

特别说明

此资料来自豆丁网(<http://www.docin.com/>)

您现在所看到的文档是使用**下载器**所生成的文档

此文档的原件位于

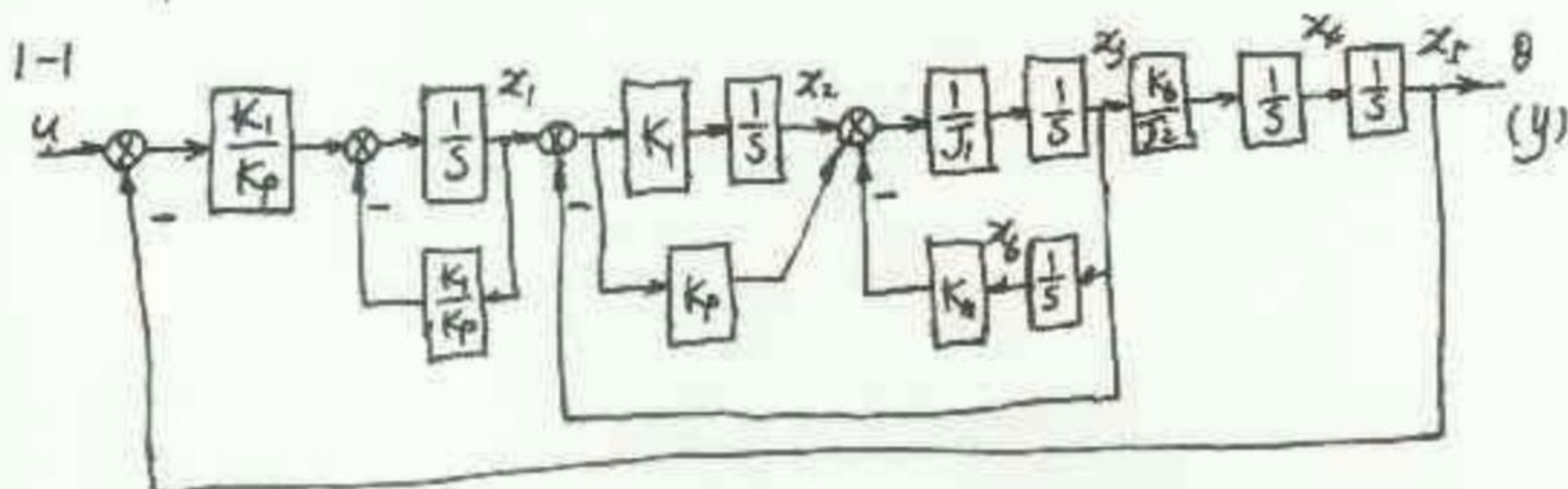
<http://www.docin.com/p-37996401.html>

感谢您的支持

抱米花

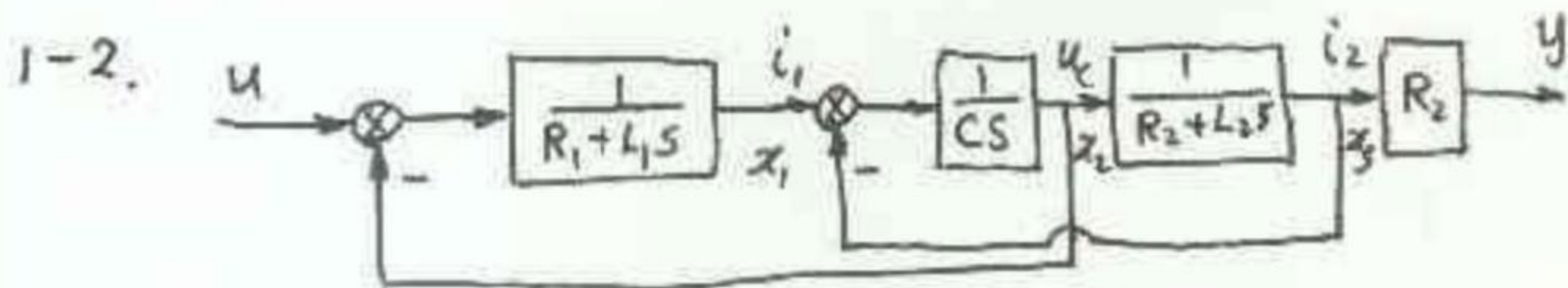
<http://blog.sina.com.cn/lotusbaob>

第一章 参考文献检索



$$A = \begin{bmatrix} -\frac{x_1}{x_6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{x_1}{x_6} & 0 \\ x_1 & 0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x_1}{x_6} & -1 & -\frac{x_1}{x_6} & 0 & 0 & -\frac{x_1}{x_6} \\ 0 & 0 & \frac{x_1}{x_6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$



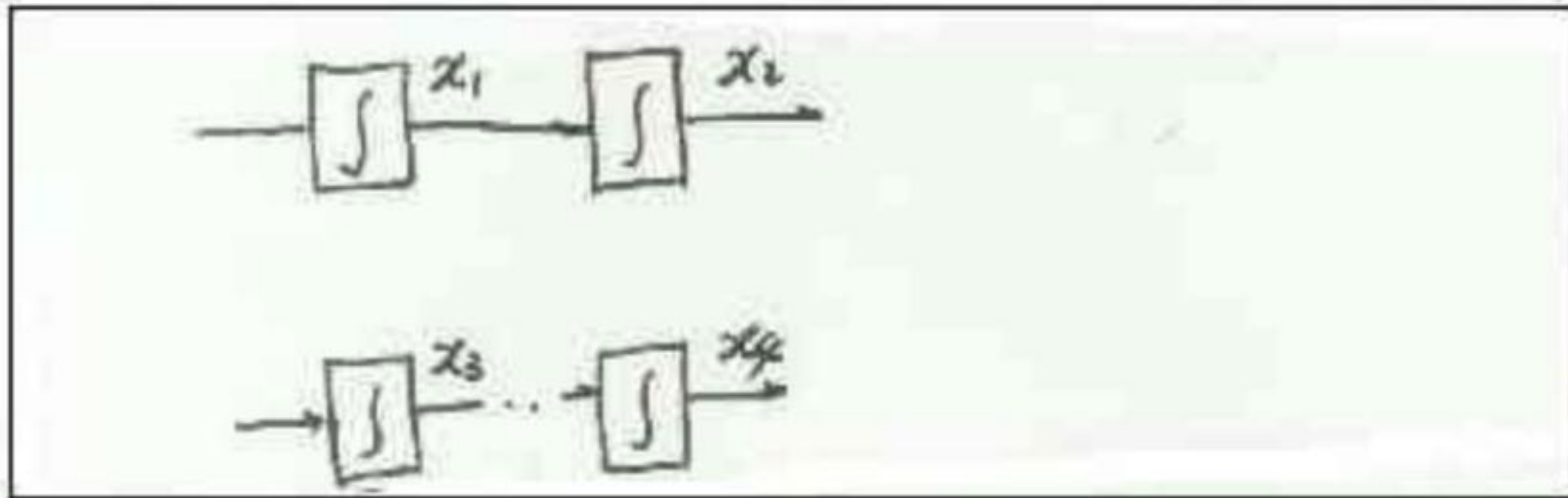
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & \frac{1}{L_2} & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

1-3 参考例1-3(P17)

