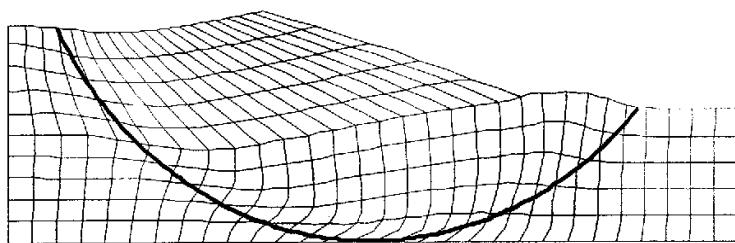


图 9.4-6 (a) 网格变形图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=50\text{kPa}$ )

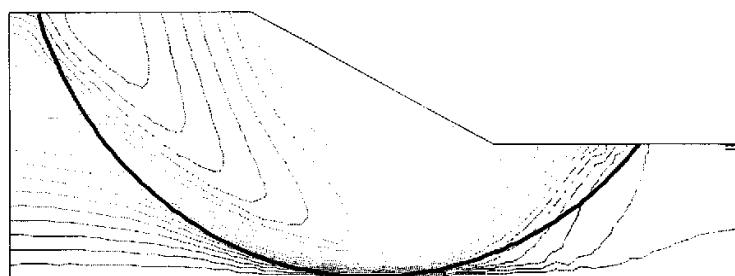


图 9.4-6 (b) 位移等值线图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=50\text{kPa}$ )

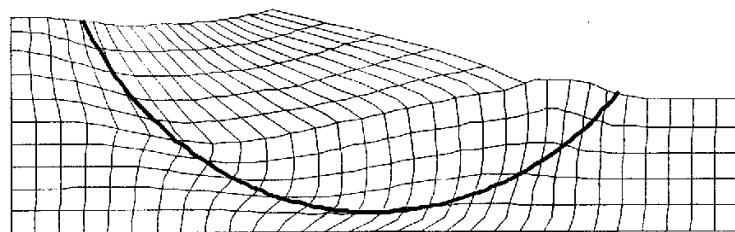


图 9.4-7 (a) 网格变形图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=73.1\text{kPa}$ )

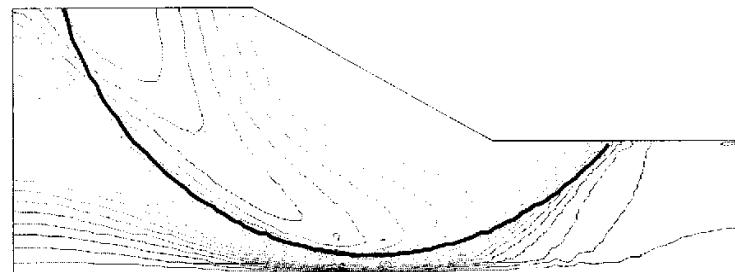


图 9.4-7 (b) 位移等值线图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=73.1\text{kPa}$ )

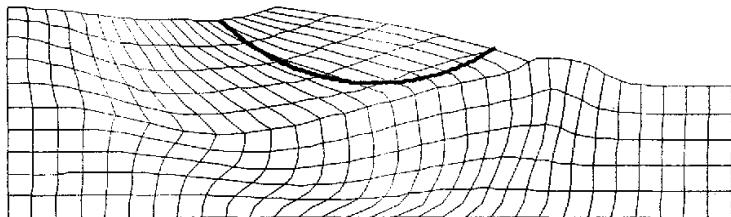


图 9.4-8 (a) 网格变形图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=75\text{kPa}$ )

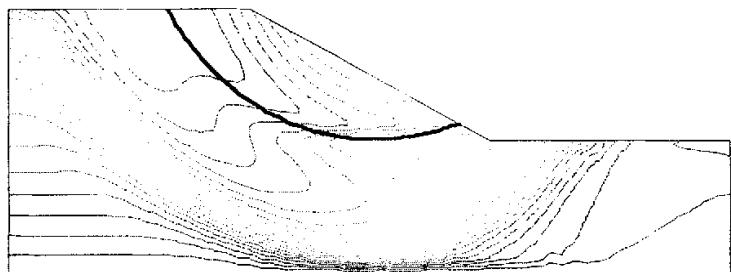


图 9.4-8 (b) 位移等值线图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=75\text{kPa}$ )

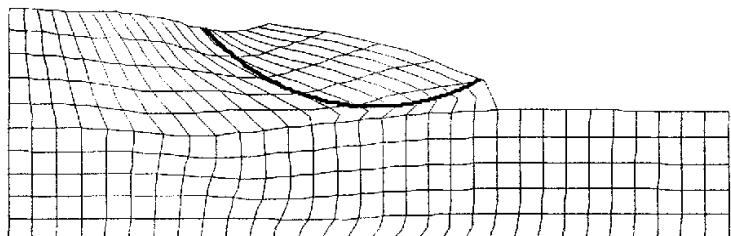


图 9.4-9 (a) 网格变形图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=100\text{kPa}$ )

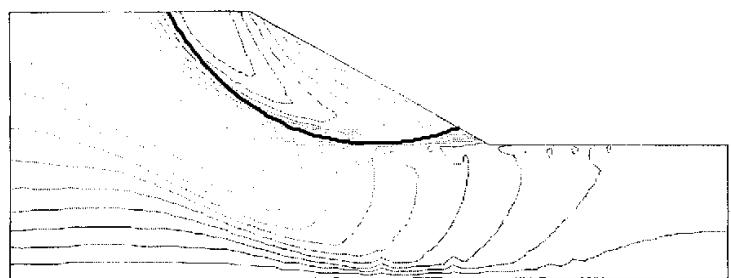


图 9.4-9 (b) 位移等值线图 (SRM) 及滑面位置 (SSA) ( $c_2=100\text{kPa}$ )

### 9.4.2 可靠度分析的计算结果

在进行可靠度计算时，本文假设  $c_1, c_2$  为相互独立的正态基本变量，其余参数为定值。在此假设条件下，进行了各种情况下的可靠度分析。

#### 9.4.2.1 迭代次数的对比分析

对于此非均质土坡，本文采用基于增量初应力的偏微分法时遇到了有限元迭代计算收敛速度慢的问题，在采用验算点法求可靠指标时也遇到了可靠指标迭代不收敛的现象。为此，本章采用基于增量切线刚度法的加速迭代算法进行非线性随机有限元计算，采用有限步长迭代法进行可靠指标的迭代求解。计算表明，这些改进能使计算顺利进行。

需要注意的是，在有限步长迭代法中，虽然从理论来看，可靠指标的迭代计算是收敛的，但其收敛性取决于初始步长  $\lambda^{(0)}$  及步长调整系数  $f$  的选择，而这需要试算确定。本文对此非均质土坡进行了多种情况的试算，试算结果表明：由于边坡稳定的功能函数的非线性程度很高， $\lambda^{(0)}$  必须很小，一般取  $\lambda^{(0)} \leq 1$ ；而  $f$  对迭代收敛性影响不大，它的作用是对初始步长进行折减，以加速迭代计算的进程， $f$  值越大，计算达到收敛时所需的迭代次数就越小，本文建议取  $f=1.5$ 。

表 9.4-3 及表 9.4-3 表示了部分变异系数组合情况下求解滑面可靠指标时各种方法的迭代次数（其中可靠指标的迭代收敛标准是  $\epsilon=0.001$ ），表中随机有限元的迭代次数是指可靠指标迭代过程中所有有限元迭代次数的总和。例如，当变异系数  $\delta_{c1}=0.3$ ,  $\delta_{c2}=0.3$  时，对于有限步长迭代法，当采用加速方案后，可靠指标的迭代共有 6 次；对于每个可靠指标，随机有限元的迭代次数分别是 80、25、37、33、33、33，故随机有限元的总迭代次数为 241 次。图 9.4-10 表示的是  $\delta_c=\delta_{\varphi}=0.3$  时常规的验算点法及有限步长迭代法的可靠指标与迭代次数关系图。

表 9.4-3 迭代次数的对比分析（验算点法）

变异系数		不加速		加速	
$\delta_{c1}$	$\delta_{c2}$	可靠指标的迭代	随机有限元的迭代	可靠指标的迭代	随机有限元的迭代
0.2	0.3	4	404	4	173
0.3	0.3	迭代发散	/	迭代发散	/

表 9.4-4 迭代次数的对比分析（有限步长迭代法）

变异系数		迭代参数		不加速		加速	
$\delta_{c1}$	$\delta_{c2}$	$\lambda^{(0)}$	$f$	可靠指标的迭代	随机有限元的迭代	可靠指标的迭代	随机有限元的迭代
0.2	0.3	1.0	1.5	4	404	4	173
0.3	0.3	0.01	1.5	5	505	6	241

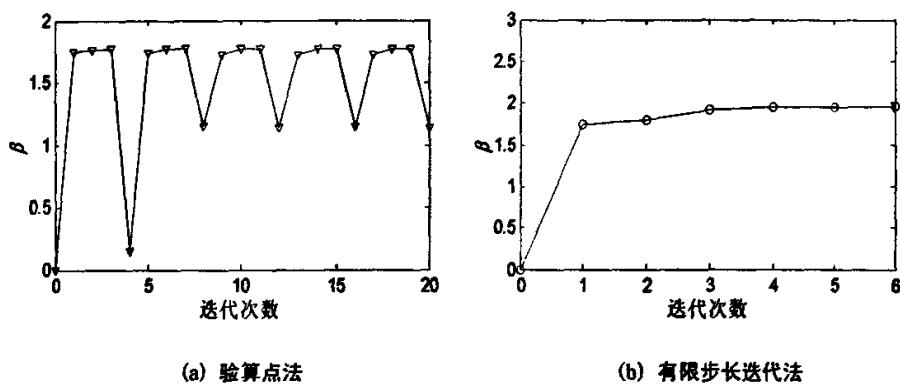


图 9.4-10 可靠指标与迭代次数关系图

由表 9.4-3、表 9.4-4 及图 9.4-10 可以看出：(1)对于常规验算点法，在变异系数为  $\delta_{c1}=0.2$ ,  $\delta_{c2}=0.3$  的情况下，常规验算点法和有限步长的迭代过程相同；在变异系数为  $\delta_{c1}=0.3$ ,  $\delta_{c2}=0.3$  的情况下，验算点的迭代发散，而用有限步长迭代法则收敛。这表明，常规迭代法是有限步长迭代法的特例，后者适用范围更广。(2)在有限元计算中，若采用加速方法，虽然有时验算点法的迭代次数会有所增加，但总的有限元迭代次数仍会大大减少。因此，加速迭代的效果良好。因为随机有限元的迭代计算本身又包括有限元方程的迭代求解循环、单元循环、高斯点循环等迭代过程，它在程序的总运行过程中占有很大的比例，因此，随机有限元迭代次数的减少可大大加快程序的运算速度，提高其计算效率。(3)在有限步长迭代法中，初始步长及步长调整系数的确定需要试算。如果初始步长取的不合适，验算点的迭代计算仍会出现不收敛的现象。表中  $\lambda^{(0)}$  和  $f$  值都是试算后的结果。本章以下结果如不特别说明，均采用的是基于增量切线刚度法的 Aitken 加速迭代算法及有限步长迭代法。

### 9.4.2.2 单元解

图 9.4-11 表示的是在基于滑面应力分析的有限元可靠度方法中,  $c_1$ 、 $c_2$  的变异系数均为 0.3 时, 用中心点法算出的各积分点上功能函数均值、均方差及可靠指标等值线图。

