

## 习题 1.2

1.  $\frac{dy}{dx} = 2xy$ , 并满足初始条件:  $x=0, y=1$  的特解。

解:  $\frac{dy}{y} = 2xdx$  两边积分有:  $\ln|y| = x^2 + c$

$y = e^{x^2 + c} = ce^{x^2}$  另外  $y=0$  也是原方程的解,  $c=0$  时,  $y=0$

原方程的通解为  $y = ce^{x^2}$ ,  $x=0$  时  $c=1$

特解为  $y = e^{x^2}$ .

2.  $y^2 dx + (x+1)dy = 0$  并求满足初始条件:  $x=0, y=1$  的特解。

解:  $y^2 dx = -(x+1)dy \quad \frac{dy}{y^2} dy = -\frac{1}{x+1} dx$

两边积分:  $-\frac{1}{y} = -\ln|x+1| + \ln|c| \quad y = \frac{1}{\ln|c(x+1)|}$

另外  $y=0, x=-1$  也是原方程的解  $x=0, y=1$  时  $c=e$

特解:  $y = \frac{1}{\ln|c(x+1)|}$

3.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy+x^3y}$

解: 原方程为:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{y} \frac{1}{x+x^3}$

$\frac{1+y^2}{y} dy = \frac{1}{x+x^3} dx$

两边积分:  $x(1+x^2)(1+y^2) = cx^2$

4.  $(1+x)yd x + (1-y)xd y = 0$

解: 原方程为:  $\frac{1-y}{y} dy = -\frac{x+1}{x} dx$

两边积分:  $\ln|xy| + x - y = c$

另外  $x=0, y=0$  也是原方程的解。

5.  $(y+x)dy + (x-y)dx = 0$

解：原方程为：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-y}{x+y}$$

令  $\frac{y}{x} = u$  则  $\frac{dy}{dx} = u+x \frac{du}{dx}$  代入有：

$$-\frac{u+1}{u^2+1} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\ln(u^2+1)x^2 = c - 2\arctan u$$

$$\text{即 } \ln(y^2+x^2) = c - 2\arctan \frac{y}{x^2}.$$

$$6. x \frac{dy}{dx} - y + \sqrt{x^2 - y^2} = 0$$

$$\text{解：原方程为： } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{|x|}{x} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\text{则令 } \frac{y}{x} = u \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \operatorname{sgn} x \frac{1}{x} dx$$

$$\arcsin \frac{y}{x} = \operatorname{sgn} x \ln|x| + c$$

$$7. \operatorname{tgy} dx - \operatorname{ctgx} dy = 0$$

$$\text{解：原方程为： } \frac{dy}{\operatorname{tgy}} = \frac{dx}{\operatorname{ctgx}}$$

两边积分：  $\ln|\operatorname{siny}| = -\ln|\operatorname{cosx}| - \ln|c|$

$$\operatorname{siny} = \frac{1}{c \operatorname{cos} x} = \frac{c}{\operatorname{cos} x} \quad \text{另外 } y=0 \text{ 也是原方程的解，而 } c=0 \text{ 时， } y=0.$$

所以原方程的通解为  $\operatorname{siny} \operatorname{cosx} = c$ .

$$8. \frac{dy}{dx} + \frac{e^{y^2+3x}}{y} = 0$$

$$\text{解：原方程为： } \frac{dy}{dx} = \frac{e^{y^2}}{y} e^{3x}$$

$$2e^{3x} - 3e^{-y^2} = c.$$

$$9. x(\ln x - \ln y) dy - y dx = 0$$

$$\text{解：原方程为： } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$$

令  $\frac{y}{x} = u$ , 则  $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

$$u + x \frac{du}{dx} = u \ln u$$

$$\ln(u-1) = -\ln|cx|$$

$$1 + \ln \frac{y}{x} = cy.$$

10.  $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

解: 原方程为:  $\frac{dy}{dx} = e^x e^{-y}$

$$e^y = ce^x$$

11.  $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2$

解: 令  $x+y=u$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

$$\frac{du}{dx} - 1 = u^2$$

$$\frac{1}{1+u^2} du = dx$$

$$\arctan u = x + c$$

$$\arctan(x+y) = x + c$$

12.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}$

解: 令  $x+y=u$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u^2}$$

$$u - \arctan u = x + c$$

$$y - \arctan(x+y) = c.$$

13.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$

解: 原方程为:  $(x-2y+1) dy = (2x-y+1) dx$

$$xdy + ydx - (2y-1)dy - (2x+1)dx = 0$$

$$dxy - d(y^2 - y) - dx^2 + x = c$$

$$xy - y^2 + y - x^2 - x = c$$

14.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{x-y-2}$

解: 原方程为:  $(x-y-2) dy = (x-y+5) dx$

$$xdy + ydx - (y+2)dy - (x+5)dx = 0$$

$$dxy - d\left(\frac{1}{2}y^2 + 2y\right) - d\left(\frac{1}{2}x^2 + 5x\right) = 0$$

$$y^2 + 4y + x^2 + 10x - 2xy = c.$$

15:  $\frac{dy}{dx} = (x+1)^2 + (4y+1)^2 + 8xy + 1$

解: 原方程为:  $\frac{dy}{dx} = (x+4y)^2 + 3$

令  $x+4y=u$  则  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} \frac{du}{dx} - \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} \frac{du}{dx} - \frac{1}{4} = u^2 + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 4u^2 + 13$$

$$u = \frac{3}{2} \operatorname{tg}(6x+c) - 1$$

$$\operatorname{tg}(6x+c) = \frac{2}{3}(x+4y+1).$$

16: 证明方程  $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = f(xy)$ , 经变换  $xy=u$  可化为变量分离方程, 并由此求下列方程:

1)  $y(1+x^2y^2)dx = xdy$

2)  $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$

证明: 令  $xy=u$ , 则  $x \frac{dy}{dx} + y = \frac{du}{dx}$

则  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2}$ , 有:

$$\frac{x}{u} \frac{du}{dx} = f(u) + 1$$

$$\frac{1}{u(f(u) + 1)} du = \frac{1}{x} dx$$

所以原方程可化为变量分离方程。

1) 令  $xy=u$  则  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2}$  (1)

原方程可化为:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} [1 + (xy)^2]$  (2)

将 1 代入 2 式有:  $\frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = \frac{u}{x} (1+u^2)$

$$u = \sqrt{u^2 + 2} + cx$$

17. 求一曲线, 使它的切线坐标轴间的部分初切点分成相等的部分。

解: 设  $(x+y)$  为所求曲线上任意一点, 则切线方程为:  $y=y'(x-x_0)+y_0$

则与 x 轴, y 轴交点分别为:

$$x = x_0 - \frac{y_0}{y'} \quad y = y_0 - x_0 - y'$$

$$\text{则 } x = 2x_0 = x_0 - \frac{y_0}{y'} \quad \text{所以 } xy = c$$

18.求曲线上任意一点切线与该点的向径夹角为 0 的曲线方程, 其中  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  。

解: 由题意得:  $y' = \frac{y}{x} \quad \frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx$

$$\ln|y| = \ln|xc| \quad y = cx.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{则 } y = \tan \alpha x \quad \text{所以 } c = 1 \quad y = x.$$

19.证明曲线上的切线的斜率与切点的横坐标成正比的曲线是抛物线。

证明: 设  $(x, y)$  为所求曲线上的任意一点, 则  $y' = kx$

则:  $y = kx^2 + c$  即为所求。

www. Khdaw. Com

## 常微分方程习题 2.1

1.  $\frac{dy}{dx} = 2xy$ , 并求满足初始条件:  $x=0, y=1$  的特解.

解: 对原式进行变量分离得

$\frac{1}{y} dy = 2x dx$ , 两边同时积分得:  $\ln|y| = x^2 + c$ , 即  $y = c e^{x^2}$  把  $x = 0, y = 1$  代入得  $c = 1$ , 故它的特解为  $y = e^{x^2}$ .

2.  $y^2 dx + (x+1)dy = 0$ , 并求满足初始条件:  $x=0, y=1$  的特解.

解: 对原式进行变量分离得:

$-\frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{y^2} dy$ , 当  $y \neq 0$  时, 两边同时积分得:  $\ln|x+1| = \frac{1}{y} + c$ , 即  $y = \frac{1}{c + \ln|x+1|}$

当  $y = 0$  时显然也是原方程的解. 当  $x = 0, y = 1$  时, 代入式子得  $c = 1$ , 故特解是

$$y = \frac{1}{1 + \ln|1+x|}$$

$$3. \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy+x^3 y}$$

解: 原式可化为:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{y} \bullet \frac{1}{x^3} \text{ 显然 } \frac{1+y^2}{y} \neq 0, \text{ 故分离变量得 } \frac{y}{1+y^2} dy = \frac{1}{x^3} dx$$

$$\text{两边积分得 } \frac{1}{2} \ln|1+y^2| = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + \ln|c| (c \neq 0), \text{ 即 } (1+y^2)(1+x^2) = c x^2$$

$$\text{故原方程的解为 } (1+y^2)(1+x^2) = c x^2$$

$$4. (1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$$

解: 由  $y=0$  或  $x=0$  是方程的解, 当  $xy \neq 0$  时, 变量分离  $\frac{1+x}{x} dx = \frac{1-y}{y} dy = 0$

$$\text{两边积分 } \ln|x| + x + \ln|y| - y = c, \text{ 即 } \ln|xy| + x - y = c,$$

$$\text{故原方程的解为 } \ln|xy| = x - y = c; y = 0; x = 0.$$

5:  $(y+x)dy + (y-x)dx = 0$

解:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ , 令  $\frac{y}{x} = u$ ,  $y = ux$ ,  $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

则  $u + x\frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u+1}$ , 变量分离, 得:  $-\frac{u+1}{u^2+1}du = \frac{1}{x}dx$

两边积分得:  $\arctan u + \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = -\ln|x| + c$ 。

6:  $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

解: 令  $\frac{y}{x} = u$ ,  $y = ux$ ,  $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ , 则原方程化为:

$\frac{du}{dx} = \frac{\sqrt{x^2(1-u^2)}}{x}$ , 分离变量得:  $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \operatorname{sgn} x \cdot \frac{1}{x}dx$

两边积分得:  $\arcsin u = \operatorname{sgn} x \cdot \ln|x| + c$

代回原来变量, 得  $\arcsin \frac{y}{x} = \operatorname{sgn} x \cdot \ln|x| + c$

另外,  $y^2 = x^2$  也是方程的解。

7:  $\operatorname{tgy}dx - \operatorname{ctgx}dy = 0$

解: 变量分离, 得:  $\operatorname{ctgy}dy = \operatorname{tg}xdx$

两边积分得:  $\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + c$

8:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{y^2+3x}}{y}$

解: 变量分离, 得  $\frac{y}{e^y}dy = -\frac{1}{3}e^{3x} + c$

9:  $x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$

解: 方程可变为:  $-\ln\frac{y}{x} \cdot dy - \frac{y}{x}dx = 0$

令  $u = \frac{y}{x}$ , 则有:  $\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln u}{1+\ln u}d\ln u$

代回原变量得:  $cy = 1 + \ln\frac{y}{x}$

10:  $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

解: 变量分离  $e^y dy = e^x dx$

两边积分  $e^y = e^x + c$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

解：变量分离， $e^y dy = e^x dx$

两边积分得： $e^y = e^x + c$

$$11. \frac{dy}{dx} = (x+y)^2$$

解：令  $x+y = t$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} + 1$

$$\text{原方程可变为: } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t^2} + 1$$

变量分离得： $\frac{1}{t^2+1} dt = dx$ , 两边积分  $\arctgt = x + c$

代回变量得： $\arctg(x+y) = x + c$

$$12. \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)^2}$$

解

令  $x+y = t$ , 则  $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$ , 原方程可变为  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t^2} + 1$

变量分离  $\frac{t^2}{t^2+1} dt = dx$ , 两边积分  $t - \arctgt = x + c$ , 代回变量

$$x+y - \arctg(x+y) = x + c$$

$$13. \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y-1}{x-2y+1}$$

解：方程组  $2x-y-1=0$ ,  $x-2y+1=0$ ; 的解为  $x = -\frac{1}{3}$ ,  $y = \frac{1}{3}$

令  $x = X - \frac{1}{3}$ ,  $y = Y + \frac{1}{3}$ , 则有  $\frac{dY}{dX} = \frac{2X-Y}{X-2Y}$

令  $\frac{Y}{X} = U$ , 则方程可化为：  $X \frac{dU}{dX} = \frac{2-2U+2U^2}{1-2U}$

变量分离

$$14, \frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{x-y-2}$$

解: 令  $x-y=5=t$ , 则  $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dt}{dx}$ ,

原方程化为:  $1 - \frac{dt}{dx} = \frac{t}{t-7}$ , 变量分离  $(t-7)dt - 7dx$

两边积分  $\frac{1}{2}t^2 - 7t = -7x + c$

代回变量  $\frac{1}{2}(x-y+5)^2 - 7(x-y+5) = -7x + c$ .

$$15. \frac{dy}{dx} = (x+1)^2 + (4y+1)^2 + 8xy + 1$$

解: 方程化为  $\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x + 1 + 16y^2 + 8y + 1 + 8xy + 1 = (x+4y+1)^2 + 2$

令  $1+x+4y=u$ , 则关于  $x$  求导得  $1+4\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$ , 所以  $\frac{1}{4}\frac{du}{dx} = u^2 + \frac{9}{4}$ ,

分离变量  $\frac{1}{4u^2+9}du = dx$ , 两边积分得  $\operatorname{arctg}(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}y) = 6x + c$ , 是原方程的解。

$$16. \frac{dy}{dx} = \frac{y^6 - 2x^2}{2xy^5 + x^2y^2}$$

解:  $\frac{dy}{dx} = \frac{(y^3)^2 - 2x^2}{y^2(2xy^3 + x^2)} = \frac{dy^3}{dx} = \frac{3[(y^3)^2 - 2x^2]}{2xy^3 + x^2}$ , 令  $y^3 = u$ , 则原方程化为

$$\frac{du}{dx} = \frac{3u^2 - 6x^2}{2xu + x^2} = \frac{\frac{3u^2}{x^2} - 6}{2\frac{u}{x} + 1}, \quad \text{这 是 齐 次 方 程 , 令}$$

当 $z^2 - z - 6 = 0$ , 得 $z = 3$ 或 $z = -2$ 是 (1) 方程的解。即 $y^3 = 3x$ 或 $y^3 = -2x$ 是方程的解。

当 $z^2 - z - 6 \neq 0$ 时, 变量分离  $\frac{2z+1}{z^2 - z - 6} dz = \frac{1}{x} dx$ , 两边积分的  $(z-3)^7(z+2)^3 = x^5 c$ ,

即  $(y^3 - 3x)^7 (y^3 + 2x)^3 = x^5 c$ , 又因为  $y^3 = 3x$  或  $y^3 = -2x$  包含在通解中当  $c = 0$  时。故原方程的解为  $(y^3 - 3x)^7 (y^3 + 2x)^3 = x^{15} c$

$$17. \frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + 3xy + x}{3x^2 y + 2y^3 - y}$$

解：原方程化为  $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2x^2 + 3y^2 + 1)}{y(3x^2 + 2y^2 - 1)}$ ; ; ; ;  $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2x^2 + 3y^2 + 1}{3x^2 + 2y^2 - 1}$

令  $y^2 = u, \dots, x^2 = v, \dots$ ; 则  $\frac{du}{dv} = \frac{2v + 3u + 1}{3v + 2u - 1}$  .....(1)

方程组  $\begin{cases} 2v + 3u + 1 = 0 \\ 3v + 2u - 1 = 0 \end{cases}$  的解为  $(1, -1)$ ；令  $Z = v - 1$ ,  $Y = u + 1$ ,

则有  $\begin{cases} 2z+3y=0 \\ 3z+2y=0 \end{cases}$ , , , , 从而方程 (1) 化为  $\frac{dy}{dz} = \frac{2+3y}{3+2z}$

令

$t = \frac{y}{z}$ , , 则有  $\frac{dy}{dz} = t + z \frac{dt}{dz}$ , , 所以  $t + z \frac{dt}{dz} = \frac{2+3t}{3+2t}$ , ,  $z \frac{dt}{dz} = \frac{2-2t^2}{3+2t}$ , .....(2)

当

2-2t<sup>2</sup>=0时, , 即t=±1, 是方程(2)的解。得y<sup>2</sup>=x<sup>2</sup>-2或y<sup>2</sup>=-x<sup>2</sup>是原方程的解

当

2-2t<sup>2</sup> ≠ 0时, , 分离变量得  $\frac{3+2t}{2-2t^2} dt = \frac{1}{z} dz$  两边积分的  $y^2 + x^2 = (y^2 - x^2 + 2)^5 c$

另外

$y^2 = x^2 - 2$ , 或  $y^2 = -x^2$ , 包含在其通解中, 故原方程的解为  $y^2 + x^2 = (y^2 - x^2 + 2)^5 c$

18. 证明方程  $\frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} = f(xy)$  经变换  $xy = u$  可化为变量分离方程，并由此求解下列方程

$$(1). y(1+x^2y^2)dx = xdy$$

$$(2). \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$$

证明：因为  $xy = u$ , 关于  $x$  求导得  $y + x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$ , 所以  $x \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - y$

$$\text{得: } \frac{1}{y} \frac{du}{dx} - 1 = f(u), \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}(f(u) + 1) = \frac{1}{x}(uf(u) + u)$$

故此方程为此方程为变程。

解(1): 当  $x = 0$  或  $y = 0$  是原方程的解, 当  $xy \neq 0$  时, 方程化为  $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = 1 + x^2 y^2$

$$\text{令 } xy = u, \text{ 则方程化为 } \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(2u + u^3), \text{ 变量分离得: } \frac{du}{2u + u^3} = \frac{1}{x} dx$$

两边同时积分得:  $\frac{u^2}{u^2 + 2} = c x^4$ , 即  $\frac{y^2}{x^2 y^2 + 2} = c x^2$ ,  $y = 0$  也包含在此通解中。

故原方程的解为原  $\frac{y^2}{x^2 y^2 + 2} = c x^2$ ,  $x = 0$ .

$$\text{解(2)令 } xy = u, \text{ 则原方程化为 } \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(u \frac{2+u^2}{2-u^2} + u) = \frac{1}{x} \frac{4u}{2-u^2}$$

分离变量得  $\frac{2-u^2}{4u} du = \frac{1}{x} dx$ , 两边积分得  $\ln \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{x^2 y^2}{4} + c$ , 这也就是方程的解。

19. 已知  $f(x) \int_0^x f(t) dt = 1, x \neq 0$ , 试求函数  $f(x)$  的一般表达式.

