

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

习题一

1. 将 $\frac{22}{7}$ 和 $\frac{355}{113}$ 作为 π 的近似值, 它们各有几位有效数字, 绝对误差限和相对误差限各是多少?

解: 分别计算可知,

$$\begin{aligned}\frac{22}{7} &= 3.14285714285714 \cdots, \\ \frac{355}{113} &= 3.14159292035398 \cdots, \\ \pi &= 3.14159265358979 \cdots.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\left| \frac{22}{7} - \pi \right| &\approx 0.0012644892563 \leq 2 \times 10^{-3}, \\ \left| \frac{355}{113} - \pi \right| &\approx 2.66764189 \times 10^{-7} \leq 3 \times 10^{-7},\end{aligned}$$

所以 2×10^{-3} 和 3×10^{-7} 可以分别作为它们的绝对误差界, 它们各有3位和7位有效数字. 同时也有:

$$\frac{\left| \frac{22}{7} - \pi \right|}{\pi} \leq 5 \times 10^{-4} \quad \text{和} \quad \frac{\left| \frac{355}{113} - \pi \right|}{\pi} \leq 9 \times 10^{-8},$$

5×10^{-4} 和 9×10^{-8} 可以作为它们的相对误差界.

2. 设某矩形的长和宽约为100cm和50cm, 应选用最小刻度是多少的测量工具才可以使面积误差不超过 0.15cm^2 .

解: 设选用最小刻度是 $x\text{cm}$ 的测量工具, 则矩形的长和宽误差都不超过 $\frac{x}{2}\text{cm}$. 此时, 面积误差约为:

$$100 \times 50 - \left(100 \pm \frac{x}{2}\right) \left(50 \pm \frac{x}{2}\right).$$

该表达式绝对值最大时为 $150 \times \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2$, 若要求它不超过0.15, 略去平方项, 可取 $x = 0.002$.

3. 设 x^* 为 x 的近似数, 证明 $\sqrt[n]{x^*}$ 的相对误差大约为 x^* 的相对误差的 $\frac{1}{n}$.

解: 利用Taylor展开, 我们有:

$$\sqrt[n]{x^*} = \sqrt[n]{x} + \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} (x^* - x) - \frac{n-1}{n^2} \frac{\sqrt[n]{x}}{x^2} (x^* - x)^2,$$

其中 ξ 位于 x^* 和 x 之间。如此则有:

$$\frac{\sqrt[n]{x^*} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{n} \frac{x^* - x}{x} - \frac{n-1}{n^2} \frac{\sqrt[n]{\frac{\xi}{x}}}{\xi^2} (x^* - x)^2,$$

略去平方项即证得结论。

4. MatLab的最大浮点数为 $1.7977\text{e} + 308$, 试给出一个普遍的方法求下列各区间的中点: $[1\text{e} - 8, 4\text{e} + 3]$, $[1\text{e} + 308, 1.5\text{e} + 308]$, $[-1.4\text{e} + 308, 1.4\text{e} + 308]$. (提示: 避免上溢)

解: 利用公式 $\frac{a+b}{2}$ 计算中点, 当 a, b 分别取上述三个区间的端点时, 可以看到第一和第三区间可以正常地计算出中点, 但第二个区间计算时会产生上溢。这个溢出是因为 a 和 b 都是很大的值, 首先计算的是两数相加, 然后再除以2。若考虑公式 $a + \frac{b-a}{2}$, 类似的讨论可以知道, 计算第三个区间的中点时会产生上溢。我们给出以下的等价公式:

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

该公式计算上述三个例子时都不会产生上溢。(更深入地考虑, 可以看到当 a, b 绝对值都很小时, 后面的两个公式都有可能产生下溢, 从而使计算出的中点实际上为区间的左端点或原点。例如, 区间为 $[1.0\text{e} - 308, 1.01\text{e} - 308]$, 只是这种情况在算法中通常很少出现。)

5. 假设你要产生区间 $[a, b]$ 中 n 等分点, 请在下面的两种方式中选一种, 并找到一个合适的例子说明其中的差别:

$$x_0 = a, \quad x_k = x_{k-1} + h, \quad k = 1, \dots, n$$

和

$$x_k = a + kh, \quad k = 0, \dots, n$$

其中 $h = \frac{b-a}{n}$.

解: 例如取 $a = 0, b = 8, n = 9$. 用两种方式, 我们可以计算出下表(用MatLab)

$x_{k+1} = x_k + h$	$x_k = a + kh$
0	0
8.888888888888888e-001	8.888888888888888e-001
1.777777777777778e+000	1.777777777777778e+000
2.666666666666667e+000	2.666666666666667e+000
3.555555555555555e+000	3.555555555555555e+000
4.444444444444445e+000	4.444444444444445e+000
5.333333333333334e+000	5.333333333333333e+000
6.222222222222223e+000	6.222222222222221e+000
7.111111111111113e+000	7.111111111111111e+000
8.000000000000002e+000	8.000000000000000e+000

可以看到第二种方式比第一种来得准确。这是因为第一种方式实际上是一个累加的过程，容易引起误差的累积。MatLab的命令 $x=a:h:b$ 或 $x=a+(0:n)*h$ 都是用第二种方式实现的。类似的可以看到两个计算方式不一样的例子还可以有，例如 $(a, b, n) = (0, 1, 10)$ 。

```
function ex15
format long e
a = 0;
b = 8;
n = 9;
h = (b-a)/n;
x(1) = a;
y(1) = a;
for j = 1:n,
    x(j+1) = x(j) + h;
    y(j+1) = y(1) + j*h;
end
[x', y', (a:h:b)', a+(0:n)*h]
```

6. 输入一个方阵A, 对A作行列相同的调换, 使得A的对角元按绝对值从大到小的顺序排列。

解：我们可以用如下的方式实现，

```
[u,v] = sort(-abs(diag(A)));
A      = A(v,v);
```

其中 A 是给定的方阵。`sort`函数返回一个向量的从小到大的排序及其排完序后的分量在原向量中的位置。我们只需要这个位置就可以对 A 进行重新排序。第二行的写法是MatLab特有的, 这种写法意味着我们可以随意但有规律地调用 A 的行列生成新的矩阵。当然, 我们也可以用简单排序法进行如下操作(虽然并不推荐大家这么用)

```
n = size(A,1);
for i = 1:n-1,
    for j = i+1:n,
        if abs(A(i,i)) < abs(A(j,j)),
            A(:, [i,j]) = A(:, [j,i]);
            A([i,j], :) = A([j,i], :);
        end
    end
end
```

其中, A 矩阵的行列交换仍旧是与其他计算机语言不同的: 这里我们不需要临时变量。

7. 一个向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的Euclidean范数定义为:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

试写一程序计算, 并说明如何避免上溢和有害的下溢。

解: 我们注意到, 范数可以递归调用如下

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \right)^2 + x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

或按照MatLab记号

$$\|x\| = \|(\|x(1:n-1)\|, x(n))\|,$$

所以只需要讨论两个分量的向量求范数的问题。对于 $x = (x_1, x_2)$, 可以先做规范化, 即除以一个常数使按模最大分量为1。不妨设为 x_1 , 我们可以求 $\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right)$ 的范数再乘以 $|x_1|$ 。(如果该向量非零, 则 x_1 非零。)递归调用, 并写成如下程序:

```
function s = nrmv(x)
    x = abs(x(x~=0));
    n = length(x);
    if n==0,
        s = 0;
    elseif n==1,
        s = abs(x);
    else
        scale = 0;
        ssq = 1;
        for j = 1:n,
            if (scale<x(j)),
                ssq = 1 + ssq * (scale/x(j))^2;
                scale = x(j);
            else
                ssq = ssq + (x(j)/scale)^2;
            end
        end
        s = scale * sqrt(ssq);
    end
end
```

事实上，这个程序是由BLAS包中的dnrm2程序改写的，该程序也是MatLab求范数的程序的源程序。关于这个软件包的更深入的介绍，可以查阅网站 <http://www.netlib.org/blas/dnrm2.f>。

8. 写一个程序求解一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根，可以选用标准的求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 或其变形 $x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}$. 程序必须以三个系数为输入参数，并返回两个根的值。考虑 $a = 0$ 或 $c = 0$ 的情况，并对下列的例子求解：

a	b	c
6	10	-4
6e+154	10e+154	-4e+154
0	1	1
1	-1e+5	1
1	-4	3.999999
-1e155	-7e155	1e+155

解：这里我们要注意三个问题。首先，求根公式中有开根号。类似于前一题，有可能 $b^2 - 4ac$ 会产生上溢但根式本身并不产生上溢。针对这种情况，我们可以对方程的系数进行归一化，即把方程的系数都除以同一个数使得按模最大的数模为1。其次是关于求根的精度的问题。当 $c = 0$ 或其它使得根式和 b 的值很靠近的情况，两根中有一根会出现两个相近的数相减的运算，该根的有效数字就会锐减。此时可以利用另外一个求根公式求得这个根。(或者可以利用韦达(Vieta)定理。)最后，需要处理 $a = 0$ 或 $b = 0$ 的情形。最终程序如下：

```
function [x,flag] = root2qe(a,b,c)
    if nargin==1,
        c = a(3); b = a(2); a = a(1);
    end
    if a~=0, % Solve 2-order equation
        M = max(abs([a,b,c])); % scaling
        a = a/M; b = b/M; c = c/M;
        s = sign(b);
        if s==0, s = 1; end
        x1 = (-b-s*sqrt(b^2-4*a*c))/2/a;
        x2 = c/(a*x1); % avoid large error
        x = [x1 x2]';
        flag = 'two solutions';
    elseif b~=0, % Solve 1-order equation
        x = -c/b;
        flag = 'one solution';
    elseif c~=0, % nonzero constant
        x = [];
        flag = 'no x is a solution';
    else % equality 0=0
        x = [1];
        flag = 'all x are solutions';
    end
end
```

求得的解如下表：

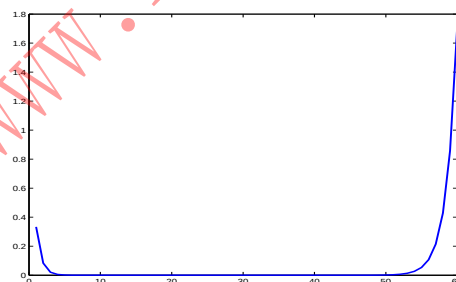
a	b	c	x_1	x_2
6	10	-4	-2.000000000000000	0.333333333333333
6e+154	10e+154	-4e+154	-2.000000000000000	0.333333333333333
0	1	1	-1	
1	-1e+5	1	99999.9999900000	0.0000100000
1	-4	3.999999	2.001000000000007	1.998999999999993
-1e155	-7e155	1e+155	-7.14005494464026	0.14005494464026

9. 计算如下的递推数列 $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{12}$, $x_{k+1} = 2.25x_k - 0.5x_{k-1}$. 这个数列的通项公式为 $x_k = \frac{4^{1-k}}{3}$, 是一个严格递减序列。用递推公式计算会出现什么现象？并说明原因。(提示：考虑递推公式在任何初始值下的通解)

解：利用下面的几行MatLab语句，可以计算出这个数列各项的值

```
x(1) = 1/3;
x(2) = 1/12;
for k = 3:200,
    x(k) = 2.25*x(k-1) - 0.5*x(k-2);
end
```

这个数列的前60项用命令 `plot(x(1:60))` 画成折线图如下(若画出更多的，如200项，初始的几项变化趋势就看不清楚了。)事实上，对于任意常数 c_1, c_2 ,



通项公式 $x_k = c_1 4^{-k} + c_2 2^k$ 满足递推关系。利用两个初始值可以如下求解常数 c_1, c_2 :

$$\begin{cases} c_1 4^{-1} + c_2 2 = \frac{1}{3} \\ c_1 4^{-2} + c_2 2^2 = \frac{1}{12} \end{cases}$$

即求得 $c_1 = \frac{4}{3}$ 和 $c_2 = 0$. 但是, 在计算机内部, $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{12}$ 是不能精确地保存的。换句话讲, 我们定义的数列还是 $x_k = c_1 4^{-k} + c_2 2^k$, 只不过 $c_1 = \frac{4}{3}$ (计算机内部的 $\frac{4}{3}$) 而 c_2 是一个值非常靠近零的数。当 k 足够大使得 $c_2 2^k$ 不能够被忽略时, 我们就可以观察到, 从这个 k 开始, 整个数列开始递增, 因为 $c_2 2^k$ 在 x_k 的比重越来越大, 而 $c_1 4^{-k}$ 越来越小。

10. 设有64位浮点系统, 尾数符号占1位, 尾数数值占52位, 阶码符号占1位, 阶码尾数占10位。请推算此系统下实数的浮点表示能够有多少位有效数字, 用它表示的数有多大的相对误差界, 该系统的上溢界和下溢界是多少?

解: 该系统下所有数(除零外)可以写成如下形式:

$$\pm 2^p \times (0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{52})_2, \quad |p| \leq 2^{10} - 1, p \in \mathbb{Z}, \alpha_j \in \{0, 1\}.$$

其中, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\alpha_1 \equiv 1$, 阶数占10位。设实数 x 在机器中的浮点表示为 $fl(x)$, 其相对误差满足:

$$|e_r| = \left| \frac{x - fl(x)}{fl(x)} \right| \leq \frac{2^{p-1-52}}{2^{p-1}} = 2^{-52} \approx 10^{-15.6},$$

上式表明该系统的实数有15至16位有效数字。该系统所能表示的绝对值最大数为 $2^{2^{10}-1} \approx 10^{308}$, 所能表示的绝对值最小的非零的数为 $2^{-(2^{10}-1)} \approx 10^{-308}$ 。因此系统的上溢界和下溢界分别为 10^{308} 和 10^{-308} 。

• 习题二

1. 设有数据表(表2-9).

x	$\sin x$	$\cos x$
0.70	0.6442176872	0.7648421872
0.71	0.6518337710	0.7583618759

表2-9

用线性插值找出 $\sin 0.705$ 和 $\cos 0.702$ 的近似值。

解: 先求 $\sin 0.705$ 的近似值。用线性插值公式有

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{x - 0.70}{0.71 - 0.70} \times 0.6518337710 + \frac{x - 0.71}{0.70 - 0.71} \times 0.6442176872 \\ &= 0.76160838x + 0.1110918212 \end{aligned}$$

将 $x = 0.705$ 代入，即得

$$\sin 0.705 \approx L_1(0.705) = 0.6480257291.$$

再求 $\cos 0.702$ 的近似值。用线性插值公式有

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{x-0.70}{0.71-0.70} \times 0.7583618759 + \frac{x-0.71}{0.70-0.71} \times 0.7648421872 \\ &= -0.64803113x + 1.2184639782 \end{aligned}$$

将 $x = 0.702$ 代入，即得

$$\cos 0.702 \approx L_1(0.702) = 0.76354612494.$$

2. 给定函数的函数表(表2-10).

x	0.4	0.5	0.6	0.7
$\sin x$	0.38942	0.47943	0.56464	0.64422

表2-10

试分别用线性插值与二次插值求 $\sin 0.57891$ 的近似值。

解：取节点 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6$, 用线性插值公式有

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{x-0.5}{0.6-0.5} \times 0.56464 + \frac{x-0.6}{0.5-0.6} \times 0.47943 \\ &= 0.8521x + 0.05338 \end{aligned}$$

将 $x = 0.57891$ 代入，即得

$$\sin 0.57891 \approx L_1(0.57891) \approx 0.54667.$$

类似地，在抛物线插值时取节点 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6, x_3 = 0.7$, 所得 $\sin 0.57891$ 的近似值为

$$\begin{aligned} \sin 0.57891 &\approx L_2(0.57891) \\ &= \frac{(0.57891-0.6) \times (0.57891-0.7)}{(0.5-0.6) \times (0.5-0.7)} \times 0.47943 \\ &\quad + \frac{(0.57891-0.5) \times (0.57891-0.7)}{(0.6-0.5) \times (0.6-0.7)} \times 0.56464 \\ &\quad + \frac{(0.57891-0.5) \times (0.57891-0.6)}{(0.7-0.5) \times (0.7-0.6)} \times 0.64422 \\ &\approx 0.54714. \end{aligned}$$

如果取节点 $x_0 = 0.4, x_1 = 0.5, x_3 = 0.6$, 则 $\sin 0.57891$ 的近似值为

$$\begin{aligned}\sin 0.57891 &\approx L_2(0.57891) \\ &= \frac{(0.57891 - 0.5) \times (0.57891 - 0.6)}{(0.4 - 0.5) \times (0.4 - 0.6)} \times 0.38942 \\ &\quad + \frac{(0.57891 - 0.4) \times (0.57891 - 0.6)}{(0.5 - 0.4) \times (0.5 - 0.6)} \times 0.47943 \\ &\quad + \frac{(0.57891 - 0.4) \times (0.57891 - 0.5)}{(0.6 - 0.4) \times (0.6 - 0.5)} \times 0.56464 \\ &\approx 0.54707.\end{aligned}$$

3. 设给定数值表(表2-11).

x	0	1	2	4	6
$f(x)$	1	9	23	3	259

表2-11

- (1) 构造出差商表；
- (2) 用牛顿插值多项式求出 $f(4.2)$ 的近似值。

解：

- (1) 差商表为

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	1				
		8			
1	9		3		
		14		-2.75	
2	23		-8		1.875
		-10		8.5	
4	3		34.5		
		128			
6	259				

(2) 牛顿插值多项式为

$$N(x) = 1 + 8x + 3x(x-1) - 2.75x(x-1)(x-2) \\ + 1.875x(x-1)(x-2)(x-4),$$

把 $x = 4.2$ 代入得

$$f(4.2) \approx N(4.2) = 4.696.$$

4. 多项式 $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ 有下列值(表2-12).

x	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	31	5	1	1	11	61

表2-12

试找一多项式 $q(x)$, 它取下列值(表2-13).

x	-2	-1	0	1	2	3
$q(x)$	31	5	1	1	11	30

表2-13

解: 由表2-12、表2-13可知 $p(x) - q(x)$ 至少有 $x = 0, \pm 1, \pm 2$ 五个根, 所以可设

$$p(x) - q(x) = Ax(x-1)(x+1)(x-2)(x+2),$$

把 $x = 3$ 代入, 得 $A = \frac{31}{120}$, 所以

$$q(x) = p(x) - \frac{31}{120}x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

5. 如何判断下面的数值表(表2-14)是否来自一个三次多项式? 试作解释。

x	-2	-1	0	1	2	3
y	1	4	11	16	13	-4

表2-14

解一: 任取其中四点, 不妨取 $x = -1, 0, 1, 2$ 四点构造三次插值多项式

$$L(x) = 4 + 7(x+1) - x(x+1) - x(x-1)(x+1).$$

因为插值多项式的唯一性, 所以如果 $x = -2, 3$ 两点满足 $y = L(x)$, 那么可以判断这些数值来自于一个三次多项式, 否则这些数值不是来自于一个三次多项式。把 $x = -2, 3$ 代入 $y = L(x)$, 分别得 $y = 1, -4$, 所以这些数值确实来自于一个三次多项式。

解二: 可以构造差商表如下

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
-2	1			
-1	4	3		
0	11	7	2	
1	16	5	-1	-1
2	13	-3	-4	-1
3	-4	-17	-7	-1

因为三阶差商是常数, 所以它们来自一个三次多项式。

6. 如果用一个20次的插值多项式在 $[0, 2]$ 上逼近 e^{-x} , 那么精确性如何?

解: 插值余项为

$$R_{20}(x) = \frac{f^{(21)}(\xi)}{21!} \prod_{k=0}^{20} (x - x_k),$$

其中, $f(x) = e^{-x}$, $f^{(21)}(x) = -e^{-x}$, ξ 介于0与2之间。首先,

$$|f^{(21)}(\xi)| = |e^{-\xi}| < 1.$$

若假设节点 $x_0, x_1, \dots, x_{20}$ 是等距的, 则对于 $k \neq 10$,

$$\max_x |(x - x_k)(x - x_{20-k})| \leq 1;$$

当 $k = 10$ 时有,

$$|x - x_{10}| \leq 1.$$

于是

$$|R_{20}(x)| < \frac{1}{21!}.$$

因此, 逼近是非常精确的。

7. 设用在区间 $[1, 2]$ 上 10 个均匀分布节点的九次插值多项式逼近函数 $f(x) = \ln x$, 误差界是多少?

解: 设 $x = x_0 + th$, 其中 $x_0 = 1, h = \frac{1}{9}, 0 \leq t \leq 9$. 插值余项为

$$R(x) = R(x_0 + th) = \frac{f^{(10)}(\xi)}{10!} h^{10} \prod_{k=0}^9 (t - k) = \bar{R}(t),$$

其中, ξ 介于 1 与 2 之间。因为 $f(x) = \ln x, f^{(10)}(x) = -\frac{9!}{x^{10}}$, 所以

$$|f^{(10)}(\xi)| < 9!.$$

于是

$$|\bar{R}(t)| < \frac{1}{10 \cdot 9^{10}} \prod_{k=0}^9 |t - k| \leq \frac{4.5^9}{10 \cdot 9^{10}} = \frac{1}{10 \cdot 2^{10}}.$$

8. 设 $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 是以 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为节点的 n 次基本插值多项式, 证明

$$\sum_{i=0}^n x_i^k \cdot l_i(x) = x^k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

证: 因为左边是以 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为节点的 x^k 的 n 次插值多项式; 右边 x^k 本身就是自己的 n 次插值多项式。由插值多项式的唯一性可知左边等于右边。

9. 假设对函数 $f(x)$ 在步长为 h 的等距点上造表, 且 $|f'''(x)| \leq M$, 证明: 在表中任意两点间作线性插值, 误差不超过 $\frac{1}{8}Mh^2$. 设 $f(x) = \sin(x)$, 问 h 应取多大才能保

证线性插值的误差不大于 $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$.

证: 线性插值余项为

$$R(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1),$$

如果 x 落在某两个等距节点 x_0 和 x_1 间, 则

$$|(x-x_0)(x-x_1)| \leq \frac{1}{4}(x_1-x_0)^2.$$

因此,

$$|R(x)| = \frac{|f''(\xi)|}{2!} \frac{1}{4}(x_1-x_0)^2 \leq \frac{Mh^2}{8}.$$

若 $f(x) = \sin(x)$, 可知 $|f''(x)| = |-\sin(x)| \leq 1$, 为保证误差不大于 $\frac{1}{2} \times 10^{-6}$, 步长 h 至少要满足 $h^2 \leq 4 \times 10^{-6}$, 即 $h \leq 2 \times 10^{-3}$.

10. 已知 $f(x) = x^8 + x^5 - 32$, 求 $f[3^0, 3^1, \dots, 3^8]$, $f[3^0, 3^1, \dots, 3^9]$.

