

第一章 矢量分析

场 { 标量场: 梯度描述
矢量场: 散度和旋度描述

场 { 静态场(稳态场): 不随t变
时变场: 随t变化

单位矢量: 模为1的矢量

与矢量 $\vec{A}$ 同方向的单位矢量: $\vec{e}_A = \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$ $\vec{A} = \vec{e}_A A$

坐标单位矢量: 与坐标轴正向同方向的单位矢量

如: $\vec{e}_x$ $\vec{e}_y$ $\vec{e}_z$ 或者 $\hat{x}$ $\hat{y}$ $\hat{z}$ $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$

$\vec{e}_r$ $\vec{e}_\theta$ $\vec{e}_\varphi$ $\vec{e}_\rho$ $\vec{e}_\varphi$ $\vec{e}_z$

1.1 矢量代数

★ 矢量的乘法

1、矢量的点乘（点积或者标量积或者内积）

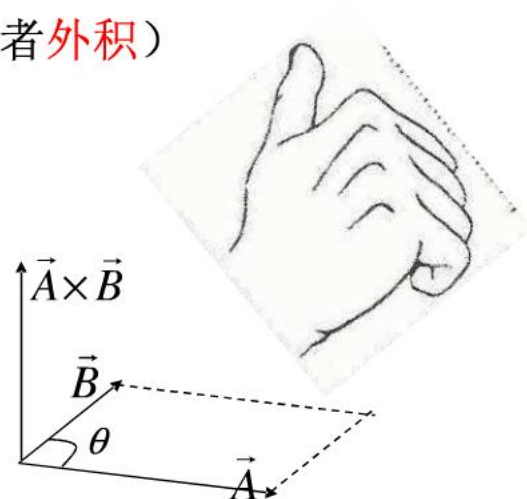
$$\vec{A} \bullet \vec{B} = AB \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

2、矢量的叉乘（叉积或者矢量积或者外积）

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_n AB \sin \theta$$

“正交（垂直）”： $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$

“平行”： $\vec{A} \times \vec{B} = 0$



★ 直角坐标系中两矢量的点积

$$\begin{aligned}\vec{A} \bullet \vec{B} &= (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \bullet (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\end{aligned}$$

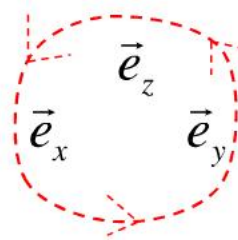
★ 直角坐标系中两矢量的叉积

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x \quad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$$

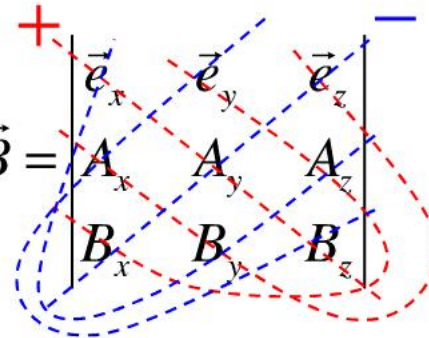
$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \times (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z)$$

$$= \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$



★ 直角坐标系中两矢量的叉积

矢量的叉积写成行列式：

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$


圆柱坐标和球坐标的公式了解：

圆柱坐标系中的体积微元： $dV=(\rho d\phi)(d\rho)(dz)=\rho d\rho d\phi dz$

分析的问题具有圆柱对称性时可表示为： $dV=2\pi\rho d\rho dz$

球坐标系中的体积微元： $dV=(r\sin\theta d\phi)(r d\theta)(dr)$

$$=r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$

分析的问题具有球对称性
时可表示为：

$$dV=4\pi r^2 dr$$

★ 标量场的等值面方程 $u(x, y, z) = \text{常数 } C$

~~标量场的等值面方程为~~

~~标量场的等值面方程为~~

哈密顿算子 ∇ : 矢量微分算子 ∇ (Hamilton、nabla、del)

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

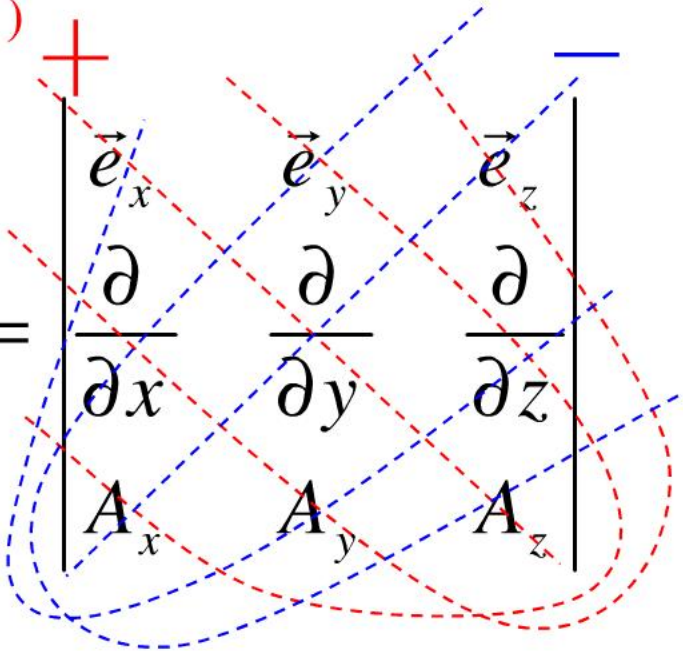
★ 标量场的梯度

$$\text{grad } u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{z} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) u$$

★ 矢量场的散度计算公式:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

★ 矢量场的旋度(rotation)

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$


例：已知矢径 $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$,

求： ∇r $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ $\nabla\left(\frac{1}{r^n}\right)$

$\nabla \bullet \vec{r}$ $\nabla \times \vec{r}$ ∇r^n

梯度运算的基本公式 $\nabla(cu) = c\nabla u$ (c 为常数)

$$\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$$

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u,$$

$$\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(v\nabla u - u\nabla v)$$

$$\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$$

散度的运算
的基本公式:

$$\nabla \cdot \vec{C} = 0 \quad (\vec{C} \text{ 为常矢量})$$

$$\nabla \cdot c\vec{A} = c\nabla \cdot \vec{A}, \quad (c \text{ 为常数})$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \pm \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} \pm \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \cdot (u\vec{A}) = (\nabla u) \cdot \vec{A} + u(\nabla \cdot \vec{A})$$

旋度运算的基本公式:

$$\nabla \times (c\vec{A}) = c\nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \pm \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} \pm \nabla \times \vec{B}$$

$$\nabla \times (u\vec{A}) = u(\nabla \times \vec{A}) + (\nabla u) \times \vec{A}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

散度 旋度 梯度

梯度的旋度恒等于0

$$\nabla \times (\nabla u) = 0$$

旋度的散度恒等于0

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

亥姆霍兹定理：

当矢量场的散度、旋度及边界条件给定后，该矢量场被唯一确定。研究矢量场就是从其散度和旋度入手。

即根据亥姆霍兹定理：一个矢量场可以由它的散度、旋度、边界条件唯一确定。

第2章 电磁场的基本规律

电荷 q 及电荷密度 ρ

电流 I 及电流密度(电流密度矢量) $\mathbf{J}$

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

★ 真空中静电场的基本规律：静电场是有散无旋场

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \\ \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{array} \right.$$

高斯定理 环路定理

★ 真空中恒定磁场的基本规律：恒定磁场是有旋无散场

磁通连续性原理

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \\ \oiint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \end{array} \right.$$

安培环路定理

了解电介质的极化和磁介质的磁化：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p} & \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \blacktriangle \text{极化面电荷} & \rho_{sp}(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n} \\ \blacktriangle \text{极化体电荷} & \rho_p(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} & \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J}_{sm} = \vec{M} \times \hat{n} & \hat{n} \text{为煤质表面外法线方向} \\ \vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} & \end{array} \right.$$

位移电流的定义：位移电流是由变化的电场产生的

$$\text{位移电流密度矢量 } \vec{J}_d = \frac{d\vec{D}}{dt} = \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$$

位移电流与传导电流的区别：

- 1、位移电流是由变化的电场产生的，位移电流密度矢量与电场的关系式为： $\vec{J}_d = \frac{d\vec{D}}{dt}$ ，而传导电流是电荷的定向运动形成的， $\vec{J} = \frac{di}{ds} = \frac{dq}{ds \cdot dt} = \rho \vec{v}$ 或 $= \sigma \vec{E}$ 。
- 2、所以传导电流只能存在于导体中，而位移电流可以存在于真空、导体、电介质中。
- 3、传导电流通过导体会产生焦耳热，而位移电流不会。

★ 麦克斯韦方程组数学表示

积分形式

微分形式

全电流定律 $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$ $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

电磁感应定律 $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ $\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

磁通连续性原理 $\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

高斯定律 $\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$ $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

★ 麦克斯韦方程组的辅助方程（结构方程）

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

★ 麦克斯韦方程组物理意义

揭示了场量与场源之间的关系；体现了电场与磁场之间的联系。

1、 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 电荷是电场的散度源。由电荷产生的电场是有散场。电力线起始于正电荷，终止于负电荷。

2、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 磁场没有散度源。磁场是无散场。磁力线是无头无尾的闭合。磁通连续性原理表明时变场中无磁荷存在。

3、 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 变化的磁场是涡旋电场的旋涡源。与电荷产生的无旋电场不同，涡旋电场是有旋场，其电力线是无头无尾的闭合曲线，并与磁力线相交链。

4、 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 传导电流和变化的电场都是磁场的旋涡源。磁场是有旋场，磁力线是闭合曲线，并与全电流线相交链。