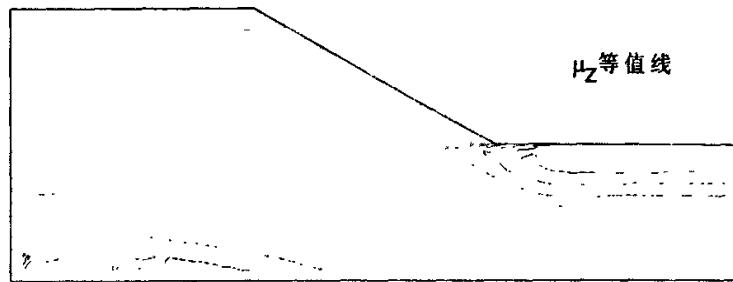


图 9.4-11 (a) 积分点上功能函数均值等值线图

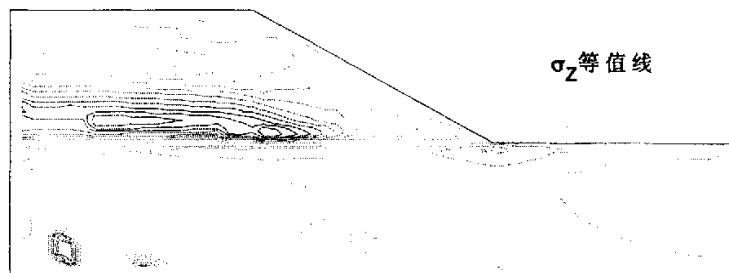


图 9.4-11(b) 积分点上功能函数均方差等值线图

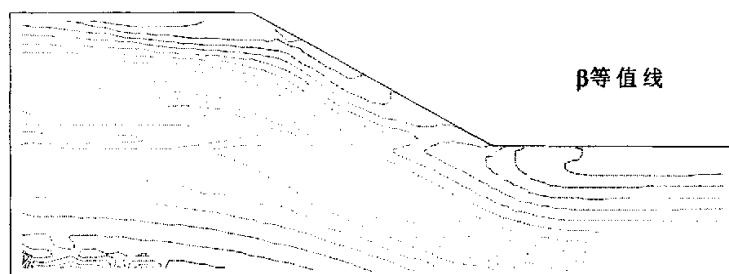


图 9.4-11(c) 积分点上可靠指标等值线图

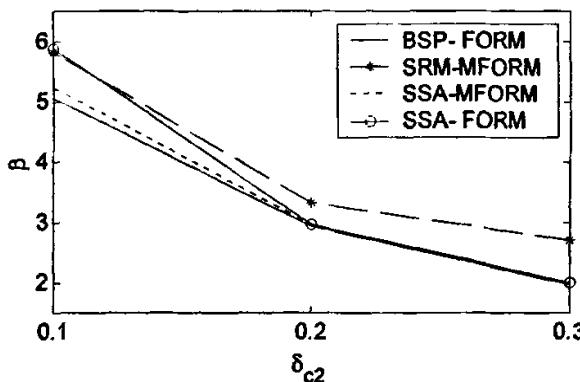
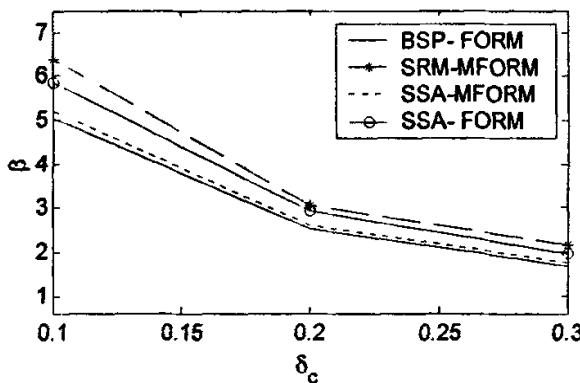
由上述等值线图可见：各高斯积分点上功能函数均值  $\mu_z$  等值线图与功能函数均方差  $\sigma_z$  等值线图形状明显不同，由此导致可靠指标  $\beta$  等值线图也与功能函数均值等值线图  $\mu_z$  不一致。这与前面对均质土坡进行分析的结果是类似的。

从边坡的可靠指标等值线图上大致可以看出，在边坡剖面中部的可靠指标相对较低，破坏概率相对较大。但这只是定性分析，边坡可靠度破坏面的具体位置及相应的可靠指标的大小仍需采用本文方法求得。

#### 9.4.2.3 滑面可靠指标

基于滑面应力分析的边坡有限元可靠度分析可以同时求出边坡的点可靠指标、滑面可靠指标及滑面位置。本文重点讨论滑面可靠指标及滑面位置的计算结果。

图 9.4-12 表示了各种方法的可靠指标  $\beta$  与变异系数  $\delta$  关系曲线。其中，BSP、SRM、SSA 分别表示基于简化毕肖普法、基于有限元强度折减法及基于滑面应力分析法的计算结果，MFORM、FORM 分别表示均质一阶可靠性方法（中心点法）和一阶可靠性方法（此处是指有限步长迭代法）。由于 SRM 的计算量较大，本文未进行基于 SRM 的有限步长迭代法迭代计算。

图 9.4-12(a) 可靠指标与变异系数的关系 ( $\delta_{\alpha}=0.1$ )图 9.4-12(b) 可靠指标与变异系数的关系 ( $\delta_{\alpha}=\delta_{\omega}=\delta_{\sigma}$ )

由图 9.4.12 可知, 对于该非均质土坡, 各种方法所求可靠指标与变异系数的变化趋势相同。由于可靠指标  $\beta>5$  时, 相应的破坏概率已达  $10^{-7}$  数量级, 因此, 上述图形中各曲线的数值也可视为接近相等。这其中, SRM-MFORM 与其它方法相比, 相对误差最大。这一方面可能是因为中心点法的误差较大, 另一方面可能是 SRM 方法本身的精度造成的。结合前面的安全系数计算结果(参见图 9.4-3), 可知对于 SSA, 其计算结果与真实解十分一致。而对于 SRM, 各种方法的安全系数  $F_s$  值有一定差别, 这种差别主要是由于失稳状态判断标准的差异而引起的, 它也是将 SRM 方法用于边坡稳定性分析时的讨论热点之一<sup>[53]</sup>。由于在定值法分析时, 各种计算方法对应的安系数存在一定差别; 而在可靠度分析中, 功能函数对基本变量的导数的数值求解又直接与安全系数的大小有关, 因此, 可靠指标的计算值就可能由于安全系数的计算值的微小差别而产生一定的误差。随着对 SRM 研究的深入, 用 SRM 计算边坡的安全系数的精度将会越来越准确, 由此所得的可靠指标也将更准确。

#### 9.4.2.4 滑面位置

表 9.4-5 表示的是各种变异系数组合情况下的滑面可靠指标与滑面位置的求解结果。其中, 滑面位置用滑面编号表示, 它们在边坡剖面中的具体位置见图 9.4-13 (图 9.4-13 中, 滑面 2 亦代表定值分析法所得的边坡最小安全系数面)。表 9.4-5 中, MFORM 和 FORM 分别表示均

质一阶可靠性方法（中心点法）和一阶可靠性方法（此处是指有限步长迭代法）。

由表 9.4-5 可知，对于该非均质土坡，中心点法与有限步长迭代法所得可靠指标在某些变异系数情况下有一定差别，在另外一些变异系数情况下基本相等。将可靠指标与滑面位置结合起来进行分析，可以发现，若中心点法与有限步长迭代法所求的可靠指标相差较大，则其对应的滑面位置相差较大；相反，若中心点法与验算点法的可靠指标较为接近，则其对应的滑面位置也较为一致。因此，在条件许可时，应采用有限步长迭代法（或验算点法）进行可靠指标的迭代计算，否则所求的滑面可靠指标及滑面位置都有可能产生较大误差。

表 9.4-5 滑面可靠指标与滑面位置的对比分析

$\delta_{c1}$	$\delta_{c2}$	滑面可靠指标		滑面编号	
		MFORM	FORM	MFORM	FORM
0.1	0.1	5.23	5.86	1	3
0.1	0.2	2.95	2.95	2	3
0.1	0.3	1.97	1.98	2	3
0.2	0.2	2.614	2.93	1	3
0.2	0.3	1.97	1.96	2	3
0.3	0.3	1.74	1.95	1	3

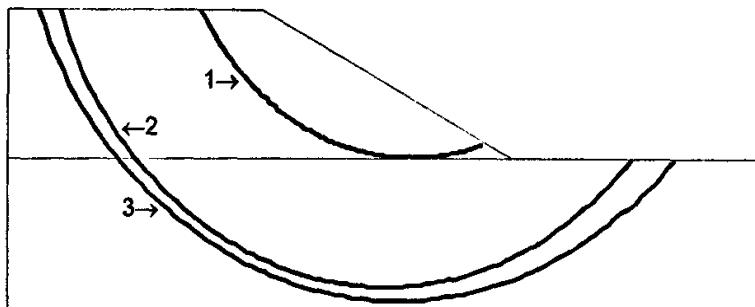


图 9.4-13 滑面位置图

由表 9.4-5 还可以看出，在各种变异系数组合情况下，用中心点法所求的滑面位置会有所改变，但用有限步长迭代法求解的滑面位置都相等，如图 9.4-13 中滑面 3 所示。详细分析验算点的迭代过程，可以发现：在各种变异系数组合情况下，虽然在标准正态空间中，最终的验算点位置有所不同，从而它们到原点的距离（即可靠指标）不同。但是，在原始空间中，各种情况下最终的验算点位置却基本相同。两种典型变异系数组合情况下的验算点的迭代过程如图 9.4-14 所示。因为滑面位置是由土性参数决定的，而原始空间中验算点位置的相同就表示它们具有相同的土性参数，因此，各种情况下的最小可靠指标面的位置也就相同。

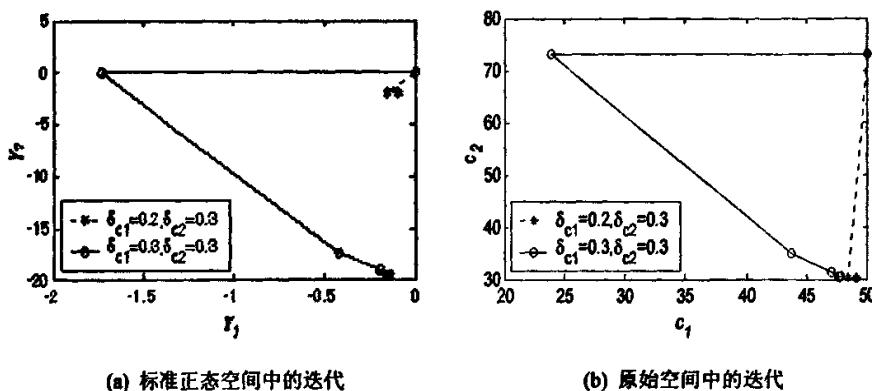


图 9.4-14 验算点的迭代过程

### 9.4.3 结论

- 1) 本章以非均质二层土坡为研究对象,推导了基于 Aitken 加速收敛方法的随机有限元迭代公式,并采用有限步长迭代法进行可靠指标的迭代求解。计算表明:与不采用加速收敛算法的随机有限元相比较,本章的加速算法明显减少了随机有限元的迭代计算次数,提高了程序的计算效率。
  - 2) 将有限步长迭代法应用于边坡稳定的有限元可靠度分析,研究了初始步长  $\lambda^{(0)}$  及步长调整系数  $f$  的取值,得出了常见的取值范围。计算表明,由于边坡稳定的功能函数的非线性程度很高,因此初始步长必须很小(一般小于等于 1);而步长调整系数则对迭代收敛性影响不大,它的作用是对初始步长进行折减,以加速迭代计算的进程,  $f$  值越大,计算达到收敛时所需的迭代次数就越小,因此,可取  $f=1.5$ 。
  - 3) 基于强度折减法与基于滑面应力分析法的有限元定值法及可靠度分析结果都较为接近。但由于二者的研究方法不同,其计算结果有一定差异。此外,定值法 SRM 本身精度的不高也是造成 SRM 和 SSA 可靠度结果差异的原因之一。随着定值法 SRM 研究的深入,基于 SRM 的可靠度分析结果将会更准确。
  - 4) 基于滑面应力分析法的计算结果表明,若中心点法与有限步长迭代法所求的可靠指标相差较大,则其对应的滑面位置也相差较大;各种变异系数情况下所求原始空间中验算点的坐标及边坡中最小可靠指标对应的滑面位置相同。

## 10 结论与展望

### 10.1 结论

本文以边坡工程为研究对象，系统研究了用有限元法进行边坡稳定的非线性有限元可靠度分析的各种方法。论文在全面的文献综述的基础上，以有限元为研究手段，提出了基于强度折减的有限元可靠度分析方法和基于滑面应力分析的有限元可靠度分析方法，分析比较了二者的异同点；提出了边坡稳定可靠度分析的改进的响应面法；推导了在原始空间中进行参数的相对敏感性分析的公式；进行了既考虑边坡的材料非线性又考虑边坡的几何非线性时的有限元可靠度分析；研究了随机有限元分析中加速收敛的计算方法；分析了一阶可靠度分析中的有限步长迭代法在边坡稳定可靠度分析中的应用。本文的主要研究成果有：

