

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

1[*]. (关于坐标平面、坐标轴、原点对称问题) 给定空间直角坐标系中的点 $P(3, -1, -2)$, 试求:

(1) 点 P 关于三坐标平面对称的点的坐标; [关于坐标平面 xOy, yOz, zOx 对称的点分别为 $(3, -1, 2), (-3, -1, -2), (3, 1, -2)$]

(2) 点 P 关于三坐标轴对称的点的坐标; [关于坐标轴 x, y, z 对称的点分别为 $(3, 1, 2), (-3, -1, 2), (-3, 1, -2)$]

(3) 点 P 关于坐标原点对称的点的坐标. $[(-3, 1, 2)]$

2. 设某点与给定的点 $(2, -3, -1)$ 分别对称于三坐标轴, 求该点的坐标. [对称于 x, y, z 轴的点分别为 $(2, 3, 1), (-2, -3, 1), (-2, 3, -1)$]

3. (点到点, 点到直线的距离) 求点 $M(4, -3, 5)$ 与原点及各坐标轴间的距离.

解 到原点的距离为 $|OM| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$. 到 x 轴的距离为 $\sqrt{|OM|^2 - 4^2} = \sqrt{34}$, 到 y 轴的距离为 $\sqrt{|OM|^2 - (-3)^2} = \sqrt{41}$, 到 z 轴的距离为 $\sqrt{|OM|^2 - 5^2} = 5$.

4. 根据下列条件求点 B 的未知坐标

(1) $A(4, -7, 1), B(6, 2, z), |AB| = 11$;

解 $11^2 = (6-4)^2 + (2+7)^2 + (z-1)^2 \Rightarrow (z-1)^2 = 36 \Rightarrow z = -5, 7$.

(2) $A(2, 3, 4), B(x, -2, 4), |AB| = 5$;

解 $5^2 = (x-2)^2 + (-2-3)^2 + (4-4)^2 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

5[*]. 在 Oz 轴上求与点 $A(-4, 1, 7)$ 和点 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解 设该点为 $P(0, 0, z)$. 由 $|AP| = |BP|$ 得, $4^2 + 1^2 + (z-7)^2 = 3^2 + 5^2 + (z+2)^2 \Rightarrow z = \frac{14}{9}$. 从而该点为 $(0, 0, \frac{14}{9})$.

6[*]. 在 yOz 平面上, 求与三已知点 $A(3, 1, 2), B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

解 设该点为 $P(0, y, z)$. 由 $|AP| = |BP| = |CP|$ 得, $3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \Rightarrow -2y - 4z + 14 = 4y + 4z + 24 = -10y - 2z + 26 \Rightarrow \begin{cases} 3y + 4z = -5 \\ 7y + 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1, z = -2$. 从而该点 $(0, 1, -2)$.

7[*]. 求点 $(1, -3, 2)$ 关于点 $(-1, 2, 1)$ 的对称点.

解法一 设对称点为 $P(x, y, z)$. $\frac{x+1}{2} = -1, \frac{y-3}{2} = 2, \frac{z+2}{2} = 1 \Rightarrow x = -3, y = 7, z = 0$. 从而对称点为 $(-3, 7, 0)$.

解法二 设所求对称点为 $C(x, y, z)$. 令 $A(1, -3, 2), B(-1, 2, 1)$. 则 $\vec{BC} = \vec{AB} = (-2, 5, -1)$. 而 $\vec{BC} = (x+1, y-2, z-1)$. 因此, $x+1 = -2, y-2 = 5, z-1 = -1 \Rightarrow x = -3, y = 7, z = 0$. 所求点为 $(-3, 7, 0)$.

8[*]. 给定向量 $a = (3, 5, -1), b = (2, 2, 3), c = (4, -1, -3)$, 求下列各向量的坐标:

(1) $2a$; (2) $a + b - c$; (3) $2a - 3b + 4c$; (4) $ma + nb$.

解 (1) $2a = (6, 10, -2)$; (2) $a + b - c = (1, 8, 5)$; (3) $2a - 3b + 4c = (16, 0, -23)$; (4) $ma + nb = (3m + 2n, 5m + 2n, -m + 3n)$.

9[*]. 三力 $F_1 = (1, 2, 3), F_2 = (-2, 3, -4)$ 及 $F_3 = (3, -4, 5)$ 同时作用于一点, 求合力 F 的大小及方向余弦.

解 合力 $F = F_1 + F_2 + F_3 = (2, 1, 4), |F| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}, \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{21}}, \cos \gamma = \frac{4}{\sqrt{21}}$.

10. 求平行于向量 $a = (6, 7, -6)$ 的单位向量.

解 $|a| = \sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} = \sqrt{85}$. 故平行于 a 的单位向量为 $\pm \frac{a}{|a|} = \pm \frac{6}{\sqrt{85}}i + \frac{7}{\sqrt{85}}j - \frac{6}{\sqrt{85}}k$.

11[*]. 设已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$. 求方向与 $\overrightarrow{AB}$ 一致的单位向量.

解 $\overrightarrow{AB} = (7-4, 1-0, 3-5) = (3, 1, -2)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14}$. 从而所求单位向量为 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = (\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}})$.

12[*]. 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$, 它在坐标轴上的投影依次为 4, -4 和 7. 求此向量的起点 A 的坐标.

解 设起点 $A(x, y, z)$. 由题意可知 $\overrightarrow{AB} = (4, -4, 7)$, 从而有 $(2-x, -1-y, 7-z) = (4, -4, 7)$. 因此, $A(-2, 3, 0)$.

13[*]. 从点 $A(2, -1, 7)$ 沿向量 $a = 8i + 9j - 12k$ 的方向取线段长 $|AB| = 34$, 求点 B 的坐标.

解 方法一. $\overrightarrow{AB} = ta = (8t, 9t, -12t)$ ($t > 0$). 再由 $|AB| = 34$ 得 $(8t)^2 + (9t)^2 + (-12t)^2 = 34^2$. 解之得 $t = 2$ (由同向舍去了根 -2). 从而 $B(18, 17, -17)$.

方法二. 设 $B(x, y, z)$. 则 $\overrightarrow{AB} = (x-2, y+1, z-7)$. 由 $\overrightarrow{AB}$ 与 a 的方向一致, 从而 $\frac{x-2}{8} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-7}{-12} = \lambda$. 而由 $|AB| = 34$ 得 $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = 34^2$. 即 $(8\lambda)^2 + (9\lambda)^2 + (12\lambda)^2 = 34^2$. 解之得 $\lambda = 2$ (由同向舍去了根 -2), 从而 $B(18, 17, -17)$.

方法三. 由 $a = 8i + 9j - 12k = (8, 9, -12)$ 得单位向量 $a^0 = \frac{1}{17}(8, 9, -12)$. 从而 B 点的坐标为 $(2, -1, 7) + 34a^0 = (18, 17, -17)$.

14. 设向量 a 与各坐标轴间的夹角依次为 α, β, γ . 已知:

(1) $\alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ$; (2) $\alpha = 135^\circ, \beta = 60^\circ$.

求第三角 γ .

解 由公式 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 来求解. (1) $\cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \gamma = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$. (2) $\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}, \gamma = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.

15. 给定向量 $a = (1, 1, -4), b = (2, -2, 1)$, 计算:

(1) $a \cdot b$; (2) $a \times b$; (3) $|a|, |b|$ 及 (a, b) ; (4) $P_a b$.

解 (1) $a \cdot b = -4$; (2) $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-7, -9, -4)$; (3) $|a| = 3\sqrt{2}, |b| = 3$. 由公式 $\cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = -\frac{4}{9\sqrt{2}}$. 从而 $(a, b) = \pi - \arccos \frac{4}{9\sqrt{2}}$; (4) $P_a b = |b| \cos(a, b) = 3 \cdot (-\frac{4}{9\sqrt{2}}) = -\frac{4}{3\sqrt{2}}$.

16[*]. 给定四点 $A(1, -2, 3), B(4, -4, -3), C(2, 4, 3)$ 和 $D(8, 6, 6)$, 求向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{CD}$ 的投影.

解 $\overrightarrow{AB} = (3, -2, -6), \overrightarrow{CD} = (6, 2, 3), |\overrightarrow{AB}| = 7, |\overrightarrow{CD}| = 7, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -4, \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{4}{49}, \text{Prj}_{\overrightarrow{CD}} \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{4}{7}$.

注: 或者直接利用公式 $\text{Prj}_{\overrightarrow{CD}} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}$.

17[*]. 已知 $\triangle ABC$ 的两边为向量 $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -2), \overrightarrow{BC} = (3, 2, 6)$, 求 $\triangle ABC$ 的三内角.

解 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (5, 3, 4), |\overrightarrow{AB}| = 3, |\overrightarrow{BC}| = 7, |\overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{2}, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 45, \cos \angle ABC = \frac{4}{21}, \cos \angle BAC = \frac{\sqrt{5}}{6}, \cos \angle ACB = \frac{9}{14}\sqrt{2}$. 从而三内角 $\angle ABC, \angle BAC, \angle ACB$ 分别为 $\arccos \frac{4}{21}, \arccos \frac{\sqrt{5}}{6}, \arccos \frac{9}{14}\sqrt{2}$.

18. 设一平面平行于两向量 $3i + j$ 和 $i + j - 4k$, 证明向量 $2i - 6j - k$ 垂直于这个平面.

证 令 $a = 3i + j, b = i + j - 4k, c = 2i - 6j - k$. 因为 $a \times b = (-4, 12, 2) \parallel c = 2i - 6j - k$. 所以, c 垂直于向量 a 及 b 所在的平面.

19. 一动点与点 $M(1, 1, 1)$ 所构成的向量与向量 $n = (2, 2, 3)$ 垂直, 求动点的轨迹.

解 设动点 $P(x, y, z)$, 则 $\overrightarrow{MP} = (x-1, y-1, z-1)$. $(x-1, y-1, z-1) \cdot (2, 2, 3) = 0$. 即动点的轨迹所满足的方程为 $2x + 2y + 3z = 7$. 即为一过点 M 且以 n 为法向量的平面.

20. 已知向量 $a = (2, -3, 1)$, $b = (1, -1, 3)$, $c = (1, -2, 0)$, 计算下列各式:

(1) $(a \cdot b)c - (a \cdot c)b$; (2) $(a+b) \times (b+c)$; (3) $(a \times b) \cdot c$; (4) $(a \times b) \times c$.

解 (1) $(a \cdot b)c - (a \cdot c)b = 8(1, -2, 0) - 8(1, -1, 3) = (0, -8, -24)$; (2) $(a+b) \times (b+c) = (3, -4, 4) \times (2, -3, 3) = (0, -1, -1)$; (3) $(a \times b) \cdot c = (-8, -5, 1) \cdot (1, -2, 0) = 2$; (4) $(a \times b) \times c = (-8, -5, 1) \times (1, -2, 0) = (2, 1, 21)$.

21[*]. 证明向量外积运算的分配律 $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$.

证 设 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, $c = (c_x, c_y, c_z)$. $(a+b) \times c = (a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z) \times (c_x, c_y, c_z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x+b_x & a_y+b_y & a_z+b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{行列式性质}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a \times c + b \times c$.

注: 该证明中用到了行列式的性质.

22[*]. 用向量证明正弦定理 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

证 我们将用向量的叉积的绝对值为表示三角形的面积. 考虑以 b 为底来求三角形的面积. 则此时 $A = \angle BAC$, 并考虑向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \angle BAC = \frac{1}{2} bc \sin A$. 同理考虑以其它两条边作底, 分别可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$ 及 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$. 从而, 立即可得正弦定理.

23[*]. 已知点(改原题中的“向量”二字) $A = (2, 4, 1)$, $B = (3, 7, 5)$, $C = (4, 10, 9)$, 证明 A, B, C 三点共线.

证 $\overrightarrow{AB} = (1, 3, 4)$, $\overrightarrow{BC} = (1, 3, 4)$. 因此, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. 从而可知 A, B, C 三点共线.

24. 设 a, b, c 均表示向量, 分析下题的正确性

(1) $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$;

(2) $(a \times b)^2 + (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$;

(3) $a \cdot c = b \cdot c$, 则有 $a = b$;

(4) $a \times c = b \times c$, 则有 $a = b (c \neq 0)$.

解 (1) 显然错! 因为左边计算得一向量, 而右边计算得一标量.

(2) 正确. 可直接计算验证. $(a \times b)^2 + (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2(a, b) + |a|^2 |b|^2 \cos^2(a, b) = |a|^2 |b|^2 = a^2 \cdot b^2$.

(3) 错! $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow (a-b) \cdot c = 0$. 若取 $c = 0$, 则此时 a 与 b 可以取任意的向量.

(4) 错! $a \times c = b \times c \Rightarrow a \times c - b \times c = 0 \Rightarrow (a-b) \times c = 0$. 再由 $c \neq 0$, 所以必有 $(a-b) \parallel c$.

25[*]. 指出下列各平面位置的特殊性质, 并作图

(1) $2x - 3y + 20 = 0$; (2) $3x - 2 = 0$; (3) $4y - 7z = 0$.

解 (1) 平面 $2x - 3y + 20 = 0$ 的法向量为 $n = (2, -3, 0)$. 可见该平面平行于 Oz 轴; (2) 平面 $3x - 2 = 0$ 实际为 $x = \frac{2}{3}$. 可见该平面是平行坐标平面 yOz ; (3) 平面 $4y - 7z = 0$ 显然过原点 $O(0, 0, 0)$, 并且其法向量为 $n = (0, 4, -7)$. 从而该平面是平行于 x 轴的.

26[*]. 求下列平面在坐标轴上的截距

(1) $2x - 3y - z + 12 = 0$; (2) $5x + y - 3z - 15 = 0$; (3) $x - y + z - 1 = 0$.

解 (1) $2x - 3y - z + 12 = 0 \Rightarrow -\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{12} = 1$. 从而可知其在 x, y, z 轴上的截距分别为 $-6, 4, 12$; (2) $5x + y - 3z - 15 = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{15} - \frac{z}{5} = 1$. 从而可知其在 x, y, z 轴上的截距分别为 $3, 15, -5$; (3) 由 $x - y + z - 1 = 0$ 可知其在 x, y, z 轴上的截距分别为 $1, -1, 1$.

27. 四面体的顶点在点 $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(1, -1, 1)$ 和 $D(1, 1, -1)$ 处, 求各侧面的方程.
 解 由 A, B, C, D 的坐标可知, A, B 关于坐标平面 yOz 对称, A, C 关于坐标平面 zOx 对称, A, D 关于坐标平面 xOy 对称. $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, -2, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 0, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (2, -2, 0)$, $\overrightarrow{BD} = (2, 0, -2)$. 平面 ABD 的方程: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = 1$. 平面 ABC 的方程: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = 1$. 平面 ACD 的方程: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = 1$. 平面 BCD 的方程: $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+y+z=1$.

28[*]. (点到平面的距离)求点 $(2, 1, 1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离.

解 一般地, 设点坐标为 $P(x_0, y_0, z_0)$, 平面方程为 $\Pi: ax+by+cz+d=0$. 则平面的法向量 $\mathbf{n}=(a, b, c)$. 以此法向量作为直线 PQ 的方向向量, 其中 $Q(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$ 为点 P 在平面 Π 上的垂足, $|PQ|$ 就是点 P 到平面 Π 的距离. 则有 $x_1 = x_0 + at, y_1 = y_0 + bt, z_1 = z_0 + ct$, 其中 t 为参数. 由 $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ 得 $a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0 \Rightarrow t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$. 因此 $|PQ|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)t^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow |PQ| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. 这样我们就得到了点到平面的距离公式.

在此题中运用此公式, 则知距离为 $d = \frac{2+1-1+1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

29. 通过两点 $(1, 1, 1)$ 和 $(2, 2, 2)$, 作与平面 $x+y-z=0$ 垂直的平面.

解 设 $P(1, 1, 1), Q(2, 2, 2)$ 以及 $\Pi_1: x+y-z=0$. 平面 Π_1 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, -1)$. $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 1)$. 显然, $\mathbf{n}_1 \neq \overrightarrow{PQ}$. 从而可得所求平面 Π_2 的法向量 $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \times \overrightarrow{PQ}$. 这样平面 Π_2 的

$$\text{方程为 } \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-y=0.$$

30[*]. 确定参数 k 的值, 使平面 $x+ky-2z=9$ 适合下列条件之一

- (1) 经过点 $(5, -4, -6)$;
- (2) 与平面 $2x+4y+3z=3$ 垂直;
- (3) 与平面 $2x-3y+z=0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 的角;
- (4) 与原点相距 3 个单位.

解 (1) 要求经过点 $(5, -4, -6)$, 则必有 $5-4k+12=9 \Rightarrow k=2$;

(2) 平面 $2x+4y+3z=3$ 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (2, 4, 3)$, 平面 $x+ky-2z=9$ 的法向量 $\mathbf{n}_2 = (1, k, -2)$. 由两平面垂直, 则必有 $\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2$, 即 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 2+4k-6=0 \Rightarrow k=1$.

(3) 平面 $2x-3y+z=0$ 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (2, -3, 1)$, 平面 $x+ky-2z=9$ 的法向量 $\mathbf{n}_2 = (1, k, -2)$. 由两平面成 $\frac{\pi}{4}$ 的角知 $\mathbf{n}_1$ 与 $\mathbf{n}_2$ 也成 $\frac{\pi}{4}$ 的角. 从而有 $\cos \frac{\pi}{4} = \left| \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right| = \frac{2+3k-2}{\sqrt{14} \sqrt{5+k^2}} \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{70}}{2}$.

(4) 应用 28 题所得的点到平面距离的公式, 由与原点相距 3 个单位得 $3 = \frac{9}{\sqrt{5+k^2}} \Rightarrow k = \pm 2$.

31. 证明下列各组直线互相平行:

$$(1) \begin{cases} 2y+z=0 \\ 3y-4z=0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} 5y-2z=8 \\ 4y+z=4 \end{cases};$$

课后答案网: www.hackshp.cn
若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$(2) \begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x+z=4 \\ y+2z=9 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} 6x-y=7 \\ 3y+6z=1 \end{cases};$$

证

$$(1) \text{ 直线 } \begin{cases} 2y+z=0 \\ 3y-4z=0 \end{cases} \quad \text{的方向向量为 } (0, 2, 1) \times (0, 3, -4) = (-11, 0, 0), \text{ 而直线 } \begin{cases} 5y-2z=8 \\ 4y+z=4 \end{cases}$$

的方向向量为 $(0, 5, -2) \times (0, 4, 1) = (13, 0, 0)$. 可见, 两条直线的方向向量平行, 从而两条件直线是平行的.

$$(2) \text{ 直线 } \begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases} \quad \text{的方向向量为 } (1, 2, -1) \times (-2, 1, 1) = (3, 1, 5), \text{ 而直线 } \begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

的方向向量为 $(3, 6, -3) \times (2, -1, -1) = (-9, -3, -15)$. 可见, 两条直线的方向向量平行, 从而两条件直线是平行的.

$$(3) \text{ 直线 } \begin{cases} 3x+z=4 \\ y+2z=9 \end{cases} \quad \text{的方向向量为 } (3, 0, 1) \times (0, 1, 2) = (-1, -6, 3), \text{ 而直线 } \begin{cases} 6x-y=7 \\ 3y+6z=1 \end{cases}$$

的方向向量为 $(6, -1, 0) \times (0, 3, 6) = (-6, -36, 18)$. 可见, 两条直线的方向向量平行, 从而两条件直线是平行的.

32. 证明下列各组直线互相垂直:

$$(1) \begin{cases} x+2y=1 \\ 2y-z=1 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x-y=1 \\ x-2z=3 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} 4x+y-3z+24=0 \\ z-5=0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x+y+3=0 \\ x+2=0 \end{cases};$$

$$(3) \begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x-z=2 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} 2x-y+2z=4 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

证

$$(1) \text{ 直线 } \begin{cases} x+2y=1 \\ 2y-z=1 \end{cases} \quad \text{的方向向量为 } (1, 2, 0) \times (0, 2, -1) = (-2, 1, 2), \text{ 而直线 } \begin{cases} x-y=1 \\ x-2z=3 \end{cases}$$

的方向向量为 $(1, -1, 0) \times (1, 0, -2) = (2, 2, 1)$. 两个方向向量的内积显然为零, 从而两直线垂直.

$$(2) \text{ 直线 } \begin{cases} 4x+y-3z+24=0 \\ z-5=0 \end{cases} \quad \text{的方向向量为 } (4, 1, -3) \times (0, 0, 1) = (1, -4, 0), \text{ 而直线}$$

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ x+2=0 \end{cases} \quad \text{的方向向量为 } (1, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, -1). \text{ 两个方向向量的内积显然为零,}$$

从而两直线垂直.

$$(3) \text{ 直线 } \begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x-z=2 \end{cases} \quad \text{的方向向量为 } (3, 1, -1) \times (2, 0, -1) = (-1, 1, -2), \text{ 而直线}$$

$$\begin{cases} 2x-y+2z=4 \\ x-y+2z=3 \end{cases} \quad \text{的方向向量为 } (2, -1, 2) \times (1, -1, 2) = (0, -2, -1). \text{ 两个方向向量的内积}$$

显然为零,从而两直线垂直

课后答案网: www.hackshp.cn

若侵犯了您的版权利益,敬请来信告知! www.hackshp.cn

33[*]. 求直线 $\begin{cases} 2x - y + 4z - 2 = 0 \\ x - 8y + 3z + 6 = 0 \end{cases}$ 与平面 $x - 8y + 3z + 6 = 0$ 间的夹角的正弦.