解: 设  $f(x) = y$ , 则原方程化为  $\int_0^x f(t) dt = \frac{1}{y}$  两边求导得  $y = -\frac{1}{y^2} y'$

$$-y^3 = \frac{dy}{dx}; \text{ 两边积分得 } x + \bar{c} = \frac{1}{2} \frac{1}{y^2}; \text{ 所以 } y = \pm \frac{1}{\sqrt{2x + c}}$$

$$\text{把 } y = \pm \frac{1}{\sqrt{2x + c}} \text{ 代入 } \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{y}$$

$$\pm \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2t+c}} dt = \pm \sqrt{2x+c}; \dots; \pm (\sqrt{2x+c} - \sqrt{c}) = \pm \sqrt{2x+c} \text{ 得 } c=0, \text{ 所以 } y = \pm \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

20. 求具有性质  $x(t+s) = \frac{x(t) + x(s)}{1 - x(t)x(s)}$  的函数  $x(t)$ , 已知  $x'(0)$  存在。

解: 令  $t=s=0$   $x(0) = \frac{x(0) + x(0)}{1 - x(0)x(0)} = \frac{2x(0)}{1 - x(0)x(0)}$  若  $x(0) \neq 0$  得  $x^2 = -1$  矛盾。

所以  $x(0)=0$ .  $x'(t) = \lim \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim \frac{x(\Delta t)(1 + x^2(t))}{\Delta t[1 - x(t)x(\Delta t)]} = x'(0)(1 + x^2(t))$

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(0)(1 + x^2(t)) \quad \frac{dx(t)}{1 + x^2(t)} = x'(0)dt \quad \text{两 边 积 分 得 } \arctg$$

$x(t) = x'(0)t + c$  所以  $x(t) = \text{tg}[x'(0)t + c]$  当  $t=0$  时  $x(0)=0$  故  $c=0$  所以

$$x(t) = \text{tg}[x'(0)t]$$

02411 黄罕麟 (41) 甘代祥 (42)

## 习题 2.2

求下列方程的解

$$1. \frac{dy}{dx} = y + \sin x$$

$$\begin{aligned} \text{解: } y &= e^{\int dx} \left( \int \sin x e^{-\int dx} dx + c \right) \\ &= e^x \left[ -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + c \right] \\ &= c e^x - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) \text{ 是原方程的解。} \end{aligned}$$

$$2. \frac{dx}{dt} + 3x = e^{2t}$$

$$\text{解: 原方程可化为: } \frac{dx}{dt} = -3x + e^{2t}$$

$$\begin{aligned} \text{所以: } x &= e^{\int -3dt} \left( \int e^{2t} e^{-\int -3dt} dt + c \right) \\ &= e^{-3t} \left( \frac{1}{5} e^{5t} + c \right) \\ &= c e^{-3t} + \frac{1}{5} e^{2t} \text{ 是原方程的解。} \end{aligned}$$

$$3. \frac{ds}{dt} = -s \cos t + \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$\begin{aligned} \text{解: } s &= e^{\int -\cos t dt} \left( \int \frac{1}{2} \sin 2t e^{\int \cos t dt} dt + c \right) \\ &= e^{-\sin t} \left( \int \sin t \cos t e^{\sin t} dt + c \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\sin t} (\sin t e^{\sin t} - e^{\sin t} + c) \\ &= ce^{-\sin t} + \sin t - 1 \text{ 是原方程的解。} \end{aligned}$$

$$4. \frac{dy}{dx} - \frac{x}{n} y = e^x x^n, \quad n \text{ 为常数.}$$

$$\begin{aligned} \text{解: 原方程可化为: } \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{n} y + e^x x^n \\ y &= e^{\int \frac{n}{x} dx} \left( \int e^x x^n e^{-\int \frac{n}{x} dx} dx + c \right) \\ &= x^n (e^x + c) \text{ 是原方程的解.} \end{aligned}$$

5.  $\frac{dy}{dx} + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0$

解：原方程可化为： $\frac{dy}{dx} = -\frac{1-2x}{x^2} y + 1$

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{2x-1}{x^2} dx} (e^{\int \frac{1-2x}{x^2} dx} dx + c) \\ &= e^{(\ln x^2 + \frac{1}{2})} (\int e^{-\ln x^2 - \frac{1}{x}} dx + c) \\ &= x^2 (1 + ce^{\frac{1}{x}}) \quad \text{是原方程的解.} \end{aligned}$$

6.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + x^3}{xy^2}$

解： $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + x^3}{xy^2}$

$$= \frac{x^3}{y^2} + \frac{y}{x}$$

令  $\frac{y}{x} = u$  则  $y = ux$   $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

因此： $u + x \frac{du}{dx} = \frac{x}{u^2}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{u^2}$$

$$u^2 du = dx$$

$$\frac{1}{3}u^3 = x + c$$

$$u^3 - 3x = x + c \quad (*)$$

将  $\frac{y}{x} = u$  带入  $(*)$  中 得： $y^3 - 3x^4 = cx^3$  是原方程的解.

$$7. \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+1} + (x+1)^3$$

$$P(x) = \frac{2}{x+1}, Q(x) = (x+1)^3$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x+1}dx} = (x+1)^2$$

方程的通解为:

$$\begin{aligned} y &= e^{\int P(x)dx} \left( \int e^{-\int P(x)dx} Q(x)dx + c \right) \\ &= (x+1)^2 \left( \int \frac{1}{(x+1)^2} * (x+1)^3 dx + c \right) \\ &= (x+1)^2 \left( \int (x+1) dx + c \right) \\ &= (x+1)^2 \left( \frac{(x+1)^2}{2} + c \right) \end{aligned}$$

即:  $2y = c(x+1)^2 + (x+1)^4$  为方程的通解。

$$8. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3}$$

$$\text{解: } \frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3}{y} = \frac{1}{y}x + y^2$$

$$\text{则 } P(y) = \frac{1}{y}, Q(y) = y^2$$

$$e^{\int P(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$$

方程的通解为:

$$\begin{aligned} x &= e^{\int P(y)dy} \left( \int e^{-\int P(y)dy} Q(y)dy + c \right) \\ &= y \left( \int \frac{1}{y} * y^2 dy + c \right) \\ &= \frac{y^3}{2} + cy \end{aligned}$$

即  $x = \frac{y^3}{2} + cy$  是方程的通解, 且  $y=0$  也是方程的解。

9.  $\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{x} + \frac{x+1}{x}$ ,  $a$  为常数

解:  $P(x) = \frac{a}{x}$ ,  $Q(x) = \frac{x+1}{x}$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{a}{x}dx} = x^a$$

方程的通解为:  $y = e^{\int P(x)dx} (e^{-\int P(x)dx} Q(x)dx + c)$   
 $= x^a \left( \int \frac{1}{x^a} \frac{x+1}{x} dx + c \right)$

当  $a = 0$  时, 方程的通解为

$$y = x + \ln|x| + c$$

当  $a = 1$  时, 方程的通解为

$$y = cx + x \ln|x| - 1$$

当  $a \neq 0, 1$  时, 方程的通解为

$$y = cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}$$

10.  $x \frac{dy}{dx} + y = x^3$

解:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y + x^3$

$P(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $Q(x) = x^3$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

方程的通解为:

$$\begin{aligned} y &= e^{\int P(x)dx} \left( \int e^{-\int P(x)dx} Q(x)dx + c \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( \int x^* x^3 dx + c \right) \\ &= \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x} \end{aligned}$$

方程的通解为:  $y = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$

$$11. \frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = -xy + x^3 y^3$$

两边除以  $y^3$

$$\frac{dy}{y^3 dx} = -xy^{-2} + x^3$$

$$\frac{dy^{-2}}{dx} = -2(-xy^{-2} + x^3)$$

$$\text{令 } y^{-2} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -2(-xz + x^3)$$

$$P(x) = 2x, Q(x) = -2x^3$$

$$e^{\int p(x) dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

方程的通解为:

$$\begin{aligned} z &= e^{\int p(x) dx} \left( \int e^{-\int p(x) dx} Q(x) dx + c \right) \\ &= e^{x^2} \left( \int e^{-x^2} (-2x^3) dx + c \right) \\ &= x^2 + ce^{x^2} + 1 \end{aligned}$$

故方程的通解为:  $y^2(x^2 + ce^{x^2} + 1) = 1$ , 且  $y = 0$  也是方程的解。

$$12. (y \ln x - 2)y dx = x dy \frac{c}{4} x^2 + \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x} y^2 - \frac{2y}{x}$$

两边除以  $y^2$

$$\frac{dy}{y^2 dx} = \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x}$$

$$\frac{dy^{-1}}{dx} = \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x}$$

$$\text{令 } y^{-1} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} z - \frac{\ln x}{x}$$

$$P(x) = \frac{2}{x}, Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$$

方程的通解为:

$$z = e^{\int P(x) dx} \left( \int e^{-\int P(x) dx} Q(x) dx + c \right)$$

$$z = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left( \int e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left( -\frac{\ln x}{x} \right) dx + c \right) = x^2 \left( \int \frac{1}{x^2} \left( -\frac{\ln x}{x} \right) dx + c \right)$$

$$= \frac{c}{4} x^2 + \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{方程的通解为: } y \left( \frac{c}{4} x^2 + \frac{\ln x}{2} + \frac{1}{4} \right) = 1, \text{ 且 } y=0 \text{ 也是解。}$$

13

$$2xy dy = (2y^2 - x) dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x}{2xy} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2y}$$

这是  $n=-1$  时的伯努利方程。

两边同除以  $\frac{1}{y}$ ,

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} - \frac{1}{2}$$

$$\text{令 } y^2 = z \quad \frac{dz}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2y^2}{x} - 1 = \frac{2z}{x} - 1$$

$$P(x) = \frac{2}{x} \quad Q(x) = -1$$

由一阶线性方程的求解公式

$$z = e^{\int_x^2 dx} \left( \int -e^{-\int_x^2 dx} dx + c \right)$$

$$= x + x^2 c$$

$$y^2 = x + x^2 c$$

$$14 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^y + 3x}{x^2}$$

两边同乘以  $e^y$        $e^y \frac{dy}{dx} = \frac{(e^y)^2 + 3x e^y}{x^2}$

$$\text{令 } e^y = z \quad \frac{dz}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 + 3xz}{x^2} = \frac{3z}{x} + \frac{z^2}{x^2} \quad \text{这是 } n=2 \text{ 时的伯努利方程。}$$

两边同除以  $z^2$        $\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{3}{xz} + \frac{1}{x^2}$       令  $\frac{1}{z} = T$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} \quad \frac{dT}{dx} = \frac{-3T}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$P(x) = \frac{-3}{x} \quad Q(x) = \frac{1}{x^2}$$

由一阶线性方程的求解公式

$$T = e^{\int_x^3 dx} \left( \int \frac{-1}{x^2} e^{\int_x^3 dx} dx + c \right)$$

$$= x^{-3} \left( -\frac{1}{2} x^2 + c \right)$$

$$= -\frac{1}{2} x^{-1} + c x^{-3}$$

$$z \left( -\frac{1}{2} x^{-1} + c x^{-3} \right) = 1$$

$$e^y \left( -\frac{1}{2} x^{-1} + c x^{-3} \right) = 1$$

$$-\frac{1}{2} x^2 e^y + c e^y = x^3$$

$$\frac{1}{2} x^2 + x^3 e^{-y} = c$$

$$15 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^3 y^3}$$

$$\frac{dx}{dy} = yx + y^3 x^3$$

这是  $n=3$  时的伯努利方程。

$$\text{两边同除以 } x^3 \quad \frac{1}{x^3} \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x^2} + y^3$$

$$\Leftrightarrow x^{-2} = z \quad \frac{dz}{dy} = -2x^{-3} \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{2y}{x^2} - 2y^3 = -2yz - 2y^3 \quad P(y) = -2y \quad Q(y) = -2y^3$$

由一阶线性方程的求解公式

$$z = e^{\int -2y dy} \left( \int -2y^3 e^{-\int -2y dy} dy + c \right)$$

$$= e^{-y^2} \left( -\int 2y^3 e^{y^2} dy + c \right)$$

$$= -y^2 + 1 + ce^{-y^2}$$

$$x^2 (-y^2 + 1 + ce^{-y^2}) = 1$$

$$x^2 e^{y^2} (-y^2 + 1 + ce^{-y^2}) = e^{y^2}$$

$$e^{y^2} (1 - x^2 + x^2 y^2) = cx^2$$

$$16 \quad y = e^x + \int_0^x y(t) dt$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + y(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y + e^x$$

$$P(x) = 1 \quad Q(x) = e^x \quad \text{由一阶线性方程的求解公式}$$

$$y = e^{\int 1 dx} \left( \int e^x e^{-\int 1 dx} dx + c \right)$$

$$= e^x \left( \int e^x e^{-x} dx + c \right)$$

$$= e^x (x + c)$$

$$e^x (x + c) = e^x + \int_0^x e^x (x + c) dx$$

$$c=1$$

$$y = e^x (x + c)$$

17 设函数  $\varphi(t)$  于  $-\infty < t < +\infty$  上连续,  $\varphi'(0)$  存在且满足关系式

$$\varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$$

试求此函数。

令  $t=s=0$  得  $\varphi(0+0) = \varphi(0)\varphi(0)$  即  $\varphi(0) = \varphi(0)^2$  故  $\varphi(0) = 0$  或  $\varphi(0) = 1$

(1) 当  $\varphi(0) = 0$  时  $\varphi(t) = \varphi(t+0) = \varphi(t)\varphi(0)$  即  $\varphi(t) = 0$

$$\forall t \in (-\infty, +\infty)$$

$$(2) \text{ 当 } \varphi(0) = 1 \text{ 时 } \varphi'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)\varphi(\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)(\varphi(\Delta t) - 1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta t + 0) - \varphi(0)}{\Delta t} \varphi(t)$$

$$= \varphi'(0)\varphi(t)$$

$$\text{于是 } \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(0)\varphi(t) \text{ 变量分离得 } \frac{d\varphi}{\varphi} = \varphi'(0)dt \text{ 积分 } \varphi = ce^{\varphi'(0)t}$$

$$\text{由于 } \varphi(0) = 1, \text{ 即 } t=0 \text{ 时 } \varphi = 1 \quad 1 = ce^0 \Rightarrow c = 1$$

$$\text{故 } \varphi(t) = e^{\varphi'(0)t}$$

20. 试证：

(1) 一阶非齐线性方程 (2.28) 的任两解之差必为相应的齐线性方程 (2.3)

之解；

(2) 若  $y = y(x)$  是 (2.3) 的非零解, 而  $\bar{y} = \bar{y}(x)$  是 (2.28) 的解, 则方程 (2.28) 的通解可表为  $y = cy(x) + \bar{y}(x)$ , 其中  $c$  为任意常数.

(3) 方程 (2.3) 任一解的常数倍或任两解之和 (或差) 仍是方程 (2.3) 的解.

证明:  $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$  (2.28)

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \quad (2.3)$$

(1) 设  $y_1, y_2$  是 (2.28) 的任意两个解

则  $\frac{dy_1}{dx} = P(x)y_1 + Q(x)$  (1)

$$\frac{dy_2}{dx} = P(x)y_2 + Q(x) \quad (2)$$

(1) - (2) 得

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dx} = P(x)(y_1 - y_2)$$

即  $y = y_1 - y_2$  是满足方程 (2.3)

所以, 命题成立.

(2) 由题意得:

$$\frac{dy(x)}{dx} = P(x)y \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} \bar{y}(x) = P(x) \bar{y}(x) + Q(x) \quad (4)$$

1) 先证  $y = cy + \bar{y}$  是 (2.28) 的一个解.