1-4

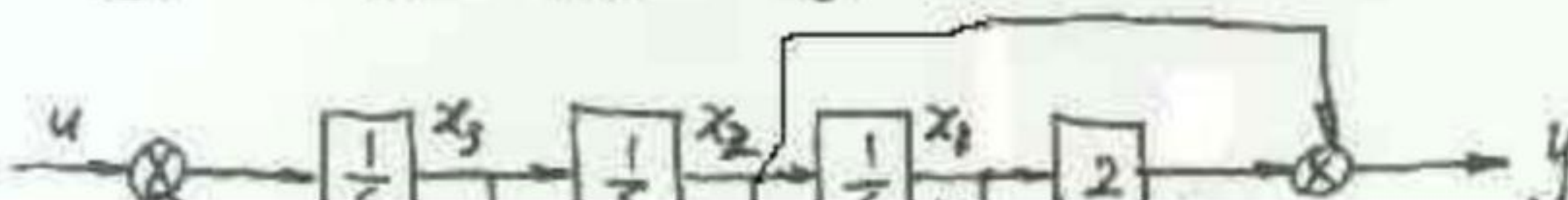


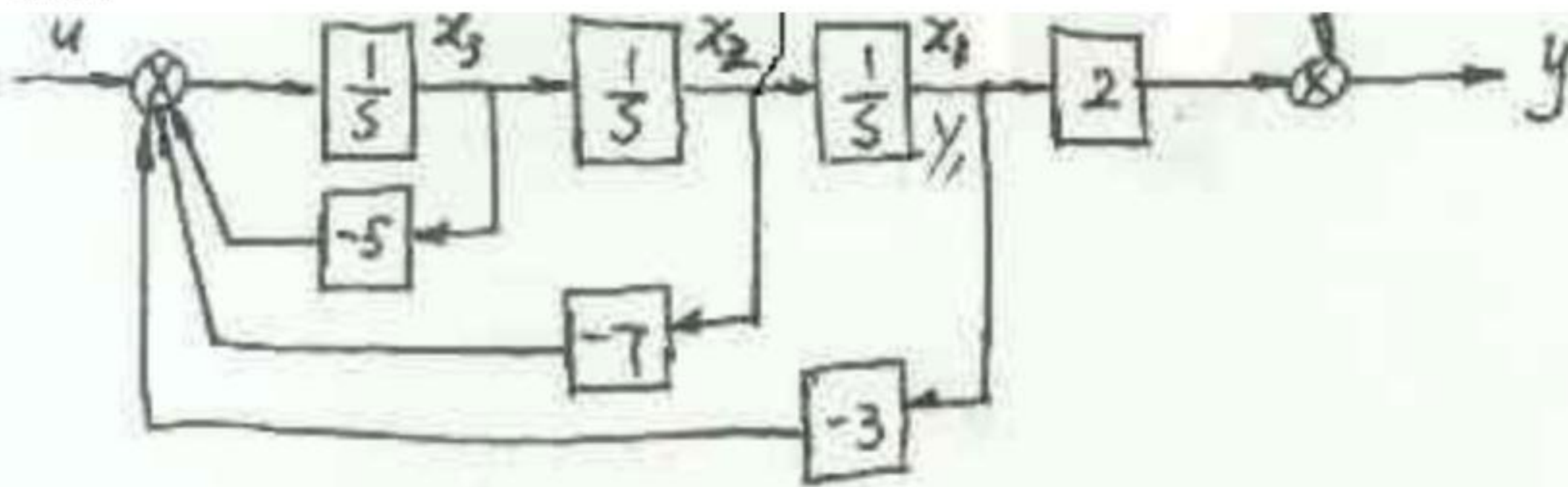
$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_5 & 0 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W(s) = \frac{\begin{bmatrix} (s^2 + a_3s + a_4)b_1 & -a_6b_2s \\ -((a_5-1)s - a_3)b_1 & (s^2 + a_1s + a_2 - a_6)b_2 \end{bmatrix}}{s^4 + (a_3 + a_1)s^3 + (a_4 + a_1a_3 + a_2 - a_5a_6)s^2 + (a_1a_4 + a_2a_3)s + a_2a_4 - a_6a_4}$$

1-5 (17) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 7y = \dot{u} + 2u$





$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

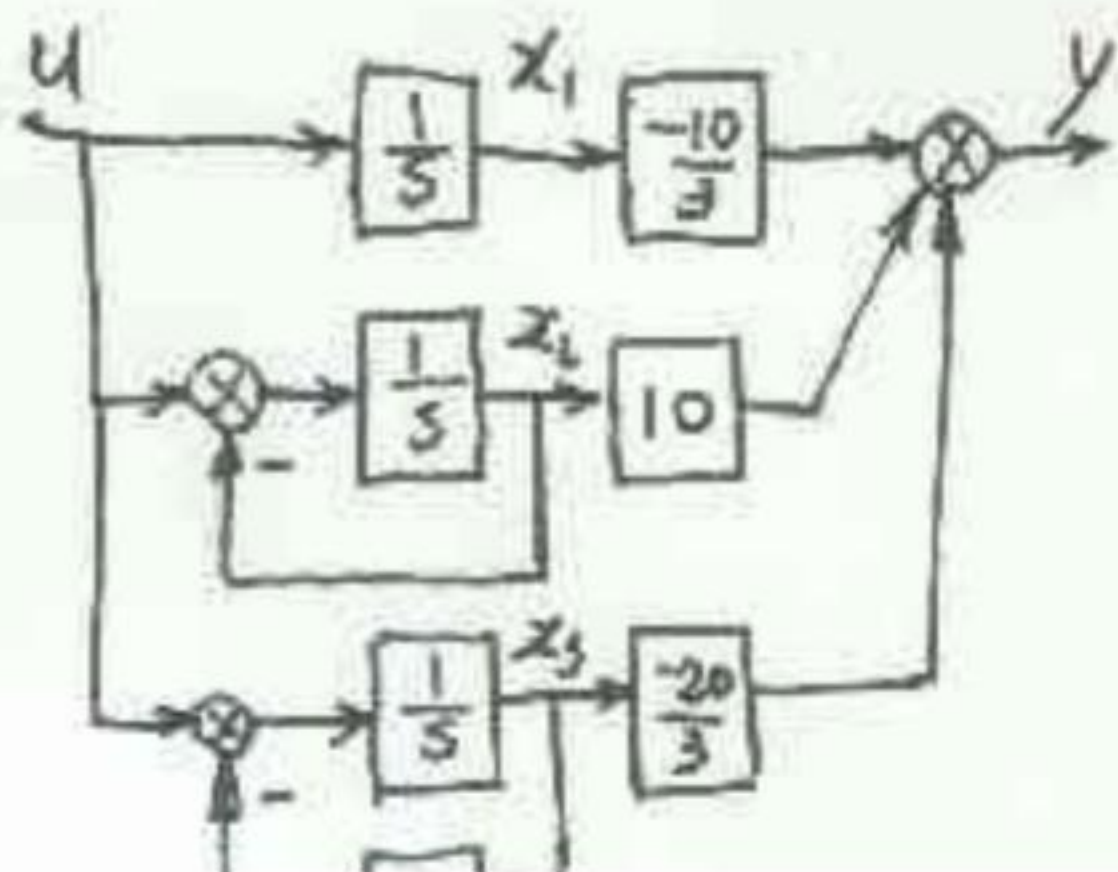
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$1-5 (2) \quad \ddot{y} + 5\dot{y} + 7y + 3y = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

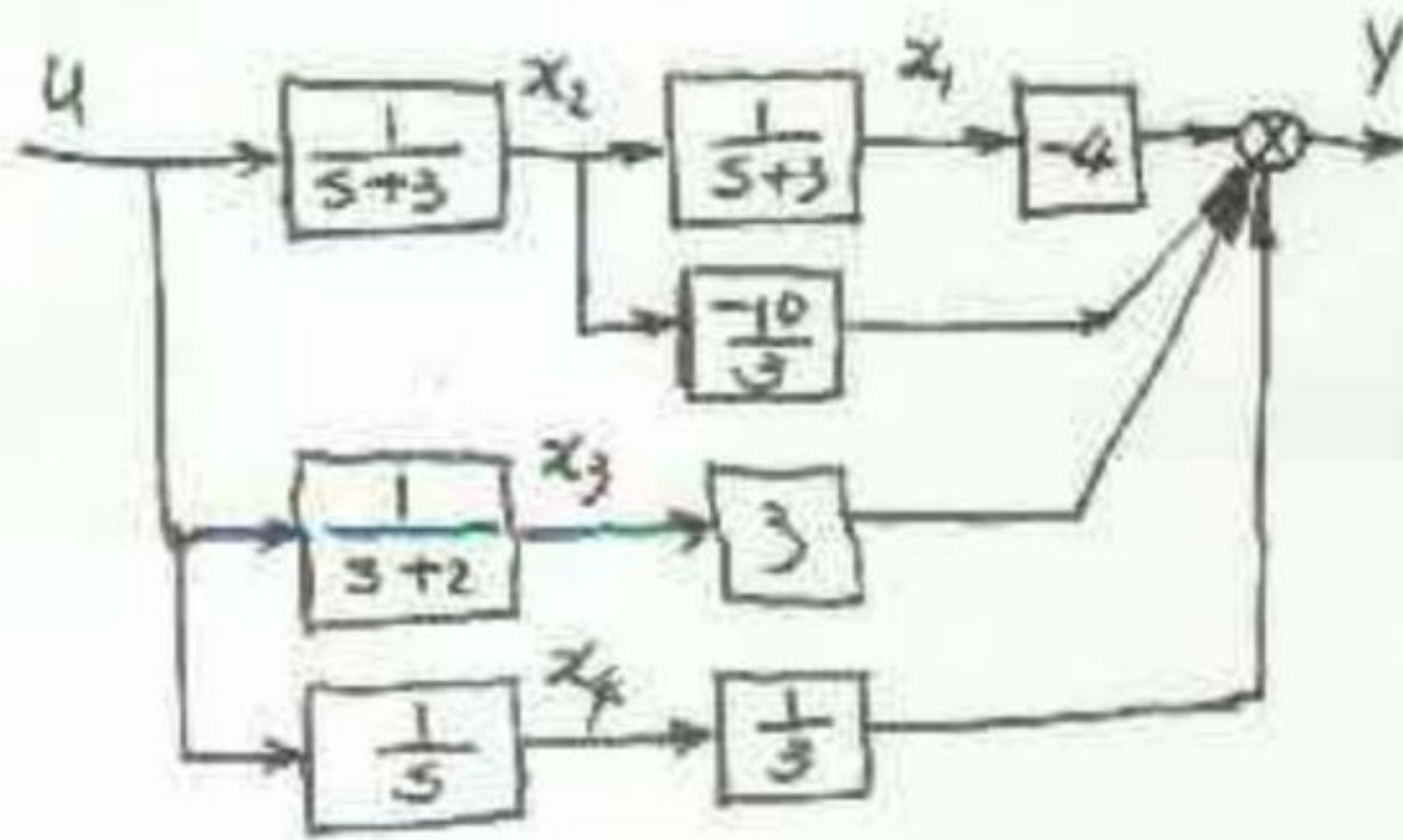
$$1-6 (1) \quad W(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s+3)} = \frac{-10/3}{s} + \frac{10}{s+1} + \frac{-20/3}{s+3}$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