解 设所求夹角为 α . 直线的方向向量为 $s = (3, 1, -1) \times (2, -1, 4) = (3, -14, -5)$, 平面的法向量为 $n = (1, -8, 3)$. $\sin \alpha = \cos(s, n) = \frac{100}{\sqrt{230}\sqrt{74}} = \frac{10}{851} \sqrt{4255}$.

34. 分别求出满足下列条件的平面方程

(1) 通过点 $(2, 1, 1)$ 而与直线 $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ 垂直;

解 直线的方向向量为 $s = (1, 2, -1) \times (2, 1, -1) = (-1, -1, -3)$. 由直线与平面垂直知平面的法向量就是直线的方向向量, 从而平面方程为 $(x - 2, y - 1, z - 1) \cdot (-1, -1, -3) = 0 \Rightarrow x + y + 3z - 6 = 0$.

(2) 通过点 $(1, 2, 1)$ 而与两直线 $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ 平行;

解 直线 $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ 的方向向量为 $s_1 = (1, 2, -1) \times (1, -1, 1) = (1, -2, -3)$, 而直线 $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ 的方向向量为 $s_2 = (2, -1, 1) \times (1, -1, 1) = (0, -1, -1)$. 平面与此两直线平行, 即其法向量为 $n = s_1 \times s_2 = (-1, 1, -1)$. 再由平面过点 $(1, 2, 1)$ 可得其方程为 $-(x - 1) + (y - 2) - (z - 1) = 0 \Rightarrow x - y + z = 0$.

(3) 经过直线 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{1}$ 且垂直于平面 $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

解 直线的方向向量为 $s = (5, 2, 4)$, 平面的法向量为 $n_1 = (1, 4, -3)$. 平面过直线且与已知平面垂直, 则其法向量为 $n_2 = s \times n_1 = (-22, 19, 18)$. 再由直线的对称式方程可知直线过点 $A(2, -1, 2)$. 从而所求平面方程为 $-22(x - 2) + 19(y + 1) + 18(z - 2) = 0 \Rightarrow 22x - 19y - 18z - 27 = 0$.

35[*]. 求直线 $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ 与平面 $x + 2y + 2z + 6 = 0$ 的交点.

解 将直线的对称式方程变为参数式方程得 $x = -3 + 3t, y = -2 + 2t, z = t$. 代入平面方程得 $(-3 + 3t) + 2(-2 + 2t) + 2t + 6 = 0 \Rightarrow t = 1$. 从而交点为 $(0, -4, 1)$.

36. 求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影.

解 平面的法向量, 也就是过已知点的平面的垂线的方向向量. 方向向量为 $s = (1, 2, -1)$. 垂线的参数方程为 $x = -1 + t, y = 2 + 2t, z = -t$. 垂线与平面的交点(垂足)即为已知点在平面上的投影. 从而有 $(-1 + t) + 2(2 + 2t) - t + 1 = 0$, 解之得 $t = -\frac{2}{3}$. 从而可知投影为 $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

37[*]. 求点 $(1, 2, 3)$ 到直线 $\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ 的距离.

解 令 $A(1, 2, 3)$. 由直线方程 $\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ 可知其方向向量为 $s = (1, -3, -2)$, 且过点 $B(0, 4, 3)$. $\vec{AB} = (-1, 2, 0)$. 点 A 到直线的距离为 $d = \frac{|\vec{AB} \times s|}{|s|} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

38[*]. 设一平面垂直于平面 $z = 0$, 并通过从点 $(1, -1, 1)$ 到直线 $\begin{cases} x = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ 的垂线, 求该平面的方程.

解 令 $A(1, -1, 1)$. 由所求平面 Π 垂直于平面 $z = 0$ 知其平行于向量 $k = (0, 0, 1)$. 直线 L 的方向向量为 $s = (1, 0, 0) \times (0, 1, -1) = (0, 1, 1)$. 显然直线 L 过点 $B(0, 0, 1)$. 从而可写出直线 L 的参数方程 $x = 0, y = t, z = 1 + t$. 设垂足为 $C(0, t, 1 + t)$. 则 $\vec{AC} = (-1, t + 1, t)$. 由 $\vec{AC} \cdot s = 0$ 得 $t = -\frac{1}{2}$. 因此, $\vec{AC} = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. 从而平面 Π 的法向量为 $n = k \times \vec{AC} = (-\frac{1}{2}, -1, 0)$. 再由平

39[*]. (异面直线间的距离) 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 和直线 $\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$

间的最短距离.

解 直线 $L_1: \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 的方向向量 $s_1 = (1, 1, -1) \times (2, 1, -1) = (0, -1, -1)$.

显然点 $A(1, 1, 1) \in L_1$. 从而 L_1 的参数方程为 $x = 1, y = 1 - t, z = 1 - t$. 直线 $L_2: \begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$ 的方向向量 $s_2 = (1, 2, -1) \times (1, 2, 2) = (6, -3, 0)$. 可求得点 $B(0, 2, 2) \in L_2$.

应用两条异面直线间的距离的公式有

$$d = \frac{|s_1 \times s_2 \cdot \overrightarrow{AB}|}{|s_1 \times s_2|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix}} = 1.$$

40[*]. 求直线 $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影方程.

解 直线 $L_1: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 的方向向量为 $s_1 = (1, 1, 1) \times (1, -1, 1) = (2, 0, -2)$. 平

面 $\Pi_1: x+y+z=0$ 的法向量为 $n_1 = (1, 1, 1)$. 过直线 L_1 且垂直于平面 Π_1 的平面 Π_2 的法向量为 $n_2 = s_1 \times n_1 = (2, -4, 2)$. 点 $A(0, 1, 0) \in L_1$. 从而平面 Π_2 的方程为 $x-2y+z+2=0$. 从而

投影直线的方程为 $\begin{cases} x-2y+z+2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2}{3} \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

41. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases}$ 在平面 $z=0$ 上的投影方程.

解 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y+z-1=0 \end{cases}$. 将 $z=-y+1$ 代入 $x^2+y^2+z^2=1$

消去 z 得 $\frac{x^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$. 即为平面 $z=0$ 上一椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \\ z=0 \end{cases}$.

一. 选择题

1. $|a+b| = |a-b|$ 的充要条件是 C.

A. $a=0$ 或 $b=0$; B. $a \times b=0$; C. $a \cdot b=0$; D. $|a|=|b|$.

解 $|a+b| = |a-b| \Rightarrow (a+b)^2 = (a-b)^2 \Rightarrow a^2 + 2a \cdot b + b^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2 \Rightarrow a \cdot b = 0$.

2. 若 $(a \times b) \cdot c = 1$, 则 $(a+b) \times (b+c) \cdot (c+a) =$ B.

A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

解 $[(a+b) \times b + (a+b) \times c] \cdot (c+a) = (a \times b + b \times b + a \times c + b \times c) \cdot (c+a) = (a, b, c) + (b, c, a) = 2$.

3. 设向量 $a = (-1, -2, 2)$, $b = (3, \lambda, 4)$, 已知 a 在 b 上的投影为 1, 则 $\lambda =$ C.

A. 0; B. $\frac{20}{3}$; C. 0 或 $\frac{20}{3}$; D. $-\frac{20}{3}$.

解 $P_{ba} = |a| \cos(a, b) = |a| \frac{a \cdot b}{|a||b|} = 1 \Rightarrow \lambda(3\lambda - 20) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \frac{20}{3}$.

4. 设 $a = (\lambda, \mu, -1)$, $b = (-1, \lambda, \mu)$. $a \times b$ 平行于向量 $p = (1, -1, 2)$. 则 $a \times b =$?.

A. $(10, -10, 20)$; B. $(14, -14, 28)$; C. $(5, -5, 10)$; D. $(7, -7, 14)$.

解 $a \times b = (\lambda, \mu, -1) \times (-1, \lambda, \mu) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda & \mu & -1 \\ -1 & \lambda & \mu \end{vmatrix} = (\lambda + \mu^2, 1 - \lambda\mu, \lambda^2 + \mu) = k(1, -1, 2) \Rightarrow$

$\lambda + \mu^2 = \lambda\mu - 1 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}$. [计算过于复杂, 放弃!]

5. 设 $A(\lambda, -1, 2)$, $B(2, 0, \lambda)$, $C(-1, 1, 1)$, $D(1, 2, -1)$ 是四个点. 已知以此四点为顶点的四面体体积为 $\frac{1}{2}$, 则 $\lambda =$ D.

A. 1; B. -3; C. ± 3 或 ± 1 ; D. 1 或 -3.

解 $\vec{AB} = (2 - \lambda, 1, \lambda - 2)$, $\vec{AC} = (-1 - \lambda, 2, -1)$, $\vec{AD} = (1 - \lambda, 3, -3)$, $\vec{AB} \times \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & \lambda-2 \\ -1-\lambda & 2 & -1 \\ 1-\lambda & 3 & -3 \end{vmatrix} = -2\lambda - \lambda^2 \Rightarrow |\lambda^2 + 2\lambda| = 3 \Rightarrow \lambda = 1, -3$.

6. 直线 $l_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+8}{1}$ 和 $l_2: \begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$ 的夹角为 C.

A. $\frac{\pi}{6}$; B. $\frac{\pi}{4}$; C. $\frac{\pi}{3}$; D. $\frac{\pi}{2}$.

解 l_1 的方向向量 $s_1 = (1, -2, 1)$, 而 l_2 的方向向量 $s_2 = (1, -1, 0) \times (0, 2, 1) = (-1, -1, 2)$. 从而由夹角公式 $\cos(\widehat{s_1, s_2}) = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1||s_2|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$. 从而夹角为 $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

7. 设直线 $l: \begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$, 平面 $\pi: 2x+13y+18z+1=0$, 则直线 l 与平面 π 的关系为 B.

A. $l \parallel \pi$; B. $l \subset \pi$; C. $l \perp \pi$; D. 斜交.

解 直线 l 的方向向量为 $s = (1, 3, 2) \times (2, -1, -10) = -7(4, -2, 1)$, 而平面的法向量为 $n = (2, 13, 18)$. 因为 $(s, n) = -7(8 - 26 + 18) = 0$. 所以直线 $l \parallel \pi$ 或共面. 解出直线 l 上的一点为 $(-\frac{10}{7}, \frac{1}{7}, 0)$. 将直线表示为参数方程形式得: $x = -\frac{10}{7} + 4t, y = -2t + \frac{1}{7}, z = t$. 代入平面方程中得对任意的 $t \in \mathbb{R}$ 恒成立. 由此可见直线 l 与平面 π 重合. 即 $l \subset \pi$.

8. 设 $a = (2, 5, 1)$, $b = (k, 1, -3)$ 且 $|a+b| = |a-b|$, 则 $k =$ A.

A. -1; B. 2; C. 1; D. 4.

解 直接应用 1 小题的结论得: $a \cdot b = 0 \Rightarrow k = -1$.

9. 已知空间三点 (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , (a_3, b_3, c_3) 不共线. 则直线 $l_1: \frac{x-a_1}{a_1-a_2} = \frac{y-b_1}{b_1-b_2} = \frac{z-c_1}{c_1-c_2}$,

10. 在空间直角坐标系下, 方程: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ 表示 C.

A. 球面; B. 圆; C. 圆柱; D. 椭球面.

解 方程: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ 化为 $(x+a)^2 + (y+b)^2 = c^2 - (a^2 + b^2)$. 由于方程中缺少坐标 z , 故立即知其为平行 z 轴的柱面.

二. 填空题

1. 点 $A(1, -2, 3)$, $B(2, 1, -1)$ 的连线与三坐标平面的交点坐标分别为 $(0, -5, 7)$, $(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3})$, $(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0)$.解 直线的方向向量为 $s = (1, 3, -4)$. 则其参数方程为 $x = 1 + t, y = -2 + 3t, z = 3 - 4t$.(i) 令 $x = 0$ 得 $t = -1, y = -5, z = 7$. 即与坐标平面 $x = 0$ 的交点为 $(0, -5, 7)$. (ii) 令 $y = 0$ 得 $t = \frac{2}{3}, x = \frac{5}{3}, z = \frac{1}{3}$. 即与坐标平面 $y = 0$ 的交点为 $(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3})$. (iii) 令 $z = 0$ 得 $t = \frac{3}{4}, x = \frac{7}{4}, y = \frac{1}{4}$. 即与坐标平面 $z = 0$ 的交点为 $(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0)$.2. 过点 $(1, -1, 2)$ 与直线 $l: \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ x + 2y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ 平行的直线方程为 $x - 1 = y + 1 = z - 1$.解 直线 l 的方向向量为 $s = (1, 1, 1)$. 由于所求直线与直线 l 平行, 从而其对称式方程为 $x - 1 = y + 1 = z - 1$.3. 过点 $(2, -1, 1)$ 及 $(1, 1, 2)$ 且垂直于平面 $x + y + z = 1$ 的平面方程为 $x + 2y - 3z + 3 = 0$.解 设点 $A(2, -1, 1)$ 及 $B(1, 1, 2)$. $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 1)$. 平面 $x + y + z = 1$ 的法向量为 $n = (1, 1, 1)$. 由于所求平面与已知平面垂直, 从而所求平面的法向量为 $\overrightarrow{AB} \times n = (1, 2, -3)$. 由此即得所求平面的点法式 $(x - 2) + 2(y + 1) - 3(z - 1) = 0 \Rightarrow x + 2y - 3z + 3 = 0$.4[*]. 过点 $(1, 1, -1)$ 和 $(0, 2, -2)$ 且与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 相切的平面方程为 $x - (2 \mp \sqrt{11})y - (3 \mp \sqrt{11})z - 2 = 0$.解 球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 变为 $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$. 即球面以 $A(0, 0, 1)$ 为中心, 半径为 1. 设所求平面与球面的切点为 $B(x_0, y_0, z_0)$. 则由球面与所求平面相切知, $\overrightarrow{AB} = (x_0, y_0, z_0 - 1)$ 为平面的法向量. 从而由点法式得方程为 $x_0(x - 1) + y_0(y - 1) + (z_0 - 1)(z + 1) = 0$. 将点 $(0, 2, -2)$ 代入此平面方程得 $x_0 - y_0 + z_0 - 1 = 0$. 由 B 点在球面上得 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2z_0$.令 $C(1, 1, -1)$ 和 $D(0, 2, -2)$. $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, -1)$. 则直线 CD 的方程为 $x = 1 - t, y = 1 + t, z = -1 - t$. 过点 A, B 且垂直于直线 CD 的平面 Π 方程为 $x - y + (z - 1) = 0$. 直线 CD 的参数方程形式代入平面 Π 的方程解得 $t = -\frac{2}{3}$, 故其交点为 $E(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. 由勾股定理得 $|BE|^2 = |EA|^2 - |AB|^2 = \frac{49}{9} - 1 = \frac{40}{9}$. 又由 $|BE|^2 = (x_0 - \frac{5}{3})^2 + (y_0 - \frac{1}{3})^2 + (z_0 + \frac{1}{3})^2$. 从而得到方程 $(x_0 - \frac{5}{3})^2 + (y_0 - \frac{1}{3})^2 + (z_0 + \frac{1}{3})^2 = \frac{40}{9}$.

接下来求解方程组

$$\begin{cases} x_0 - y_0 + z_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2z_0 \\ (x_0 - \frac{5}{3})^2 + (y_0 - \frac{1}{3})^2 + (z_0 + \frac{1}{3})^2 = \frac{40}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 + z_0 = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 2z_0 \\ 5x_0 + y_0 - 4z_0 = -1 \end{cases}$$

得 $x_0 = \frac{5 \pm \sqrt{11}}{14}, y_0 = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{14}, z_0 = \frac{5 \mp \sqrt{11}}{7}$. 回代得所求平面方程为

$$x - (2 \mp \sqrt{11})y - (3 \mp \sqrt{11})z - 2 = 0.$$

5. 原点关于平面 $6x + 2y - 9z + 121 = 0$ 对称的点坐标为 $(-12, -4, 18)$.解 设过原点垂直于平面的直线与平面交于点 $A(x_0, y_0, z_0)$. 平面的法向量为 $n = (6, 2, -9)$.

A(-6, -2, 9). 从而关于平面的对称点为 (-12, -4, 18).

课后答案网: www.hackshp.cn

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

6. 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 1)$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 1)$, 则 $P_a b =$

解 $P_a b = |b| \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a \cdot b}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. 已知 $|a| = 13$, $|b| = 19$, $|a + b| = 24$, 则 $|a - b| =$

解 由余弦定理得 $\cos(\widehat{a, a+b}) = \frac{|a|^2 + |a+b|^2 - |b|^2}{2|a||a+b|} = \frac{(\frac{a+b}{|a+b|})^2 + |a|^2 - (\frac{a-b}{|a-b|})^2}{2 \cdot \frac{a+b}{|a+b|} |a|}$. 解出 $|a - b| = \frac{2}{13} \sqrt{48289}$.

8. 已知 a 与 b 不平行, 则向量 a 与 b 的角平分线上的单位向量为 $\frac{(\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|})}{|\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}}$.

解 角平分线上的向量为 $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$. 从而其单位向量为

$$\frac{\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}}{|\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}|}$$

9. 设三个向量 a, b, c 满足关系 $a + b + c = 0$, 则 $a \times b = b \times c$.

解 由关系式 $a + b + c = 0$ 得 $a = -b - c$. 则 $a \times b = (-b - c) \times b = b \times c$.

10. 曲线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$.

解 只需消去 z . 由于 $z = 3 - 2x$, 代入第一个方程得 $(x+1)^2 + y^2 = 4$. 因此该曲线在 xOy 平面上的投影曲线为 $\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$.

三. 计算下列各题

1. 已知向量 $a = (8, 4, -1)$, 其终点坐标为 $(2, 1, 1)$, 试求 a 的起点坐标, a 的模及方向余弦.

解 设起点坐标为 (x, y, z) , 则有 $2 - x = 8$, $1 - y = 4$, $1 - z = -1$. 解之得起点坐标为 $(-6, -3, 2)$. $|a| = 9$. 方向余弦分别为 $\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{1}{9}$.

2. 已知向量 $a = (2, -1, 3)$, $b = (1, 3, -2)$, $c = (4, 2, -5)$, 试求:

(1) $(a \cdot b)c - (a \cdot c)b$;

(2) a 在 b 上的投影 $P_b a$;

(3) $(a + b) \times (b - c)$.

解 (1) $(a \cdot b)c - (a \cdot c)b = -7(4, 2, -5) + 9(1, 3, -2) = (-17, 13, 17)$.

(2) $P_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = -\frac{\sqrt{14}}{2}$.

(3) $(a + b) \times (b - c) = (3, 2, 1) \times (-3, 1, 3) = (5, -12, 9)$.

3. 已知 $|a| = 2$, $|b| = 5$, $(a, b) = \frac{2\pi}{3}$, 又 $c = 3a - b$, $d = \lambda a + 3b$, 试求 λ 值, 使: (1) $c \parallel d$; (2) $c \perp d$.

解 (1) 若 $c \parallel d$, 则 $0 = c \times d = (3a - b) \times (\lambda a + 3b) = (9 + \lambda)a \times b$. 显然 $a \times b \neq 0$. 因此 $\lambda = -9$.

(2) 若 $c \perp d$, 则 $0 = c \cdot d = (3a - b) \cdot (\lambda a + 3b) = 3\lambda a^2 + (9 - \lambda)a \cdot b - 3b^2 = 17\lambda - 120 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{120}{17}$.

4. 试求过点 $(2, -3, 5)$ 且垂直于直线 $L_1: \frac{x-1}{3} = -\frac{y}{5} = \frac{z-4}{4}$ 及 $L_2: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{2}$ 直线方程.

解 直线 L_1, L_2 的方向向量分别为 $s_1 = (3, -5, 4)$, $s_2 = (1, -4, 2)$. 由于 $s_1 \nparallel s_2$, 垂直于这两条直线的直线的方向向量为 $s = s_1 \times s_2 = (6, -2, -7)$. 故直线的对称式方程为 $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{-7}$.

5. 已知一平面通过直线 $l_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-2}$ 且与直线 $l_2: \begin{cases} \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1} \\ x = 1 \end{cases}$ 平行, 试求此平面方程.

解 直线 l_1 的方向向量为 $s_1 = (2, -1, 2)$, 直线 l_2 的方向向量 $s_2 = (0, 1, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, -1)$. 由此即可得所求平面的法向量 $n = s_1 \times s_2 = (-1, 2, 2)$. 再由直线 l_1 过点 $(0, 0, 2)$. 由点法式得所求平面方程为 $-1(x-0) + 2(y-0) + 2(z-2) = 0 \Rightarrow -x + 2y + 2z - 4 = 0$.

四[*]. 综合题

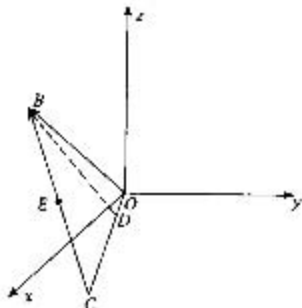


图 8-27

如图 8-27 所示, 设 $\triangle ABC$ 的顶点 A 在坐标原点, BD 为 AC 边上的高, E 是 BC 边的中点, 且 $\overrightarrow{AB} = 2i - 2j + k$, $\overrightarrow{EB} = -i - \frac{1}{2}j + k$, 试求

(1) 通过 AB 边且垂直 $\triangle ABC$ 的平面方程;

(2) 过点 C 且平行于 BD 的直线方程.

解 (1) 由 $\overrightarrow{AB} = 2i - 2j + k$, $\overrightarrow{EB} = -i - \frac{1}{2}j + k$ 得 $B(2, -2, 1)$, $E(3, -\frac{3}{2}, 0)$. 再由 E 是 BC 的中点得 $C(4, -1, -1)$. $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{EB} = (-\frac{3}{2}, -3, -3)$. 故向量 $(1, 2, 2)$ 与所求平面平行. 再由平面过 AB 边得其法向量为 $n = (1, 2, 2) \times (2, -2, 1) = (6, 3, -6)$. 可取法向量为 $n = (2, 1, -2)$. 由点法式得所求平面方程(过原点)为 $2x + y - 2z = 0$.