解: 因为对于任意节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 有

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

其中 ξ 是 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 所包含区间中的一个点。因此,

$$f[3^0, 3^1, \dots, 3^8] = \frac{f^{(8)}(\xi)}{8!} = 1,$$

并且

$$f[3^0, 3^1, \dots, 3^9] = \frac{f^{(9)}(\xi)}{9!} = 0.$$

11. 设 $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 是以 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为节点的 n 次基本插值多项式, 对 $n = 1$ 直接验证

$$\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1,$$

然后对任意 n 值建立上述等式。

证: 当 $n = 1$ 时, $l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$, $l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, 所以 $l_0(x) + l_1(x) = 1$ 成立。

对于任意 n , 等式左边可以看成 $y = 1$ 的 n 次插值多项式, 右边本身就是自己的 n 次插值多项式, 由插值多项式的唯一性可知左边=右边。

12. 确定使得是一个三次样条函数, 且 $\int_0^2 [f''(x)]^2 dx$ 最小;

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

解: 由于 $f(x)$ 是三次样条函数, 所以必须满足

$$\begin{cases} f(1-) = f(1+) \\ f'(1-) = f'(1+) \\ f''(1-) = f''(1+) \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} a = -5 \\ b = -26 \\ c = -27. \end{cases}$$

因为 $f''(x) = 2c + 6d(x-1) = 6((x-1)d - 9)$, 由条件 $\int_0^2 [f''(x)]^2 dx$ 最小, 有

$$\frac{1}{36} \int_1^2 [f''(x)]^2 dx = \int_1^2 (x-1)^2 d^2 - 18(x-1)d + 81 dx = \frac{1}{3} d^2 - 9d + 81,$$

最小化可得 $d = \frac{27}{2}$, 最后得到

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^3, & 0 \leq x \leq 1, \\ -5 - 26(x-1) - 27(x-1)^2 + \frac{27}{2}(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

13. 用笔算找出表2-15的自然三次样条插值。

x	1	2	3	4	5
y	0	1	0	1	0

表2-15

解: 利用自然样条的三弯矩方程。首先有 $d_1 = 6f[1, 2, 3] = -6$, 同理 $d_2 = 6$, $d_3 = -6$. 关于参数 M_1, M_2, M_3 的三弯矩方程为

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix},$$

解这个方程组得

$$M_1 = -\frac{30}{7}, \quad M_2 = \frac{36}{7}, \quad M_3 = -\frac{30}{7}.$$

代回样条表达式中中得到

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{5}{7}(x-1)^3 + \frac{12}{7}(x-1), & x \in [1, 2] \\ -\frac{5}{7}(3-x)^3 + \frac{6}{7}(x-2)^3 + \frac{12}{7}(3-x) - \frac{6}{7}(x-2), & x \in [2, 3] \\ \frac{6}{7}(4-x)^3 - \frac{5}{7}(x-3)^3 - \frac{6}{7}(4-x) + \frac{12}{7}(x-3), & x \in [3, 4] \\ -\frac{5}{7}(5-x)^3 + \frac{12}{7}(5-x), & x \in [4, 5] \end{cases},$$

或者写成统一的形式, 得

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{5}{7}(x-1)^3 + \frac{12}{7}(x-1), & x \in [1, 2] \\ -\frac{11}{7}(x-2)^3 - \frac{15}{7}(x-2)^2 - \frac{3}{7}(x-2) + 1, & x \in [2, 3] \\ -\frac{11}{7}(x-3)^3 + \frac{18}{7}(x-3)^2, & x \in [3, 4] \\ \frac{5}{7}(x-4)^3 - \frac{15}{7}(x-4)^2 + \frac{3}{7}(x-4) + 1, & x \in [4, 5] \end{cases}.$$

14. 找出节点 $-1, 0, 1$ 上的三次样条 s 使得 $s''(-1) = s''(1) = 0$, $s(-1) = s(1) = 0$ 和 $s(0) = 1$.

解: $M_0 = s''(-1) = 0$, $M_2 = s''(1) = 0$, $2M_1 = -6$ 得 $M_1 = -3$. 代回自然样条的公式得到

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x+1)^3 + \frac{3}{2}(x+1), & x \in [-1, 0], \\ -\frac{1}{2}(1-x)^3 + \frac{3}{2}(1-x), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

可以看到, 这是一个偶函数。

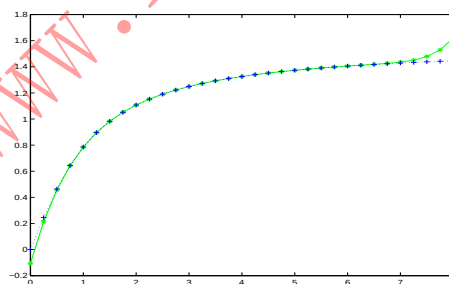
计算机实习题

1. 找出函数 $\arctan x$ 在区间 $[1, 6]$ 的11个等距点上插值的10次多项式, 打印出这个多项式的牛顿形式中的系数。计算并打印这个多项式与 $\arctan x$ 之差在区间 $[0, 8]$ 的33个等距点上的值。由此能得出什么结论?

解: 编程如下, 并在图中直接显示插值多项式和函数 $\arctan x$ 在各点上的值。

```
function ex215
n = 11;
x = linspace(1,6,n)';
h = (6-1)/(n-1);
```

```
y = atan(x);
% form the differences table
for j = 2:n,
    y(1:n+1-j,j) = diff(y(1:n+2-j,j-1)) / ((j-1)*h);
end
% newton coeff
y = y(1,:);
format long e
fprintf('\nthe coefficients of Newton interpolation is:\n\n');
fprintf('%12.9f ',y);
pz = [ ];
v = linspace(0,8,33);
for t = v,
    z = y(n);
    for j = n-1:-1:1,
        z = z * ( t - x(j) ) + y(j);
    end
    pz = [pz z];
end
plot(v,pz,'g*-',v,atan(v),'b+:');
fprintf('\n      xi      p(xi)      atan(xi)      error\n');
for j = 1:length(v),
    fprintf('%12.6f%12.6f%12.6f%12.6f\n',...
        v(j),pz(j),atan(v(j)),abs( pz(j)-atan(v(j)) ) );
end
```



从图象上或从打印出的数据，都可以看到在原来的区间[1,6]中，各节点上插值多项式和函数 $\arctan x$ 的值相差很小，而在区间外相差较大。因此可以得出结论：一般地，内插的效果要比外插好。

2. 检验正文中给出的决定差商表的程序。例如，计算出表2-16的差商，并由此找

出表2-16的插值多项式。

x	1	2	3	-4	5
y	2	48	272	1182	2262

表2-16

解：把书上的程序存为名字为chashang.m的文件，并在命令行中运行

```
>> x = [1 2 3 -4 5]';
>> y = [2 48 272 1182 2262]';
>> [p,q] = chashang(x,y)
```

则系统显示

```
p =
    1         2        46         89         6         4
    2        48       224        59       22         0
    3       272      -130       125         0         0
   -4      1182       120         0         0         0
    5     2262         0         0         0         0

和

q =
    2        46         89         6         4
```

所以这个插值多项式为

$$p(x) = 2 + 46(x-1) + 89(x-1)(x-2) + 6(x-1)(x-2)(x-3) + 4(x-1)(x-2)(x-3)(x+4)$$

或

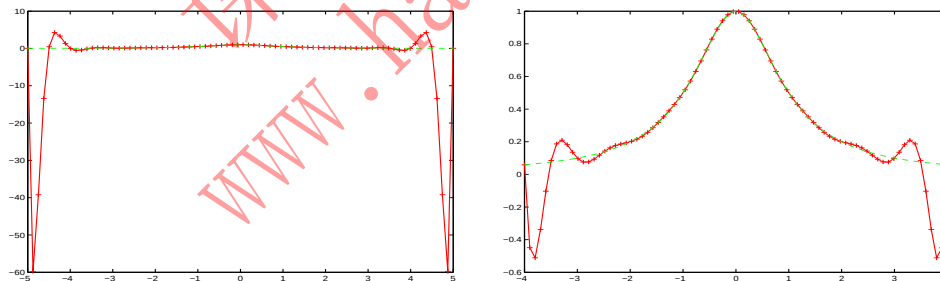
$$p(x) = (((4(x+4) + 6)(x-3) + 89)(x-2) + 46)(x-1) + 2.$$

3. 使用区间 $[-5, 5]$ 上的21个等距节点，找出函数 $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ 的20阶插值多项式 $p(x)$. 打印出 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的图形，观察 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最大偏差。

解：编程如下：

```
function y = ex217
    n = 21;
    x = linspace(-5,5,n)';
    h = (5-(-5))/(n-1);
    y = 1./(1+x.^2);
    % form the differences table
    for j = 2:n,
        y(1:n+1-j,j) = diff(y(1:n+2-j,j-1))./(x(j:n)-x(1:n+1-j));
    end
    % newton coeff
    y = y(1,:);
    pz = [ ];
    v = linspace(-5,5,80);
    for t = v,
        z = y(n);
        for j = n-1:-1:1,
            z = z * ( t - x(j) ) + y(j);
        end
        pz = [pz z];
    end
    plot(v,pz,'r+-',v,1./(1+v.^2),'g--');
```

则可以看到如下的图形: (右边的图形是区间 $[-4, 4]$ 上的图形) 可以看到, 区



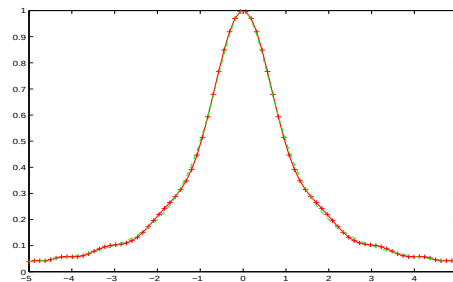
间 $[-2.5, 2.5]$ 之内的部分两个函数非常靠近, 而最大偏差在 ± 4.8 附近, 偏差约达60.

4. 在计算机上, 对问题3使用切比雪夫节点 $x_i = 5 \cos(i\pi/20)$, $0 \leq i \leq 20$, 找出函数 $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ 的20阶插值多项式 $q(x)$. 打印出 $f(x)$ 和 $q(x)$ 的图形. 由问题3和问题4 你能得出什么结论?

解: 编程时只需把上一题中第三行的 $x = \text{linspace}(-5,5,n)'$;改为

```
x = 5*cos(pi/(n-1)*(0:n-1)');
```

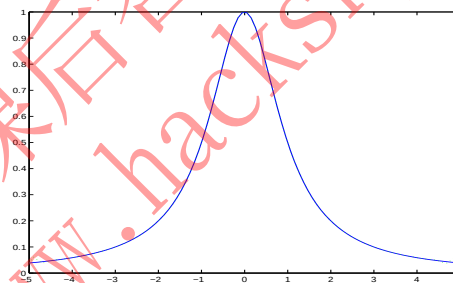
运行后可以看到如下图形: 可以看到函数逼近的效果相当好。这说明了切比雪



夫节点的性质非常好, 见教材定理3.4及其后的说明.

5. 找出函数 $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ 在区间 $[-5, 5]$ 上的41个等距节点的三次样条函数 $s(x)$, 打印出 $f(x)$ 和 $s(x)$ 的图形。

解: 易求得 $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, 因此 $f'(\pm 1) = \mp 0.5$. 编程如下, 并且从如下的图形可以看出三次样条逼近的效果很好。



```
function ex219
    x = linspace(-5,5,41);
    y = 1./(1+x.^2);
    y = [0.5 y -0.5];
    pp = csape(x,y,'complete');
    v = linspace(-5,5,100);
    f = 1./(1+v.^2);
    s = ppval(pp,v);
    plot(v,f,'b-',v,s,'g:');
```

习题三

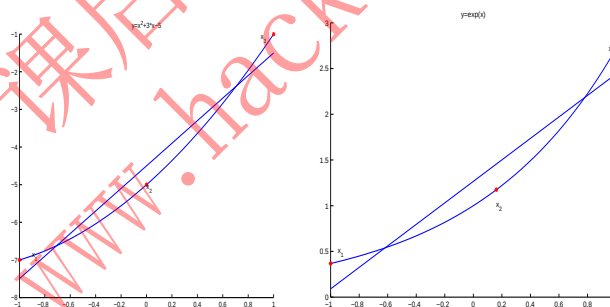
1. 求下列函数在区间 $[-1, 1]$ 上的线性最佳一致逼近多项式:

(1) $f(x) = x^2 + 3x - 5$;

(2) $f(x) = e^x$.

解: (1) $f''(x) = 2 > 0$ 定号. 可令 $x_1 = -1$ 和 $x_3 = 1$, 则 $f(x_1) = -7$ 和 $f(x_3) = -1$. 令 $f'(x_2) = 2x_2 + 3 = \frac{(-1) - (-7)}{1 - (-1)} = 3$, 解得 $x_2 = 0$, $f(x_2) = -5$. 设点 $(x_1, f(x_1))$ 和点 $(x_2, f(x_2))$ 连成线段的中点为 $(\bar{x}, \bar{y})$, 则 $\bar{x} = (-1 + 0)/2 = -\frac{1}{2}$, $\bar{y} = (-7 - 5)/2 = -6$. 线性最佳一致逼近是直线 $y + 6 = 3(x + \frac{1}{2})$, 即线性最佳一致逼近多项式为 $p_1(x) = 3(x + \frac{1}{2}) - 6$.

(2) $f''(x) = e^x > 0$ 定号. 可令 $x_1 = -1$ 和 $x_3 = 1$, 则 $f(x_1) = 0.36788$ 和 $f(x_3) = 2.71828$. 令 $f'(x_2) = e^{x_2} = \frac{2.71828 - 0.36788}{1 - (-1)} = 1.17520$, 解得 $x_2 = 0.16144$, $f(x_2) = 1.17520$. 设点 $(x_1, f(x_1))$ 和点 $(x_2, f(x_2))$ 连成线段的中点为 $(\bar{x}, \bar{y})$, 则 $\bar{x} = (-1 + 0.16144)/2 = -0.41928$, $\bar{y} = (0.36788 + 1.17520)/2 = 0.77154$. 线性最佳一致逼近是直线 $y - 0.77154 = 1.17520(x + 0.41928)$, 即线性最佳一致逼近多项式为 $p_1(x) = 1.17520x + 1.26567$.



函数 $x^2 + 3x - 5$ 和 e^x 在 $[-1, 1]$ 上的线性最佳一致逼近

2. 令 M 和 m 分别代表连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值. 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的零次最佳一致逼近多项式 $p(x) = \frac{1}{2}(M + m)$.

证明: 由闭区间上连续函数的性质, 有 $x_1, x_2 \in [a, b]$ 使得 $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$. 则

$$f(x_1) - p(x_1) = -\frac{1}{2}(M - m) \quad \text{和} \quad f(x_2) - p(x_2) = \frac{1}{2}(M - m)$$

而对于所有 $x \in [a, b]$, $|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2}(M - m)$, 所以 x_1, x_2 是 $p(x)$ 关于 $f(x)$ 的偏差点. 由 Chebyshev 定理, $p(x)$ 是 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式.

3. 试分别求函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 在区间 $[0, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式和一次最佳平方逼近多项式.

解: 先求一次最佳一致逼近多项式.

$f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} > 0$ 定号. 可令 $x_1 = 0$ 和 $x_3 = 1$, 则 $f(x_1) = 1$ 和 $f(x_3) = \sqrt{2}$. 令 $f'(x_2) = \frac{x_2}{\sqrt{1+x_2^2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1-0} = 0.4142$, 解得 $x_2 = 0.45509$, $f(x_2) = 1.09868$. 设 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 中点为 $(\bar{x}, \bar{y})$, 则 $\bar{x} = (0 + 0.45509)/2 = 0.227545$, $\bar{y} = (1 + 1.09868)/2 = 1.04934$. 线性最佳一致逼近是直线 $y - 1.04934 = 0.4142(x - 0.227545)$, 即线性最佳一致逼近多项式为 $p_1(x) = 0.4142x + 0.95514$.

求一次最佳平方逼近多项式如下.

令 $y = a + bx$, 则 $(a, b)^T$ 满足方程

$$\begin{bmatrix} (1, 1) & (1, x) \\ (x, 1) & (x, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1, f) \\ (x, f) \end{bmatrix},$$

其中任意两个函数的内积为 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. 此即

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 \\ 0.5000 & 0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1478 \\ 0.4269 \end{bmatrix}.$$

由上式解得 $a = 0.9343$, $b = 0.4269$. 一次最佳平方逼近多项式为 $p_1(x) = 0.4269x + 0.9343$.

4. 求函数 $f(x) = \sin(\pi x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的二次最佳平方逼近多项式.

解: 设二次最佳平方逼近多项式为 $p_2(x) = a + bx + cx^2$, 记内积 $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, 则 (a, b, c) 满足

$$\begin{bmatrix} (1, 1) & (1, x) & (1, x^2) \\ (x, 1) & (x, x) & (x, x^2) \\ (x^2, 1) & (x^2, x) & (x^2, x^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1, \sin(\pi x)) \\ (x, \sin(\pi x)) \\ (x^2, \sin(\pi x)) \end{bmatrix},$$

此即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\pi \\ 1/\pi \\ (\pi^2 - 4)/\pi^3 \end{bmatrix}.$$

由上式解得 $a = \frac{12\pi^2 - 20}{\pi^3} \approx -0.050465$, $b = -\frac{60\pi^2 - 720}{\pi^3} \approx 4.1225$, $c = -b \approx 4.1225$. 因此二次最佳平方逼近多项式为

$$p_2(x) = -0.050465 + 4.1225x - 4.1225x^2.$$

5. 用最小二乘法, 找出形如 $y = ax^2 + b$ 的抛物线方程, 使之最佳的代表下列数据(表3-7).

x	-1	0	1
y	3.1	0.9	2.9

表3-7

解: 法方程为

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 1 & \sum_{i=0}^2 x_i^2 \\ \sum_{i=0}^2 x_i^2 & \sum_{i=0}^2 x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^2 y_i \\ \sum_{i=0}^2 x_i^2 y_i \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.9 \\ 6 \end{pmatrix},$$

解得 $a = 2.1$, $b = 0.9$. 最小二乘所得的抛物线方程为 $y = 2.1x^2 + 0.9$.

6. 证明如果用最小二乘法使一条直线拟合数据表 (x_i, y_i) , 那么这条直线必通过点 (x^*, y^*) , 这里 x^* 和 y^* 分别是 x_i 和 y_i 的平均值。

解: 设直线 $y = ax + b$ 是用最小二乘法拟合数据表 (x_i, y_i) 所得的直线, 则 a, b 使得函数

$$f(a, b) = \sum_i (y_i - ax_i - b)^2$$

取到最小值。令 $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$, 可得 $2 \sum_i (y_i - ax_i - b) = 0$. 两边同除以数据的个数 n , 则有 $2(y^* - ax^* - b) = 0$, 即 (x^*, y^*) 在该直线上。得证。

7. 已知液体的粘性度 V 随温度按照 $V = a + bT + cT^2$ 变化, 利用表3-8的数值, 找出 a, b 和 c 的最佳值。

T	1	2	3	4	5	6	7
V	2.31	2.21	1.80	1.66	1.55	1.47	1.41

表3-8

解: 法方程为

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^7 1 & \sum_{i=1}^7 T_i & \sum_{i=1}^7 T_i^2 \\ \sum_{i=1}^7 T_i & \sum_{i=1}^7 T_i^2 & \sum_{i=1}^7 T_i^3 \\ \sum_{i=1}^7 T_i^2 & \sum_{i=1}^7 T_i^3 & \sum_{i=1}^7 T_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^7 V_i \\ \sum_{i=1}^7 T_i V_i \\ \sum_{i=1}^7 T_i^2 V_i \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 7 & 28 & 140 \\ 28 & 140 & 784 \\ 140 & 784 & 4676 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.41 \\ 45.21 \\ 214.67 \end{pmatrix},$$

解得 $(a, b, c) = (2.6786, -0.3401, 0.0227)$, 此即 a, b, c 参数的最佳值。

8. 找出形如 $a \sin \pi x + b \cos \pi x$ 的函数, 使之在最小二乘的意义下拟合下面这些数据点:

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	-1	0	1	2	1

表3-9

解: 法方程为

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^5 \sin^2 \pi x_i & \sum_{i=1}^5 \sin \pi x_i \cos \pi x_i \\ \sum_{i=1}^5 \sin \pi x_i \cos \pi x_i & \sum_{i=1}^5 \cos^2 \pi x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^5 y_i \sin \pi x_i \\ \sum_{i=1}^5 y_i \cos \pi x_i \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

解得 $(a, b) = (1, 1/3)$.

计算机实习题三

1. 拟合形如 $f(x) \approx \frac{a+bx}{1+cx}$ 的函数的一种快速方法是将最小二乘法用于下列问题:
 $f(x)(1+cx) \approx a+bx$, 试用这一方法拟合下面给出的中国人口数据:

次序	年份	人口(亿)
第一次	1953	5.82
第二次	1964	6.95
第三次	1982	10.08
第四次	1990	11.34
第五次	2000	12.66

解: 把方程 $f(x)(1+cx) \approx a+bx$ 进一步变形为 $a+bx-cxf(x) \approx f(x)$, 这个近似方程可以看成基函数是 $1, x, -xf(x)$ 而数据为 $(x_i, f(x_i))$ 的最小二乘拟合问题。编程如下:

```
function [a,b,c]=ex39
x = [1953 1964 1982 1990 2000]';
y = [5.82 6.95 10.08 11.34 12.66]';
A = [ones(5,1) x -x.*y];
z = A\y;
a = z(1);
b = z(2);
c = z(3);
v = linspace(1953,2000,100);
plot(x,y,'b-+',v,(a+b*v)./(1+c*v),'k-');
```

求得的解为 $a = 2.9456$, $b = -0.0014$, $c = -0.00049560$.

2. 已知液体的表面张力 s 是温度 T 的线性函数 $s = aT + b$. 对某种液体有表3-11的试验数据。试用最小二乘法确定系数 a, b .

T	0	10	20	30	40	80	90	95
s	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

表3-11

解: 编程如下

```
function [a,b]=ex310
    T = [0 10 20 30 40 80 90 95]';
    s = [68.0 67.1 66.4 65.6 64.6 61.8 61.0 60.0]';
    z = [T ones(8,1)]\s;
    a = z(1);
    b = z(2);
    v = linspace(0,95,100);
    plot(T,s,'b-+',v,a*v+b,'k-');
```

求得 $a = -0.0799$ 和 $b = 67.9593$.

习题四

1. 确定下列求积公式中的待定参数, 使其代数精度尽量高, 并指出所求的求积公式的代数精度:

$$(1) \int_0^{2h} f(x) dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(2h);$$

$$(2) \int_{-1}^1 f(x) dx \approx A[f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)];$$

$$(3) \int_0^2 f(x) dx \approx A_0 f(0) + \frac{4}{3} f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

解:

- (1) 由于要确定三个待定参数 A_i , ($i = 0, 1, 2$), 故分别令 $f(x) = 1, x, x^2$, 使求积公式两边相等, 从而得到方程组:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 2h \\ + hA_1 + 2hA_2 = 2h^2 \\ + h^2A_1 + 4h^2A_2 = \frac{8}{3}h^3 \end{cases}$$

解得 $A_0 = A_2 = \frac{1}{3}h$, $A_1 = \frac{4}{3}h$. 因此, 求积公式为

$$\int_0^{2h} f(x) dx \approx \frac{1}{3}hf(0) + \frac{4}{3}hf(h) + \frac{1}{3}hf(2h).$$

为确定求积公式的代数精度, 令 $f(x) = x^3$ 代入上面式子的两边, 得到左边 $= \frac{(2h)^4}{4} = 4h^4$, 右边 $= \frac{4}{3}h^4 + \frac{8}{3}h^4 = 4h^4$, 左右两边相等. 令 $f(x) = x^4$ 代入得, 左边 $= \frac{(2h)^5}{5} = \frac{32}{5}h^5$, 右边 $= \frac{4}{3}h^5 + \frac{16}{3}h^5 = \frac{20}{3}h^5$, 左右不等. 所以求积公式的代数精度为3.