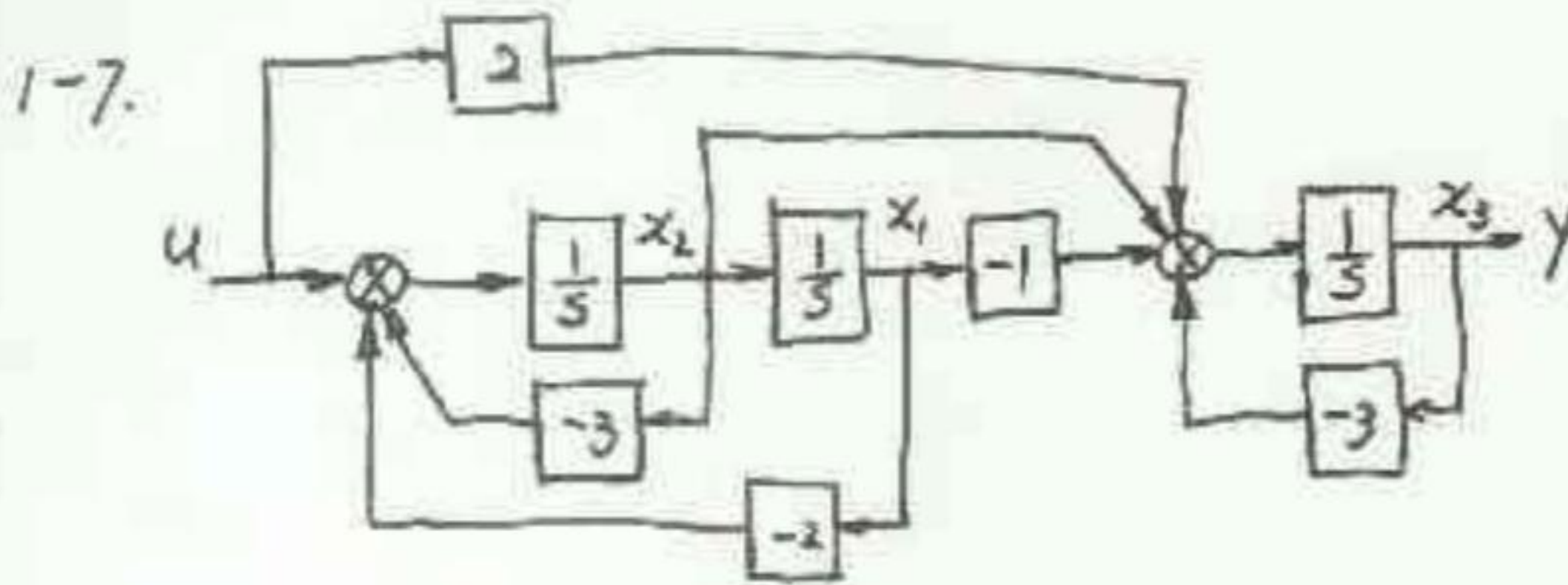
$$C = \begin{bmatrix} -10/3 & 10 & -20/3 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$1-6(2) \quad W(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)^2} = \frac{-4}{(s+3)^2} + \frac{-10/3}{s+3} + \frac{3}{s+2} + \frac{1/3}{s}$$



$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -10/3 & 3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad D = 0$$



$$W(s) = \frac{2s^2 + 7s + 3}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

$$1-8(1) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} -2+j & 0 \\ 0 & -2-j \end{bmatrix}$$

$$1-8(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$1-8(3) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5 + \sqrt{15}j}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5 - \sqrt{15}j}{2} \end{bmatrix}$$

$$1-9(2) \quad V = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad V^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1.375 & 0 \\ 1.25 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$CV = \begin{bmatrix} -4 & -12 & 2 \\ -3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

http://auto.upc.edu.cn:8081/31zdhx/kzll/IÖ' ú ¿ØÖÆÀ í ÂÛï° îæî¼'d°_1.htm (第 5 / 5 页) [2009-6-11 22:40:24]

习题二解答

2-1、证明：由

$$e^{(A+B)t} = I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A+B)^2 t^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 t^3 + \dots$$

$$= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2)t^2 + \dots$$

$$+ \frac{1}{3!}(A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3)t^3 + \dots$$

$$e^{At} \cdot e^{Bt} = (I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \frac{1}{3!}A^3 t^3 + \dots) (I + Bt + \frac{1}{2!}B^2 t^2 + \frac{1}{3!}B^3 t^3 + \dots)$$

$$= I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2)t^2 + \dots$$

$$+ (\frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{2!}A^2B + \frac{1}{2!}AB^2 + \frac{1}{3!}B^3)t^3 + \dots$$

将以上二式相减，得

$$e^{(A+B)t} - e^{At} \cdot e^{Bt} = \frac{1}{2!}(BA - AB)t^2 + \frac{1}{3!}(BA^2 + ABA + B^2A + BAB - 2A^2B - 2AB^2)t^3 + \dots$$

显然，只有 $AB = BA$ ，才有

$$e^{(A+B)t} - e^{At} \cdot e^{Bt} = 0;$$

$$\text{即 } e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt} \quad \#$$

2-2、证明：(2-17)

$$\text{由 } e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & & \\ & \lambda_2 t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2!} \lambda_1 t^2 & & & \\ & \frac{1}{2!} \lambda_2 t^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2!} \lambda_n t^2 \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k t^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_2^k t^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k t^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \#$$

证明: (2-18)

$$\text{由 } e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots;$$

知 $\exists$ 可逆阵 p , s.t. $p^{-1}Ap = \Lambda$, 则 $A = p\Lambda p^{-1}$, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ 是特征根,

可知

$$e^{At} = p \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k t^k & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_2^k t^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k t^k \end{bmatrix} p^{-1}$$

$$= p \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} p^{-1} \quad \#$$

另证：由 $\dot{x} = Ax$

若 A 可对角化，则 $\exists$ 一变换阵 p ，定义

$$x = p\hat{x}, \text{ 则}$$

$$\dot{\hat{x}} = p^{-1}Ap\hat{x} = \Lambda\hat{x}$$

$$\text{其中 } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix};$$

其解为：

$$\hat{x}(t) = e^{\Lambda t} \hat{x}(0);$$

$$x(t) = p\hat{x}(t) = pe^{\Lambda t}p^{-1}x(0);$$

$$\text{又由 } x(t) = e^{At}x(0);$$

$$\text{故 } e^{At} = pe^{\Lambda t}p^{-1} \quad \#$$

证明：(2-19) 约当标准型：

由 $\dot{X} = AX$

矩阵 A 有重根，则知存在一可使 A 化为约当标准型的变换阵 S , s.t

$$S^{-1}AS = J$$

式中 J 是约当标准型矩阵，现定义

$$X = S\hat{X}$$

则

$$\dot{\hat{X}} = S^{-1}AS\hat{X} = J\hat{X}$$

其解为

$$\hat{X}(t) = e^{Jt} \hat{X}(0)$$

故

$$X(t) = S\hat{X}(t) = Se^{Jt}S^{-1}x(0)$$

在联系到

$$X(t) = e^{At}X(0)$$

可得

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$$

注意到

$$e^{At} = I + A_1 t + \frac{1}{2!} A_1^2 t^2 + \frac{1}{3!} A_1^3 t^3 + \dots \quad (1) \text{ 将}$$

由

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

于是有

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1^2 \end{bmatrix};$$

$$A_1^3 = \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1^3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1^3 \end{bmatrix}$$