★ 电磁场的边界条件总结

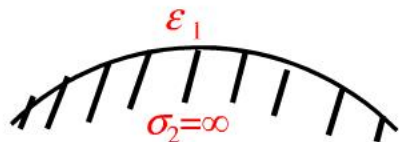
一般情况下

- 1、电场强度的切向分量连续，
- 2、磁感应强度的法向分量连续；
- 3、电位移矢量的法向分量的突变量等于边界上的电荷面密度，
- 4、磁场强度的切向分量的突变量等于边界电流面密度。

$$\left\{ \begin{array}{l} 1、 E_{1t} = E_{2t} \\ 2、 B_{1n} = B_{2n} \\ 3、 D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \\ 4、 H_{1t} - H_{2t} = J_s \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \\ \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \end{array} \right.$$

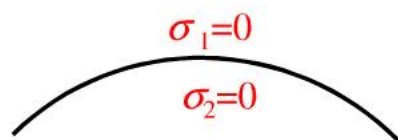
★ 特殊情况下电磁场的边界条件总结

1、理想导体表面上的边界条件



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \cdot \vec{D}_1 = \rho_s \\ \hat{n} \times \vec{E}_1 = 0 \\ \hat{n} \cdot \vec{B}_1 = 0 \\ \hat{n} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s \end{array} \right.$$

2、理想介质表面上的边界条件



$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \end{array} \right.$$

第三章 静态电磁场及其边值问题的解

静电场中： $\nabla \times \vec{E} = 0$ $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$ 静磁场： $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

已知电位 φ 表达式可以用 $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \varphi(\vec{r})$ 求场强 $\vec{E}$

已知电场强度也可以求电位 $\varphi(P) = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$

了解导体系统的电容和导体回路的自感

电场的能量密度： $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$

电场的能量 $W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$

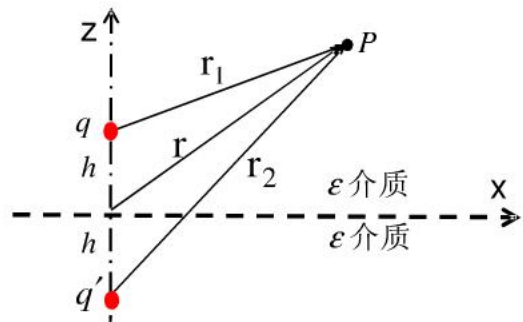
磁场能量密度： $w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$

磁场能量： $W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV$

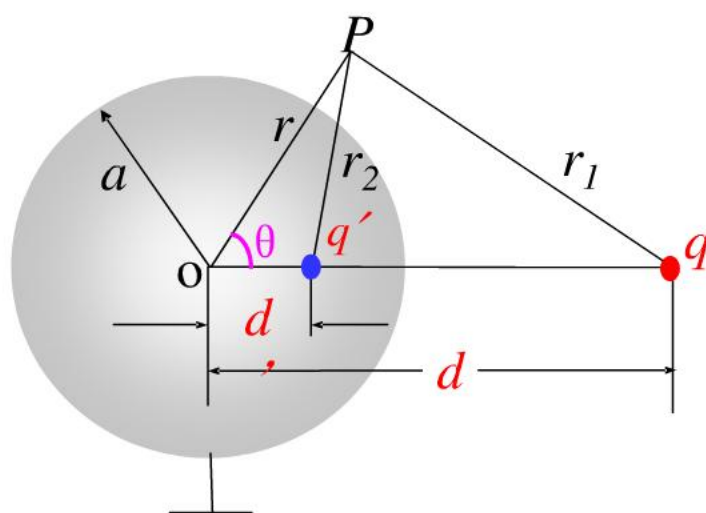
★ 唯一性定理

- ◇ 可以证明在每一类边界条件下泊松方程或拉普拉斯方程的解都是唯一的。这就是边值问题的**唯一性定理**
- ◇ **唯一性定理的意义**：是间接求解边值问题的理论依据。
- 镜像法求解电位问题的理论依据是“**唯一性定理**”。

点电荷对无限大接地导体平面的镜像



点电荷对接地导体球面的镜像。

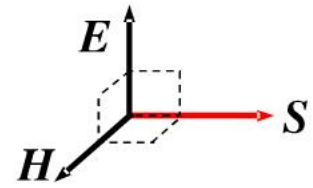


$$q' = -\frac{a}{d}q, \quad d' = \frac{a^2}{d}$$

第4章 时变电磁场

坡印廷矢量定义式：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{W/m}^2$$



坡印廷矢量的物理意义：

坡印廷矢量又称为能量流动密度矢量，其方向表示能量流动的方向，其大小表示单位时间内流过与电磁波传播方向相垂直单位面积上的电磁能量，亦称为功率流密度或电磁能流密度， $\mathbf{S}$ 的方向代表波传播的方向，也是电磁能量流动的方向。

★**时谐电磁场**：以一定的角频率随时间作正弦或余弦变化的电磁场或者正弦电磁场。

瞬时矢量和**复矢量**的关系为：

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\dot{\vec{E}}_m(\vec{r}) e^{j\omega t}]$$

瞬时表达式和**复数表达式**的转换

麦氏方程的复数形式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

坡印廷矢量的三种形式

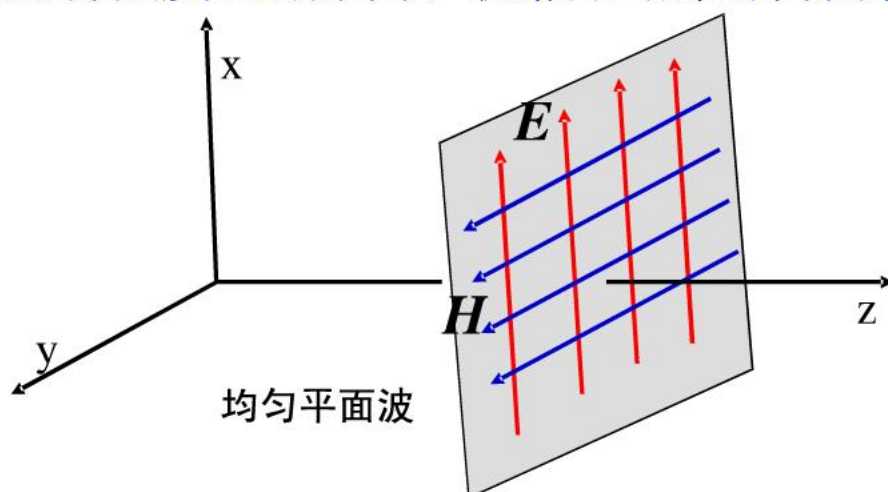
瞬时坡印廷矢量: $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$

平均坡印廷矢量: $\vec{S}_{av}(\vec{r}) = \frac{1}{2} R_e \left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r}) \right]$

第5章 均匀平面波在无界空间中的传播

均匀平面波：等相位面也是平面，且在任何一个等相位面上场矢量的大小、方向处处相同。

均匀平面波：是指电磁波的场矢量只沿着它的传播方向变化，在与波传播方向垂直的无限大平面内，电场强度 E 和磁场强度 H 的方向、振幅和相位都保持不变的波。



无界理想介质中的均匀平面波

周期: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

频率: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k} \rightarrow$ 波长 $k = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow$ 波数 (2π内包含的波长数)

相速 $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

$$k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

注意, 电磁波的相速有时可以超过光速。因此, 相速不一定代表能量传播速度。定义群速: 包络波上一恒定相位点 推进的速度。

自由空间 $\begin{cases} \epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ F/m} \\ \mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \end{cases}$

得自由空间中电磁波的速度

$$v = c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

★ 理想介质中的均匀平面波的传播特点为：

- 电场和磁场在空间相互垂直且都垂直于传播方向。E、H、 $\mathbf{e}_n$ （波的传播方向）呈右手螺旋关系，是横电磁波（TEM波）；
- 电场与磁场的振幅不变（无衰减）且相差一个因子 η ， $|\mathbf{E}| = \eta |\mathbf{H}|$ ；
- 波阻抗为实数，电场、磁场同相位，即时空变化关系相同；
- 电磁波的相速于频率无关（无色散） $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ ；
- 电场能量密度等于磁场能量密度。能量的传输速度等于相速

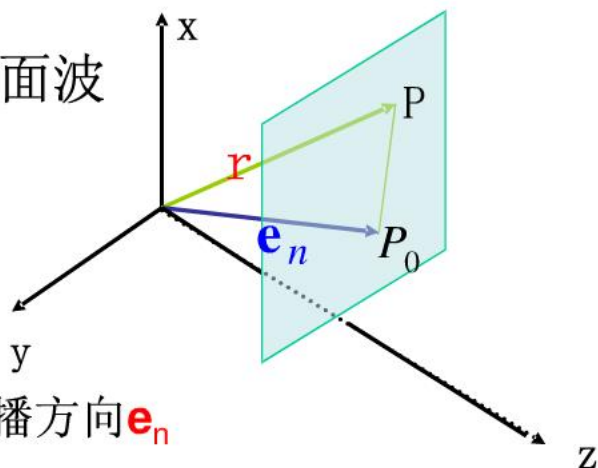
$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{2} \epsilon (\eta |\mathbf{H}|)^2 = \frac{1}{2} \epsilon \left(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |\mathbf{H}| \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\mu}{\epsilon} (|\mathbf{H}|)^2 = \frac{1}{2} \mu (|\mathbf{H}|)^2 = w_m$$

沿任意方向 $\mathbf{e}_n$ 方向传播的均匀平面波

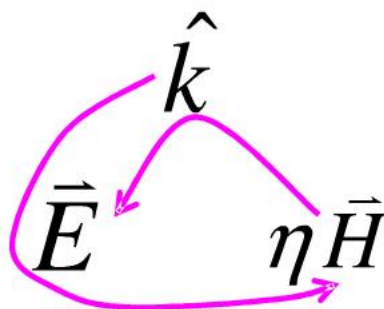
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-jk\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r}}$$

波的传播方向 $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_k = \hat{\mathbf{k}}$