(2) 以 $\overrightarrow{OC}$ 为法向量并过点 B 的平面方程为 $\pi: 4(x-2) - (y+2) - (z-1) = 0 \Rightarrow 4x - y - z - 9 = 0$. 平面 π 与平面 OBC 的交线就是 BD , 与直线 OC 的交点为 D . 由于直线 OC 的方程为 $x = 4t, y = -t, z = -t, t \in \mathbb{R}$. 解之得 $t = \frac{1}{2}$. 即 $D(2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. 从而 $\overrightarrow{BD} = (0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$. 由于所求直线平行于 BD , 故可取其方向向量 $s = (0, 1, -1)$. 从而所求直线方程为 $\frac{x-2}{0} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

五. 证明题: $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$.

解 习题 8 中有相同的题目.

六. 应用题

1. 求直线 $l_1: \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ 与直线 $l_2: \begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+2y+2z=-4 \end{cases}$ 之间的距离.

解 直线 l_1 的方向向量 $s_1 = (1, 1, -1) \times (2, 1, -1) = (0, -1, -1)$, $M_1(1, 0, 0) \in l_1$. 直线 l_2 的方向向量 $s_2 = (1, 2, -1) \times (1, 2, 2) = (6, -3, 0)$, $M_2(0, 0, -2) \in l_2$. $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 0, -2)$. $s_1 \times s_2 = (-3, -6, 6)$. 从而两条直线间的距离为 $d = \frac{|s_1 \times s_2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|s_1 \times s_2|} = \frac{9}{9} = 1$.

2. 若向量 $a + 3b$ 垂直于 $7a - 5b$, $a - 4b$ 垂直于 $7a - 2b$, 试求向量 a 与 b 的夹角.

解 由垂直关系得 $(a + 3b) \cdot (7a - 5b) = 0$, $(a - 4b) \cdot (7a - 2b) = 0$. 解出 $a^2 = b^2 = 2a \cdot b$. 从而 $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a \cdot b}{2a \cdot b} = \frac{1}{2}$. 所以 $(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{3}$.

1. 求下列函数的定义域, 并作图表示定义域

$$(1) z = \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}; (2) z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}; (3) z = \sqrt{x \sin y}; (4) z = \ln[x \ln(y-x)].$$

解 (1) $D = \{(x, y) | -x < y < x\}$; (2) $D = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$; (3) $x \sin y \geq 0 \Rightarrow D = \{(x, y) | x \geq 0, y \in [2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x, y) | x \leq 0, y \in [(2k-1)\pi, 2k\pi], k \in \mathbb{Z}\}$ (实际上, 当 $x=0$ 时可任取 $y \in \mathbb{R}$); (4) $D = \{(x, y) | x > 0, y > x+1\} \cup \{(x, y) | x < 0, x < y < x+1\}$.

2. 求下列函数的极限

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}; (2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x}; (3) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}; (4) [*] \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}; (5) [*] \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}}.$$

$$\text{解 (1)} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt{xy+1} + 1) = 2;$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} y = 0;$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}} - 2 \cdot \frac{x}{e^x} \cdot \frac{y}{e^y} \right) = 0;$$

(4) 由不等式

$$|x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} |\ln(x^2 + y^2)|$$

及

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} |\ln(x^2 + y^2)| \stackrel{t=x^2+y^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{4} t^2 \ln t = 0,$$

即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)} = e^0 = 1.$$

(5) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy} \cdot \frac{m}{m}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{m x^m y^m}{m x^m y^m} = -\frac{1}{m}$ 与 m 有关, 从而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y}$ 不存在, 所以该极限不存在.

3. 求下列函数的偏导数

$$(1) z = \ln \tan \frac{x}{y}; (2) z = \arcsin(y \sqrt{x}); (3) z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; (4) z = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{x}}; (5) z = \arctan \sqrt{xy}; (6) z = xy e^{\sin xy}; (7) u = x^{\frac{1}{2}}; (8) u = e^{x^2 y^2 z^2}.$$

$$\text{解 (1)} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{y \sin \frac{2x}{y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\tan \frac{x}{y}} \sec^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{2x}{y^2 \sin \frac{2x}{y}}. \quad (2) z'_x = \frac{y}{2\sqrt{1-y^2}}, \quad z'_y = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}. \quad (3) z'_x = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad z'_y = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (4) z'_x = -\frac{1}{x^2} \cdot 3 \cdot \ln 3, \quad z'_y = \frac{\ln 3}{x} \cdot 3 \cdot \ln 3.$$

$$(5) z'_x = \frac{y x^{\frac{1}{2}-1}}{2(1+x^2)}, \quad z'_y = \frac{x^{\frac{1}{2}} \ln x}{2(1+x^2)}. \quad (6) z'_x = y e^{\sin xy} (1 + \pi xy \cos \pi xy), \quad z'_y = x e^{\sin xy} (1 + \pi xy \cos \pi xy).$$

$$(7) u'_x = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \quad u'_y = x^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x}, \quad u'_z = -x^{\frac{1}{2}} \frac{y \ln x}{x}. \quad (8) u'_x = 2xy^2 z^2 e^{x^2 y^2 z^2}, \quad u'_y = 3x^2 y z^2 e^{x^2 y^2 z^2}, \quad u'_z = 5x^2 y^2 z e^{x^2 y^2 z^2}.$$

4. 求下列函数在给定点的偏导数

$$(1) z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ 求 } z'_x(3, 4);$$

$$(2) z = (1 + xy)^y, \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,1)}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(1,1)};$$

$$(3) z = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}, \text{ 求 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0,0)}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0,0)};$$

$$(4) u = \sqrt{\sin x + \sin^2 y}, \text{求 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$(5) z = e^{-x} \sin(x+2y), \text{求 } \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(0, \frac{\pi}{4})}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(0, \frac{\pi}{4})}.$$

$$(6) u = \ln(1+x+y^2+z^3), \text{求当 } x=y=z=1 \text{ 时 } u'_x+u'_y+u'_z.$$

$$\text{解 } (1) z'_x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_x(3,4) = \frac{2}{5};$$

$$(2) z'_x = y^2(1+xy)^{-1}, z'_x(1,1) = 1. z'_y = (1+xy)^y \left[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy} \right], z'_y(1,1) = 1+2\ln 2.$$

$$(3) z'_x = \frac{1}{(1+\sin x+\sin y)^2} [(\cos y + y \sin x)(1+\sin x+\sin y) - (x \cos y - y \cos x) \cos x], z'_x(0,0) =$$

$$1. z'_y = \frac{1}{(1+\sin x+\sin y)^2} [(-x \sin y - \cos x)(1+\sin x+\sin y) - (x \cos y - y \cos x) \cos y], z'_y(0,0) = -1.$$

$$(4) u'_y = \frac{\sin 2y}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}}, u'_y(0,0,\frac{\pi}{4}) = 0.$$

$$(5) z'_x = e^{-x} [\cos(x+2y) - \sin(x+2y)], z'_x(0,\frac{\pi}{4}) = -1. z'_y = 2e^{-x} \cos(x+2y), z'_y(0,\frac{\pi}{4}) = 0.$$

$$(6) u'_x = \frac{1}{1+x+y^2+z^2}, u'_y = \frac{2y}{1+x+y^2+z^2}, u'_z = \frac{2z^2}{1+x+y^2+z^2}. (u'_x+u'_y+u'_z)(1,1,1) = \frac{1+2y+3z^2}{1+1+1+1} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{3}{2}.$$

5. 求下列函数的全微分

$$(1) z = \frac{x+y}{x-y}; (2) z = \arcsin \frac{x}{y}; (3) z = x^y; (4) z = \sqrt{\frac{x}{y}}; (5) u = x^{yz}.$$

$$\text{解 } (1) z = \frac{x+y}{x-y}, z'_x = \frac{-2y}{(x-y)^2}, z'_y = \frac{2x}{(x-y)^2}, dz = \frac{-2y}{(x-y)^2} dx + \frac{2x}{(x-y)^2} dy = \frac{2(xy-ydx)}{(x-y)^2};$$

$$(2) z = \arcsin \frac{x}{y}, z'_x = \frac{1}{y\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}, z'_y = -\frac{x}{y^2\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}, dz = \frac{ydx-xydy}{y^2\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}};$$

$$(3) z = x^y, z'_x = yx^{y-1}, z'_y = x^y \ln x, dz = x^{y-1}(ydx + x \ln x dy);$$

$$(4) z = \sqrt{\frac{x}{y}}, z'_x = \frac{1}{2\sqrt{xy}}, z'_y = -\frac{x}{2y\sqrt{xy}}, dz = \frac{1}{2\sqrt{xy}}(dx - \frac{x}{y} dy) \text{ (注意: 当 } x > 0 \text{ 时, } y > 0; \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } y < 0 \text{ 即 } x, y \text{ 同号)};$$

$$(5) u = x^{yz}, u'_x = yzx^{yz-1}, u'_y = z x^{yz} \ln x, u'_z = y x^{yz} \ln x, du = x^{yz-1}(yz dx + z x \ln x dy + xy \ln x dz).$$

6. 在给定条件下, 求下列函数的全增量及全微分

$$(1) z = x^2 y^3 \text{ 当 } x=2, y=-1, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.01 \text{ 时的全增量及全微分};$$

$$(2) z = \frac{y}{x} \text{ 当 } x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=0.2 \text{ 时的全增量及全微分};$$

$$(3) z = 2x^2 + 3y^2 \text{ 当 } x=10, y=8, \Delta x=0.2, \Delta y=0.3 \text{ 时的全增量及全微分, 并估计用 } dz \text{ 代替 } \Delta z \text{ 所产生的相对误差}.$$

解

$$(1) \Delta z = (2+0.02)^2 \times (-1-0.01)^3 - 2^2 \times (-1)^3 \approx -0.204. z'_x = 2xy^3, z'_x(2,-1) = -4, z'_y = 3x^2 y^2, z'_y(2,-1) = 12, dz = -4 \times 0.02 + 12 \times (-0.01) = -0.2.$$

$$(2) \Delta z = \frac{1.2}{2.1} - \frac{1}{2} \approx 0.0714. z'_x = -\frac{y}{x^2}, z'_y = \frac{1}{x}, z'_x(2,1) = -\frac{1}{4}, z'_y(2,1) = \frac{1}{2}, dz = -\frac{1}{4} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.2 = 0.075.$$

$$(3) \Delta z = 2 \cdot (10.2)^2 + 3 \cdot 8.3^2 - (2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 8^2) = 22.75. z'_x = 4x, z'_x(10,8) = 40, z'_y = 6y, z'_y(10,8) = 48, dz = 40 \times 0.2 + 48 \times 0.3 = 22.4. \text{ 相对误差为 } \frac{\Delta z - dz}{\Delta z} \approx 0.015 = 1.5\%.$$

7. 计算下列各式的近似值

$$(1) \sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}; (2) \ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[3]{0.98} - 1); (3) (10.1)^{2.03}.$$

$$\text{解 } (1) \text{ 令 } f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}, x=1, y=2, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.03. f'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}, f'_x(1,2) = \frac{1}{2}, f'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}, f'_y(1,2) = 2. f(1.02, 1.97) = \sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3} \approx 3 + \frac{1}{2} \cdot 0.02 + 2 \times (-0.03) = 3 - 0.05 = 2.95.$$

$$(2) \text{ 令 } f(x,y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - 1), x=1, y=1, \Delta x=0.03, \Delta y=-0.02. f'_x = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}, f'_x(1,1) = \frac{1}{3}, f'_y(1,1) = \frac{1}{3}. \ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[3]{0.98} - 1) \approx \frac{1}{3} \times 0.03 + \frac{1}{3} \times (-0.02) = 0.005.$$

$$(3) \text{ 令 } f(x,y) = x^y. x=10, y=2, \Delta x=0.1, \Delta y=0.03. f'_x = yx^{y-1}, f'_y = x^y \ln x. f(10,2) = 100, f'_x(10,2) = 20, f'_y(10,2) = 100 \ln 10. (10.1)^{2.03} \approx 100 + 20 \times 0.1 + 100 \ln 10 \times 0.03 = 102 +$$

8. 求曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$, 在点 $(1, 1, \sqrt{3})$ 处的切线与 Oy 轴正向所成的夹角.

解 将 $x=1$ 代入 $z = \sqrt{1+x^2+y^2}$ 得 $z = \sqrt{2+y^2}$. $z'_y = \frac{y}{\sqrt{2+y^2}}$. 由偏导数的几何意义, 在点 $(1, 1, \sqrt{3})$ 处的切线关于 y 轴的正向所成的夹角正切值为 $\tan \theta = \frac{y'_y}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$.

9. 当圆锥体变形时, 其底半径 R 由 30 cm 增加到 30.1 cm, 高 H 由 60 cm 减少到 59.5 cm. 试求体积变化的近似值.

解 圆锥体的体积 $V(R, H) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. 令 $R = 30, H = 60, \Delta R = 0.1, \Delta H = -0.5$. $V'_R = \frac{2}{3}\pi RH, V'_H = \frac{1}{3}\pi R^2$. $V'_R(30, 60) = 1200\pi, V'_H(30, 60) = 300\pi$. $\Delta(30, 60) \approx 1200\pi \times 0.1 + 300\pi \times (-0.5) = -30\pi$.

10. 利用全微分, 证明两函数 $u(x)$ 及 $v(x)$ 乘积 $u(x) \cdot v(x)$ 的相对误差等于 u 及 v 的相对误差之和; 又商 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 的相对误差等于 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的相对误差之差.

证 $u(x)v(x)$ 的相对误差为

$$\frac{\Delta(uv)}{uv} \approx \frac{d(uv)}{uv} = \frac{u dv + v du}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}.$$

而 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 的相对误差为

$$\frac{\Delta(u/v)}{u/v} \approx \frac{d(u/v)}{u/v} = \frac{\frac{v du - u dv}{v^2}}{u/v} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} = \frac{\Delta u}{u} - \frac{\Delta v}{v}.$$

11. 求下列复合函数的导数

(1) $z = u^2 \ln v, u = \frac{x}{y}, v = 3x - 2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) $z = \frac{y}{x}, x = e^t, y = 1 - e^{2t}$, 求 $\frac{dz}{dt}$;

(3) $z = \frac{u^2}{v}, u = x - 2y, v = 2x + y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(4) $z = (2x + y)^{2xy}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$;

(5) $z = f(x, y), x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 求 $\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial \theta}$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2u \ln v \cdot \frac{1}{y} + 3 \frac{u^2}{v} = \frac{2x^2}{y^2} \ln(3x - 2y) + \frac{3x^2}{y^2(3x - 2y)}$,
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2u \ln v \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) - 2 \frac{u^2}{v} = -\frac{2x^2}{y^2} \ln(3x - 2y) - \frac{2x^2}{y^2(3x - 2y)}$;

(2) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{x^2} \cdot e^t + \frac{1}{x} (-2e^{2t}) = -e^t - e^{-t}$;

(3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u}{v} - \frac{2u^2}{v^2} = \frac{2(x-2y)(x+3y)}{(2x+y)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2u}{v} - \frac{u^2}{v^2} = \frac{(2y-x)(3x+2y)}{(2x+y)^2}$;

(4) 令 $u = 2x + y, v = 2x + y$, 则 $z = u^v$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2vu^{v-1} + 2u^v \ln u = 2(2x + y)^{2xy+1} [1 + \ln(2x + y)]$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = vu^{v-1} + u^v \ln u = (2x + y)^{2xy+1} [1 + \ln(2x + y)]$;

(5) $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = f'_x \cos \theta + f'_y \sin \theta, \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -rf'_x \sin \theta + rf'_y \cos \theta$.

12. 证明函数 $z = \arctan \frac{u}{v}$, 其中 $u = x + y, v = x - y$ 满足关系式 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{x^2+y^2}$.

证 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{u^2+v^2} - \frac{u}{u^2+v^2} = \frac{v-u}{u^2+v^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v}{u^2+v^2} + \frac{u}{u^2+v^2} = \frac{v+u}{u^2+v^2}$. 所以
 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2v}{u^2+v^2} = \frac{x-y}{x^2+y^2}$.

13. 设 $z = xy + xF(u), u = \frac{y}{x}$, 化简 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = y + F(u) + xF'(u) \left(-\frac{y}{x^2}\right) = y + F(u) - \frac{yF'(u)}{x}, \frac{\partial z}{\partial y} = x + xF'(u) \frac{1}{x} = x + F'(u)$. 所以
 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + xF(u) = xy + z$.

14. 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_1(x^2 - y^2, e^{xy}) + ye^{xy}f'_2(x^2 - y^2, e^{xy}), \frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_1(x^2 - y^2, e^{xy}) + xe^{xy}f'_2(x^2 - y^2, e^{xy})$.

证 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy}{f(x^2-y^2)} \cdot \frac{f'(x^2-y^2)}{f'(x^2-y^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2-y^2) = -\frac{2y}{f(x^2-y^2)} \cdot f'(x^2-y^2) \cdot 2x = -\frac{2xy}{f(x^2-y^2)} \cdot f'(x^2-y^2) \cdot 2$
 $y^2) + \frac{2xy}{f(x^2-y^2)} \cdot f'(x^2-y^2) \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2-y^2) = \frac{2xy}{f(x^2-y^2)} \cdot f'(x^2-y^2) \cdot (-2y) = -\frac{2xy}{f(x^2-y^2)} \cdot f'(x^2-y^2) \cdot 2y$
 课后答案网: www.hackshp.cn
 请来信告知! www.hackshp.cn

16. 若函数 $f(x, y)$ 满足 $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$, 则称 $f(x, y)$ 为 k 次齐次函数. 证明:

(1) 零次齐次可微分函数 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足关系式 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

(2) k 次齐次函数 $f(x, y, z)$ 满足关系式 $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = kf$.

证 (1) $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}$, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.

(2) 因为 $f(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数, 所以有 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$. 等式两边对 t 求导得

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, tz) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty, tz) + z \frac{\partial f}{\partial z}(tx, ty, tz) = kt^{k-1} f(x, y, z)$$

再上式两边令 $t = 1$ 得 $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = kf(x, y, z)$.

17. 设 $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$, 证明: $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

证 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y^2}{3x^2} + y\varphi'(xy)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{3x} + x\varphi'(xy)$, $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = \left(-\frac{y^2}{3} + x^2 y \varphi'(xy)\right) + \left(-\frac{2y^2}{3} - x^2 y \varphi'(xy)\right) - y^2 = 0$.

18. 设函数 $u = z \arctan \frac{z}{y}$, 证明 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

证 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yz}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{yz}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \arctan \frac{z}{y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. 所以有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

19. 求下列隐函数的导数

(1) $xy + \ln y + \ln x = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(2) $\sin y + e^x - xy^2 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$;

(3) $e^x - xyz = 0$, 求 $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$;

(4) $\frac{z}{x} = \ln \frac{y}{z}$, 求 $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$.

解 (1) 由 $xy + \ln y + \ln x = 0$ 等式两边同时微分得 $x dy + y dx + \frac{1}{y} dy + \frac{1}{x} dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$;

(2) 由 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$ 等式两边同时微分得 $\cos y dy + e^x dx - y^2 dx - 2xy dy = 0 \Rightarrow (e^x - y^2) dx + (\cos y - 2xy) dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y^2}{2xy - \cos y}$.

(3) 由 $e^x - xyz = 0$ 等式两边同时微分得 $e^x dz - yz dx - xz dy - xy dz = 0 \Rightarrow (e^x - xy) dz - yz dx - xz dy = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{yz}{e^x - xy}$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{xz}{e^x - xy}$;

(4) 由 $\frac{z}{x} = \ln \frac{y}{z}$ 等式两边同时微分得 $\frac{1}{x} dx - \frac{z}{x^2} dz = \frac{y}{z} \left(-\frac{1}{y} dy + \frac{1}{z} dz\right) \Rightarrow -\frac{1}{x^2}(x+z) dz + \frac{1}{x} dx + \frac{1}{z} dy = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{x}{x+z}$, $\frac{dz}{dy} = \frac{z}{y(x+z)}$.

20. 设 $f(x, y, z) = xy^2z^3$, 其中 $z = \varphi(x, y)$ 为由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 所定义的隐函数, 求 $f'_x(1, 1, 1)$.

解 方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ 求微分得 $2x dx + 2y dy + 2z dz = 3yz dx + 3xz dy + 3xy dz \Rightarrow (2z - 3xy) dz = (3yz - 2x) dx + (3xz - 2y) dy \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{3yz - 2x}{2z - 3xy}$, $f'_x(x, y, z) = y^2 z^3 + 3xy^2 z^2 \frac{dz}{dx} = y^2 z^3 + 3xy^2 z^2 \frac{3yz - 2x}{2z - 3xy}$, $f'_x(1, 1, 1) = -2$.

21. 设 $u = x + 2y + 2$, $v = x - y - 1$, 变换方程 $2z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} + z'_x + z'_y = 0$.

解 因为 $u = x + 2y + 2$, $v = x - y - 1$, 所以 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. 代入方程 $2z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} + z'_x + z'_y = 0$ 得 $2z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} + z'_x + z'_y = 0$.

22. 求下列函数的极值

(1) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;

(2) $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$.

解 (1) $z = 2xy - 3x^2 + 2y^2 + 10$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 6x = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 4y = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6 < 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$. 记 $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -20 < 0$, 所以函数在 $(0, 0)$ 处取得极大值 $z(0, 0) = 10$.