(2) 分别将 $f(x) = 1, x, x^2$ 代入求积公式两边, 使之相等, 便得方程组:

$$\begin{cases} 6A = 2 \\ A(-1 + 2x_1 + 3x_2) = 0 \\ A(1 + 2x_1^2 + 3x_2^2) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

解出 $A = \frac{1}{3}, x_1 = \frac{1}{5}(1 \pm \sqrt{6}), x_2 = \frac{1}{15}(3 \mp 2\sqrt{6})$. 为确定代数精度, 我们令 $f(x) = x^3$, 左边 = 0,

$$\begin{aligned} \text{右边} &= \frac{1}{3} \left(-1 + 2 \left(\frac{1 \pm \sqrt{6}}{5} \right)^3 + 3 \left(\frac{3 \mp 2\sqrt{6}}{15} \right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(-1 + \frac{2}{15^3} (27 \pm 81\sqrt{6} + 81 \cdot 6 \pm 27 \cdot 6\sqrt{6}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{15^3} (27 \mp 54\sqrt{6} + 36 \cdot 6 \mp 8 \cdot 6\sqrt{6}) \right) \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

所以代数精度为2。

(3) 分别令 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 代入求积公式两边, 使之相等, 得方程组:

$$\begin{cases} A_0 + \frac{4}{3} + A_2 = 2 \\ + \frac{4}{3}x_1 + A_2x_2 = 2 \\ + \frac{4}{3}x_1^2 + A_2x_2^2 = \frac{8}{3} \\ + \frac{4}{3}x_1^3 + A_2x_2^3 = 4, \end{cases}$$

第三式减去第二式乘以 x_2 , 得到

$$\frac{4}{3}x_1(x_1 - x_2) = \frac{8}{3} - 2x_2,$$

第四式减去第三式乘以 x_2 , 得到

$$\frac{4}{3}x_1^2(x_1 - x_2) = 4 - \frac{8}{3}x_2,$$

所以我们得到方程组

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x_1(x_1 - x_2) = \frac{8}{3} - 2x_2 \\ \frac{4}{3}x_1^2(x_1 - x_2) = 4 - \frac{8}{3}x_2. \end{cases}$$

因此, $4 - \frac{8}{3}x_2 = \left(\frac{8}{3} - 2x_2\right)x_1$, 即 $x_1x_2 = \frac{4}{3}(x_1 + x_2) - 2$. 把 x_1x_2 代入以上方程组的第一个方程, 化简得到

$$x_2 = 8x_1 - 6x_1^2,$$

再代入 $x_1x_2 = \frac{4}{3}(x_1 + x_2) - 2$, 有

$$3x_1^3 - 8x_1^2 + 6x_1 - 1 = 0.$$

解出 $x_1 = 1$, $x_1 = \frac{1}{6}(5 \pm \sqrt{13})$, 从而得 $x_2 = 2$, $x_2 = \frac{1}{3}(1 \mp \sqrt{13})$ 及 $A_0 = \frac{1}{3}$, $A_0 = \frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{13})$ 和 $A_2 = \frac{1}{3}$, $A_2 = \frac{1}{6}(3 \mp \sqrt{13})$, 即方程组有三组解

$$(A_0, A_2, x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 2\right), \frac{1}{6} \left(1 \pm \sqrt{13}, 3 \mp \sqrt{13}, 5 \pm \sqrt{13}, 2 \mp 2\sqrt{13}\right).$$

经检验求积公式的代数精度皆为3。

2. 分别用复合梯形公式、辛普森公式计算下列积分, 并估计每种方法的误差:

$$(1) \int_0^1 e^x dx \quad (n=4); \quad (2) \int_{-1}^1 \sqrt{x+1.5} dx \quad (n=2).$$

解:

(1) 利用 $n=4$ 的复合梯形公式得到

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{1}{8} \left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right] \\ &= 1.727221905, \end{aligned}$$

利用 $n=4$ 的复合抛物线辛普森公式

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{24} \left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{8}\right) + 4f\left(\frac{3}{8}\right) + 4f\left(\frac{5}{8}\right) + 4f\left(\frac{7}{8}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right] \\ &= 1.718284155. \end{aligned}$$

与积分的精确值 $I = e - 1 = 1.7182818284590 \cdots$ 相比较, 分别得误差为 -0.008940076 及 -0.000002326 .

(2) 利用 $n = 2$ 的复合梯形公式

$$\begin{aligned}T_2 &= \frac{1}{2}[f(-1) + 2f(0) + f(1)] \\&= 2.368867677,\end{aligned}$$

利用 $n = 2$ 的辛普森公式

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{6}[f(-1) + 4f(-\frac{1}{2}) + 4f(\frac{1}{2}) + 2f(0) + f(1)] \\&= 2.399098267\end{aligned}$$

而积分的精确值为 $I = \frac{1}{6}(5\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 2.399529123 \cdots$, 所以误差分别为 0.030661446 和 0.000430855.

3. 试分别用下列方法计算积分 $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$:

- (1) 三点及五点高斯-勒让德公式;
- (2) 将区间四等分, 在每一小段上用两点高斯-勒让德公式, 然后累加(即复合两点高斯公式);
- (3) 用龙贝格算法(二分3次)。

解:

- (1) 先将求积区间 $[1, 3]$ 变为标准区间 $[-1, 1]$: 令 $x = t + 2$, 得

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^1 \frac{1}{t+2} dt$$

利用三点高斯公式有

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1 \frac{1}{t+2} dt \\&\approx 0.5555556 \times \left(\frac{1}{2+0.7745967} + \frac{1}{2-0.7745967} \right) + 0.8888889 \times \frac{1}{2} \\&= 1.098039283,\end{aligned}$$

利用五点高斯公式有

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1 \frac{1}{t+2} dt \\&\approx 0.2369269 \times \left(\frac{1}{2-0.9061798} + \frac{1}{2+0.9061798} \right) \\&\quad + 0.4786289 \times \left(\frac{1}{2-0.5384693} + \frac{1}{2+0.5384693} \right) + 0.5688889 \times \frac{1}{2} \\&= 1.098609289.\end{aligned}$$

- (2) 将 $[1, 3]$ 分为四等份，分别为 $[1, 1.5]$, $[1.5, 2]$, $[2, 2.5]$, $[2.5, 3]$ ，在每个小区间上用两点高斯公式，其值记为 I_i , ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{1.5} \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{0.5}{2.5 + 0.5t} dt \\ &\approx \frac{0.5}{2.5 - 0.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{0.5}{2.5 + 0.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = 0.405405405, \\ I_2 &= \int_{1.5}^2 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{0.5}{3.5 + 0.5t} dt \\ &\approx \frac{0.5}{3.5 - 0.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{0.5}{3.5 + 0.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = 0.287671232, \\ I_3 &= \int_2^{2.5} \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{0.5}{4.5 + 0.5t} dt \\ &\approx \frac{0.5}{4.5 - 0.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{0.5}{4.5 + 0.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = 0.223140495, \\ I_4 &= \int_{2.5}^3 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{0.5}{5.5 + 0.5t} dt \\ &\approx \frac{0.5}{5.5 - 0.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{0.5}{5.5 + 0.5 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = 0.182320441, \end{aligned}$$

故 $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \approx 1.098537573$. 积分的精确值为 $I = \ln 3 = 1.098612289$.

- (3) 令 $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 3$, $n = 3$. 用龙贝格算法二分3次得如下结果:

T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$
1.33333333		
1.16666667	1.11111111	
1.11666667	1.10000000	1.09925926

所以 $R_{3,3} = 1.09925926$, 实际误差 $= \ln 3 - R_{3,3} = -6.469714 \times 10^{-4}$.

4. 推导下列三种矩阵求积公式:

- (1) $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(a) + \frac{1}{2}f'(\xi)(b-a)^2$;
- (2) $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(b) - \frac{1}{2}f'(\zeta)(b-a)^2$;
- (3) $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3$.

解: 将 $f(x)$ 在 $x=a$ 处展开

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a), \quad \xi \in (a, b)$$

再积分, 并利用积分中值定理,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(a) dx + \int_a^b f'(\xi)(x-a) dx \\ &= (b-a)f(a) + f'(\eta) \int_a^b (x-a) dx \\ &= (b-a)f(a) + \frac{1}{2}f'(\eta)(b-a)^2, \quad \eta \in (a, b) \end{aligned}$$

此积分公式称为左矩形公式。利用 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-y)dy$ 和(1)的结论即得公式(2)。

下面再推导中矩形公式(3). 将 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}(a+b)$ 处展开,

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2, \quad \xi \in (a, b),$$

两边积分, 利用积分中值定理可得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}f''(\eta)(b-a)^3, \end{aligned}$$

其中 $\eta \in (a, b)$.

5. 设 $f(x) \in C^6[-1, 1]$, $p(x)$ 为 $f(x)$ 的5次埃尔米特插值多项式, 它满足:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i), \quad x_i = -1, 0, 1.$$

(1) 证明

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \frac{7}{15}f(-1) + \frac{16}{15}f(0) + \frac{7}{15}f(1) + \frac{1}{15}f'(-1) - \frac{1}{15}f'(1);$$

(2) 证明积分公式

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{7}{15}f(-1) + \frac{16}{15}f(0) + \frac{7}{15}f(1) + \frac{1}{15}f'(-1) - \frac{1}{15}f'(1)$$

具有5次代数精度, 并推导误差;

(3) 对给定的区间 $[a, b]$, 作划分: $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, 2n, h = \frac{b-a}{2n}$, 利用(2)中的求积公式推导相应的复合求积公式及误差。

解:

(1) 在埃尔米特插值多项式表达式(2-41)中取 $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$, 则得

$$\begin{aligned} p(x) = & [1 - 2l'_0(-1)(x+1)]l_0^2(x)f(-1) + [1 - 2l'_1(0)(x-0)]l_1^2(x)f(0) \\ & + [1 - 2l'_2(1)(x-1)]l_2^2(x)f(1) + (x+1)l_0^2(x)f'(-1) \\ & + (x-0)l_1^2(x)f'(0) + (x-1)l_2^2(x)f'(1), \end{aligned}$$

两边积分, 并注意到

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{1}{2}x(x-1), \quad l_1(x) = -(x+1)(x-1), \quad l_2(x) = \frac{1}{2}x(x+1), \\ l'_0(-1) &= -\frac{3}{2}, \quad l'_1(0) = 0, \quad l'_2(1) = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

便得结果。

(2) 在余项公式(2-42)中令 $n = 2, p(x) = H_5(x)$, 便得

$$R_5(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^2(x-1)^2(x+1)^2,$$

从而便知积分公式具有5次代数精度, 且误差

$$R[f] = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}x^2(x-1)^2(x+1)^2 dx,$$

利用积分中值定理(注意到 $x^2(x-1)^2(x+1)^2$ 在区间 $[-1, 1]$ 不变号), 我们得到

$$R[f] = \frac{1}{4725}f^{(6)}(\eta), \quad \eta \in (-1, 1).$$

(3)

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx$$

而对于积分 $\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx$, 利用变换 $t = \frac{1}{h}(x - x_{2i+1})$ 化为 $[-1, 1]$ 上的积分, 即

$$\begin{aligned} & \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \\ &= h \int_{-1}^1 f(x_{2i+1} + ht) dt \\ &\approx h \left(\frac{7}{15} f(x_{2i}) + \frac{16}{15} f(x_{2i+1}) + \frac{7}{15} f(x_{2i+2}) + \frac{1}{15} h f'(x_{2i}) - \frac{1}{15} h f'(x_{2i+2}) \right) \end{aligned}$$

这样便得求积公式

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{7}{15} h f(x_{2i}) + \frac{16}{15} h f(x_{2i+1}) + \frac{7}{15} h f(x_{2i+2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{15} h^2 f'(x_{2i}) - \frac{1}{15} h^2 f'(x_{2i+2}) \right] \\ &= \frac{7}{15} h [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(b)] + \frac{16}{15} h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) \\ &\quad + \frac{1}{15} h^2 [f'(a) - f'(b)], \end{aligned}$$

误差为

$$R = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^7}{4725} f^{(6)}(\eta_i) = \frac{(b-a)}{9450} h^6 f^{(6)}(\eta).$$

6. 分别用复合辛普森公式($n=2$)和高斯-切比雪夫公式($n=4$)计算积分:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

(准确值 $I = 2.62205755429213$).

解: 首先被积函数是奇异的, 考虑用变换 $x = \sin t$ 去掉奇点并使用复合辛普森公式。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^4 t}} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}. \end{aligned}$$

这里积分已经是正常积分。用复合辛普森公式有

$$\begin{aligned} I &= 2 \cdot \frac{\pi/2}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 0}} + \frac{4}{\sqrt{1+\sin^2 \frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 \frac{\pi}{2}}} \right) \\ &= 2.603905. \end{aligned}$$

令 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 利用高斯-切比雪夫求积公式(4-49), $n=4$, $\omega_i = \frac{\pi}{5}$, $x_i = \cos \frac{2i+1}{10}\pi$,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=0}^4 \omega_i f(x_i) \approx 2.622250.$$

因为被积函数的奇异性, 若不做变换直接去除奇点数值积分的精度很低。

7. 用泰勒级数展开 e^{-x^2} 的方法求积分 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, 要求计算精度为 10^{-4} .

解:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

两边积分得

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \\ &\approx 0.7468 \end{aligned}$$

$$\text{误差 } |R_7| \leq \frac{1}{15 \times 7!} = \frac{1}{75600} < 1.5 \times 10^{-5}.$$

8. 分别利用变量代换和泰勒级数展开方法计算积分 $\int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}}$, 要求精度 10^{-4} .

解: 作变换 $t = \sqrt{x}$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{4-t^2} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{4-t^2},$$

再用高斯-切比雪夫公式(4-49)

$$I \approx \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i),$$

分别取 $n=2, 3, 4$ 得计算值 I , 由题目要求得积分的近似值为 $I \approx 0.5493$.

泰勒级数法, 将函数 $\frac{1}{4-x}$ 展开成泰勒级数

$$\frac{1}{4-x} = \frac{1}{4(1-\frac{x}{4})} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4^2} + \frac{x^3}{4^3} + \cdots \right),$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{x}} &= \int_0^1 \frac{1}{4} (x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4^2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4^3}x^{\frac{5}{2}} + \cdots) dx \\ &= \frac{1}{4} (2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4^3} \cdot \frac{2}{7} + \cdots),\end{aligned}$$

$$\text{误差}|R_n| \leq \frac{1}{4} \frac{2}{(n+1)} \frac{(\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3(2n+1)4^n}, \text{ 取 } n=5, \text{ 得 } |R_5| \leq 5.9 \times 10^{-5}, \text{ 即得}$$

积分的近似值 $I = 0.54925$.

9. 分别用高斯-拉盖尔求积公式或高斯-埃尔米特求积公式计算下列积分, 并估计误差。

$$(1) \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{x+2} dx \quad (n=4); \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x+2} e^{-x^2} dx \quad (n=4).$$

解: (1) 利用高斯-拉盖尔求积公式, 有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{x+2} dx &= 0.521756 \times \frac{0.263560}{0.263560+2} + 0.398667 \times \frac{1.413403}{1.413403+2} \\ &\quad + 0.075942 \times \frac{3.596425}{3.596425+2} + 0.003612 \times \frac{7.085810}{7.085810+2} \\ &\quad + 0.000023 \times \frac{12.640801}{12.640801+2} \\ &= 0.277468.\end{aligned}$$

令 $f(x) = \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$, 则 $f^{(10)}(x) = \frac{2 \cdot 10!}{(x+2)^{11}}$. 其积分余项

$$|R[f]| = \left| \frac{(5!)^2}{10!} f^{(10)}(\eta) \right| \leq \frac{(5!)^2}{10!} \cdot \frac{2 \cdot 10!}{2^{11}} = \frac{225}{4096} \approx 0.055.$$

实际上真值 $I = 0.2773427662$.

(2) 利用高斯-埃尔米特求积公式, 有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x+2} e^{-x^2} dx &= 0.019953 \times \frac{-2.020183+1}{-2.020183+2} + 0.393519 \times \frac{-0.958572+1}{-0.958572+2} \\ &\quad + 0.945309 \times \frac{0+1}{0+2} + 0.393519 \times \frac{0.958572+1}{0.958572+2} \\ &\quad + 0.019953 \times \frac{2.020183+1}{2.020183+2} \\ &= 0.277468.\end{aligned}$$

令 $f(x) = \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$, 则 $f^{(10)} = \frac{2 \cdot 10!}{(x+2)^{11}}$. 其积分余项

$$|R[f]| = \left| \frac{(5!)^2}{10!} f^{(10)}(\eta) \right| \leq \frac{(5!)^2}{10!} \cdot \frac{2 \cdot 10!}{2^{11}} = \frac{225}{4096} \approx 0.055.$$

实际上真值 $I = 0.2773427662$.

10. 验证高斯型求积公式

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$$

的高斯点及高斯系数分别为

$$x_0 = 2 - \sqrt{2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2}),$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}).$$

解: 分别将 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 代入验证积分公式两边相等即可。

11. 构造高斯型积分公式

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1),$$

并计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx, \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx$.

解: 分别令 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 代入积分公式, 得非线性方程组:

$$\begin{cases} \omega_0 + \omega_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = A_0 \\ x_0 \omega_0 + x_1 \omega_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = A_1 \\ x_0^2 \omega_0 + x_1^2 \omega_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = A_2 \\ x_0^3 \omega_0 + x_1^3 \omega_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = A_3, \end{cases}$$

其中 $A_0 = \frac{\pi}{4}, A_1 = \frac{1}{2} \ln 2, A_2 = 1 - \frac{\pi}{4}, A_3 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$. 第三式乘以 x_1 减去第四式, 第二式乘以 x_1 减去第三式, 第一式乘以 x_1 减去第一式, 分别得

$$\begin{cases} (x_1 - x_0) \omega_0 = A_0 x_1 - A_1 \\ (x_1 - x_0) x_0 \omega_0 = A_1 x_1 - A_2 \\ (x_1 - x_0) x_0^2 \omega_0 = A_2 x_1 - A_3, \end{cases}$$

从第二式、第三式中消去 $(x_1 - x_0)x_0\omega_0$, 第一式、第二式中消去 $(x_1 - x_0)\omega_0$, 得

$$\begin{cases} A_1(x_0 + x_1) - A_0x_0x_1 = A_2 \\ A_2(x_0 + x_1) - A_1x_0x_1 = A_3. \end{cases}$$

上面式子可看成是一个关于 $x_0 + x_1, x_0x_1$ 的线性方程组, 解出

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = \frac{A_1A_2 - A_0A_3}{A_1^2 - A_0A_2} \\ x_0x_1 = \frac{A_2^2 - A_1A_3}{A_1^2 - A_0A_2}, \end{cases}$$

从而解得

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{A_1^2 - A_0A_2} \left[A_1A_2 - A_0A_3 - \sqrt{(A_1A_2 - A_0A_3)^2 - 4(A_1^2 - A_0A_2)(A_2^2 - A_1A_3)} \right] \\ x_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{A_1^2 - A_0A_2} \left[A_1A_2 - A_0A_3 + \sqrt{(A_1A_2 - A_0A_3)^2 - 4(A_1^2 - A_0A_2)(A_2^2 - A_1A_3)} \right] \end{cases}$$

将 A_i 的值代入得 $x_0 = 0.7302828$, $x_1 = -0.4118120$, $\omega_0 = 0.5866506$, $\omega_1 = 0.1987481$.

最后可计算出两积分的近似值分别为0.3117897和0.5826523.

12. 分别用辛普森公式($m = n = 4$)及高斯公式($m = n = 4$)计算积分

$$(1) \int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy dx; \quad (2) \int_0^1 \int_1^2 \frac{\sin(x^2 + y^2)}{1 + 0.5x + 0.5y} dy dx.$$

解: (1)对于Simpson公式, 令 $\omega_i = \frac{1}{12}, \frac{4}{12}, \frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{1}{12}$, 和 $x_i = 3 + \frac{i}{4}$, $y_i = 1 + \frac{i}{4}$,

$$I \approx (4-3)(2-1) \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \frac{\omega_i \omega_j}{(x_i + y_j)^2} = 0.04082237418.$$

对于Guass积分, 首先将积分化为标准区间上的积分。令 $u = 2x - 7$, $v = 2y - 3$, 得

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{(u+v+10)^2} du dv.$$

然后，再利用 $m = 4$ 点的Gauss-Legendre公式(查表4-6)

$$I \approx \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \frac{\omega_i \omega_j}{(u_i + v_j + 10)^2} = 0.04082199810,$$

其中 ω_i 和 $u_i = v_i$ 都从表4-6查得。其真值 $I = 0.04082199458699$ 。

(2)对于Simpson公式, 令 ω_i 同前一题, 和 $x_i = 0 + \frac{i}{4}$, $y_i = 1 + \frac{i}{4}$,

$$I \approx (4-3)(2-1) \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \omega_i \omega_j \frac{\sin(x_i^2 + y_j^2)}{1 + 0.5x_i + 0.5y_j} = 0.18469441.$$

对于Guass积分, 做变换 $u = 2x - 1$, $v = 2y - 3$.

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sin\left(\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v+3}{2}\right)^2\right)}{u+v+8} du dv.$$

然后，再利用 $m = 4$ 点的Gauss-Legendre公式(查表4-6)

$$I \approx \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 \omega_i \omega_j \frac{\sin\left(\left(\frac{u_i+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v_j+3}{2}\right)^2\right)}{(u_i + v_j + 8)^2} = 0.18405084,$$

其中 ω_i 和 $u_i = v_i$ 同上一小题。其真值 $I = 0.184050987$ 。

事实上, 关于累加形式 $\sum_i \sum_j \omega_i \omega_j f(x_i, x_j)$ 可以用如下形式计算(以第(2)小题的Simpson积分为例):

```
>> x = linspace(0,1,5);
>> y = linspace(1,2,5);
>> w = [1 4 2 4 1]'/12
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> w'*(sin(X.^2+Y.^2)./(1+0.5*X+0.5*Y))*w
```

```
ans =
    1.846944068968949e-001
```

13. 设已知函数 $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ 的数据表(表4-13)

x	1.0	1.1	1.2
$f(x)$	0.2500	0.2268	0.2066

表4-13

试用三点公式计算 $f'(x)$ 在 $x = 1.0, 1.1, 1.2$ 处的近似值，并估计误差。

解：三点公式为

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_0) \\ f'(x_1) &= \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi_1) \\ f'(x_2) &= \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi_2) \end{aligned}$$

而

$$|f'''(\xi)| \leq \max_{1.0 \leq \xi \leq 1.2} \frac{4!}{(1+\xi)^5} = 0.75,$$

从而得相应的导数的近似值，理论误差限。实际误差为导数的精确值与三点公式的计算值之间的差。

x	1.0	1.1	1.2
三点公式	-0.24792	-0.21694	-0.18596
精确值	-0.25000	-0.21596	-0.18783
理论误差限	0.00250	0.00125	0.00250
实际误差	0.00208	0.00098	0.00187

14. 分别用泰勒展开方法和插值方法证明二阶导数的三点数值微分公式

$$f''(x_1) \approx \frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)]$$

的截断误差是 $O(h^2)$.