定义波矢量 $\mathbf{k}$: 大小为 k , 方向为波的传播方向 $\mathbf{e}_n$



$$\mathbf{k} = k\mathbf{e}_n = k_x\mathbf{e}_x + k_y\mathbf{e}_y + k_z\mathbf{e}_z$$



$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E}$$

$$\vec{E} = \eta \vec{H} \times \hat{k}$$

电磁波的极化

极化的定义在空间任意给定点上，场强 $\mathbf{E}$ 的大小和方向都可能会随时间变化，这种现象称为**电磁波的极化**。

电磁波的极化三种类型：**线极化**、**圆极化**、**椭圆极化**。

直线极化波：若 E_x 和 E_y 的相位相同或相差 π 时，为直线极化波

圆极化波：若 E_x 和 E_y 振幅相同，相位差 90° 或 270° 。为圆极化波。

右旋圆极化波与左旋圆极化波的判断

左、右旋圆极化波也可以这样来判断：大拇指指向**电磁波的传播方向**，其余四指从 $\mathbf{E}$ 的**相位超前分量所在坐标轴的正方向**转到**相位滞后分量所在坐标轴的正方向**，符合左手螺旋规则的就是左旋圆极化波，符合右手螺旋规则的就是右旋圆极化波。

椭圆极化波：若 E_x 和 E_y 的振幅和相位不满足直线极化波和圆极化的条件就是椭圆极化

电磁波极化的工程应用

- **调幅广播**信号一般采用垂直极化波，天线架设与地面垂直。
- **电视信号、调频广播**信号一般采用水平极化波，天线与大地平行，所以电视接收天线应调整到与大地平行的位置。

圆极化天线只能接收到与其自身旋向相同的圆极化波，而一个线极化波总可以分解为两个旋向相反的圆极化波，其中总有一个可以被某圆极化天线接收。而线极化波总可以分解为两个空间相互正交的线极化波，其中总有一个可以被某线极化天线接收。因此在收发双方有一方运动的情况下（比如导弹与地面控制中心的通信），如果有一方采用圆极化天线，就可以保证信号畅通：若双方都是线极化天线，则可能因为相对位置变化而出现失配的情况。

- 电磁波的极化特性获得非常广泛的实际应用。例如，由于圆极化波穿过雨区时受到的吸收衰减较小，全天候雷达宜用圆极化波。
- 在无线通信中，为了有效地接收电磁波的能量，接收天线的极化特性必须与被接收电磁波的极化特性一致。
- 在移动卫星通信和卫星导航定位系统中，由于卫星姿态随时变更，应该使用圆极化电磁波。

均匀平面波在导电媒质中的传播特点：

设传播方向为 $\mathbf{z}$ 方向，相移常数为 β ，衰减常数为 α

等幅行波的表示式为： $\vec{E} = \hat{z} \dot{E}_m e^{-j\beta z}$

衰减行波的表示式为： $\vec{E} = \hat{z} \dot{E}_m e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$

$$\text{导电媒质中 } v = \frac{\omega}{\beta} = v(\omega)$$

v 与频率有关，这种现象称为色散效应。导电媒质又称为色散媒质。

■ 导电媒质中均匀平面波的传播特点 P_{207}

- 电场强度 E 、磁场强度 H 与波的传播方向相互垂直，是横电磁波（TEM波）；
- 媒质的本征阻抗为复数 η_c ，电场与磁场不同相位，磁场滞后于电场 ϕ 角；
- 在波的传播过程中，电场与磁场的振幅呈指数衰减；
- 波的传播速度（相速度）不仅与媒质参数有关，而且与频率有关（有色散）。
- 平均磁场能量密度大于平均电场能量密度
分析在 P_{207} 式(5.3.17)、(5.3.18)

媒质的导电性的强弱是由 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ 确定的

(1) **弱导电媒质** 媒质参数满足 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$ ，称为弱导电媒质，

(2) **强导电媒质** 媒质参数满足 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ ，称为强导电媒质，

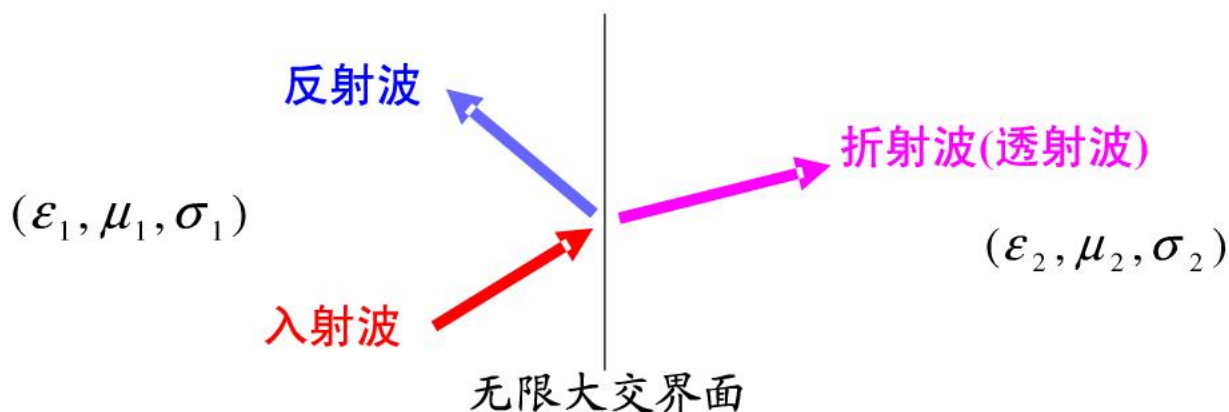
此式表明，电场强度与磁场强度不同相，且因 σ 较大，两者振幅发生急剧衰减，以致于电磁波无法进入良导体深处，仅可存在其表面附近，这种现象称为**趋肤效应**。

为了描述平面波在良导体中的衰减程度，通常把场强振幅衰减到表面处振幅 $1/e$ 的深度称为**集肤深度**，以 δ 表示，则由

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

集肤深度与频率 f 及电导率 σ 成反比。

第6章 均匀平面波的反射与透射



当电磁波在传播途中遇到这种边界时，一部分能量穿过边界，形成透射波；另一部分能量被边界反射，形成反射波，平面波在边界上的反射及透射规律与媒质特性及边界形状有关。本教材仅讨论平面波在无限大的平面边界上的反射及透射特性。首先讨论平面波向平面边界**垂直入射**的正投射，再讨论平面波以任意角度向平面边界的**斜入射**。

6.1.2 对理想导体平面的垂直入射

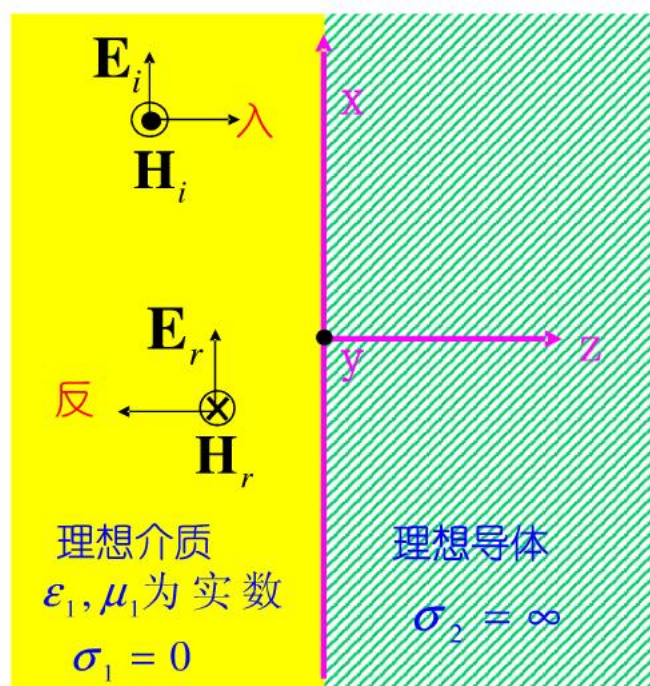


图6.1.2均匀平面波垂直入射
到理想导体平面上

$$\eta_{2c} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_{2c}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 - j \frac{\sigma_2}{\omega}}} = 0$$

$$\Gamma = \frac{E_{rm}}{E_{im}} = \frac{\eta_{2c} - \eta_{1c}}{\eta_{2c} + \eta_{1c}} = -1$$

所以: $E_{rm} = -E_{im}$

$$\tau = \frac{E_{tm}}{E_{im}} = 1 + \Gamma = 0$$

$E_{tm} = 0$ 所以没有透射波

这是因为电磁波不能穿入理想导体，到达分界面时将被反射回来。

6.1.2 对理想导体平面的垂直入射

由于媒质1是理想介质

$$\gamma_1 = j\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1} = j\beta_1$$

$$\eta_{1c} = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1} = \eta_1$$

入射波电场和磁场分别为：

$$\mathbf{E}_i(z) = \mathbf{e}_x E_{im} e^{-j\beta_1 z}$$

$$\mathbf{H}_i(z) = \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{im} e^{-j\beta_1 z}$$

反射波电场和磁场分别为：

$$\mathbf{E}_r(z) = -\mathbf{e}_x E_{im} e^{+j\beta_1 z}$$

$$\mathbf{H}_r(z) = \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{im} e^{+j\beta_1 z}$$