于是  $c \times (3) + (4)$  得

$$\frac{cdy}{dx} + \frac{d}{dx} \bar{y} = cP(x)y + P(x) \bar{y} + Q(x)$$

$$\frac{d(cy+y)}{dx} = P(x)(cy+y) + Q(x)$$

故  $y = cy + y$  是 (2.28) 的一个解。

2) 现证方程 (4) 的任一解都可写成  $cy + y$  的形式

设  $y_1$  是 (2.28) 的一个解

$$\text{则 } \frac{dy_1}{dx} = P(x)y_1 + Q(x) \quad (4')$$

于是 (4') - (4) 得

$$\frac{d(y_1 - y)}{dx} = P(x)(y_1 - y)$$

$$\text{从而 } y_1 - y = ce^{\int P(x)dx} = cy$$

$$\text{即 } y_1 = y + cy$$

所以，命题成立。

(3) 设  $y_3, y_4$  是 (2.3) 的任意两个解

$$\text{则 } \frac{dy_3}{dx} = P(x)y_3 \quad (5)$$

$$\frac{dy_4}{dx} = P(x)y_4 \quad (6)$$

$$\text{于是 (5) } \times c \text{ 得 } \frac{cdy_3}{dx} = cP(x)y_3$$

$$\text{即 } \frac{d(cy_3)}{dx} = P(x)(cy_3) \quad \text{其中 } c \text{ 为任意常数}$$

也就是  $y = cy_3$  满足方程 (2.3)

(5)  $\pm$  (6) 得

$$\frac{dy_3}{dx} \pm \frac{dy_4}{dx} = P(x)y_3 \pm P(x)y_4$$

$$\text{即 } \frac{d(y_3 \pm y_4)}{dx} = P(x)(y_3 \pm y_4)$$

也就是  $y = y_3 \pm y_4$  满足方程 (2.3)

所以命题成立。

21. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程并求解。

(5) 曲线上任一点的切线的纵截距等于切点横坐标的平方；

(6) 曲线上任一点的切线的纵截距是切点横坐标和纵坐标的等差中项；

解：设  $p(x, y)$  为曲线上的任一点，则过  $p$  点曲线的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x)$$

从而此切线与两坐标轴的交点坐标为  $(x - \frac{y}{y'}, 0), (0, y - xy')$

即 横截距为  $x - \frac{y}{y'}$ ,

纵截距为  $y - xy'$ 。

由题意得：

$$(5) \quad y - xy' = x^2$$

方程变形为

$$x \frac{dy}{dx} = y - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} y - x$$

$$\text{于是 } y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left( \int (-x) e^{\int \frac{(-1)}{x} dx} dx + c \right)$$

$$= e^{\ln|x|} \left( \int (-x) e^{-\ln|x|} dx + c \right)$$

$$= |x| \left( \int (-x) |x|^{-1} dx + c \right)$$

$$= x \left( \int (-x) \frac{1}{x} dx + c \right)$$

$$= x(-x + c)$$

$$= -x^2 + cx$$

所以，方程的通解为  $y = -x^2 + cx$ 。

$$(6) \quad y - xy' = \frac{x + y}{2}$$

方程变形为

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} y - \frac{1}{2}$$

于是  $y = e^{\int \frac{1}{2x} dx} \left( \int \left( -\frac{1}{2} \right) e^{\int \left( -\frac{1}{2x} \right) dx} dx + c \right)$

$$= e^{\frac{1}{2} \ln|x|} \left( \int \left( -\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{1}{2} \ln|x|} dx + c \right)$$

$$= |x|^{\frac{1}{2}} \left( \int \left( -\frac{1}{2} \right) |x|^{-\frac{1}{2}} dx + c \right)$$

$$= x^{\frac{1}{2}} \left( \int \left( -\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{1}{2}} dx + c \right)$$

$$= x^{\frac{1}{2}} \left( -x^{\frac{1}{2}} + c \right)$$

$$= -x + cx^{\frac{1}{2}}$$

所以，方程的通解为  $y = -x + cx^{\frac{1}{2}}$ 。

22. 求解下列方程。

(1)  $(x^2 - 1)y' - xy + = 0$

解： $y' = \frac{xy - 1}{x^2 - 1} y - \frac{1}{x^2 - 1}$

$$y = e^{\int \frac{x}{x^2 - 1} dx} \left( \int -\frac{1}{x^2 - 1} e^{\int \frac{x}{x^2 - 1} dx} + c \right)$$

$$= / x^2 - 1 / \frac{1}{2} \left[ \int -\frac{1}{x^2 - 1} \frac{1}{/ x^2 - 1 / \frac{1}{2}} dx + c \right]$$

$$= / x^2 - 1 / \frac{1}{2} \left[ \int -\frac{dx}{/ x^2 - 1 / \frac{1}{2}} + c \right]$$

$$= c \sqrt{1 - x^2} / + x$$

(2)  $y' \sin x \cos x - y - \sin^3 x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sin x \cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$P(x) = \frac{1}{\sin x \cos x} \quad Q(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

由一阶线性方程的求解公式

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx} \left( \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} e^{-\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx} dx + c \right) \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} \left( \int \sin x dx + c \right) \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} (-\cos x + c) \\ &= \tan x c - \sin x \end{aligned}$$

### 习题 2.3

1、验证下列方程是恰当方程，并求出方程的解。

$$1. (x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$$

解:  $\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$  .

则  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

所以此方程是恰当方程。

凑微分,  $x^2 dx - 2y dy + (ydx + xdy) = 0$

得:  $\frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 = C$

$$2. (y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$$

解:  $\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$  .

则  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  .

所以此方程为恰当方程。

凑微分,  $ydx + xdy - 3x^2 dx - 4y dy = 0$

得  $x^3 - xy + 2y^2 = C$

$$3. \left[ \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right] dx + \left[ \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right] dy = 0$$

解:  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y(x-y)^2 - 2y^2(x-y)(-1)}{(x-y)^4} = \frac{2xy}{(x-y)^3}$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2x(x-y)^2 - 2x^2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2xy}{(x-y)^3}$$

则  $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}$  .

因此此方程是恰当方程。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \quad (2)$$

对 (1) 做  $x$  的积分, 则  $u = \int \frac{y^2}{(x-y)^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + \varphi(y)$

$$= -\frac{y^2}{x-y} - \ln x + \varphi(y) \quad (3)$$

对 (3) 做  $y$  的积分, 则  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{-(-1)y^2 + (x-y)2y}{(x-y)^2} + \frac{d\varphi(y)}{dy}$

$$= \frac{-2xy + y^2}{(x-y)^2} + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

$$= \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

则  $\frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{y^2 - 2xy}{(x-y)^2} = \frac{1}{y} - \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x-y)^2} = \frac{1}{y} - 1$

$$\varphi(y) = \int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = \ln y - y$$

$$u = -\frac{y^2}{x-y} - \ln x + \ln y - y = \ln \frac{y}{x} - \frac{y^2 + xy - y^2}{x-y} = \ln \frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y}$$

故此方程的通解为  $\ln \frac{y}{x} + \frac{xy}{x-y} = C$

4、  $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$

解:  $\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy \quad .$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad .$$

则此方程为恰当方程。

凑微分,  $6xy^2dx + 4x^3dx + 6x^2ydy + 3y^2dy = 0$

$$3d(x^2y^2) + d(x^4) + d(x^3) = 0$$

$$\text{得: } x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$$

$$5. \left( \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \right) dx + \left( \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy = 0$$

$$\text{解: } M = \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \quad N = \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \sin \frac{x}{y} - \frac{x}{y^3} \cos \frac{x}{y} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \sin \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \sin \frac{x}{y} - \frac{x}{y^3} \cos \frac{x}{y} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \sin \frac{y}{x}$$

所以,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , 故原方程为恰当方程

$$\text{因为 } \frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} dx - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx + dx + \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} dy - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} dy + \frac{1}{y^2} dy = 0$$

$$d(-\cos \frac{x}{y}) + d(\sin \frac{y}{x}) + dx + d(-\frac{1}{y}) = 0$$

$$\text{所以, } d(\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{x}{y} + x - \frac{1}{y}) = 0$$

$$\text{故所求的解为 } \sin \frac{y}{x} - \cos \frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$$

求下列方程的解:

$$6. 2x(ye^{x^2} - 1)dx + e^{x^2}dy = 0$$

$$\text{解: } \frac{\partial M}{\partial y} = 2x e^{x^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x e^{x^2}$$

所以,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ , 故原方程为恰当方程

$$\text{又 } 2xye^{x^2}dx - 2x^2dx + e^{x^2}dy = 0$$

所以,  $d(ye^{x^2} - x^2) = 0$

故所求的解为  $ye^{x^2} - x^2 = C$

7.  $(e^x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$

解:  $e^x dx + 3y^2 dx + 2xydy = 0$

$$e^x x^2 dx + 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy = 0$$

所以,  $d(e^x(x^2 - 2x + 2) + x^3 y^2) = 0$

即  $d[e^x(x^2 - 2x + 2) + x^3 y^2] = 0$

故方程的解为  $e^x(x^2 - 2x + 2) + x^3 y^2 = C$

8.  $2xydx + (x^2 + 1)dy = 0$

解:  $2xydx + x^2 dy + dy = 0$

$$d(x^2 y) + dy = 0$$

即  $d(x^2 y + y) = 0$

故方程的解为  $x^2 y + y = C$

9、  $ydx - xdy = (x^2 + y^2)dx$

解: 两边同除以  $x^2 + y^2$  得  $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = dx$

即,  $d\left(\arctg \frac{x}{y}\right) = dx$

故方程的通解为  $\arg \tg \left(\frac{x}{y}\right) = x + c$

10、  $ydx - (x + y^3)dy = 0$

解: 方程可化为:  $\frac{ydx - xdy}{y^2} = ydy$

即,  $d\left(\frac{x}{y}\right) = ydy$

故方程的通解为:  $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}y^2 + c$  即:  $2x = y(y^2 + c)$

同时,  $y=0$  也是方程的解。

11、 $(y-1-xy)dx + xdy = 0$

解: 方程可化为:  $ydx + xdy = (1+xy)dx$

$$d(xy) = (1+xy)dx \quad \text{即: } \frac{d(xy)}{1+xy} = dx$$

故方程的通解为:  $\ln|1+xy| = x + c$

12、 $(y-x^2)dx - xdy = 0$

解: 方程可化为:  $\frac{ydx - xdy}{x^2} = dx$

$$-d\left(\frac{y}{x}\right) = dx$$

故方程的通解为:  $\frac{y}{x} = c - x$  即:  $y = x(c - x)$

13、 $(x+2y)dx + xdy = 0$

解: 这里  $M = x+2y, N = x$  ,  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{x}$$

● 方程有积分因子  $\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$

两边乘以  $\mu$  得: 方程  $x(x+2y)dx + x^2dy = 0$  是恰当方程

故方程的通解为:  $\int (x^2 + 2xy)dx + \int \left[ x^2 - \frac{\partial}{\partial y} \int (x^2 + 2xy)dx \right] dy = c$

$$\frac{x^3}{3} + x^3y = c$$

即:  $x^3 + 3x^2y = c$

14、 $[x\cos(x+y) + \sin(x+y)]dx + x\cos(x+y)dy = 0$

解：这里  $M = x \cos(x+y) + \sin(x+y)$ ,  $N = x \cos(x+y)$

$$\text{因为 } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \cos(x+y) - x \sin(x+y)$$

故方程的通解为：

$$\int [x \cos(x+y) + \sin(x+y)] dx + \int \left[ x \cos(x+y) - \frac{\partial}{\partial y} \int [x \cos(x+y) + \sin(x+y)] dx \right] dy = c$$

$$\text{即: } x \sin(x+y) = c$$

$$15、(y \cos x + x \sin x) dx + (y \sin x + x \cos x) dy = 0$$

解：这里  $M = y \cos x - x \sin x$ ,  $N = y \sin x + x \cos x$   $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = 1 \text{ 方程有积分因子: } \mu = e^{\int dy} = e^y \text{ 两边乘以 } \mu \text{ 得:}$$

方程  $e^y (y \cos x - x \sin x) dx + e^y (y \sin x + x \cos x) dy = 0$  为恰当方程

$$\text{故通解为: } \int e^y (y \cos x - x \sin x) dx + \int \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \int e^y (y \cos x - x \sin x) dx \right) dy = c$$

$$\text{即: } e^y \sin x (y-1) + e^y \cos x = c$$

$$16、x(4ydx + 2xdy) + y^3(3ydx + 5xdy) = 0$$

解：两边同乘以  $x^2 y$  得：

$$(4x^3 y^2 dx + 2x^4 y dy) + (3x^2 y^5 dx + 5x^3 y dy) = 0$$

$$d(x^4 y^2) + d(x^3 y^5) = 0$$

$$\text{故方程的通解为: } x^4 y^2 + x^3 y^5 = c$$

17、试导出方程  $M(X, Y)dx + N(X, Y)dy = 0$  具有形为  $\mu(xy)$  和  $\mu(x+y)$  的积分因子的充要条件。

解：若方程具有  $\mu(x+y)$  为积分因子，

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad (\mu(x+y) \text{ 是连续可导})$$

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left( -\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

(1) 令  $z = x + y$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} .$$

$$M \frac{d\mu}{dz} - N \frac{d\mu}{dz} = \mu \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right),$$

$$(M - N) \frac{d\mu}{dz} = \mu \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) ,$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M - N} , \quad dz = \varphi(x + y) dz$$

方程有积分因子  $\mu(x+y)$  的充要条件是:  $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M - N}$  是  $x+y$  的函数,

此时, 积分因子为  $\mu(x+y) = e^{\int \varphi(z) dz}$  .

(2) 令  $z = x \cdot y$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{d\mu}{dz} , \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{d\mu}{dz}$$

$$Mx \frac{d\mu}{dz} - Ny \frac{d\mu}{dz} = \mu \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$(Mx - Ny) \frac{d\mu}{dz} = \mu \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx - Ny}$$

此时的积分因子为  $\mu(xy) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{Mx-Ny} dz}$

18. 设  $f(x, y)$  及  $\frac{\partial f}{\partial y}$  连续, 试证方程  $dy - f(x, y)dx = 0$  为线性方程的充要

条件是它有仅依赖于  $x$  的积分因子.

证: 必要性 若该方程为线性方程, 则有  $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$  ,

此方程有积分因子  $\mu(x) = e^{-\int P(x)dx}$ ,  $\mu(x)$  只与  $x$  有关 .

充分性 若该方程有只与  $x$  有关的积分因子  $\mu(x)$  .

则  $\mu(x)dy - \mu(x)f(x, y)dx = 0$  为恰当方程 ,

从而  $\frac{\partial(-\mu(x)f(x, y))}{\partial y} = \frac{d\mu(x)}{dx}$  ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$  ,

$f = -\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dy + Q(x) = -\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} y + Q(x) = P(x)y + Q(x)$  .

其中  $P(x) = -\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$  . 于是方程可化为  $dy - (P(x)y + Q(x))dx = 0$

即方程为一阶线性方程.

20. 设函数  $f(u)$ ,  $g(u)$  连续、可微且  $f(u) \neq g(u)$ , 试证方程

$yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$

有积分因子  $u = (xy[f(xy) - g(xy)])^{-1}$

证: 在方程  $yf(xy)dx + xg(xy)dy = 0$  两边同乘以  $u$  得:

$uyf(xy)dx + uxg(xy)dy = 0$

则  $\frac{\partial uyf}{\partial y} = uf + uy\frac{\partial f}{\partial y} + yf\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{f}{xy(f-g)} + \frac{y\frac{\partial f}{\partial y}}{xy(f-g)} - yf\frac{x(f-g) + xy\frac{\partial f}{\partial y} + xy\frac{\partial g}{\partial y}}{x^2y^2(f-g)^2}$

$= \frac{yf\frac{\partial g}{\partial y} - gy\frac{\partial f}{\partial y}}{xy(f-g)^2} = \frac{f\frac{\partial g}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial xy}\frac{\partial xy}{\partial y}}{x(f-g)^2}$

$$= \frac{f \frac{\partial g}{\partial xy} - g \frac{\partial f}{\partial xy}}{(f - g)^2}$$

$$\text{而 } \frac{\partial u x g}{\partial x} = u g + u x \frac{\partial g}{\partial x} + x g \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g}{xy(f - g)} + \frac{x \frac{\partial g}{\partial x}}{xy(f - g)} - x g \frac{y(f - g) + xy \frac{\partial f}{\partial x} - xy \frac{\partial g}{\partial x}}{x^2 y^2 (f - g)^2}$$

$$= \frac{xf \frac{\partial g}{\partial xy} - xg \frac{\partial f}{\partial xy}}{xy(f - g)^2} = \frac{f \frac{\partial g}{\partial xy} - g \frac{\partial f}{\partial xy}}{(f - g)^2}$$

故  $\frac{\partial u y f}{\partial y} = \frac{\partial u x g}{\partial x}$ , 所以  $u$  是方程得一个积分因子

21. 假设方程 (2.43) 中得函数  $M(x, y)$   $N(x, y)$  满足关系  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} =$

$Nf(x) - Mg(y)$ , 其中  $f(x), g(y)$  分别为  $x$  和  $y$  得连续函数, 试证方程 (2.43) 有积分因子  $u = \exp(\int f(x)dx + \int g(y)dy)$

证明:  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

$$\text{即证 } \frac{\partial(uM)}{\partial y} = \frac{\partial(uN)}{\partial x} \Leftrightarrow u \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$u \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{\partial u}{\partial x} - M \frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow u \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N e^{\int f(x)dx + \int g(y)dy} f(x)$$

$$-M e^{\int f(x)dx + \int g(y)dy} g(y) \Leftrightarrow u \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = e^{\int f(x)dx + \int g(y)dy} (Nf(x) - Mg(y))$$

由已知条件上式恒成立, 故原命题得证。

22、求出伯努利方程的积分因子.