证：利用泰勒展开

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x_1 - h) = f(x_1) - hf'(x_1) + \frac{h^2}{2}f''(x_1) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_1) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_1) \\ f(x_2) &= f(x_1 + h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \frac{h^2}{2}f''(x_1) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_1) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_2) \end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] = f''(x_1) + \frac{h^2}{4!}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)],$$

即截断误差为 $O(h^2)$.

计算机实习题

1. 利用等式

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

计算圆周率 π . 要求误差小于 10^{-8} .

- (1) 用复化辛普森求积公式计算;
- (2) 用龙贝格方法计算;
- (3) 推导复化的三点高斯-勒让德公式(4-45), 并进行圆周率的计算。

解: 编程如下:

```
function [p1,p2,p3] = ex415
    a = 0;
    b = 1;
    m = 2;
    t(1) = 0.5*(b-a)*(f(a)+f(b));
    t(2) = 0.5*t(1) + 0.5*(b-a)*f((a+b)/2);
    s(1) = ( 4*t(2)-t(1) ) / 3 ;
    j = 2;
    %% t,s,c,r store the romberg integrals,
    %%          in which s stores the simpson integrals
    while abs(t(j)-t(j-1)) > (0.5e-8/4),
        h = (b-a)/m;
        k = 0:(m-1);
        j = j + 1;
        t(j) = 0.5*t(j-1) + 0.5 * h * sum(f(a+(k+1/2)*h));
        s(j-1) = ( 4*t(j)-t(j-1) ) / 3 ;
        c(j-2) = (16*s(j-1)-s(j-2) ) / 15 ;
        if j>3,
            r(j-3) = (64*c(j-2)-c(j-3) ) / 63 ;
        end
        m = m * 2;
    end
    p1 = 4 * s(end);
    p2 = 4 * r(end);
    %% compute the compound Guass integrals
    w = [5 8 5]/9;
    x = [-sqrt(15) 0 sqrt(15)]/5;
    n = 5;
    p3 = 0;
```

```

for j=0:n-1,
    g = (j+0.5)/n + 0.5/n * x; % guass nodes
    p3 = p3 + f(g)*w'/(2*n); % guass int in each piece
end
p3 = p3*4;

function v = f(x)
    v = 1./(1+x.^2);

```

其中，辛普森积分和龙贝格积分返回p1和p2，高斯积分返回值为p3.

复合的高斯公式推导如下：设 (ω_i, z_i) 是高斯积分的系数和节点，如三点高斯公式($n = 2$)中， $\omega_i = \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$ 和 $z_i = -\frac{\sqrt{15}}{9}, 0, \frac{\sqrt{15}}{9}$. 对于一般的积分区间 $[a, b]$ ，令 $t = \frac{2}{b-a}(x - \frac{a+b}{2})$ ，有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right)dt = \sum_{i=0}^n \omega_i f\left(\frac{b-a}{2}z_i + \frac{a+b}{2}\right).$$

因此，若区间 $[a, b]$ 上有 m 等分节点 $x_i = a + ih$ ， $h = \frac{b-a}{m}$ ，则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^n \omega_j f\left(\frac{h}{2}z_j + x_i + \frac{h}{2}\right). \end{aligned}$$

2. 已知数据列于表4-14，求1~8之间以0.5为步长的各插值点上的导数值。要求先使用5次多项式拟合给定的数据，再由此求导。

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x_i)$	12	234	34	-1	34	2	5	23

表4-14

解：在命令行上输入如下

```

>> x = 1:8;
>> y = [12 234 34 -1 34 2 5 23];
>> p = polyfit(x,y,5);
>> q = polyder(p);
>> polyval(q, 1:0.5:8)

```

可得各点导数值的结果如下：

1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
645.72	159.71	-84.71	-165.55	-148.00	-84.46	-14.518	35.030
5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	
50.190	29.768	-14.629	-58.595	-64.919	16.405	248.186	

习题五

1. 用高斯消去法求解下述线性方程组：

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 16 \\ 12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 26 \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 = -19 \\ -6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 = -34 \end{cases}$$

解：第一行分别乘以 $m_{21} = -2$, $m_{31} = -\frac{1}{2}$, $m_{41} = 1$ 加到第二、三、四行上有

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 16 \\ -4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -6 \\ -12x_2 + 8x_3 + x_4 = -27 \\ 2x_2 + 3x_3 - 14x_4 = -18 \end{cases}$$

第二行分别乘以 $m_{32} = -3$, $m_{42} = \frac{1}{2}$ 加到第三、四行上有

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 16 \\ -4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -6 \\ 2x_3 - 5x_4 = -9 \\ 4x_3 - 13x_4 = -21 \end{cases}$$

第三行乘以 $m_{43} = -2$ 加到第四行上有

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 16 \\ -4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -6 \\ 2x_3 - 5x_4 = -9 \\ -3x_4 = -3 \end{cases}$$

回代求解得 $x_4 = 1$, $x_3 = -2$, $x_2 = 1$, $x_1 = 3$. 解向量为 $x = (3, 1, -2, 1)^T$.

2. 用列主元素高斯消去法求解下述线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 - 10x_4 = -2 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 14 \\ -3x_1 - 5x_2 + 15x_4 = -6 \end{cases}$$

解: 列主元高斯消去过程如下。首先第一列上主元为 -3 , 对调第一、四两行, 并消去第一列其他元素, 有

$$\begin{cases} -3x_1 - 5x_2 + 15x_4 = -6 \\ \frac{8}{3}x_2 - 7x_3 = -6 \\ \frac{2}{3}x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 16 \\ \frac{4}{3}x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

第二列主元已在第二行, 直接消去第二列上的元素有

$$\begin{cases} -3x_1 - 5x_2 + 15x_4 = -6 \\ \frac{8}{3}x_2 - 7x_3 = -6 \\ \frac{27}{4}x_3 + 4x_4 = \frac{35}{2} \\ \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

第三列上也不用选主元, 直接消去有

$$\begin{cases} -3x_1 - 5x_2 + 15x_4 = -6 \\ \frac{8}{3}x_2 - 7x_3 = -6 \\ \frac{27}{4}x_3 + 4x_4 = \frac{35}{2} \\ \frac{1}{9}x_4 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

代回求解, 最后可得解向量为 $x = (2, 3, 2, 1)^T$.

3. 用矩阵 A 的杜利脱尔三角分解: $A = LU$, 求解方程组:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解： $A = LU$, 按照算法5.2可得

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1.2 & 1 & & \\ 1.4 & -0.5 & 1 & \\ 1 & 0 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 10 \\ & -0.4 & -0.8 & -3 \\ & & -5 & -8.5 \\ & & & 0.1 \end{pmatrix}$$

求解 $Ly = b$, b 为右端项, 可得: $y = (1, -0.2, -0.5, 0.3)^T$. 求解 $Ux = y$ 最后可得解向量: $x = (20, -12, -5, 3)^T$.

4. 用乔列斯基分解计算下述线性代数方程组:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & & & \\ -1 & 5 & -1 & & \\ & -1 & 5 & -1 & \\ & & -1 & 5 & -1 \\ & & & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 14 \\ 35 \end{pmatrix}$$

解: $A = LL^T$, 利用算法5.4可得

$$L = \begin{pmatrix} 2.2361 & & & & \\ -0.4472 & 2.1909 & & & \\ & -0.4564 & 2.1890 & & \\ & & -0.4568 & 2.1889 & \\ & & & -0.4568 & 2.1889 \end{pmatrix}$$

作两个回代计算:

$$\begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$$

最后可得:

$$y = (1.3416, 3.0125, 4.2828, 7.2897, 17.5112)^T, \\ x = (1.0000, 2.0000, 3.0000, 5.0000, 8.0000)^T.$$

5. 用追赶法求解下述线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解: 按照算法5.5, 追的过程为:

$$\begin{aligned} l_1 &= b_1 = 2, & y_1 &= d_1/l_1 = \frac{1}{2}, & u_1 &= c_1/l_1 = \frac{1}{2}, \\ l_2 &= b_2 - a_2u_1 = \frac{3}{2}, & y_2 &= (d_2 - a_2y_1)/l_2 = -\frac{1}{3}, & u_2 &= c_2/l_2 = \frac{2}{3}, \\ l_3 &= b_3 - a_3u_2 = \frac{4}{3}, & y_3 &= (d_3 - a_3y_2)/l_3 = \frac{1}{4}, & u_3 &= c_3/l_3 = \frac{3}{4}, \\ l_4 &= b_4 - a_4u_3 = \frac{5}{4}, & y_4 &= (d_4 - a_4y_3)/l_4 = -\frac{1}{5}, & u_4 &= c_4/l_4 = \frac{4}{5}, \\ l_5 &= b_5 - a_5u_4 = \frac{6}{5}, & y_5 &= (d_5 - a_5y_4)/l_5 = 1, \end{aligned}$$

赶的过程为:

$$\begin{aligned} x_5 &= y_5 = 1, \\ x_4 &= y_4 - u_4x_5 = -1, \\ x_3 &= y_3 - u_3x_4 = 1, \\ x_2 &= y_2 - u_2x_3 = -1, \\ x_1 &= y_1 - u_1x_2 = 1, \end{aligned}$$

最后可得解向量为 $x = (1, -1, 1, -1, 1)^T$.

6. 用量化的列主元素高斯消去法求解下述方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$$

解: 初始指标向量 $l = (1, 2, 3, 4)$. 量化向量 $(3, 4, 3, 4)$. 它在整个计算过程中是不变的. 为了确定第一个主元方程, 观察四个比值:

$$\left\{ \frac{|a_{l_i,1}|}{S_{l_i}} : i = 1, 2, 3, 4 \right\} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{4}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4} \right\}$$

第二个比值最大。这样在第一步的消去过程中, 第二个方程作为主元方程, 这时 l 变为 $l = (2, 1, 3, 4)$. 消去后, 方程组变成

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{15}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ 9 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{23}{4} \end{pmatrix}$$

第二步, 观察第1,3和4行的比值:

$$\left\{ \frac{|a_{i,2}|}{S_{l_i}} : i = 2, 3, 4 \right\} = \left\{ \frac{5}{6}, 0, \frac{3}{8} \right\}$$

第一个比值最大, 故 l 不变, 仍为 $l = (2, 1, 3, 4)$. 因此, 当前主元方程为第一个方程。消去后, 方程组变成:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ 9 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{29}{10} \end{pmatrix}$$

第三步, 观察第3和4行的比值:

$$\left\{ \frac{|a_{i,3}|}{S_{l_i}} : i = 3, 4 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{27}{40} \right\}$$

第二个比值最大, 因此当前主元方程为第四个方程。这时 l 变为 $l = (2, 1, 4, 3)$. 消去后, 方程组变成:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{17}{9} \\ 0 & 0 & \frac{27}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ 9 \\ \frac{17}{9} \\ \frac{29}{10} \end{pmatrix}$$

回代的时候, 按照最终的指标向量 $l = (2, 1, 4, 3)$, 由第三个方程求出 x_4 , 第四个方程求出 x_3 , 第一个方程求出 x_2 , 最后由第二个方程求出 x_1 . 回代计算可得:

$$x_4 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1.$$

因此，方程组的解向量为：

$$x = (1, 1, 1, 1)^T.$$

7. 给出计算对称正定的三对角矩阵A的乔列斯基分解的计算格式，其中

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

解：乔列斯基分解为： $A = L \cdot L^T$ 。由于A是三对角矩阵，利用矩阵的乘法规则，可得L是下述只有两条对角线的下三角矩阵：

$$L = \begin{pmatrix} \theta_1 & & & & \\ \gamma_1 & \theta_2 & & & \\ & \gamma_2 & \theta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_{n-1} & \theta_n \end{pmatrix}$$

按照矩阵的乘法规则，可得：

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sqrt{\alpha_1}, \\ \gamma_1 &= \beta_1 / \theta_1, & \theta_2 &= \sqrt{\alpha_2 - \gamma_1^2}, \\ \gamma_2 &= \beta_2 / \theta_2, & \theta_3 &= \sqrt{\alpha_3 - \gamma_2^2}, \\ &\vdots & &\vdots \\ \gamma_{n-1} &= \beta_{n-1} / \theta_{n-1}, & \theta_n &= \sqrt{\alpha_n - \gamma_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

因此算法可写成：

$$\theta_1 = \sqrt{\alpha_1},$$

对 $i = 1, 2, \dots, n-1$ 计算

$$\begin{cases} \gamma_i = \beta_i / \theta_i \\ \theta_{i+1} = \sqrt{\alpha_{i+1} - \gamma_i^2} \end{cases}$$

8. 描述用列主元素高斯消去法把上海森伯格(Hessenberg)型矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ & a_{32} & & & a_{3n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

化为上三角矩阵的计算过程。

解: 第一步, 取 $|a_{i_1,1}| = \max_{1 \leq i \leq 2} |a_{i1}^{(1)}|$.

如果 $i_1 = 1$, 无需作行变换; 如果 $i_1 = 2$, 则第1行与第2行交换, 然后仅对第2行消去, 可得

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n}^{(1)} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n,n-1}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

第二步, 取 $|a_{i_2,2}| = \max_{2 \leq i \leq 3} |a_{i2}^{(2)}|$, (这里 $a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)}$)。

如果 $i_2 = 2$, 无需作行变换; 如果 $i_2 = 3$, 则第2行与第3行交换, 然后仅对第3行消去, 可得

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & 0 & a_{33}^{(3)} & a_{34}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ & & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} & \cdots & a_{4n}^{(2)} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n,n-1}^{(2)} & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

第 k 步, 取 $|a_{i_k,k}| = \max_{k \leq i \leq k+1} |a_{i_k}^{(k)}|$, (这里 $a_{k+1,k}^{(k)} = a_{k+1,k}^{(k-1)}$)。

如果 $i_k = k$, 无需作行变换; 如果 $i_k = k+1$, 则第 k 行与第 $k+1$ 行交换, 然后仅对第 $k+1$ 行消去。

上述过程一直做到第 $n-1$ 步, 上Hessenberg矩阵 A 就变成了上三角矩阵。

习题六

1. 用迭代法求解下述线性方程组:

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 14 \\ 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 12 \\ 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

(1) 分别写出Jacobi迭代, GS迭代, SOR迭代($\omega = 1.35$)的迭代格式;

(2) 判断上述三个迭代格式的敛散性, 并说明理由;

(3) 用收敛的迭代格式分别计算方程组的解, 要求满足

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \frac{1}{2} \times 10^{-4}.$$

解: (1) Jacobi迭代格式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(14 - 4x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(12 - 4x_1^{(k)} - 8x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(14 - 4x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)}) \end{cases}$$

GS迭代格式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(14 - 4x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}(12 - 4x_1^{(k+1)} - 8x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(14 - 4x_1^{(k+1)} - 8x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

SOR迭代格式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \frac{1.35}{10}(14 - 10x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \frac{1.35}{10}(12 - 4x_1^{(k+1)} - 10x_2^{(k)} - 8x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \frac{1.35}{10}(14 - 4x_1^{(k+1)} - 8x_2^{(k+1)} - 10x_3^{(k)}) \end{cases}$$

(2) 由于系数矩阵 A 是对称的, 且各阶级顺序主子式分别等于 $D_1 = 10$, $D_2 = 84$, $D_3 = 296$, 故系数矩阵 A 是对称正定的。因此, GS迭代和SOR迭代都收敛。

$$2D - A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & -8 \\ -4 & -8 & 10 \end{pmatrix}.$$

通过计算可得 $2D - A$ 的三个顺序主子式分别为 $D_1 = 10$, $D_2 = 84$, $D_3 = -216$, 故 $2D - A$ 不是对称正定矩阵。由于 A 是对称正定的, 但 $2D - A$ 不对称正定, 所以Jacobi迭代发散。

(3) 取初值 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, GS方法和SOR方法分别经过23次和14迭代得到 $x_{GS}^{(23)} = x_{SOR}^{(14)} = (1.0000, 0.0000, 1.0000)^T$ 。

2. 分别用Jacobi迭代和GS迭代求解下述线性方程组:

$$\begin{cases} 20x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 30 \end{cases}$$

取初值 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, 精确到小数后四位, 并在理论上判断这两个迭代格式的收敛性。

解: Jacobi迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{20}(24 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(12 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{15}(30 - 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}) \end{cases}$$

GS迭代格式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{20}(24 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(12 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{15}(30 - 2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

很明显系数矩阵 A 是严格对角占优的, 所以上述J迭代和GS迭代格式都收敛。取初值 $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ 。采用Jacobi迭代, 则迭代7次可得到满足精度要求的 $x^{(7)} = (0.76735, 1.13841, 2.12537)^T$ 。若采用GS迭代, 则迭代5次可得到满足精度要求的 $x^{(5)} = (0.76735, 1.13841, 2.12537)^T$ 。

3. 对下述线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

分别讨论用Jacobi迭代和GS迭代的敛散性。

解: 首先计算每个迭代法的迭代矩阵, 然后再计算它们的谱半径。对于Jacobi方法, 有

$$B_J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征多项式为

$$\det(\lambda I - B_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3.$$

因此 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\rho(B_J) = 0$, 所以Jacobi迭代是收敛的。对于GS迭代, 有

$$B_G = (D - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

其特征多项式为

$$\det(\lambda I - B_G) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2.$$

因此, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\rho(B_G) = 2 > 1$, 所以GS迭代是发散的。

4. 试证对于 n 维向量 x 有如下关系式成立:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|x\|_1 &\leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1. \end{aligned}$$

证: 按照范数的计算公式

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |x_{i_0}|, \quad (\text{在某个指标 } i_0 \text{ 上取到最大值}),$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

首先有

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \|x\|_1 \leq n|x_{i_0}| = n\|x\|_\infty;$$

同理也有

$$\|x\|_\infty^2 = |x_{i_0}|^2 \leq \|x\|_2^2 \leq n|x_{i_0}|^2 = n\|x\|_\infty^2,$$

两边开方有

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty;$$

利用柯西不等式, 成立

$$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i| \right)^2 \leq n \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2,$$

两边开方即得

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2;$$

明显成立

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2,$$

两边开方即得

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

两式联立可得:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

5. 证明: 对于矩阵范数, 如果 $\|A\| < 1$, 则

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

证: 首先证明 $I + A$ 是非奇异矩阵(用反证法).

假如 $I + A$ 是奇异矩阵, 则齐次线性方程 $(I + A)x = 0$ 有非零解 $x \neq 0$, 即 $x = -Ax$.

两边取向量范数, 有 $\|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. 由于 $\|x\| \neq 0$, 所以 $\|A\| \geq 1$, 矛盾。

显然有

$$(I + A)^{-1}(I + A) = I,$$

由此

$$(I + A)^{-1} = I - (I + A)^{-1}A.$$

两边取矩阵范数, 可得

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq 1 + \|(I + A)^{-1}\| \cdot \|A\|,$$

所以成立

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

6. 设线性方程组 $Ax = b$, 其中 A 为 n 阶对称正定矩阵 (设 A 的特征值满足: $0 < \alpha \leq \lambda(A) \leq \beta$), 建立如下迭代公式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

证明: 当 $0 < \omega < \frac{2}{\beta}$ 时, 上述迭代法收敛。

证: 迭代格式可写成

$$x^{(k+1)} = (I - \omega A)x^{(k)} + \omega b.$$

故迭代矩阵 $B_\omega = I - \omega A$. 记 A 的 n 个特征值为 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \leq \beta$, 则 B_ω 的特征值为 $1 - \omega\lambda_1, 1 - \omega\lambda_2, \dots, 1 - \omega\lambda_n$. 当 $0 < \omega < \frac{2}{\beta}$ 时, 有

$$1 - \omega\lambda_i > 1 - \frac{2}{\beta} \cdot \beta = -1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

由于 $\omega > 0, \lambda > 0$, 因此同时有

$$1 - \omega\lambda_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

所以对于 $i = 1, 2, \dots, n$, $|1 - \omega\lambda_i| < 1$, 也就是 $\rho(B_\omega) < 1$. 因此迭代收敛。

7. 试证矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

对于 $-0.5 < a < 1$ 时是正定的。当 $-0.5 < a < 0.5$ 时, 用Jacobi迭代求解 $Ax = b$ 是收敛的。

证: 矩阵 A 的各阶顺序主子式为:

$$D_1 = 1, \quad D_2 = 1 - a^2, \quad D_3 = \det(A) = (a - 1)^2(2a + 1).$$

由 $-0.5 < a < 1$ 可推出 $D_2 > 0$ 和 $D_3 > 0$, 因此当 $-0.5 < a < 1$ 时是矩阵正定的。当 $-0.5 < a < 0.5$ 时, A 正定且 $2D - A$ 也是同类型的矩阵, 只是把参数 a 换为 $-a$, 因此也是正定的。所以Jacobi迭代收敛。实际上, 当 $-0.5 < a < 0.5$ 时矩阵 A 是严格对角占优的, 也可以推出Jacobi迭代收敛。

8. 证明对GS迭代有

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} \leq \mu^{k-1} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty},$$

其中, $\mu = \max_i \left(\sum_{j=i}^n |b_{ij}| / (1 - \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|) \right)$, 这里 b_{ij} 是GS迭代矩阵的元素。

证: 设GS迭代为

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g,$$

其中 $B = L + U$, L 是 B 的严格下三角部分, U 是 B 的严格上三角部分。由此有

$$x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + g,$$

和

$$x^{(k)} = Lx^{(k)} + Ux^{(k-1)} + g.$$

两式相减有

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = L(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + U(x^{(k)} - x^{(k-1)}).$$

设 $|x_{i_0}^{(k+1)} - x_{i_0}^{(k)}| = \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$, 则有

$$\begin{aligned}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty &= |x_{i_0}^{(k+1)} - x_{i_0}^{(k)}| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{i_0-1} b_{i_0j}(x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}) + \sum_{j=i_0}^n b_{i_0j}(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}) \right| \\ &\leq l_{i_0} \cdot \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty + u_{i_0} \cdot \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty,\end{aligned}$$

(其中 $l_{i_0} = \sum_{j=1}^{i_0-1} |b_{i_0j}|$, $u_{i_0} = \sum_{j=i_0}^n |b_{i_0j}|$) 所以,

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty \leq \frac{u_{i_0}}{1 - l_{i_0}} \cdot \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty.$$

递推就有:

$$\begin{aligned}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty &\leq \mu \cdot \|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|_\infty \\ &\leq \mu^{k-1} \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty.\end{aligned}$$

9. 试用最速下降法解下述线性方程组

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

取 $x^{(0)} = (0, 0)^T$, 计算到 $x^{(4)}$.

解: 对 $k = 0, 1, 2, \dots$ 计算:

$$\begin{cases} r^{(k)} = b - Ax^{(k)}, \\ \alpha_k = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}, \end{cases}$$

计算结果如下:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ -\frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

10. 用共轭梯度法求解下述线性方程组：

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

解：取 $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, $p^{(0)} = r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$.