.....
~~~~~

将以上求得的  $A_i$  及其  $A_i$  诸次方的表达式带入 (1) 式, 令  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_i^k t^k = \Psi$  有

$$e^{A_i t} = \begin{bmatrix} \Psi & \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} & \frac{\partial^2 \Psi}{2! \partial \lambda_i^2} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \Psi}{(m-1)! \partial \lambda_i^{m-1}} \\ 0 & \Psi & \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} & \cdots & \frac{\partial^{m-2} \Psi}{(m-2)! \partial \lambda_i^{m-2}} \\ 0 & 0 & \Psi & \cdots & \frac{\partial^{m-3} \Psi}{(m-3)! \partial \lambda_i^{m-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & t e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & \cdots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{m-3}}{(m-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

这是第  $i$  个小块的情况, 其余小块类似, 得证。#

证明：(2-20)

采用拉氏变换法：

$$e^{At} = L^{-1}((sI - A)^{-1})$$

而

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - \sigma & \omega \\ -\omega & s - \sigma \end{bmatrix} / ((s - \sigma)^2 + \omega^2)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - \sigma + j\omega} + \frac{1}{s - \sigma - j\omega} \right) & \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - \sigma - j\omega} - \frac{1}{s - \sigma + j\omega} \right) \\ -\frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - \sigma - j\omega} - \frac{1}{s - \sigma + j\omega} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - \sigma + j\omega} + \frac{1}{s - \sigma - j\omega} \right) \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = L^{-1}((sI - A)^{-1})$$

$$= e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) & \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \\ -\frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) & \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \end{bmatrix}$$

由 Euler 公式，有

$$e^{At} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \#$$

2-3 解：首先

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} \begin{bmatrix} s^2 - 4s + 5 & s - 4 & 1 \\ 2 & s(s-4) & s \\ 2s & -5s + 2 & s^2 \end{bmatrix}$$

化成部分分式：

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-2} & \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{2}{s-1} + \frac{-2}{s-2} & \frac{-1}{(s-1)^2} + \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2} \\ \frac{-2}{(s-1)^2} + \frac{-2}{s-1} + \frac{2}{s-2} & \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{5}{s-1} + \frac{-4}{s-2} & \frac{-1}{(s-1)^2} + \frac{-2}{s-1} + \frac{2}{s-2} \\ \frac{-2}{(s-1)^2} + \frac{-4}{s-1} + \frac{4}{s-2} & \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{8}{s-1} + \frac{-8}{s-2} & \frac{-1}{(s-1)^2} + \frac{-3}{s-1} + \frac{4}{s-2} \end{bmatrix}$$

$$L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & 3te^t + 2e^t - 2e^{2t} & -te^t - e^t + e^{2t} \\ -2te^t - 2e^t + 2e^{2t} & 3te^t + 5e^t - 4e^{2t} & -te^t - 2e^t + 2e^{2t} \\ -2te^t - 4e^t + 4e^{2t} & 3te^t + 8e^t - 8e^{2t} & -te^t - 3e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}$$

2-4 本题只给一个参考答案

$$(1) e^{At} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2} \sin 2t \\ 2 \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}; \quad (2) e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) & \frac{1}{4}(e^{3t} - e^{-t}) \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) \end{bmatrix};$$

2-5 本题只给参考答案

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix};$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix};$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix};$$

2-6 解：由  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;

将 A 带入  $e^{At} = I + A_1 t + \frac{1}{2!} A_1^2 t^2 + \frac{1}{3!} A_1^3 t^3 + \dots$

得  $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;

带入

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} 1+t+\frac{1}{2}t^2 \\ 1+t \end{bmatrix}$$

$$y(t) = [1 \quad 0]x = 1+t+\frac{1}{2}t^2。$$



$$\begin{aligned}
 \text{上式得} &= e^{At} x_0 + e^{At} \left( It - \frac{At^2}{2!} + \frac{A^2 t^3}{3!} - \dots \right) BK \\
 &= e^{At} x_0 + e^{At} [-(A^{-1})(e^{-At} - I)] BK \\
 &= e^{At} x_0 + A^{-1}(e^{At} - I) BK
 \end{aligned}$$

(3) 斜坡响应:

由状态方程解为:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

把  $t_0 = 0_-$ ,  $u(t) = kt \times 1(t)$  带入, 有

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{At} x(0_-) + \int_{0_-}^t e^{A(t-\tau)} d\tau BK \\
 &= e^{At} x_0 + e^{At} \int_{0_-}^t \left( I - A\tau + \frac{A^2 \tau^2}{2!} - \dots \right) d\tau BK \\
 &= e^{At} x_0 + e^{At} \left( \frac{I}{2} t^2 - \frac{2A}{3!} t^3 + \frac{3A^2 t^4}{4!} - \dots \right) BK \\