解: 已知伯努利方程为:  $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n, y \neq 0$ ;

两边同乘以  $y^{-n}$ , 令  $z = y^{-n}$ ,

$\frac{dz}{dx} = (1 - n)P(x)z + (1 - n)Q(x)$ , 线性方程有积分因子:

$\mu = e^{-\int (1-n)P(x)dx} = e^{(n-1)\int P(x)dx}$ ，故原方程的积分因子为：

$$\mu = e^{-\int (1-n)P(x)dx} = e^{(n-1)\int P(x)dx}，\text{ 证毕！}$$

23、设  $\mu(x, y)$  是方程  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  的积分因子，从而求得可微函数  $U(x, y)$ ，

使得  $dU = \mu(Mdx + Ndy)$ 。试证  $\tilde{\mu}(x, y)$  也是方程  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  的积分因子的充要条件是  $\tilde{\mu}(x, y) = \mu\varphi(U)$ ，其中  $\varphi(t)$  是  $t$  的可微函数。

$$\begin{aligned} \text{证明：若 } \tilde{\mu} = \mu\varphi(u), \text{ 则} \\ \frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu\varphi(u)M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u) + \mu M\varphi'(u)\frac{\partial\mu}{\partial y} \\ &= \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u) + \mu M\varphi'(u)\mu N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \frac{\partial(\tilde{\mu}N)}{\partial x} &= \frac{\partial(\mu\varphi(u)N)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\varphi(u) + \mu N\varphi'(u)\mu M \\ &= \frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\varphi(u) + \mu N\varphi'(u)\mu M = \frac{\partial(\tilde{\mu}M)}{\partial y} \end{aligned}$$

即  $\tilde{\mu}$  为  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  的一个积分因子。

24、设  $\mu_1(x, y), \mu_2(x, y)$  是方程  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  的两个积分因子，且  $\mu_1/\mu_2 \neq \text{常数}$ ，求证  $\mu_1/\mu_2 = c$ （任意常数）是方程  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  的通解。

证明：因为  $\mu_1, \mu_2$  是方程  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  的积分因子

所以  $\mu_i Mdx + \mu_i Ndy = 0 \quad (i=1,2)$  为恰当方程

$$\text{即 } N \frac{\partial \mu_i}{\partial x} - M \frac{\partial \mu_i}{\partial y} = \mu_i \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right), \quad i=1,2$$

下面只需证  $\frac{\mu_1}{\mu_2}$  的全微分沿方程恒为零

事实上：

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) &= \frac{\mu_2 \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu_1}{\partial y} dy \right) - \mu_1 \left( \frac{\partial \mu_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu_2}{\partial y} dy \right)}{\mu_2^2} \\ &= \frac{\mu_2 \left( \frac{\partial \mu_1}{\partial x} dx - \frac{M}{N} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} dx \right) - \mu_1 \left( \frac{\partial \mu_2}{\partial x} dx - \frac{M}{N} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} dx \right)}{\mu_2^2} \\ &= \frac{dx}{N\mu_2^2} \left[ \left( N \frac{\partial \mu_1}{\partial x} - M \frac{\partial \mu_1}{\partial y} \right) \mu_2 - \left( N \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - M \frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right) \mu_1 \right] \\ &= \frac{dx}{N\mu_2^2} \left[ \mu_1 \mu_2 \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) - \mu_1 \mu_2 \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

即当  $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq c$  时,  $\frac{\mu_1}{\mu_2} = c$  是方程的解。证毕!

## 习题 2.4

求解下列方程

1、  $xy'^3 = 1 + y'$

解：令  $\frac{dy}{dx} = y' = p = \frac{1}{t}$ ，则  $x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)t^3 = t^3 + t^2$ ，

从而  $y = \int pdx + c = \int \frac{1}{t} d(t^3 + t^2) + c = \int (3t^2 + 2t)dt + c = \frac{3}{2}t^3 + 2t + c$ ，

于是求得方程参数形式得通解为  $\begin{cases} x = t^3 + t^2 \\ y = \frac{3}{2}t^3 + 2t + c \end{cases}$ 。

2、  $y'^3 - x^3(1 - y') = 0$

解：令  $\frac{dy}{dx} = y' = p = tx$ ，则  $(tx)^3 - x^3(1 - tx) = 0$ ，即  $x = \frac{t^3 - 1}{t} = t^2 - \frac{1}{t}$ ，

从而  $y = \int pdx + c = \int t \left(t^2 - \frac{1}{t}\right) d\left(t^2 - \frac{1}{t}\right) + c$

$$= \int \left(t^3 - 1\right) \left(2t + \frac{1}{t^2}\right) dt + c$$

$$= \int \left(2t^4 - t - \frac{1}{t^2}\right) dt + c$$

$$= \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} + c$$

于是求得方程参数形式得通解为  $\begin{cases} x = t^2 - \frac{1}{t} \\ y = \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t} + c \end{cases}$ 。

3、  $y = y'^2 e^{y'}$

解：令  $\frac{dy}{dx} = y' = p$ ，则  $y = p^2 e^p$ ，

从而  $x = \int \frac{1}{p} d(p^2 e^p) + c$

$$= \int \frac{1}{p} (2pe^p + p^2 e^p) dp + c$$

$$= \int (2e^p + pe^p) dp + c$$

$$= (1+p)e^p + c,$$

于是求得方程参数形式的通解为  $\begin{cases} x = (1+p)e^p + c, \\ y = y^2 e^p \end{cases}$ ,

另外,  $y=0$  也是方程的解.

4、  $y(1+y'^2) = 2a$ ,  $a$  为常数

解: 令  $\frac{dy}{dx} = y' = \tan \varphi$ , 则  $y = \frac{2a}{1+\tan^2 \varphi} = \frac{2a}{\sec^2 \varphi} = 2a \cos^2 \varphi$ ,

$$\begin{aligned} \text{从而 } x &= \int \frac{1}{p} dy + c = \int \frac{1}{\tan \varphi} d(2a \cos^2 \varphi) + c \\ &= -4a \int \cos^2 \varphi d\varphi + c = -4a \int \frac{1+\cos 2\varphi}{2} + c \\ &= -a(2\varphi + \sin 2\varphi) + c, \end{aligned}$$

于是求得方程参数形式的通解为  $\begin{cases} x = -a(2\varphi + \sin 2\varphi) + c \\ y = 2a \cos^2 \varphi \end{cases}$ .

5、  $x^2 + y'^2 = 1$

解: 令  $\frac{dy}{dx} = y' = p = \cos t$ , 则  $x = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t$ ,

从而  $y = \int \cos t d(\sin t) + c$

$$\begin{aligned} &= \int \cos^2 t dt + c = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt + c \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c, \end{aligned}$$

于是求得方程参数形式的通解为  $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c \end{cases}$ .

6、  $y^2(y'-1) = (2-y')^2$

解：令  $2 - y' = yt$ ， 则  $1 - y' = yt - 1$ ， 得  $y = t + \frac{1}{t}$ ，

所以  $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy}{2 - yt} = \frac{d\left(t + \frac{1}{t}\right)}{2 - t\left(t + \frac{1}{t}\right)} = \frac{(1 - t^{-2})dt}{1 - t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2(1 - t^2)}dt = -\frac{1}{t^2}dt$ ，

从而  $x = \int \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt + c = \frac{1}{t} + c$ ，

于是求得方程参数形式的通解为  $\begin{cases} x = \frac{1}{t} + c \\ y = t + \frac{1}{t} \end{cases}$ ，

因此方程的通解为  $y = \frac{1}{x - c} + x - c$ 。

## 习题 2.5

2.  $ydx - xdy = x^2 ydy$

解: 两边同除以  $x^2$ , 得:

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = ydy$$

$$d\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}y^2 + c$$

$$\text{即 } \frac{y}{x} + \frac{1}{2}y^2 = c$$

4.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - \sqrt{xy}}$

解: 两边同除以  $x$ , 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\text{令 } \frac{y}{x} = u$$

$$\text{则 } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

$$\text{即 } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1 - \sqrt{u}}$$

$$\text{得到 } \frac{1}{u} = \left( c - \frac{1}{2} \ln|y| \right)^2,$$

$$\text{即 } x = y \left( c - \frac{1}{2} \ln|y| \right)^2$$

另外  $y = 0$  也是方程的解。

6.  $(xy + 1)ydx - xdy = 0$

解:  $ydx - xdy + xydx = 0$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = -xdx$$

$$\text{得到 } d\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\text{即 } \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = c$$

另外  $y = 0$  也是方程的解。

$$8. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}$$

$$\text{解: 令 } \frac{y}{x} = u$$

$$\text{则: } \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} = u + \frac{1}{x}u^2$$

$$\text{即 } x \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}u^2$$

$$\text{得到 } \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\text{故 } \frac{-1}{u} = \frac{-1}{x} + c$$

$$\text{即 } \frac{1}{y} = \frac{c}{x} + \frac{1}{x^2}$$

另外  $y = 0$  也是方程的解。

$$10. \quad x \frac{dy}{dx} = 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$$

$$\text{解: 令 } \frac{dy}{dx} = p$$

$$\text{即 } x = \frac{1 + p^2}{p}$$

$$\text{而 } \frac{dy}{dx} = p \text{ 故两边积分得到}$$

$$y = \frac{1}{2}p^2 - \ln|p| + c$$

$$\text{因此原方程的解为 } x = \frac{1 + p^2}{p}, \quad y = \frac{1}{2}p^2 - \ln|p| + c.$$

$$12. e^{-y} \left( \frac{dy}{dx} + 1 \right) = xe^x$$

$$\text{解: } \frac{dy}{dx} + 1 = xe^{x+y}$$

令  $x + y = u$

$$\text{则 } 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 = xe^u - 1$$

$$\text{即 } \frac{du}{e^u} = xdx$$

$$-e^{-u} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

故方程的解为

$$e^{x+y} + \frac{1}{2}x^2 = c$$

$$14. \frac{dy}{dx} = x + y + 1$$

解: 令  $x + y + 1 = u$

$$\text{则 } 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\text{那么 } \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 = u$$

$$\frac{du}{u+1} = dx$$

$$\text{求得: } \ln(u+1) = x + c$$

$$\text{故方程的解为 } \ln(x+y+1) = x + c$$

$$\text{或可写 为 } x + y + 1 = ce^x$$

$$16. (x+1) \frac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$$

解: 令  $e^{-y} = u$  则  $y = -\ln u$

$$-(x+1) \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = 2u - 1$$

$$\frac{1}{u(2u-1)} du = -\frac{1}{x+1} dx$$

$$\frac{2u-1}{u} = \frac{1}{x+1} + c$$

$$\text{即方程的解为 } e^y (x+y) = 2x + c$$

$$18. 4x^2 y^2 dx + 2(x^3 y - 1) dy = 0$$

解: 将方程变形后得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 y^2}{2x^3 y - 1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x^3 y - 1}{4x^2 y^2} = \frac{x}{2y} - \frac{1}{4x^2 y^2}$$

同除以  $x^2$  得:  $x^2 \frac{dx}{dy} = \frac{x^3}{2y} - \frac{1}{4y^2}$

令  $z = x^3$  则  $\frac{dz}{dy} = \frac{3z}{2y} - \frac{3}{4y^2}$

$$z = \frac{3}{2} y^2 + c y^{\frac{3}{2}}$$

即原方程的解为  $x^3 = \frac{3}{2} y^2 + c y^{\frac{3}{2}}$

$$19. \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} + 4x = 0$$

解: 方程可化为  $2y \frac{dy}{dx} = x \frac{dy}{dx}^2 + 4x, y = \frac{x \frac{dy}{dx}^2 + 4x}{2 \frac{dy}{dx}}$

令

$\frac{dy}{dx} = p$ , 则  $y = \frac{xp^2 - 4x}{2p} = \frac{x}{2}p + \frac{2x}{p}$ , 两边对  $x$  求导得  $p = \frac{p}{2} + \frac{x}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{2}{p} - \frac{2x}{p^2}\frac{dp}{dx}$

$(\frac{p}{2} - \frac{2}{p}) = (\frac{x}{2} - \frac{2x}{p^2})\frac{dp}{dx}$ ,  $(\frac{p}{2} - \frac{2}{p})dx + (\frac{x}{2} - \frac{2x}{p^2})dp = 0$ ,  $(p^3 - 4p)dx + (-xp^2 + 4x)dp = 0$

$p(p^2 - 4)dx - x(p^2 - 4)dp = 0 \therefore p^2 = 4$  或  $pdx - xdp = 0$ , 当  $p^2 = 4$  时  $y = \pm 2x$ , 当  $pdx - xdp = 0$  时,

$$p = \frac{x}{c}, y = \frac{x \cdot \frac{x^2}{c^2} + 4x}{2x} = \frac{\frac{x^2}{c^2} + 4}{2}, 2yc = c^2x^2 + 4.$$

$$20. y^2 \left[ 1 - \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = 1$$

解: 令  $\frac{dy}{dx} = p = \sin \theta$ , 则  $y^2 [1 - (\sin \theta)^2] = 1$ ,  $y = \frac{1}{\cos \theta}$ ,  $dx = \frac{dy}{p} = \frac{dy}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$

$x = \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} + c = \int \sec^2 \theta d\theta + c = \tan \theta + c$  所以方程的解为  $y^2 = (x + c)^2 + 1$ , 另外由  $p = 0$  得  $y = \pm 1$

$$21. (1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}} \left( 1 - \frac{x}{y} \right) dy = 0$$

解: 令  $\frac{x}{y} = z$  则  $x = yz$ ,  $\frac{dx}{dy} = z + y \frac{dz}{dy}$  方程为  $(1 + e^z)dx = (z - 1)e^z dy$ ,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(z-1)e^z}{1+e^z} = \frac{ze^z + z - z - e^z}{1+e^z} = z - \frac{z+e^z}{1+e^z} = z + y \frac{dz}{dy}, \frac{1+e^z}{z+e^z} dz = -\frac{dy}{y}$$

$\ln|z+e^z| = -\ln|y|$ ,  $y(z+e^z) = c$ ,  $y(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}) = c$  所以方程的解为  $x + ye^{\frac{x}{y}} = c$

$$22. \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$$

解:  $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \frac{\partial N}{\partial x} = -6x, \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-2xy} = \frac{8x}{-2xy} = -\frac{4}{y}$$
 所以方程有积分因子  $e^{\int -\frac{4}{y} dy} = y^{-4}$

$2xy^{-3}dx + (y^{-2} - \frac{3x^2}{y^4})dy = 0$ ,  $d\frac{x^2}{y^3} - d\frac{1}{y} = 0$  所以方程的解为  $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$  即  $x^2 - y^2 = cy^3$

$$23. ydx - (1 + x + y^2)dy = 0$$

解:  $ydx - xdy = (1 + y^2)dy$ , 两边同除以  $y^2$  得  $\frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{1 + y^2}{y^2}dy$ ,  $d\frac{x}{y} = \frac{1 + y^2}{y^2}dy$

所以方程的解为  $\frac{x}{y} = -\frac{1}{y} + y + c$  即  $(x+1) = y(y+c)$ , 另外  $y=0$  也是解。

$$24. [y - x(x^2 + y^2)] - xdy = 0$$

解: 方程可化为  $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = xdx$ ,  $\arctg \frac{x}{y} = xdx$  所以方程的解为  $\arctg \frac{x}{y} = \frac{x^2}{2} + c$ .

$$25. \frac{dy}{dx} + e^{\frac{dy}{dx}} - x = 0$$

解: 令  $\frac{dy}{dx} = p = t$ ,  $x = t + e^t$  由  $dy = pdx$  得  $y = \int t(1+e^t)dt + c = \frac{t^2}{2} + e^t t - e^t + c$

$$25. \frac{dy}{dx} + e^{\frac{dy}{dx}} - x = 0$$

解: 令  $\frac{dy}{dx} = p = t$  则  $x = t + e^t$  由  $dy = pdx$  得  $y = \int t(1+e^t)dt + c = \frac{t^2}{2} + e^t t - e^t + c$

所以方程的解为:  $x = t + e^t$ ,  $y = \frac{t^2}{2} + e^t t - e^t + c$

$$26. (2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

解:  $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2$ ,  $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1$  所以方程有积分因子  $e^x$  方程两边同乘  $e^x$  得

$d3e^x x^2 y + de^x y^3 = 0$  所以方程的解为:  $3e^x x^2 y + e^x y^3 = c$

$$27. \frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$$

解: 令  $u = 2x+3y$ ,  $\frac{du}{dx} = 2+3\frac{dy}{dx} = 2+3\frac{u+4}{2u+5}$ , 则

$$\frac{du}{dx} = \frac{7u+22}{2u+5}$$

$$\frac{2u+5}{7u+22} du = dx,$$

$$1 - \frac{9}{14} \frac{1}{u + \frac{22}{7}} = \frac{7}{2} dx,$$

两边积分得  $9 \ln \left| 2x+3y + \frac{22}{7} \right| = 14(3y - \frac{3}{2}x) + c$

即为方程的通解。

另外,  $7u+22=0$ , 即  $2x+3y+\frac{22}{7}=0$  也是方程的解。

$$28. x \frac{dy}{dx} - y = 2x^2 y(y^2 - x^2)$$

解: 两边同除以  $x$ , 方程可化为:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 2xy(y^2 - x^2)$$