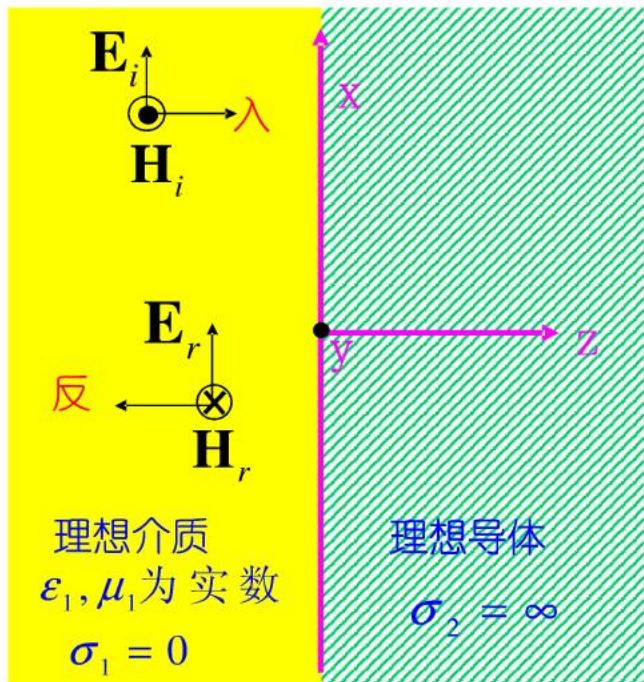


图6.1.2均匀平面波垂直入射
到理想导体平面上

煤质1区中的合成波的电场和磁场的复数表达式分别为：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(z) &= \mathbf{E}_i(z) + \mathbf{E}_r(z) = \mathbf{e}_x E_{im} (e^{-j\beta_1 z} - e^{+j\beta_1 z}) \\ &= \mathbf{e}_x [-j2E_{im} \sin(\beta_1 z)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1(z) &= \mathbf{H}_i(z) + \mathbf{H}_r(z) = \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{im} (e^{-j\beta_1 z} + e^{+j\beta_1 z}) \\ &= \mathbf{e}_y \left[\frac{2}{\eta_1} E_{im} \cos(\beta_1 z) \right]\end{aligned}$$

煤质1区中的合成波的电场和磁场的瞬时表达式分别为：

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \text{Re}[\mathbf{E}e^{j\omega t}] = \mathbf{e}_x 2E_{im} \sin(\beta_1 z) \sin(\omega t)$$

$$\mathbf{H}_1(z, t) = \text{Re}[\mathbf{H}e^{j\omega t}] = \mathbf{e}_y \frac{2E_{im}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \cos(\omega t)$$

媒质1区中的合成波的电场和磁场的瞬时表达式分别为：

$$\mathbf{E}_1(z,t) = \mathbf{e}_x 2E_{im} \sin(\beta_1 z) \sin(\omega t) \quad \mathbf{H}_1(z,t) = \mathbf{e}_y \frac{2E_{im}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \cos(\omega t)$$
$$|\mathbf{E}_1(z)| = 2E_{im} |\sin(\beta_1 z)| \quad |\mathbf{H}_1(z)| = \frac{2E_{im}}{\eta_1} |\cos(\beta_1 z)|$$

媒质1区中的合成波的特点：

- 对任意时刻t在 $\beta_1 z = -n\pi$ or $z = -n \frac{\lambda_1}{2} (n=0,1,2,\dots)$ 电场皆为零，而磁场最大。
- 对任意时刻t在 $\beta_1 z = -(2n+1)\frac{\pi}{2}$ or $z = -(2n+1)\frac{\lambda_1}{4} (n=0,1,2,\dots)$ 磁场皆为零，而电场最大。
- 合成波在空间没有移动，只是在原处上下波动，具有这种特点的电磁波称为驻波，如下图所示。

在理想导体边界面上，由边界条件可得到导体表面的
感应面电流密度

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \Big|_{z=0} = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y \frac{2E_{im}}{\eta} \cos(\beta z) \Big|_{z=0} = \mathbf{e}_x \frac{2E_m^+}{\eta}$$

在1区，平均坡印廷矢量

$$S_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[-\vec{e}_x j 2E_{im} \sin(\beta z) \times \vec{e}_y \frac{2E_{im}}{\eta} \cos(\beta z) \right] = 0$$

可见驻波不能传播能量，只存在电场能量和磁场能量的相互交换。

例6.1.1: 一右旋圆极化波从空气垂直入射到位于 $z=0$ 的理想导体板上，其电场强度的复数形式为：

$$\mathbf{E}_i(z) = (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_m e^{-j\beta z}$$

(1) 写出反射波的表达式并说明反射波的极化类型：

(2) 写出总电场强度的瞬时表达式：

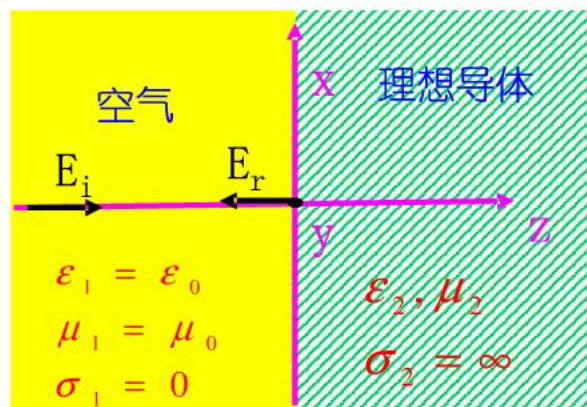
(3) 求板上的感应面电流密度。

$$\text{解: } \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 - j\sigma_2/\omega}} = 0$$

$$\therefore \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -1 \quad \tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0$$

(1) 所以反射波为：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r(z) &= \Gamma \mathbf{E}_{im} e^{+j\beta z} = -(\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_m e^{+j\beta z} \\ &= (-\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y) E_m e^{+j\beta z} \end{aligned}$$



反射波的复数表达式为：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_r(z) &= (-\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y)E_m e^{+j\beta z} \\ &= (e^{j\pi}\mathbf{e}_x + e^{j\frac{\pi}{2}}\mathbf{e}_y)E_m e^{+j\beta z}\end{aligned}$$

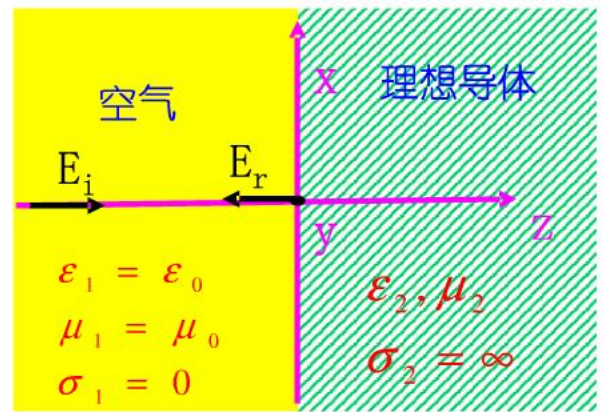
反射波的瞬时表达式为：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_r(z, t) &= R_e[\mathbf{E}_r(z) e^{j\omega t}] \\ &= R_e[(-\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y)E_m e^{+j\beta z} e^{j\omega t}]\end{aligned}$$

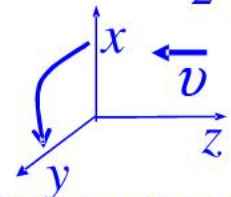
$$\begin{aligned}&= -\mathbf{e}_x E_m \cos(\omega t + \beta z) + \mathbf{e}_y E_m \cos(\omega t + \beta z + \frac{\pi}{2}) \\ &= -\mathbf{e}_x E_m \cos(\omega t + \beta z) - \mathbf{e}_y E_m \sin(\omega t + \beta z)\end{aligned}$$

$z < 0$ 区域的总电场强度的复数表达式为：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(z) &= \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r \\ &= (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y)E_m e^{-j\beta z} - (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y)E_m e^{+j\beta z} \\ &= (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y)E_m (e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}) \\ &= (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y)(-2j)E_m \sin(\beta z)\end{aligned}$$



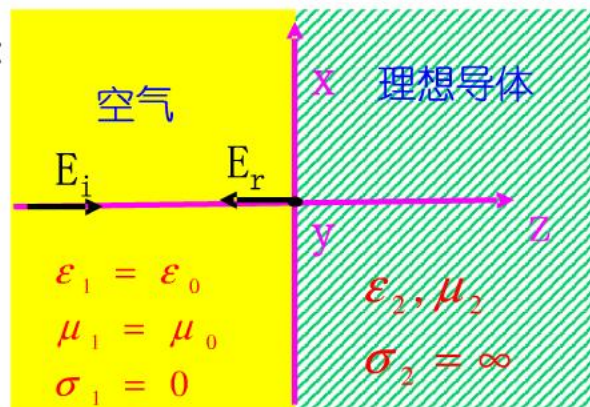
$$\theta_x - \theta_y = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$



反射波为左旋圆极化波

$z < 0$ 区域的总电场强度的瞬时表达式为：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1(z, t) &= R_e \left[\mathbf{E}_1(z) e^{j\omega t} \right] \\
 &= R_e \left\{ \left[(\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y)(-2j)E_m \sin(\beta z) \right] e^{j\omega t} \right\} \\
 &= R_e \left\{ \left[-2E_m (j\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \sin(\beta z) \right] e^{j\omega t} \right\} \\
 &= R_e \left\{ \left[-2E_m (e^{j\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \sin(\beta z) \right] e^{j\omega t} \right\} \\
 &= -2E_m \sin(\beta z) \left[\mathbf{e}_x \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) + \mathbf{e}_y \cos(\omega t) \right] \\
 &= -2E_m \sin(\beta z) \left[-\mathbf{e}_x \sin(\omega t) + \mathbf{e}_y \cos(\omega t) \right] \\
 &= 2E_m \sin(\beta z) \left[\mathbf{e}_x \sin(\omega t) - \mathbf{e}_y \cos(\omega t) \right]
 \end{aligned}$$



(3) 由理想导体表面磁场的边界条件得

板上的感应面电流密度为：

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{e}_n \times \mathbf{H}_1 \Big|_{z=0} = -\mathbf{e}_z \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r) \Big|_{z=0}$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_i = \frac{1}{\eta_1} \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_m e^{-j\beta z}$$