对 $k = 0, 1, 2, \dots$, 计算：

$$\begin{cases} \alpha_k = \|r^{(k)}\|_2^2 / (Ap^{(k)}, p^{(k)}), \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k \cdot p^{(k)}, \\ r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k Ap^{(k)}, \\ \beta_k = \|r^{(k+1)}\|_2^2 / \|r^{(k)}\|_2^2, \\ p^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)}, \end{cases}$$

经计算有：

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0.4737, \\ x^{(1)} = (0.9474, 0.4737, 0.9474, 0.9474, 0.4737, 0.9474)^T, \\ r^{(1)} = (-0.3684, 1.4737, -0.3684, -0.3684, 1.4737, -0.3684)^T, \\ \beta_0 = 0.2715, \\ p^{(1)} = (0.1745, 1.7452, 0.1745, 0.1745, 1.7452, 0.1745)^T, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0.3016, \\ x^{(2)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000, 1.0000)^T, \end{cases}$$

容易看出原方程组的精确解为：

$$x^* = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T.$$

故共轭梯度法迭代两次就求到了解。

习题七

1. 利用二分法求解方程 $x \ln x = 1$ 的根，准确到3位小数。

解：编写二分法程序和求根的函数如下，并作调用：

```
function [x,hist]=bisect(f,a,b,tol)
%%
%% find the zero of f in interval [a,b]
%%      with f(a),f(b) having different signs
%% Usage [x,hist]=bisect(f,a,b,tol)
%%
if nargin<4,      tol = 1e-5;
    if nargin<3,      b = a(2); a = a(1);
        if nargin<2, error('too few input!!');
            end; end;
fa = feval(f,a);
fb = feval(f,b);
hist = [a b; fa fb];
if abs(fa)<tol,
    x = a; return;
elseif abs(fb)<tol,
    x = b; return;
elseif sign(fb)==sign(fa),
    error('f has the same signs at a and b!!');
end
while abs(b-a)>tol,
    t = a/2 + b/2;
    ft = feval(f,t);
    hist = [hist [t;ft]];
    if abs(ft)<tol,
        x = t; return;
    elseif sign(ft)==sign(fb),
        fb = ft;
        b = t;
    elseif sign(ft)==sign(fa),
        fa = ft;
        a = t;
    end
end
x = (b+a)/2;
%% end of bisect
```

和

```
function v = f(x)
    v = x * log(x) - 1;
% end
```

注意到, 其中为了避免可能的溢出, 计算中点以及判断函数值同号的运算都相应做了变形。调用这个函数, 既然 $1 \ln 1 = 0$ 和 $2 \ln 2 = \ln 4 > 1$, 两根位于区间 $[1, 2]$ 之中, 我们可用如下方式求根:

```
>> [x,hist]= bisect('f',1,2,1e-3)
```

求得方程的根为 $x = 1.763$, 迭代过程在变量 **hist** 中, 见下表:

x	1.0000	2.0000	1.5000	1.7500	1.8750	1.8125
$f(x)$	-1.0000	0.3863	-0.3918	-0.0207	0.1786	0.0779
x	1.7813	1.7656	1.7578	1.7617	1.7637	
$f(x)$	0.0283	0.0038	-0.0085	-0.0024	0.0007	

2. 为求解方程 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 1.5 附近的一个根, 设将方程改写成如下等价形式,

$$(1) \quad x = 1 + \frac{1}{x},$$

$$(2) \quad x^3 = 1 + x^2,$$

$$(3) \quad x^2 = \frac{1}{x-1},$$

试建立相应的迭代公式, 讨论各自的收敛性, 并选其中一个计算至四位有效数字。

解: 令 $f(x) = x^3 - x^2 - 1$, $g_1(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, $g_2(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$ 及 $g_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, 则 $f(1.4) = -0.216 < 0$, $f(1.5) = 0.125 > 0$. 因此函数 $f(x)$ 的有根区间为 $[1.4, 1.5]$. 相应的迭代公式为 $x_{k+1} = g_i(x_k)$, 分别为对应的三个迭代函数。对于任何 $x \in [1.4, 1.5]$, 有:

$$|g'_1(x)| = \left| -\frac{2}{x^3} \right| \leq 0.8 < 1,$$

$$|g'_2(x)| = \left| \frac{1}{3} \frac{2x}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \right| = 0.558 < 1,$$

$$|g'_3(x)| = \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{0.5}} > 1,$$

所以, 用 g_1 和 g_2 做迭代时收敛, 用 g_3 时不收敛。可以看到, g_2 导数的上界最小, 选它迭代如下: 其中初始值为1.5, 迭代序列为1.5, 1.4812, 1.4727, 1.4688, 1.4670, 1.4662, 1.4659. 因此, 近似根可取为1.466. (若用 g_1 迭代, 13步可收敛。)

3. 已知 $x = \varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内只有一根, 而在该区间中 $|\varphi'(x)| \geq k > 1$, 试问如何求解这个不动点方程? 并把你的方法应用到求方程 $x = \tan x$ 在4.5附近的根的问题上。

解: 设 $\varphi(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内的反函数为 $g(x)$, 则

$$|g'(x)| = \left| \frac{1}{\varphi'(t)|_{t=g(x)}} \right| \leq \frac{1}{k} < 1.$$

所以迭代格式 $x_{j+1} = g(x_j)$ 收敛。并且由反函数的性质, 可知 φ 和 g 有相同的不动点。针对方程 $x = \tan x$, 可得 g 在4.5附近的表达式为 $x = \arctan x + \pi$. 取初值4.5, 便可得如下迭代序列:

4.5, 4.4937, 4.4934, 4.4934,

方程的近似根因此可取为4.4934.

4. 分别用如下方法求解方程 $x^2 + 2xe^x + e^{2x} = 0$, 取初值为0, 迭代至四位有效数字。

- (1) 标准的牛顿迭代法;
- (2) 有重根时的牛顿迭代法;
- (3) 牛顿下山法。

解: 编写函数值和导数值的MatLab文件如下:

```
function v =f(x)
    v = x^2 + 2*x*exp(x) + exp(2*x);
% end
```

和

```
function v = g(x)
    v = 2*x + 2*(x+1)*exp(x) + 2*exp(2*x);
% end
```

利用教材中的牛顿法求根的程序，作如下调用

```
>> [x,it,hist] = newton(0,'f','g',100,5e-5,0)
>> [x,it,hist] = newton(0,'f','g',100,5e-5,1)
```

就可以得到标准的牛顿迭代法和牛顿下山法的结果：方程的根为 $x = -0.5643$ ，两个方法都是9步收敛，迭代过程如下

0, -0.2500, -0.3986, -0.4802, -0.5230,
-0.5449, -0.5560, -0.5615, -0.5643.

关于有重根时的牛顿迭代法，实际上相当于求解 $\mu(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ 的牛顿法，其中函数 f 和 g 为前面编写过的函数。编写函数 $\mu(x)$ 及其导数 $\nu(x)$ 的MatLab文件如下：

```
function v= mu(x)
    v = f(x) / g(x);
% end
```

和

```
function v = nu(x)
% f2 is the 2nd derivative of f
    f2 = 2 + 2*(x+2)*exp(x) + 4*exp(2*x);
    v = ( (g(x))^2 - f(x)*f2 ) / (g(x))^2;
% end
```

并作调用

```
>> [x,it,hist] = newton(0,'mu','nu',100,5e-5,0)
```

可以看到它们收敛于同一个解，但是后者迭代收敛非常快。如下是其迭代序列

0, -0.6667, -0.5688, -0.5671.

5. 证明定理7.11.

证明: 首先证明由 $x^{(0)} \in \mathbb{D}$, $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ 产生的序列 $\{x^{(k)}\} \subset \mathbb{D}$ 且有界。因为 $x^{(0)} \in \mathbb{D}$, $G(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, 所以 $x^{(1)} = G(x^{(0)}) \in \mathbb{D}$, $x^{(2)} = G(x^{(1)}) \in \mathbb{D}$. 由数学归纳法可以证明对于所有 k , $x^{(k)} \in \mathbb{D}$, 即序列 $\{x^{(k)}\} \subset \mathbb{D}$. 由迭代关系可以得到:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \|G(x^{(k)}) - G(x^{(k-1)})\| \leq L\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|,$$

递推可得

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq L^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

因此, 任意给定 $\varepsilon > 0$, 只要 $m > n > \left\lceil \log_L \left(\frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} \right) \right\rceil + 1$, 就有

$$\begin{aligned} \|x^{(m)} - x^{(n)}\| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &< \frac{L^n}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

所以序列 $\{x^{(k)}\}$ 的收敛。设其极限为 x^* , 则序列 $\{G(x^{k-1})\}$ 极限为 $G(x^*)$, x^* 是一个不动点。若另有不动点 $\bar{x}^*$ 满足 $\bar{x}^* = G(\bar{x}^*)$, 则 $\|x^* - \bar{x}^*\| \leq \|G(x^*) - G(\bar{x}^*)\| \leq L\|x^* - \bar{x}^*\|$, 因为 $L < 1$, 有 $x^* = \bar{x}^*$. 所以不动点存在且唯一。因为

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| &\geq \|x^{(k-1)} - x^*\| - \|x^{(k)} - x^*\| \\ &\geq \frac{1}{L} \|x^{(k)} - x^*\| - \|x^{(k)} - x^*\| \\ &= \frac{1-L}{L} \|x^{(k)} - x^*\|. \end{aligned}$$

所以 $\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$. 利用 $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq L^{k-1} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$ 可得另一个估计式。

6. 写一程序实现单点和两点割线法, 并用来求解方程 $x^3 - 2x - 1 = 0$ 在 2 附近的根, 比较它们的收敛速度。

解: 易知该方程在区间 $[1, 2]$ 内有一根。编写割线法程序及函数值 MatLab 文件如下:

```
function [x,it,hist]=secant(x0,x1,f,maxit,tol,opt)
%%
%% Solve f(x)==0 by secant method,
%% Usage [x,it,hist]=secant(x0,x1,f,maxit,tol,opt)
%% opt == 1: 1-point secant
%%         2: 2-point secant
%%
if nargin<6,          opt = 2;
    if nargin<5,      tol = 1e-4;
        if nargin<4,  maxit = 100;
            if nargin<3, error('too few input!!');
                end; end; end; end;
xold = x0;
x     = x1;
fold = feval(f,xold);
fx    = feval(f,x);
f0    = fold;
hist = [ x0 x1; fold fx];
for it = 1:maxit,
    if opt==1,
        xp = x0;
        fp = f0;
    elseif opt==2,
        xp = xold;
        fp = fold;
    end
    xn = x - fx * (x-xp) / (fx-fp) ;
    fn = feval(f,xn);
    hist = [hist [xn;fn] ];
    if abs(fn)<tol,
        disp('Secant method successes!!');
        return;
    end
    if opt==2,
        xold = x;
        fold = fx;
    end
    x = xn;
    fx = fn;
end
disp('Secant method fails!!');
%% end of secant
```

和

```
function v = fun1(x)
    v = x^3 - 2*x - 1;
% end
```

其中，割线法的程序同时实现了单点和双点割线法，输入变量opt等于1或2分别代表所采用的割线法是单点和双点割线法，缺省为双点割线法。我们可以做如下调用：

```
>> [x,it,hist] = secant(2,1,'fun1',100,1e-4,1)    % 单点割线法
>> [x,it,hist] = secant(2,1,'fun1',100,1e-4,2)    % 双点割线法
```

可得近似根为1.6180, 迭代过程如下表

	单点割线法		双点割线法	
迭代步	x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	2.0000	3.0000	2.0000	3.0000
2	1.0000	-2.0000	1.0000	-2.0000
3	1.4000	-1.0562	1.4000	-1.0560
4	1.5562	-0.3436	1.8475	1.6106
5	1.6018	-0.0937	1.5772	-0.2310
6	1.6139	-0.0243	1.6111	-0.0404
7	1.6170	-0.0062	1.6183	0.0014
8	1.6178	-0.0016	1.6180	-0.0000
9	1.6180	-0.0004		
10	1.6180	-0.0001		
11	1.6180	-0.0000		

可以看出，双点割线法迭代较快。若在输入时把初值x0和x1位置对换，如

```
>> [x,it,hist]=secant(1,2,'fun1',100,1e-4,1)    % 单点割线法
>> [x,it,hist]=secant(1,2,'fun1',100,1e-4,2)    % 双点割线法
```

则单点和双点割线法分别需要49步和5步。因此我们知道单点割线法收敛的快慢还很大程度地依赖于有根区间端点的次序，或者更确切地说，依赖于固定的那个点(即算法中的x0)离解的远近。

7. 证明迭代式

$$x_0 > 0, \quad x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

是计算 $\sqrt{a}$ 的3阶方法($a > 0$), 并估计

$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{(x_k - \sqrt{a})^3}.$$

证明: 设函数 $\varphi(x) = \frac{x(x^2 + 3a)}{3x^2 + a}$, 则该迭代公式是不动点迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, 计算可知

$$\varphi'(x) = \frac{3x^4 - 6ax^2 + 3a^2}{(3x^2 + a)^2},$$

所以, $\varphi'(\sqrt{a}) = 0$, 迭代方法至少平方收敛。为估计收敛阶, 我们可以计算函数 φ 的各阶导数在 $\sqrt{a}$ 的值。但下面的方式来得更直接: 我们有

$$x_{k+1} \pm \sqrt{a} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a} \pm \sqrt{a} = \frac{(x_k \pm \sqrt{a})^3}{3x_k^2 + a}.$$

带正负号的两式相除, 有

$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{x_{k+1} + \sqrt{a}} = \frac{(x_k - \sqrt{a})^3}{(x_k + \sqrt{a})^3}.$$

因为 $x_k \rightarrow a$, 所以该方法三阶收敛, 且有

$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{(x_k - \sqrt{a})^3} = \frac{x_{k+1} + \sqrt{a}}{(x_k + \sqrt{a})^3} \rightarrow \frac{1}{(2\sqrt{a})^2} = \frac{1}{4a}.$$

8. 假设在割线法迭代过程中刚好某一步有 $x_k = x^*$, 证明 $x_{k+1} = x^*$.

证明: 我们假定初始区间端点都不为 x^* . 对于单点割线法, 若有某个 $x_k = x^*$,

$$x_{k+1} = x^* - \frac{f(x^*)}{f(x^*) - f(x_0)}(x^* - x_0) = x^*,$$

因为 $f(x^*) = 0$. 对于双点割线法, 假设第一次出现迭代点为 x^* 在第 k 步, 即 $x_k = x^*$ 但 $x_{k-1} \neq x^*$. 此时,

$$x_{k+1} = x^* - \frac{f(x^*)}{f(x^*) - f(x_{k-1})}(x^* - x_{k-1}) = x^*,$$

在这种意义下, 割线法也是某种意义上的不动点迭代方式。上述证明几何意义是非常明显的: 即一条曲线上的弦, 即某线段, 若有一个端点在横轴上, 则它与横轴的交点就是这个点。

9. 考虑一个变量的牛顿法, 我们把它改造为 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{d}$, 其中 d 为某一常数. 这个格式什么时候收敛? 收敛速度一般为什么速度? 有没有使得格式是二次收敛的常数 d ?

解: 令 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{d}$, 则 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点. 考虑不动点迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, 即迭代 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{d}$. 计算可得 $\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{d}$, 若要求 $|\varphi'(x^*)| = \left| 1 - \frac{f'(x^*)}{d} \right| < 1$, 需有 d 与 $f'(x^*)$ 同号, 且 $|d| > \frac{1}{2} |f'(x^*)| > 0$. 而当 $f'(x^*) = 0$ 时, 迭代不收敛. 此即迭代收敛的条件. 若要有二阶收敛, 需有 $|\varphi'(x^*)| = \left| 1 - \frac{f'(x^*)}{d} \right|$, 即 $d = f'(x^*)$. 除此之外, 其它满足收敛条件的 d , 迭代方法都只是线性收敛. 当然, 常数 $d = f'(x^*)$ 在迭代开始时是不容易估计的.

10. 应用二分法、牛顿法、割线法分别求解下面的各个问题:

- (1) $x^3 - 2x - 5 = 0$;
- (2) $e^{-x} = x$;
- (3) $x \sin x = 1$;
- (4) $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$.

解: 利用第1题中的二分法程序, 第6题中的割线法程序以及教材中的牛顿迭代法程序, 我们可以求解题目所给的四个非线性方程. 首先, 确定每个方程的有根区间或近似根. 容易看出, 这四个方程的有根区间分别为 $[2, 3]$, $[0, 1]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ 和 $[0, 1]$. 其次, 编写求函数值和导数值的MatLab文件如下:

```
function f = testf(x)
    global nprob
    if nprob==1,
        f = x^3 - 2*x - 5;
    elseif nprob==2,
        f = exp(-x) - x;
    elseif nprob==3,
        f = x*sin(x) - 1;
    elseif nprob==4,
        f = x^3 - 3*x^2 + 4*x - 1;
    end
% end
```

和

```
function f = testg(x)
    global nprob
    if nprob==1,
        f = 3*x^2 - 2;
    elseif nprob==2,
        f = -exp(-x) - 1;
    elseif nprob==3,
        f = sin(x) + x*cos(x);
    elseif nprob==4,
        f = 3*x^2 - 6*x + 4;
    end
% end
```

实际上只有牛顿迭代法需要用到导数函数testg。这当中的nprob是全局变量，这里我们用它来区别每次试验的求根的函数，因此不必专门另写四个MatLab函数文件来求它们的函数值。(记得在调用时也要声明nprob为全局变量。)最后，编写总的调用程序，例如

```
function testall
    global nprob
    a = [2 0 0 0];
    b = [3 1 pi/2 1];
    tol = 1e-6;
    maxit = 100;
    for nprob=1:4,
        a1 = a(nprob);
        b1 = b(nprob);
    % bisection method
        [x1, hist1] = bisect('testf',a1,b1,tol);
        it1 = size(hist1,2) - 2;
    % newton method
        [x2,it2,hist2] = newton...
            ((a1+b1)/2,'testf','testg',maxit,tol,1);
    % secant method
        % one-point
        [x3,it3,hist3] = secant(a1,b1,'testf',maxit,tol,1);
        % two-point
        [x4,it4,hist4] = secant(a1,b1,'testf',maxit,tol,2);
        x (nprob,:) = [x1 x2 x3 x4];
        it(nprob,:) = [it1 it2 it3 it4];
    end
home
```

```
fprintf...
('   ===          Solution and Iteration Numbers          ===\n');
fprintf...
('  PROB      BISECT      NEWTON  SECANT(1p) SECANT(2p)  \n');
fprintf...
('  -----\n');
for nprob=1:4,
    fprintf('%6d ',nprob);
    fprintf('      %6.4f',x(nprob,:));
    fprintf('\n      ');
    fprintf('%10d',it(nprob,:));
    fprintf('\n');
end
```

在命令行内运行testall, 则可以在MatLab命令窗口中看到最终的数值结果如下：

===	Solution and Iteration Numbers				===
PROB	BISECT	NEWTON	SECANT(1p)	SECANT(2p)	

1	2.0946	2.0946	2.0946	2.0945	
	20	5	6	5	
2	0.5671	0.5671	0.5671	0.5672	
	20	3	7	4	
3	1.1142	1.1142	1.1142	1.1142	
	20	4	22	4	
4	0.3177	0.3177	0.3177	0.3176	
	20	5	11	6	

这里，所有的迭代方法都设收敛精度为 $1e-6$, 最大迭代步数为100. 对于二分法和割线法，初始区间(或初始的两个迭代点)为有根区间的端点，牛顿法的初始点取为有根区间的中点。

数值实验题

1. 实验一． 写一程序实现下面问题的牛顿算法和拟牛顿算法：求解方程组

$$\begin{cases} (x_1 + 3)(x_2^3 - 7) = -18 \\ \sin(x_2 e^{x_1} - 1) = 0 \end{cases}$$

解：首先，我们采用拟牛顿法求解这个方程组。程序如下：

```
function [x,it,hist,flag] = qn(x0,f,maxit,tol)
    if nargin<4,          tol = 1e-5;
        if nargin<3,      maxit = 1000;
            if nargin<2, error('too few input!!');
                end; end; end          % default parameter
    flag = 0;              % initialize
    x = x0(:);
    hist = x;
    fx = feval(f,x);
    H = eye(length(x));
    for it = 1:maxit,      % main iterate
        if norm(fx)<=tol,  % converge
            disp('Quasi-Newton Iteration successes!!');
            flag = 1;
            return;
        end
        s = - H * fx;      % quasi-newton direction
        xn = x + s;        % new trial point
        fxn = feval(f,xn); % and its value
        if any(isnan(x)), return; end % return if overflow
        while norm(fxn) > norm(fx), % step reduce
            s = s * 0.9;      % reduce factor 0.9
            xn = x + s;
            fxn = feval(f,xn);
        end
        y = fxn - fx;      % difference of gradient
        hist= [hist xn];   % iteration history
        Hy = H*y;
        ys = y'*s;
        % ys could be too small, using Powell skill
        if ys < 0.2*y'*Hy,
            t = 0.8*y'*Hy/(y'*Hy-ys);
            y = t*y + (1-t)*Hy;
            ys= y'*s;
        end
        Hy = H*y;
        % R1 Update
        H = H + (s-Hy)*s'*H/(s'*Hy);
        % DFP
        % H = H - Hy*Hy'/(y'*Hy) + s*s'/ys;
        % BFGS
        % H = H - (Hy*s'+s*Hy')/ys + (1+y'*Hy/ys) * s*s'/ys;
```

```
x    = xn;                                % new iterate
fx   = fxn;                              % new function value
end
% end
```

这个算法采用的参数为：终止迭代的最小函数值范数为 $1e-5$ ，最大迭代步数为1000，步长缩短因子为0.9。读者可以采用不同的拟牛顿法修正公式，我们在程序中同时列出秩1修正和DFP，BFGS修正公式。改变为不同修正公式的拟牛顿法只需要改变这三个公式前面%的位置。此外，我们用到了Powell技巧。对于这个技巧的运用读者可以参考数值最优化教材中关于拟牛顿算法的部分。

其次，我们把方程组稍作变形如下

$$\begin{cases} (x_1 + 3) + \frac{18}{x_2^3 - 7} = 0 \\ \sin(x_2 e^{x_1} - 1) = 0 \end{cases}$$

对于拟牛顿法，我们只需要如下的返回函数值的MatLab文件：（读者若采用牛顿法，须提供返回导数值的文件）

```
function v = f711(x)
    v = [ (x(1)+3)+18/(x(2)^3-7)
          sin(x(2)*exp(x(1))-1) ];
% end
```

运行时，只需要在命令行敲入如下的命令即可

```
>> [x,it,hist,flag] = qn([0,0], 'f711', 1000, 1e-5)
```

其中，[0,0]是初值，f711是函数名，1000为最大迭代步数， $1e-5$ 是求解的精度。返回的变量中，x为解，it是实际的迭代步，hist的每个列保存着迭代的各个近似解，flag是收敛与否的标志。

拟牛顿法对初值也是有一定要求的。例如，我们可以测试初始点 (x_1, x_2) 为区域 $\{-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10\}$ 内所有坐标为整数的点时拟牛顿法的收敛情况。此时，可以写一个脚本文件如下，存为testqn.m:

```
warning off;
suc    = 0;
total = 0;
for i = -10:10,
```

```
for j = -10:10,
    total = total+1;
    [x,it,hist,flag] = qn([i,j], 'f711',1000,1e-5);
    if flag,
        disp('success');
        [flag,i,j,it,x'],
        suc=suc+1;
        %pause
    else
        disp('fail');
    end
end
end
fprintf('Quasi-Newton iterates successfully %d among %d\n',...
        suc,total);
```