- 1) 将有限元强度折减法应用于边坡稳定的可靠度分析，研究基于有限元强度折减法与基于极限平衡条分法（Bishop 法）的可靠分析结果间的关系。研究表明：基于有限元强度折减法与基于 Bishop 法的可靠度分析结果是一致的，其中前者的结果稍大；在进行边坡稳定的有限元可靠度分析中，采用基于强度折减法的有限元可靠度分析是完全可行的。这种方法不需对定值法的有限元分析程序作任何修改，无论是线性有限元问题还是非线性有限元问题都适用；无需对各有限单元求单元的可靠指标，能一次性得出边坡的整体可靠指标，因而方便易用，主要缺点是计算速度较慢。
- 2) 研究根据有限元应力求解结果进行边坡中各单元可靠指标、边坡整体可靠指标及其对应滑面位置的确定方法，探讨有限元分析中功能函数形式对计算结果的影响。研究表明：与基于强度折减法的边坡有限元可靠度分析方法相比，基于滑面应力分析法所得的计算结果更为全面，它既能计算出边坡剖面上各单元或各积分点上的可靠指标，又能计算出边坡的总体可靠指标及相应滑面的位置，这更有助于边坡的防治。在基于滑面应力分析的弹塑性随机有限元可靠度分析中，滑面可靠指标的求解方法对计算结果影响很大。在分析边坡中各点的可靠指标时，其功能函数可采用不考虑滑面方向的函数形式（方法 1、2），从而可得到边坡剖面中各点可靠指标的相对大小，进行边坡稳定的定性分析。但在求解边坡整体可靠指标时，应采用考虑滑面方向的函数形式作为功能函数（方法 3、4），它能更好地反映滑面方向对边坡可靠指标的影响，其中方法 3 根据整个滑面的功能函数来求解滑面的可靠指标，物理概念明确，因而更为合理。
- 3) 针对当前响应面法中的一些不足之处，提出了一种改进的响应面法——FORM-RSM 二步法。其计算主要分二步，一是用验算点法求解可靠指标及验算点的位置，二是在此验算点处进行响应面的拟合，并对此响应面函数用常规的可靠度分析方法求解相应的可靠指标。不同算例表明：该方法在计算精度及效率上均比常用的基于响应面迭代的 RSM 有所提高。
- 4) 针对边坡工程中的高度非线性功能函数及非线性有限元计算量大的问题，研究边坡有限元可靠度分析中的敏感性计算方法，推导基本变量相关时在原始空间中求解可靠指标对参数敏感性的计算公式，提出进行参数的相对敏感性分析方法及公式。研究表明：基本变量相关时在原始空间中求解可靠指标对参数敏感性的优点是无需求解转换矩阵，计算更加简单。

直接；对参数进行相对敏感性分析能剔除变量单位对计算结果的干扰，因而敏感性分析的结果更具有可比性。

- 5) 针对边坡工程中的大变形现象，研究既考虑边坡的弹塑性材料非线性又考虑其大变形几何非线性的有限元可靠度分析方法（双重非线性问题），推导其计算公式，比较大小变形情况下的相应结果。研究表明：在小变形情况下，弹性模量对边坡的安全系数影响很小，在边坡稳定性分析时可以忽略弹性模量的影响。但是当考虑土体中发生的大变形现象时，上述结论需要进行一定修正。此时，当弹性模量较大时，由于岩土体的抵抗变形性质较强，其应变不大，因此大小变形条件下的计算结果一致。但是，当弹性模量较小时，土体的抵抗变形能力相对较小，其应变较大。因而，大小变形条件下的计算结果就会有明显的差异，大变形条件下相应的安全系数及可靠指标均会有所增加。
- 6) 在常规的随机有限元迭代过程中，结点位移对基本变量的偏导数迭代收敛速度非常慢，由此影响了整个有限元计算的收敛性。因此，本文基于常规有限元计算中的 Aitken 加速收敛算法，研究随机有限元中相应的加速收敛方法，推导其计算公式，并将之用于边坡稳定的有限元可靠度分析。计算表明：与不采用加速收敛算法的随机有限元相比较，此方法明显提高了计算收敛速度，减少了迭代次数，提高了计算效率。
- 7) 由于研究对象的复杂性，边坡稳定可靠分析中功能函数的形式一般是高度非线性的，用常规的验算点法求可靠指标常常会出现迭代计算不收敛的现象。为此，本文研究有限步长迭代法在边坡稳定有限元可靠度分析中的应用，研究初始步长及步长调整系数的取值，得出了常见的取值范围。计算表明，由于边坡稳定的功能函数的非线性程度很高，因此初始步长必须很小（一般小于 1）；而步长调整系数则对迭代收敛性影响不大。

## 10.2 展望

本文利用弹塑性有限元法分析边坡的可靠度，能反映实际岩土体的非线性性质（如材料非线性，几何非线性）和边坡工程中的随机不确定性，从而能更准确地评价边坡工程的稳定性；该方法应能得出边坡体的整体可靠指标及相应的滑面位置，从而为滑坡灾害的风险分析、风险管理、预测预报及加固设计提供科学依据，达到减灾防灾、安全经济的目的。

但是，要深入研究边坡工程的可靠度，仍有许多问题值得进一步探讨。如：进行边坡稳定性室内模拟研究与野外监测研究，了解边坡的变形破坏规律，并与数值分析的结果进行对比分析；研究降雨与水位变化对边坡稳定可靠度的影响，预测边坡在各种不利条件下的稳定性；在边坡稳定有限元可靠度分析中既考虑随机性又考虑模糊性，研究具有双重非线性（材料非线性与几何非线性）与双重不确定性（随机性与模糊性）的边坡可靠度，从而更真实地评价边坡的稳定性；研究随机有限元的高效率算法，提高考虑双重非线性与双重不确定性时边坡稳定的非线性有限元计算速度。

## 附录 1：平面应变条件下塑性矩阵的求解公式

1. 若  $|\sin \theta_\sigma| \leq 0.49$ , 则

$$\mathbf{D}_p = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)(1-2\mu + \sin \varphi \sin \phi)} \mathbf{A} \quad (\text{A.1.1})$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} R_1 C_1 & R_1 C_2 & R_1 C_3 & R_1 C_4 \\ R_2 C_1 & R_2 C_2 & R_2 C_3 & R_2 C_4 \\ R_3 C_1 & R_3 C_2 & R_3 C_3 & R_3 C_4 \\ R_4 C_1 & R_4 C_2 & R_4 C_3 & R_4 C_4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.2})$$

$$\begin{cases} C_1 = \sin \varphi + k_1(1-2\mu) \sin \alpha \\ C_2 = \sin \varphi - k_1(1-2\mu) \sin \alpha \\ C_3 = k_2(1-2\mu) \cos \alpha \\ C_4 = 2\mu \sin \varphi \end{cases} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\begin{cases} R_1 = \sin \phi + k_1(1-2\mu) \sin \alpha \\ R_2 = \sin \phi - k_1(1-2\mu) \sin \alpha \\ R_3 = k_2(1-2\mu) \cos \alpha \\ R_4 = 2\mu \sin \phi \end{cases} \quad (\text{A.1.4})$$

$$\alpha = \arctan \left| \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right|, \quad k_1 = \begin{cases} 1 & \text{if } (\sigma_x \geq \sigma_y) \\ -1 & \text{if } (\sigma_x < \sigma_y) \end{cases}, \quad k_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } (\tau_{xy} \geq 0) \\ -1 & \text{if } (\tau_{xy} < 0) \end{cases} \quad (\text{A.1.5})$$

2. 若  $|\sin \theta_\sigma| > 0.49$ , 则

$$\mathbf{D}_p = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)[K_\phi \sin \phi + C_\phi C_\phi t^2(1-2\mu)]} \mathbf{A} \quad (\text{A.1.6})$$

其中  $\mathbf{A}$  见式(A.1.2), 其余参数如下:

$$\begin{cases} C_1 = K_\phi + C_\phi [(1-2\mu)s_x + \mu(s_y + s_z)] \\ C_2 = K_\phi + C_\phi [(1-2\mu)s_y + \mu(s_z + s_x)] \\ C_3 = C_\phi (1-2\mu)\tau_{xy} \\ C_4 = K_\phi + C_\phi [(1-2\mu)s_z + \mu(s_x + s_y)] \end{cases} \quad (\text{A.1.7})$$

$$\begin{cases} R_1 = K_\phi + C_\phi [(1-2\mu)s_x + \mu(s_y + s_z)] \\ R_2 = K_\phi + C_\phi [(1-2\mu)s_y + \mu(s_z + s_x)] \\ R_3 = C_\phi (1-2\mu)\tau_{xy} \\ R_4 = K_\phi + C_\phi [(1-2\mu)s_z + \mu(s_x + s_y)] \end{cases} \quad (\text{A.1.8})$$

$$K_\phi = \frac{\sin \varphi}{3}(1+\mu), \quad K_\phi = \frac{\sin \phi}{3}(1+\mu) \quad (\text{A.1.9})$$

$$C_\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4t} \left(1 \pm \frac{\sin \varphi}{3}\right), \quad C_\phi = \frac{\sqrt{6}}{4t} \left(1 \pm \frac{\sin \phi}{3}\right) \quad (\text{A.1.10})$$

式(A.1.1)~(A.1.10)中,  $\varphi$ 、 $\phi$ 、 $E$ 、 $\mu$  分别为岩土的内摩擦角、膨胀角、弹性模量、泊松比,  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  为应力分量,  $s_x, s_y, s_z$  为应力偏量,  $t = \sqrt{2J_2}$ ,  $J_2$  为应力偏量的第二不变量,  $\theta_\sigma$  为洛德角。对于符号土,  $\theta_\sigma \approx -30^\circ$  时取正号,  $\theta_\sigma \approx 30^\circ$  时取负号。

## 附录 2：平面应变条件下塑性矩阵对自变量导数的求解公式

$$\therefore \quad \mathbf{D}_p = \mathbf{D}_p[\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}] \quad (\text{A.2.1})$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}^*)}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{A.2.2})$$

式中上标\*表示求导数时视该变量为常数。式(A.2.2)主要由三部分组成，其中  $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{X}}$  可由随机有限元子程序求得，下面推导  $\frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}^*)}{\partial \mathbf{X}}$  及  $\frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}^*, \boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  的求解公式（以下推导过程中，记基本变量  $\mathbf{X} = (c, \varphi, \phi, \gamma, E, \mu)^T$ ，应力向量  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ ）。

### 1. $\frac{\partial \mathbf{D}_p(\mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}^*)}{\partial \mathbf{X}}$ 的求解（视为 $\boldsymbol{\sigma}$ 常数）

为简化起见，记塑性矩阵  $\mathbf{D}_p$  的表达式(式(A.1.1)或式(A.1.6))的分母为  $BB$ ，则

$$\mathbf{D}_p = \frac{E}{BB} \mathbf{A} \quad (\text{A.2.3})$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \mathbf{D}_p}{\partial X_i} = \frac{\frac{\partial E}{\partial X_i} \cdot \mathbf{A} \cdot BB + E \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial X_i} \cdot BB - E \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\partial BB}{\partial X_i}}{BB^2} \quad (\text{A.2.4})$$

$$\text{式中, } \frac{\partial E}{\partial \mathbf{X}} = \left[ \frac{\partial E}{\partial c} \frac{\partial E}{\partial \varphi} \frac{\partial E}{\partial \phi} \frac{\partial E}{\partial \gamma} \frac{\partial E}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \mu} \right]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \quad (\text{A.2.5})$$

下面分情况求解  $\frac{\partial BB}{\partial \mathbf{X}}$  和  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}}$ 。

#### 1.1. $|\sin \theta_\sigma| \leq 0.49$ 时

##### 1.1.1. 求 $\partial BB / \partial \mathbf{X}$

$$\therefore \quad BB = 2(1+\mu)(1-2\mu)(1-2\mu + \sin \varphi \sin \phi) \quad (\text{A.2.6})$$

$\therefore BB$  只与  $\varphi, \phi, \mu$  有关，则

$$\begin{cases} \frac{\partial BB}{\partial X_2} = \frac{\partial BB}{\partial \varphi} = 2(1+\mu)(1-2\mu)\sin \phi \\ \frac{\partial BB}{\partial X_3} = \frac{\partial BB}{\partial \phi} = 2(1+\mu)(1-2\mu)\sin \varphi \\ \frac{\partial BB}{\partial X_6} = \frac{\partial BB}{\partial \mu} = 2[-3(1-4\mu^2) - \sin \varphi \sin \phi(1+4\mu)] \end{cases} \quad (\text{A.2.7})$$

##### 1.1.2. 求 $\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{X}$

$$\therefore \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial X_i}(j, k) = \frac{\partial R_j}{\partial X_i} C_k + \frac{\partial C_j}{\partial X_i} R_k \quad (j, k=1, \dots, 4) \quad (\text{A.2.8})$$

$\therefore$  求  $\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{X}$  的关键是求  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}}$  及  $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{X}}$