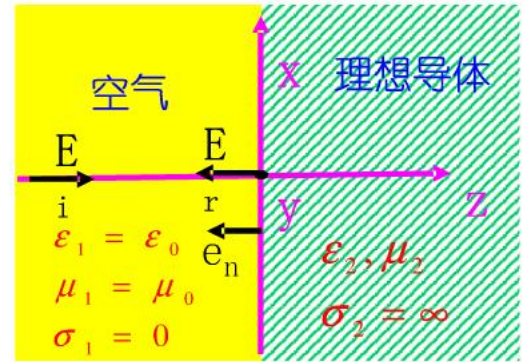
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r &= \frac{1}{\eta_1} (-\mathbf{e}_z) \times \mathbf{E}_r = \frac{1}{\eta_1} (-\mathbf{e}_z) \times [-(\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_m e^{+j\beta z}] \\ &= \frac{1}{\eta_1} (\mathbf{e}_z) \times [(\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_m e^{+j\beta z}] \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r = \frac{1}{\eta_1} \mathbf{e}_z \times [(\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_m e^{-j\beta z} + (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_m e^{+j\beta z}]$$

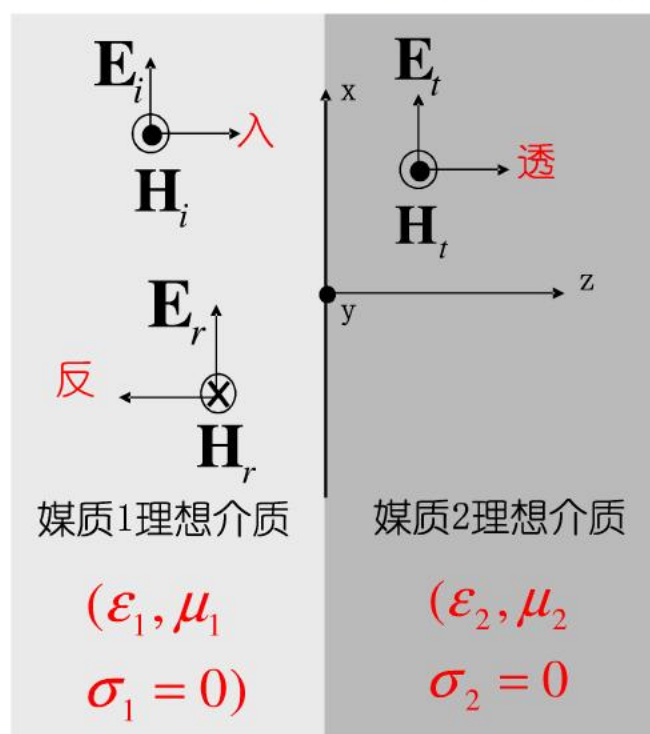
$$= \frac{1}{\eta_1} \mathbf{e}_z \times [(\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) E_m (e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z})] = \frac{E_m}{\eta_1} (\mathbf{e}_y + j\mathbf{e}_x) 2 \cos(\beta z)$$

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{e}_n \times \mathbf{H}_1 \Big|_{z=0} = -\mathbf{e}_z \times \left[\frac{E_m}{\eta_1} (\mathbf{e}_y + j\mathbf{e}_x) 2 \cos(\beta z) \right] \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{2E_m}{\eta_1} (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y) \cos(\beta z) \Big|_{z=0} = \frac{2E_m}{\eta_0} (\mathbf{e}_x - j\mathbf{e}_y)$$



6.1.3 对理想介质分界平面的垂直入射



两种媒质的本征阻抗分别为：

$$\eta_{1c} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} = \eta_1 \quad \eta_{2c} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \eta_2$$

$$\Gamma = \frac{E_{rm}}{E_{im}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$\tau = \frac{E_{tm}}{E_{im}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1 + \Gamma$$

煤质1区中入射波的电场和磁场分别为：

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_x E_{im} e^{-j\beta_1 z} \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{im} e^{-j\beta_1 z}$$

煤质1区中反射波的电场和磁场分别为：

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{e}_x \Gamma E_{im} e^{j\beta_1 z} \quad \mathbf{H}_r = -\mathbf{e}_y \frac{1}{\eta_1} \Gamma E_{im} e^{j\beta_1 z}$$

煤质1区中合成波的电场和磁场分别为：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(z) &= \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{e}_x E_{im} (e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}) \\ &= \mathbf{e}_x E_{im} [(1 + \Gamma)e^{-j\beta_1 z} + j2\Gamma \sin(\beta_1 z)] \end{aligned}$$

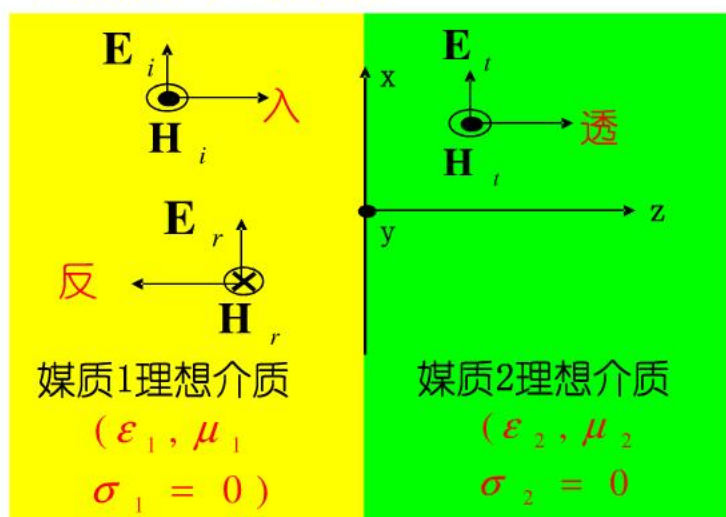
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(z) &= \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r = \mathbf{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z}) \\ &= \mathbf{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1} [(1 - \Gamma)e^{-j\beta_1 z} - 2\Gamma \cos(\beta_1 z)] \end{aligned}$$

媒质2区中透射波（即总场）的电场和磁场分别为：

$$\mathbf{E}_2(z) = \mathbf{E}_t(z) = \mathbf{e}_x \tau E_{im} e^{-j\beta_2 z}$$

$$\mathbf{H}_2(z) = \mathbf{H}_t(z) = \mathbf{e}_y \frac{\tau E_{im}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z}$$

媒质2区中透射波（即总场）是沿+z方向传播的行波



煤质1区中合成波（总场）的电场和磁场分别为：

$$\mathbf{E}_1(z) = \mathbf{e}_x \underbrace{E_{im}(1+\Gamma)e^{-j\beta_1 z}}_{\text{第一部分}} + \mathbf{e}_x \underbrace{j2\Gamma E_{im} \sin(\beta_1 z)}_{\text{第二部分}}$$

第一部分是沿 +z 方向传播的行波 第二部分是 z 方向的驻波

$$\mathbf{H}_1(z) = \mathbf{e}_y \underbrace{\frac{E_{im}}{\eta_1}(1+\Gamma)e^{-j\beta_1 z}}_{\text{第一部分}} - \mathbf{e}_y \underbrace{2\Gamma \frac{E_{im}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z)}_{\text{第二部分}}$$

第一部分是沿 +z 方向传播的行波 第二部分是 z 方向的驻波

所以煤质1区中合成波（总场）为 z 方向的行驻波，总电场振幅为

$$|\mathbf{E}_1(z)| = E_{im} \sqrt{1 + \Gamma^2 + 2\Gamma \cos(2\beta_1 z)}$$

例：电场强度为 $\vec{E}(z) = (j\vec{e}_x + \vec{e}_y)E_m e^{-j\beta_0 z}$ V/m 的均匀平面波从空气中垂直入射到 $Z=0$ 处的理想介质（相对介电常数 $\epsilon_r=9$ 、相对磁导率 $\mu_r=1$ ）平面上，式中的 β_0 、 E_m 均为已知。求：

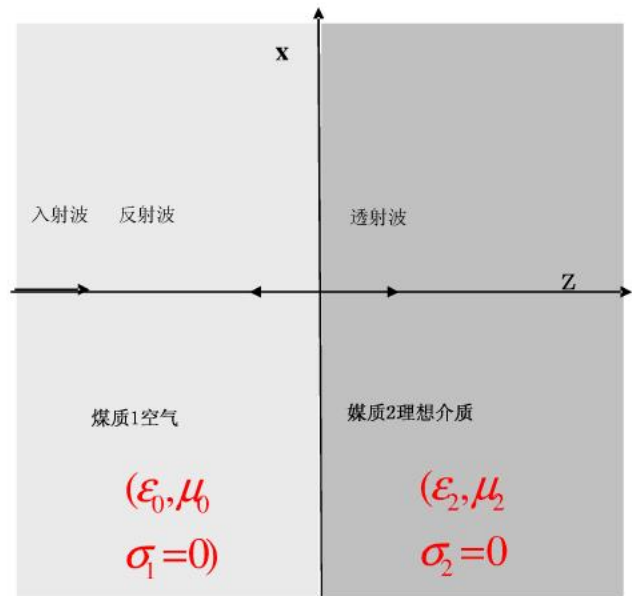
入射波电场和磁场的瞬时表达式，说明入射波的极化类型；
反射波电场和磁场的复数表达式，并说明反射波的极化类型；
透射波电场和磁场的复数表达式，并说明透射波的极化类型；
求空气中合成电场的表达式，简要说明合成波的特点。

$$\text{解: } \eta_h = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1 \mu_0}{9 \epsilon_0}} = \frac{\eta_0}{3}$$

$$\therefore \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_h}{\eta_2 + \eta_h} = \frac{\frac{\eta_0}{3} - \eta_0}{\frac{\eta_0}{3} + \eta_0} = -\frac{1}{2}$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_h} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



$\therefore \vec{E}_i(z) = (j\vec{e}_x + \vec{e}_y)E_m e^{-j\beta_0 z} \therefore$ 入射波为向+Z方向传播的右旋圆极化波