 &= e^{At} x_0 + A^{-2} (e^{At} - I - At) BK \\
 &= e^{At} x_0 + [A^{-2} (e^{At} - I) - A^{-1} t] BK
 \end{aligned}$$

2-8 (略)

2-9 与方块图相对应的系统状态空间表达式为:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U$$

$$Y = [2 \quad 1]X$$

用离散相似法进行离散化, 有

$$\tilde{X}(k+1) = G\tilde{X}(k) + H\tilde{U}(k)$$

其中

$$G = e^{AT} = \Phi(T) = L^{-1}((sI - A)^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix};$$

$$H = \int_0^T e^{At} B dt$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1 - e^{-t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} Ke^{-t} & 0 \\ K(1 - e^{-t}) & 1 \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} K(1 - e^{-T}) & 0 \\ K(T - 1) + Ke^{-T} & T \end{bmatrix}$$

T=0.1; T=1; 具体带入过程 (略)

2-10 解:  $G$  的特征根为  $3/8$ ,  $5/8$ ; 对应的  $P$  为

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad p^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Phi(k) = G^k &= p \Lambda^k p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{3}{8})^k & 0 \\ 0 & (\frac{5}{8})^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k & -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k \\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k & \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^k + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{由 } x(k) = \Phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(j)Hu(k-j-1)$$

由初值和输入可递推计算, 得结果如下:  $x(1) = \Phi(1)x(0) + \Phi(0)Hu(0)$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/8 \\ 19/8 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \Phi(2)x(0) + \Phi(0)Hu(1) + \Phi(1)Hu(0)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2 + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 & -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2 + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 \\ -\frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2 + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 & \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^2 + \frac{1}{2}(\frac{5}{8})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ e^{-T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T + 0.2344 \\ e^{-T} + 1.1719 \end{bmatrix}$$

2-11.

首先写出  $G_0(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$  的状态空间表达式

$$G_0(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = [1 \quad -1]$$

求其状态转移矩阵  $e^{A_0 t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

对  $(A_0, B_0, C_0)$  进行离散化, 包括零阶保持器。

$$G_0 = e^{A_0 T} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \int_0^T e^{A_0 t} B_0 dt = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix}$$

(1) 系统的状态空间表达式

$$x_1(k+1) = e^{-T} x_1(k) + (1 - e^{-T}) u(k)$$

$$x_2(k+1) = e^{-2T} x_2(k) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) u(k)$$

$$u(k) = r(k) - y(k) = r(k) - (x_1(k) - x_2(k))$$

代入得:

$$x_1(k+1) = (2e^{-T} - 1)x_1(k) + (1 - e^{-T})x_2(k) + (1 - e^{-T})r(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2T})x_1(k) + \frac{1}{2}(1 + e^{-2T})x_2(k) + \frac{1}{2}(1 - e^{-2T})r(k)$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - 1 & 1 - e^{-T} \end{bmatrix}$$

$$G(\tau) = \begin{bmatrix} 2e^{-\tau} & 1-e^{-\tau} \\ -\frac{1}{2}(1-e^{-2\tau}) & \frac{1}{2}(1+e^{-2\tau}) \end{bmatrix}$$

$$H(\tau) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-\tau} \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2\tau}) \end{bmatrix}$$

27. 当  $T=0.15$  时

$$G = \begin{bmatrix} 0.8097 & 0.0952 \\ -0.0906 & 0.9094 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0.0952 \\ 0.0906 \end{bmatrix}$$

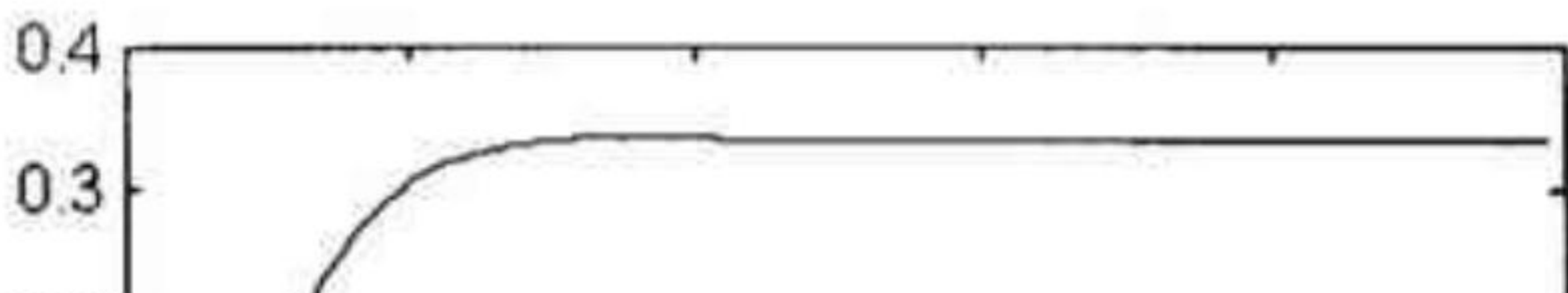
$\langle 3 \rangle \quad k=0 \quad x_1=0 \quad x_2=0 \quad y(0)=0$

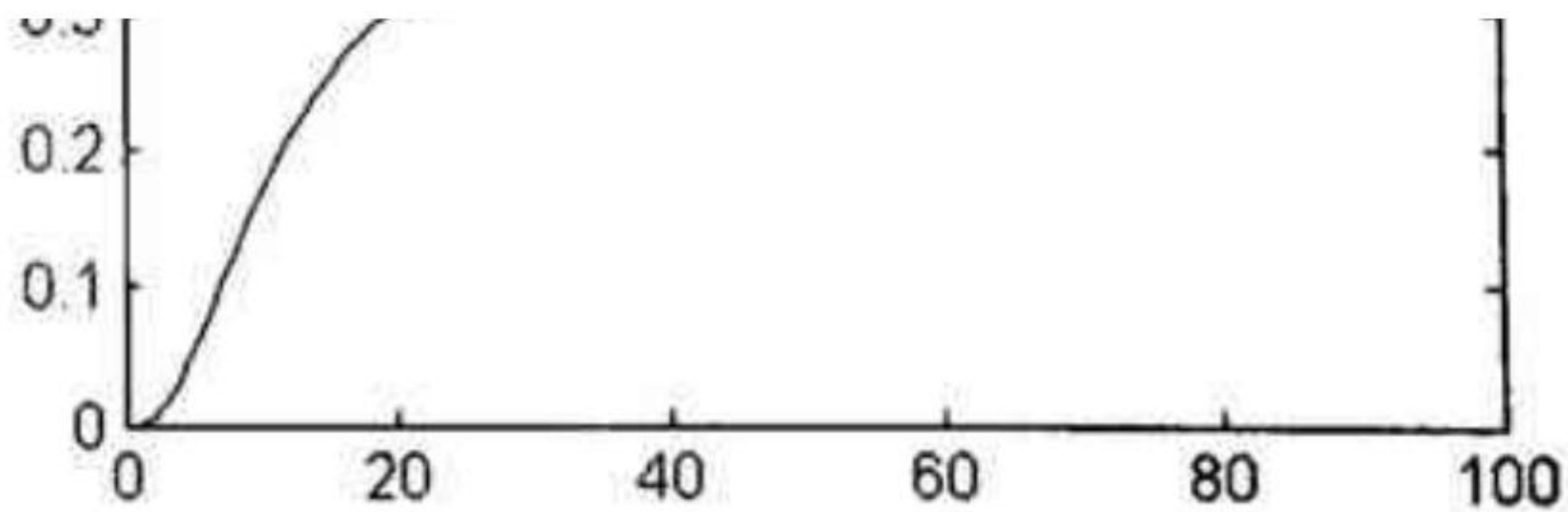
$$k=1 \quad x_1 = 0.0952 \quad x_2 = 0.0906 \quad y(1) = 0.0045$$
$$k=2 \quad x_1 = 0.1808 \quad x_2 = 0.1644 \quad y(2) = 0.0164$$
$$k=3 \quad x_1 = 0.2572 \quad x_2 = 0.2238 \quad y(3) = 0.0335$$
$$k=4 \quad x_1 = 0.3247 \quad x_2 = 0.2708 \quad y(4) = 0.0539$$
$$k=5 \quad x_1 = 0.3839 \quad x_2 = 0.3075 \quad y(5) = 0.0764$$

• • • • •

$$k=100 \quad x_1 = 0.6667 \quad x_2 = 0.3333 \quad y(100) = 0.3333$$

• • • • •





(4). 在采样间隔内,  $G_0(s)$  的输入  $u$  不变.

所以在  $[0.2 \ 0.3]$  时间区间内  $(A_0, B_0, C_0)$

的初始状态为  $x(2T) = \begin{bmatrix} 0.1808 \\ 0.1644 \end{bmatrix} = x_0$

输入信号为  $u_0 = r - y(2T) = 0.9836$

以  $t_0 = 0.2s$  为初始时刻, 在  $t = 0.25s$  时