结果显示，拟牛顿法在441次测试中有266次迭代成功。（若把Powell技巧略去，或使用DFP或BFGS修正，则测试结果较差。）使用MatLab内部函数求解，也须编写f711函数文件，然后可以如下调用：

```
>> x = fsolve('f711',[0,0])
```

其中，fsolve是MatLab系统的内部函数，该函数求解非线性方程时使用了許多最优化方面的技术。有关该命令的详细介绍，读者可以参考MatLab使用手册或有关最优化书籍中非线性方程求根的更深入地讨论。（另注：关于该方程的理论性质，我们可以看到，不同的初始值会导致算法收敛于不同的解。实际上，除了像解(0,1)外，该方程也有其它的解，例如在 $x_1 = -3$ 附近而 x_2 取很大的值时的情形。）

2. 实验二. 丙烷在空气中燃烧满足下面的方程组，其中 $R = 4.056743$, $S = \sum_{i=1}^{10} x_i$, x_i 为燃烧过程中各种物质的摩尔数。请尝试用牛顿法、拟牛顿法或MatLab库函

数的方法求解上述的非线性方程组。

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_7 + x_8 + x_9 + 2x_{10} = R + 10, \\ 2x_2 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 8, \\ 2x_3 + x_5 = 4R, \\ x_1x_5 - 0.193x_2x_4 = 0, \\ x_6\sqrt{x_2} - 0.002597\sqrt{x_2x_4S} = 0, \\ x_7\sqrt{x_4} - 0.003488\sqrt{x_1x_4S} = 0, \\ x_4x_8 - 0.00001799x_2S = 0, \\ x_4x_9 - 0.0002155x_1\sqrt{x_3S} = 0, \\ x_4^2(x_{10} - 0.00003846S) = 0, \end{array} \right.$$

解: 本题中, 所有变量要求非负。实际上, 在 $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ 或 $S = 0$ 的点处函数不可导。因此, 用牛顿法迭代过程中, 我们要求所有变量大于零。简单地限制步长即可做到这一点。假设在牛顿法迭代过程中, 我们有 $x^{(k)} > 0$ (表示它所有分量为正), 牛顿算法得到的方向 $d^{(k)} = -(J^{(k)})^{-1} f(x^{(k)})$, 其中 f 为所要求解的函数, 而 J 是函数 f 在当前迭代点的 Jacobi 矩阵。在牛顿下山法中, 我们知道 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$ 。现在为了保证变量非负的性质, 我们要求

$$0 < \alpha_k \leq \alpha_{\max} = \max \{ \alpha | x^{(k)} + \alpha d^{(k)} \geq 0 \}.$$

下面程序 `propane.m` 中的其他部分同教材中的牛顿法。(读者可以编写类似于前一题的拟牛顿法)。

```
function [x,fx,it,hist] = propane(x0,maxit,tol)
%%
%% solves the equation of propane combustion in the air
%% by Newton method
%% Usage:: [x,fx,it,hist] = propane(x0,maxit,tol)
%%
if nargin<3,          tol = 1e-16;
    if nargin<2,      maxit = 200;
        if nargin<1, error('please give an initial x0!!');
            end; end; end;
if any(x0<0), error('xi should be nonnegative!!'); end
```



```
if size(x0,2)~=1, x0=x0'; end
x = x0;
hist = x;
for it = 1:maxit,
    [fx,Gx] = h(x);
% return if solution is found
    if norm(fx)<=tol,
        disp('Newton Iteration successes!!');
        return;
    end
    d = - Gx\fx; % Newton direction
    ind = find(d<0); % indices with d<0
    if isempty(ind),
        lmax = 1.0;
    else
        lmax = min(-x(ind)./d(ind))-10*tol; % maximum step length
    end
    lambda = min(1.0, lmax); % initial step length
    xn = x + lambda * d; % trial step
    fn = h(xn); % new function value
    while norm(fn) >= norm(fx),
        lambda = lambda * 0.85; % downhill factor
        if lambda<tol, % too short steps
            error('too short step!!');
        end
        xn = x + lambda * d; % new value
        fn = h(xn);
    end
    x = xn;
    fx = fn;
    hist = [hist x];
end
disp('Newton Iteration fails!!');
%% end of Newton
```

读者需要提供同时返回函数值和导数值的MatLab函数文件。该文件如下文件h.m

```
function [y,G]=h(x)
%% propane combustion in the air
a = 0.193;
b = 0.002597;
```

```
c = 0.003448;
d = 0.00001799;
e = 0.0002155;
f = 0.00003846;
R = 4.056743;
S = sum(x);
% function value
y = zeros(10,1);
y( 1) = x(1) + x(4) - 3 ;
y( 2) = 2*x(1) + sum(x([2 4 7 8 9])) + 2*x(10) - R - 10 ;
y( 3) = 2*x(2) + 2*x(5) + x(6) + x(7) - 8 ;
y( 4) = 2*x(3) + x(5) - 4*R ;
y( 5) = x(1)*x(5) - a*x(2)*x(4) ;
y( 6) = x(6)*sqrt(x(2)) - b * sqrt( x(2)*x(4)*S ) ;
y( 7) = x(7)*sqrt(x(4)) - c * sqrt( x(1)*x(4)*S ) ;
y( 8) = x(4)*x(8) - d * x(2)*S ;
y( 9) = x(4)*x(9) - e * x(1)*sqrt( x(3)*S ) ;
y(10) = x(4)^2 * (x(10) - f * S) ;
if nargin<2, return; end % quick return
% gradient value
h6i = - b*sqrt(x(2)*x(4))/sqrt(S)/2 ; % i~=2,4
h62 = x(6)/sqrt(x(2))/2 ...
      - b*sqrt(x(4))*(S+x(2))/sqrt(x(2)*S)/2 ;
h64 = -b * sqrt(x(2)) * (x(4)+S)/sqrt(x(4)*S)/2 ;
h66 = sqrt(x(2)) + h6i ;
h7i = - c*sqrt(x(1)*x(4))/sqrt(S)/2 ; % i~=1,4
h71 = - c*sqrt(x(4))*(S+x(1))/sqrt(x(1)*S)/2 ;
h74 = x(7)/sqrt(x(4))/2 ...
      - c*sqrt(x(1))*(S+x(4))/sqrt(x(4)*S)/2 ;
h77 = sqrt(x(4)) + h7i ;
h8i = - d * x(2) ; % i~=2
h82 = - d * (S+x(2)) ;
h84 = x(8) + h8i ;
h88 = x(4) + h8i ;
h9i = -e * x(1)*sqrt(x(3))/sqrt(S)/2 ; % i~=1,3
h91 = -e * sqrt(x(3)*S) + h9i ;
h93 = -e * x(1)*sqrt(S/x(3))/2 + h9i ;
h94 = x(9) + h9i ;
h99 = x(4) + h9i ;
h0i = -f * x(4)^2 ;
h04 = 2*x(4)*( x(10) - f * S ) + h0i ;
h00 = x(4)^2 + h0i ;
```

```
G = [ 1      0      0      1      0      0      0      0      0      0 ;
      2      1      0      1      0      0      1      1      1      2 ;
      0      2      0      0      2      1      1      0      0      0 ;
      0      0      2      0      1      0      0      0      0      0 ;
      x(5) -a*x(4) 0 -a*x(2) x(1) 0 0 0 0 0 ;
      h6i    h62    h6i    h64    h6i    h66    h6i    h6i    h6i    h6i;
      h7i    h7i    h7i    h74    h7i    h7i    h77    h7i    h7i    h7i;
      h8i    h82    h8i    h84    h8i    h8i    h8i    h88    h8i    h8i;
      h9i    h9i    h93    h94    h9i    h9i    h9i    h9i    h99    h9i;
      h0i    h0i    h0i    h04    h0i    h0i    h0i    h0i    h0i    h00;
    ];
```

调用如下：

```
>> alpha = 0.5;
>> [x,fx,it] = propane(ones(10,1)*alpha)
```

求得方程的解及迭代步数如下

```
x = (2.9977,3.9861,8.1132,0.0023,0.0006,
      0.0005,0.0261,0.5897,3.4557,0.0007)
fx = 1.0e-018 * (0, 0, 0, 0, -0.2168, 0, 0, 0.2168, 0, 0.0000)
it = 11
```

其中alpha可以改成0.5:0.1:3.6中的任一值，迭代步数在11步到21步之间。从这里可以看到，牛顿法对初值还是有一定要求的。这个题目和前一题不一样的是，问题本身隐含着变量的非负性质，包括方程中含有根号。读者若用fsolve去尝试求解时会发现，MatLab的这个内部函数经常会带有虚部的解，实际上虚部已经非常小了，可以直接舍弃。调用如下：

```
>> alpha = 1.0
>> x = fsolve('h',ones(10,1)*alpha)
>> x = real(x)
```

从第二行命令中可以看到求出复根的情况，例如alpha=5时求得的解。

习题八

1. 用乘幂法求下列矩阵的按模最大特征值及相应的特征向量：

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

当特征值有三位小数稳定时迭代终止。

解：(1) 取 $v_0 = (1, 1, 1)^T$, 则 $u_0 = (1, 1, 1)^T$,

i	$v_i = Au_{i-1}$	P_i	u_i
1	$(7, 17, 10)^T$	17	$(0.4118, 1.0000, 0.5882)^T$
2	$(5.0000, 9.4706, 7.8235)^T$	9.4706	$(0.5280, 1.0000, 0.8261)^T$
3	$(5.7081, 11.5839, 8.4099)^T$	11.5839	$(0.4928, 1.0000, 0.7260)^T$
4	$(5.4375, 10.8316, 8.2043)^T$	10.8316	$(0.5020, 1.0000, 0.7574)^T$
5	$(5.5189, 11.0498, 8.2635)^T$	11.0498	$(0.4995, 1.0000, 0.7478)^T$
6	$(5.4946, 10.9859, 8.2462)^T$	10.9859	$(0.5001, 1.0000, 0.7506)^T$
7	$(5.5015, 11.0040, 8.2511)^T$	11.0040	$(0.5000, 1.0000, 0.7498)^T$
8	$(5.4996, 10.9987, 8.2497)^T$	10.9989	$(0.5000, 1.0000, 0.7500)^T$
9	$(5.5001, 11.0003, 8.2501)^T$	11.0003	$(0.5000, 1.0000, 0.7500)^T$
10	$(5.5000, 10.9999, 8.2500)^T$	11.0000	$(0.5000, 1.0000, 0.7500)^T$

因此矩阵的按模最大的特征值为11.0000, 对应的特征向量为 $(0.5000, 1.0000, 0.7500)^T$.

(2) 取 $v_0 = (1, 1, 1)^T$, 则 $u_0 = (1, 1, 1)^T$,

i	$v_i = Au_{i-1}$	P_i	u_i
1	$(2, 5, 7)^T$	7	$(0.2857, 0.7143, 1.0000)^T$
2	$(1.0000, 6.1429, 4.0000)^T$	6.1429	$(0.1628, 1.0000, 0.6512)^T$
3	$(-1.5581, 7.3023, 4.1395)^T$	7.3023	$(-0.2134, 1.0000, 0.5669)^T$
4	$(-2.9395, 8.5541, 2.9268)^T$	8.5541	$(-0.3436, 1.0000, 0.3421)^T$
5	$(-4.0045, 8.4010, 2.3112)^T$	8.4010	$(-0.4767, 1.0000, 0.2751)^T$
6	$(-4.6047, 8.7320, 1.8451)^T$	8.7320	$(-0.5273, 1.0000, 0.2113)^T$
7	$(-4.9481, 8.7432, 1.6293)^T$	8.7432	$(-0.5659, 1.0000, 0.1864)^T$
8	$(-5.1387, 8.8228, 1.4886)^T$	8.8228	$(-0.5824, 1.0000, 0.1687)^T$
9	$(-5.2412, 8.8359, 1.4214)^T$	8.8359	$(-0.5932, 1.0000, 0.1609)^T$
10	$(-5.2969, 8.8553, 1.3814)^T$	8.8553	$(-0.5982, 1.0000, 0.1560)^T$
11	$(-5.3265, 8.8606, 1.3615)^T$	8.8606	$(-0.6011, 1.0000, 0.1537)^T$
12	$(-5.3425, 8.8655, 1.3502)^T$	8.8655	$(-0.6026, 1.0000, 0.1523)^T$
13	$(-5.3509, 8.8673, 1.3445)^T$	8.8673	$(-0.6034, 1.0000, 0.1516)^T$
14	$(-5.3555, 8.8686, 1.3413)^T$	8.8686	$(-0.6039, 1.0000, 0.1512)^T$
15	$(-5.3579, 8.8692, 1.3396)^T$	8.8692	$(-0.6041, 1.0000, 0.1510)^T$

因此矩阵的按模最大的特征值为8.8692, 对应的特征向量为

$(-0.6041, 1.0000, 0.1510)^T$.

2. 用乘幂法求矩阵A的按模最大特征值, 取初值 $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

这是一个计算速度很慢的例子。(迭代1200次后, λ_1 仅取到精确四位小数)。

解: 请参见本章计算机实习题第1题。

3. 用反幂法求矩阵 A 的按模最小的特征值。其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解: 取 $v_0 = (1, 1, 1)^T$, 则 $u_0 = (1, 1, 1)^T$, 对 A 进行 LU 分解, 有

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

计算过程如下:

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{v_k}{\max(v_k)}, \\ Ly_k &= u_k, \\ Uv_{k+1} &= y_k, \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

结果如下表：

k	v_k	u_k	$\frac{1}{\max(v_k)}$
0	$(1, 1, 1)^T$	$(1, 1, 1)^T$	1
1	$(0.5000, -0.1667, 0.3333)^T$	$(1.0000, -0.3333, 0.6667)^T$	2
2	$(0.5000, -0.9444, 0.5556)^T$	$(-0.5294, 1.0000, -0.5882)^T$	-1.0588
3	$(-0.2647, 1.1275, -0.7255)^T$	$(-0.2348, 1.0000, -0.6435)^T$	0.8870
4	$(-0.1174, 0.9986, -0.7623)^T$	$(-0.1176, 1.0000, -0.7634)^T$	1.0015
5	$(-0.0588, 0.9799, -0.8423)^T$	$(-0.0600, 1.0000, -0.8595)^T$	1.0205
6	$(-0.0300, 0.9832, -0.9064)^T$	$(-0.0305, 1.0000, -0.9219)^T$	1.0171
7	$(-0.0153, 0.9892, -0.9479)^T$	$(-0.0154, 1.0000, -0.9583)^T$	1.0109
8	$(-0.0077, 0.9938, -0.9722)^T$	$(-0.0078, 1.0000, -0.9782)^T$	1.0062
9	$(-0.0039, 0.9966, -0.9855)^T$	$(-0.0039, 1.0000, -0.9888)^T$	1.0034
10	$(-0.0019, 0.9982, -0.9926)^T$	$(-0.0019, 1.0000, -0.9943)^T$	1.0018
11	$(-0.0010, 0.9991, -0.9962)^T$	$(-0.0010, 1.0000, -0.9971)^T$	1.0009
12	$(-0.0005, 0.9995, -0.9981)^T$	$(-0.0005, 1.0000, -0.9986)^T$	1.0005
13	$(-0.0002, 0.9998, -0.9990)^T$	$(-0.0002, 1.0000, -0.9993)^T$	1.0002
14	$(-0.0001, 0.9999, -0.9995)^T$	$(-0.0001, 1.0000, -0.9996)^T$	1.0001
15	$(-0.0001, 0.9999, -0.9998)^T$	$(-0.0001, 1.0000, -0.9998)^T$	1.0001
16	$(-0.0000, 1.0000, -0.9999)^T$	$(-0.0000, 1.0000, -0.9999)^T$	1.0000
17	$(-0.0000, 1.0000, -0.9999)^T$	$(-0.0000, 1.0000, -1.0000)^T$	1.0000
18	$(-0.0000, 1.0000, -1.0000)^T$	$(-0.0000, 1.0000, -1.0000)^T$	1.0000

因此矩阵 A 的按模最小特征值为1.0000.

4. 已知向量 $x = (1, 2, -2)^T$ ，分别用反射变换和平面旋转变换将其变为与单位向量 $e_1 = (1, 0, 0)^T$ 平行的向量。

解：用反射变换：

$$\alpha = \|x\|_2 = \sqrt{1 + 2^2 + (-2)^2} = 3, \quad y = \alpha \cdot e_1 = (3, 0, 0)^T.$$

构造Householder矩阵

$$H = I - 2 \frac{(x-y)(x-y)^T}{\|x-y\|_2^2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

易检验,

$$Hx = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y.$$

用平面旋转变换:

第一步, 作旋转矩阵

$$R(1, 2, \theta_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$z = R(1, 2, \theta_1)x = (\cos \theta_1 + 2 \sin \theta_1, -\sin \theta_1 + 2 \cos \theta_1, -2)^T.$$

取 θ_1 使 $-\sin \theta_1 + 2 \cos \theta_1 = 0$, 则 $\sin \theta_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 和 $\cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 于是得到 $z = (\sqrt{5}, 0, -2)$.

第二步, 作旋转矩阵

$$R(1, 3, \theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix},$$

则

$$y = R(1, 3, \theta_2)z = (\sqrt{5} \cos \theta_2 - 2 \sin \theta_2, 0, -\sqrt{5} \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_2)^T.$$

取 θ_2 使 $-\sqrt{5} \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_2 = 0$, 则 $\sin \theta_2 = -\frac{2}{3}$ 和 $\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 最后得到 $y = (3, 0, 0)^T$.

5. 用Householder变换把下面矩阵化成三对角形式:

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 8 & 0.25 & 0.5 & 2 & -1 \\ 0.25 & -4 & 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0 & 5 & 0.75 & -1 \\ 2 & 1 & 0.75 & 5 & -0.5 \\ -1 & 2 & -1 & -0.5 & 6 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

解: 设矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 为对称阵, 其中 $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T$, $(j = 1, 2, \dots, n)$.

第一步: 对 a_1 确定 u_1 , 使得 $H_1 a_1 = (I - 2u_1 u_1^T) a_1 = b_1$, 其中 $b_1 = (a_{11}, \sigma_1, 0, \dots, 0)^T$,

$$\sigma_1 = -\text{sign}(a_{21}) \left(\sum_{i=2}^n a_{i1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \text{令}$$

$$A_2 = H A_1 H^T = H A H^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_1 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix},$$

其中 $a_2^{(2)} = (a_{22}^{(2)}, \dots, a_{n2}^{(2)})^T$.

第二步: 对 $a_2^{(2)}$ 确定 u_2 , 使得 $\bar{H}_2 a_2^{(2)} = (I - 2u_2 u_2^T) a_2^{(2)} = b_2$, 其中 $b_2 = (a_{22}^{(2)}, \sigma_2, 0, \dots, 0)^T$,

$$\sigma_2 = -\text{sign}(a_{32}^{(2)}) \left(\sum_{i=3}^n (a_{i2}^{(2)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \text{再令}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{H}_2 \end{pmatrix},$$

则

$$A_3 = H_2 A_2 H_2^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_1 & \alpha_2 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}.$$

重复上述过程, 经过 $n-2$ 步, 得到初等反射阵 $H_1, H_2, \dots, H_{n-2}$, 使得 $T = H_{n-2} \cdots H_2 H_1 A H_1^T H_2^T \cdots H_{n-2}^T$, 实现了 A 的三对角化。

(1)

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071 & -0.7071 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1.4142 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 4 & 0 & 1.4142 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

最后得

$$T = A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1.4142 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 4 & 1.4142 & 0 \\ 0 & 1.4142 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7845 & -0.1961 & 0.5883 \\ 0 & -0.1961 & 0.9784 & 0.0647 \\ 0 & 0.5883 & 0.0647 & 0.8060 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2.5495 & 0 & 0 \\ 2.5495 & 6.3846 & -2.1366 & 0.1340 \\ 0 & -2.1366 & 4.1839 & -0.6812 \\ 0 & 0.1340 & -0.6812 & 4.4314 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9980 & 0.0626 \\ 0 & 0 & 0.0626 & -0.9980 \end{pmatrix},$$

最后得

$$T = A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2.5495 & 0 & 0 \\ 2.5495 & 6.3846 & 2.1408 & 0 \\ 0 & 2.1408 & 4.2700 & 0.6913 \\ 0 & 0 & 0.6913 & 4.3454 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 8 & 0.25 & 0.5 & 2 & -1 \\ 0.25 & -4 & 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0 & 5 & 0.75 & -1 \\ 2 & 1 & 0.75 & 5 & -0.5 \\ -1 & 2 & -1 & -0.5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1085 & -0.2169 & -0.8677 & 0.4339 \\ 0 & -0.2169 & 0.9575 & -0.1698 & 0.0849 \\ 0 & -0.8677 & -0.1698 & 0.3207 & 0.3396 \\ 0 & 0.4339 & 0.0849 & 0.3396 & 0.8302 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -2.3049 & 0 & 0 & 0 \\ -2.3049 & 5.9294 & -1.0938 & -0.5247 & 0.8860 \\ 0 & -1.0938 & 4.1916 & -1.9258 & -0.0293 \\ 0 & -0.5247 & -1.9258 & -3.4718 & 2.2671 \\ 0 & 0.8860 & -0.0293 & 2.2671 & 5.3509 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7281 & -0.3493 & 0.5898 \\ 0 & 0 & -0.3493 & 0.9294 & 0.1192 \\ 0 & 0 & 0.5898 & 0.1192 & 0.7987 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 8 & -2.3049 & 0 & 0 & 0 \\ -2.3049 & 5.9294 & 1.5023 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5023 & 1.7715 & 4.7944 & 0.9629 \\ 0 & 0 & 4.7944 & -0.6564 & 0.0071 \\ 0 & 0 & 0.9629 & 0.0071 & 4.9555 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.9804 & -0.1969 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1969 & 0.9804 \end{pmatrix},$$

最后得

$$T = A_4 = \begin{pmatrix} 8 & -2.3049 & 0 & 0 & 0 \\ -2.3049 & 5.9294 & 1.5023 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5023 & 1.7715 & -4.8902 & 0 \\ 0 & 0 & -4.8902 & -0.4361 & -1.0899 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0899 & 4.7352 \end{pmatrix}.$$

(4)

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1.4142 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 3.5 & -0.5 & 0 & -0.7071 \\ 0 & -0.5 & 3.5 & 2.8284 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 2.8284 & 8 & 3 \\ 0 & -0.7071 & 0.7071 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5774 & 0 & -0.8165 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8165 & 0 & 0.5774 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1.4142 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 3.5 & 0.8660 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8660 & 7.8333 & -4.0825 & -2.3570 \\ 0 & 0 & -4.0825 & 8 & -0.5774 \\ 0 & 0 & -2.3570 & -0.5774 & 4.6667 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8660 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.8660 \end{pmatrix},$$

最后得

$$T = A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1.4142 & 0 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 3.5 & 0.8660 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8660 & 7.8333 & 4.7140 & 0 \\ 0 & 0 & 4.7140 & 6.6667 & 1.7321 \\ 0 & 0 & 0 & 1.7321 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 用反射变换和平面旋转变换对 A 作 QR 分解。

解: 用反射变换作 QR 分解:

$$A_1 = A = (a_1, a_2, a_3).$$

第一步: 求 H_1 使 $H_1 a_1 = -\sigma_1 e_1$, 其中 $e_1 = (1, 0, 0)^T$.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \text{sign}(a_{11}) \left(\sum_{i=1}^3 a_{i1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} = 3, \\ u_1 &= \frac{a_1 + \sigma_1 e_1}{\|a_1 + \sigma_1 e_1\|_2} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right)^T, \\ H_1 &= I - 2u_1 u_1^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是可得

$$A_2 = H_1 A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

第二步: 令 $a_2^{(2)} = (0, -3)^T$, 求 $\bar{H}_2$, 使 $\bar{H}_2 a_2^{(2)} = -\sigma_2 e_2$, 其中 $e_2 = (1, 0)^T$.