(2) $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 6y = -3y(y-2) = 0 \Rightarrow x = 1, -3, y = 0, 2$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 6$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y + 6$. (i) $\Delta(1, 0) = 72 > 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 0) = 12 > 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, 0) = 6 > 0$. 所以函数在 $(1, 0)$ 处取得极小值 $z(1, 0) = -5$. (ii) $\Delta(1, 2) = -72 < 0$. 所以函数在 $(1, 2)$ 处不取得极值. (iii) $\Delta(-3, 0) = -72 < 0$. 所以函数在 $(-3, 0)$ 处不取得极值. (iv) $\Delta(-3, 2) = 72 > 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(-3, 2) = -12 < 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(-3, 2) = -6 < 0$. 所以函数在 $(-3, 2)$ 处取得极大值 $z(-3, 2) = 31$.

23. 证明函数 $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值而无一个极小值.

证 $f'_x = -(1 + e^y) \sin x = 0$, $f'_y = e^y(\cos x - 1 - y) = 0 \Rightarrow \sin x = 0, \cos x = 1 + y$. 从而驻点为 $(2k\pi, 0)$ 和 $((2k+1)\pi, -2)$, $k \in \mathbb{Z}$. $f''_{xx} = -(1 + e^y) \cos x$, $f''_{xy} = -e^y \sin x$, $f''_{yy} = e^y(\cos x - 2 - y)$. 由于 $f''_{xx}(2k\pi, 0) = -2 < 0$, $f''_{xy}(2k\pi, 0) = 0$, $f''_{yy}(2k\pi, 0) = -1$, $\Delta(2k\pi, 0) = 2 > 0$. 所以在 $(2k\pi, 0)$ 处取得无穷多个极大值. 由于 $f''_{xx}((2k+1)\pi, -2) = 1 + e^{-2}$, $f''_{xy}((2k+1)\pi, -2) = 0$, $f''_{yy}((2k+1)\pi, -2) = -e^{-2}$, $\Delta((2k+1)\pi, -2) = -(e^{-2} + e^{-4}) < 0$. 所以在 $((2k+1)\pi, -2)$ 处不取得极值.

24. 设有一宽为 24 cm 的长方形铁板, 把它的两边对折起来做成一断面为等腰梯形的水槽. 试问应怎样折法, 才能使断面的面积最大? (参见同济版的例题)

解 设等腰梯形的下底边长、腰长以及腰与上底边的小于 90 度的夹角分别为 a, b, θ . 此时, 上底边长为 $a + 2b \cos \theta$, 高为 $b \sin \theta$. 满足条件 $a + 2b = 24$, 即 $a = 24 - 2b$. 从而断面面积为

$$S(b, \theta) = \frac{1}{2} (a + a + 2b \cos \theta) b \sin \theta = (24 - 2b)b \sin \theta + b^2 \sin \theta \cos \theta.$$

从而一阶条件为

$$S'_b = 24 \sin \theta - 4b \sin \theta + b^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$S'_\theta = (24 - 2b)b \cos \theta + b^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$$

解得 $b = 8, \theta = \frac{\pi}{3}$.

25. 某工厂生产甲、乙两种产品, 出售单价分别为 10 万元和 9 万元. 已知生产 x 件甲产品和 y 个乙产品的总成本为 $C(x, y) = 400 + 2x + 3y + 0.01(3x^2 + xy + 3y^2)$ (万元), 试求两种产品各生产多少件时, 可获利润最大, 并求最大利润.

解 $L(x, y) = R(x, y) - C(x, y) = (10x + 9y) - [400 + 2x + 3y + 0.01(3x^2 + xy + 3y^2)] = -400 + 8x + 6y - 0.03x^2 - 0.01xy - 0.03y^2$. $L'_x = 8 - 0.06x - 0.01y = 0$, $L'_y = 6 - 0.01x - 0.06y = 0 \Rightarrow 6x + y = 800, x + 6y = 600 \Rightarrow x = 120, y = 80$. 此时最利润为 $L(120, 80) = 320$.

26. 某工厂生产两种产品, 总成本函数为 $C = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 5$, 两种产品的需求函数分别为 $Q_1 = 26 - P_1, Q_2 = 10 - \frac{1}{4}P_2$. 为使利润最大, 试确定两种产品的产量及最大利润.

解 由需求函数分别为 $Q_1 = 26 - P_1, Q_2 = 10 - \frac{1}{4}P_2$ 得 $P_1 = 26 - Q_1, P_2 = 40 - 4Q_2$. 总收入 $R(Q_1, Q_2) = (26 - Q_1)Q_1 + (40 - 4Q_2)Q_2$. 利润为 $L(Q_1, Q_2) = R(Q_1, Q_2) - C(Q_1, Q_2) = -2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 5Q_2^2 + 26Q_1 + 40Q_2 - 5$. $L'_{Q_1} = -4Q_1 - 2Q_2 + 26 = 0, L'_{Q_2} = -2Q_1 - 10Q_2 + 40 = 0 \Rightarrow Q_1 = 5, Q_2 = 3$. 此时最大利润为 $L(5, 3) = 120$.

27. 某工厂的同一种产品分销两个独立市场, 两个市场的需求情况不同, 设价格函数分别为 $P_1 = 60 - 3Q_1, P_2 = 20 - 2Q_2$, 厂商的总成本函数为 $C = 12Q + 4, Q = Q_1 + Q_2$. 工厂以最大利润为目标, 试求投放每个市场的产量, 并确定此时每个市场的价格.

解 $R(Q_1, Q_2) = (60 - 3Q_1)Q_1 + (20 - 2Q_2)Q_2$. 问题转化为在满足条件 $Q = Q_1 + Q_2$ 的条件下最大化 $L(Q, Q_1, Q_2, \lambda) = R(Q, Q_1, Q_2) - \lambda(Q - Q_1 - Q_2)$. 则其一阶条件为 $F'_{Q_1} = -6Q_1 + 48 = 0, F'_{Q_2} = -4Q_2 + 8 = 0 \Rightarrow Q_1 = 8, Q_2 = 2$. 从而 $P_1 = 36, P_2 = 16$.

28. 生产某种产品需要两种生产要素投入, 以 K 和 L 表示这两种要素. 显然, 产量 Q 是 K 和 L 的函数. 现设产量函数 Q 和成本函数 C 分别为 $Q = 8K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}, C = 2K + 4L$. 当产量 $Q_0 = 64$ 时, 求成本最低的投入组合及最低成本.

解 问题为: 在条件 $Q_0 = 8K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$ 下, 求函数 $C(K, L) = 2K + 4L$ 的最小值. 作 Lagrange 函数: $F(K, L, \lambda) = 2K + 4L + \lambda(64 - 8K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}})$. 其一阶条件为 $F'_K = 2 - 2\lambda K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}} = 0, F'_L = 4 - 4\lambda K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}} = 0, F'_\lambda = 64 - 8K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}} = 0$. 由第一个方程得 $K = \lambda K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$, 由第二个方程得 $L = \lambda K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$, 所以有 $L = K$. 代入第三个方程得 $K = L = 16$. 从而最低成本为 $C(16, 16) = 96$.

29. 用最小二乘法求与下表给定数据最相合的函数 $y = ax + b$.

表 9-2

x	10	20	30	40	50	60
y	150	100	40	0	-60	-100

解 $a = -\frac{177}{33}, b = \frac{596}{3}$.

综合练习九

一. 选择题

1. 设二元函数 $z = \arcsin(1-y) + \sqrt{x-y}$ 的定义域为 D , 则 $D = \underline{C}$.
A. $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 2\}$; B. $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 2 \text{ 且 } 0 \leq y \leq 2\}$; C. $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 2 \text{ 且 } x \geq y\}$; D. $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 2 \text{ 且 } y \leq x\}$.

2. 设 $f(x+y, xy) = x^3 + y^3$, 则 $f(x, y) = \underline{B}$.

A. $x^3 + 3xy$; B. $x^3 - 3xy$; C. $x^3 - xy$; D. $x^3 + xy$.

解 由 $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$ 得 $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x+y)^3 - 3(x+y)xy$.

3. 设 $z = (1 + e^y) \cos x - ye^x$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = \underline{D}$.

A. $e^y(\cos x - y)$; B. $e^y(\cos x - 1)$; C. $e^y(-y - 1)$; D. $e^y(\cos x - y - 1)$.

4. 设 $u = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 在点 $(2, \frac{1}{2})$ 处的值为 C.

A. 0; B. $\frac{\pi}{e}$; C. $(\frac{\pi}{e})^2$; D. $-(\frac{\pi}{e})^2$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x} \sin \frac{x}{y} + e^{-x} \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}$. 从而有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -e^{-x} \cos \frac{x}{y} \cdot (-\frac{x}{y^2}) - e^{-x} \sin \frac{x}{y} \cdot (-\frac{1}{y^2}) - e^{-x} \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y^3} = e^{-x} \frac{x-1}{y^3} \cos \frac{x}{y} + e^{-x} \frac{x}{y^3} \sin \frac{x}{y}$. 因此 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(2, \frac{1}{2})} = (\frac{\pi}{e})^2$.

5. $z = e^{\sin xy}$, 则 $dz = \underline{D}$.

A. $e^{\cos xy}(ydx + xdy)$; B. $e^{\sin xy}(ydx + xdy)$; C. $e^{\cos xy} \sin xy(ydx + xdy)$; D. $e^{\sin xy} \cos xy(ydx + xdy)$.

解 由一阶全微分形式不变性: $dz = e^{\sin xy} d(\sin xy) = e^{\sin xy} \cos xy d(xy) = e^{\sin xy} \cos(xy)(x dy + y dx)$.

6. $u = \cos \frac{x}{3} + 2y + e^{xy}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \underline{C}$.

A. $-\sin \frac{x}{3} + 2 + e^{xy}$; B. $-\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + e^{xy}$; C. $-\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + ye^{xy}$; D. $\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + ye^{xy}$.

二. 判断下列命题的正确性

1. 二元函数 $z = f(x, y)$ 连续, 则它的两个偏导数一定存在. (错)

2. $z = f(x, y)$ 的两个偏导数存在, 则它必定是连续函数.(错)
 3. $z = f(x, y)$ 的两个偏导数存在且连续, 则它必定是可微函数.(错)
 4. $z = f(x, y)$ 的两个偏导数存在且连续, 是其可微的充分条件.(对)
 5. $z = f(x, y)$ 可微, 则它的两个偏导数不仅存在且连续.(错)
 6. $z = f(x, y)$ 可微, 则它一定是连续函数.(对)

三. 填空题

1. 设 $z = (1 + xy)^y$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 1 + 2 \ln 2$.

解 方程两边同时取自然对数得 $\ln z = y \ln(1 + xy)$. 再方程两边同时对 y 求导得 $\frac{1}{z} z'_y = \ln(1 + xy) + \frac{xy}{1+xy} \implies z'_y = (1 + xy)^y \left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1+xy} \right]$. 从而 $z'_y|_{(1,1)} = 1 + 2 \ln 2$.

2. 设 $u = \sin(xy) + \cos(yz) + \cot(xz)$, 则 $du = [y \cos(xy) - z \csc^2(xz)]dx + [x \cos(xy) - z \sin(yz)]dy - [y \sin(yz) + x \csc^2(xz)]dz$.

解 $du = \cos(xy)(x dy + y dx) - \sin(yz)(y dz + z dy) - \csc^2(xz)(x dz + z dx) = [y \cos(xy) - z \csc^2(xz)]dx + [x \cos(xy) - z \sin(yz)]dy - [y \sin(yz) + x \csc^2(xz)]dz$.

3. 设 $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$.
 4. 设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_1 + xe^{xy}f'_2$.
 5. 设 $z = y^{\ln x}$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^{\ln x} \left(\frac{\ln x \ln y + 1}{xy} \right)$.

四. 计算下列各题

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

解 由于 $0 \leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2}$, 再由两边夹定理即可得.

2. $z = e^{xy} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + (y-1) \arctan \sqrt{\frac{z}{y}}$, 求 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,1)}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \arctan \sqrt{\frac{z}{y}} + (y-1) \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{y}}}{1+\frac{z}{y}}$. 在此式上直接代入点 $(1, 1)$ 即得值为 $\frac{\pi}{4}$.

3. 方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 确定 z 为 x, y 的函数, 求 $dz|_{(1,0,-1)}$.

解 方程两边同时微分得 $d(xyz) + \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0 \implies yzdx + xzdy + xydz + \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0 \implies dz = -\frac{1}{z+xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}} [(x+yz\sqrt{x^2+y^2+z^2})dx + (y+xz\sqrt{x^2+y^2+z^2})dy]$. 从而 $dz|_{(1,0,-1)} = dx - \sqrt{2}dy$.

4[*]. 设 $z = f(xy^2, x^2y)$ 具有连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y^2 f'_1 + 2xy f'_2 \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 2y f'_1 + 2xy^3 f''_{11} + x^2 y^2 f''_{12} + 2x f'_2 + 4x^2 y^2 f''_{21} + 2x^3 y f''_{22} \\ &= 2y f'_1 + 2xy^3 f''_{11} + 5x^2 y^2 f''_{12} + 2x f'_2 + 2x^3 y f''_{22}. \end{aligned}$$

5. 函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $z^5 - xz^4 + yz^3 = 1$ 所确定, 且 $f(0, 0) = 1$, 求 $f''_{xy}(0, 0)$.

解 方程 $z^5 - xz^3 - yz = 1$ 两边同时对 x 求导得

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$5z^4 z'_x - z^4 - 4xz^3 z'_x + 3yz^2 z'_x = 0, \quad (*)$$

直接将 $(0, 0)$ 代入 $(*)$ 式得 $z'_x|_{(0,0)} = \frac{1}{5}$. 原方程两边同时对 y 求导得 $5z^4 z'_y - 4xz^3 z'_y + z^3 + 3yz^2 z'_y = 0$, 直接将 $(0, 0)$ 代入得 $z'_y|_{(0,0)} = -\frac{1}{5}$. $(*)$ 式两边再同时对 y 求导得

$$20z^3 z'_y z''_x + 5z^4 z''_{xy} - 4z^3 z''_y - 12xz^2 z'_y z'_x - 4xz^3 z''_{xy} + 3z^2 z'_x + 6yz z'_y z'_x + 3yz^2 z''_{xy} = 0,$$

直接代入 $(0, 0)$ 解得 $z''_{xy}|_{(0,0)} = -\frac{3}{25}$.

6. 设 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, 且当 $x = 0$ 时 $z = \sin y$; 当 $y = 0$ 时 $z = \sin x$, 试确定 z 为 x, y 的函数的关系式.

解 (法一) 方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$ 两边对 y 积分一次得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + f(x)$$

方程两边再对 x 积分得

$$z = xy + \int_0^x f(t) dt + g(y).$$

由 $x = 0$ 时, $z = \sin y$ 得 $z = g(y) = \sin y$. 从而有 $z(x, y) = xy + \int_0^x f(t) dt + \sin y$. 再由 $y = 0$ 时 $z = \sin x$ 得 $z = \int_0^x f(t) dt + \sin x$. 因此, $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x) = \cos x$. 即 $z = \sin x$. 最后我们得到 $z = xy + \sin x + \sin y$.

(法二) 由方程 $\frac{\partial z}{\partial x \partial y} = 1$ 两边同时对 x 积分得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + C_1(y)$$

再对 y 积分得

$$z = xy + \int C_1(y) dy + C_2(x).$$

由条件当 $x = 0$ 时 $z = \sin y$ 得

$$z = \int C_1(y) dy + C_2(0) = \sin y.$$

等式两边同时对 y 求导得

$$C_1(y) = \cos y.$$

从而 $z = xy + \int \cos y dy + C_2(x) = xy + \sin y + C_2(x)$. 再由条件当 $y = 0$ 时 $z = \sin x$ 得 $z = C_2(x) = \sin x$. 从而有

$$z = xy + \sin x + \sin y.$$

五. 证明题

设 $\Phi(u, v)$ 为可微函数, 证明由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数 $z = z(x, y)$ 满足关系式 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$.

证 原方程两边同时对 x 求导得 $\Phi'_1(c - az'_x) + \Phi'_2(-bz'_x) = 0 \Rightarrow z'_x = \frac{c\Phi'_1}{a\Phi'_1 + b\Phi'_2}$. 原方程两边

六. 应用题

1[*]. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(2, 1, 5)$ 处的切平面方程及法线方程.

解 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. 则 $F'_x = 2x, F'_y = 2y, F'_z = -1$. 从而在点 $(2, 1, 5)$ 处切平面的法向量为 $(4, 2, -1)$. 由此得切平面方程为 $4(x-2) + 2(y-1) - (z-5) = 0$, 法线方程为 $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-1}$.

课后答案网
www.hackshp.cn

1. 确定下列积分的符号

$$(1) \iint_{|x|+|y|\leq 1} \ln(x^2+y^2) dx dy; \quad (2) \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy.$$

解 (1) 因为 $x^2+y^2 \leq (|x|+|y|)^2 \leq 1$, $\ln(x^2+y^2) \leq 0$ 且当 $x^2+y^2 < 1$ 时 $\ln(x^2+y^2) < 0$. 由此可知 $\iint_{|x|+|y|\leq 1} \ln(x^2+y^2) dx dy < 0$.

$$(2) \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy = I_1 - I_2 - I_3, \text{ 其中 } I_1 = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy, \\ I_2 = \iint_{1\leq x^2+y^2\leq 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy, I_3 = \iint_{2\leq x^2+y^2\leq 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy. \text{ 而 } 0 < I_1 < \iint_{x^2+y^2\leq 1} dx dy = \pi, I_2 > 0, I_3 > \iint_{2\leq x^2+y^2\leq 4} dx dy = 4\pi - 2\pi = 2\pi. \text{ 故而 } \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy < 0.$$

$$2. \text{ 设 } f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), D = [a, b] \times [c, d], \text{ 证明 } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f_1(x) f_2(y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

证(用定义证明) 用平行于 x 与 y 轴的直线将区域 $[a, b] \times [c, d]$ 分割为 n^2 块, 这同时将 $[a, b]$ 区间分割为 n 段, 将 $[c, d]$ 区间分割为 n 段. 在第 (i, j) 块任取点 (ξ_i, η_j) 则积分和为

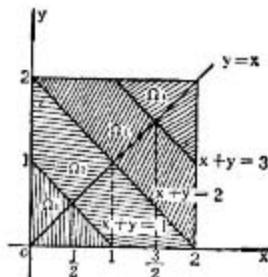
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_1(\xi_i) f_2(\eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = \left(\sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n f_2(\eta_j) \Delta y_j \right).$$

令细度 $d \rightarrow 0$ 则在区间 $[a, b]$ 及 $[c, d]$ 上的划分的细度 λ_x, λ_y 也趋于 0. 由于 $f(x, y)$ 在 D 上可积, $f_1(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $f_2(y)$ 在 $[c, d]$ 上可积, 所以有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta \sigma_{ij} = \left(\lim_{\lambda_x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \Delta x_i \right) \left(\lim_{\lambda_y \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f_2(\eta_j) \Delta y_j \right) \\ = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

3*. 记 $[a]$ 为 a 的最大整数部分, 计算下列积分之值

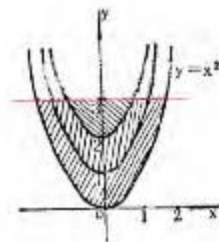
$$(1) \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x+y] dx dy; \quad (2) \iint_{x^2+y^2 \leq 3} \sqrt{|y-x^2|} dx dy.$$



解 (1) 将区域 $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ 分为 $\Omega_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq$

$x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 2 \leq x+y \leq 3$, $\Omega_4 = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 3 \leq x+y \leq 4\}$.
 课后答案网: www.hackshp.cn
 若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$\iint_{\Omega} [x+y] dx dy = 0 \cdot \iint_{\Omega_1} dx dy + 1 \cdot \iint_{\Omega_2} dx dy + 2 \cdot \iint_{\Omega_3} dx dy + 3 \cdot \iint_{\Omega_4} dx dy = 6.$$



(2) 将区域 $D = \{(x,y) | x^2 \leq y \leq 3\}$ 分为 $D_1 = \{(x,y) | x^2 \leq y \leq x^2 + 1, y \leq 3\}$, $D_2 = \{(x,y) | x^2 + 1 \leq y \leq x^2 + 2, y \leq 3\}$, $D_3 = \{(x,y) | x^2 + 2 \leq y \leq 3\}$. $\iint_{D_1} dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{x^2+1} dy = 2 \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{4}{3}$. $\iint_{D_2+D_3} dx dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+1}^3 dy = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2) dx = \frac{8}{3} \sqrt{2}$. $\iint_D \sqrt{y-x^2} dx dy = 0 \cdot \iint_{D_1} dx dy + 1 \cdot \iint_{D_2} dx dy + \sqrt{2} \cdot \iint_{D_3} dx dy = 4\sqrt{2} - \frac{4}{3}$.

4*. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 证明:

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

证 因为

$$0 \leq \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 + (b-a) \int_a^b f^2(y) dy.$$

故而有

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

当 $f(x) = \text{常数}$ 时, 显然上式中等号成立. 反之, 设上式中等号成立, 则

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = 0.$$

由于函数 $F(x) \triangleq \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$ 是 $a \leq x \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $F(x) \equiv 0$ ($a \leq x \leq b$). 特别地有 $F(a) = 0$, 即 $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 dy = 0$. 又由于函数 $G(y) \triangleq [f(a) - f(y)]^2$ 是 $a \leq y \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $G(y) \equiv 0$ ($a \leq y \leq b$). 因此, $f(y) \equiv f(a)$ ($a \leq y \leq b$), 即 $f(x) = \text{常数}$.