$\because R_j (j=1, \dots, 4)$  只与  $\phi, \mu$  有关

$$\begin{aligned} \therefore \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_3} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = \left[ \frac{\partial R_1}{\partial \phi} \quad \frac{\partial R_2}{\partial \phi} \quad \frac{\partial R_3}{\partial \phi} \quad \frac{\partial R_4}{\partial \phi} \right]^T = [\cos \phi \quad \cos \phi \quad 0 \quad 2\mu \cos \phi]^T \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_6} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mu} = \left[ \frac{\partial R_1}{\partial \mu} \quad \frac{\partial R_2}{\partial \mu} \quad \frac{\partial R_3}{\partial \mu} \quad \frac{\partial R_4}{\partial \mu} \right]^T = 2[-k_1 \sin \alpha \quad k_1 \sin \alpha \quad -k_2 \cos \alpha \quad \sin \phi]^T \end{array} \right. \end{aligned} \quad (A.2.9)$$

$\therefore C_j (j=1, \dots, 4)$  只与  $\varphi, \mu$  有关

$$\begin{aligned} \therefore \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial X_2} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \varphi} = \left[ \frac{\partial C_1}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial C_2}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial C_3}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial C_4}{\partial \varphi} \right]^T = [\cos \varphi \quad \cos \varphi \quad 0 \quad 2\mu \cos \varphi]^T \\ \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial X_6} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mu} = \left[ \frac{\partial C_1}{\partial \mu} \quad \frac{\partial C_2}{\partial \mu} \quad \frac{\partial C_3}{\partial \mu} \quad \frac{\partial C_4}{\partial \mu} \right]^T = 2[-k_1 \sin \alpha \quad k_1 \sin \alpha \quad -k_2 \cos \alpha \quad \sin \varphi] \end{array} \right. \end{aligned} \quad (A.2.10)$$

## 1.2. $|\sin \theta_\sigma| > 0.49$ 时

### 1.2.1. 求 $\partial BB / \partial \mathbf{X}$

$$\because BB = (1+\mu)(1-2\mu)[K_\varphi \sin \phi + C_\varphi C_\phi t^2(1-2\mu)] \quad (A.2.11)$$

$\therefore BB$  只与  $\varphi, \phi, \mu$  有关，则

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial BB}{\partial X_2} = \frac{\partial BB}{\partial \varphi} = (1+\mu)(1-2\mu)[\cos \varphi \cdot K_\varphi \pm \frac{1}{2\sqrt{6}} \cos \varphi \cdot C_\varphi \cdot (1-2\mu) \cdot t] \\ \frac{\partial BB}{\partial X_3} = \frac{\partial BB}{\partial \phi} = (1+\mu)(1-2\mu)[\cos \phi \cdot K_\phi \pm \frac{1}{2\sqrt{6}} \cos \phi \cdot C_\phi \cdot (1-2\mu) \cdot t] \\ \frac{\partial BB}{\partial X_6} = \frac{\partial BB}{\partial \mu} = -2 \sin \varphi \cdot \sin \phi \cdot \mu(1+\mu) - 3C_\varphi C_\phi t^2(1-4\mu^2) \end{array} \right. \quad (A.2.12)$$

### 1.2.2. 求 $\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{X}$

$\because$  由式(A.2.10)知，求  $\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{X}$  的关键是求  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}}$  及  $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{X}}$

$\therefore$  下面分别求  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}}$  及  $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{X}}$

$\because R_j (j=1, \dots, 4)$  只与  $\phi, \mu$  有关

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial X_3} = \frac{\partial R_1}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi}{3} (1+\mu) \pm \frac{1}{4\sqrt{3}J_2} \cos \phi \cdot [(1-\mu)s_x + \mu(s_y + s_z)] \\ \frac{\partial R_2}{\partial X_3} = \frac{\partial R_2}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi}{3} (1+\mu) \pm \frac{1}{4\sqrt{3}J_2} \cos \phi \cdot [(1-\mu)s_y + \mu(s_z + s_x)] \\ \vdots \\ \frac{\partial R_3}{\partial X_3} = \frac{\partial R_3}{\partial \phi} = \pm \frac{1}{4\sqrt{3}J_2} \cos \phi \cdot (1-2\mu)\tau_{xy} \\ \frac{\partial R_4}{\partial X_3} = \frac{\partial R_4}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi}{3} (1+\mu) \pm \frac{1}{4\sqrt{3}J_2} \cos \phi \cdot [(1-\mu)s_z + \mu(s_x + s_y)] \end{cases} \quad (A.2.13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial X_6} = \frac{\partial R_1}{\partial \mu} = \frac{\sin \phi}{3} + C_\phi (-s_x + s_y + s_z) \\ \frac{\partial R_2}{\partial X_6} = \frac{\partial R_2}{\partial \mu} = \frac{\sin \phi}{3} + C_\phi (-s_y + s_z + s_x) \\ \frac{\partial R_3}{\partial X_6} = \frac{\partial R_3}{\partial \mu} = -2C_\phi \tau_{xy} \\ \frac{\partial R_4}{\partial X_6} = \frac{\partial R_4}{\partial \mu} = \frac{\sin \phi}{3} + C_\phi (-s_z + s_x + s_y) \end{cases} \quad (A.2.14)$$

$\because C_j (j=1, \dots, 4)$  只与  $\varphi$ 、 $\mu$  有关

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial X_2} = \frac{\partial C_1}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi}{3} (1+\mu) \pm \frac{1}{4\sqrt{3}J_2} \cos \phi \cdot [(1-\mu)s_x + \mu(s_y + s_z)] \\ \frac{\partial C_2}{\partial X_2} = \frac{\partial C_2}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi}{3} (1+\mu) \pm \frac{1}{4\sqrt{3}J_2} \cos \phi \cdot [(1-\mu)s_y + \mu(s_z + s_x)] \\ \vdots \\ \frac{\partial C_3}{\partial X_2} = \frac{\partial C_3}{\partial \phi} = \pm \frac{1}{4\sqrt{3}J_2} \cos \phi \cdot (1-2\mu)\tau_{xy} \\ \frac{\partial C_4}{\partial X_2} = \frac{\partial C_4}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi}{3} (1+\mu) \pm \frac{1}{4\sqrt{3}J_2} \cos \phi \cdot [(1-\mu)s_z + \mu(s_x + s_y)] \end{cases} \quad (A.2.15)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial X_6} = \frac{\partial C_1}{\partial \mu} = \frac{\sin \phi}{3} + C_\phi (-s_x + s_y + s_z) \\ \frac{\partial C_2}{\partial X_6} = \frac{\partial C_2}{\partial \mu} = \frac{\sin \phi}{3} + C_\phi (-s_y + s_z + s_x) \\ \frac{\partial C_3}{\partial X_6} = \frac{\partial C_3}{\partial \mu} = -2C_\phi \tau_{xy} \\ \frac{\partial C_4}{\partial X_6} = \frac{\partial C_4}{\partial \mu} = \frac{\sin \phi}{3} + C_\phi (-s_z + s_x + s_y) \end{cases} \quad (A.2.16)$$

## 2. $\frac{\partial D_p(X^*, \sigma)}{\partial \sigma}$ 的求解 (视为 $X$ 常数)

由式(A.1.1)知,当X为常数时, $\mathbf{D}_p$ 的表达式中只有A与应力 $\sigma$ 有关,因此只需推导 $\partial A / \partial \sigma$ 的公式。

### 2.1. $|\sin\theta_\sigma| \leq 0.49$ 时

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial \sigma} = [\frac{\partial C_1}{\partial \sigma_x} \frac{\partial C_1}{\partial \sigma_y} \frac{\partial C_1}{\partial \tau_{xy}}] = k_1(1-2\mu)\cos\alpha \cdot [\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_{xy}}] \\ \frac{\partial C_2}{\partial \sigma} = [\frac{\partial C_2}{\partial \sigma_x} \frac{\partial C_2}{\partial \sigma_y} \frac{\partial C_2}{\partial \tau_{xy}}] = -k_1(1-2\mu)\cos\alpha \cdot [\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_{xy}}] = -\frac{\partial C_1}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial C_3}{\partial \sigma} = [\frac{\partial C_3}{\partial \sigma_x} \frac{\partial C_3}{\partial \sigma_y} \frac{\partial C_3}{\partial \tau_{xy}}] = -k_2(1-2\mu)\sin\alpha \cdot [\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_{xy}}] \\ \frac{\partial C_4}{\partial \sigma} = [\frac{\partial C_4}{\partial \sigma_x} \frac{\partial C_4}{\partial \sigma_y} \frac{\partial C_4}{\partial \tau_{xy}}] = [0 \ 0 \ 0] \end{cases} \quad (\text{A.2.17})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \sigma} \quad (\text{A.2.18})$$

其中

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_x} = \frac{2k_3\tau_{xy}}{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_y} = -\frac{2k_3\tau_{xy}}{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} = -\frac{\partial \alpha}{\partial \sigma_x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_{xy}} = \frac{-2k_3(\sigma_x - \sigma_y)}{4\tau_{xy}^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2} \end{cases} \quad (\text{A.2.19})$$

### 2.2. $|\sin\theta_\sigma| > 0.49$ 时

$$\begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial \sigma} = [\frac{\partial C_1}{\partial \sigma_x} \frac{\partial C_1}{\partial \sigma_y} \frac{\partial C_1}{\partial \tau_{xy}}] = [\frac{2(1-2\mu)}{3} C_\varphi \quad -\frac{1-2\mu}{3} C_\varphi \quad 0] \\ \frac{\partial C_2}{\partial \sigma} = [\frac{\partial C_2}{\partial \sigma_x} \frac{\partial C_2}{\partial \sigma_y} \frac{\partial C_2}{\partial \tau_{xy}}] = [-\frac{1-2\mu}{3} C_\varphi \quad \frac{2(1-2\mu)}{3} C_\varphi \quad 0] \\ \frac{\partial C_3}{\partial \sigma} = [\frac{\partial C_3}{\partial \sigma_x} \frac{\partial C_3}{\partial \sigma_y} \frac{\partial C_3}{\partial \tau_{xy}}] = [0 \quad 0 \quad (1-2\mu)C_\varphi] \\ \frac{\partial C_4}{\partial \sigma} = [\frac{\partial C_4}{\partial \sigma_x} \frac{\partial C_4}{\partial \sigma_y} \frac{\partial C_4}{\partial \tau_{xy}}] = [-\frac{1-2\mu}{3} C_\varphi \quad -\frac{1-2\mu}{3} C_\varphi \quad 0] \end{cases} \quad (\text{A.2.20})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R_1}{\partial \sigma} = \left[ \frac{\partial R_1}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial R_1}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial R_1}{\partial \tau_{xy}} \right] = \left[ \frac{2(1-2\mu)}{3} C_\phi \quad -\frac{1-2\mu}{3} C_\phi \quad 0 \right] \\ \frac{\partial R_2}{\partial \sigma} = \left[ \frac{\partial R_2}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial R_2}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial R_2}{\partial \tau_{xy}} \right] = \left[ -\frac{1-2\mu}{3} C_\phi \quad \frac{2(1-2\mu)}{3} C_\phi \quad 0 \right] \\ \frac{\partial R_3}{\partial \sigma} = \left[ \frac{\partial R_3}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial R_3}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial R_3}{\partial \tau_{xy}} \right] = \left[ 0 \quad 0 \quad (1-2\mu)C_\phi \right] \\ \frac{\partial R_4}{\partial \sigma} = \left[ \frac{\partial R_4}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial R_4}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial R_4}{\partial \tau_{xy}} \right] = \left[ -\frac{1-2\mu}{3} C_\phi \quad -\frac{1-2\mu}{3} C_\phi \quad 0 \right] \end{array} \right. \quad (A.2.21)$$