令  $\frac{y}{x} = u$ , 则

$$x \frac{du}{dx} + u = u + 2ux^2(u^2 x^2 - x^2)$$

即

$$\frac{du}{dx} = 2x^3(u^3 - u),$$

$$\frac{du}{u^3 - u} = 2x^3 dx$$

$$(\frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{2(u-1)} - \frac{1}{u})du = 2x^3 dx$$

两边积分得

$$1 - \frac{1}{u^2} ce^{x^4}$$

即

$$x^2 - y^2 = cy^2 e^{x^4}$$

为方程的解。

29.  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{xy}$

解: 令  $e^{xy} = u$ , 则  $y = \frac{\ln u}{x}$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{u} \frac{du}{dx} - \ln u}{x^2},$$

那么

$$\frac{1}{ux} \frac{du}{dx} - \frac{\ln u}{x^2} + \frac{\ln u}{x^2} = u$$

即

$$\frac{du}{u^2} = x dx$$

两边积分得

$$\frac{1}{2} x^2 + e^{-xy} = c$$

即为方程的解。

30.  $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 2xy^3 + 2x}{3x^2y^2 - 6y^5 + 3y^2}$

解: 方程可化为  $(4x^3 - 2xy^3 + 2x)dx - (3x^2y^2 - 6y^5 + 3y^2)dy = 0$

$$d(x^4 + x^2) - (y^3 dx^2 + x^2 dy^3) + d(y^6 - y^3) = 0$$

两边积分得

$$x^4 + x^2 + y^6 - y^3 - x^2 y^3 = c$$

即

$$x^4 + x^6 + c = (x^2 + 1)(y^3 - 1)$$

为方程的解。

31.  $y^2(xdx + ydy) + x(ydx - xdy) = 0$

解: 方程可化为  $y^2 xdx + y^3 dy + xydx - x^2 dy = 0$

两边同除以  $y^2$ , 得

$$xdx + ydx + \frac{x(ydx - xdy)}{y^2} = 0$$

即  $\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + x \frac{dx}{dy} = 0$

令  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ , 则

$$\rho d\rho + \rho \cos \theta d\theta \cdot \rho \sin \theta = 0$$

即  $\rho d\rho - \frac{d \sin \theta}{\sin^2 \theta} = 0$

两边积分得  $\rho = -\frac{1}{\sin \theta} + c$

将  $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{\rho}{y}$  代入得,  $\rho = -\frac{\rho}{y} + c$

即  $\rho^2(y+1)^2 = c^2 y^2$

故  $(x^2 + y^2)(y^2 + 1)^2 = c^2 y^2$

32.  $\frac{dy}{dx} + \frac{1+xy^3}{1+x^3y} = 0$

解: 方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-xy^3}{1+x^3y}$$

两边同加上1, 得

$$\frac{d(x+y)}{dx} = \frac{xy(x^2 - y^2)}{1+x^3y} \quad (*)$$

再由  $d(xy) = xdy + ydx$ , 可知

$$\frac{d(xy)}{dx} = x \frac{dy}{dx} + y = \frac{(x-y)(x^2y^2 - 1)}{1+x^3y} \quad (**) \quad \text{将 } (*) / (**) \text{ 得}$$

$$\frac{d(x+y)}{d(xy)} = \frac{xy(x+y)}{x^2y^2 - 1}$$

即

$$\frac{du}{dv} = \frac{uv}{v^2 - 1}$$

整理得

$$\frac{du}{u} = \frac{v}{v^2 - 1} dv$$

两边积分得

$$\sqrt{v^2 - 1} = cu$$

即

$$c(x+y) = \sqrt{x^2y^2 - 1}$$

另外,  $x+y=0$  也是方程的解。

33. 求一曲线，使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标。

解：设  $p(x, y)$  为所求曲线上的任一点，则在  $p$  点的切线  $l$  在  $y$  轴上的截距为：

$$y - x \frac{dy}{dx}$$

由题意得

$$y - x \frac{dy}{dx} = x$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} y - 1$$

也即

$$-ydx + xdy = -dx$$

两边同除以  $x^2$ ，得

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2} = -\frac{dx}{x}$$

即

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = -d \ln|x|$$

即

$$y = cx + x \ln|x|$$

为方程的解。

34. 摩托艇以 5 米/秒的速度在静水运动，全速时停止了发动机，过了 20 秒钟后，艇的速度减至  $v_1 = 3$  米/秒。确定发动机停止 2 分钟后艇的速度。假定水的阻力与艇的运动速度成正比例。

解： $F = ma = m \frac{dv}{dt}$ ，又  $F = k_1 v$ ，由此

$$m \frac{dv}{dt} = k_1 v$$

即

$$\frac{dv}{dt} = kv$$

其中  $k = \frac{k_1}{m}$ ，解之得

$$\ln|v| = kt + c$$

又  $t = 0$  时， $v = 5$ ； $t = 2$  时， $v = 3$ 。

故得

$$k = \frac{1}{20} \ln \frac{3}{5}， c = \ln 5$$

从而方程可化为

$$v = 5 \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{20}}$$

当  $t = 2 \times 60 = 120$  时，有  $v(20) = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{120}{20}} = 0.23328$  米/秒

即为所求的确定发动机停止 2 分钟后艇的速度。

35. 一质量为  $m$  的质点作直线运动，从速度等于零的时刻起，有一个和时间成正比（比例系数为  $k_1$ ）的力作用在它上面，此质点又受到介质的阻力，这阻力和速

度成正比 (比例系数为  $k_2$ )。试求此质点的速度与时间的关系。

解: 由物理知识得:  $a = \frac{F_{\text{合}}}{m}$  (其中  $a$  为质点的加速度,  $F_{\text{合}}$  为质点受到的合外力)

根据题意:  $F_{\text{合}} = k_1 t - k_2 v$

$$\text{故: } m \frac{dv}{dt} = k_1 t - k_2 v \quad (k_2 > 0)$$

$$\text{即: } \frac{dv}{dt} = \left( \frac{-k_2}{m} \right) v + \frac{k_1}{m} t \quad (*)$$

(\*) 式为一阶非齐次线性方程, 根据其求解公式有

$$V = e^{\int -\frac{k_2}{m} dt} \left( \int \frac{k_1}{m} t \cdot e^{\int \frac{k_2}{m} dt} dt + c \right)$$

$$= e^{-\frac{k_2 t}{m}} \left( \frac{k_1}{k_2} t \cdot e^{\frac{k_2 t}{m}} - \frac{m k_1}{k_2^2} e^{\frac{k_2 t}{m}} + c \right)$$

$$\text{又当 } t=0 \text{ 时, } V=0, \text{ 故 } c = \frac{m k_1}{k_2}$$

$$\text{因此, 此质点的速度与时间的关系为: } V = \frac{m k_1}{k_2^2} e^{\frac{k_2 t}{m}} + \frac{k_1}{k_2} \left( t - \frac{m}{k_2} \right)$$

36. 解下列的黎卡提方程

$$(1) \quad y' e^{-x} + y^2 - 2 y e^x = 1 - e^{2x}$$

解: 原方程可转化为:  $y' = -e^x y^2 + 2e^{2x} y + e^x - e^{3x}$ ,  $(*)$

观察得到它的一个特解为:  $y = e^x$ , 设它的任意一个解为  $y = e^x + z$ ,

代入 (\*) 式得到:  $\frac{d(e^x + z)}{dx} = -e^x (e^x + z)^2 + 2e^{2x} (e^x + z) + e^x - e^{3x}$   $(**)$

由 (\*\*) - (\*) 得:  $\frac{dz}{dx} = -e^x z^2$

变量分离得:  $\frac{dz}{z^2} = -e^x dx$

两边同时积分:  $-\frac{1}{z} = -e^x + c$

$$\text{即: } z = \frac{1}{e^x + c}$$

故原方程的解为  $y = e^x + \frac{1}{c + e^x}$

$$(2) y' + y^2 - 2y \sin x = \cos x - \sin^2 x$$

解: 原方程可化为:  $y' = -y^2 + 2y \sin x + \cos x - \sin^2 x$

由观察得, 它的一个特解为  $\bar{y} = \sin x$ , 设它的任意一个解为  $y = \sin x + z$ , 故

$$\frac{dz}{dx} = (-2 \sin x + 2 \sin x)z - z^2 = -z^2$$

变量分离再两边同时积分得:  $\frac{1}{z} = x + c$  即  $z = \frac{1}{x + c}$

故原方程的解为  $y = \sin x + \frac{1}{x + c}$

$$(3) x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$$

解: 原方程可化为:  $y' = y^2 + \frac{1}{x} y + \frac{1}{x^2}$

由观察得到, 它的一个特解为  $\bar{y} = -\frac{1}{x}$ , 设它的任一个解为  $y = -\frac{1}{x} + z$ , 故

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} z + z^2, \text{ 该式是一个 } n=2 \text{ 的伯努利方程}$$

两边同除以  $z^2$  得到:  $\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} + 1$

$$\text{即: } \frac{d}{dx} \frac{1}{z} = \frac{1}{x} \frac{1}{z} - 1, \text{ 令 } \frac{1}{z} = u,$$

则:  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} u - 1$ , 根据一阶非齐线性方程的求解公式得:

$$u = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left( \int -e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx + c \right) = x(c - en|x|)$$

$$\text{故: } z = \frac{1}{x(c - en|x|)}$$

$$\text{因此: 原方程的解为: } xy = \frac{1}{c - en|x|} - 1$$

$$(4) 4x^2(y' - y^2) = 1$$

解: 原方程可化为:  $y' = y^2 + \frac{1}{4x^2}$

由观察得到, 它的一个特解为  $\bar{y} = -\frac{1}{2x}$ , 设它的任一个解为  $y = -\frac{1}{2x} + z$ , 于是

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} z + z^2, \text{ 这是 } n=2 \text{ 的伯努利方程}$$

两边同除以  $z^2$  得到:  $\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} + 1$

即:  $\frac{d\frac{1}{z}}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} - 1$

则:  $\frac{1}{z} = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left( \int -e^{\int -\frac{1}{x} dx} + c \right) = x(c - en|x|)$

即:  $z = \frac{1}{x(c - en|x|)}$

故: 原方程的解为:  $2xy = \frac{2}{c - en|x|} - 1$

(5)  $x^2(y' + y^2) = 2$

解: 原方程可化为:  $y' = -y^2 + \frac{2}{x^2}$

由观察得, 它的一个特解为  $\bar{y} = -\frac{1}{x}$ , 故设它的任一个解为  $y = -\frac{1}{x} + z$ , 于是

$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z - z^2$ , 这是  $n=2$  的伯努利方程

两边同除以  $z^2$  得到:  $\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} - 1$

即:  $\frac{d\frac{1}{z}}{dx} = -\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} + 1$

则:  $\frac{1}{z} = e^{\int -\frac{2}{x} dx} \left( \int e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + c \right) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{x^3}{3} + c \right)$

故: 原方程的解为:  $y = \frac{3x^2}{x^3 + c} - \frac{1}{x}$ , 即  $xy = \frac{2x^3 - c}{c + x^3}$ .

(6)  $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$

解: 原方程可化为:  $y' = -y^2 + \frac{4}{x}y - \frac{4}{x^2}$

由观察得到它的一个特解为  $\bar{y} = \frac{1}{x}$ , 设它的任一个解为  $y = \frac{1}{x} + z$ , 于是

$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z - z^2$ , 这是  $n=2$  的伯努利方程

两边同除以  $z^2$  得到:  $\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} - 1$

$$\text{即: } \frac{d\frac{1}{z}}{dx} = -\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} + 1$$

$$\text{则: } \frac{1}{z} = e^{\int -\frac{2}{x} dx} \left( \int e^{\int -\frac{2}{x} dx} dx + c \right) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{x^3}{3} + c \right)$$

$$\text{从而: } \frac{1}{z} = e^{\int -\frac{2}{x} dx} \left( \int e^{\int -\frac{2}{x} dx} dx + c \right) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{x^3}{3} + c \right)$$

$$\text{故原方程的解为: } y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + c} = \frac{4x^3 + c}{x(x^3 + c)}$$

$$\text{即: } xy = \frac{4x^3 + c}{x(x^3 + c)}$$

$$(7) \quad y' = (x-1)y^2 + (1-2x)y + x$$

解: 由观察得到它的一个特解为  $\bar{y}=1$ , 故设它的任一个解为  $y=1+z$ , 于是

$$\frac{dz}{dx} = -z + (x-1)z^2, \text{ 这是 } n=2 \text{ 的伯努利方程,}$$

$$\text{两边同除以 } z^2 \text{ 得: } \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z} + (x-1)$$

$$\text{即: } \frac{d\frac{1}{z}}{dx} = \frac{1}{z} + (1-x)$$

$$\text{从而: } \frac{1}{z} = e^{\int dx} \left( \int (1-x) e^{\int -dx} dx + c \right) \\ = e^x (xe^{-x} + c) = x + ce^x$$

$$\text{故原方程的解为: } y = 1 + z = 1 + \frac{1}{x + ce^x}$$

### 习题 3.1

1 求方程  $\frac{dy}{dx} = x + y^2$  通过点  $(0, 0)$  的第三次近似解;

解: 取  $\varphi_0(x) = 0$

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= y_0 + \int_0^x (x + y_0^2) dx = \int_0^x x dx = \frac{1}{2}x^2 \\ \varphi_2(x) &= y_0 + \int_0^x [x + \varphi_1^2(x)] dx = \int_0^x [x + (\frac{1}{2}x^2)^2] dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 \\ \varphi_3(x) &= y_0 + \int_0^x [x + (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5)^2] dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{160}x^8 + \frac{1}{4400}x^{11}\end{aligned}$$

2 求方程  $\frac{dy}{dx} = x - y^2$  通过点  $(1, 0)$  的第三次近似解;

解: 令  $\varphi_0(x) = 0$

$$\begin{aligned}\text{则 } \varphi_1(x) &= y_0 + \int_0^x (x - y_0^2) dx = \int_0^x x dx = \frac{1}{2}x^2 \\ \varphi_2(x) &= y_0 + \int_0^x [x - \varphi_1^2(x)] dx = \int_0^x [x - (\frac{1}{2}x^2)^2] dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20}x^5 \\ \varphi_3(x) &= y_0 + \int_0^x [x - (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20}x^5)^2] dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{160}x^8 - \frac{1}{4400}x^{11}\end{aligned}$$

3 题 求初值问题:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases} \quad \text{R: } |x+1| \leq 1, |y| \leq 1$$

的解的存在区间, 并求解第二次近似解, 给出在解的存在空间的误差估计;

解: 因为  $M = \max \{ |x^2 - y^2| \} = 4$  则  $h = \min(a, \frac{b}{M}) = \frac{1}{4}$

则解的存在区间为  $|x - x_0| = |x - (-1)| = |x + 1| \leq \frac{1}{4}$

令  $\Psi_0(X) = 0$  ;

$$\Psi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x (x^2 - 0) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3};$$

$$\Psi_2(x) = y_0 + \int_{-1}^x [x^2 - (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3})^2] dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{x}{9} - \frac{x^4}{18} - \frac{x^7}{63} + \frac{11}{42}$$

$$\text{又 } \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq 2 = L$$

$$\text{则: 误差估计为: } |\Psi_2(x) - \Psi(x)| \leq \frac{M * L^2}{(2+1)^2} h^3 = \frac{11}{24}$$

4 题 讨论方程:  $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{3}}$  在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件,

并求通过点 (0, 0) 的一切解;

解: 因为  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2} y^{-\frac{2}{3}}$  在  $y \neq 0$  上存在且连续;

而  $\frac{3}{2} y^{\frac{1}{3}}$  在  $|y| \geq \sigma > 0$  上连续

由  $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{3}}$  有:  $|y| = (x+c)^{\frac{3}{2}}$

又 因为  $y(0)=0$  所以:  $|y|=x^{\frac{3}{2}}$

另外  $y=0$  也是方程的解;

故 方程的解为:  $|y| = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

或  $y=0$ ;

6 题 证明格朗瓦耳不等式:

设  $K$  为非负整数,  $f(t)$  和  $g(t)$  为区间  $\alpha \leq t \leq \beta$  上的连续非负函数,

且满足不等式：

$$f(t) \leq k + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds, \alpha \leq t \leq \beta$$

$$\text{则有: } f(t) \leq k \exp\left(\int_{\alpha}^t g(s)ds\right), \alpha \leq t \leq \beta$$

$$\text{证明: 令 } R(t) = \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds, \text{ 则 } R'(t) = f(t)g(t)$$

$$R'(t) - R(t)g(t) = f(t)g(t) - R(t)g(t)$$

$$\leq kg(t) R'(t) - R(t)g(t) \leq kg(t);$$

$$\text{两边同乘以 } \exp\left(-\int_{\alpha}^t g(s)ds\right) \text{ 则有:}$$

$$R'(t) \exp\left(-\int_{\alpha}^t g(s)ds\right) - R(t)g(t) \exp\left(-\int_{\alpha}^t g(s)ds\right)$$

$$\leq kg(t) \exp\left(-\int_{\alpha}^t g(s)ds\right)$$

两边从  $\alpha$  到  $t$  积分：

$$R(t) \exp\left(-\int_{\alpha}^t g(s)ds\right) \leq - \int_{\alpha}^t kg(s)ds \exp\left(-\int_{\alpha}^s g(r)dr\right) ds$$

$$\text{即 } R(t) \leq \int_{\alpha}^t kg(s)ds \exp\left(-\int_s^t g(r)dr\right) ds$$

$$\text{又 } f(t) \leq 1 \leq k + R(t) \leq k + k \int_{\alpha}^t g(s) \exp\left(-\int_s^t g(r)dr\right) ds$$

$$\leq k(1 - \exp\left(-\int_s^t g(r)dr\right)) = k \exp\left(\int_t^s g(r)dr\right)$$

$$\text{即 } f(t) \leq k \int_{\alpha}^t g(r)dr;$$

7 题 假设函数  $f(x, y)$  于  $(x_0, y_0)$  的领域内是  $y$  的 不增函数, 试证方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ 满足条件 } y(x_0) = y_0 \text{ 的解于 } x \geq x_0 \text{ 一侧最多只有一个解;}$$

证明: 假设满足条件  $y(x_0) = y_0$  的解于  $x \geq x_0$  一侧有两个  $\psi(x), \varphi(x)$

则满足：

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \psi(x)) dx$$

不妨假设  $\varphi(x) > \psi(x)$ , 则  $\varphi(x) - \psi(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \psi(x) &= \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, \psi(x)) dx \\ &= \int_{x_0}^x [f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))] dx \end{aligned}$$

又因为  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的领域内是  $y$  的 增函数, 则:

$$f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)) \leq 0$$

$$\text{则 } \varphi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^x [f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))] dx \leq 0$$

$$\text{则 } \varphi(x) - \psi(x) \leq 0$$

$$\text{所以 } \varphi(x) - \psi(x) = 0, \text{ 即 } \varphi(x) = \psi(x)$$

则原命题方程满足条件  $y(x_0) = y_0$  的解于  $x \geq x_0$  一侧最多  
只有一个解;

### 习题 3.3

1. Proof 若 (1) 成立则  $\forall \varepsilon > 0$  及  $\bar{x}_0 > x_0$ ,  $\exists \delta = \delta(\varepsilon, \bar{x}_0)$ , 使当

$$|\bar{y}_0| = |y(\bar{x}, x_0, y_0)| \leq \delta$$

时, 初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(\bar{x}_0) = \bar{y}_0 = y(\bar{x}, x_0, y_0) \end{cases}$$

的解  $y = \bar{y}(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$  满足对一切  $x \geq \bar{x}_0$  有  $|\bar{y}(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| < \varepsilon$ ,

由解关于初值的对称性, (3, 1) 的两个解  $y = y(x, x_0, y_0)$  及  $y = \bar{y}(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$  都过点  $(x_0, y_0)$ , 由解的存在唯一性

$$y(x, x_0, y_0) = \bar{y}(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0), \text{ 当 } x \geq \bar{x}_0 \text{ 时}$$

故  $|y(x, x_0, y_0)| < \varepsilon, x \geq \bar{x}_0$

若 (2) 成立, 取定  $\bar{x}_0 > x_0$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1 = \delta(\varepsilon, \bar{x}_0) = \delta(\varepsilon)$ , 使当

$$|y(\bar{x}, x_0, y_0)| \leq \delta_1$$

时, 对一切  $x \geq \bar{x}_0$  有

$$|y(x, x_0, y_0)| < \varepsilon$$

因初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

的解为  $y = 0$ , 由解对初值的连续依赖性,

对以上  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0, \bar{x}_0) = \delta(\varepsilon, x_0)$ , 使当

$$|y_0| \leq \delta \text{ 时}$$

对一切  $x \in (x_0, \bar{x}_0]$  有

$$|y(x, x_0, y_0)| < \min\{\varepsilon, \delta\} < \varepsilon$$

而当  $x \geq \bar{x}_0$  时, 因

$$|y(\bar{x}, x_0, y_0)| \leq \min\{\varepsilon, \delta_1\} < \delta_1$$

$$\text{故 } |y(x, x_0, y_0)| < \varepsilon$$

这样证明了对一切  $x \geq x_0$  有

$$|y(x, x_0, y_0)| < \varepsilon$$

2. Proof: 因  $f(x, y)$  及  $\frac{\partial f}{\partial y}$  都在  $G$  内连续, 从而  $f(x, y)$  在  $G$  内关于  $y$  满足局部

Lipschitz 条件, 因此解  $y = \varphi(x, x_0, y_0)$  在它的存在范围内关于  $x, x_0, y_0$  是连续的。

设由初值  $(x_0, y_0)$  和  $(x_0, y_0 + \Delta y_0)$  ( $|\Delta y_0| \leq \alpha, \alpha$  足够小) 所确定的方程解分别为

$$y = \varphi(x, x_0, y_0) \equiv \varphi, \quad y = \psi(x, x_0, y_0 + \Delta y_0) \equiv \psi$$

$$\text{即 } \varphi \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi) dx, \quad \psi \equiv y_0 + \Delta y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \psi) dx$$

于是

$$\begin{aligned} \psi - \varphi &\equiv \Delta y_0 + \int_{x_0}^x (f(x, \varphi) - f(x, \psi)) dx \\ &= \Delta y_0 + \int_{x_0}^x \frac{\partial f(x, \varphi + \theta(\psi - \varphi))}{\partial y} (\psi - \varphi) dx \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

因  $\frac{\partial f}{\partial y}$  及  $\varphi, \psi$  连续, 因此

$$\frac{\partial f(x, \varphi + \theta(\psi - \varphi))}{\partial y} = \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial y} + r_1$$

这里  $r_1$  具有性质: 当  $\Delta y_0 \rightarrow 0$  时,  $r_1 \rightarrow 0$  且当  $\Delta y_0 = 0$  时  $r_1 = 0$ , 因此对  $\Delta y_0 \neq 0$  有

$$\frac{\psi - \varphi}{\Delta y_0} \equiv 1 + \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial y} + r_1 \right) \frac{\psi - \varphi}{\Delta y_0} dx$$

$$\text{即 } z = \frac{\psi - \varphi}{\Delta y_0}$$

是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dz}{dy} = \left[ \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial y} + r_1 \right] z \\ z(x_0) = 1 = z_0 \end{cases}$$

的解，在这里  $\Delta y_0 \neq 0$  看成参数 0 显然，当  $\Delta y_0 = 0$  时，上述初值问题仍然有解。

根据解对初值和参数的连续性定理，知  $\frac{\psi - \varphi}{\Delta y_0}$  是  $x, x_0, z_0, \Delta y_0$  的连续函数，从而存

在

$$\lim_{\Delta y_0 \rightarrow 0} \frac{\psi - \varphi}{\Delta y_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$$

而  $\frac{\partial f}{\partial y_0}$  是初值问题

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial y} z \\ z(x_0) = 1 \end{cases}$$

的解，不难求解

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} = \exp \int_{x_0}^x \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial y} dx$$

它显然是  $x, x_0, y_0$  的连续函数。

3. 解：这里  $f(x, y) = p(x)y + \psi(x)$  满足解对初值的可微性定理条件

故：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} &= -f(x_0, y_0) \exp \int_{x_0}^x \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial y} dx \\ &= -(p(x_0)y_0 + Q(x_0)) \exp \int_{x_0}^x p(x) dx \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} &= \exp \int_{x_0}^x \frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial y} dx = \exp \int_{x_0}^x p(x) dx \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= f(x, \varphi(x, x_0, y_0)) = p(x)\varphi(x, x_0, y_0) + Q(x) \end{aligned}$$

$\frac{dy}{dx} = p(x)y + Q(x)$  满足  $y(x_0) = y_0$  的解为

$$y = e^{\int_{x_0}^x p(x) dx} \left( \int_{x_0}^x Q(x) e^{-\int_{x_0}^x p(x) dx} dx + y_0 \right)$$

$$\text{故 } \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \exp \int_{x_0}^x p(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} &= -p(x_0) \exp \int_{x_0}^x p(x) dx \left( \int_{x_0}^x Q(x) (\exp(-\int_{x_0}^x p(x) dx)) dx + y_0 \right) \\
 &\quad + \exp \int_{x_0}^x p(x) dx (-Q(x_0) + p(x_0) \int_{x_0}^x Q(x) [\exp(-\int_{x_0}^x p(x) dx)] dx) \\
 &= -(p(x_0) y_0 + Q(x_0)) \exp \int_{x_0}^x p(x) dx \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= p(x) \exp \int_{x_0}^x p(x) dx \left( \int_{x_0}^x Q(x) (\exp(-\int_{x_0}^x p(x) dx)) dx + y_0 \right) \\
 &\quad + \exp \int_{x_0}^x p(x) dx (Q(x) \exp(-\int_{x_0}^x p(x) dx)) \\
 &= p(x) \varphi(x, x_0, y_0) + Q(x)
 \end{aligned}$$

4. 解: 这是  $f(x, y) = \sin(\frac{y}{x})$  在  $(1, 0)$  某领域内满足解对初值可微性定理条件, 由公式

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} \Big|_{(1, 0)} &= -f(x_0, y_0) \exp \left( \int_{x_0}^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \right) \Big|_{(1, 0)} = 0 \\
 \frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial x_0} \Big|_{(1, 0)} &= \exp \left( \int_{x_0}^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx \right) \Big|_{(1, 0)} = \exp \int_{x_0}^x \frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} dx \Big|_{(1, 0)} \\
 &= \exp \int_1^x \frac{1}{x} \cos \frac{y(x, 1, 0)}{x} dx
 \end{aligned}$$

易见  $y=0$  是原方程满足初始条件  $y(1)=0$  的解

$$\because y(x, 1, 0) = 0 \quad \therefore \cos \frac{y(x, 1, 0)}{x} = \cos 0 = 1$$

$$\text{故 } \frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial y_0} \Big|_{\substack{x_0=1 \\ y=0}} = \exp \int_1^x \frac{1}{x} dx = |x|$$

### 习题 3.4

(一)、解下列方程，并求奇解（如果存在的话）：

$$1、 y = 2x \frac{dy}{dx} + x^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^4$$

解：令  $\frac{dy}{dx} = p$ ，则  $y = 2xp + x^2 p^4$ ，

两边对 x 求导，得  $p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} + 2xp^4 + 4x^2 p^3 \frac{dp}{dx}$

$$(1 + 2xp^3) \left( 2x \frac{dp}{dx} + p \right) = 0$$

从  $1 + 2xp^3 = 0$  得  $p \neq 0$  时， $x = -\frac{1}{2p^3}$ ,  $y = -\frac{3}{4p^2}$ ；

从  $2x \frac{dp}{dx} + p = 0$  得  $x = \frac{c}{p^2}$ ,  $y = \frac{2c}{p} + c^2$ ，

$p \neq 0$  为参数， $c \neq 0$  为任意常数.

经检验得  $\begin{cases} x = -\frac{1}{2p^3} \\ y = -\frac{3}{4p^2} \end{cases}$ ，是方程奇解.

$$2、 x = y - \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$$

解：令  $\frac{dy}{dx} = p$ ，则  $y = x + p^2$ ，

两边对 x 求导，得  $p = 1 + 2p \frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p-1}{2p}$$

解之得  $x = 2p + \ln(p-1)^2 + c$ ，

所以  $y = 2p + p^2 + \ln(p-1)^2 + c$ ，

且  $y=x+1$  也是方程的解，但不是奇解.

3、  $y = x \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

解：这是克莱洛方程，因此它的通解为  $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$ ，

从  $\begin{cases} y = cx + \sqrt{1 + c^2} \\ x - \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} = 0 \end{cases}$  中消去  $c$ ，

得到奇解  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

4、  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x \frac{dy}{dx} - y = 0$

解：这是克莱洛方程，因此它的通解为  $y = cx + c^2$ ，

从  $\begin{cases} y = cx + c^2 \\ x + 2c = 0 \end{cases}$  中消去  $c$ ，

得到奇解  $4y + x^2 = 0$ .

5、  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$

解：令  $\frac{dy}{dx} = p$ ，则  $y = 2xp + p^2$ ，

两边对  $x$  求导，得  $p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} + 2p \frac{dp}{dx}$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - 2,$$

解之得  $x = -\frac{2}{3}p + cp^{-2}$ ，

所以  $y = -\frac{1}{3}p^2 + cp^{-1}$ ，

可知此方程没有奇解.

6、  $x \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$

解：原方程可化为  $y = x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ，

这是克莱罗方程，因此其通解为  $y = cx - \frac{1}{c^2}$ ，

从  $\begin{cases} y = cx - \frac{1}{c^2} \\ x + 2c^{-3} = 0 \end{cases}$  中消去  $c$ ，得奇解  $27x^2 + 4y^3 = 0$ 。

$$7、 y = x \left( 1 + \frac{dy}{dx} \right) + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$$

解：令  $\frac{dy}{dx} = p$ ，则  $y = x(1 + p) = p^2$ ，

两边对  $x$  求导，得  $x = ce^{-p} - 2p + 2$ ，

所以  $y = c(p+1)e^{-p} - p^2 + 2$ ，

可知此方程没有奇解。

$$8、 x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - (x-a)^2 = 0$$

$$\text{解：} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{(x-a)^2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x-a}{\sqrt{x}}$$

$$dy = \pm \left( \sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$y = \pm \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2ax^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$9(y+c)^2 = 4x(x-3a)^2$$

可知此方程没有奇解。

$$9、 y = 2x + \frac{dy}{dx} - \frac{1}{3} \left( \frac{dy}{dx} \right)^3$$

解：令  $\frac{dy}{dx} = p$ ，则  $y = 2x + p - \frac{1}{3} p^3$ ，

两边对  $x$  求导，得  $p = 2 + \frac{dp}{dx} - p^2 \frac{dp}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p-2}{1-p^2}$$

解之得  $x = -\frac{(p+2)^2}{2} - 3\ln|p-2| + c$ ,

所以  $y = -\frac{1}{3}p^3 - p^2 - 3p - 4 - 6\ln|p-2| + c$ ,

且  $y = 2x - \frac{2}{3}$  也是方程的解, 但不是方程的奇解.

10、 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x+1)\frac{dy}{dx} - y = 0$

解:  $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

这是克莱罗方程, 因此方程的通解为  $y = cx + c + c^2$ ,

从  $\begin{cases} y = cx + c + c^2 \\ x + 1 + 2c \end{cases}$  中消去  $c$ ,

得方程的奇解  $(x+1)^2 + 4y = 0$ .

(二) 求下列曲线族的包络.

1、 $y = cx + c^2$

解: 对  $c$  求导, 得  $x + 2c = 0$ ,  $c = -\frac{x}{2}$ ,

代入原方程得,  $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$ ,

经检验得,  $y = -\frac{x^2}{4}$  是原方程的包络.

2、 $c^2y + cx^2 - 1 = 0$

解: 对  $c$  求导, 得  $2yc + x^2 = 0$ ,  $c = -\frac{x^2}{2y}$ ,

代入原方程得  $\frac{x^4}{4y^2}y - \frac{x^4}{2y} - 1 = 0$ , 即  $x^4 + 4y = 0$ ,

经检验得  $x^4 + 4y = 0$  是原方程的包络.

3、  $(x-c)^2 + (y-c)^2 = 4$

解：对  $c$  求导，得  $-2(x-c)-2(y-c)=0$ ，  $c = \frac{x+y}{2}$ ，

代入原方程得  $(x-y)^2 = 8$ .

经检验，得  $(x-y)^2 = 8$  是原方程的包络.

4、  $(x-c)^2 + y^2 = 4c$

解：对  $c$  求导，得  $-2(x-c)=4$ ，  $c=x+2$ ，

代入原方程得  $4+y^2 = 4(x+2)$ ，  $y^2 = 4(x+1)$ ，

经检验，得  $y^2 = 4(x+1)$  是原方程的包络.

(三) 求一曲线，使它上面的每一点的切线截割坐标轴使两截距之和等于常数  $c$ .

解：设所求曲线方程为  $y=y(x)$ ，以  $X$ 、 $Y$  表坐标系，则曲线上任一点  $(x, y(x))$  的切线方程为  $(Y - y(x)) = y'(x)(X - x)$ ，

它与  $X$  轴、 $Y$  轴的截距分别为  $X = x - \frac{y}{y'}$ ，  $Y = y - xy'$ ，

按条件有  $x - \frac{y}{y'} + y - xy' = a$ ， 化简得  $y = xy' - \frac{ay'}{1-y'}$ ，

这是克莱洛方程，它的通解为一族直线  $y = cx - \frac{ac}{1-c}$ ，

它的包络是  $\begin{cases} y = cx - \frac{ac}{1-c} \\ 0 = x - \frac{a}{1-c} - \frac{ac}{(1-c)^2} \end{cases}$ ，

消去  $c$  后得我们所求的曲线  $4ax = (x - y + a)^2$ .

(四) 试证：就克莱洛方程来说， $p$ -判别曲线和方程通解的  $c$ -判别曲线同样是方程通解的包络，从而为方程的奇解.