5. 化二重积分 $\iint_D f(x,y) dx dy$ 为二次积分(写出两种积分顺序)

- (1) $D: x^2 + y^2 \leq 1, x+y > 1$;
- (2) D 为由 $x=0, y=1$ 及 $y=x$ 围成的区域;
- (3) D 为由 $y=0, y=\ln x$ 及 $x=e$ 围成的区域;
- (4) D 为由 $y=0, x^2 + y^2 - 2x = 0$ 在第一象限的部分及 $x+y=2$ 围成的区域;
- (5) $D: y^2 \leq 8x, y \leq 2x, y+4x-24 \leq 0$.

解 (1) $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_{-y+1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx.$

(2) $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y) dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x,y) dx.$

$$(3) \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^2 f(x, y) dx.$$

$$(4) \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy = \int_0^2 dy \int_{1-y}^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$(5) y^2 = 8x \text{ 与 } y = 2x \text{ 的交点为 } (0, 0), (2, 4). y^2 = 8x \text{ 与 } y + 4x - 24 = 0 \text{ 的交点为 } (\frac{9}{2}, 6), (8, -8). \\ \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x, y) dy + \int_2^8 dx \int_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x, y) dy + \int_2^8 dx \int_{-4+24/x}^{4+24/x} f(x, y) dy = \\ \int_{-8}^0 dy \int_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y) dx + \int_0^6 dy \int_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y) dx + \int_4^6 dy \int_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y) dx.$$

6. 变换下列累次积分的顺序

$$(1) \int_0^1 dx \int_x^{1-x} f(x, y) dy; (2) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx; (3) \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy;$$

$$(4) \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy; (5) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy.$$

$$\text{解 } (1) \int_0^1 dx \int_x^{1-x} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{1-y}^1 f(x, y) dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y) dx;$$

$$(4) \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \int_a^{2a} dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{2ay}} f(x, y) dx \\ + \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{\sqrt{2ay}} f(x, y) dx;$$

$$(5) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_1^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx.$$

7. 计算下列二重积分

$$(1) \iint_D xe^{-y} dx dy, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}; (2) \iint_D (|x| + |y|) dx dy, D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 2\}; (3) \iint_D \sqrt{y-x^2} dx dy, D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}. (4) \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{\ln x}{x^2-1} dx.$$

$$\text{解 } (1) \iint_D xe^{-y} dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 e^{-y} dy = \int_0^1 e^{-y} dy = \int_0^1 (e^{-x} - 1) dx = e - 2;$$

$$(2) \text{ 令 } D_1 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}. \text{ 由区域 } D \text{ 关于 } x \text{ 和 } y \text{ 轴皆对称, 被积函数 } |x| + |y| \text{ 关于 } x \text{ 和 } y \text{ 为偶函数, 得 } \iint_D (|x| + |y|) dx dy = 4 \iint_{D_1} (x + y) dx dy = 4 \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x + y) dy = \\ 4 \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) dx = 4 \cdot \left[-\frac{1}{6}x^3\right]_0^2 + 4 = \frac{32}{3};$$

$$(3) \iint_D \sqrt{y-x^2} dx dy, D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\} \text{ (书上例题)};$$

$$(4) \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{\ln x}{x^2-1} dx \xrightarrow{\text{交换积分次序}} \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2-1} dx \int_1^2 dy = \int_1^2 \ln x dx = 2 \ln 2 - 1.$$

8. 利用极坐标计算下列二重积分

$$(1) \iint_{x^2 \leq x^2+y^2 \leq 4a^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy; \text{ (注意题目已修改)}$$

$$(2) \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2} dx dy, D \text{ 为 } x^2+y^2 = Rx \text{ 所围成的区域};$$

$$(3) \iint_D (x+y) dx dy, D \text{ 是由曲线 } x^2+y^2 = x+y \text{ 所围成的区域};$$

$$(4) \int_{-\sqrt{2}}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2) dy + \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2) dy.$$

$$\text{解 } (1) \iint_{x^2 \leq x^2+y^2 \leq 4a^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{2a} r \sin r dr = -6\pi a^2;$$

$$(2) \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} r \sqrt{R^2-r^2} dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} -\frac{1}{2}(R^2-r^2) d(R^2-r^2) = \\ R^2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R \cos \theta} d\theta = \frac{R^3}{9} (3\pi - 4);$$

$$(3) \iint_D (x+y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin\theta+\cos\theta} r^2 (\sin\theta+\cos\theta) dr = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta+\cos\theta)^3 d\theta = \frac{\pi}{2};$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2) dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2}} (x^2+y^2) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 r^3 dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^2 r^3 dr = \pi + (2\pi - 4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{9}{4}\pi.$$

9. 计算曲线所围成的面积

$$(1) y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2, y = 2; (2) y = \sin x, y = \cos x, x = 0; (3) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; (4) r = a(1 + \cos \theta), r = a \sin \theta.$$

$$\text{解 (1)} S = \iint_D dx dy = \int_1^2 dx \int_1^2 dy = \int_1^2 (2 - \frac{1}{x}) dx = 2 - \ln 2;$$

$$(2) S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\sin x}^{\cos x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx = \sqrt{2} - 1;$$

$$(3^*) (\text{变量代换}) \text{ 令 } x = ar^3 \cos^3 \theta, y = ar^3 \sin^3 \theta. \text{ 故原方程变为 } r = 1.$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} 3ar^2 \cos^3 \theta & -3ar^3 \cos^2 \theta \sin \theta \\ 3ar^2 \sin^3 \theta & 3ar^3 \sin^2 \theta \cos \theta \end{vmatrix} = 9a^2 r^5 \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

由图形的对称性知

$$S = 36a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^5 dr = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

$$(4) r = a(1 + \cos \theta), r = a \sin \theta \quad (a > 0).$$

解 两曲线所包围部分的面积

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \sin \theta} r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos \theta)} r dr = \frac{\pi a^2}{8} + \left(\frac{3}{8} \pi a^2 - a^2 \right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a^2.$$

注: 改为曲线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 与 $r = a \cos \theta$ ($a > 0$) 所包围的面积, 则答案正好是 $\frac{5}{4} \pi a^2$.

10. 计算由下列曲面所围成的立体体积

$$(1) \text{ 以习题 9(1) 中曲线所围成的区域为底, 以曲面 } z = x^2 y \text{ 为顶的曲顶柱体的体积. } (2) z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0; (3) z = x^2 + y^2, y = 1, z = 0, y = x^2; (4) z = x^2 + y^2 \text{ 与 } z = x + y \text{ 围成的立体.}$$

$$\text{解 (1)} V = \int_1^2 dx \int_1^2 x^2 y dy = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_1^2 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (4x^2 - 1) dx = \frac{25}{6}.$$

$$(2) V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 + x + y) dy = \int_0^1 \left[(1+x)(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 \right] dx = \frac{5}{6};$$

$$(3) V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = 2 \int_0^1 \left[x^2 - x^4 + \frac{1}{3}(1 - x^6) \right] dx = \frac{88}{105};$$

(4*) (变量代换) 由 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = x + y$ 解出平面上的区域 $D: x^2 - x + y^2 - y \leq 0$. 使用变量代换 $x = \frac{1}{2} + r \cos \varphi, y = \frac{1}{2} + r \sin \varphi$, 则有

$$z = r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi), \text{ 以及 } z = 1 + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \quad \left(0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

于是, 所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}} [(x+y) - (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \left[1 + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \right] - \left[r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \right] \right\} r dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) r dr = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

综合练习十(部分)

二、填空题

1.

$$\begin{aligned}\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy &= \int_0^2 e^{-y^2} dy \int_0^y dx = \int_0^2 ye^{-y^2} dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^2 e^{-y^2} d(-y^2) = -\frac{1}{2} e^{-y^2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} (1 - e^{-4}).\end{aligned}$$

2. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$, $(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域, 则 $I = \iint_D xy dx dy = \underline{0}$.

解

$$\begin{aligned}I &= \iint_D xy dx dy = \int_{-1}^1 x dx \int_x^1 y dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(1-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x-x^3) dx = 0.\end{aligned}$$

3*. 设 D 为中心在原点, 半径为 r 的圆域, 则 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy = \underline{1}$.

解 由积分中值定理知 $\exists(\xi, \eta) \in D$ 使得

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) dx dy &= \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \frac{1}{\pi r^2} e^{\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) \iint_D dx dy \\ &= \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} e^{\xi^2-\eta^2} \cos(\xi+\eta) = 1\end{aligned}$$

4. 设 D 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域, 则 $I = \iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy = \underline{1 - \sin 1}$.

解

$$\begin{aligned}I &= \iint_D \frac{\sin x}{x} dx dy = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \int_{x^2}^x dy \\ &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} (x-x^2) dx = \int_0^1 (\sin x - x \sin x) dx \\ &= (-\cos x + x \cos x - \sin x) \Big|_0^1 = 1 - \sin 1\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy &= \int_1^2 dy \int_y^y \sin \frac{\pi x}{2y} dx = -\frac{2}{\pi} \int_1^2 y \cos \frac{\pi}{2} y dy \\ &= -\frac{4}{\pi^2} \int_1^2 y d\left(\sin \frac{\pi}{2} y\right) = \frac{4}{\pi^2} (\pi + 2).\end{aligned}$$

6. 设 D 为由 $y=x$, $xy=1$, $x=2$ 所围成的区域, 则 $I = \iint_D \frac{2}{y^3} dx dy = \underline{\frac{9}{4}}$.

解

课后答案网: www.hackshp.cn

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_1^x y^{-2} dy = \int_1^2 x^2 (-y^{-1}) \Big|_1^x dx \\
 &= \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{x} + x \right) dx = \int_1^2 (-x + x^3) dx = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_1^2 \\
 &= \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

7. 设 D 是由 $x^2 + y^2 = 1, x = 0, y = 0$ 所围成的区域在第一象限部分, 则积分 $I = \iint_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} dx dy = \underline{\quad}$.

解

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \frac{1-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1-r^2}{1+r^2} r dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1-u}{1+u} du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \left(\frac{2}{1+u} - 1 \right) d(u+1) \\
 &= \frac{\pi}{4} [2 \ln(u+1) - (u+1)] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} (2 \ln 2 - 1)
 \end{aligned}$$

8*. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 且 $f(x, y) = xy + \iint_D f(u, v) du dv$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2$, 直线 $y = 0, x = 1$ 所围成的区域, 则 $f(x, y) = \underline{xy + \frac{1}{8}}$.

解 令 $a = \iint_D f(u, v) du dv$, 则原方程两边同时在区域 D 上积分得

$$\begin{aligned}
 a &= \int_0^1 x dx \int_0^{x^2} y dy + a \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{2} x^5 dx + a \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 \\
 a &= \frac{1}{12} + \frac{1}{3} a \\
 a &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

所以, $f(x, y) = xy + \frac{1}{8}$.

三、计算下列各题

1*. 设 $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t} dt$, 求 $I = \int_0^1 x f(x) dx$.

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 x dx \int_1^{x^2} e^{-t} dt \xrightarrow{\text{交换积分次序}} \int_0^1 e^{-t} dt \int_0^{\sqrt{t}} x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 t e^{-t} dt = -\frac{1}{4} \int_0^1 e^{-t} d(-t^2) \\
 &= -\frac{1}{4} e^{-t} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right)
 \end{aligned}$$

2*. 求 $I = \int_0^1 \frac{x^2 - x^3}{\ln x} dx \ (a > 0, b > 0)$.

解

课后答案网: www.hackshp.cn

若侵犯了您的版权利益,敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \ln x \, dx = \int_0^1 \ln x \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx \\
 &\stackrel{\text{交换积分次序}}{=} \int_b^a dy \int_0^1 x^y dx = \int_b^a \frac{1}{y+1} dy \\
 &= \ln(y+1) \Big|_b^a = \ln \frac{a+1}{b+1}
 \end{aligned}$$

3. 设 D 为: $|x| + |y| \leq 1$, 求 $I = \iint_D (|x| + |y|) dx dy$.

解 令 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. 由积分区域的对称性, 得

$$\begin{aligned}
 I &= 4 \iint_{D_1} (x+y) dx dy = 4 \int_0^1 dx \int_0^x (x+y) dy \\
 &= 4 \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=x} dx = 4 \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 dx = 2.
 \end{aligned}$$

4. 计算 $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 D 为: $Rx \leq x^2 + y^2 \leq R^2$.

解

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_{R \cos \theta}^R r^2 dr \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{3} R^3 (1 - \cos^3 \theta) d\theta = \frac{1}{3} R^3 \left[\pi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d \sin \theta \right] \\
 &= \frac{1}{3} R^3 \left[\pi + 2 + \frac{1}{3} \sin^3 \theta \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right] = \frac{R^3}{3} \left(\pi + \frac{4}{3} \right)
 \end{aligned}$$

5. 试求 $I = \int_1^3 dx \int_{x-1}^3 \sin y^2 dy$.

解

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^3 dx \int_{x-1}^3 \sin y^2 dy \stackrel{\text{交换积分次序}}{=} \int_1^2 \sin y^2 dy \int_1^{y+1} dx \\
 &= \int_1^2 y \sin y^2 dy = \frac{1}{2} (\cos 1 - \cos 4)
 \end{aligned}$$

四、应用题

1. 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体体积.

解 由 $z = x^2 + 2y^2 = 6 - 2x^2 - y^2$ 得两曲面的交线在平面 xOy 上的投影为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. 所求立体体积为

$$\begin{aligned}
 \iint_D (6 - 2x^2 - y^2 - x^2 - 2y^2) dx dy &= \iint_{0 \leq x^2 + y^2 \leq 2} (6 - 3x^2 - 3y^2) dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (6 - 3r^2) r dr \\
 &= 2\pi \left(3r^2 - \frac{3}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 6\pi.
 \end{aligned}$$

2*. 试求两个半径相等的圆柱面所围成的立体体积.

课后答案网 www.hackshp.cn 若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

解 设两个圆柱面为 $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + z^2 = R^2$. 所求的立体图形被 xOy 平面分割成上下体积相等的两部分, 它在平面 xOy 上的投影为 $D = \{(x, y) | 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$. 故而所求立体图形的体积为

$$\begin{aligned} \iint_D 2\sqrt{R^2 - x^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R 2\sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \theta} r dr \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \int_0^R (R^2 - r^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} d(R^2 - r^2 \cos^2 \theta) \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{2}{3} (R^2 - r^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=R} d\theta \\ &= \frac{2}{3} R^3 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

3. 试求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ 与圆柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所包围的立体体积.

解 立体图形在平面 xOy 上的投影为 $D = \{(x, y) | 0 \leq (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\} = \{(r, \theta) | -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2a \cos \theta\}$. 所求立体图形的体积为

$$\begin{aligned} 2 \iint_D \sqrt{4a^2 - (x^2 + y^2)} dx dy &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \sqrt{4a^2 - r^2} r dr \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \cos \theta} (4a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(4a^2 - r^2) \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2}{3} (4a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2a \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{16}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{16}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

4*. 试求由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ 所围成的平面图形的面积.

解 这是一条倒“8”字形式的曲线. 其所包围的平面面积为

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{2a^2 \cos 2\theta}} r dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\theta d\theta = 2a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2.$$

五*、证明题

证明 $\int_0^a dy \int_0^y e^{a-x} f(x) dx = \int_0^a x e^x f(a-x) dx$.

证

$$\begin{aligned} \int_0^a dy \int_0^y e^{a-x} f(x) dx &\stackrel{\text{交换积分次序}}{=} \int_0^a e^{a-x} f(x) (a-x) dx \\ &\stackrel{y=a-x}{=} - \int_a^0 e^y f(a-y) y dy \\ &= \int_0^a y e^y f(a-y) dy. \end{aligned}$$

1. 判断下列级数的敛散性

(1) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$;

解 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 为调和级数, 从而发散.

(2) $0.001 + \sqrt[3]{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \cdots + \sqrt[3]{0.001} + \cdots$;

解 $0.001 + \sqrt[3]{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \cdots + \sqrt[3]{0.001} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{0.001}$. 因对通项有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{0.001} = 1$, 不满足级数收敛的必要条件, 因此级数发散.

(3) $\frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 - \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \cdots + (-1)^{n-1} \left(\frac{4}{3}\right)^n + \cdots$;

解 级数为公比为 $-\frac{4}{3}$ 的等比级数, 从而收敛.

(4) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \cdots + \frac{2n-1}{2n} + \cdots$;

解 由于对于通项有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n} = 1$, 不满足级数收敛的必要条件, 从而级数发散.

(5) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}\right) + \cdots$;

解 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{27}\right) + \cdots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.
因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为公比分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 的等比级数, 从而各自是收敛的. 因此该级数是收敛的.

(6) $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$;

解 由于对通项有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$, 不满足级数收敛的必要条件, 因此级数发散.

(7) $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{10n} + \cdots$;

解 $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{10n} + \cdots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{10n} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. 显然和项的第一个级数为公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比级数, 从而收敛; 而第二个级数为调和级数, 从而发散. 所以, 级数发散.

(8) $\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln^2 2}{2^2} + \frac{\ln^3 2}{2^3} + \cdots + \frac{\ln^n 2}{2^n} + \cdots$.

解 级数为公比为 $\frac{\ln 2}{2}$ 的等比级数, 从而是收敛的.

2. 根据级数收敛定义判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

解 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. 所以级数收敛.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

解 $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$. 所以级数收敛.

注: 也可用极限形式的比较判别法来判定.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

解 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$. 所以级数收敛.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

解 $S_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 - \sqrt{2}$. 所以级数收敛.

3. 利用比较判别法, 判定下列级数敛散性.

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{n^2+1} + \cdots;$$

解 $u_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} = v_n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是 $p=2$ 的 p -级数, 从而是收敛的. 由比较判别法知, 由于原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的.

另解 $u_n = \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2} = v_n$.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)};$$

解 $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$. 从而级数必发散.

$$(3) 1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \frac{2^3}{3 \times 5 \times 7} + \frac{2^4}{3 \times 5 \times 7 \times 9} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n-1)} + \cdots;$$

解 $u_n = \frac{2^{n-1}}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n-1)} \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = v_n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比级数, 从而是收敛的. 由比较判别法知, 原级数收敛.

另解 $u_n = \frac{2^{n-1}}{3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n-1)} < \frac{2^{n-1}}{(2 \cdot 1) \times (2 \cdot 2) \times (2 \cdot 3) \times \cdots \times [2(n-1)]} = \frac{1}{(n-1)!} = v_n$.

$$(4) \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 3^3} + \frac{2^3}{5 \times 3^5} + \frac{2^4}{7 \times 3^7} + \cdots;$$

解 $\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 3^3} + \frac{2^3}{5 \times 3^5} + \frac{2^4}{7 \times 3^7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2}{3} \right)^n$. 因为 $\frac{1}{2n-1} \left(\frac{2}{3} \right)^n < \left(\frac{2}{3} \right)^n$. 从而级数收敛.

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n;$$

解 $u_n = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n = v_n$. 由于等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 以 $\frac{1}{2}$ 为公比, 从而收敛. 再由比较判别法知, 原级数收敛.

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)};$$

解 因为 $u_n = \frac{n+1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n} = v_n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 为发散的调和级数, 从而由极限形式的比较判别法知级数发散.

解 因为 $\sin \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 是收敛的等比级数, 因此由极限形式的比较判别法知级数收敛.

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a > 0).$$

解 当 $0 < a < 1$ 时, 通项的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = 1$; 当 $a = 1$ 时, 通项的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a^n} = \frac{1}{2}$; 从而当 $0 < a \leq 1$ 时级数发散. 当 $a > 1$ 时, 有 $\frac{1}{1+a^n} \leq \frac{1}{a^n}$. 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ 收敛. 从而由比较判别法知级数收敛.

4. 利用比值判别法判定下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!};$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0 < 1$. 从而由比值判别法知级数收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n};$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{2}{e} < 1$. 从而由比值判别法知级数收敛.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n};$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$. 从而由比值判别法知级数发散.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}};$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1$. 从而由比值判别法知级数收敛.

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$. 从而由比值判别法知级数收敛.

$$(6) \frac{2}{1 \times 2} + \frac{2^2}{2 \times 3} + \frac{2^3}{3 \times 4} + \frac{2^4}{4 \times 5} + \dots$$

解 $u_n = \frac{2^n}{n(n+1)}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{2^n} = 2 > 1$. 从而由比值判别法知级数发散.

5. 利用根式判别法判定下列级数的敛散性

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cos^2 \frac{\pi}{3n};$$

解 $\frac{n}{2^n} \cos^2 \frac{\pi}{3n} \leq \frac{n}{2^n}$. 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$. 由根式判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛. 再由比较判别法知原级数收敛.

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n;$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$. 由根式判别法知原级数收敛.

- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$ 课后答案网: www.hackshp.cn
若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$. 由根式判别法知原级数收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$;

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^4}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^4}}{4} = \frac{1}{4} < 1$. 由根式判别法知原级数收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^n}{n^{100}}$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2+\frac{1}{n})^n}{n^{100}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{n^{100}}} = 2 > 1$. 由根式判别法知原级数发散.

6. 讨论下列级数的敛散性. 若收敛, 指出是条件收敛还是绝对收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$;

解 由莱布尼兹判别法知该交错级数收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 与调和级数具有相同的敛散性, 即发散. 从而级数条件收敛.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$;

解 由莱布尼兹判别法知该交错级数收敛. 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, 令 $f(x) = x - \ln x$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. 当 $x \geq 2$ 时, $f'(x) > 0$. 从而任给 $x \geq 2$ 时 $f(x) \geq f(2) = 2 - \ln 2 > 0$. 即 $x > \ln x$. 所以 $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. 由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散. 从而原级数条件收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$;

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, 所以级数发散.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$;

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1$. 由根式判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$ 收敛, 从而原级数绝对收敛.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$;

解 因为 $\frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是 $p=2$ 的 p -级数, 从而是收敛的. 再由比较判别法知原级数绝对收敛.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{2^n}$;

解 $\frac{n |\cos nx|}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} < 1$, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛. 再由比较判别法知原级数绝对收敛.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sin \frac{\pi}{n}$;

解 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\frac{1}{n} < 1$, 从而由比值判别法知级数收敛, 并且绝对收敛.
 课后答案网: www.hackshp.cn
 若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n - \ln n}.$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \ln n} = 1$. 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 具有相同的敛散性, 即发散. 而作为交错级数, 由莱布尼兹判别法知原级数收敛. 从而原级数条件收敛.

7. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 试问下列级数是否发散?

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}.$$

解 (1) $\max\{a_n, b_n\} \geq a_n \geq 0$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. 由正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$ 发散.

(2) 不一定发散. 例如, 取 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 + 1 + 0 + 1 + \dots$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + 0 + 1 + 0 + \dots$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} = 0 + 0 + 0 + \dots$ 是收敛的.

8. 证明: 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 反之不然. 举例说明.

解证 (1) 证明: 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. 即当 n 充分大时, 必有 $u_n < 1$. 此时有 $u_n^2 < u_n$. 从而正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

(2) 反之不然. 反例: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 发散.

9. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 必收敛.

证 因为 $\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right)$, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 都收敛, 正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 必收敛.

综合练习十一

一、选择题

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 则 C.

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 必发散; B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ 必发散; C. $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ 发散; D. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ 必发散.

(A) 的反例: 若有 $a_n = -b_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0$ 收敛.

(B) 的反例: 若有 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

(C) 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ 收敛, 由于 $|a_n| + |b_n| \geq |a_n + b_n| \geq |a_n|$ 且 $|a_n| + |b_n| \geq |a_n + b_n| \geq |b_n|$,

再由正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛. 若侵犯了你的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

这与此两级数发散的已知条件矛盾, 从而必有 $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ 发散.

(D) 反例可知(B).

2. 下列一些命题中, 正确的命题的个数为 **B**.

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. (X)

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=100}^{\infty} a_n$ 收敛. (X)

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 发散. (V)

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = 2S$. (V)

(5) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 也收敛. (X)

A. 1 个; B. 2 个; C. 3 个; D. 4 个.

(3) 若假设 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛, 这与题设矛盾. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 发散.

3. 下列级数中发散的是 **D**.

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$; B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+2}$; C. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \ln \frac{n-1}{n+1}$; D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

解 A. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)$. 部分和 $S_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2+1}}$. 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\frac{1}{\sqrt{2+1}} = 1 - \sqrt{2}$. 从而级数收敛.

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. 由于级数是两收敛级数的和, 从而收敛.

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \ln \frac{n-1}{n+1}$ 至少应改成 $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \ln \frac{n-1}{n+1}$.

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$. 从而由比值判别法知级数发散.

4. 下列级数中收敛的是 **C**.

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$; B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$; C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n}$; D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$.

解 A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{2(n+1)^2} \cdot \frac{2n^2}{(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 (n+1)^2}{2(n+1)^2} = +\infty$. 从而由比值判别法知级数发散.

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{4^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{4}{e} > 1$. 所以由比值判别法知级数发散.

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n}$. $|\frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n}| \leq \frac{1}{n^2}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 从而由比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n}$ 收敛.

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$. 由于 $\frac{n+1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n}$, 因此由比较判别法的极限形式知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$ 与调和级数一样发散.

5. 下列级数中条件收敛的是 **B**.

A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$; B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$; C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2}}$; D. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}$.

解 A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ 发散.

- B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 从而原级数条件收敛.
 C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 绝对收敛.
 D. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$. 因为 $|\sin \frac{\pi}{n}| \leq \frac{\pi}{n}$, 所以原级数绝对收敛.

6. 设 a 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(na)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ C.

A. 绝对收敛; B. 条件收敛; C. 发散; D. 收敛性与 a 的取值有关.

解 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n^2}$ 收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 发散, 从而原级数发散.

7. 级数 $\sum (-1)^n (1 - \cos \frac{a}{n})$ (a 为常数) A.

A. 绝对收敛; B. 条件收敛; C. 发散; D. 收敛性与 a 的取值有关.

解 $|1 - \cos \frac{a}{n}| = 2 \left| \sin^2 \frac{a}{2n} \right| \leq \frac{a^2}{2n^2}$. 从而由比较判别法知原级数绝对收敛.

8. 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{na}{n+1}\right)^n$ ($a > 0$), 下述结论中错误的是 C.

A. $a > 1$ 时发散; B. $a < 1$ 时收敛; C. $a = 1$ 时发散; D. $a = 1$ 时收敛.

解 $\left(\frac{na}{n+1}\right)^n = a^n \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$. 再用极限形式的比较判别法即知.

二、填空题

*1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ 8.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 5 - 2 = 3$. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 3 + 5 = 8$.

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$, 则 $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

解 $a_n = S_n - S_{n-1} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n-1)} \right] = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$.

*3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} =$ 1.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 1$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^{3n}} =$ 0.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{a})^k}{\frac{1}{n!}}$. 由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{a})^k}{n!} = e^{\frac{1}{a}}$, 即收敛. 从而由级数收敛的必要条件知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{a})^k}{\frac{1}{n!}} = 0$.

三、判断下列级数的敛散性, 若收敛, 说明是条件收敛还是绝对收敛

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(1+n)}$; *2. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(-\frac{1}{e}\right)^{n-1}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$.

解 1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(1+n)}$. 因为 $\frac{1}{\ln(1+n)} > \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}$ 发散. 而由莱布尼茨判别法知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(1+n)}$ 收敛. 从而级数条件收敛.

*2. $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛及比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{2n})$ 绝对收敛.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$. 由莱布尼兹判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 收敛. 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 发散. 从而原级数条件收敛.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(-\frac{1}{e}\right)^{n-1}$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \left(\frac{1}{e}\right)^n}{n^2 \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$. 由比值判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ 收敛, 从而原级数绝对收敛.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + \dots$, 显然级数发散.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$. 从而原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$. 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$ 发散. 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2} \ln \frac{n^2+1}{n^2}$ 由莱布尼兹判别法知收敛. 从而原级数为条件收敛.

*四、综合题

设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 且满足关系 $a_n \leq c_n \leq b_n (n=1, 2, \dots)$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 又假定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性如何?

解证 由 $a_n \leq c_n \leq b_n$ 得 $b_n - c_n \leq b_n - a_n$. 再由数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛. 再由正项级数的比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$ 收敛. 由此知必有 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散, 且 $a_n \leq c_n \leq b_n (n=1, 2, \dots)$, 此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 可能收敛, 可能发散. 例如: (1) $a_n = \frac{1}{2n}$, $c_n = \frac{3}{4n}$, $b_n = \frac{1}{n}$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散. (2) $a_n = -\frac{1}{n}$, $c_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 0$ 从而收敛.

*五、证明题

设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内连续, 且 $f(0)=1$, $f''(x)$ 有界, 试证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right]$ 绝对收敛.

证 由 $f(x)$ 为偶函数得 $f(-x) = f(x) \Rightarrow -f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'(0) = 0$. 再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶连续可导得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 公式: $f(x) = f(0) + \frac{f''(\xi)}{2!} x^2 = 1 + \frac{f''(\xi)}{2} x^2$, ξ 介于 0 与 x 之间. 从而运用 $f''(x)$ 的有界性得 $\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2}\right| \frac{1}{n^2} \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$, 其中 M 为某个正数. 由于 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right]$ 绝对收敛.

1. 求下列幂级数的收敛半径和收敛域

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$; (2) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \times 4} + \frac{x^3}{2 \times 4 \times 6} + \cdots$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^n$; (4) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} + \cdots + \frac{x^n}{n^2+1} + \cdots$;
(5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{5n}$; (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{2n}}$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$; (9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$; (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ ($p > 0$).

解 (1) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1$. 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散; 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 可由莱布尼兹判别法知是收敛的. 所以级数的收敛域为 $[-1, 1)$.

(2) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2 \times n!} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \times 4} + \frac{x^3}{2 \times 4 \times 6} + \cdots$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{2^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2(n+1) = \infty$. 从而收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(3) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^n$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} \cdot \frac{n+2}{\ln(n+2)} = 1$. 由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 收敛. 从而收敛域为 $[-1, 1)$.

(4) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} x^n = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} + \cdots + \frac{2^n}{n^2+1} x^n + \cdots$ 的收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2+1} \cdot \frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2+1}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{2^n}{n^2+1}$ 都收敛, 所以级数收敛域为 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(5) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)!}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+2)(2n+1) = \infty$. 所以级数收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(6) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{5n}$ 收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{5n} = 1$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{5n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ 发散. 所以级数的收敛域为 $[0, 2]$.

(7) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{2n}}$ 收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2n}} = 1$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n}}$ 收敛. 所以级数的收敛域为 $[-3, 1)$.

(8) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = 0 \cdot \frac{1}{e} = 0$. 所以级数的收敛域为 $\{0\}$.

(9) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$. 由于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n$ 发散, 所以原级数的收敛域为 $(-2, 2)$.

(10) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ ($p > 0$) 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^p = 1$. 当 $x = 1$ 时, $0 < p \leq 1$, 则级数发散, 而 $p > 1$ 则级数收敛. 当 $x = -1$ 时, 级数收敛. 所以, 当 $0 < p \leq 1$ 时, 收敛域为 $[-1, 1)$; 当 $p > 1$ 时, 收敛域为 $[-1, 1]$.

2. 求下列级数的收敛域并求和

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{4n+1}$; (5) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$; (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$.

解

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-1}{2n-1} = 1$. 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛半径为 $R = 1$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n-1}$ 中的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n-1}$ 的收敛域至少为 $(-1, 1)$. 再由于当 $x = \pm 1$ 时交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ 由莱布尼兹判别法知是收敛的, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的收敛域为 $[-1, 1]$. 从而原级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$. 所以 $S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$.

(*) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ 的收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+2)(2n+1) = \infty$. 由此可见, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

令 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$. 所以 $S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n}{n!} + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right] = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$.

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. 再当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n$ 由于通项趋于 ∞ , 显然发散. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. 再令 $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. 从而, $\int_0^x S_1(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x nx^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$. 所以, $S_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. 即 $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

(4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^4)^n}{4n+1}$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{4n+1}$ 的收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)+1}{4n+1} = 1$. 对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$ 由莱布尼兹判别法知是收敛的. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}$ 则与调和级数一样发散的. 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{4n+1}$ 的收敛区域为 $[-1, 1)$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^4)^n}{4n+1}$ 的收敛域为 $(-1, 1)$. 即原级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$. $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^4)^n = \frac{x^4}{1-x^4}$. 所以 $S(x) = -\frac{1}{4} \ln(1-x^4) = -\frac{1}{4} \ln(1-x) - \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1-x^2)$. (因为 $S(0) = 0$)

(5) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)(\pm 1)^n$ 都由于其通项的极限趋于 ∞ 而发散. 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛域为 $(-1, 1)$.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$. $S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = xS_1(x)$.
 $\int_0^x \left(\int_0^x S_1(x) dx \right) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n(n+1)x^{n-1} dx \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (n+1)x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$. $S_1(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \frac{2x}{(1-x)^2}$. 所以 $S(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$.

(6) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{2(n+1)!} = \infty$. 从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$ 的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

令 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$. $\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2}$. 所以, $S(x) = (xe^{x^2})' = e^{x^2}(1+2x^2)$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^n$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$. 由于当 $x = \pm 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} (\pm 1)^n$ 均发散. 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^n$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1, 1)$.

令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$. 则 $\int_0^x \left(\int_0^x S(x) dx \right) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} dx \right) dx = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n+1}{2} x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{x^2}{2(1-x)}$. 从而 $S(x) = \left(\frac{x^2}{2(1-x)} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} (x^2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{n-1}$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} t^{n-1}$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2^n} = \frac{1}{2}$.
 $\frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n-1)}{2(2n+1)-1} = 2$. 当 $t = \pm 2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^{n-1} 2(n-1)$, 从而发散. 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

令 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2-x^2}$. 所以 $S(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)'$. 若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

3. 证明: 函数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足微分方程 $xy'' + y' - y = 0$.

$$\text{证 } y' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x^n}{(n!)^2} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}, \quad y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} \right]' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(n!)^2}. \text{ 从而}$$

$$xy'' + y' - y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)x^{n-1}}{(n!)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n!)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)x^n}{[(n+1)!]^2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} + 1 \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} + 1 \right) = 0.$$

4. 将下列函数展开为 x 的幂级数, 并确定其收敛区间.

(1) $f(x) = a^x$, ($a > 0$); (2) $f(x) = \ln(a+x)$ ($a > 0$); (*3) $f(x) = \sin^2 x$; (*4) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; (*5) $f(x) = \arcsin x$; (6) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

$$\text{解 (1) } f(x) = a^x = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$(2) f(x) = \ln(a+x) = \ln a + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n}{n} = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{na^n}, \quad x \in (-a, a].$$

$$(*3) f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$(*4) f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$$(*5) f(x) = \arcsin x, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}.$$

$$\text{所以 } f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} dx = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots (2n-1)}{(2n+1) 2^n n!} x^{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

注: 可用以下拉贝判别法来判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \frac{1}{2n+1}$ 的敛散性:

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n > 0$. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p.$$

若 $p > 1$, 则级数收敛; 若 $p < 1$, 则级数发散.

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \frac{1}{2n+1}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!} \frac{1}{2n+3}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \frac{1}{2n+1}$ 收敛.

$$(6) f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad x \in (-1, 1).$$

5. 求下列函数在指定点的幂级数展开式, 并确定它们的收敛域.

(*) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, 在 $x = 1$ 处;

(2) $f(x) = \cos x$, 在 $x = -\frac{\pi}{3}$ 处;

(3) $f(x) = e^x$, 在 $x = 1$ 处;

(*) $f(x) = \frac{1}{x}$, 在 $x = 2$ 处;

(5) $f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3)$, 在 $x = 0$ 处;

(6) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$, 在 $x = -4$ 处.

解 (*1) $f(x) = (x-1)^2 + 4(x-1) + 4$. 这就是函数在 $x=1$ 处的幂级数展开式. 其收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.
若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$(2) f(x) = \cos x = \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{3} \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{3!} \left(x + \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots \right], x \in (-\infty, +\infty).$$

$$(3) f(x) = e^x = c \cdot e^{x-1} = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty).$$

$$(*4) f(x) = \frac{1}{x} = [(x-2) + 2]^{-1} = \frac{1}{2} \left[\frac{x-2}{2} + 1 \right]^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)(-2)^n (-1)^n}{n!} \left(\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n, x \in (0, 4).$$

$$(5) f(x) = \ln(1+x+x^2+x^3) = \ln[(1+x)(1+x^2)] = \ln(1+x) + \ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n}, x \in [-1, 1].$$

$$(6) f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{(x+4)^2-5(x+4)+6} = \frac{1}{[(x+4)-2][(x+4)-3]} = \frac{1}{(x+4)-3} - \frac{1}{(x+4)-2} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+4}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) (x+4)^n, x \in (-6, -2).$$

6. 求函数 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 的幂级数展开式, 并确定其收敛域.

解 因为 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 从而有 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in (-\infty, +\infty).$

*7. 将函数 $f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x-1}{x} \right)$ 展开为 x 的幂级数, 并由此证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

证 $f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x-1}{x} \right) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} x^{n-1}$. 另一方面 $f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x-1}{x} \right) = \frac{e^x - 1 - x e^x}{x^2}$. 从而 $f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

综合练习十二

一、选择题

1. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=5$ 处发散, 在 $x=-3$ 处收敛, 其收敛半径为 R , 则 C.
A. $R=5$; B. $R=3$; C. $3 \leq R \leq 5$; D. $R \geq 5$.
- *2. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 4$, 其中收敛半径为 R , 则 $R =$ (D).
A. 0; B. 4; C. $\frac{1}{4}$; D. $\frac{1}{2}$.
3. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R=2$, 则对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$, 下列哪一组点为其收敛点 A.

A. $x=2, 3, 4$; B. $x=-2, -1, 0, \frac{1}{5}$; C. $x=-1, 1, 0, 6$; D. $x=-2, 2, 3, 5$.

4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛半径 $R =$ D.

A. 0; B. $+\infty$; C. 2; D. 1.

5. 在 $(-1, 1)$ 内, 幂级数 $-1 + x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \cdots + (-1)^n x^{2n-2} + \cdots$ 的和函数为 D.

A. $\frac{1}{1-x^2}$; B. $\frac{1}{x^2-1}$; C. $\frac{1}{1+x^2}$; D. $-\frac{1}{1+x^2}$.

6. 将函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 展开成 x 的幂级数为 D.

A. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$; B. $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$; C. $1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots$; D. $1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$.

解 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛半径为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. 当 $t = \pm 1$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}$ 均收敛, 级数的收敛域为 $[-1, 1]$. 从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛区间为 $[2, 4]$.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{2n-3}$ 的收敛区间为 $[-2, -1]$.

解 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n-3}$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-3}{2n-3} = 1$. 当 $t = 1$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-3}$ 同调和级数一样发散. 当 $t = -1$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-3}$ 作为交错级数由莱布尼兹判别法知是收敛的. 从而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n-3}$ 的收敛域为 $[-1, 1]$. 即 $-1 \leq 2x+3 < 1 \Rightarrow -2 \leq x < -1$. 所以原级数的收敛域为 $[-2, -1]$.

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$ 的收敛半径 $R = e^{-1}$.

解 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = e^{-1}$.

*4. 已知 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 则 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ 的和为 $\frac{1}{2}$.

解 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right] = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 2 \right) = 1$.

*5. 设 $f(x) = x^8 \cos x$, 则 $f^{(10)}(0) = -5040$.

解 $f(x) = x^8 \cos x = x^8 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x^8 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right)$, 因此 $f^{(10)}(0) = -\frac{10!}{6!} = -10 \times 9 \times 8 \times 7 = -5040$.

6. $\int_0^1 x \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \right) dx = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$.

解 $\int_0^1 x \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \right) dx = \int_0^1 x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$.

7. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$ 的和函数 $S(x) = x(1+x)e^x$.

解 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = x S_1(x)$. $\int_0^x S_1(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{n}{n!} x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$. 所以 $S_2(x) = e^x$. $S_1(x) = (xe^x)' = (1+x)e^x$. 从而 $S(x) = x(1+x)e^x$.

8. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}$ 的和 $S = \frac{\pi}{2} (e^x - e^{-x})$ (提示: 引入幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!}$).

解 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x S_1(x)$. 则 $\int_0^x S_1(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) - 1$. 所以 $S_1(x) = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$, $S(x) = \frac{\pi}{2} (e^x - e^{-x})$. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)!} = S(\pi) = \frac{\pi}{2} (e^e - e^{-e})$.

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 4^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 4^n} x^{2n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 4^n} x^{2n} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 4^n} t^n = \frac{1}{x} S_1(t)$. 新级数 $S_1(t)$ 的收敛半径为 $R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)4^{n+1}}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1)}{4} = 4$. 即 x^2 的收敛半径为 4. 从而原级数的收敛半径为 $R = 2$.

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 的收敛区间与和函数.

解 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$. 级数的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$. 当 $x = \pm 1$ 时数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (\pm 1)^n$ 显然发散. 所以级数的收敛区间为 $(-1, 1)$. $\int_0^x S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{x}{1+x}$. 从而 $S(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

3. 将函数 $f(x) = \frac{1}{2-x}$ 展开为 x 的幂级数, 并指出其收敛区间.

解 $f(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$. 其收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2$. 当 $x = \pm 2$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 2)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{2}$ 都发散. 从而其幂级数的收敛区间为 $(-2, 2)$.

4. 将函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

解 $f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-3}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-3}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{4^{n+1}}$. 其收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2}}{4^{n+1}} = 4$. 当 $x-3 = \pm 4$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{4}$ 均发散. 从而幂级数的收敛区间为 $(-1, 7)$.

5. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的收敛半径.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = x S(x)$. 级数 $S(x)$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1$. 所以原级数的收敛半径为 1.

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ 的收敛区间.

解 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} t^n$ 的收敛半径为 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{n+1}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}} = \frac{1}{3}$. 显然新级数在 $t = \pm \frac{1}{3}$ 时都发散. 从而原级数的收敛区间为 $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

*四、综合题

求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$.

解 $f(x) = x^2 \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+2}}{n}$. 从而 $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3} \frac{n!}{n-2} (n \geq 3)$.

*五、应用题

设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos x dx, n = 0, 1, 2, \dots$, 求 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$.

解 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x d \sin x = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1}$. 令 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$. $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. 从而 $S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln|1-x|$. 从而 $\sum_{n=0}^{\infty} I_n = S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\ln\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \ln(2 + \sqrt{2})$.

1. 说出下列各微分方程的阶数, 并指出哪些是线性微分方程?

- (1) $x(y')^2 - 2yy' + 2 = 0$; (2) $(y'')^3 + 5(y')^4 - y^5 + x^7 = 0$; (3) $xy''' + 2y'' + x^2y = 0$; (4) $(x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$; (5) $(7x - 6y)dx + (x + y)dy = 0$.

解 (1) $x(y')^2 - 2yy' + 2 = 0$. 一阶, 非线性.

(2) $(y'')^3 + 5(y')^4 - y^5 + x^7 = 0$. 二阶, 非线性.

(3) $xy''' + 2y'' + x^2y = 0$. 三阶, 线性.

(4) $(x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$. 一阶, 非线性.

(5) $(7x - 6y)dx + (x + y)dy = 0$. 一阶, 非线性.

2. 验证下列函数 (C 为任意常数) 是否为相应方程的解. 若是, 判断是通解还是特解?