## 参 考 文 献

- [1] 陈祖煜. 土坡稳定分析-原理、方法、程序[M]. 中国水利水电出版社,2003:239 - 248.(Chen Zhuyu. Soil slope stability analysis- Theory Method and Programs [M]. China Water Power Press, 2003, 239 - 248.(in Chinese))
- [2] 常大民. 桥梁结构可靠度分析与设计[M]. 北京:铁道出版社, 1995.
- [3] 包承纲. 谈岩土工程概率分析法中的若干基本问题 [J]. 岩土工程学报,1989,11(4):94-98.
- [4] Fellenius W. Calculation of the stability of earth slope [J]. Transactions of 2nd Congress on Large Dams, Washington, DC, 1936:445-462.
- [5] Bishop A W. The use of slip circle in the stability analysis of slopes [J]. Geotechnique, 1955,1(1):7-17.
- [6] Janbu N. Application of composite slip surface for stability analysis [A]. Proc., European Conf. on stability of earth slopes [C], Sweden, 1954,3,43-49.
- [7] Sarma S K. Stability analysis of embankments and slopes [J]. Geotechnical,1973,23(3): 423-433.
- [8] Morgenstern N R, Price V E. The analysis of the stability of general slip surfaces [J]. Geotechnique,1965,15(1), 79-93.
- [9] Spencer E. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces [J]. Geotechnique,1967,17(1):11-26.
- [10] Janbu N. Slope stability computations [A]. In: Hirschfield E, Poulos S, editors. Embankment Dam Engineering [C]. New York: John Wiley, 1973,47-86.
- [11] Chen Zhuyu, Morgenstern N R. Extensions to the generalized method of slices for stability analysis [J]. Canadian Geotechnical Journal,1983,20(1):104-119.
- [12] 郑颖人, 赵尚毅, 时卫民, 林丽. 边坡稳定分析的一些进展 [J]. 地下空间,2001,21(4): 262-271.
- [13] Zhu D Y, Lee C F, Jiang H D. Generalized framework of limit equilibrium methods for slope stability analysis [J]. Geotechnique,2003,53(4):377-395.
- [14] Duncan J M. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slope [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE,1996,122(7):577-596.
- [15] Baker R. Determination of critical slip surface in slope stability computations [J]. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,1980,4, 333-359.
- [16] Celestino Y B, Duncan J M. Simlified search for noncircular slip surface [A]. 10<sup>th</sup> Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Engr. [A]. 1981,391-394.
- [17] Li K S, White W. Rapid evaluation of the critical slip surface in slope stability problems [J]. International Journal for Numerical and Analytical methods in Geomechanics,1987,11, 449-473.
- [18] 陈祖煜, 邵长明. 最优化方法在确定边坡最小安全系数方面的应用 [J]. 岩土工程学报, 1988,10(4).
- [19] Greco Y R. Efficient Monte-Carlo technique for locating critical slip surface [J]. Journal of Geotechnical Engineering,1997,122(7): 517-525.
- [20] 莫海鸿, 唐超宏, 刘少跃. 应用模式搜索法寻找最危险滑动圆弧 [J]. 岩土工程学报,

- 1999,21(6):696-699. (Mo Haihong, Tang Chaohong, Liu Shaoyue. Determination of the most dangerous slip surface with pattern search method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, 21(6):696-699.(in Chinese))
- [21] 房营光, 莫海鸿. 基于无记忆最小二乘拟牛顿法的边坡稳定性分析 [J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(1): 34-38. (Fang Yingguang, Mo Haihong. Slope stability analysis based on the memoryless least square quasi-Newton method. Chinese Journal of Rock mechanics and Engineering, 2002, 21(1):34-38.(in Chinese))
- [22] 李亮, 迟世春, 林皋. 基于蚁群算法的复合形法及其在边坡稳定分析中的应用 [J]. 岩土工程学报, 2004, 26(5):691-696(Li liang, Chi Shichun, Lin Gao. Slope stability analysis by Lagrangian difference method based on shear strength reduction [J].Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(5):691-696.(in Chinese))
- [23] 高玮, 冯夏庭. 基于仿生算法的滑坡危险滑动面反演(1)——滑动面搜索 [J].岩石力学与工程学报,2005, 24(13): 2237-2241. (Gao Wei, Feng Xia-ting. Back analysis of critical failure surface of slope based on bionics algorithm(1)——location of critical failure surface [J]. Chinese Journal of Rock mechanics and Engineering,2005, 24(13):2237-2241. (in Chinese))
- [24] Zou J Z, Williams D J. Search for critical slip surface based on finite element method [J]. Canadian Geotechnical Journal,1995,32(1):233-246.
- [25] Matsui T, San K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique [J]. Soils and Foundations, 1992, 32(1):59-70.
- [26] Swan C C, Seo Y K. Limit state analysis of earthen slopes using dual continuum/FEM approaches [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,1999,23:1359-1371.
- [27] Dawson E M, Roth W H, Drescher A. Slope stability analysis by strength reduction [J]. Geotechnique, 1999, 49(6):835-840.
- [28] Griffiths D V, Lane P A. Slope stability analysis by finite element [J]. Geotechnique, 1999,49(3):387-403.
- [29] Wright S G, Kulhawy F H, Duncan J M. Accuracy of equilibrium slope stability analysis [J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering,1973,99(10):783-791.
- [30] Yamagami T, Ueta Y. Search for critical slip lines in finite element stress fields by dynamic programming [A]. Proc. 6th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics [C]. Innsbruck, Australia,1988: 1335-1339.
- [31] Kim J Y, Li S R. An improved search strategy for the critical slip surface using finite element stress fields [J]. Computer and Geotechnics,1997,21(4):295-313.
- [32] Giam S K, Donald I B. Determination of critical slip surfaces for slopes via stress-strain calculations [A]. 5<sup>th</sup> A.N.Z. Conference on Geomechanics [C], Sydney,1988:461-464.
- [33] 史恒通, 王成华. 土坡有限元稳定分析若干问题的探讨 [J]. 岩土力学,2000,21(12):152 -155.
- [34] 郑宏, 李春光, 李焯芬, 葛修润. 求解安全系数的有限元法 [J]. 岩土工程学报,2002, 24(5):626-628.(Zheng Hong, Li Chunguang, Lee CF Ge Xiuren, et al. Finite element method for the factor of safety [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002,24(5):626-628.(in Chinese))
- [35] 郑宏, 田斌, 刘德富, 冯强. 关于有限元边坡稳定性分析中安全系数的定义问题 [J]. 岩

- 石力学与工程学报, 2005,24(13):2225-2230.(Zheng Hong, Tian Bin, Liu Defu, Feng Qiang. On definition of safety factor of slope stability analysis with the finite element method [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005,24(13):2225-2230.(in Chinese))
- [36] Zheng Hong, Liu Defu, Lee C F, et al. Displacement-controlled method and its applications to material non-linearity [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,2005,29(3): 209-226.
- [37] 郑宏, 刘德富, 罗先启. 基于变形分析的边坡潜在滑面的确定 [J]. 岩石力学与工程学报, 2004,23(5):709-716. (Zheng Hong, Liu De-fu, Luo Xian-qi. Determination of potential slide line of slopes based on deformation analysis [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004,23(5):709-716.(in Chinese))
- [38] 朱以文, 吴春秋, 蔡元奇. 基于滑移线场理论的边坡滑裂面的确定 [J]. 岩石力学与工程学报,2005,24(15): 2609-2616.(Zhu Yi-wen, Wu Chun-qiu, Cai Yuan-qi. Determination of slip surface in slope based on theory of slip line field [J]. Chinese Journal of Rock mechanics and Engineering,2005,24(15):2609-2616.(in Chinese))
- [39] Woodward P K. Stability of slopes with berms on rigid foundations. Geotechnical and Geological Engineering, 1999, 16:309-320.
- [40] Hamdy Faheem, Fei Cai, Keizo Ugai. Three dimensional base stability of rectangular excavations in soft soils using FEM [J]. Computers and Geotechnics,2004,31:67-74.
- [41] 马建勋, 赖志生, 蔡庆娥, 徐振立. 基于强度折减法的边坡稳定性三维有限元分析 [J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(16):2690-2693.(Ma Jianxun, Lai Zhisheng, Xu Zhenli. 3D FEM analysis of slope stability based on strength reduction method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004,23(16):2690-2693.(in Chinese))
- [42] Lechman J B, Griffiths D V. Analysis of the progression of failure of earth slopes by finite elements [A]. In: Geotechnical Special Publication: Slope Stability 2000 [C]. U.S.A: ASCE, 2000.250-265.
- [43] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 王敬林. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数 [J]. 岩土工程学报,2002,24(3): 343-346. ( Zhao Shang-yi, Zheng Yin-ren, Shi Wei-min, Wang Jinglin. Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002,24(3):343-346. (in Chinese))
- [44] 赵尚毅, 郑颖人, 邓卫东. 用有限元强度折减法进行节理岩质边坡稳定性分析 [J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(2):254 - 260. ( Zhao Shangyi, Zheng Yinren, Deng Weidong. Stability analysis on jointed rock slope by strength reduction FEM [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 22(2):254 - 260.(in Chinese))
- [45] 宋二祥. 土工结构安全系数的有限元计算 [J]. 岩土工程学报,1997,19(1):1-7.(Song Er-xiang. Finite element analysis of safety factor for soil structures [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,1997,19(1):1-7. (in Chinese))
- [46] 宋二祥, 高翔, 邱月. 基坑土钉支护安全系数的强度参数折减有限元方法 [J]. 岩土工程学报,2005,27(3): 258-263.(Song Er-xing, Gao Xiang, Qiu Yue. Finite element calculation for safety factor of soil nailing through reduction of strength parameters [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2005,27(3):258-263. (in Chinese))
- [47] 葛修润, 任建喜, 李春光等. 三峡左厂 3#坝段深层抗滑稳定三维非线性有限元分析 [J]. 岩土工程学报,2003,25 (4):389-394.(Ge Xiurun,Ren Jianxi, Li CHunguang,et al. 3D-FEM

- analysis of deep sliding stability of 3# dam foundation of left power house of the Three Gorges Project [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003,25(4):389-394. (in Chinese))
- [48] Matsui T, San K C. A hybrid slope stability analysis method with its application to reinforced slope cutting [J]. Soils and Foundations, 1990,30(2):79-82.
- [49] 连镇营, 韩国城, 孔宪京. 强度折减法研究开挖边坡的稳定性 [J]. 岩土工程学报, 2001,23(4):407-411.(Lian Zhen-ying, Han Guo-cheng, Kong Xian-jing. Stability analysis of excavation by strength reduction FEM [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001,23(4):407-411.(in Chinese))
- [50] 周翠英, 刘祚秋, 董立国, 等. 边坡变形破坏过程的大变形有限元分析 [J]. 岩土力学, 2003, 24(4):644 ~ 647, 652.(Zhou Cuiying, Liu Zuoqiu, Dong Liguo, et al. Large deformation fem analysis of slopes failure [J]. Yan Tu Li Xue, 2003, 24(4):644 ~ 647, 652.(in Chinese))
- [51] 黎茂田, 武亚军, 年延凯. 强度折减有限元法边坡失稳的塑性区判据及其应用 [J]. 防灾减灾工程学报, 2003,3:1-8. (Luan Maotian, Wu Yajun, Nian Tingkai. A criterion for evaluating slope stability based on development of plastic zone by shear strength reduction FEM [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2003,3:1-8. (in Chinese))
- [52] 赵尚毅, 郑颖人, 张玉芳. 极限分析有限元法讲座-II 有限元强度折减法中边坡失稳的判据探讨 [J]. 岩土力学, 2005,26(2):332-336.( Zhao Shangyi, Zheng Yinren, Zhang Yufang. Study on slope failure criterion in strength reduction finite element method [J]. Rock and Soil Mechanics, 2005,26(2):332-336.(in Chinese))
- [53] 郑宏, 刘德富. 弹塑性矩阵  $D_{ep}$  的特性和有限元边坡稳定性分析中的极限状态标准 [J]. 岩石力学与工程学报. 2005,24(7):1099-1105.(Zheng Hong, Liu Defu. Properties of elasto-plastic matrix  $D_{ep}$  and a criterion on limiting state of slope stability by FEM [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2005,24(7): 1099-1105.(in Chinese))
- [54] 邵国建, 卓家寿, 章青. 岩体稳定性分析与评价准则研究 [J]. 岩石力学与工程学报,2003,22(5): 691-696. (Shao Guojian, Zhuo Jiashou, Zhang Qing. Research on analysis method and criterion of rock amss stability [J]. Chinese Journal of Rock mechanics and Engineering,2003,22(5):691-696.(in Chinese))
- [55] Hwang J, Dewoolkar M, Hon-Yim Ko. Stability analysis of two-dimensional excavated slopes considering strength anisotropy [J]. Canadian Geotechnical Journal,2002,39:1026-1038.
- [56] Dawson E, You K, Park Y. Strength-reduction stability analysis of rock slopes using the Hoek-Brown failure criterion [A]. In: J.F.Labuz ed. Geotechnical Special Publication: Trends in Rock Mechanics [C]. [s.l.]:ASCE, 2000,102: 65-77.
- [57] Manzari M T, Nour M A. Significance of soil dilatancy in slope stability analysis [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering,2000,126(1):75-80.
- [58] 张鲁渝, 刘东升, 时卫民. 扩展广义 Drucker-Prager 屈服准则在边坡稳定分析中的应用 [J]. 岩土工程学报,2003,25(2):216-219.( Zhang Luyu, Liu Dongsheng, Shi Weimin. Application of the extended general Drucker-Prager yield criterion to slope stability analysis [J]. 2003,25(2):216-219.(in Chinese))
- [59] 张培文, 陈祖煜. 剪胀角对求解边坡稳定的安全系数的影响 [J]. 岩土力学,2004,25(11): 1757-1760.(Zhang Peiwen, Chen Zuyu. Finite element method for solving safety factor of