$\therefore$ 入射波磁场的复数表达式为： $\mathbf{H}_i(z) = \frac{1}{\eta_1} \vec{e}_z \times \vec{E}_i$

$\therefore$ 入射波电场的瞬时表达式为： $\vec{E}_i(z, t) = R_e \{ \vec{E}_i(z) e^{j\omega t} \}$

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(z, t) &= [(\vec{e}_x E_m \cos(\omega t - \beta_0 z + \frac{\pi}{2}) + \vec{e}_y E_m \cos(\omega t - \beta_0 z))] \\ &= E_m [(\vec{e}_x \cos(\omega t - \beta_0 z) - \vec{e}_y \sin(\omega t - \beta_0 z))] \end{aligned}$$

$\therefore$ 入射波磁场的瞬时表达式为： $\vec{H}_i(z, t) = R_e \{ \vec{H}_i(z) e^{j\omega t} \}$

$$\vec{H}_i(z, t) = \frac{E_m}{\eta_0} [\vec{e}_y \cos(\omega t - \beta_0 z) + \vec{e}_x \cos(\omega t - \beta_0 z - \frac{\pi}{2})]$$

反射波电场的复数表达式为：

$$\mathbf{E}_r(z) = \Gamma(j\vec{e}_x + \vec{e}_y)E_m e^{+j\beta_0 z} = -\frac{1}{2}(j\vec{e}_x + \vec{e}_y)E_m e^{+j\beta_0 z}$$

反射波磁场的复数表达式为：

$$\mathbf{H}_r(z) = \frac{1}{\eta_1} (-\vec{e}_z) \times \vec{E}_r$$

反射波为向-Z方向传播的左旋圆极化波

$$\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \mu_r \varepsilon_r} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \sqrt{9} = 3 \beta_0$$

透射波电场的复数表达式为：

$$\vec{E}_t(z) = \tau(j\vec{e}_x + \vec{e}_y)E_m e^{-j\beta_2 z} = \frac{1}{2}(j\vec{e}_x + \vec{e}_y)E_m e^{-j2\beta_0 z}$$

透射波磁场的复数表达式为：

$$\vec{H}_t(z) = \frac{1}{\eta_2} \vec{e}_z \times \vec{E}_t$$

透射波为向+Z方向传播的右旋圆极化波

(4) 空气中合成波电场的表达式为： $\vec{E}_1(z) = \vec{E}_i(z) + \vec{E}_r(z)$

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(z) &= (j\vec{e}_x + \vec{e}_y)E_m e^{-j\beta_0 z} - \frac{1}{2}(j\vec{e}_x + \vec{e}_y)E_m e^{+j\beta_0 z} \\ &= (j\vec{e}_x + \vec{e}_y)E_m \left[e^{-j\beta_0 z} - \frac{1}{2}e^{+j\beta_0 z} \right] \quad \text{合成波为Z方向的行驻波} \end{aligned}$$



第七章 导行电磁波



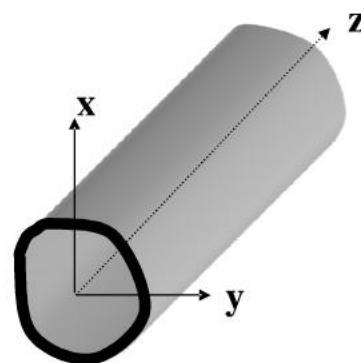
三种模式：

- ★ 在电磁波传播方向上没有电场和磁场分量，电场和磁场全部在横平面内，这种模式的电磁波称为横电磁波，简称TEM波。
- ★ 在电磁波传播方向上有电场分量，但没有磁场分量，这种模式的电磁波称为横磁波，简称TM波。
- ★ 在电磁波传播方向上有磁场分量，但没有电场分量，这种模式的电磁波称为横电波，简称TE波。

若导行电磁波沿Z方向传播，Z方向为纵向，

x、y方向为横向。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{TEM波: } \vec{E}_z = 0, \vec{H}_z = 0 \\ \text{TM波: } \vec{E}_z \neq 0, \vec{H}_z = 0 \\ \text{TE波: } \vec{H}_z \neq 0, \vec{E}_z = 0 \end{array} \right.$$



7.2 矩形波导

矩形波导及所有单导体波导不能传输TEM波

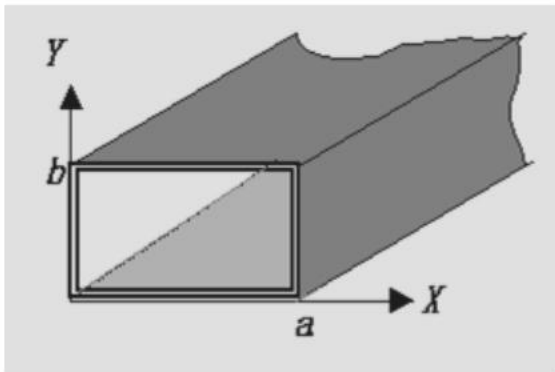


图7.2.1 矩形波导

一、TM波

二、TE 波

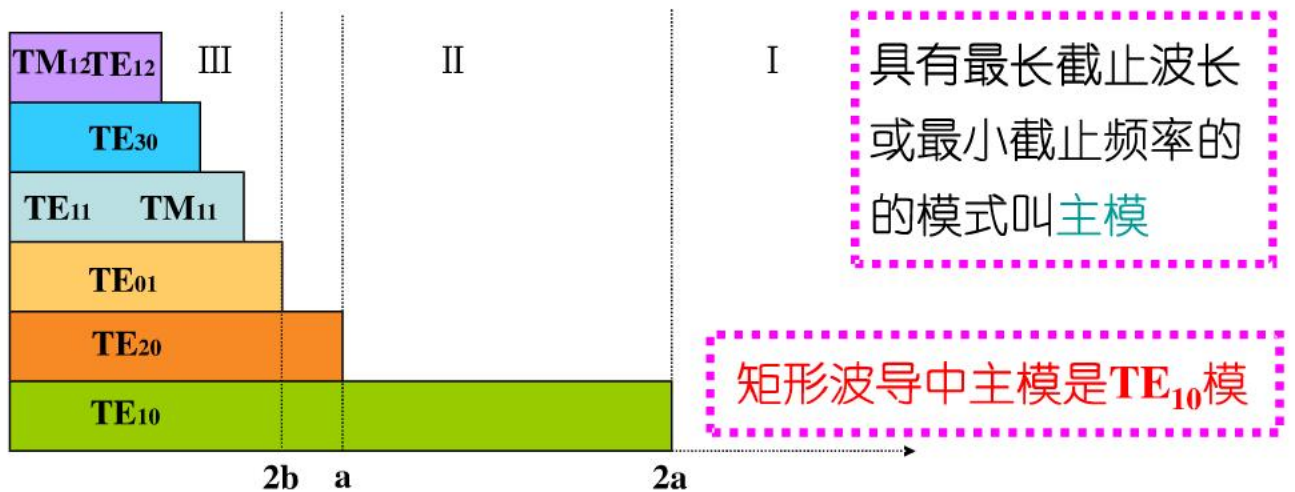
● 矩形波导中的电磁波具有截止特性、色散特性、简并特性。

截止波数为: $k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

所以截止波长为: $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$

波导中能传输模式的条件是: $\lambda < (\lambda_c)_{mn}$ 或 $f > (f_c)_{mn}$

● 各种模式的截止波长分布图7.2.4。（设波导尺寸为 $a > 2b$ ）



I 区：截止区。当工作波长 $\lambda > 2a$ 时，矩形波导中不能传播任何电磁波。

II 区：单模区。当工作波长 $(a < \lambda \leq 2a)$ 时，矩形波导中只能传播单一的电磁波模式TE₁₀模。

III 区：多模区。当工作波长 $\lambda \leq a$ 时，矩形波导中至少可以传播两种以上的电磁波模式。

7.3 矩形波导中的TE₁₀波

在矩形波导中大多采用TE₁₀模式，这是因为该模式具有以下**优点**：

☞ 由设计的波导尺寸**实现单模传输**，无简并现象。

☞ 截止波长相同时，传输TE₁₀所要求的**a**边尺寸最小。同时TE₁₀模的截止波长与**b**边尺寸无关，所以可尽量减小**b**的尺寸以**节省材料**。但考虑波导的击穿和衰减问题，**b**不能太小。

☞ 由图7.2.4可知，TE₁₀模和TE₂₀模之间的距离大于其他高阶模之间的距离，因此**可使TE₁₀模在大于1.5:1的波段上传播**。

☞ 当 $m=1, n=0$ 时， $k_x = \frac{m\pi}{a} = \frac{\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b} = 0$ 由TE波的场分量表示式 (7.2.48) 可知 $E_x = 0$ 电场只剩下 E_y 分量。这表明波导中可以**获得单方向极化波**，而这正是某些情况下所要求的。

☞ 对于一定比值**a/b**，在给定工作频率下TE₁₀模具有**最小的衰减**。

TE₁₀模的场分量

将 **$m=1, n=0$** 代入式(7.2.49)得TE₁₀ 模的场分量表示式为

7.6.1 传输线方程及其解

电报方程

$$\begin{cases} -\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = R_1 i(z,t) + L_1 \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = G_1 u(z,t) + C_1 \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \end{cases} \xrightarrow{\text{对于正弦波}} \begin{cases} -\frac{dU(z)}{dz} = (R_1 + j\omega L_1) I(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} = (G_1 + j\omega C_1) U(z) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{通解}} U(z) = Ae^{\gamma z} + Be^{-\gamma z} \\ &\Rightarrow I(z) = \frac{1}{Z_0} (Ae^{\gamma z} - Be^{-\gamma z}) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{通解}} U(z) = Ae^{\gamma z} + Be^{-\gamma z} \\ &\Rightarrow I(z) = \frac{1}{Z_0} (Ae^{\gamma z} - Be^{-\gamma z}) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} A_1, A_2 \\ \text{由边} \\ \text{界条} \\ \text{件定} \end{array}$$