- (*) $y' - 2y = 0, y = \sin x, y = e^x, y = Ce^{2x}$; (2) $xydx + (1 + x^2)dy = 0, y^2(1 + x^2) = C$; (3) $y'' - 9y = x + \frac{1}{2}, y = 5 \cos 3x + \frac{x}{9} + \frac{1}{8}$; (4) $x^2y''' = 2y', y = \ln x + x^3$.

解 (*) 方程为 $y' - 2y = 0$. $y = \sin x$ 不是方程的解. $y = e^x$ 不是方程的解. $y = Ce^{2x}$ 是方程的通解 (由此启发我们对于一阶常系数齐次线性微分方程也可以由其特征方程来求解, 这里特征方程为 $\lambda - 2 = 0$).

(2) 方程为 $xydx + (1 + x^2)dy = 0$. 等式 $y^2(1 + x^2) = C$ 两边同时微分得 $2(1 + x^2)ydy + 2xy^2dx = 0 \Rightarrow xydx + (1 + x^2)dy = 0$. 因此 $y^2(1 + x^2) = C$ 为方程的通解.

(3) 方程为 $y'' - 9y = x + \frac{1}{2}$. 而 $y = 5 \cos 3x + \frac{x}{9} + \frac{1}{8}$ 不是方程的解.

(4) 方程为 $x^2y''' = 2y'$. 由 $y = \ln x + x^3$ 得 $y' = \frac{1}{x} + 3x^2, y'' = -\frac{1}{x^2} + 6x, y''' = \frac{2}{x^3} + 6$. 代入方程知 $y = \ln x + x^3$ 为方程的解, 由于不含任意常数, 从而是特解.

3. 求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

- (1) $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$; (2) $xydx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$; (3) $(1 + 2y)xdx + (1 + x^2)dy = 0$; (4) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$; (*5) $y \ln x dx + x \ln y dy = 0$; (*6) $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0, y|_{x=5} = 4$; (*7) $\frac{x}{1+y}dx - \frac{y}{1+x}dy = 0, y|_{x=0} = 1$.

解 (1) $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$. 分离变量得

$$\begin{aligned}\frac{dx}{1-x} &= \frac{dy}{1+y} \quad (x \neq 1, y \neq -1) \\ \ln|C| - \int \frac{d(1-x)}{1-x} &= \int \frac{d(1+y)}{1+y} \\ \ln|C| - \ln|1-x| &= \ln|1+y| \\ (1+y)(1-x) &= C, C \neq 0\end{aligned}$$

考虑到 $x = 1$ 和 $y = -1$ 是方程的解, 从而得方程的通解

$$(1+y)(1-x) = C, C \text{ 为任意常数.}$$

$$\begin{aligned} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{dy}{y} \quad (x \neq \pm 1, y \neq 0) \\ \frac{1}{2} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{dy}{y} \\ \ln|C| + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{dy}{y} \\ \ln|C| + \sqrt{1-x^2} &= \ln|y| \\ y &= Ce^{\sqrt{1-x^2}}, C \neq 0. \end{aligned}$$

考虑到 $y = 0$ 也是方程的解, 所以方程的通解为

$$y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}, C \text{ 为任意常数.}$$

方程的特解 $x = \pm 1$ 不能包含到以上通解中.

(3) $(1+2y)xdx + (1+x^2)dy = 0$. 分离变量得

$$\begin{aligned} -\frac{2x}{1+x^2}dx &= \frac{2dy}{1+2y} \quad (y \neq -\frac{1}{2}) \\ \ln|C| - \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} &= \int \frac{d(1+2y)}{1+2y} \\ \ln|C| - \ln(1+x^2) &= \ln|1+2y| \\ (1+2y)(1+x^2) &= C, C \neq 0 \end{aligned}$$

考虑到 $1+2y = 0$ 是方程的解, 则方程的通解为

$$(1+2y)(1+x^2) = C, C \text{ 为任意常数.}$$

(4) $(xy^2+x)dx + (y-x^2)dy = 0$. 分离变量得

$$\begin{aligned} -\frac{2xdx}{1-x^2} &= \frac{2ydy}{1+y^2} \quad (x \neq \pm 1) \\ \ln|C| + \int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} &= \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} \\ \ln|C| + \ln|1-x^2| &= \ln(1+y^2) \\ 1+y^2 &= C(1-x^2), C \neq 0 \\ y^2 &= C(1-x^2) - 1, C \text{ 为不等于 } 0 \text{ 的任意常数.} \end{aligned}$$

这就是方程的通解. 方程的解 $x = \pm 1$ 不能包含在此通解中.

(*5) (全微分方程) $y \ln x dx + x \ln y dy = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\ln x}{x} dx + \frac{\ln y}{y} dy &= 0 \\ 2 \ln x dx + 2 \ln y dy &= 0 \\ d(\ln^2 x + \ln^2 y) &= 0 \\ \ln^2 x + \ln^2 y &= C, C \text{ 为任意非负常数.} \end{aligned}$$

(*6) (全微分方程)

课后答案网: www.hackshp.cn
若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$2xdx + 2ydy = 0$$

$$d(x^2 + y^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 = C$$

由初值条件 $y|_{x=5} = 4$ 得 $C = 41$. 从而方程的特解为 $x^2 + y^2 = 41$.

(*7) (全微分方程)

$$\frac{x}{1+y} dx - \frac{y}{1+x} dy = 0$$

$$x(1+x)dx - y(1+y)dy = 0$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} = \frac{C}{6}$$

$$3x^2 + 2x^3 - 3y^2 - 2y^3 = C$$

由初值条件 $y|_{x=0} = 1$ 得 $C = -5$. 所以特解为 $3(x^2 - y^2) + 2(x^3 - y^3) = -5$.

4. 求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

- (*1) $y' = \frac{y}{y-x}$; (*2) $(x+y)dx + xdy = 0$; (*3) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$; (4) $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$;
(5) $(y^2 - 3x^2)dy - 2xydx = 0, y|_{x=0} = 1$; (6) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0, y|_{x=1} = 0$.

解 (*1) $y' = \frac{y}{y-x}$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-x}{y} = 1 - \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

令 $u = \frac{x}{y}, x = yu \Rightarrow \frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$. 从而原方程变为

$$u + y\frac{du}{dy} = 1 - u$$

$$\frac{-2du}{1-2u} = -2\frac{dy}{y}$$

$$\frac{d(1-2u)}{1-2u} = -2\frac{dy}{y}$$

$$\ln|1-2u| = -2\ln|y| + \ln|C| \quad (C \neq 0)$$

$$y^2(1-2u) = C$$

$$y^2 - 2xy = C, \quad C \neq 0$$

考虑到 $y = 0$ 是方程的解, 从而有方程的通解为 $y^2 - 2xy = C, C$ 为任意实数.

(*2) (全微分方程)

$$(x+y)dx + xdy = 0$$

$$xdx + (xdy + ydx) = 0$$

$$d\left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + xy = \frac{C}{2}$$

$$x^2 + 2xy = C, \quad C \text{ 为任意常数.}$$

$$xy' - y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

$$y' = \frac{y}{x} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \quad (x \neq 0, \text{其中 } x > 0 \text{ 时取正号, } x < 0 \text{ 时取负号})$$

令 $u = \frac{y}{x}$ 得 $y = xu$. 从而 $y' = u + x \frac{du}{dx} = u + \sqrt{1 + u^2}$.

1° 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} x \frac{du}{dx} &= \sqrt{1 + u^2} \\ \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} &= \int \frac{dx}{x} + \ln|C| \\ \ln|u + \sqrt{1 + u^2}| &= \ln|x| + \ln|C| \quad (C \neq 0) \\ u + \sqrt{1 + u^2} &= Cx \\ y + \sqrt{x^2 + y^2} &= Cx^2, \quad C \text{ 为不等于零的任意常数.} \end{aligned}$$

2° 当 $x < 0$ 时,

$$\begin{aligned} x \frac{du}{dx} &= -\sqrt{1 + u^2} \\ \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} &= -\int \frac{dx}{x} + \ln|C| \\ \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) &= -\ln|x| + \ln|C| \quad (C \neq 0) \\ -x(u + \sqrt{1 + u^2}) &= C \\ -y + \sqrt{x^2 + y^2} &= C \\ \frac{x^2}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} &= C, \\ y + \sqrt{x^2 + y^2} &= \frac{1}{C}x^2, \quad C \text{ 为不等于零的任意常数.} \end{aligned}$$

3° 当 $x = 0$ 时, 直接从原方程可知必有 $y \leq 0$. 但这不是方程的解.

可见, 当 $x > 0$ 与 $x < 0$ 时具有相同形式的解. 而 $x = 0$ 的情形可包含在通解形式 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$ (C 为任意非零常数) 中.

(4) $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{y}{x}$ ($x \neq 0, y \neq 0$). 令 $u = \frac{y}{x}$. 从而 $y = xu$.
 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2} + u$. 从而得方程

$$\begin{aligned} x \frac{du}{dx} &= \frac{1}{u^2} \\ u^2 du &= \frac{dx}{x} \\ \frac{u^3}{3} &= \ln|x| + C \\ y^3 &= 3x^3(\ln|x| + C), \quad C \text{ 为任意常数.} \end{aligned}$$

$x = 0$ 是方程的两个特解, 不能包含到上述通解中.

(5) $(y^2 - 3x^2)dy - 2xydx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2}{2xy} = \frac{1}{2}\frac{y}{x} - \frac{3}{2}\frac{x}{y}$ ($x \neq 0, y \neq 0$). 令 $u = \frac{y}{x}$. 则

$$x = yu, \frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy} = \frac{1}{u} - \frac{3}{2}u.$$

课后答案网: www.hackshp.cn

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! www.hackshp.cn

$$\begin{aligned} y \frac{du}{dy} &= -\frac{1-5u^2}{2u} \\ \frac{-10u du}{1-5u^2} &= -5 \frac{dy}{y} \\ \frac{d(1-5u^2)}{1-5u^2} &= -5 \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

$$\ln|1-5u^2| = -5 \ln|y| + \ln|C|$$

$$y^5(1-5u^2) = C$$

$$y^5 - 5x^2y^3 = C \text{ (考虑到 } y=0 \text{ 是方程的解, 从而 } C \text{ 可取任意常数).}$$

再由条件 $y|_{x=0} = 1$ 得 $C = 1$. $y^5 - 5x^2y^3 = 1$ 为方程的特解.

(6)

$$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

$$\text{令 } u = \frac{y}{x} \text{ 得 } y = xu, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + u.$$

$$2u du = 2 \frac{dx}{x}$$

$$u^2 = \ln x^2 + C$$

$$y^2 = x^2 (\ln x^2 + C) \quad (x=0 \text{ 是方程的特解, 但不能包含到此通解中}).$$

再由条件 $y|_{x=1} = 0$ 得 $C = 0$. 所以方程的解为 $y^2 = x^2 \ln x^2$.

5. 求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}; (2) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = e^x x^n; (3) \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3; (4) (x^2+1) \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2; (5) \frac{dy}{dx} - 2xy = xe^{-x^2}; (6) x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 e^x, y|_{x=1} = 0; (7) xy' + y = 3, y|_{x=1} = 0.$$

解 (1) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$. $P(x) = 1, Q(x) = e^{-x}$. $\int [-P(x)] dx = \int (-1) dx = -x$, $\int P(x) dx = \int dx = x$, $\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int e^{-x} e^x dx = x$. 所以由公式知非齐次线性方程的通解为 $y = e^{-x}(x + C)$, C 为任意常数.

(2) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = e^x x^n$. $P(x) = -\frac{n}{x}, Q(x) = e^x x^n$. $-\int P(x) dx = \int \frac{n}{x} dx = n \ln x$, $\int P(x) dx = \int -\frac{n}{x} dx = -n \ln x$, $\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int e^x x^n \cdot x^{-n} dx = \int e^x dx = e^x$. 所以方程的通解为 $y = x^n(e^x + C)$, C 为任意常数.

(3) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$. $P(x) = -\frac{2}{x+1}, Q(x) = (x+1)^3$. $-\int P(x) dx = \int \frac{2}{x+1} dx = \ln(x+1)^2$, $\int P(x) dx = -\int \frac{2}{x+1} dx = -\ln(x+1)^2$, $\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int (1+x)^3(1+x)^{-2} dx = \int (1+x) dx = x + \frac{1}{2}x^2$. 所以方程的通解为 $y = (x+1)^2 \left(x + \frac{1}{2}x^2 + C \right)$, C 为任意常数.

(4) $(x^2+1) \frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$. $P(x) = \frac{2x}{1+x^2}, Q(x) = \frac{4x^2}{1+x^2}$. $-\int P(x) dx = -\int \frac{2x}{1+x^2} dx = -\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = -\ln(1+x^2)$, $\int P(x) dx = \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2)$, $\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int \frac{4x^2}{1+x^2} \cdot (1+x^2) dx = \int 4x^2 dx = \frac{4}{3}x^3$. 所以方程的通解为 $y = \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{4}{3}x^3 + C \right)$, C 为任意常数.

(5) $\frac{dy}{dx} - 2xy = xe^{-x^2}$. $P(x) = -2x, Q(x) = xe^{-x^2}$. $-\int P(x) dx = \int 2x dx = x^2$, $\int P(x) dx = -\int 2x dx = -x^2$, $\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int xe^{-x^2} \cdot e^{-x^2} dx = \int xe^{-2x^2} dx = -\frac{1}{4} \int e^{-2x^2} d(-2x^2) = -\frac{1}{4} e^{-2x^2}$. 所以方程的通解为 $y = e^{x^2} \left(-\frac{1}{4} e^{-2x^2} + C \right) = -\frac{1}{4} e^{-x^2} + Ce^{x^2}$. C 为任意常数.

(6) $x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 P(x) + Q(x)$, $\int P(x)dx = \int \frac{2}{x} dx = \ln x^2$, $\int Q(x)dx = -\int \frac{2}{x} dx = -\ln x^2$. 若侵犯了你的版权利益, 敬请来信告知! www.backshp.cn
 $\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int \frac{2}{x} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{2}{x} dx = \ln x^2$. 所以方程的通解为 $y = x^2(e^x + C)$. 由条件 $y|_{x=1} = 0$ 得 $C = -e$. 方程的解为 $y = x^2(e^x - e)$.

(7) $xy' + y = 3$. $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{3}{x}$. $-\int P(x)dx = -\int \frac{1}{x} dx = \ln x^{-1}$, $\int P(x)dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$, $\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx = \int \frac{3}{x} \cdot x = 3x$. 所以方程的通解为 $y = \frac{1}{x}(3x + C)$. 由条件 $y|_{x=1} = 0$ 得 $C = -3$. 所以方程的解为 $y = \frac{3}{x}(x - 1) = 3(1 - \frac{1}{x})$.

6. 求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2$; (2) $y'' = e^{2x}$; (3) $y'' - y' = x$; (4) $xy'' + y' = 0$; (*5) $y \cdot y'' - (y')^2 - y' = 0$; (6) $y'' + \sqrt{1 - (y')^2} = 0$; (*7) $y''' = y''$; (*8) $y'' = 3\sqrt{y}$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$.

解 (1) $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2$. $y' = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1$, $y = \int (\frac{x^3}{3} + C_1) dx = \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2$. 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(2) $y'' = e^{2x}$. $y' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, $y = \int (\frac{1}{2}e^{2x} + C_1) dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数.

(*3) $y'' - y' = x$. 特征方程为 $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. 设方程具有形如 $y^* = x(A_0 + A_1x)$ 的特解. $(y^*)' = A_0 + 2A_1x$, $(y^*)'' = 2A_1$. 代入方程得 $(-A_0 - 2A_1)x + 2A_1 = x$. 从而有 $2A_1 - A_0 = 0$, $-2A_1 = 1$. 解之得 $A_0 = -1$, $A_1 = -\frac{1}{2}$. 所以特解为 $y^* = x(-1 - \frac{1}{2}x) = -x - \frac{1}{2}x^2$. 从而方程的通解为 $y = C_1 + C_2e^x - x - \frac{1}{2}x^2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数. (注: 也可令 $p = y'$, 从而将方程变为一阶非齐次线性方程求解.)

(4) $xy'' + y' = 0$. 令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$. 原方程变为 $x \frac{dp}{dx} + p = 0$. 分离变量得 $\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}$ ($p \neq 0, x \neq 0$). 解之得 $p = \frac{C_1}{x}$, C_1 为任意常数. 即 $\frac{dp}{dx} = \frac{C_1}{x}$, $dy = \frac{C_1}{x} dx$, $y = \int \frac{C_1}{x} dx + C_2 = C_1 \ln|x| + C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数. 由 $p = 0$ 得 $y = C_3$ (C_3 是任意常数) 是方程的特解, 不能包含在上述通解中.

(*5) $y \cdot y'' - (y')^2 - y' = 0$. 令 $p = y'$. $y'' = \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy}$. 原方程变为 $yp \frac{dp}{dy} - p^2 - p = 0$, $p(y \frac{dp}{dy} - p - 1) = 0$. 所以有 (i) $y \frac{dp}{dy} - p - 1 = 0$ 或 (ii) $p = 0$.

(i) 方程 $y \frac{dp}{dy} - p - 1 = 0$ 分离变量得 $\frac{dp}{1+p} = \frac{dy}{y}$ ($p \neq -1, y \neq 0$). $\ln|1+p| = \ln|y| + \ln|C_1|$, $1+p = C_1y$, $p = C_1y - 1$, C_1 为任意不为零的常数. 结合方程的特解 $p = -1$ 得方程的通解为 $p = C_1y - 1$, C_1 为任意常数. 即 $\frac{dy}{dx} = C_1y - 1$, $x = \int \frac{dy}{C_1y - 1} + C_2 = \frac{1}{C_1} \ln|C_1y - 1| + C_2$ ($C_1 \neq 0$) 是方程的通解. 而 $y = -x + C_2$ ($C_1 = 0$) 是方程的特解.

(ii) 由方程 $p = 0$ 得 $y = C_3$ (C_3 为任意常数) 是方程的特解.

(6) $y'' + \sqrt{1 - (y')^2} = 0$. 令 $p = y'$. $y'' = \frac{dp}{dx}$. 从而方程变为 $\frac{dp}{dx} = -\sqrt{1 - p^2}$. 分离变量后得 $\frac{dp}{\sqrt{1 - p^2}} = -dx$ ($p \neq \pm 1$), $\arcsin p = -x + C_1$, $p = \sin(C_1 - x)$. 即 $\frac{dy}{dx} = \sin(C_1 - x)$. 从而 $y = \int \sin(C_1 - x) dx + C_2 = \cos(C_1 - x) + C_2$, 其中 C_1, C_2 为任意常数. 由 $p = \pm 1$ 得原方程的两特解 $y = \pm x + C_3$, C_3 为任意常数. (注: 若变量分离后采用形式 $-\frac{dp}{\sqrt{1 - p^2}} = dx$ ($p \neq \pm 1$), 则积分后得 $\arccos p = x + C_1$)

(*7) (降阶法) $y''' = y''$. 令 $p = y'$. 原方程变为 $\frac{dp}{dx} = p$. 解之得 $p = C_1e^x$, C_1 为任意常数. 即 $y'' = C_1e^x$. 解之得 $y = C_1e^x + C_2x + C_3$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

(*8) $y'' = 3\sqrt{y}$. 令 $p = y'$. 方程变为 $p \frac{dp}{dy} = 3\sqrt{y}$. $p dp = 3\sqrt{y} dy$ (全微分方程, 只需直接求解), $\frac{1}{2}p^2 = 2y^{\frac{3}{2}} + C_1$. 再由条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$ 可得 $C_1 = 0$. 从而 $p^2 = 4y^{\frac{3}{2}}$, $dx = \frac{1}{p} dy = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$ (已由初始条件去掉了取负号的情形), $\int y^{-\frac{1}{2}} dy = 2 \int dx + C_2$, $4y^{\frac{1}{2}} = 2x + C_2$, $y = (\frac{C_2}{4} + \frac{x}{2})^2$. 再由条件 $y|_{x=0} = 1$ 得 $C_2 = 4$. 所以方程的解为 $y = (1 + \frac{x}{2})^2$.

7. 某林区现有木材 $10 \times 10^4 \text{ m}^3$, 如果在每一瞬时木材的变化率与当时木材数成正比, 假设 10 年内该林区能有木材 $20 \times 10^4 \text{ m}^3$, 试确定木材量与时间 t 的关系.
 课后答案网: www.hackshop.cn
 侵犯了您的版权吗? 敬请来信告知! www.hackshop.cn

解 由题意得

$$\frac{dP}{dt} = kP, P(0) = 10, P(10) = 20, P > 0.$$

从而有 $dP = kPdt$, $P = Ce^{kt}$. 由条件 $P(0) = 10, P(10) = 20$ 可确定 $C = 10, k = \frac{\ln 2}{10}$. 从而 $P = 10 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$.

8. 加热后的物体在空气中冷却的速度与每一瞬时物体温度与空气温度之差成正比, 试确定物体温度与时间 t 的关系.

解 设物体温度及空气温度分别为 T, T_0 且 $T \geq T_0$. 由题意得 $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$, $k > 0$. 分离变量后得 $\frac{dT}{T - T_0} = -kdt$, $\ln(T - T_0) = -kt + \ln|C|$, $T = Ce^{-kt} + T_0$. 其中 C 为某一常数.

9. 某商品的需求量 Q 对价格 P 的弹性为 $P \ln 3$. 已知该商品的最大需求量为 1200 (即当 $P = 0$ 时, $Q = 1200$), 试求需求量 Q 对价格 P 的函数关系.