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \text{sign}(a_{22}^{(2)}) \left(\sum_{i=2}^3 (a_{i2}^{(2)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0 + (-3)^2} = 3, \\ u_2 &= \frac{a_2^{(2)} + \sigma_2 e_2}{\|a_2^{(2)} + \sigma_2 e_2\|_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^T, \\ \bar{H}_2 &= I - 2u_2 u_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是得到

$$A_3 = H_2 H_1 A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = R.$$

$$A = (H_2 H_1)^{-1} R = QR, \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

用平面旋转变换作QR分解:

第一步: 求 $R_1 = R(1, 2, \theta_1)$ 使 $A_1 = R_1 A$, 其中 A_1 的第2行第1列 $a_{21}^{(1)} = 0$. 由

$$a_{21}^{(1)} = -\sin \theta_1 + 2 \cos \theta_1 = 0,$$

可得

$$\theta_1 = \arctan 2 \approx 1.107,$$

则

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.4472 & 0.8944 & 0 \\ -0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

和

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2.2361 & -0.4472 & -0.4472 \\ 0 & -1.3416 & -1.3416 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

第二步: 求 $R_2 = R(1, 3, \theta_2)$ 使 $A_2 = R_2 A_1$, 其中 A_2 的第3行第1列 $a_{31}^{(2)} = 0$. 由

$$a_{31}^{(2)} = -2.2361 \sin \theta_2 + 2 \cos \theta_2 = 0,$$

可得

$$\theta_2 = \arctan \frac{2}{2.2361} \approx 0.7297,$$

则

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0.7454 & 0 & 0.6667 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.6667 & 0 & 0.7454 \end{pmatrix},$$

和

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & -1.3416 & -1.3416 \\ 0 & -2.6833 & 4.0249 \end{pmatrix}.$$

第三步: 求 $R_3 = R(2, 3, \theta_3)$ 使 $A_3 = R_3 A_2$, 其中 A_3 的第3行第2列 $a_{32}^{(3)} = 0$. 由

$$a_{32}^{(3)} = 1.3416 \sin \theta_3 - 2.6833 \cos \theta_3 = 0,$$

可得

$$\theta_3 = \arctan \frac{2.6833}{1.3416} \approx 1.1072,$$

则

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4472 & 0.8944 \\ 0 & -0.8944 & 0.4472 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = R.$$

最后有

$$A = (R_3 R_2 R_1)^{-1} R = QR, \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. 用雅可比方法求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

的全部特征值及特征向量。

解: 按教材算法8.6计算, 结果如下:

R_k	A_k	H_k
$\begin{pmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 3 & -0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ -0.7071 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8881 & -0.4597 \\ 0 & 0.4597 & 0.8881 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0.3251 & -0.6280 \\ 0.3251 & 3.3660 & 0 \\ -0.6280 & 0 & 1.6340 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 \\ -0.6280 & 0.6280 & -0.4597 \\ -0.3251 & 0.3251 & 0.8881 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0.8517 & 0 & 0.5241 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5241 & 0 & 0.8517 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6136 & 0.2768 & 0 \\ 0.2768 & 3.3660 & -0.1704 \\ 0 & -0.1704 & 2.0204 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4318 & 0.7726 & 0.4654 \\ -0.6280 & 0.6280 & -0.4597 \\ -0.6474 & -0.0938 & 0.7563 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0.9951 & -0.0991 & 0 \\ 0.0991 & 0.9951 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5860 & 0 & 0.0169 \\ 0 & 3.3936 & -0.1695 \\ 0.0169 & -0.1695 & 2.0204 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4919 & 0.7066 & 0.5087 \\ -0.5821 & 0.7014 & -0.4113 \\ -0.6474 & -0.0938 & 0.7563 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9927 & -0.1207 \\ 0 & 0.1207 & 0.9927 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5860 & -0.0020 & 0.0168 \\ -0.0020 & 3.4142 & 0 \\ 0.0168 & 0 & 1.9998 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.4919 & 0.7066 & 0.5087 \\ -0.4997 & 0.7076 & -0.4996 \\ -0.7130 & -0.0084 & 0.7011 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0.9999 & 0 & -0.0119 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.0119 & 0 & 0.9999 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5858 & -0.0020 & 0 \\ -0.0020 & 3.4142 & -0.0001 \\ 0 & -0.0001 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5004 & 0.7066 & 0.5003 \\ -0.4997 & 0.7076 & -0.4996 \\ -0.7071 & 0 & 0.7071 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0.0007 & 0 \\ -0.0007 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5858 & 0 & 0 \\ 0 & 3.4142 & -0.0001 \\ 0 & -0.0001 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.7071 & 0.5 \\ -0.5 & 0.7071 & -0.5 \\ -0.7071 & 0 & 0.7071 \end{pmatrix}$

由上表可知

$$\lambda_1 = 0.5858, \quad \lambda_2 = 3.4142, \quad \lambda_3 = 2;$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.7071 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.7071 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -0.7071 \\ 0 \\ 0.7071 \end{pmatrix}.$$

8. 用QR方法去求下列矩阵的特征值：

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

解：(1) 令 $A_1 = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ，进行QR分解，

$$\begin{aligned} A &= A_1 = Q_1 R_1 \\ &= \begin{pmatrix} -0.8944 & -0.2491 & -0.3714 \\ 0.4472 & -0.4983 & -0.7428 \\ 0 & -0.8305 & 0.5571 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} -2.2361 & 0.4472 & -0.8944 \\ 0 & 2.4083 & -1.4948 \\ 0 & 0 & 3.1568 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

然后，求得 $A_2 = R_1 Q_1$ ，再对 A_2 进行QR分解，一直进行下去，得到

$$A_{200} = \begin{pmatrix} 3.9115 & 0 & 0 \\ 0 & 2.1295 & -0.0007 \\ 0 & -0.0007 & -2.0410 \end{pmatrix}.$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 3.9115$, $\lambda_2 = 2.1295$, $\lambda_3 = -2.0410$.

(2) 令 $A_1 = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ，进行QR分解，

$$\begin{aligned} A &= A_1 = Q_1 R_1 \\ &= \begin{pmatrix} -0.9487 & 0.2741 & 0.1576 \\ -0.3162 & -0.8224 & -0.4729 \\ 0 & -0.4984 & 0.8669 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} -3.1623 & -2.2136 & -0.6325 \\ 0 & -4.0125 & -3.1402 \\ 0 & 0 & 1.6550 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

然后, 求得 $A_2 = R_1 Q_1$, 再对 A_2 进行 QR 分解, 一直进行下去, 得到

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 5.7913 & 0.0009 & 0 \\ 0.0009 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2087 \end{pmatrix}.$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 5.7913, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1.2087$.

$$(3) \text{ 令 } A_1 = A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ 进行 } QR \text{ 分解,}$$

$$\begin{aligned} A &= A_1 = Q_1 R_1 \\ &= \begin{pmatrix} -0.8944 & 0.3586 & -0.1952 & 0.1231 & 0.1348 \\ -0.4472 & -0.7171 & 0.3904 & -0.2462 & -0.2697 \\ 0 & -0.5976 & -0.5855 & 0.3693 & 0.4045 \\ 0 & 0 & -0.6831 & -0.4924 & -0.5394 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7385 & 0.6742 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -4.4721 & -3.5777 & -0.8944 & 0 & 0 \\ 0 & -3.3466 & -3.8247 & -1.1952 & 0 \\ 0 & 0 & -2.9277 & -3.9036 & -1.3663 \\ 0 & 0 & 0 & -2.7080 & -3.9389 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6181 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

然后, 求得 $A_2 = R_1 Q_1$, 再对 A_2 进行 QR 分解, 一直进行下去, 得到

$$A_{40} = \begin{pmatrix} 7.4641 & 0.0005 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0005 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5359 \end{pmatrix}.$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 7.4641, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = 0.5359$.

$$(4) \text{ 令 } A_1 = A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 进行 } QR \text{ 分解,}$$

$$\begin{aligned} A &= A_1 = Q_1 R_1 \\ &= \begin{pmatrix} -0.9806 & -0.1959 & 0.0086 & 0.0033 & 0.0012 \\ 0.1961 & -0.9795 & 0.0431 & 0.0163 & 0.0062 \\ 0 & -0.0474 & -0.9261 & -0.3499 & -0.1330 \\ 0 & 0 & 0.3748 & -0.8667 & -0.3293 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3552 & 0.9348 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -5.0990 & 1.8631 & 0.0392 & 0 & 0 \\ 0 & -4.2212 & -0.2433 & 0.0190 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0674 & 1.4947 & 0.3748 \\ 0 & 0 & 0 & -2.8152 & -1.9323 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.4750 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

然后, 求得 $A_2 = R_1 Q_1$, 再对 A_2 进行QR分解, 一直进行下去, 得到

$$A_{120} = \begin{pmatrix} 5.7840 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.0274 & 0.0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0006 & 3.7276 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8903 \end{pmatrix}.$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 5.7840, \lambda_2 = 4.0274, \lambda_3 = 3.7276, \lambda_4 = 2.0707, \lambda_5 = 0.8903$.

计算机实习题

1. 求出下面矩阵的特征值

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

解：在命令窗口输入：

```
>> a = [2 1 3 4; 1 -3 1 5; 3 1 6 -2; 4 5 -2 -1];  
>> qrmaxtr(a, 0.0001)'
```

则输出结果为

```
ans =  
-8.0257    7.9300    5.6689   -1.5732
```

2. 求出下面非对称矩阵的特征值

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 18 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

解：在命令窗口输入：

```
>> a = [8 -1 -5; -4 4 -2; 18 -5 -7];  
>> qrmaxtr(a, 0.0001)'
```

特征值为：

```
ans =  
1.6408    2.3592    1.0000
```

3. 确定下面 $n = 20$ 维矩阵的特征值

$$A = (a_{ij}) = \left[\frac{1}{i+j-1} \right], \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

解：在命令窗口输入：

```
>> a = hilb(20);  
>> qrmaxtr(a, 0.001)'
```

输出结果为:

```
ans =  
    1.9071    0.4871    0.0756    0.0090    0.0009    0.0001    0.0000  
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000  
   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
```

4. 设 $(m-1) \times (m-1)$ 维的三对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix}$$

它是用向后差分方法求解热传导方程得到的。当 $\rho(A^{-1}) < 1$ 时, 此方法是稳定的。若 $m = 11$, 求下面各种情况下 $\rho(A^{-1})$ 的近似值:

$$(1) \alpha = \frac{1}{4}; \quad (2) \alpha = \frac{1}{2}; \quad (3) \alpha = \frac{3}{4}.$$

解: 编写程序如下:

```
function [rho,t] = ex812(alpha,m)  
    a = diag(ones(1,m-1))*(1+2*alpha)...  
        + diag(ones(1,m-2),+1)*(-alpha)...  
        + diag(ones(1,m-2),-1)*(-alpha);  
    t = qrmaxtr(inv(a), 0.0001)';  
    rho = max(abs(t));
```

在命令行中运行

```
>> ex812(1/4,11)  
>> ex812(1/2,11)  
>> ex812(3/4,11)
```

则分别显示三个矩阵的谱半径为 0.9800, 0.9611 和 0.9427。因此三个方法都是稳定的。读者可以修改程序显示计算过程中的矩阵和它的所有特征值, 例如当 $m = 11$, $\alpha = \frac{1}{4}$ 时, 有

```
a =
    1.50 -0.25  0      0      0      0      0      0      0      0
   -0.25  1.50 -0.25  0      0      0      0      0      0      0
    0     -0.25  1.50 -0.25  0      0      0      0      0      0
    0      0    -0.25  1.50 -0.25  0      0      0      0      0
    0      0      0    -0.25  1.50 -0.25  0      0      0      0
    0      0      0      0    -0.25  1.50 -0.25  0      0      0
    0      0      0      0      0    -0.25  1.50 -0.25  0      0
    0      0      0      0      0      0    -0.25  1.50 -0.25  0
    0      0      0      0      0      0      0    -0.25  1.50 -0.25
    0      0      0      0      0      0      0      0    -0.25  1.50
```

和

```
t =
    0.9801    0.9264    0.8528    0.7738    0.6999
    0.6365    0.5856    0.5471    0.5204    0.5055
```

5. 在第4题中矩阵A的特征值是 $\lambda_i = 1 + 4\alpha \left(\sin \frac{\pi i}{2m}\right)^2, i = 1, 2, \dots, m-1$. 试比较准确值与近似值，此方法什么时候稳定？

解：在命令行中运行

```
>> m=11;
>> for alpha = 1/4:1/4:3/4,
    [rho,t] = ex812(alpha,m);
    t2      = 1 + 4 * alpha * sin(pi/2/m*(1:m-1)).^2;
    [1./t;t2]'
    pause
end
```

则可以看到各情况下的近似值和准确值，如下表

$\alpha = 1/4$		$\alpha = 1/2$		$\alpha = 3/4$	
近似值	准确值	近似值	准确值	近似值	准确值
1.0204	1.0203	1.0405	1.0405	1.0608	1.0608
1.0792	1.0794	1.1587	1.1587	1.2381	1.2381
1.1725	1.1726	1.3451	1.3451	1.5177	1.5177
1.2923	1.2923	1.5846	1.5846	1.8769	1.8769
1.4289	1.4288	1.8577	1.8577	2.2865	2.2865
1.5712	1.5712	2.1424	2.1423	2.7135	2.7135
1.7082	1.7077	2.4159	2.4154	3.1238	3.1231
1.8292	1.8274	2.6576	2.6549	3.4865	3.4823
1.9225	1.9206	2.8452	2.8413	3.7680	3.7619
1.9749	1.9797	2.9510	2.9595	3.9259	3.9392

因此在这三种情况下，此方法都是稳定的。

6. 设 $(m-1) \times (m-1)$ 维的三对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1-2\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1-2\alpha \end{bmatrix}$$

它是用向前差分方法求解热传导方程得到的。当 $\rho(A^{-1}) < 1$ 时，此方法是稳定的。若 $m = 11$ ，求下面各种情况下 $\rho(A^{-1})$ 的近似值：

$$(1) \alpha = \frac{1}{4}; \quad (2) \alpha = \frac{1}{2}; \quad (3) \alpha = \frac{3}{4}.$$

解：编写程序如下：

```
function [rho,t] = ex814(alpha,m)
a = diag(ones(1,m-1))*(1-2*alpha)...
    + diag(ones(1,m-2),+1)*alpha...
    + diag(ones(1,m-2),-1)*alpha;
t = qrmaxtr(inv(a), 0.0001)';
rho = max(abs(t));
```


在命令行中运行

```
>> ex814(1/4,11)
>> ex814(1/2,11)
>> ex814(3/4,11)
```

显示它们的谱半径分别为49.3742, 0和8.1120. 但实际上, 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 该矩阵所有特征值都成符号相反的几对, 因此QR算法是不收敛的。改用`1./eig(a)`可以看到, 它的谱半径实际上是7.0267. 因此这三种情况都是不稳定的。

7. 第6题中矩阵 A 的特征值是 $\lambda_i = 1 - 4\alpha \left(\sin \frac{\pi i}{2m}\right)^2, i = 1, \dots, m-1$. 试比较准确值与近似值, 此方法什么时候稳定?

解: 在第6题中矩阵 A 的特征值是 $\lambda_i = 1 - 4\alpha \left(\sin \frac{\pi i}{2m}\right)^2, i = 1, 2, \dots, 10$. 则有下面的表格:

$\alpha = 1/4$		$\alpha = 1/2$		$\alpha = 3/4$	
近似值	准确值	近似值	准确值	近似值	准确值
0.9792	0.9755	0.9595	0.9511	0.9392	0.9266
0.9211	0.9045	0.8413	0.8090	0.7619	0.7135
0.8750	0.7939	0.6549	0.5878	0.4823	0.3817
0.7071	0.6545	0.4154	0.3090	0.1231	-0.0365
0.5712	0.5000	0.1423	0.0000	-0.2865	-0.5000
0.4288	0.3455	-0.1423	-0.3090	-0.7135	-0.9635
0.2923	0.2061	-0.4154	-0.5878	-1.1231	-1.3817
0.1726	0.0955	-0.6549	-0.8090	-1.4823	-1.7135
0.0794	0.0245	-0.8413	-0.9511	-1.7619	-1.9266
0.0203	0.0000	-0.9595	1.0000	-1.9392	-2.0000

因此在这三种情况下, 此方法都是不稳定的。

8. 设 $(m-1) \times (m-1)$ 维的两个三对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha & \frac{\alpha}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

它是用Crank-Nicolson方法求解热传导方程得到的。若 $m = 11$, 求下列情况下 $\rho(A^{-1}B)$ 的近似值:

$$(1) \alpha = \frac{1}{4}; \quad (2) \alpha = \frac{1}{2}; \quad (3) \alpha = \frac{3}{4}.$$

解: 编写程序如下:

```
function [rho,t] = ex816(alpha,m)
a = diag(ones(1,m-1))*(1+alpha) ...
    - diag(ones(1,m-2),+1)*alpha/2 ...
    - diag(ones(1,m-2),-1)*alpha/2;
b = 2 * eye(m-1) - a;
t = qrmaxtr(a\b, 0.0001)';
rho = max(abs(t));
```

在命令行中运行

```
>> ex816(1/4,11)
>> ex816(1/2,11)
>> ex816(3/4,11)
```

显示它们的谱半径分别为0.9793, 0.9600和0.9410. 因此, 当 $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{4}$ 时, $\rho(A^{-1}B) < 1$, 方法稳定。

习题九

1. 取 $h = 0.1$, 用欧拉方法在 $0 \leq x \leq 1$ 上求解初值问题

$$y' = -y + x + 1, \quad y(0) = 1.$$

解: 欧拉公式为

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(-y_n + x_n + 1) \\ &= 0.9y_n + 0.1x_n + 0.1, \end{aligned}$$

此题的MatLab程序为: 1) ef1.m文件如下

```
function z = ef1(x,y)
    z = -y+x+1;
```

2) euler.m 文件如下

```
function y=euler(ef,y0,h,a,b)
    y(:,1) = y0;
    n      = (b-a)/h;
    x      = a:h:b;
    for i   = 1:n,
        y(:,i+1) = y(:,i) + h*feval(ef, x(i), y(:,i));
    end
```

3) 在命令窗口执行

```
>> y = euler(@ef1, 1, 0.1, 0, 1)
```

就可以得到数值解。此题的解析解可如下求得: 原方程为 $y' = -y + x + 1$, 令 $z = y - x$, 则 $z' = y' - 1$, 原方程变为 $z' = -z$, 即 $\frac{dz}{dx} = -z$. 分离变量得 $\frac{dz}{z} = -dx$. 两边积分后有 $\ln z - \ln z_0 = -(x - x_0)$, 两边取指数 $z = z_0 e^{-(x-x_0)}$, 把 $z = y - x$ 代入上式, 最后得 $y = x + (y_0 - x_0)e^{-(x-x_0)}$. 把 $x_0 = 0, y_0 = 1$ 代入则有 $y = x + e^{-x}$. 因此有下面的表格(不含初值):

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
数值解	1.0000	1.0100	1.0290	1.0561	1.0905	1.1314	1.1783	1.2305	1.2874	1.3487
解析解	1.0048	1.0187	1.0408	1.0703	1.1065	1.1488	1.1966	1.2493	1.3066	1.3679

2. 取 $h = 0.1$, 用Adams预估校正方法在 $0 \leq x \leq 1$ 上求解初值问题

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

解：Adams预估校正方法公式如下

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9\bar{f}_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \end{cases}$$

编写MatLab程序如下：1)ef2.m文件如下

```
function z = ef2(x,y)
    z = (y.*y).*x;
```

2)adams.m文件如下

```
function y = adams(ef,y0,n,a,b)
    h = (b-a)/(n-1);
    x = a:h:b;
    c1 = [-9,37,-59,55];
    c2 = [ 1,-5, 19, 9];
    [xa,y] = ode45(ef,a:h:a+3*h,y0);
    f = feval(ef,xa,y);
    for j = 5:n,
        yb = y(j-1) + h/24 * c1 * f(j-4:j-1);
        fb = feval(ef,x(j),yb);
        y(j) = y(j-1) + h/24 * c2 * [f(j-3:j-1); fb];
        f(j) = feval(ef,x(j),y(j));
    end
    % end
```

3) 在命令窗口执行

```
>> y = adams(@ef2,1,11,0,1)
```

此题的解析解可如下求解。原方程为 $y' = xy^2$ ，分离变量得 $\frac{dy}{y^2} = xdx$ ，即 $-dy^{-1} = \frac{1}{2}dx^2$ ，式子两边积分有： $y^{-1} - y_0^{-1} = -\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$ ，所以 $y^{-1} = y_0^{-1} - \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$ 。因此

$$y = \frac{1}{y_0^{-1} - \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)}.$$

把初值 $x_0 = 0$ 和 $y_0 = 1$ 代入， $y = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{2 - x^2}$ 。

结果如下(不含初值):

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
数值解	1.0050	1.0204	1.0471	1.0870	1.1429	1.2196	1.3246	1.4707	1.6809	2.0005
解析解	1.0050	1.0204	1.0471	1.0870	1.1429	1.2195	1.3245	1.4706	1.6807	2.0000

3. 取 $h = 0.1$, 用4阶R-K方法在 $0 \leq x \leq 1$ 上求解初值问题

$$y' = y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

解：四阶R-K方法如下

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{aligned}$$

编写MatLab程序如下：1)文件ef3.m如下：

```
function z=ef3(x,y)
    z = y - 2*x./y;
```

2)文件rk4.m如下：

```
function y = rk4(ef,y0,h,a,b)
y(:,1)=y0;
n = (b-a)/h;
x = a:h:b;
c1= [1;2;2;1]/6;
for i = 1:n,
    k(:,1) = h*fefval(ef,x(i), y(:,i));
    k(:,2) = h*fefval(ef,x(i)+0.5*h,y(:,i)+0.5*k(:,1));
    k(:,3) = h*fefval(ef,x(i)+0.5*h,y(:,i)+0.5*k(:,2));
    k(:,4) = h*fefval(ef,x(i)+ h,y(:,i)+ k(:,3));
    y(:,i+1) = y(:,i) + k*c1;
end
```

3)在命令窗口执行

```
>> y = rk4(@ef3,1,0.1,0,1)
```

此题的解析解如下。原方程两边乘以 y 得 $yy' = y^2 - 2x$, 把 y 放进积分符号后有 $\frac{dy^2}{dx} = 2y^2 - 4x$, 令 $y^2 - 2x - 1 = z$, 于是 $\frac{dz}{dx} = 2z$. 分离变量 $\frac{dz}{z} = 2dx$, 两边积分 $z = z_0 e^{2(x-x_0)}$. 因为 $z_0 = y^2(0) - 2x(0) - 1 = 1 - 1 = 0$, 所以 $z \equiv 0$, 即 $y^2 = 2x + 1$, 也即 $y = \sqrt{2x + 1}$. 结果如下(不含初值):

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
数值解	1.0954	1.1832	1.2649	1.3416	1.4142	1.4832	1.5492	1.6125	1.6733	1.7321
解析解	1.0954	1.1832	1.2649	1.3416	1.4142	1.4832	1.5492	1.6125	1.6733	1.7321

可以看到, 计算结果在四位小数完全一致。

4. 证明: 龙格-库塔公式(9.29)具有3阶精度。

证: 龙格-库塔公式(9.29)为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) \end{cases}$$

把解析解 $y(x_n)$, $y(x_{n+1})$ 代入(9.29)中的 y_n , y_{n+1} 由定义知

$$\varepsilon_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{1}{6}(\bar{k}_1 + 4\bar{k}_2 + \bar{k}_3).$$

记 $f = f(x_n, y(x_n))$, 于是

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= hf(x_n, y(x_n)) = hf, \\ \bar{k}_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{\bar{k}_1}{2}), \\ \bar{k}_3 &= hf(x_n + h, y(x_n) - \bar{k}_1 + 2\bar{k}_2). \end{aligned}$$

由教材(9.23)知:

$$\begin{aligned} \bar{k}_2 &= hf + h^2(\frac{1}{2}f_x + \frac{1}{2}ff_y) + h^3(\frac{1}{8}f_{xx} + \frac{1}{4}ff_{xy} + \frac{1}{8}f^2f_{yy}) + O(h^4), \\ \bar{k}_3 &= hf + h^2(f_x + ff_y) + h^3(\frac{1}{2}f_{xx} + ff_{xy} + \frac{1}{2}f^2f_{yy} + f_xf_y + ff_y^2) + O(h^4). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & y(x_n) + \frac{1}{6}(\bar{k}_1 + 4\bar{k}_2 + \bar{k}_3) \\ &= y(x_n) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + \frac{h^3}{6}(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2f_{yy} + f_xf_y + ff_y^2) + O(h^4) \end{aligned}$$

(9.24)减去上式, 即得

$$\varepsilon_{n+1} = O(h^4).$$

故库塔公式(9.29)具有3阶精度。

5. 试对公式(9.29)用MatLab语言编程并计算如下初值问题:

$$\begin{cases} x' = tx + y' - t^2, & x(0) = 1, \\ y' = ty + 3t, & y(0) = 2, \\ z' = tz - y' + 6t^3, & z(0) = 3. \end{cases}$$

其中 $0 < t < 0.75$, 取 $h = 0.01$.