式中 $\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = \alpha + j\beta$

传播常数

衰减常数
(Np/m)

相位常数
(rad/m)

式中 $Z_0 = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}}$

为了看清解的本质，通解表达式也可以改写为如下形式

$$\begin{cases} U(z) = Ae^{\gamma z} + Be^{-\gamma z} = U^+(z) + U^-(z) \\ I(z) = \frac{1}{Z_0}(Ae^{\gamma z} - Be^{-\gamma z}) = I^+(z) + I^-(z) \end{cases}$$

$$U^+(z) = Ae^{\gamma z} \longrightarrow \text{-z方向的入射波电压}$$

$$U^-(z) = Be^{-\gamma z} \longrightarrow \text{+z方向的反射波电压}$$

$$I^+(z) = Ae^{\gamma z} / Z_0 \longrightarrow \text{-z方向的入射波电流}$$

$$I^-(z) = Be^{-\gamma z} / Z_0 \longrightarrow \text{+z方向的反射波电压}$$

传输线方程通解的物理含义：传输线上的电压和电流，一般情况由向-z方向传播的入射波与向+z方向传播的反射波两者叠加而成。

7.6.2 传输线上波的传输特性参数

由传输线方程的解

$$U(z) = Ae^{\gamma z} + Be^{-\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0}(Ae^{\gamma z} - Be^{-\gamma z}) = \frac{1}{Z_0}Ae^{\gamma z} - \frac{1}{Z_0}Be^{-\gamma z}$$

沿 $-z$ 方向传播的行波，称为入射波电压。

$$U^+ = Ae^{\gamma z}$$

沿 $+z$ 方向传播的行波，称为反射波电压。

$$U^- = Be^{-\gamma z}$$

$-z$ 方向传播的行波，称为入射波电流。

$$I^+ = \frac{A}{Z_0}e^{\gamma z}$$

$+z$ 方向传播的行波，称为反射波电流。

$$I^- = \frac{B}{Z_0}e^{-\gamma z}$$

一、特性阻抗

$$Z_0 = \frac{U^+}{I^+} = -\frac{U^-}{I^-} = \sqrt{\frac{R_1 + j\omega L_1}{G_1 + j\omega C_1}} \xrightarrow[\text{无损耗线 } R_1=0, G_1=0]{\text{无损耗线}} Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

二、传播常数

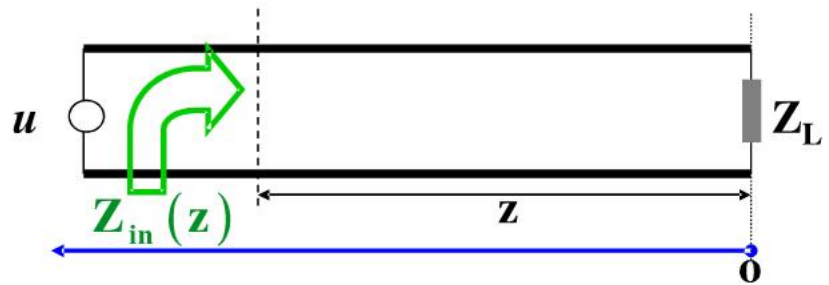
$$\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} = \alpha + j\beta$$

式中

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1^2)} - (\omega^2 L_1 C_1 - R_1 G_1) \right]} \xrightarrow[\text{无损耗线 } R_1=0, G_1=0]{\text{无损耗线}} \alpha = 0$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(R_1^2 + \omega^2 L_1^2)(G_1^2 + \omega^2 C_1^2)} + (\omega^2 L_1 C_1 - R_1 G_1) \right]} \xrightarrow[\text{无损耗线 } R_1=0, G_1=0]{\text{无损耗线}} \beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}$$

三、输入阻抗



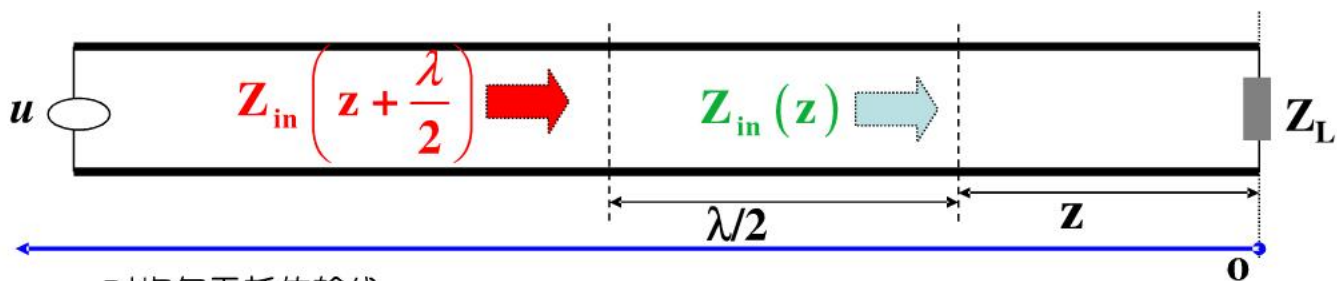
定义：传输线上任一点的电压和电流的比值定义为该点沿向负载端看去的输入阻抗。

$$Z_{in}(z) = \frac{U(z)}{I(z)}$$

得均匀无耗传输线的输入阻抗为：

$$Z_{in}(z) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta z)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta z)}$$

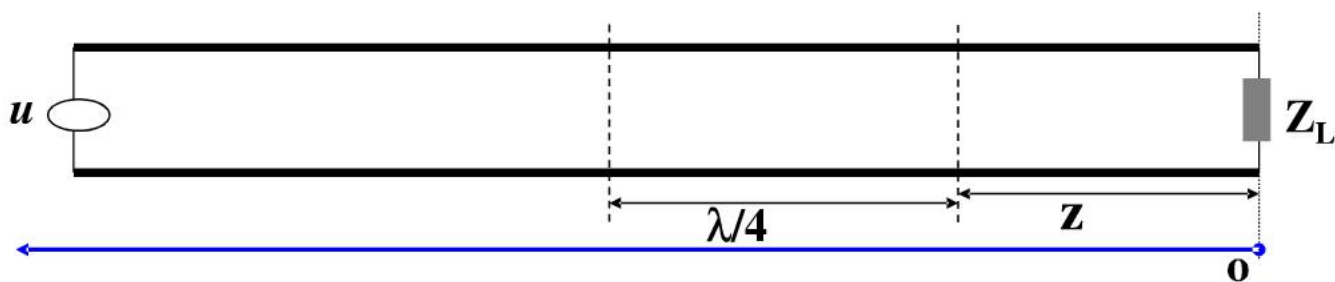
式中 $Z_L = \frac{U_2}{I_2}$ 为终端负载阻抗， $Z_0 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ 为特性阻抗



对均匀无耗传输线：

$$Z_{in}\left(z + \frac{\lambda}{2}\right) = Z_{in}(z)$$

说明均匀无耗传输线沿线具有 $\lambda/2$ 的阻抗周期性（阻抗重复性或阻抗还原性）



$$Z_{in}\left(z + \frac{\lambda}{4}\right) = \frac{Z_0^2}{Z_{in}(z)}$$

说明均匀无耗传输线沿线具有 $\lambda/4$ 的阻抗变换性

几种特殊情况下的反射系数

$$\Gamma_2 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad \Gamma(z) = \Gamma_2 e^{-2\gamma z} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2\gamma z}$$

$Z_L = Z_0$ (负载阻抗=特性阻抗)时, $\Gamma(z) = 0 \longrightarrow$ 无反射

$Z_L = 0$ (终端短路)时, $\Gamma_2 = -1$, $\Gamma(z) = -1e^{-2\gamma z}$

$Z_L = \infty$ (终端开路)时, $\Gamma_2 = 1$, $\Gamma(z) = 1e^{-2\gamma z}$

$Z_L = jX_L$ (终端负载为纯电抗)时, $|\Gamma_2| = 1$

$$|\Gamma(z)| = 1$$

$\longrightarrow$ 全反射

7.6.4 均匀无耗传输线的工作状态

- 传输线的工作状态取决于传输线终端所接的负载。

一、行波状态: 传输线上无反射波, 只有入射波的工作状态称为行波状态。

行波状态下无损耗线的特点:

- ★ 沿线电压、电流
振幅不变;
- ★ 电压、电流同相位;
- ★ 沿线各点的输入阻抗
均等于其特性阻抗

二、驻波状态

当负载阻抗 $Z_L = \begin{cases} 0 & \text{终端短路} \\ \infty & \text{终端开路} \\ \pm jX_L & \text{纯电抗性负载} \end{cases}$