- slope stability [J]. Rock and Soil Mechanics, 2004,25(11):1757-1760. (in Chinese))
- [60] 沈珠江. 应变软化材料的广义孔隙压力模型 [J]. 岩土工程学报,1997,19(3):14 - 21. (Sheng Zhujiang. Generalized pore water pressure model of strain softening material [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,1997,19(3):14 - 21.(in Chinese))
- [61] Imai K, Frangopol D M. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. I: theory [J]. Computers and structures. 2000,77:677-691.
- [62] Frangopol D M, Imai K. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. II: applications [J]. Computers and structures. 2000,77:693-709.
- [63] Imai K, Frangopol D M. Response prediction of geometrically nonlinear structures [J]. Journal of Structural Engineering,2001,126(11):1348-1355.
- [64] Imai K, Frangopol D M. System reliability of suspension bridges [J]. Structural Safety,2002,2,219-259.
- [65] Leewis R W, Khoei A R. Numerical modeling of large deformation in metal power forming [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1998,15,291-328.
- [66] Carte J, Small J C, Booker J R. A theory of finite elastic consolidation [J]. International Journal of Solids Structures,1977,13:461- 478.
- [67] Prevost J H. Nonlinear transient phenomena in saturated porous media [J]. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering,1982,20.
- [68] Asaoka A, Noda T. Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-Clay under plain strain compression with undrained boundaries. Japan Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering,1995,35(1):83-100.
- [69] Rowe R K, Gnanendran C T, Landva A O, Valsangkar A J. Calculated and observed behaviors of a reinforced embankment over soft compressible soil [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1996,32(2):324-338.
- [70] Borja R I, Tamagnini C, Alarcon E. Elastoplastic consolidation at finite strain. Part 2: Finite element implementation and numerical examples [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1998,159: 103-122.
- [71] Foti S, Lancellotta R. A note on finite deformation consolidation models [J]. Mathl. Comput. Modelling,1998,28(1):1-7.
- [72] Larsson J, Larsson R. Nonlinear analysis of nearly saturated porous media: theoretical and numerical formulation [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2002,191,3885-3907.
- [73] Yuan Di, T.Sato. Liquefaction analysis of saturated soils taking into account variation in porosity and permeability with large deformation [J]. Computers and Geotechnics, 2003,30:623-635.
- [74] 周正明. 饱和土体大变形固结有限元分析 [J]. 水利水运科学研究,1992(1):106-110.
- [75] 谢永利. 大变形固结理论及其有限元分析 [博士学位论文]. 杭州:浙江大学,1994 .
- [76] 谢永利, 潘秋元, 曾国熙. 物质描述的大变形固结理论及有限元法 [J]. 浙江大学学报,1995,29(4):476 - 485.(Xie Yongli, Pan Qiuyuan, Zeng Guoxi. Large-strain consolidation theory and finite element analysis based on the material description method [J]. Zhe Jiang Da Xue Xue Bao,1995,29(4):476 - 485. (in Chinese))
- [77] 谢永利. 大变形固结理论及其有限元法 [M]. 北京:人民交通出版社,1998.
- [78] 谢新宇, 朱向荣, 谢康和, 潘秋元. 饱和土体一维大变形固结理论新进展 [J]. 岩土工程

- 学报,1997,19(4): 30-38. (Xie Xinyu, Zhu Xiangrong, Xie Kanghe, Pan Qiuyuan. New developments of one-dimensional large strain consolidation theories [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,1997,19(4):30-38. (in Chinese))
- [79] 蒋明镜, 沈珠江. 饱和土体的弹塑性大变形有限元平面固结分析 [J]. 河海大学学报 ,1998,26(1):73-77.(Jiang Mingjin, Shen Zhujiang. Finite element analysis of elasto-plastic large-strain consolidation for saturated Cam-Clay soft soils [J]. Journal of Hohai University, 1998,26(1):73-77.(in Chinese))
- [80] 何开胜, 沈珠江, 彭新宣. 两种 Lagrangian 大变形比奥固结有限元法及其与小变形法的比较 [J]. 岩土工程学报,2000,22(1):30-34.(He Kaisheng, Sheng Zhujiang, Peng Xinxuan. The comparison of large strain method using total and updated lagrangian finite element formulation and small strain method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000,22(1):30 - 34.(in Chinese))
- [81] 罗晓辉, 白世伟. 深基坑大变形耦合分析与数值模拟 [J]. 岩土力学,2003,24(6):974-978. (Luo Xiaohui, Bai Shiwei. Couple analysis and numerical simulation of large deformation of deep foundation pit [J]. Rock and Soil Mechanics,2003,24(6):974-978. (in Chinese))
- [82] 李术才, 朱维申, 陈卫忠, 李树忱. 弹塑性大变形有限元方法在软岩隧道变形预估系统研究中的应用 [J]. 岩石力学与工程学报,2002,21(4):466 - 470.(Li Shucui, Zhu Weisheng, Chen Weizhong, Li Shuchen. Application of elasto-plastic large displacement finite element method to the study of deformation prediction of soft rock tunnel [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2002,21(4):466 - 470.(in Chinese))
- [83] 张玉军, 刘谊平. 地下洞室埋深对围岩双重非线性影响的有限元分析 [J]. 岩土力学,2003,24(1): 127-129. (Zhang Yujun, Liu Yiping. Finite element analyses for influence of embedded depth of an underground opening on double-nonlinearity of surrounding rockmass [J]. Rock and Soil Mechanics, 2003,24(1):127-129.(in Chinese))
- [84] 何满潮, 王树仁. 大变形数值方法在软岩工程中的应用 [J]. 岩土力学,2004,25(2): 185-188.(He Manchao, Wang Shurem. Application of numerical method of large deformation to soft rock engineering [J]. Rock and Soil Mechanics, 2004,25(2):185-188.(in Chinese))
- [85] 施斌, 吴智深, 李琦等. 边坡大变形弹塑性有限元分析 [J]. 水文地质工程地质,1999, 26(2):24-26.(Shi Bin, Wu Zhisheng, Li Qi. The Analysis of large elasto-plastic deformation of a slope [J]. Hydrogeology and engineering geology,1999,26(2):24-26.(in Chinese))
- [86] Freudenthal A M. The safety of structures. Transaction of ASCE,1947,112:125-159.
- [87] ISO/DIS2394. General principles on reliability for structures. 1986.
- [88] ISO/DIS2394. General principles on reliability for structures. 1988.
- [89] 中华人民共和国国家标准. 工程结构设计可靠度设计统一标准(GB50153-92). 北京:中国计划出版社,1992.
- [90] 中华人民共和国国家标准. 建筑结构设计统一标准(GBJ68-84). 北京:中国建筑工业出版社,1984.
- [91] 中华人民共和国国家标准. 港口工程结构可靠度设计统一标准(GB50158-92). 北京:中国计划出版社,1992.
- [92] 中华人民共和国国家标准. 水利水电工程结构可靠度设计统一标准(GB50199-94). 北京:中国计划出版社,1994.

- [93] 中华人民共和国国家标准. 铁路工程结构可靠度设计统一标准(GB50216-94). 北京:中国计划出版社,1994.
- [94] 中华人民共和国国家标准. 公路工程结构可靠度设计统一标准(GB/T50216-94). 北京:中国计划出版社, 1999.
- [95] 中华人民共和国国家标准. 建筑结构可靠度设计统一标准(GB50068-2001). 北京:中国建筑工业出版社,2001.
- [96] Cornell C A . A probabilistic based structural code. *Journal of the American Concrete Institute*,1969,66(12): 974-985.
- [97] Cornell CA. First-order uncertainty analysis of soils deformation and stability [A]. In: Proc. 1st Int. Conf. On Application of Probability and Statistics in Soil and Structural Engineering (ICAPI) [C], Hong Kong, 1971. 129-144.
- [98] Hasofer A M, Lind N C. An exact and invariant first order reliability format [J]. *Journal of Engineering Mechanics ,ASCE* 1974,100(EM1):111-21.
- [99] Rackwitz R, Fiessler B. Structural reliability under combined random load sequences [J]. *Computers and Structures*,1978,9(5): 489-494.
- [100] Rosenblatt M. Remarks on a multivariate transformation [J]. *The Annals of Mathematical Statistics*,1952,23: 470-472.
- [101] Fiessler B, Neumann H J, Rackwitz R. Quadratic limit states in structural reliability [J]. *Journal of Engineering Mechanis*, ASCE,1979,105(4):661-676.
- [102] Breitung K. Asymptotic approximation for multi-normal integrals [J]. *Journal of Engineering Mechanics*,1984, 110(3):357-366.
- [103] Tvedt L. Distribution of quadratic forms in normal space-application to structural reliability [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1990,116(6):1183-97.
- [104] Koayluoglu H U, Nielsen S R K. New approximations for SORM integrals [J]. *Structural Safety*,1994,13,235-246. 1994.
- [105] Zhao Yan-gang, Ono T. New approximations for SORM: Part 1 [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1999,125(1):79-85.
- [106] Yan-gang Zhao, Ono T. New approximations for SORM: Part 2 [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1999,125(1):86-93.
- [107] Kiureghian A D, Lin H Z, Hwang S J. Second-order reliability approximations [J]. *Journal of Engineering Mechanics*,1987,113(8): 1208-1225.
- [108] Kiureghian A D, Stefano M D. Efficient algorithm for second-order reliability analysis [J]. *Journal of Engineering Mechanics*,1991,117(12):2904-2923.
- [109] Box G E P, Wilson K B. The exploration and exploitation of response surfaces: some general considerations and examples [M]. *Biometrics* 1954;10:16-60.
- [110] Wong F S. Uncertainties in dynamic soil-structure interaction [J]. *Journal of Engineering Mechanics*,1984, 110:308-24.
- [111] Wong F S. Slope reliability and response surface method [J]. *Journal of Geotechnical Engineering,ASCE*,1985, 111:32-53.
- [112] Faravelli L. Response surface approach for reliability analysis [J]. *Journal of Engineering Mechanics*,1989,115(12): 2763-81.
- [113] Faravelli L. Structural reliability via response surface [A]. In: Bellomo N, Casciati F, editors. *Proc of IUTAM symposiumon nonlinear stochastic mechanics* [C]. Springer Verlag;

- 1992,213-23.
- [114] Bucher C G, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems [J]. Structural Safety,1990,7:57-66.
- [115] Rajashekhar M R, Ellingwood B R. A new look at the response surface approach for reliability analysis [J]. Structural Safety,1993,12:205-220.
- [116] Liu Y W, Moses F. A sequential response surface method and its application in the reliability analysis of aircraft structural systems [J]. Structural Safety 1994;16:39-46.
- [117] 佟晓利, 赵国藩. 一种与结构可靠度分析几何法相结合的响应面方法[J]. 土木工程学报, 1997,30(4):51-57. (Tong Xiaoli, Zhao Guofan. The response surface method in conjunction with geometric method in structural reliability analysis [J]. China Civil Engineering Journal,1997,30(4):51-57.(in Chinese))
- [118] Kim S H, Na S W. Response surface method using vector projected sampling points [J]. Structural Safety,1997,19(1): 3-19.
- [119] Y.Zheng, P.K.Das. Improved response surface method and its application to stiffened plate reliability analysis [J]. Engineering Structures,2000,22:544-551.
- [120] Adhikari S. Reliability analysis using parabolic failure surface approximation [J]. Journal of Engineering Mechanics,2004,130,12(1):1407-1427.
- [121] Nguyen V U, Chowdhury R N. Simulation for risk analysis with correlated variables. Geotechnique, 1985,35(1): 47-58.
- [122] 李云贵, 赵国藩. 结构体系可靠度的近似计算方法 [J]. 土木工程学报,1993,26(5):70-75.
- [123] Ditlevsen O. Narrow reliability bounds for structural systems [J]. Journal of Structural Mechanics,1979,(7):453-472.
- [124] Chowdhury R N, Xu D W. Geotechnical system reliability of slopes [J]. Reliability Engineering and System Safety, 1995, 47:141-151.
- [125] Song Junho, Kiureghian A D. Bounds on system reliability by linear programming [J]. Journal of Engineering Mechanics,2003,129(6):627-636.
- [126] Matsuo M, Kuroda K. Probabilistic approach to design of embankments [J]. Soils and Foundations,1974,14(2): 1-17.
- [127] Matsuo M. Reliability in embankment design [R]. M.I.T. Dept. of Civil Engineering Research Report R 76-33.Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 1976.
- [128] Ang A H S, Tang W H. Probability concepts in engineering planning and design [M]. Vol. I. Basic principles. John Wiley, New York. 1975.
- [129] Alonso E E. Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays [J]. Géotechnique, 1976,26:453-472.
- [130] Tang W H, Yucemen M S, Ang A H S. Probability-based short term design of slopes [J]. Canadian Geotechnical Journal 1976,13(3):201-215.
- [131] Harr M E. Mechanics of particular media [M]. New York: McGraw-Hill, 1977.
- [132] Vanmarcke E H. Reliability of earth slopes [J]. Journal of Geotechnical Engineering,1977,103(11):1247-1265.
- [133] Chowdhury R N. Slope analysis [M]. New York: Elsevier scientific publishing company,1978.
- [134] Ang A H S, Tang W H. Probability concepts in engineering planning and design [M]. Vol. II. Decision, risk and reliability. John Wiley, New York. 1984.
- [135] Chowdhury R N. 1984. Recent developments in landslide studies: probabilistic methods [A]. In Proceedings of the 4th International Symposium on Landslides [C], Toronto, Ont.,