解 由题意得 $\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -P \ln 3$. 分离变量后得 $\frac{dQ}{Q} = -\ln 3 dP$, $\ln Q = -P \ln 3 + \ln C$, $Q = C \cdot 3^{-P}$. 由初始条件 $Q(0) = 1200$ 得 $C = 1200$, 从而解为 $Q = 1200 \cdot 3^{-P}$.

*10. 在某池内养鱼, 该池塘最多能养鱼 1000 尾. 在时刻 t , 鱼数 y 是时间 t 的函数 $y = y(t)$, 其变化率与鱼数 y 及 $1000 - y$ 成正比. 已知在池塘内放养鱼 100 尾, 3 个月后池塘内有鱼 250 尾, 求放养 7 个月后池塘内鱼数 $y(t)$ 的公式.

解 由题意得 $\frac{dy}{dt} = k y(1000 - y)$ ($0 < y \leq 1000, k$ 为比例因子), $y(0) = 100, y(3) = 250$. 从而有 $\frac{dy}{y(1000 - y)} = kdt$, $\frac{1}{1000} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1000 - y} \right) dy = kdt$, $\frac{1}{1000} [\ln C + \ln y - \ln(1000 - y)] = kt$, $\frac{Cy}{1000 - y} = e^{1000kt}$. 由条件 $y(0) = 100, y(3) = 250$ 得 $C = 9, k = \frac{\ln 3}{3000}$. 从而有 $\frac{9y}{1000 - y} = 3^{\frac{t}{1000}} \Rightarrow y = \frac{1000 \cdot 3^{\frac{t}{1000}}}{9 + 3^{\frac{t}{1000}}}$.

11. 求下列各微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

(1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; (2) $y'' - y' - 6y = 0$; (3) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (4) $y'' - 6y' - 9y = 0$; (5) $y'' + 4y = 0$; (6) $y'' - 4y' + 13y = 0$; (7) $y'' - 5y' + 6y = 0, y|_{x=0} = \frac{1}{2}, y'|_{x=0} = 1$; (8) $y'' + y' - 2y = 0, y|_{x=0} = 3, y'|_{x=0} = 0$; (9) $y'' - 6y' + 9y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 2$; (10) $y'' + 3y' + 2y = 0, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$.

解 (1) $y'' - 4y' + 3y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. 由此知二阶常系数齐次线性方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}, C_1, C_2$ 为任意常数.

(2) $y'' - y' - 6y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}, C_1, C_2$ 为任意常数.

(3) $y'' - 4y' + 4y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$. 从而齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}, C_1, C_2$ 为任意常数.

(4) $y'' - 6y' - 9y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{(3+3\sqrt{2})x} + C_2 e^{(3-3\sqrt{2})x}, C_1, C_2$ 为任意常数.

(5) $y'' + 4y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, C_1, C_2$ 为任意常数.

(6) $y'' - 4y' + 13y = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. 从而齐次方程的通解为 $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x), C_1, C_2$ 为任意常数.

(7) $y'' - 5y' + 6y = 0, y|_{x=0} = \frac{1}{2}, y'|_{x=0} = 1$. 特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. 从

而齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. 再由初始条件 $y|_{x=0} = \frac{1}{2}, y'|_{x=0} = 1$ 得 $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = 0$. 从而方程的特解为 $y = \frac{1}{2}e^{2x}$. 课后答案网: www.hackshp.cn

(8) $y'' + y' - 2y = 0, y|_{x=0} = 3, y'|_{x=0} = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$. 再由初始条件 $y|_{x=0} = 3, y'|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = 1, C_2 = 2$. 从而方程的特解为 $y = 2e^x + e^{-2x}$. 君侵犯了您的版权利益, 敬请联系告知! www.hackshp.cn

(9) $y'' - 6y' + 9y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 2$. 特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$. 从而齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$. 再由初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 2$ 得 $C_1 = 0, C_2 = 2$. 从而方程的特解为 $y = 2xe^{3x}$.

(10) $y'' + 3y' + 2y = 0, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$. 特征方程为 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. 从而齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. 再由初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$ 得 $C_1 = 3, C_2 = -2$. 从而方程的特解为 $y = 3e^{-x} - 2e^{-2x}$.

12. 求下列微分方程的通解或在给定初始条件下的特解

(1) $y'' - 6y' + 13y = 14$; (2) $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1$; (3) $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$; (4) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$;
(5) $y'' + 4y = 8 \sin 2x$; (6) $y'' - 4y = 4, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$; (7) $y'' + 4y = 8x, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 4$;
(8) $y'' - 5y' + 6y = 2e^x, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$.

解 (1) $y'' - 6y' + 13y = 14$. 特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm 2i$. 由观察可得 $y^* = \frac{14}{13}$ 是方程的特解. 从而方程的通解为 $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{14}{13}, C_1, C_2$ 为独立的任意常数.

(2) $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1$. 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. 设方程的特解为 $y^* = A_0 + A_1 x$. $(y^*)' = A_1$, 代入方程解得 $A_0 = \frac{1}{9}, A_1 = -\frac{2}{3}$. 从而方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}, C_1, C_2$ 为独立的任意常数.

(3) $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$. 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$. 设方程的特解为 $y^* = Ae^{2x}$. $(y^*)' = 2Ae^{2x}, (y^*)'' = 4Ae^{2x}$. 代入方程解得 $A = \frac{1}{5}$. 从而方程的通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x}, C_1, C_2$ 为独立的任意常数.

(4) $y'' - y' - 2y = e^{2x}$. 特征方程为 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$. 设方程的特解为 $y^* = Axe^{2x}$. $(y^*)' = 2Axe^{2x} + Ae^{2x} = (2x+1)Ae^{2x}, (y^*)'' = 4A(1+x)e^{2x}$. 代入方程解得 $A = \frac{1}{5}$. 从而方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{5}xe^{2x} = C_1 e^{-x} + e^{2x}(C_2 + \frac{1}{5}x), C_1, C_2$ 为独立的任意常数.

(5) $y'' + 4y = 8 \sin 2x$. 特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$. 设方程的特解为 $y^* = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$. $(y^*)' = (A - 2Bx) \cos 2x + (B - 2Ax) \sin 2x, (y^*)'' = -4Ax \cos 2x + (-4A + 4Bx) \sin 2x$. 代入方程解得 $A = -2, B = 0$. 从而方程的通解为 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2x \cos 2x = (C_1 - 2x) \cos 2x + C_2 \sin 2x, C_1, C_2$ 为独立的任意常数.

(6) $y'' - 4y = 4, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$. 特征方程为 $\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$. 由观察可直接求得方程的特解为 $y^* = -1$. 从而方程的通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 1$. 再由条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = C_2 = 1$. 从而方程的特解为 $y = e^{2x} + e^{-2x} - 1$.

(7) $y'' + 4y = 8x, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 4$. 特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2i$. 由观察可直接求得方程的特解为 $y^* = 2x$. 从而方程的通解为 $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2x$. 再由条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 4$ 得 $C_1 = 0, C_2 = 1$. 从而方程的特解为 $y = \sin 2x + 2x$.

(8) $y'' - 5y' + 6y = 2e^x, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$. 特征方程为 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. 方程的特解为 $y^* = Ae^x$. 代入原方程得 $A = 1$. 从而方程的通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^x$. 再由条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 1$ 得 $C_1 = C_2 = 0$. 从而方程的特解为 $y = e^x$.

13. 方程 $y'' + 9y = 0$ 的一条积分曲线通过点 $(\pi, -1)$, 且在该点和直线 $y + 1 = x - \pi$ 相切, 求此曲线.

解 方程 $y'' + y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$. 通解为 $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.
 直线 $y + 1 = x - \pi$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的斜率为 1, 即 $y'|_{x=\pi} = 1$. 另由题意得初始条件 $y|_{x=\pi} = -1$.
 由此解得 $C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{3}$. 从而方程的解, 即曲线的函数形式为 $y = \cos 3x - \frac{1}{3} \sin 3x$.

14. 设一机器在任意时刻以常数比率贬值. 若机器全新时价值 10000 元, 5 年末价值 6000 元, 求其在出厂 20 年末的价值.

解 设机器的价值为 y 元. 由题意得 $\frac{y'}{y} = -\lambda, \lambda > 0$ 为一常数. 解之得 $y = Ce^{-\lambda t}$. 由题意得定解条件为 $y(0) = 10000, y(5) = 6000$. 因此, $C = 10000, \lambda = \ln 0.6^{-\frac{1}{5}}$. 取 $y = 10000 \cdot (0.6)^{\frac{t}{5}}$. 从而 $y(20) = 10000 \cdot (0.6)^4 = 1296$ 元.

15. 已知需求价格弹性 $\eta(P) = -\frac{1}{Q}$, 且当 $Q = 0$ 时, $P = 100$, 试求价格函数: 将价格 P 表示为需求 Q 的函数.

解 由题意有 $\eta(P) = \frac{dQ}{dP} \frac{P}{Q} = -\frac{1}{Q}$. 整理得 $-QdQ = \frac{dP}{P} \cdot \ln|C| - \frac{1}{2}Q^2 = \ln|P|$. $P = Ce^{-\frac{Q^2}{2}}$. 由 $P(0) = 100$ 得 $C = 100$, 即 $P = 100e^{-\frac{Q^2}{2}}$.

16. 当 $x \geq 1$ 时, 函数 $f(x) > 0$, 将曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1, x = a (a > 1), y = 0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所产生的立体的体积 $V(a) = \frac{\pi}{3} [a^2 f(a) - f(1)]$, 又曲线过点 $M(2, \frac{2}{9})$, 求曲线 $y = f(x)$.

解 $V(a) = \pi \int_1^a f^2(x) dx = \frac{\pi}{3} [a^2 f(a) - f(1)]$. 即 $\pi \int_1^a f^2(x) dx = \frac{\pi}{3} [x^2 f(x) - f(1)]$. 方程两边同时对 x 求导后得

$$\begin{aligned} 3y^2 &= 2xy + x^2 y' \\ y' + 2x^{-1}y &= 3x^{-2}y^2 \quad (\text{Bernoulli 方程}) \\ -y^{-2}y' - 2x^{-1}y^{-1} &= -3x^{-2} \\ z - 2x^{-1}z &= -3x^{-2} \quad (z = y^{-1}) \\ z &= e^{\int 2x^{-1}dx} \left(C + \int -3x^{-2}e^{-\int 2x^{-1}dx} dx \right) \\ z &= x^2(C + x^{-3}) \\ y &= \frac{x}{Cx^3 + 1} \end{aligned}$$

再由曲线过点 $M(2, \frac{2}{9})$ 得 $C = 1$. 从而 $y = \frac{x}{x^3 + 1}$.

一、选择题

1. 微分方程 $(y')^4 + 3(y'')^3 = 0$ 的阶是 C.

A. 4; B. 3; C. 2; D. 1.

2. 方程 $y' = y \cot x$ 的通解是 B.

A. $y = C \cos x$; B. $y = C \sin x$; C. $y = C \tan x$; D. $y = -\frac{C}{\sin x}$.

解 $y' = y \cot x \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow d \ln |y| = \frac{1}{\sin x} d \sin x = d \ln |\sin x| \Rightarrow y = C \sin x$.

3. 下面是可分离变量方程的是 A, B.

A. $y' - xy' = \alpha y^2 + y'$; B. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$; C. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$; D. $\frac{dy}{dx} + 2xy = e^{-x^2}$.

4. 方程 $e^{x-y} \frac{dy}{dx} = 1$ 通解是 D.

A. $e^x + e^y = C$; B. $e^{-x} + e^{-y} = C$; C. $e^x - e^y = C$; D. $e^{-x} - e^{-y} = C$.

解 $e^{-y} dy = e^{-x} dx \Rightarrow -de^{-y} = -de^{-x} \Rightarrow e^{-x} - e^{-y} = C$.

5. 方程 $y'' = y' + x$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0$ 的特解是 C.

A. $y = e^x - \frac{x^2}{2} - x + 1$; B. $y = e^x - x^2 - x + 1$; C. $y = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$; D. $y = e^x - x^2 + x - 1$.

解 特征方程为 $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1$. 故可设特解为 $y = x(A_0 + A_1 x)$. 代入方程解得 $A_0 = -1, A_1 = -\frac{1}{2}$. 从而方程的通解为 $y = C_1 + C_2 e^x - x - \frac{1}{2} x^2$. 再由初始条件得 $C_1 = -1, C_2 = 1$. 从而所求特解为 $y = e^x - \frac{1}{2} x^2 - x - 1$.

6. 下面为二阶常系数线性齐次方程的是 C.

A. $(y'')^2 + 5y' - 6y = 0$; B. $y'' + 5y' - 6y = x$; C. $y'' - 6y = 0$; D. $y'' - xy = 0$.

7. 方程 $y'' - 2y' = y$ 的特征方程为 D.

A. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$; B. $\lambda^2 - 2\lambda = 0$; C. $\lambda^2 + 1 = 0$; D. $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$.

8. 方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解是 B.

A. $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$; B. $y = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$; C. $y = e^{\sqrt{2}x}[C_1 \cos(-x) + C_2 \sin(-x)]$; D. $y = e^{-x}[C_1 \cos(-\sqrt{2}x) + C_2 \sin(-\sqrt{2}x)]$.

解 特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{2}i$. 从而方程的通解为 $y = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x)$.

*9. 方程 $y'' - 4y' - 5y = e^{-x} + \sin 5x$ 的特解形式为 D.

A. $y = A_1 e^x + B_1 \sin 5x$; B. $y = A_1 e^{-x} + B_1 \cos 5x + B_2 \sin 5x$; C. $y = A_1 e^x + B_1 \cos 5x$; D. $y = A_1 x e^{-x} + B_1 \cos 5x + B_2 \sin 5x$.

解 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$. 对于非齐次项 e^{-x} 有特解 $y_1 = A_1 x e^{-x}$, 对非齐次项 $\sin 5x$ 有特解 $y_2 = B_1 \cos 5x + B_2 \sin 5x$. 再由解的叠加原理就有特解为 $y = y_1 + y_2 = A_1 x e^{-x} + B_1 \cos 5x + B_2 \sin 5x$.

*10. 设线性无关函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解为 D.

A. $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$; B. $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$; C. $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$; D. $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$.

解 由于线性无关函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解, 从而 $y_2(x) - y_3(x)$ 和 $y_3(x) - y_1(x)$ 均为相应的齐次线性微分方程的特解, 且线性无关(可证明). 所以齐次方程的通解可表示为 $\bar{y} = C_1[y_1(x) - y_3(x)] + C_2[y_2(x) - y_3(x)]$. 非齐次方程的通解则为 $\bar{y} = C_1[y_1(x) - y_3(x)] + C_2[y_2(x) - y_3(x)] + y_3(x)$.

二、填空题

1. 方程 $x^3 dx - y dy = 0$ 的通解是 $x^4 - 2y^2 = C$.

解 $d\frac{x^4}{4} - d\frac{y^2}{2} = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{y^2}{2} = \frac{C}{4} \Rightarrow x^4 - 2y^2 = C$.

2. 方程 $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解是 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + (1+y^2)^{\frac{1}{2}} = 2$.

解 $\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = 0 \Rightarrow \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{d(1+y^2)}{\sqrt{1+y^2}} = 0 \Rightarrow d\left[(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + (1+y^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 0, \Rightarrow (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + (1+y^2)^{\frac{1}{2}} = C$. 再由初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 得 $C = 2$. 从而特解为 $(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + (1+y^2)^{\frac{1}{2}} = 2$.

3. 方程 $y' + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0$ 满足条件 $y|_{x=0} = c$ 的特解是 $y = e^{-x^2}(c + x^2)$.

解 $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$. $y = e^{-\int 2xdx} \left(C + \int 2xe^{-x^2} e^{\int 2xdx} dx \right) = e^{-x^2}(C + x^2)$. 再由初始条件 $y|_{x=0} = c$ 得 $C = c$. 所以特解为 $y = e^{-x^2}(c + x^2)$.

4. 方程 $y'' + 4y' + 29y = 0$ 满足条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 15$ 的特解是 $y = 3e^{-2x} \sin 5x$.

解 特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm 5i$. 方程的通解为 $y = e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$. 再由条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 15$ 得 $C_1 = 0, C_2 = 3$. 从而特解为 $y = 3e^{-2x} \sin 5x$.

*5. 设 $\varphi(x)$ 为连续函数(改为二阶可导), 且满足 $\varphi(x) = e^x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$, 则 $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x)$.

解 方程变为 $\varphi(x) = e^x - x \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^x t\varphi(t)dt$ (注意将积分分成两项方便对 x 求导). 方程两边同时对 x 求导得 $\varphi'(x) = e^x - \int_0^x \varphi(t)dt$, 再对 x 求导得 $\varphi''(x) = e^x - \varphi(x)$. 其特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda = \pm i$. 故可设特解为 $\varphi^*(x) = Ae^x$. 代入方程解得 $\varphi^*(x) = \frac{1}{2}e^x$. 从而方程的通解为 $\varphi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^x$. 由原积分方程可得初始条件为 $\varphi(0) = \varphi'(0) = 1$. 从而可解得 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. 从而 $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x)$.

三、求解下列微分方程

*1. 求方程 $xy' + y = y \ln(xy)$ 的通解.

解 令 $u = xy$. 方程变为 $\frac{du}{dx} = xy' + y = y \ln(xy) = \frac{u}{x} \ln u \Rightarrow \frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{d \ln u}{\ln u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow d \ln |\ln u| = d \ln |x| \Rightarrow \ln u = Cx \Rightarrow \ln(xy) = Cx$.

2. 求方程 $2xy'y'' = (y')^2 + 1$ 的通解.

解 令 $p = y'$. 由此方程变为 $2xpp' = p^2 + 1 \Rightarrow \frac{2pdp}{p^2+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{d(p^2+1)}{p^2+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow d \ln(p^2+1) = d \ln |x| \Rightarrow C_1 x - 1 = p^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{C_1 x - 1} \Rightarrow y = \pm \int \sqrt{C_1 x - 1} dx + C_2 \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x - 1)^{\frac{3}{2}} + C_2$.

*3. 求解方程 $\begin{cases} xy' + (1-x)y = e^{2x}, & (0 < x < +\infty) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1 \end{cases}$.

解 方程变形为 $y' + \frac{1-x}{x}y = \frac{e^{2x}}{x} \Rightarrow y = e^{\int \frac{1-x}{x} dx} \left(C + \int \frac{e^{2x}}{x} \cdot e^{\int \frac{x-1}{x} dx} dx \right) = \frac{e}{x} (C + e^x)$. 再由

$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 1$ 得 $C = 1$. 从而方程的通解为 $y = \frac{1}{x^2} + (e^x - 1)$.

*4. 求方程 $y' + \frac{y}{x} = y^2 - \frac{1}{x^2}$ 的通解.

解 原方程经变形得 $x(xy' + y) = x^2y^2 - 1$. 令 $u = xy$, 则方程进一步变为 $x \frac{du}{dx} = u^2 - 1 \Rightarrow \frac{du}{u^2-1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \ln x^2 + \ln |C| \Rightarrow \frac{u-1}{u+1} = Cx^2 \Rightarrow \frac{xy-1}{xy+1} = Cx^2 \Rightarrow \frac{xy-1}{xy+1} = Cx^2$.

5. 求方程 $x^2y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解.

解 方程变为 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2$. 令 $z = y^{-1}$, 则 $\frac{dz}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$. 原方程等号两边同时乘以 $-y^{-2}$ 后再整理得 $-y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow z = e^{\int -\frac{1}{x} dx} \left(C + \int (-\frac{1}{x^2}) e^{-\int -\frac{1}{x} dx} dx \right) = Cx + \frac{1}{2x} \Rightarrow y = \frac{2x}{2Cx^2+1}$. 再由初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 得 $C = \frac{1}{2}$. 所以所求特解为 $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

注: 亦可由齐次方程求解.

6. 求方程 $y'' - 2y' = 2\cos^2 x$ 的通解.

解 $y'' - 2y' = 2\cos^2 x = \cos 2x + 1$. 特征方程为 $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 2$. (i) 先讨论方程 $y = y'' - 2y' = 2\cos^2 x = 1$. 其特解为 $y_1^* = Ax$. 代入方程得 $A = -\frac{1}{2}$. 从而特解为 $y_1^* = -\frac{1}{2}x$. (ii) 讨论方程 $y'' - 2y' = \cos 2x$. 其特解为 $y_2^* = B_1 \cos 2x + B_2 \sin 2x$. 代入方程得 $B_1 = B_2 = -\frac{1}{8}$. 从而特解为 $y_2^* = -\frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x)$. 所以原方程的特解为 $y^* = y_1^* + y_2^* = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x)$. 从而其通解为 $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}(\cos 2x + \sin 2x)$, C_1, C_2 为任意常数.

*7. 设 $y = e^x$ 是方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

解 将特解 $y = e^x$ 代入方程 $xy' + p(x)y = x$ 得 $xe^x + p(x)e^x = x \Rightarrow p(x) = x(e^{-x} - 1)$. 所以原方程为 $y' + (e^{-x} - 1)y = 1$.

$$\begin{aligned} y &= e^{\int (1-e^{-x}) dx} \left(C + \int e^{\int (e^{-x}-1) dx} dx \right) = e^{x+e^{-x}} \left(C + \int e^{-e^{-x}-x} dx \right) \\ &= e^{x+e^{-x}} \left(C + \int e^{-e^{-x}} de^{-x} \right) = e^{x+e^{-x}} (C + e^{-e^{-x}}) = Ce^{x+e^{-x}} + e^x \end{aligned}$$

由条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 得 $0 = Ce^{\ln 2 + e^{-\ln 2}} + e^{\ln 2} = 2C\sqrt{e} + 2$. 从而 $C = -e^{-\frac{1}{2}}$. 从而特解为 $y = -e^{x+e^{-x}-\frac{1}{2}} + e^x$.