产生全反射。入射波和反射波叠加形成驻波。

$$\Rightarrow |\Gamma_2| = 1 \quad \Gamma_2 = \frac{U_2^-}{U_2^+} = \frac{U_2 - I_2 Z_0}{U_2 + I_2 Z_0} = \left| \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right| e^{j\varphi_2}$$

$$\Rightarrow Z_{in}(z) = jZ_0 \tan(\beta z)$$

驻波状态下的无损耗线的特点：

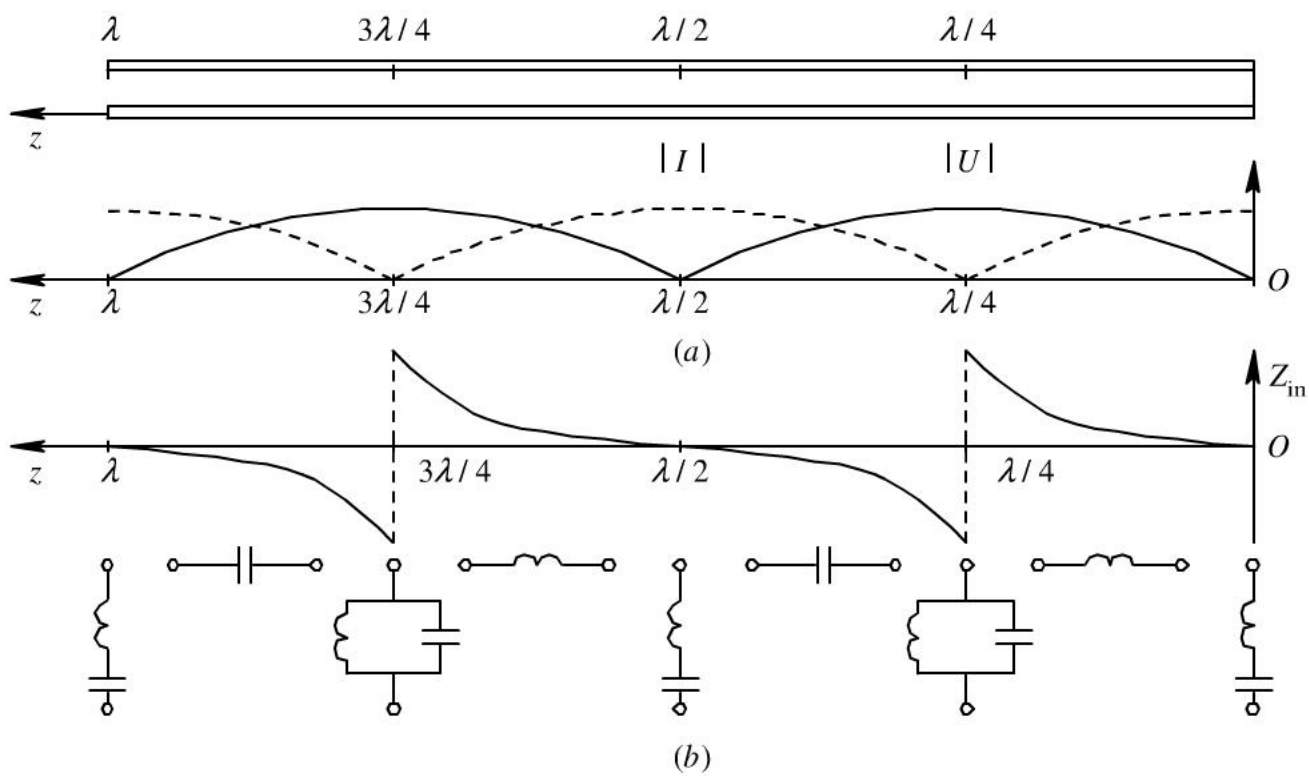
★ 传输线的波不具有行波的传输特性，而是在线上作简谐振荡；

★ 传输线上电压和电流的振幅是 z 的函数，出现最大值（波腹点）和零值（波节点）；

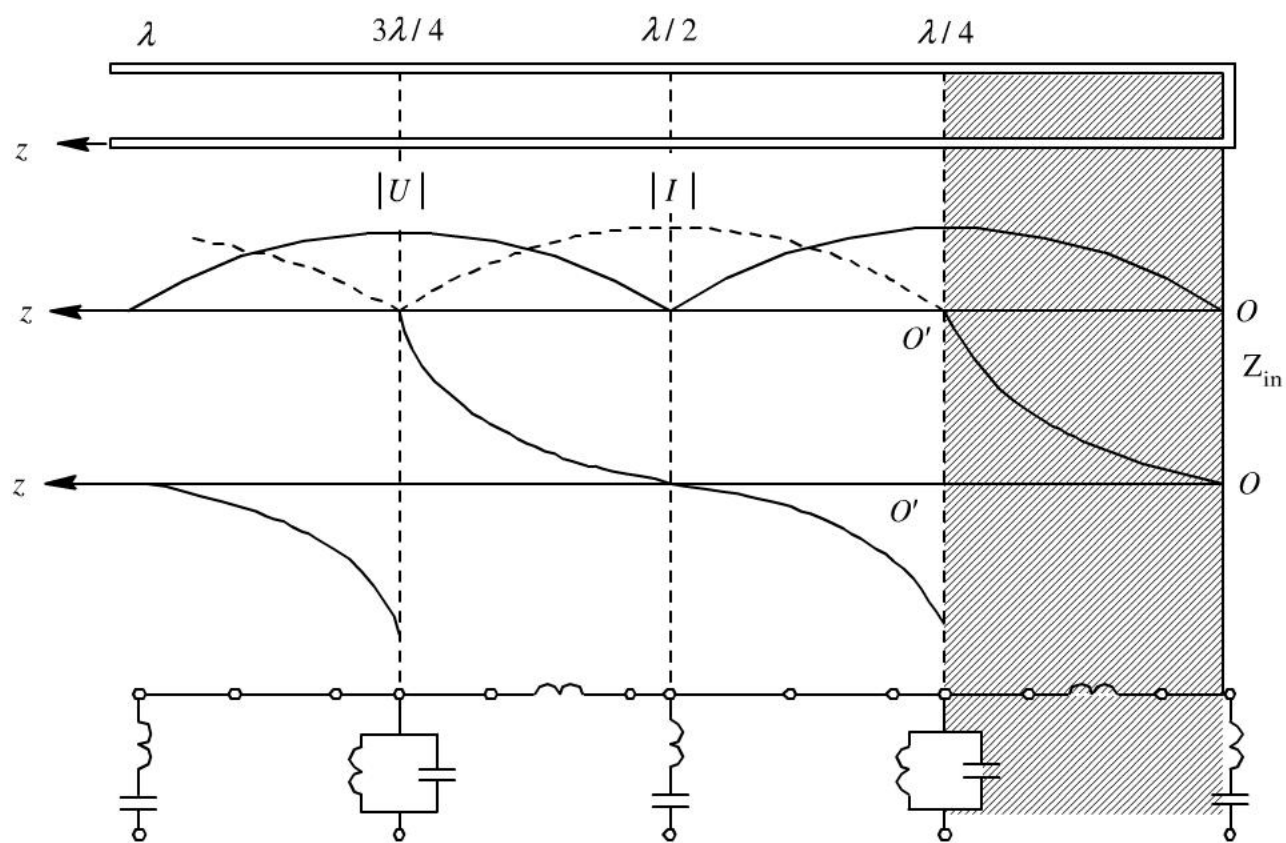
★ 传输线上各点的电压和电流在时间上有 90° 的相位差，在空间上也有 90° 的相移；

★ 传输线在全驻波状态下没有功率传输。

★ 输入阻抗是一纯电抗，随 z 值不同，传输线可等效为一个电容，或一个电感，或一个谐振电路。



终端短路线中的纯驻波状态



无耗终端开路线的驻波特性

三、混合波状态（行驻波状态）

当负载阻抗 $Z_L \neq \{ 0, \infty, \pm jX_L, Z_0 \}$ 而是接任意负载阻抗，线上将同时存在入射波和反射波，两者叠加形成混合波状态。

$$\begin{aligned} U(z) &= U_2^+ e^{j\beta z} + \Gamma_2 U_2^+ e^{-j\beta z} \\ &= U_2^+ e^{j\beta z} + 2\Gamma_2 U_2^+ \frac{e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}}{2} - \Gamma_2 U_2^+ e^{j\beta z} \\ &= U_2^+ e^{j\beta z} (1 - \Gamma_2) + 2\Gamma_2 U_2^+ \cos(\beta z) \end{aligned}$$

$$I(z) = I_2^+ e^{j\beta z} (1 - \Gamma_2) + j2\Gamma_2 I_2^+ \sin(\beta z)$$

行波分量

驻波分量

由 $U(z) = U^+(z) + U^-(z)$

$$\begin{aligned} &= U^+(z) \left[1 + \frac{U^-(z)}{U^+(z)} \right] \\ &= U^+(z) [1 + \Gamma(z)] \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} |U|_{\max} &= |U_2^+| (1 + |\Gamma_2|) \\ |U|_{\min} &= |U_2^+| (1 - |\Gamma_2|) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_2|}{1 - |\Gamma_2|}$$

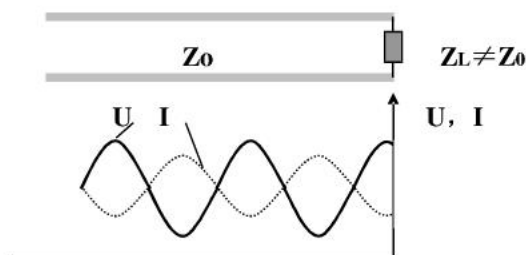


图8.8.3 混合波状态下的电压电流振幅分布

传输线上最大电压（或电流）与最小电压（或电流）的比值，定义为驻波系数或驻波比。

$$S = \frac{|U|_{\max}}{|U|_{\min}} = \frac{|I|_{\max}}{|I|_{\min}}$$

均匀无耗传输线的三种工作状态及其工作条件

- ▼ 行波状态 $|\Gamma_2|=0 \Rightarrow S=1$; 工作条件: $Z_L = Z_0$
- ▼ 驻波状态 $|\Gamma_2|=1 \Rightarrow S=\infty$; 工作条件: $Z_L = 0$ 或 ∞ 或 $\pm jX_L$
- ▼ 混合波状态 $|\Gamma_2|<1 \Rightarrow 1<S<\infty$. 工作条件: $Z_L \neq 0$ 或 ∞ 或 $\pm jX_L$ 或 Z_0 , 而是任意负载阻抗

行波系数

$$K = \frac{|U|_{\min}}{|U|_{\max}} = \frac{|I|_{\min}}{|I|_{\max}}$$

$$K = \frac{1}{S} = \frac{1-|\Gamma_2|}{1+|\Gamma_2|}$$