- September 16–21. Canadian Geotechnical Society, Vol. 1, pp. 209–228.
- [136] Chowdhury R N, Tang W H. Comparison of risk models for slopes [A]. In Proceedings of the 5th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering [C], Vancouver, 1987, Vol. 2:863–869.
- [137] Chowdhury R N, Xu D W. Rational Polynomial Technique in Slope-Reliability Analysis [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1993,119(12):1910-1927.
- [138] Wolff T F. Analysis and design of embankment dam slopes: a probabilistic approach. Ph.D. thesis, Purdue University, West Lafayette, 1985.
- [139] Nguyen V U. Determination of critical slope failure surfaces [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985,111(2):238–250.
- [140] Li K S, Lumb P. Probabilistic design of slopes [J]. Canadian Geotechnical Journal,1987,24,520-535.
- [141] Oka Y, Wu T H. System reliability of slope stability [J]. Journal of Geotechnical Engineering,ASCE,1990,116(8): 1185-1189.
- [142] Christian J T, Ladd C C, Baecher G B. Reliability and probability in stability analysis [J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1994,120(12): 1071–1111.
- [143] Christian J T. Reliability methods for stability of existing slopes [A]. In Proceedings of Uncertainty [C]. Geotechnical Special Publication,1996,2:409–419.
- [144] Christian J T, Urzua A. Probabilistic evaluation of earthquake-induced slope failure [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering,1998,124(11):1140-1143.
- [145] Low B K. Reliability analysis of rock wedges [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1997,123(6):498-505.
- [146] Low B K, Gilbert R B, Wright S G. Slope reliability analysis using generalized method of slices [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering,1998,124(4):350-362.
- [147] Low B K. Reliability-based design applied to retaining walls [J]. Geotechnique,2005, 55(1):63-75.
- [148] Hassan A M, Wolff T F. Search algorithm for minimum reliability index of earth slopes [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE,1999,125(4):301-308.
- [149] Liang R Y, Nusier O K, Malkawi A H. A reliability based approach for evaluating the slope stability of embankment dams [J]. Engineering Geology,1999,54,271-285.
- [150] Malkawi A I H, Hassan W F, Abdulla F A. Uncertainty and reliability analysis applied to slope stability [J]. Structural safety,2000,22:161 – 187.
- [151] Auvinet G, Gonzalez J L. Three dimensional reliability analyses of earth slopes [J]. Computers and Geotechnics. 2000,26: 247-261.
- [152] Bhattacharya G, Jana D, Ojha S, Chakraborty S. Direct search for reliability index of earth slopes [J]. Computers and Geotechnics,2003,30:452-462.
- [153] 姚耀武, 陈东伟. 土坡稳定可靠度分析 [J]. 岩土工程学报,1994,16(2):80-87.(Yao Yaowu, Cheng Dongwei. Reliability analysis of slope stability [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,1994,16(2):80-87.(in Chinese))
- [154] 徐军, 邵军, 郑颖人. 遗传算法在岩土工程可靠度分析中的应用 [J]. 岩土工程学报, 2000,22(5):586-589.(Xu Jun, Shao Jun, Zheng Yin-ren. Application of genetic algorithm to reliability analysis of geotechnical engineering [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2000,22(5):586-589. (in Chinese))

- [155] 谭晓慧. 有理多项式技术在土坡可靠性分析中的应用 [J]. 水文地质工程地质, 1998, 25(5):52-54. (Tan Xiaohui. The application of rational polynomial technique in the reliability analysis of soil slope [J]. Hydrogeology and Engineering Geology. 1998, 25(5):52-54.)
- [156] 谭晓慧. 岩质边坡稳定的可靠性分析 [J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(s1):1042-1045. (Tan Xiaohui. The Reliability Analysis of a Rock Slope [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, 20(s1): 1042-1045. (in Chinese))
- [157] 谭晓慧. 多滑面边坡的可靠性分析 [J]. 岩石力学与工程学报. 2001, 20(6):822-825. (Tan Xiaohui. The Reliability Analysis of a slope with Several Slide Planes [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, , 2001, 20(6):822-825. (in Chinese))
- [158] 谭晓慧. 边坡稳定可靠度分析方法的探讨 [J]. 重庆大学学报, 2001, 24(6): 40-44. (Tan Xiaohui. Discussion of reliability analysis methods of slope stability [J]. Journal of Chongqing University. 2001, 24(6): 40-44.(in Chinese))
- [159] 陈晓平, 孙慕群, 吴起星. 软基上复杂土坡稳定性分析 [J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(6):925-929.(Chen Xiao-ping, Sun Mu-qun, Wu Qi-xing. Reliability study of complex slope stability on soft soil [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, , 2004, 23(6):925-929. (in Chinese))
- [160] Duncan J M. Factors of safety and reliability in geotechnical engineering [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering ,ASCE,2000,126(6):307-316.
- [161] Ramly H E, Morgenstern N R, Cruden D M. Probabilistic slope stability analysis for practice [J]. Canadian Geotechnical Journal,2002,39:665-683.
- [162] Mellah R, Auvinet G, Masrouri F. Stochastic finite element method applied to non-linear analysis of embankments [J]. Probabilistic Engineering Mechanics,2001,15:251-259.
- [163] 刘宁, 吕泰仁. 随机有限元及其工程应用 [J]. 力学进展,1995,25(1):114-126. (Liu Ning, Lu Tairen. Stochastic FEM and its engineering applications [J]. Advances in Mechanics, 1995,25(1):114-126. (in Chinese))
- [164] 秦权. 随机有限元及其进展 I. 随机场的离散和反应矩的计算 [J]. 工程力学,1994,11(4): 1-10.(Qin Quan. Progress in stochastic finite element method, Part I. Discretization of ramdom fields and moments of structural responses [J]. Engineering Mechanics, 1994,11(4):1-10.(in Chinese))
- [165] 秦权. 随机有限元及其进展 II. 可靠度随机有限元和随机有限无限制的应用 [J]. 工程力学,1995,12(1):1-9. (Qin Quan. Progress in stochastic finite element method, Part II. Reliability stochastic finite elements and application of stochastic finite element methods, 1995,12(1):1-9.(in Chinese))
- [166] 郭书祥, 冯元生, 吕震宙. 随机有限元方法与结构可靠性 [J]. 力学进展,2000,30(3): 343-350.(Guo Shuxiang, Feng Yuansheng, Lu Zhenzhou. Stochsastic finite element method and structural reliability [J]. Advances in Mechanics, 2000,30(3):343-350.(in Chinese))
- [167] Shinozuka M, Lenoe E. A probabilistic model for spatial distribution of material properties [J]. Fracture Mechanics,1976,8:217-227.
- [168] Cambou B. Application of first order uncertainty analysis in the finite element method in linear elasticity [A]. Proc. Second Int. Conf. on Applications of Statistic and Probability in Soil and Structural Engineering [C]. London,England,1971,117-122.
- [169] Dendrou B A, Houtis E N. An inference finite element method for field application. Applied Mathematical Modeling. Guildford, England,1978:49-55.

- [170] Baecher G B, Ingra T S. Stochastic FEM in settlement prediction [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1981, 107(2):449-463.
- [171] Hisada T, Nakagiri S. Stochastic finite element method developed of structural safety and reliability [A], In: Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Struc.Safety and Reliability [C]. Trondheim, Norway,Hune,1981:395-408.
- [172] Hisada T, Nakagiri S. Role of the stochastic finite element method in structural safety and reliability [A], In: Proc. 4<sup>th</sup> Int. Conf. on Struc.Safety and Reliability [C]. Kobe, Japan,1985:213-219.
- [173] Handa K, Anderson K. Application of finite element methods in statistical analysis of structures [A]. In: Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Struc.Safety and Reliability [C]. Trondheim, Norway, 1981:409-417.
- [174] Shinozuka M, Deodatis G. Response variability of stochastic finite element systems [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988,114(3):499-519.
- [175] Yamazaki F, Shinozuka M. Digital generation of non-Gaussian stochastic field [J]. Journal of Engineering Mechanics ASCE 1988,114(7):1183-1197.
- [176] Yamazaki F, Shinozuka M. Neumann expansion for stochastic finite element analysis [J]. Journal of Engineering Mechanics,1988,114(8):1335-1354.
- [177] Hisada T, et al. Role of the stochastic finite element in structural safety and reliability [A]. Proc. Of ICOSSAR,1989.
- [178] Liu P L , Kiureghian A D. Finite element reliability of geometrically nonlinear uncertain structures [J]. Journal of Engineering Mechanics,1988,117(8):1214-1221.
- [179] Haldar A, Zhou Y. Reliability of geometrically nonlinear PR frames [J]. Journal of Engineering Mechanics,1992,118(10): 2148-2155.
- [180] 李同春, 吴世伟. 基于三维 SFEM 的拱坝可靠度分析 [A]. 工程结构可靠性全国第二届学术交流会议论文集 [C]. 重庆:1989:114-125.
- [181] 吴世伟, 李同春. 重力坝最大可能失效模式初探 [J]. 水利学报,1990,(4):36-44.
- [182] 武清玺, 吴世伟, 吕泰仁. 基于有限元法的重力坝可靠度分析 [J]. 水利学报,1990,(1): 58-64.
- [183] 吴世伟. 结构可靠度分析 [M]. 北京:人民交通出版社,1990.146-149.(Wu Shi-wei. Structure Reliability Analysis [M]. Beijing: China Communicatons Press,1990.146-149. (in Chinese))
- [184] 吴世伟等.拱坝的失效模式与可靠度 [J]. 河海大学学报,1992,20(2):88-96.
- [185] 刘宁, 卓家寿. 节理岩体的三维随机有限元及可靠度计算 [J]. 岩石力学与工程学报,1995,14(4):297-305. (Liu Ning, Zhuo Jiashou. 3-D stochastic FEM and reliability analysis of joint rock [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1995,14(4):297-305. (in Chinese))
- [186] 刘宁, 卓家寿. 三维弹塑性随机有限元的迭代计算方法研究 [J]. 河海大学学报,1996,24(1):1-8.
- [187] Kiureghian A D, Ke J. Finite element based reliability analysis of frame structures [A]. Proc 4<sup>th</sup> Int. Conf. on Struct. Safety and Reliability [C],Kobe,Japan,1985:395-404.
- [188] Kiureghian A D, Liu P L. Structural reliability under incomplete probability information [J]. Journal of Engineering Mechanics,1986;112(1):85-104.
- [189] Kiureghian A D, Ke J. Stochastic finite element method in structural reliability [J].