$$x(t) = e^{A_0(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A_0(t-\tau)} B_0 u_0 d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} x_0$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 - e^{-(t-t_0)} \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-t_0)}) \end{bmatrix} u_0$$

$$\begin{bmatrix} 0.2200 \\ 0.1644 \end{bmatrix}$$

$$x(0.25) = \begin{bmatrix} 0.2200 \\ 0.1956 \end{bmatrix}$$

$$y(0.25) = C_0 x(0.25) = 0.0244$$

-=END=-





$$u(n+k)=0, \text{ 当 } k \geq 0$$

③

将  $[u(0), u(1), \dots, u(n-1)]^T$  代入, 得

$$\mathcal{X}(n) = 0$$

$$\text{if } x(n+1) = Gx(n) + h u(n) = 0$$

$$x(n+2) = Gx(n+1) + hu(n+1) = 0$$

...

$$\therefore x(n+k) = Gx(n+k-1) + h u(n+k-1) = 0$$

对于当  $k \geq 0$

∴ 只要  $(G, h)$  可控, 对于任意  $x_0 \neq 0$ , 都可以在不超过  $n$  个采样周期的时间内, 使系统状态空间原点。#

### 3-6 系统的可控性实现为



$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} ; b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; c_c = [5 \quad 2] ;$$

$$d_c = [1]$$

能观标准型:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}; b_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}; c_0 = [0 \ 1]; d_0 = 1$$

3-10.  $\text{rank } M = 2 < 3$ , 系统不能控;

rank  $N=3$ , 系统能观。

⑤

3-11  $\langle 1 \rangle$  rank  $M = 2$

取  $T_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$  ;

进行能控性分解, 得

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] ; \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

$$\bar{C} = [1 \quad 2 \quad -1]$$



$$[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{array} ] \rightarrow [ \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} ]$$

$$C_o = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$\langle 2 \rangle \text{ rank } N = 2$$

取  $T_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

进行能观性分解, 得

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} ; b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⑦

3-13

<1>  $\text{rank } M = \text{rank } N = 3$

系统是完全能控,完全能观的。

给出其能控标准型实现:

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 12 & 26 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$C_c = [7 \quad 13 \quad 23]$$

$$<2> \text{rank} M = 2; \text{rank} N = 2$$

先对系统进行能控性分解:

$$T_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{得 } \bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{c1} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & -6 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{c} = [1 \quad -2 \quad 3 \quad 0];$$





⑩

3-14 (1) 先写出系统的可控标准型实现

$$W(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

系统是完全可以控制的

$$C_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

系统不完全能观

$$\text{Rank } N = 1 < 2$$

进行能观性分解.

$$\text{取 } R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = R_0^{-1} A_c R_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = R_0^{-1} B_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = C_c R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

系统的最小实现为

$$\hat{A}_m = -1$$

$$\hat{B}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

验证

$$\hat{C}_m (sI - \hat{A}_m)^{-1} \hat{B}_m + D = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = W(s)$$

注意此题中  $(A_c, C_c)$  的可观性判断中可应用约当标准型的判别方法. 由于  $-1$  这个特征值对应两个约当



系统的最小实现

$$\tilde{A}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以验证,  $\tilde{C}_m(1s - \tilde{A}_m)^{-1}\tilde{B}_m + D = W(s)$

3-15. 可判定  $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2$  都是能控且能观的系统

(12)

$$W_1(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \quad W_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

(1) 串联系统.

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} \cdot \frac{1}{s+2}$$

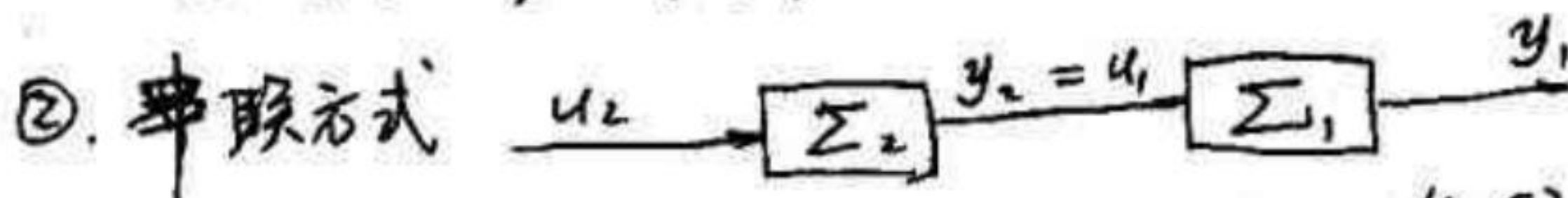
相消, 故系统不可控或不可观, 或既不可控也不可观.



$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{rank } M = 2$ , 不可控,  $\text{rank } N = 3$  可观



u1 的输入是 完全可控但不能观的系统.

则此系统是 完全可控但不可观的情况。

(2). 并联系统.

$$W(s) = W_1 + W_2 = \frac{s+2}{s^2+4s+3} + \frac{1}{s+2} = \frac{2(s+2+\frac{\sqrt{2}}{2})(s+2-\frac{\sqrt{2}}{2})}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

无零极相消, 系统完全可控且可观.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \quad C_2] = [2 \quad 1 \quad 1]$$

$$\text{rank } M = 3, \quad \text{rank } N = 3.$$

(13)

3-16. 设  $W_0(s) = \frac{K_0 \prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j)} \quad (m \leq n)$

若系统不能控或(和)不可观, 则  $W_0(s)$  有零极点相消,

即  $\prod_{i=1}^m (s-z_i)$  与  $\prod_{j=1}^n (s-p_j)$  有公因子。

若系统能控且可观, 则无零极点相消。

闭环系统的传递函数为

$$W_f(s) = \frac{K_0 \prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{j=1}^n (s-p_j) - K_0 \prod_{i=1}^m (s-z_i)}$$

显然  $W_f(s)$  与  $W_0(s)$  能相消的零极点是相同的。故以

图中开环系统与闭环系统的可控、可观测性一致。

-=END=-