证：克莱洛方程  $y = xp + f(p)$  的  $p$ -判别曲线就是用  $p$ -消去法，

从  $\begin{cases} y = cx + f(c) \\ 0 = x + f'(c) \end{cases}$  中消去 p 后而得的曲线；

c-判别曲线就是用 c-消去法，从通解及它对求导的所得的方程

$\begin{cases} y = cx + f(c) \\ 0 = x + f'(c) \end{cases}$  中消去 c 而得的曲线，

显然它们的结果是一致的，是一单因式，

因此 p-判别曲线是通解的包络，也是方程的通解.

## 习题 4.1

1. 设  $x(t)$  和  $y(t)$  是区间  $a \leq t \leq b$  上的连续函数, 证明: 如果在区间  $a \leq t \leq b$  上有  $\frac{x(t)}{y(t)} \neq$  常数或  $\frac{y(t)}{x(t)}$  常数, 则  $x(t)$  和  $y(t)$  在区间  $a \leq t \leq b$  上线形无关。

证明: 假设在  $x(t)$ ,  $y(t)$  在区间  $a \leq t \leq b$  上线形相关

则存在不全为零的常数  $\alpha$ ,  $\beta$ , 使得  $\alpha x(t) + \beta y(t) = 0$

那么不妨设  $x(t)$  不为零, 则有  $\frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{\alpha}{\beta}$

显然  $-\frac{\alpha}{\beta}$  为常数, 与题矛盾, 即假设不成立  $x(t)$ ,  $y(t)$  在区间  $a \leq t \leq b$  上线形无关

2. 证明非齐线形方程的叠加原理: 设  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  分别是非齐线形方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x = f_1(t) \quad (1)$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x = f_2(t) \quad (2)$$

的解, 则  $x_1(t) + x_2(t)$  是方程  $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x = f_1(t) + f_2(t)$  的解。

证明: 由题可知  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  分别是方程 (1), (2) 的解

$$\text{则: } \frac{d^n x_1(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x_1(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x_1(t) = f_1(t) \quad (3)$$

$$\frac{d^n x_2(t)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x_2(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x_2(t) = f_2(t) \quad (4)$$

那么由 (3) + (4) 得:

$$\frac{d^n (x_1(t) + x_2(t))}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} (x_1(t) + x_2(t))}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) (x_1(t) + x_2(t)) = f_1(t) + f_2(t)$$

即  $x_1(t) + x_2(t)$  是方程  $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x = f_1(t) + f_2(t)$  的解。

3. 试验证  $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$  的基本解组为  $e^t, e^{-t}$ , 并求方程  $\frac{d^2x}{dt^2} - x = \cos t$  的通解。

证明: 由题将  $e^t$  代入方程  $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$  得:  $e^t - e^t = 0$ , 即  $e^t$  是该方程的解,

同理求得  $e^{-t}$  也是该方程的解

又显然  $e^t, e^{-t}$  线形无关, 故  $e^t, e^{-t}$  是  $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$  的基本解组。

由题可设所求通解为:  $x(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}$ , 则有:

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{-t} = 0 \\ c_1'(t)e^t - c_2'(t)e^{-t} = \cos t \end{cases}$$

解之得:  $c_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-t}(\cos t - \sin t) + c_1$ ;  $c_2(t) = -\frac{1}{4}e^t(\cos t + \sin t) + c_2$

故所求通解为:  $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t$

4. 试验证  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t}{1-t} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{1-t} x = 0$  有基本解组  $t, e^t$ , 并求方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t}{1-t} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{1-t} x = t-1 \text{ 的通解。}$$

解: 由题将  $t$  代入方程  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t}{1-t} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{1-t} x = 0$  得:

$$\frac{d^2t}{dt^2} + \frac{t}{1-t} \frac{dt}{dt} - \frac{1}{1-t} t = \frac{t}{1-t} + \frac{t}{1-t} = 0, \text{ 即 } t \text{ 为该方程的解}$$

同理  $e^t$  也是该方程的解, 又显然  $t, e^t$  线形无关,

故  $t, e^t$  是方程  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{t}{1-t} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{1-t} x = 0$  的基本解组

由题可设所求通解为  $x(t) = c_1(t)t + c_2(t)e^t$ , 则有:

$$\begin{cases} c_1'(t)t + c_2'(t)e^t = 0 \\ c_1'(t) + c_2'(t)e^t = t-1 \end{cases}$$

解之得:  $c_1(t) = -t + c_1, c_2(t) = -(te^{-t} + e^{-t}) + c_2$

故所求通解为  $x(t) = c_1 t + c_2 e^t - (t + 1)^2$

5. 以知方程  $\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 0$  的基本解组为  $e^t, e^{-t}$ , 求此方程适合初始条件

$x(0) = 1, x'(0) = 0$  及  $x(0) = 0, x'(0) = 1$  的基本解组 (称为标准基本解组, 即有  $w(0) = 1$ )

并求出方程的适合初始条件  $x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$  的解。

解:  $e^t, e^{-t}$  时间方程  $\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 0$  的基本解组, 故存在常数  $c_1, c_2$  使得:  $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

于是:  $x'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$

令  $t=0$ , 则有方程适合初始条件  $x(0) = 1, x'(0) = 0$ , 于是有:

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 = 1 \\ c_1 e^0 - c_2 e^0 = 0 \end{cases} \text{解得: } c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2} \quad \text{故 } x(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t}$$

又该方程适合初始条件  $x(0) = 0, x'(0) = 1$ , 于是:

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \\ c_1 e^0 - c_2 e^0 = 1 \end{cases} \text{解得: } c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{故 } x(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$$

显然  $x_1(t), x_2(t)$  线形无关, 所以此方程适合初始条件的基本解组为:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t}, \quad x(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$$

而此方程同时满足初始条件  $x(0) = x_0, x'(0) = x_0'$ , 于是:

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 = x_0 \\ c_1 e^0 - c_2 e^0 = x_0' \end{cases}, \text{解得: } c_1 = \frac{x_0 + x_0'}{2}, c_2 = \frac{x_0 - x_0'}{2}$$

故  $x(t) = \frac{x_0 + x_0'}{2} e^t + \frac{x_0 - x_0'}{2} e^{-t}$  满足要求的解。

6. 设  $x_i(t) (i=1, 2, \dots, n)$  是齐线形方程 (4.2) 的任意  $n$  个解。它们所构成的伏朗斯行列式

记为  $w(t)$ , 试证明  $w(t)$  满足一阶线形方程  $w' + a_1(t)w = 0$ , 因而有:

$$w(t) = w(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} \quad t \in (a, b)$$

$$\text{解: } \because w'(t) = \begin{vmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

又  $x_i(t) (i=1,2,\dots,n)$  满足  $\frac{d^n x_i}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x_i}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x_i = 0$

$$\text{即 } \frac{d^n x_i}{dt^n} = - \left( a_1(t) \frac{d^{n-1} x_i}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) x_i \right)$$

$w'(t)$  中第  $k$  行都乘以  $a_k(t)$ , 加到最后一行 ( $k$  为  $1, 2, \dots, n-1$ )

$$\text{则: } w'(t) = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} (-a_1(t)) = -a_1(t) w(t)$$

$$\text{即 } w' + a_1(t)w = 0 \quad \text{则有: } \frac{w'(t)}{w(t)} = -a_1(t)dt$$

两边从  $t_0$  到  $t$  积分:  $\ln|w(t)| \Big|_{t_0}^t = -a_1(s)ds$ , 则

$$\ln|w(t)| - \ln|w(t_0)| = - \int_{t_0}^t a_1(s)ds$$

$$\text{即: } w(t) = w(t_0) e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds} \quad t \in (a, b)$$

7. 假设  $x_1(t) \neq 0$  是二阶齐线形方程  $x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$  (\*) 的解, 这里  $a_1(t)$  和  $a_2(t)$

在区间  $[a, b]$  上连续, 试证: (1)  $x_2(t)$  是方程的解的充要条件为:

$w'[x_1, x_2] + a_1 w[x_1, x_2] = 0$  ; (2) 方程的通解可以表示为:

$$x = x_1 \left[ c_1 \int \frac{1}{x_1^2} \exp \left( - \int_{t_0}^t a_1(s) ds \right) dt + c_2 \right], \text{ 其中 } c_1, c_2 \text{ 为常数, } t_0, t \in [a, b]$$

$$\text{证: (1) } w'[x_1, x_2] + a_1 w[x_1, x_2] = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x_1 x_2'' - x_1'' x_2' + a_1 x_1 x_2' - a_1 x_1' x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 x_2'' + a_1 x_1' x_2 + a_1 x_1 x_2 + a_1 x_1 x_2' - a_1 x_1' x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 \left( x_2'' + a_1 x_2' + a_1 x_2 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_2'' + a_1 x_2' + a_1 x_2 = 0, (x_1 \neq 0) \end{aligned}$$

即  $x_2$  为(\*)的解。

(2) 因为  $x_1, x_2$  为方程的解, 则由刘维尔公式

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = w(t_0) e^{- \int_{t_0}^t a_1(s) ds}, \text{ 即:}$$

$$x_1 x_2' - x_1' x_2 = w(t_0) e^{- \int_{t_0}^t a_1(s) ds}$$

$$\text{两边都乘以 } \frac{1}{x_1^2} \text{ 则有: } \frac{d \left( \frac{x_2}{x_1} \right)}{dt} = \frac{w(t_0)}{x_1^2} e^{- \int_{t_0}^t a_1(s) ds}, \text{ 于是:}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{- \int_{t_0}^t a_1(s) ds} dt + c_2$$

$$\text{即: } x_2 = \left( c_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{- \int_{t_0}^t a_1(s) ds} dt + c_2 \right) x_1$$

取  $c_1 = 1, c_2 = 0$ , 得:  $x_2 = x_1 \int \frac{1}{x_1^2} e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} dt$ ,

$$\text{又: } w(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = e^{-\int_{t_0}^t a_1(s) ds} \neq 0$$

从而而方程的通解可表示为:

$$x = x_1 \left[ c_1 \int \frac{1}{x_1^2} \exp \left( - \int_{t_0}^t a_1(s) ds \right) dt + c_2 \right], \text{ 其中 } c_1, c_2 \text{ 为常数, } t_0, t \in [a, b].$$

8. 试证  $n$  阶非齐线形微分方程 (4.1) 存在且最多存在  $n+1$  个线形无关解。

证: 设  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  为 (4.1) 对应的齐线形方程的一个基本解组,  $\bar{x}(t)$  是 (4.1) 的一个解, 则:  $x_1(t) + \bar{x}(t), x_2(t) + \bar{x}(t), \dots, x_n(t) + \bar{x}(t), \bar{x}(t)$ , (1), 均为 (4.1) 的解。同时 (1) 是线形无关的。

事实上: 假设存在常数  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ , 使得:

$$c_1(x_1(t) + \bar{x}(t)) + c_2(x_2(t) + \bar{x}(t)) + \dots + c_n(x_n(t) + \bar{x}(t)) + c_{n+1}(\bar{x}(t)) = 0$$

$$\text{即: } \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) + \bar{x}(t) \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$$

$$\text{我们说: } \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$$

$$\text{否则, 若 } \sum_{i=1}^{n+1} c_i \neq 0, \text{ 则有: } \bar{x}(t) = - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n+1} c_i} x_i(t)$$

(\*) 的左端为非齐线形方程的解, 而右端为齐线形方程的解, 矛盾!

$$\text{从而有: } \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = 0$$

又  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  为 (4.1) 对应的齐线形方程的一个基本解组,

故有:  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ , 进而有:  $c_{n+1} = 0$

即 (1) 是线形无关的。

## 习题 4.2

1. 解下列方程

$$(1) \quad x^{(4)} - 5x'' + 4x = 0$$

解：特征方程  $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = 0$  有根  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = -1$

故通解为  $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^t + c_4 e^{-t}$

$$(2) \quad x''' - 3ax'' + 3a^2 x' - a^3 x = 0$$

解：特征方程  $\lambda^3 - 3a\lambda^2 + 3a^2\lambda - a^3 = 0$

有三重根  $\lambda = a$

故通解为  $x = c_1 e^{at} + c_2 t e^{at} + c_3 t^2 e^{at}$

$$(3) \quad x^{(5)} - 4x''' = 0$$

解：特征方程  $\lambda^5 - 4\lambda^3 = 0$

有三重根  $\lambda = 0, \lambda_4 = 2, \lambda_5 = -2$

故通解为  $x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 t + c_5$

$$(4) \quad x'' + 2x' + 10x = 0$$

解：特征方程  $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$  有复数根  $\lambda_1 = -1 + 3i, \lambda_2 = -1 - 3i$

故通解为  $x = c_1 e^{-t} \cos 3t + c_2 e^{-t} \sin 3t$

$$(5) \quad x'' + x' + x = 0$$

解：特征方程  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$  有复数根  $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

故通解为  $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$(6) \quad s'' - a^2 s = t + 1$$

解：特征方程  $\lambda^2 - a^2 = 0$  有根  $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -a$

当  $a \neq 0$  时，齐线性方程的通解为  $s = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at}$

$$\tilde{s} = A + Bt \text{ 代入原方程解得 } A = B = -\frac{1}{a^2}$$

$$\text{故通解为 } s = c_1 e^{at} + c_2 e^{-at} - \frac{1}{a^2}(t - 1)$$

$$\text{当 } a=0 \text{ 时, } \tilde{s} = t^2(\gamma_1 t + \gamma_2) \text{ 代入原方程解得 } \gamma_1 = \frac{1}{6}, \gamma_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{故通解为 } s = c_1 + c_2 t - \frac{1}{6}t^2(t + 3)$$

$$(7) \quad x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 2t + 3$$

解：特征方程  $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$  有根  $\lambda_1 = 2$ , 两重根  $\lambda = 1$

齐线性方程的通解为  $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + c_3 t e^t$

又因为  $\lambda = 0$  不是特征根，故可以取特解行如  $\tilde{x} = A + Bt$  代入原方程解得  $A = -4, B = -1$

$$\text{故通解为 } x = c_1 e^{2t} + c_2 e^t + c_3 t e^t - 4 - t$$

$$(8) \quad x^{(4)} - 2x'' + x = t^2 - 3$$

解：特征方程  $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$  有2重根  $\lambda = 1, 2$  重根  $\lambda = -1$

故齐线性方程的通解为  $x = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t}$

取特解行如  $\tilde{x} = At^2 + Bt + c$  代入原方程解得  $A = 1, B = 0, C = 1$

$$\text{故通解为 } x = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} + t^2 + 1$$

$$(9) \quad x''' - x = \cos t$$

解：特征方程  $\lambda^3 - 1 = 0$  有复数根  $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \lambda_3 = 1$

$$\text{故齐线性方程的通解为 } x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t$$

取特解行如  $\tilde{x} = A \cos t + B \sin t$  代入原方程解得  $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$

故通解为  $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$

$$(10) \quad x'' + x' - 2x = 8 \sin 2t$$

解：特征方程  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  有根  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$

故齐线性方程的通解为  $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$

因为  $+2i$  不是特征根

取特解行如  $\tilde{x} = A \cos 2t + B \sin 2t$  代入原方程解得  $A = -\frac{2}{5}, B = -\frac{6}{5}$

故通解为  $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \frac{2}{5} \cos 2t - \frac{6}{5} \sin 2t$

$$(11) \quad x''' - x = e^t$$

解：特征方程  $\lambda^3 - 1 = 0$  有复数根  $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \lambda_3 = 1$

故齐线性方程的通解为  $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t$

$\lambda = 1$  是特征方程的根，故  $\tilde{x} = Ate^t$  代入原方程解得  $A = \frac{1}{3}$

故通解为  $x = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 e^t + \frac{1}{3}te^t$

$$(12) \quad s'' + 2as' + a^2 s = e^t$$

解：特征方程  $\lambda^2 + 2a\lambda + a^2 = 0$  有 2 重根  $\lambda = -a$

当  $a = -1$  时，齐线性方程的通解为  $s = c_1 e^t + c_2 te^t$ ，

$\lambda = 1$  是特征方程的 2 重根，故  $\tilde{x} = At^2 e^t$  代入原方程解得  $A = \frac{1}{2}$

通解为  $s = c_1 e^t + c_2 te^t + \frac{1}{2}t^2$ ，

当  $a \neq -1$  时，齐线性方程的通解为  $s = c_1 e^{-at} + c_2 te^{-at}$ ，

$\lambda = 1$  不是特征方程的根，故  $\tilde{x} = Ae^t$  代入原方程解得  $A = \frac{1}{(a+1)^2}$

故通解为  $s=c_1e^{-at}+c_2te^{-at}+\frac{1}{(a+1)^2}e^t$

$$(13) \quad x''+6x'+5x=e^{2t}$$

解：特征方程  $\lambda^2+6\lambda+5=0$  有根  $\lambda_1=-1, \lambda_2=-5$

故齐线性方程的通解为  $x=c_1e^{-t}+c_2e^{-5t}$

$\lambda=2$  不是特征方程的根，故  $\tilde{x}=Ae^{2t}$  代入原方程解得  $A=\frac{1}{21}$

故通解为  $x=c_1e^{-t}+c_2e^{-5t}+\frac{1}{21}e^{2t}$

$$(14) \quad x''-2x'+3x=e^{-t} \cos t$$

解：特征方程  $\lambda^2-2\lambda+3=0$  有根  $\lambda_1=-1+\sqrt{2}i, \lambda_2=-1-\sqrt{2}i$

故齐线性方程的通解为  $x=c_1e^t \cos \sqrt{2}t+c_2e^t \sin \sqrt{2}t$

$-1\pm i$  不是特征方程的根，取特解行如  $\tilde{x}=(A \cos t + B \sin t)e^{-t}$  代入原方程解得  $A=\frac{5}{41}, B=-\frac{4}{41}$

故通解为  $x=c_1e^t \cos \sqrt{2}t+c_2e^t \sin \sqrt{2}t+(\frac{5}{41} \cos t - \frac{4}{41} \sin t)e^{-t}$

$$(15) \quad x''+x=\sin t-\cos 2t$$

解：特征方程  $\lambda^2+1=0$  有根  $\lambda_1=i, \lambda_2=-i$

故齐线性方程的通解为  $x=c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$x''+x=\sin t, \lambda_1=i$  是方程的解  $\tilde{x}=t(A \cos t + B \sin t)$  代入原方程解得

$A=-\frac{1}{2}, B=0$  故  $\tilde{x}=-\frac{1}{2}t \cos t$

$x''+x=-\cos 2t \quad \tilde{x}=A \cos 2t + B \sin 2t$  代入原方程解得

$A=\frac{1}{3}, B=0$  故  $\tilde{x}=\frac{1}{3} \cos 2t$

故通解为  $x=c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2}t \cos t + \frac{1}{3} \cos 2t$

## 习题 5.1

1. 给定方程组

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (*)$$

a) 试验证  $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$  分别是方程组 (\*) 的满足初始条件

$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  的解.

b) 试验证  $\mathbf{w}(t) = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t)$  是方程组 (\*) 的满足初始条件  $\mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

的解, 其中  $c_1, c_2$  是任意常数.