- Probabilistic Engineering Mechanics, 1988, 3(2):83-91.
- [190] Kiureghian A D, et al. The stochastic finite element in structural reliability [J]. Proc. of Reliability and Optimization of Structural Systems, 1988.
- [191] Kiureghian A D, et al. Recent developments in stochastic finite element [A], Proc. of Reliability and Optimization of Structural Systems [C], 1991.
- [192] 武清玺, 赵魁芝. 随机有限元分析水工隧洞结构的可靠度 [J]. 岩土力学, 1995, 16(4): 13-19.(Wu Qingxi, Zhao Kuizhi. Structural reliability analysis of pressure tunnels by SFEM [J]. Rock and Soil Mechanics, 1995, 16(4):13-19.(in Chinese))
- [193] 姚耀武, 申超. 非线性随机有限元及其在可靠度分析中的应用 [J]. 岩土工程学报, 1996, 18(2):37-46.(Yao Yaowu, Shen Chao. Nonlinear stochastic FEM and its application for reliability analysis [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering [J], 1996, 18(2):37-46.(in Chinese))
- [194] 严春风, 文海家, 朱可善. 金龙山Ⅱ区滑坡体的随机场有限元分析 [J]. 重庆建筑大学学报, 1999, 21(2): 57-62.(Yan Chunfeng, Wen Haijia, Zhu Keshan. The SFEM analysis on the Jinlongshan slope of Ertan project [J]. Journal of Chongqing Jianzhu University, 1999, 21(2):57-62.(in Chinese))
- [195] 徐建平, 白冰, 周健. 摆动随机有限元法在土坡可靠性分析中的应用 [J]. 武汉交通科技大学学报, 2000, 24(4):346-350.(Xu Jian-ping, Bai Bing, Zhou Jian. Perturbation stochastic finite element method: its application in the reliability analysis of soil slope [J]. Journal of Wuhan Transportation University,2000,24(4):346-350.(in Chinese))
- [196] 徐军, 刘东升, 郑颖人. 基于概率屈服准则的弹塑性随机有限元分析 [J]. 岩土工程学报, 2002, 24(2): 225-228. ( Xu Jun, Liu Dongsheng, Zheng Yingren. Analysis of elastic-plastic stochastic finite element method based on probabilistic yield criterion. Chinese Journal of Geotechnical Engineering [J], 2002, 24(2):225-228. (in Chinese))
- [197] 傅旭东, 茜平一, 刘祖德. 边坡稳定可靠性的随机有限元分析 [J]. 岩土力学, 2001, 22(4): 414-418.(FuXudong, Qian Pingyi, Liu Zude. The reliability analysis for slope stability by perturbation stochastic finite element method [J]. Rock and Soil Mechanics, 2001,22(4):414-418.(in Chinese))
- [198] Marinilli A, Cerrolaza M. Computational stochastic analysis of earth structure settlements [J]. 1999, 25, 107-121.
- [199] Nour A, Slimani A, Laouami N. Foundation settlement statistics via finite element analysis [J]. Computers and Geotechnics, 2002, 29:641-672.
- [200] Price G M, Griffiths D V, Fenton G A. Finite element modeling of settlements on spatially random soil [J]. Journal of Geotechnical Engineering ASCE, 1996, 122(9):777-779.
- [201] Fenton G A, Griffiths D V. A mesh deformation algorithm for free surface problems [J]. International Journal for Numerical and Analytical methods in Geomechanics, 1997, 21, 17-824.
- [202] Lane P A., Griffiths D V. Assessment of stability of slopes under drawdown conditions [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2000, 126(5): 443-450.
- [203] Griffiths D V, Fenton G A. Probabilistic slope stability analysis by finite elements [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, 130(5):507-518.
- [204] Fenton G A, Griffiths D V, and Williams, M.B., Reliability of traditional retaining wall design [J], Geotechnique, 2005, 55(1):55-62.

- [205] 苏永华, 方祖烈, 高谦. 用响应面方法分析特殊地下岩体空间的可靠性 [J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(1):55-58.( Shu Yonghua, Fang Zulie, Gao Qian. Reliability analysis on special underground rockmass space by response surface method [J]. Chinese Journal of Rock mechanics and Engineering, 2000, 19(1):55-58. (in Chinese))
- [206] 何满潮, 孙晓明, 苏永华, 景海河, 武雄. 岩体工程稳定稳定性模型的拟合方法 [J]. 矿山压力与顶板管理, 2001, 4:1-3.
- [207] 徐军, 郑颖人. 响应面重构的若干方法研究及其在可靠度分析中的应用 [J]. 计算力学报, 2002, 19(2):217-221,244.(Xu Jun, Zheng Yingren. Research on response surface restructure method and its application in reliability analysis [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2002, 19(2):217-221,244.(in Chinese))
- [208] 邓建, 朱合华. 基于神经网络的岩土工程结构随机有限元分析 [J]. 同济大学学报, 2002, 30(3):269-272.(Deng Jian, Zhu Hehua. Finite element Monte-Carlo method using neural networks for geotechnical reliability analysis [J]. Journal of Tongji University, 2002, 30(3):269-272.(in Chinese))
- [209] 宋玉香, 刘勇, 朱永全. 响应面法在整体式隧道衬砌可靠性分析中的应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23 (11):1847-1851.(Song Yuxiang, Liu Yong, Zhu Yongquan. Application of response surface method to reliability analysis of monolithic lining of railway tunnel [J]. Chinese Journal of Rock mechanics and Engineering, 2004, 23 (11): 1847-1851. (in Chinese))
- [210] 陈建康, 朱殿芳, 赵文谦, 郭志学, 王东. 基于响应面法的地下洞室结构可靠度分析 [J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(2):351-356.(Chen Jiankang, Zhu Dianfang, Zhao Wenqian, Guo Zhixue, Wang Dong. Structural reliability analysis of underground cavern based on response surface method [J]. Chinese Journal of Rock mechanics and Engineering, 2005, 24(2):351-356. (in Chinese))
- [211] 武清玺, 俞晓正, 赵魁芝. 响应面法及其在混凝土面板堆石坝可靠度分析中的应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(9):1506-1511.(Wu Qingxi, Yu Xiaozheng, Zhao Kuiyi. Response surface method and its application in reliability analysis of concrete-faced rockfill dams [J]. Chinese Journal of Rock mechanics and Engineering, 2005, 24(9):1506-1511.(in Chinese))
- [212] Bauer J, Pula W. Reliability with respect to settlement limit-states of shallow foundations on linearly-deformable subsoil [J]. Computers and Geotechnics, 2000, 26:281-308.
- [213] Madsen H O, Kreck S, Lind N C. Methods of structure safety [M]. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 1986:52-54.
- [214] 刘宁. 可靠度随机有限元法及其工程应用 [M]. 中国水利水电出版社. 2001. (Liu Ning. Reliability SFEM and its Application [M]. China WaterPower Press. 2001, 76-105.(in Chinese))
- [215] Sudret B, Kiureghian A D. Comparison of finite element reliability methods [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2002, 17:337-348.
- [216] 贡金鑫著. 工程结构可靠度分析方法 [M]. 大连:大连理工大学出版社. 2003. (Gong Jinxin. Computational Methods for Reliability of Engineering Structures. Dalian: Dalian University of Technology Press. 2003, 9:55-56, 155-160.(in Chinese))
- [217] 李继华, 林忠明, 李明顺等编著. 建筑结构概率极限状态设计 [M], 北京:中国建筑工业

- 出版社,1990: 151-166.
- [218] 杨伟军, 赵传智. 土工工程结构可靠度理论与设计 [M]. 北京:人民交通出版社,1999:64-68.
- [219] 赵树德. 土力学 [M]. 北京:高等教育出版社, 2001.
- [220] 龚晓南. 土塑性力学 [M]. 杭州:浙江大学出版社,1990.(Gong Xiao-nan. Plasticity Mechanics of Soil [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press,1990. (in Chinese))
- [221] 郑颖人, 沈珠江,龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2002,52-56.
- [222] Smith I M, Griffiths D V 著, 王崧等译. 有限元方法编程(第三版) [M]. 北京:电子工业出版社, 2003,178-187. (Smith I M, Griffiths D V. Programming the Finite Element Method. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003, 178-187.)
- [223] 凌道盛, 徐兴. 非线性有限元及程序 [M]. 浙江大学出版社,2004,8,195-201.
- [224] 王勣成, 邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法 [M]. 清华大学出版社, 1988,482-507. (Wang Xuchen, ShaoMin. Basic principle of finite element method and numerical method [M]. Qinghua University Press. 1988,482-507. (in Chinese))
- [225] 王焕定, 吴德伦, 林家骥. 有限单元法及程序设计 [M]. 中国建筑工业出版社, 1997. 391 - 420.(Wang Huanding, Wu Delun, Lin Jiayi. Finite Element Method and Program Design [M]. China Architecture Press, 1997. 391 - 420.(in Chinese))
- [226] 谢贻权, 何福保主编.弹性与塑性力学中的有限单元法 [M].北京:机械工业出版社,1981:198-217(Xie Yiquan, He Fubao. Finite element method in elasto-plastic mechanics [M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 1981:198-217(in Chinese))
- [227] 殷有泉. 固体力学非线性有限元引论 [M]. 北京:北京大学出版社,1987,122-202.
- [228] 彭国伦. FORTRAN 95 程序设计 [M]. 北京:中国电力出版社,2002.
- [229] 楼顺天, 陈生潭, 雷虎民. MATLAB 5.X 程序设计语言 [M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2000.
- [230] 李皓月. ANSYS 工程计算应用教程 [M]. 北京:中国铁道出版社,2003.
- [231] 陈渝, 周璐, 钱方等译. (美)John H. Mathews, Kurtis D. Fink 著. 数值方法(Matlab 版) [M]. 北京: 电子工业出版社,2002.
- [232] X.L.Guan, R.E.Melchers. Effect of response surface parameter variation on structural reliability estimates [J]. Structural Safety, 2001, 23:429-444.
- [233] 王国体主编. 地基基础计算与程序设计 [M]. 中国科学技术大学出版社,1991,67-77.
- [234] 迟世春,关立军.基于强度折减的拉格朗日差分方法分析土坡稳定性 [J].岩土工程学报,2004,26(3):42-46.(Chi shichun, Guan Lijun. Slope stability analysis by Lagrangian difference method based on shear strength reduction [J], Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004,26(3):42-46.(in Chinese))
- [235] 张鲁渝, 郑颖人, 赵尚毅, 时卫民. 有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度研究 [J]. 水利学报, 2003, (1):21-27.(Zhang Luyu, Zheng Yingren, Zhao Shangyi, Shi Weiming The feasibility study of strength reduction method with FEM for calculating safety factors of soil slope stability [J].Shuili Xubao, 2003, (1):21-27.(in Chinese))
- [236] 高大钊. 土的抗剪强度指标的统计方法 [J]. 工程勘察, 1986,(4):1-5.(Gao Dazhao. The statistic method of the indices of shear strength of soil [J]. GongChengKanCha,

- 1986,(4):1-5.(in Chinese))
- [237] 赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用 [M]. 大连:大连理工大学出版社,1996.
- [238] 王志亮,宋茂天,殷宗泽. 路堤沉降计算中邓肯-张模型参数灵敏度分析 [J]. 岩土力学,2004,25(7): 1135-1138. (Wang Zhiliang, Song Maotian, Yin Zongze. Analyses of parameters sensitivity of Duncan-Chang model in settlement calculation of embankment [J]. Rock and Soil Mechanics,2004,25(7):1135-1138.(in Chinese))
- [239] 朱小林. 土体工程 [M]. 上海: 同济大学出版社. 1998.(Zhu Xiaolin. Soil Mechanics [M]. Shanghai: Tongji University Press. 1998)
- [240] Griffiths D V. Slope stability analysis by finite element. A guide to the use of Program slope1. Geomechanics Research Center, Colorado School of Mines.
- [241] Application of the Finite Element Method to Slope Stability. Rocscience Inc.Toronto, 2001-2004.

## 攻读博士学位期间发表的论文

- [1] 谭晓慧,王建国,等. 边坡稳定的非线性随机有限元加速收敛算法的研究. 岩土工程学报 (已录用)
- [2] 谭晓慧,王建国,等. 边坡稳定有限元可靠度分析的有限步长迭代法. 岩石力学与工程学报 (已录用)
- [3] 谭晓慧,等. 水库边坡稳定的可靠度分析. 岩土力学. (已录用)
- [4] 谭晓慧,等. 边坡稳定的非线性有限元分析. 岩土力学. (已录用)
- [5] 谭晓慧,王建国. 边坡的弹塑性有限元可靠度分析. 岩土工程学报,2007,29(1):44-50. (EI 收录)
- [6] 谭晓慧,王建国,等. 边坡稳定的有限元可靠度计算及敏感性分析. 岩石力学与工程学报,2007, 26(1):115-122. (EI 收录)
- [7] 谭晓慧,等. 可靠度分析中梯度求解方法的研究. 岩土力学,2006,27(6):929-932. (EI 收录)
- [8] 谭晓慧,王建国,等. 边坡稳定的大变形有限元可靠度分析. 岩石力学与工程学报,2005, 24(s2):5308-5312. (EI 收录) (CSA 收录)
- [9] 谭晓慧,王建国,等. 改进的响应面法及其在可靠度分析中的应用. 岩石力学与工程学报, 2005,24(s2):5874-5879. (EI 收录) (CSA 收录)
- [10] 谭晓慧,王建国,等. 土性相关距离计算方法的分析探讨. 合肥工业大学学报,2004,27(11): 1420-1424.
- [11] 谭晓慧,王建国,等. 边坡稳定的有限元可靠度分析. 重庆大学学报,2006,29(1):102-104.
- [12] 谭晓慧,王建国,等. 水位变化对土坝边坡稳定性的影响. 生态安徽的理论与实践, 合肥工业大学出版社,2004,11,231-234.
- [13] 谭晓慧. 论环境产业的发展轨迹及我国环境产业的发展对策. 生态安徽的理论与实践, 合肥工业大学出版社,2004,11,55-58.