解: 原方程组可化为

$$\begin{cases} x' = tx + ty + 3t - t^2, \\ y' = ty + 3t, \\ z' = tz - ty - 3t + 6t^3. \end{cases}$$

记 $w = (x, y, z)^T$ 和

$$f(t, w) = t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 3t - t^2 \\ 3t \\ -3t + 6t^3 \end{bmatrix}.$$

因此, $\frac{dw}{dt} = f(t, w)$.

编写MatLab程序如下: 1) 文件ef5.m如下:

```
function z = ef5(t,w)
    A = [1 1 0; 0 1 0; 0 -1 1];
    b = [3*t-t^2; 3*t; -3*t+t^3];
    z = t*A*w + b;
```

2) 文件kt3.m如下:

```
function y = kt3(ef,y0,h,a,b)
    y(:,1)=y0;
    n = (b-a)/h;
    x = a:h:b;
    c1= [1 4 1]';
```

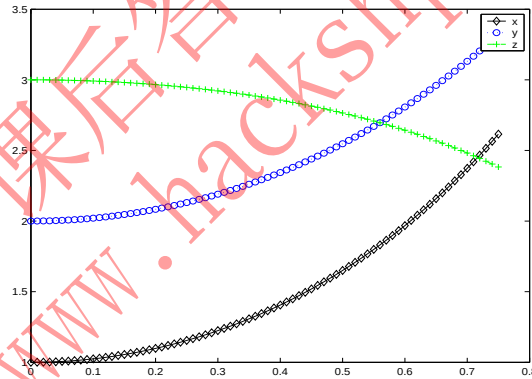
```
for i=1:n,
    k(:,1) = h*feval(ef,x(i),      y(:,i)      );
    k(:,2) = h*feval(ef,x(i)+0.5*h,y(:,i)+0.5*k(:,1));
    k(:,3) = h*feval(ef,x(i)*h,    y(:,i)-k(:,1)+2*k(:,2));
    y(:,i+1) = y(:,i) + k*c1/6;
end
```

在命令窗口执行

```
>> y0 = [1 2 3]';
>> y = kt3(@ef5,y0,0.01,0,0.75)
```

得到的解是一个 3×76 的矩阵, 每一行分别代表 x, y, z . 用下面的命令可以得到数值解的图:

```
>> t = linspace(0,0.75,76);
>> plot(t,y(1,:), 'kd-', t,y(2,:), 'bo:', t,y(3,:), 'g+--');
>> legend('x', 'y', 'z');
```



该方程的解析解可以求解如下。在第2个方程中令 $\bar{y} = y + 3$, 则 $\bar{y}' = y' = t\bar{y}$, 即 $\frac{d\bar{y}}{\bar{y}} = tdt$. 因此, $\ln \bar{y} - \ln \bar{y}_0 = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2)$, 把初值 $t_0 = 0$, $\bar{y}_0 = y_0 + 3 = 5$ 代入, 即得 $y(t) = 5e^{\frac{1}{2}t^2} - 3$.

6. 用微分求积法求解两点边值问题

$$y'' - xy' + y = 1 \quad y(0) = y(2) = 0$$

解： 作坐标变换 $x = 2t$ $Y(t) = y(x)$

原方程化为

$$\begin{cases} Y'' - 4tY' + 4Y = 4 \\ Y(0) = Y(1) = 0 \end{cases}$$

记 $t_j = \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{j\pi}{n})$ $0 \leq j \leq n$ 为 $[0, 1]$ 上的高斯-切比雪夫-罗巴托节点， W 与 Q 分别为 V 的一阶导数与二阶导数的系数矩阵

则由(9.95)由于 $Y_1 = Y(t_0) = 0$, $Y_3 = Y(t_n) = 0$

故 $(Q_{22} - 4\text{diag}([t_1 \cdots t_{n-1}])W_{22} + 4I_{n-1})Y_2 = 4[1, \cdots, 1]^T$

本题的Matlab程序如下

1)生成系数矩阵与节点的模块 dqxs.m

```
function [ca,cb,x]=dqxs(n)
c1=[1:n];
c2=cos((c1-1)*pi/(n-1));
x=0.5*(1-c2);
xp1=ones(n,1); xp2=xp1*x;
xp3=xp2-xp2'+eye(n); xp4=prod(xp3);
xp5=1./xp3-eye(n); xp6=sum(xp5);
xp7=xp1*xp4; xp8=xp7.*xp3';
ca=xp7'./xp8; xp9=xp6'-diag(ca);
ca=ca+diag(xp9); cb=ca*ca;
```

2)计算Y的模块 ef6.m

```
n=11; n2=n-2; n1=n-1;
[Q,W,x]=dqxs(n);
A=Q(2:n1,2:n1)-4*diag(x(2:n1))*W(2:n1,2:n1)+4*eye(n2);
b=4*ones(n2,1);
Y=A\b;
xx=2*x; yy=[0;Y;0];
```

3)在命令窗口调用上述函数模块 即

```
>>ef6
```

```
>>xx
```

```
>>yy
```

即得相应的 x 与 y 。

7. 用微分求积法求解两点边值问题

$$y'' = (1 + x^2)y \quad y(-1) = y(1) = 1$$

解： 作坐标变换 $x = 2t - 1$ $Y(t)=y(x)$,

$$\therefore Y_t = y_x x_t = 2y_x \quad Y_{tt} = 2Y_{xt} = 4y_{xx}$$

$\therefore$ 原方程化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}Y'' &= (1 + (2t - 1)^2)Y \\ Y'' - (16t^2 - 16t + 8)Y &= 0 \\ Y(0) &= Y(1) = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

记 $t_j = \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{2j\pi}{n})$ $0 \leq j \leq n$ 为 $[0, 1]$ 上的高斯-切比雪夫-罗巴托节点， W 与 Q 分别为 V 的一阶导数与二阶导数的系数矩阵，则由教材(9.95)

$$Y_1 = Y(t_0) = 1, \quad Y_3 = Y(t_n) = 1$$

$$\text{令 } t1 = [t_1, \dots, t_{n-1}], \quad t2 = -16 * (t1 * t1 - t1 + 0.5)$$

$t2$ 即 B_2

故由(9.95)得方程(1)即可离散为

$$(Q_{22} + \text{diag} B_2)Y_2 = -Q_{21} - Q_{23}$$

本题的Matlab程序如下：

1)dqxs.m见第6题

2)计算 Y 的模块 ef7.m

```
n=11;
```

```
n2=n-2;  n1=n-1;  
[Q,W,x]=dqxs(n);  
t1=x(2:n1);  
t2=-16*(t1.*t1-t1+0.5);  
A=Q(2:n1,2:n1)+diag(t2);  
b=-Q(2:n1,1)-Q(2:n1,n);  
Y=A\b;  
xx=2*x-1;  yy=[1;Y;1];
```

3)在命令窗口

```
>>ef7  
>>xx  
>>yy
```

即得相应的 x 与 y 。

8. 把常微分方程组初值问题

$$\begin{cases} x'' + x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = 0 \\ y'' + y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} x(0) &= 0.5 & y'(0) &= 0.75 \\ y(0) &= 0.25 & x'(0) &= 1.0 \end{aligned}$$

转换成一阶微分方程组并用ODE45求解 $x(1)$, $y(1)$

解: 记 $z(1) = x$, $z(2) = x'$, $z(3) = y$, $z(4) = y'$, 则

$$\begin{cases} \frac{dz(1)}{dt} = z(2) \\ \frac{dz(2)}{dt} = -z(1)(z^2(1) + z^2(3))^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{dz(3)}{dt} = z(4) \\ \frac{dz(4)}{dt} = -z(3)(z^2(1) + z^2(3))^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

此题的Matlab程序如下

1)ef81.m文件

```
function f=ef81(t,z)
w=(z(1)*z(1)+z(3)*z(3))^( -1.5);
f(1)=z(2);
f(2)=-z(1)*w;
f(3)=z(4);
f(4)=-z(3)*w;
```

2)ef82.m文件

```
t0=0;
tfinal=1;
z0=[0.5 0.75 0.25 1.0];
tol=1.e-5;
[t,z]=ode45(@ef81,t0,tfinal,z0,tol);
x=z(:,1); y=z(:,3);
x
y
```

3)在命令窗口运用ef82文件

```
>>ef82
```

即得 x 与 y , x 与 y 的最后一个分量即 $x(1)$, $y(1)$ 。

9. 试用Matlab编程求解如下问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & a \leq x \leq b \\ Ay(a) + By(b) = C \quad (\text{其中 } A \cdot B \neq 0) \end{cases}$$

并对 $f(x, y) = \frac{e^{x-y} - 1}{x}$, $a = 1$ $b = 2$ $A = 2$ $B = -1$ $C = \ln 2$ 用该程序计算。

解: 作坐标变换 $x = a + (b - a)t$

于是

$$y(x) = z(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{b-a} \frac{dz}{dt}$$

记 $g(t, z) = (b-a)f(x, y) = (b-a)f(a + (b-a)t, z)$

$$\text{则 } g(t, z) = (b-a) \frac{e^{a+(b-a)t-z} - 1}{a + (b-a)t} = \frac{e^{a+(b-a)t} \cdot e^{-z} - 1}{\frac{a}{b-a} + t}$$

$$\begin{cases} z' = g(t, z) & 0 \leq t \leq 1 \\ Az(0) + Bz(1) = C \end{cases}$$

在 $t \in [0, 1]$ 中取高斯-切比雪夫-罗巴托节点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

其中 $z_1 = z(t_0) = z(0)$, $z_3 = z(t_n) = z(1)$, $z_2 = [z(t_1), \cdots, z(t_{n-1})]^T$, $T_1 = t_0$, $T_3 = t_n$, $T_2 = [t_1, \cdots, t_{n-1}]^T$.

$z' = g(t, z)$ 用 Matlab 离散得 $W \cdot Z = g(T, Z)$

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(T_1, z_1) \\ g(T_2, z_2) \\ g(T_3, z_3) \end{bmatrix}$$

把第一个方程换成边界条件得

$$\begin{cases} Az_1 + Bz_3 = C & (9.1) \\ W_{21}z_1 + W_{22}z_2 + W_{23}z_3 = g(T_2, z_2) & (9.2) \\ W_{31}z_1 + W_{32}z_2 + W_{33}z_3 = g(T_3, z_3) & (9.3) \end{cases}$$

设 $A \cdot B \neq 0$ 由 (9.1) 得

$$z_1 = \frac{C}{A} - \frac{B}{A}z_3 \quad (9.1)'$$

代入 (9.2), (9.3)

$$W_{21} \frac{C}{A} - W_{21} \frac{B}{A} z_3 + W_{22} z_2 + W_{23} z_3 = g(T_2, z_2)$$

$$W_{31} \frac{C}{A} - W_{31} \frac{B}{A} z_3 + W_{32} z_2 + W_{33} z_3 = g(T_3, z_3)$$

$$\text{记 } p = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad s = \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} W_{22} & W_{23} - W_{21} \frac{B}{A} \\ W_{32} & W_{33} - W_{31} \frac{B}{A} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} W_{21} \frac{C}{A} \\ W_{31} \frac{C}{A} \end{bmatrix}$$

则 $A_1 P + F = g(S, P)$, $h(P) = A_1 P + F - g(S, P) = 0$

$$\text{取初值 } p_0 = \begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} \quad \text{求解非线性方程组 } h(p) = 0$$

得解 p 再由(9.1)'求出 z_1 即可求出各节点处的 z , 再由 $y(x) = z(t)$ 得到 y .

本题的Matlab程序如下:

1)ef91.m文件如下

```
function y=ef91(t,z,a,b)
c=b-a; d=a+c*t; e=c/d;
y=(exp(d-z)-1)*e;
```

2)ef92.m文件如下

```
function y=ef92(P)
global W21 W22 W23 W31 W32 W33 A B C a b T2 T3
m=length(W23); mp1=m+1;
A(1:m,1:m)=W22;
A(1:m,mp1)=W23-W21*B/A;
A(mp1,1:m)=W32;
A(mp1,mp1)=W33-W31*B/A;
F(1:m,1)=W21*C/A;
F(mp1,1)=W31*C/A;
S(1:m,1)=T2;
S(mp1,1)=T3;
```

```
gg=ef91(S,P,a,b);  
y=A*P+F-gg;
```

3)ef93.m文件如下

```
global A B C a b W21 W22 W23 W31 W32 W33 T2 T3  
A=2; B=-1; C=log(2); a=1; b=2;  
n=10; nm1 = n - 1;  
[W,V,T]=dqxs(n);  
W21=W(2:nm1,1);  
W22=W(2:nm1,2:nm1);  
W23=W(2:nm1,n);  
W31=W(n,1);  
W32=W(n,2:nm1);  
W33=W(n,n);  
T2=T(2:nm1)';  
T3=T(n);  
p0=a*ones(nm1,1);  
p=fsolve(@ef92,p0);  
z(n)=p(nm1); z(1)=(C - B * z(n))/A;  
z(2:nm1)=p(1:nm1 - 1);  
x=a+(b - a) * T;  
z
```

10. 用阿达姆斯预估校正法求解

$$\begin{cases} y' = z^3 - x^2y - x^2, \\ z' = xz^2 - y^4 + 3x, \\ y(2) = 5, \\ z(2) = 3. \end{cases}$$

在 $x \in [2, 5]$, $h = 0.25$, 前几步用 R-K 方法 4 阶公式, 并与 ode45 求解作比较。

解: 此题的 Matlab 程序为

1) ef10.m 文件如下

```
function z=ef10(x,y)
z(1)=y(2)^3-x*x*y(1)-x*x;
z(2)=x*y(2)*y(2)-y(1)^4+3*x;
```

2) ef101.m 文件如下

```
h=0.25; a=2; b=5; n=13; y0(1)=5; y0(2)=3;
y=adams('ef10',y0,n,a,b);
```

11. 试证明下述隐式 R-K 方法是 3 阶公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2), \\ k_1 = f\left(x_n, y_n + \frac{1}{4}hk_1 - \frac{1}{4}hk_2\right), \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{1}{4}hk_1 + \frac{5}{12}hk_2\right) \end{cases}$$

并求上述方法的稳定性函数。

解:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \\ \varepsilon_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{4}(\bar{k}_1 + 3\bar{k}_2) \\ \bar{k}_1 &= f(x_n, y(x_n) + \frac{1}{4}h\bar{k}_1 - \frac{1}{4}h\bar{k}_2) \\ \bar{k}_2 &= f(x_n + \frac{2}{3}h, y(x_n) + \frac{1}{4}h\bar{k}_1 + \frac{5}{12}h\bar{k}_2) \end{aligned}$$

由 (9.23) 知

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= f + \frac{h}{4}(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)f_y + \frac{1}{2}(\frac{h^2}{16}(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)^2f_{yy}) + O(h^3) \\ \bar{k}_2 &= f + \frac{2h}{3}f_x + \frac{h}{4}(\bar{k}_1 + \frac{5}{3}\bar{k}_2)f_y + \frac{1}{2}h^2(\frac{4}{9}f_{xx} + \frac{1}{3}(\bar{k}_1 + \frac{5}{3}\bar{k}_2)f_{xy} \\ &\quad + \frac{1}{16}(\bar{k}_1 + \frac{5}{3}\bar{k}_2)^2f_{yy}) + O(h^3) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 - \bar{k}_2 &= \frac{h}{4}(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)f_x + \frac{h^2}{32}(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)^2f_{yy} - \frac{2h}{3}f_x - \frac{h}{4}(\bar{k}_1 + \frac{5}{3}\bar{k}_2)f_y \\ &\quad - \frac{h^2}{2}(\frac{4}{9}f_{xx} + \frac{1}{3}(\bar{k}_1 + \frac{5}{3}\bar{k}_2)f_{xy} + \frac{1}{16}(\bar{k}_1 + \frac{5}{3}\bar{k}_2)^2f_{yy}) + O(h^3) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\bar{k}_1 &= f + \frac{h^2}{16}(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)f_x f_y - \frac{h^2}{6}f_x f_y - \frac{h^2}{16}(\bar{k}_1 + \frac{5}{3}\bar{k}_2)f_y^2 + O(h^3) \\ &= f - \frac{h^2}{6}f_x f_y - \frac{h^2}{16}(f + \frac{5}{3}f)f_y^2 + O(h^3) \\ &= f - \frac{h^2}{6}f_x f_y - \frac{h^2}{6}f f_y^2 + O(h^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{k}_2 &= f + \frac{2h}{3}f_x + \frac{h}{4}(f + \frac{5}{3}\bar{k}_2)f_y \\ &\quad + \frac{1}{2}h^2(\frac{4}{9}f_{xx} + \frac{1}{3}(f + \frac{5}{3}f)f_{xy} + \frac{1}{16}(f + \frac{5}{3}f)^2 f_{yy}) + O(h^3) \\ &= f + \frac{2h}{3}f_x + \frac{h}{4}(f + \frac{5}{3}(f + \frac{2h}{3}f_x + (\frac{h}{4}f + \frac{5h}{12}f)f_y))f_y \\ &\quad + \frac{1}{2}h^2(\frac{4}{9}f_{xx} + \frac{4}{9}f f_{xy} + \frac{4}{9}f^2 f_{yy}) + O(h^3) \\ &= f + \frac{2h}{3}f_x + \frac{2h}{3}f f_y + \frac{5h^2}{18}f_x f_y + \frac{5h^2}{18}f f_y^2 + \frac{2h^2}{9}f_{xx} \\ &\quad + \frac{4h^2}{9}f f_{xy} + \frac{2h^2}{9}f^2 f_{yy} + O(h^3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{4}(\bar{k}_1 + 3\bar{k}_2) \\ &\stackrel{(9.24)}{=} y(x_n) + hf + \frac{h^2}{2}[f_x + f f_y] \\ &\quad + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2f f_{xy} + f^2 f_{yy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + f f_y^2] + O(h^4) \\ &\quad - y(x_n) - \frac{h}{4}(4f + 2hf_x + 2hf f_y - \frac{h^2}{6}f_x f_y - \frac{h^2}{6}f f_y^2 + \frac{5}{6}h^2 f_x f_y \\ &\quad + \frac{5}{6}h^2 f f_y^2 + \frac{2h^2}{3}f_{xx} + \frac{4h^2}{3}f f_{xy} + \frac{2h^2}{3}f^2 f_{yy}) + O(h^4) \\ &= O(h^4)\end{aligned}$$

稳定性函数:

令 $f(x, y) = \lambda y$ 于是

$$\begin{aligned}k_1 &= \lambda(y_n + \frac{h}{4}k_1 - \frac{h}{4}k_2) \\ k_2 &= \lambda(y_n + \frac{h}{4}k_1 + \frac{5h}{12}k_2)\end{aligned}$$

上两式相减, 并记 $Z = \lambda h$

$$k_2 - k_1 = \frac{2Z}{3}k_2, \quad k_1 = (1 - \frac{2Z}{3})k_2$$

于是容易解得

$$k_2 = \frac{\lambda y_n}{1 - \frac{2Z}{3} + \frac{Z^2}{6}}, \quad k_1 = \frac{(1 - \frac{2Z}{3})\lambda y_n}{1 - \frac{2Z}{3} + \frac{Z^2}{6}}$$

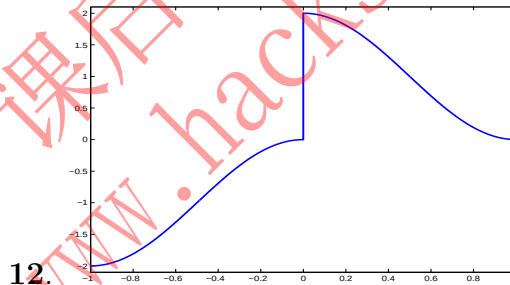
$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \\
 &= y_n + \frac{Z}{4} \left(\frac{1 - \frac{2}{3}Z}{1 - \frac{2Z}{3} + \frac{Z^2}{6}} + \frac{3}{1 - \frac{2Z}{3} + \frac{Z^2}{6}} \right) y_n \\
 &= \left(1 + \frac{Z - \frac{Z^2}{6}}{1 - \frac{2Z}{3} + \frac{Z^2}{6}} \right) y_n \\
 &= \frac{1 + \frac{Z}{3}}{1 - \frac{2Z}{3} + \frac{Z^2}{6}} y_n
 \end{aligned}$$

∴稳定性函数为

$$R(Z) = \frac{1 + \frac{Z}{3}}{1 - \frac{2Z}{3} + \frac{Z^2}{6}}$$

当 $Re(Z) < 0$ 时容易证明 $|R(Z)| < 1$

故方法A稳定。



12.