## 第四章参考答案

## 4-1. (1)

$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & -11 \end{bmatrix} x = x^T P x$ , 由于 P 的 2 阶主子行列式都大于零, 而 1、3 阶主子行列式小于零, 故为负定函数。

## 4-1. (2)

$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} x = x^T P x$ , 由于 P 的 1、2 阶主子行列式都大于零, 而 3 阶主子行列式小于零, 故为非定号性函数。

## 4-2. 系统的特征多项式为

$$f(s) = (s - a_{11})(s - a_{22}) - a_{12} * a_{21} = s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21})$$

系统在平衡状态大范围渐进稳定的充要条件是系统矩阵的特征值都有负实部, 即

$$a_{11} < 0 \quad a_{22} < 0 \quad a_{11} * a_{22} > a_{12} * a_{21}$$

4-3. (1) 平衡状态为  $x_e = [0 \ 0]^T$ , 构造李雅普诺夫函数  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$\dot{V}(x) = -(2x_1^2 + 6x_2^2) < 0$  系统在平衡状态渐进稳定, 并且  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 是大范围渐进稳定。

4-3. (2) 平衡状态为  $x_e = [0 \ 0]^T$ , 构造李雅普诺夫函数  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$\dot{V}(x) = -(2x_1^2 + 2x_2^2) < 0$  系统在平衡状态渐进稳定, 并且  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 是大范围渐进稳定。

4-6. 系统平衡状态为  $x_e = [0 \ 0]^T$ , 构造李雅普诺夫函数  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$\dot{V}(x) = -2a(1+x_2)^2 x_2^2 \leq 0$  系统在平衡状态稳定。因为对于  $x \neq 0$ ,  $\dot{V}(x)$  不恒为零, 并且  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 是大范围渐进稳定。

4-7.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 系统平衡状态为 } x_e = [0 \ 0 \ 0]^T$$

由方程  $G^T P G - P = -I$  解出  $P = \begin{bmatrix} -19/78 & -10/39 & -1/2 \\ -10/39 & -49/78 & -19/13 \\ -1/2 & -19/13 & -121/26 \end{bmatrix}$ , 不定号, 因此系统不渐近稳定。

实际上, 该系统的特征值为  $0.1173 + 2.6974i$ ,  $0.1173 - 2.6974i$ ,  $-1.2346$  都在单位圆外, 系统是不稳定的。

4-9. 对于此问题及 4-10 题, 由于  $f_1$  中不包含  $x_1$ , 不能用克拉索夫斯基法确定在坐标原点的稳定性! 对于坐标原点这个平衡状态, 可取如下李雅普诺夫函数:

$$V(x) = x_1^4 + [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^4 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 > 0$$

$$\dot{V}(x) = 4x_1^3\dot{x}_1 + 2x_1\dot{x}_1 + 4x_2\dot{x}_2 + 2\dot{x}_1x_2 + 2x_1\dot{x}_2 = -2(x_1^4 + x_2^2) < 0$$

因此系统在坐标原点是渐近稳定的, 并且  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 是大范围渐近稳定。

4-10. 系统的平衡状态在坐标原点。由于  $a_1 > 0$ , 可取李雅普诺夫函数为  $V(x) = a_1x_1^2 + x_2^2 > 0$

$$\dot{V}(x) = 2a_1x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2a_1x_1x_2 - 2x_2(a_1x_1 + a_2x_1^2x_2) = -2a_2x_1^2x_2^2 \leq 0, \text{ (由于 } a_2 > 0), \text{ 非正定。}$$

并且  $x_1 = 0$  时,  $x_2 \rightarrow 0$ ;  $x_2 = 0$  时,  $x_1 \rightarrow 0$ 。即对于  $x = [0 \ x_2]^T \neq 0$  或  $x = [x_1 \ 0]^T \neq 0$

$\dot{V}(x)$  不恒为零, 所以坐标原点是渐近稳定的; 由于  $\|x\| \rightarrow \infty$ ,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 是大范围渐近稳定。

4-11. 用克拉索夫斯基法, 取  $P = I$ 。

$$J(x) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 + 5bx_2^4 \end{bmatrix}, \quad J^T(x) = J(x), \quad Q = -J^T(x) - J(x) = \begin{bmatrix} -2a & -2 \\ -2 & 2 - 10bx_2^4 \end{bmatrix}$$

$$V(x) = \dot{x}^T \dot{x} = (ax_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 + bx_2^5)^2 > 0$$

$\|x\| \rightarrow \infty$ ,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 因此只要系统在坐标原点渐近稳定即是大范围渐近稳定的, 只要  $Q(x) > 0$  即满

足渐近稳定的条件。满足要求的  $a$  和  $b$  的取值范围:  $a < -1, b < 0$ 。

-END-

①

5-1. 首先判断系统的可控性.

可以判定, 此系统完全可控.

状态反馈控制律为:  $u = Kx + v$

$$K = [k_0 \ k_1 \ k_2]$$

$$f_K(s) = \det(sI - (A + BK)) = s^3 - (3 + k_2)s^2 + (2 + 2k_2 - k_0)s + 1 - k_2 + k_1 + 2k_0$$

由给定的闭环极点  $-1, -2, -3$  得

$$f_K^* = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

比较系数得  $k_0 = 23, k_1 = -50, k_2 = -9$

$$K = [23 \ -50 \ -9]$$

5-2. 判断系统的可控性, 系统完全可控.

状态反馈控制律为  $u = Kx + v, K = [k_0 \ k_1 \ k_2]$

$$f_K(s) = \det[sI - (A + BK)] = s^3 + (11 - 10k_2)s^2 + (11 - 10k_2 - 10k_1)s - 10k_0$$

由给定的闭环极点  $-10, -1 \pm j\sqrt{3}$  得

$$f_K^*(s) = (s+10)(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3}) = s^3 + 12s^2 + 24s + 40$$

比较系数得  $k_0 = -4, k_1 = -1.2, k_2 = -0.1$

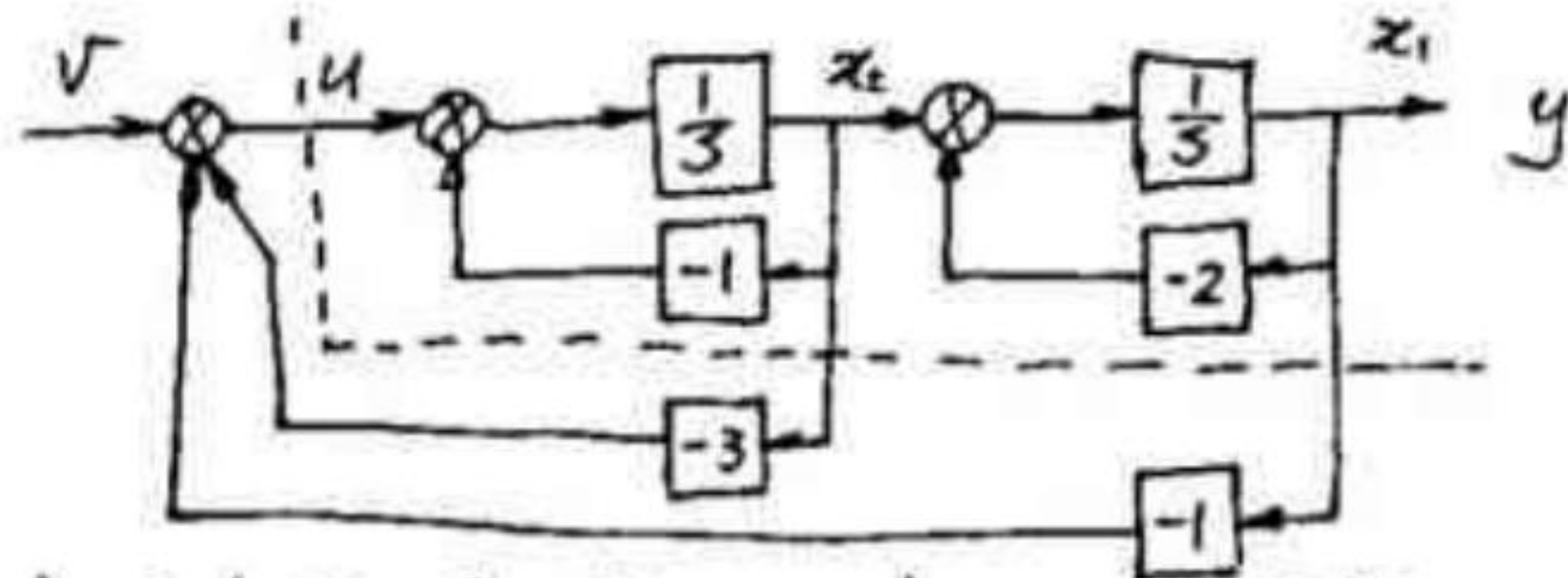
$$K = [-4 \ -1.2 \ -0.1]$$

$$K = [-4, -1.2, -0.1]$$

注：以上二题也可化为可控标准型求反馈系数矩阵。

②

5-3. &lt;1&gt;



<2> 系统完全可控，故可任意配置极点。

<3> 取状态反馈控制  $u = Kx + v = [k_0 \ k_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v$

$$f_K(s) = |sI - (A + BK)| = s^2 + (3 - k_1)s + 2 - k_0 - 2k_1$$

$$f_K^*(s) = (s + 3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

比较系数得  $k_0 = -1, k_1 = -3$ ;  $K = [-1, -3]$

5-4. 传递函数(开环)

$$W_0(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)} = \frac{s^2 + s - 2}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}$$

可利用状态反馈配置一个根在  $s = -2$  处与零点相消。  
另外两个闭环根为  $-2, -3$  即要求的传递函数(闭环)。  
 $W_0(s)$  的可控性实现为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [-2 \ 1 \ 1]$$

取状态反馈阵  $K = [k_0 \ k_1 \ k_2]$  的闭环系统特征多项式

$$f_k(s) = s^3 + (2 - k_2)s^2 + (-5 - k_1)s + (-6 - k_0)$$

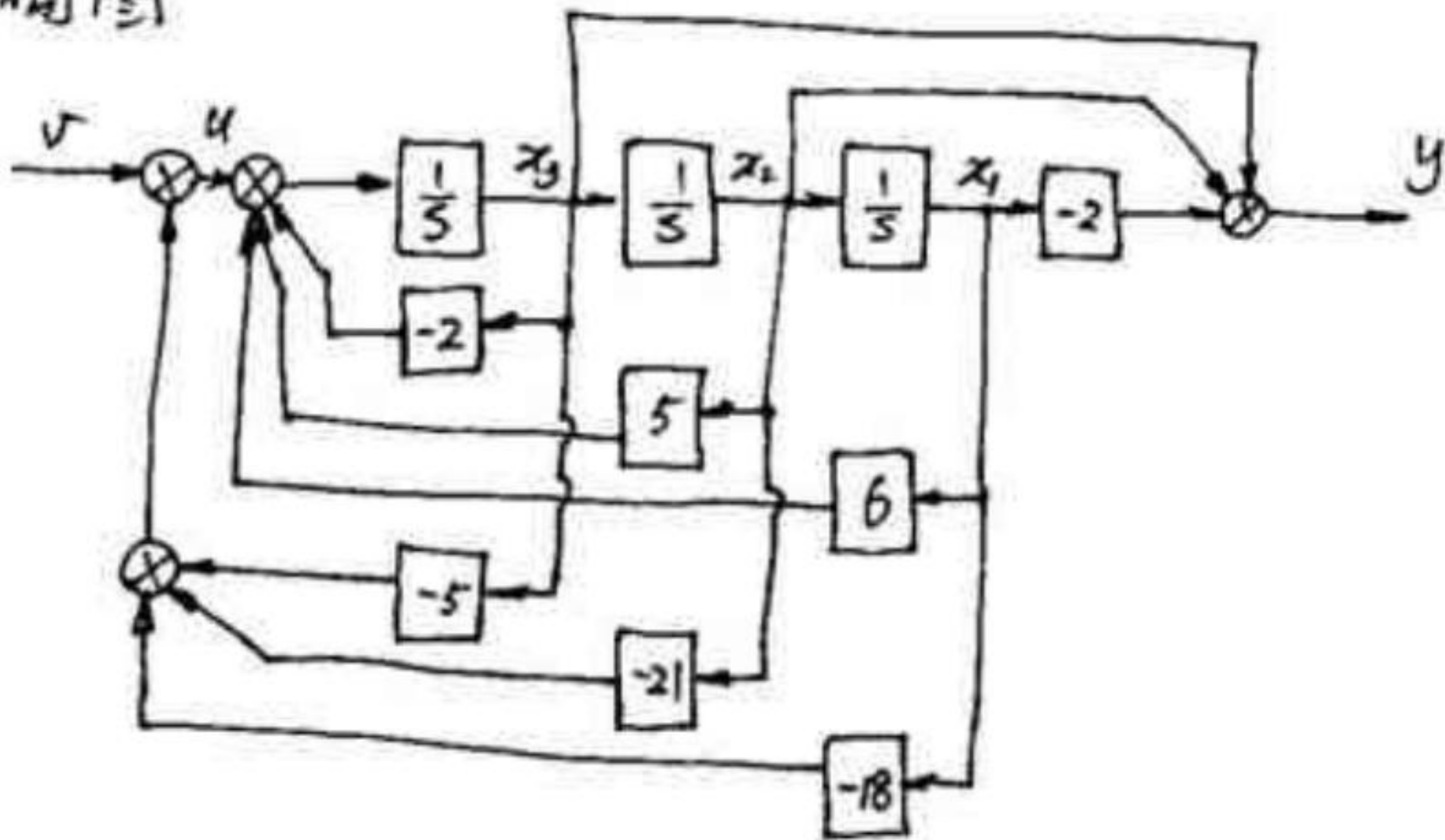
$$f_k^*(s) = (s+3)(s+2)^2 = s^3 + 7s^2 + 16s + 12$$

解得状态反馈阵为  $K = [-18, -21, -5]$

问题: 如果要成的闭环传递函数为  $\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$  会怎样?

③

系统的结构图



5-5. (1). 系统完全可控, 是状态反馈可镇定的.

(2). 不能控子空间的特征值为  $-2, -5$  在左半  $s$  平面, 故为状态反馈可镇定的.

5-6 (1) 由...

5-6 (1). 系统的特征多项式为  $f_0(s) = s^2(s^2 - 11)$

为不稳定系统

(2). 系统是完全可以控的 故是状态反馈可镇定。

状态反馈阵设计略。

5-8 1).  $C_1 B = [1 \ 0]$   $d_1 = 0$

$$C_2 B = [0 \ 0]$$

$$C_2 AB = [1 \ 0] \quad d_2 = 1$$

$E = \begin{bmatrix} C_1 B \\ C_2 AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  不可逆, 不能状态反馈解耦。

④

5-10. 系统是完全可以控的, 故观测器存在。

设计全维观测器。观测器的特征多项式为

$$f_g(s) = \det(sI - (A - GC)) = \begin{vmatrix} s + g_0 & -1 \\ g_1 & s \end{vmatrix} = s^2 + g_0 s + g_1$$

期望的观测器特征多项式为

$$f_g^*(s) = (s + r)(s + 2r) = s^2 + 3rs + 2r^2$$

比较系数得  $g_0 = 3r$ ,  $g_1 = 2r^2$   $G = \begin{bmatrix} 3r \\ 2r^2 \end{bmatrix}$

(设计结果见教材 P192 图 5-16)

(双列器的结构图见书 P192 图 5-16)

5-11. 系统完全连续, 可设计观测器.

(1). 全维观测器.

$$f_G(s) = \det(sI - (A - GC)) = \begin{vmatrix} s+2+g_0 & -1 \\ g_1 & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + (3+g_0)s + 2+g_0+g_1$$

$$f_6^*(s) = (s+3)^2 = s^2 + 6s + 9$$

地数系数同  $g_0 = 3, g_1 = 4$   $G = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

观测器方程为,  $\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} y.$

<2>. 障壁控制器.

作线性变换  $x = T\bar{x}$ ,

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} c & \\ & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⑤

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = C^T = [0 \ 1]$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 + u & z = \bar{x}_1 = \dot{\bar{x}}_2 + 2\bar{x}_2 = \dot{y} + 2y \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 & u = \bar{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 \\ y = \bar{x}_2 \end{cases}$$

对变换后的子系统 1 设计观测器. 反馈阵为  $\bar{g} = \bar{g}$

$$\dot{\hat{x}}_1 = (-1 - \bar{g})\hat{x}_1 + u + \bar{g}(\dot{y} + 2y)$$

为使观测器的极点为  $-3$  故  $\bar{g} = 2$ .

$$\dot{\hat{x}}_1 = -3\hat{x}_1 + u + 2\dot{y} + 4y$$

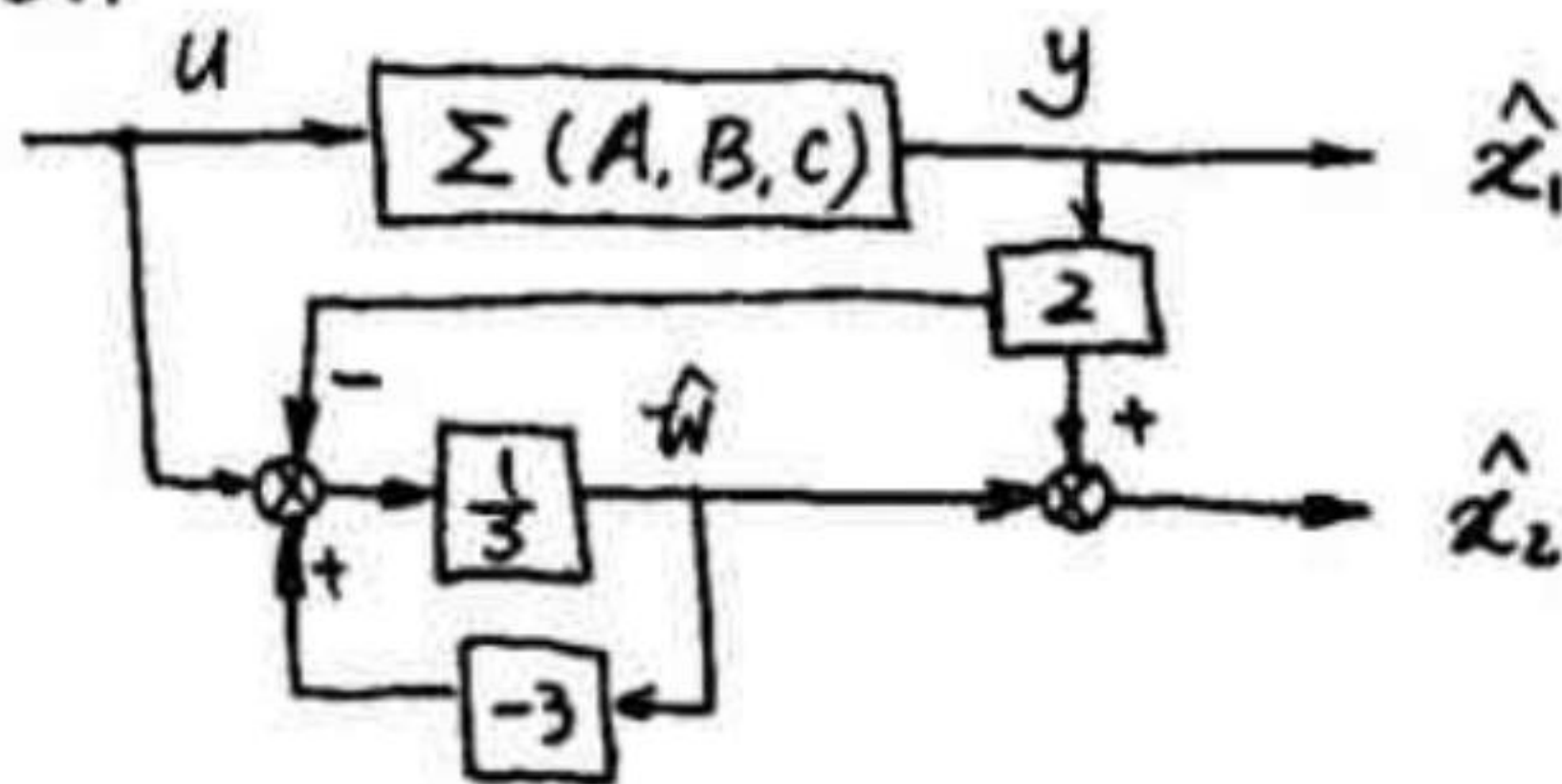
$$\text{令 } \hat{w} = \hat{x}_1 - 2y \quad \hat{x}_1 = \hat{w} + 2y$$

$$\dot{\hat{w}} = -3\hat{w} + u - 2y \quad \dots \text{观测器方程}$$

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w} + 2y \\ y \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = T\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{w} + 2y \end{bmatrix}$$

系统结构图:





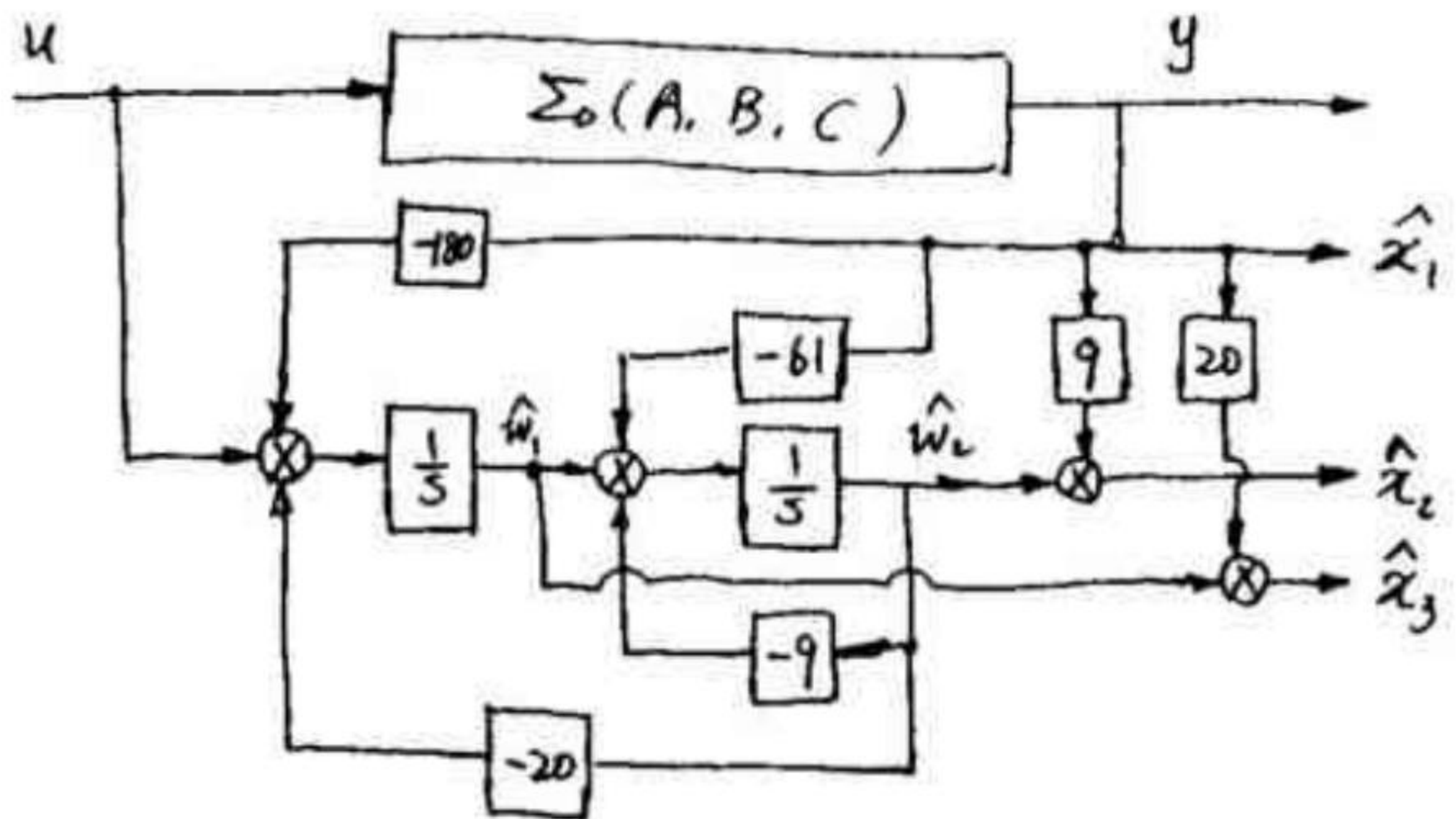
$$\dot{\hat{w}} = \begin{bmatrix} 0 & -20 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \hat{w} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -180 \\ -61 \end{bmatrix} y$$

$$\hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w} + \bar{G}y \\ y \end{bmatrix} \quad \text{— 观测器方程.}$$

⑦

$$\hat{z} = T \hat{\bar{x}} = \begin{bmatrix} y \\ \hat{w}_2 + 9y \\ \hat{w}_1 + 20y \end{bmatrix}$$

模拟结构图



5-13. 状态反馈阵设计图

5-13. 状态反馈阵设计略.

观测器设计类似于 5-12.

-=END=-

A 卷

2003~2004 学年第二学期

# 现代控制理论 试题

(自动化专业 01 级)

班 级 \_\_\_\_\_

姓 名 \_\_\_\_\_

学 号 \_\_\_\_\_

命题单位 信控学院自动化系考试日期 2004 年 4 月 27 日

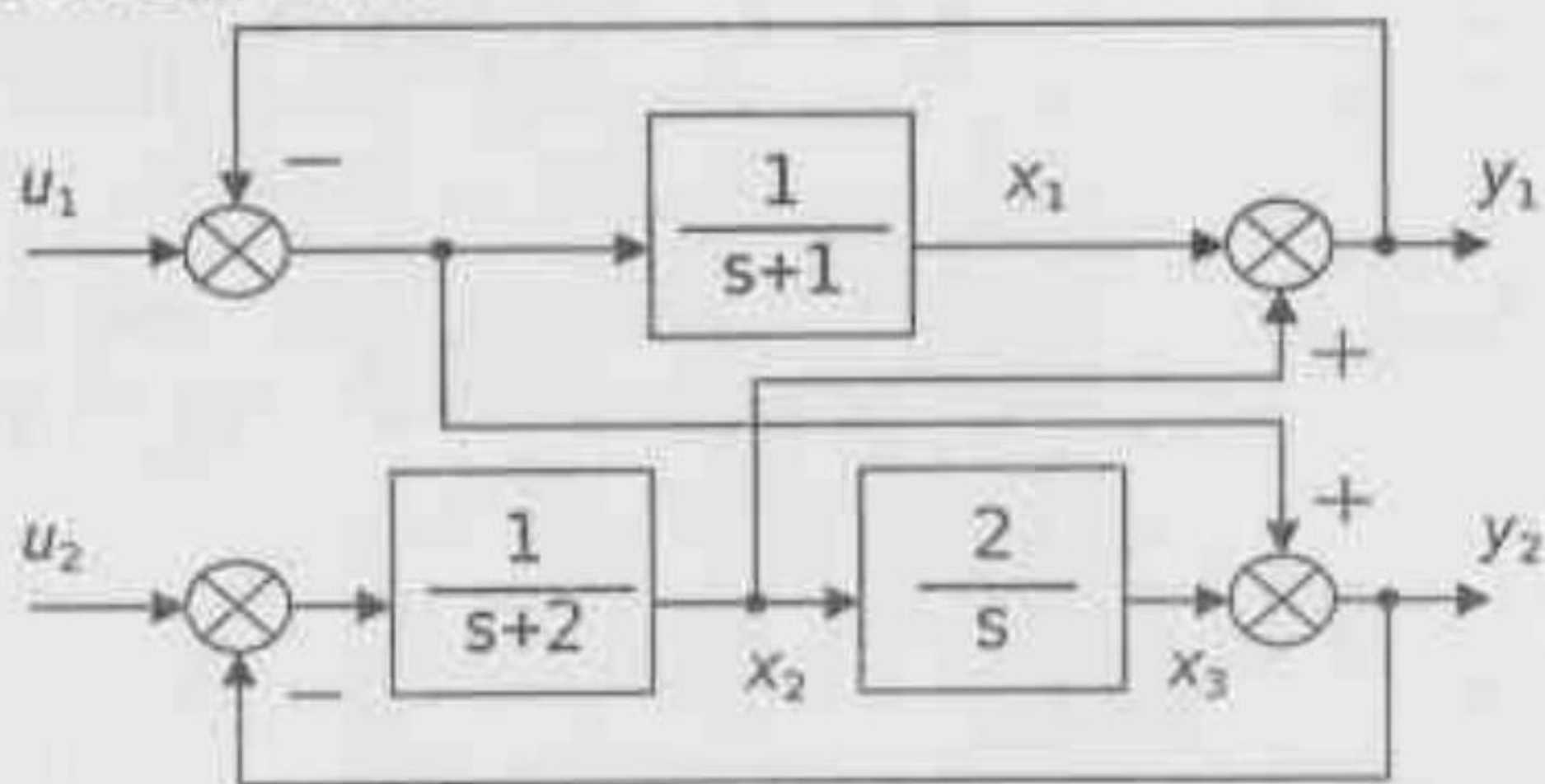
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 得分 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

得分

共9页 第1页

一. 给出如下系统的状态空间表达式。

1. 系统的结构图如题图 1 所示



题图 1 系统的动态结构图

2. 动态系统的传递函数如下:  $W(s) = \frac{2s+2}{s^3+6s^2+11s+6}$

二. 连续时间系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [0 \quad 1]x$$

1. 输入信号为单位阶跃, 求系统的响应;
2. 求出该系统的离散化状态空间表达式 (采样周期 T)。

三. 叙述系统能控性、能观性的定义, 判断如下系统的能控性和能观性。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad -1 \quad 1]$$

四. 求下列传递矩阵的实现, 判断是否最小实现, 若不是, 求最小实现。

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

共9页 第2页

五. 分别用李雅普诺夫第一方法和第二方法, 判断如下系统在坐标原点的稳定性, 给出李雅普诺夫函数。

1. 非线性系统为 
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

2. 线性系统为 
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x$$

六. 判断如下系统是否状态反馈可镇定的, 是否可通过状态反馈将系统的极点配置在-2、-3、-4? 请说明理由。

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad -1 \quad 1]$$

七. 系统的状态空间表达式为:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

1. 能否用状态反馈  $u=Kx+v$  把系统极点配置在  $-4$ 、 $-4$  ? 若能请给出状态反馈阵, 若不能请说明理由。
2. 如果系统的状态变量不能直接测量得到, 能否用观测器观测系统状态实现上述状态反馈控制? 若能请设计状态观测器 (极点  $-3$ ,  $-3$ )。
3. 画出使用状态观测器的状态反馈控制系统的详细模拟流程图。
4. 求传递函数  $Y(s)/V(s)$ 。
5. 设计降维观测器 (极点  $-3$ ), 画出使用此状态观测器的状态反馈控制系统的详细模拟流程图。

八. 证明: 对于单输入单输出系统  $(A, B, C, D)$ , 如果

$$CA^i B = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

则系统的传递函数是与  $s$  无关的常数。

--END--