解: a)  $\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 \\ -\sin 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{u}'(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

又  $\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} \sin 0 \\ \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{v}'(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}(t)$$

因此  $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$  分别是给定初值问题的解.

b)  $\mathbf{w}(0) = c_1 \mathbf{u}(0) + c_2 \mathbf{v}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{w}'(t) = c_1 \mathbf{u}'(t) + c_2 \mathbf{v}'(t)$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ -c_1 \cos t - c_2 \sin t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}(t)$$

因此  $\mathbf{w}(t)$  是给定方程初值问题的解.

2. 将下面的初值问题化为与之等价的一阶方程组的初值问题:

a)  $x'' + 2x' + 7tx = e^{-t}$ ,  $x(1) = 7$ ,  $x'(1) = -2$

b)  $x^{(4)} + x = te^t$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = -1$ ,  $x''(0) = 2$ ,  $x'''(0) = 0$

c)  $\begin{cases} x'' + 5x' - 7x + 6y = e^t \\ y'' - 2y + 13y' - 15x = \cos t \end{cases}$

$$x(0) = 1, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

解: a) 令  $x_1 = x$ ,  $x_2 = x'$ , 得

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x'' = -7tx_1 - 2x_2 + e^{-t} \end{cases}$$

即  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7t & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

又  $x_1 = x(1) = 7$   $x_2(1) = x'(1) = -2$

于是把原初值问题化成了与之等价的一阶方程的初值问题:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ .

b) 令  $x_1 = x$   $x_2 = x'$   $x_3 = x''$   $x_4 = x'''$  则得:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 = x_2 \\ x_2' = x_3 = x_3 \\ x_3' = x_4 = x_4 \\ x_4' = -x_1 + te^t = -x_1 + te^t \end{cases}$$

且  $x_1(0)=x(0)=1$ ,  $x_2=x'(0)=-1$ ,  $x_3(0)=x''(0)=2$ ,

$$x_4(0)=x'''(0)=0$$

于是把原初值问题化成了与之等价的一阶方程的初值问题:

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ te^t \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 其中 } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

c) 令  $w_1=x$ ,  $w_2=x'$ ,  $w_3=y$ ,  $w_4=y'$ , 则原初值问题可化为:

$$\begin{cases} w_1' = x' = w_2 \\ w_2' = x'' = -5w_4 + 7w_1 - 6w_3 + e^t \\ w_3' = y' = w_4 \\ w_4' = y'' = 2w_3 - 13w_4 + 15w_1 + \cos t \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} w_1(0) = x(0) = 1 \\ w_2(0) = x'(0) = 0 \\ w_3(0) = y(0) = 0 \\ w_4(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{即 } w' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 2 & -13 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \\ 0 \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$w(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{其中 } w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

3. 试用逐步逼近法求方程组

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

满足初始条件

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

的第三次近似解.

$$\text{解: } \psi_0(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t}{2} \\ -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t}{2} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\psi_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{2} \\ 1 - \frac{s^2}{2} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t}{6} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

0241201 杨素玲

## 习题 5.2

02412—02 02412—03

1. 试验证  $\Phi(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$

是方程组  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix} x, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  , 在任何不包含原点的区间  $a \leq t \leq b$  上

的基解矩阵。

解: 令  $\Phi(t)$  的第一列为  $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$  , 这时  $\dot{\varphi}_1(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \varphi_1(t)$  故

$\varphi_1(t)$  是一个解。同样如果以  $\varphi_2(t)$  表示  $\Phi(t)$  第二列, 我们有  $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \varphi_2(t)$  这样  $\varphi_2(t)$  也是一个解。因此  $\Phi(t)$  是解矩阵。又因为

$\det \Phi(t) = -t^2$  故  $\Phi(t)$  是基解矩阵。

2. 考虑方程组  $\dot{x} = A(t)x$  (5.15) 其中  $A(t)$  是区间  $a \leq t \leq b$  上的连续  $n \times n$  矩阵, 它的元素为  $a_{ij}(t), i, j = 1, 2, \dots, n$

a) 如果  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  是(5.15)的任意  $n$  个解, 那么它们的伏朗斯基行列式  $W[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = W(t)$  满足下面的一阶线性微分方程  $W' = [a_{11}(t) + a_{22}(t) + \dots + a_{nn}(t)]W$

b) 解上面的一阶线性微分方程, 证明下面公式:

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t [a_{11}(s) + a_{22}(s) + \dots + a_{nn}(s)] ds} \quad t_0, t \in [a, b]$$

解:  $W(t) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{n1} & x'_{n2} & \dots & x'_{nn} \end{vmatrix}$

=

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cccc} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{1n}x_{n1} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + \dots + a_{1n}x_{n2} & \dots & a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array} \right| \\
 + \dots + & \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_{11} + \dots + a_{nn}x_{n1} & a_{n1}x_{21} + \dots + a_{nn}x_{n2} & \dots & a_{n1}x_{nn} + \dots + a_{nn}x_{nn} \end{array} \right| = \\
 \left| \begin{array}{cccc} a_{11}x_{11} & a_{11}x_{12} & \dots & a_{11}x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array} \right| & + \dots + \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn}x_{n1} & a_{nn}x_{n2} & \dots & a_{nn}x_{nn} \end{array} \right| \text{整理后原式变为} \\
 (a_{11} + \dots + a_{nn}) & \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array} \right| = (a_{11} + \dots + a_{nn}) w(t) \\
 = (a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)) w(t)
 \end{aligned}$$

b) 由于  $w'(t) = [a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)] w(t)$ , 即  $\frac{dw(t)}{w(t)} = [a_{11}(t) + \dots + a_{nn}(t)] dt$

两边从  $t_0$  到  $t$  积分  $\ln |w(t)| - \ln |w(t_0)| = \int_{t_0}^t [a_{11}(s) + \dots + a_{nn}(s)] ds$  即  $w(t) = w(t_0) e^{\int_{t_0}^t [a_{11}(s) + \dots + a_{nn}(s)] ds}$ ,  $t \in [a, b]$

3. 设  $A(t)$  为区间  $a \leq t \leq b$  上的连续  $n \times n$  实矩阵,  $\Phi(t)$  为方程  $x' = A(t)x$  的基解矩阵, 而  $x = \varphi(t)$  为其一解, 试证:

- a) 对于方程  $y' = -A^T(t)y$  的任一解  $y = \Psi(t)$  必有  $\Psi^T(t) \varphi(t) = \text{常数}$ ;
- b)  $\Psi(t)$  为方程  $y' = -A^T(t)y$  的基解矩阵的充要条件是存在非奇异的常数矩阵  $C$ , 使  $\Psi^T(t) \varphi(t) = C$ .

解 a)  $[\Psi^T(t) \varphi(t)]' = \Psi^T \varphi'(t) + \Psi^T \varphi(t) = \Psi^T \varphi(t) + \Psi^T(t)A(t)\varphi$

又因为  $\Psi' = -A^T(t) \Psi$ , 所以  $\Psi^T = -\Psi^T(t) A(t)$

$[\Psi^T(t) \varphi(t)]' = -\Psi^T(t) \varphi(t) A(t) + \Psi^T(t) A(t) \varphi(t) = 0$ ,

所以对于方程  $y' = -A^T(t)y$  的任一解  $y = \Psi(t)$  必有  $\Psi^T(t) \varphi(t) = \text{常数}$

b) “ $\Leftarrow$ ”假设为方程  $y' = -A^T(t)y$  的基解矩阵，则

$$[\Psi^T(t) \varphi(t)]' = [\Psi^T(t)]' \Phi(t) + \Psi^T(t) \Phi'(t) = [-A^T(t) \Psi(t)] \Phi(t) + \Psi^T(t) A^T(t) \Phi(t) + \Psi^T(t) [A(t) \varphi(t)] = -\Psi^T(t) A^T(t) \Phi(t) + \Psi^T(t) A^T(t) \Phi(t) = 0, \text{故 } \Psi^T(t) \varphi(t) = C$$

“ $\Rightarrow$ ”若存在非奇异常数矩阵  $C$ ,  $\det C \neq 0$ , 使  $\Psi^T(t) \varphi(t) = C$ ,

则  $[\Psi^T(t) \varphi(t)]' = \Psi^T \varphi'(t) + \Psi^T \varphi'(t) = 0$ , 故  $\Psi^T(t) \varphi(t) = -\Psi^T(t) \varphi(t) A(t) - \Psi^T(t) A(t)$  所以  $\Psi^T(t) = -\Psi^T(t) A(t)$ ,  $\Psi'(t) = -\Psi^T(t) A^T(t)$  即  $\Psi(t)$  为方程  $y' = -A^T(t)y$  的基解矩阵

4. 设  $\Phi(t)$  为方程  $x' = Ax$  ( $A$  为  $n \times n$  常数矩阵) 的标准基解矩阵 (即  $\Phi(0) = E$ ), 证明:

$$\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t - t_0) \text{ 其中 } t_0 \text{ 为某一值.}$$

证明: (1)  $\Phi(t), \Phi(t - t_0)$  是基解矩阵。

(2) 由于  $\Phi(t)$  为方程  $x' = Ax$  的解矩阵, 所以  $\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0)$  也是  $x' = Ax$  的解矩阵, 而当  $t = t_0$  时,  $\Phi(t_0) \Phi^{-1}(t_0) = E$ ,  $\Phi(t - t_0) = \Phi(0) = E$ . 故由解的存在唯一性定理, 得  $\Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) = \Phi(t - t_0)$

5. 设  $A(t), f(t)$  分别为在区间  $a \leq t \leq b$  上连续的  $n \times n$  矩阵和  $n$  维列向量, 证明方程组  $x' = A(t)x + f(t)$  存在且最多存在  $n+1$  个线性无关解。

证明: 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $x' = A(t)x$  的  $n$  个线性无关解,  $\bar{x}$  是  $x' = A(t)x + f(t)$  的一个解, 则  $x_1 + \bar{x}, x_2 + \bar{x}, \dots, x_n + \bar{x}, \bar{x}$  都是非齐线性方程的解, 下面来证明它们线性无关, 假设存在不全为零的常数

$$C_i, (i=1, 2, \dots, n) \text{ 使得 } \sum_{i=1}^n c_i (x_i + \bar{x}) + c_{n+1} \bar{x} = 0, \text{ 从而 } x_1 + \bar{x}, x_2 + \bar{x}, \dots,$$

$x_n + \bar{x}$ ,  $\bar{x}$  在  $a \leq t \leq b$  上线性相关, 此与已知矛盾, 因此  $x_1 + \bar{x}, x_2 + \bar{x}, \dots, x_n + \bar{x}, \bar{x}$  线性无关, 所以方程组  $\dot{x} = A(t)x + f(t)$  存在且最多存在  $n+1$  个线性无关解。

### 6、试证非齐线性微分方程组的叠加原理:

$$\dot{x} = A(t)x + f_1(t)$$

$$\dot{x} = A(t)x + f_2(t)$$

的解, 则  $x_1(t) + x_2(t)$  是方程组

$$\dot{x} = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$$

的解。

$$\text{证明: } \dot{x} = A(t)x + f_1(t) \quad (1) \quad \dot{x} = A(t)x + f_2(t) \quad (2)$$

分别将  $x_1(t), x_2(t)$  代入 (1) 和 (2)

$$\text{则 } \dot{x}_1 = A(t)x_1 + f_1(t) \quad \dot{x}_2 = A(t)x_2 + f_2(t)$$

$$\text{则 } \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = A(t)[x_1(t) + x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t)$$

$$[\dot{x}_1 + \dot{x}_2] = A(t)[x_1(t) + x_2(t)] + f_1(t) + f_2(t)$$

$$\text{令 } x = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\text{即证 } \dot{x} = A(t)x + f_1(t) + f_2(t)$$

7. 考虑方程组  $\dot{x} = Ax + f(t)$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad f(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

a) 试验证  $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$  是  $\dot{x} = Ax$  的基解矩阵;

b) 试求  $\dot{x} = Ax + f(t)$  的满足初始条件  $\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  的解  $\varphi(t)$ 。

证明: a) 首先验证它是基解矩阵

以  $\varphi_1(t)$  表示  $\phi(t)$  的第一列  $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{则 } \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \varphi_1(t)$$

故  $\varphi_1(t)$  是方程的解

$$\text{如果以 } \varphi_2(t) \text{ 表示 } \phi(t) \text{ 的第二列 } \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{我们有 } \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \varphi_2(t)$$

故  $\varphi_2(t)$  也是方程的解

从而  $\phi(t)$  是方程的解矩阵

$$\text{又 } \det \phi(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t} \neq 0$$

故  $\phi(t)$  是  $x' = Ax$  的基解矩阵；

b) 由常数变易公式可知，方程满足初始条件  $\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  的解

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\eta + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1} f(s) ds$$

$$\text{而 } \phi^{-1}(t) = \frac{\begin{pmatrix} e^{2t} & -te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}}{e^{4t}} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$\therefore \varphi(t) = \begin{pmatrix} (1-t)e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} & -se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{25}(-15t+27)e^{2t} - \frac{1}{25}\cos t - \frac{1}{25}\sin t \\ -\frac{3}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t \end{pmatrix}$$

8、试求  $x' = Ax + f(t)$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

满足初始条件

$$\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

的解  $\phi(t)$ 。

解：由第 7 题可知  $x' = Ax$  的基解矩阵  $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

$$\text{则 } \phi^{-1}(s) = \frac{\begin{pmatrix} e^{2s} & -se^{2s} \\ 0 & e^{2s} \end{pmatrix}}{e^{4s}} = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2s}$$

若方程满足初始条件  $\varphi(0) = 0$

$$\text{则有 } \varphi(t) = \varphi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s) f(s) ds = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-2s} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{若 } \varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

则有

$$\varphi(t) = \phi(t) \phi^{-1}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s) f(s) ds = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} t^2 e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t+\frac{1}{2}t^2)e^{2t} \\ (t-1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

9、试求下列方程的通解：

a)  $x'' + x = \sec t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

解：易知对应的齐线性方程  $x'' + x = 0$  的基本解组为

$$x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t$$

$$\text{这时 } W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

由公式得

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\sin t \cos s - \cos t \sin s}{1} \sec s ds = \int_0^t (\sin t - \cos t \tan s) ds = t \sin t + \cos t \ln \cos t$$

$\therefore$  通解为  $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \sin t + \cos t \ln \cos t$

b)  $x''' - 8x = e^{2t}$

解: 易知对应的齐线性方程  $x''' - 8x = 0$  的基本解组为  $x_1(t) = e^{2t}$ .

$$x_2(t) = e^{-t} \cos \sqrt{3}t, x_3(t) = e^{-t} \sin \sqrt{3}t$$

$\because \lambda = 2$  是方程的特征根

故方程有形如  $x = Ate^{2t}$  的根

$$\text{代入得 } A = \frac{1}{12}$$

$$\text{故方程有通解 } x = (c_1 \cos \sqrt{3}t + c_2 \sin \sqrt{3}t)e^{-t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{12}te^{2t}$$

c)  $x'' - 6x' + 9x = e^t$

解: 易知对应的齐线性方程  $x'' - 6x' + 9x = 0$  对应的特征方程为

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \lambda_{1,2} = 3 \text{ 故方程的一个基本解组为 } x_1(t) = e^{3t}, x_2(t) = te^{3t}$$

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & e^{3t} + 3te^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t}$$

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{te^{3s} e^{3s} - e^{3s} \cdot se^{3s}}{e^{6s}} \cdot e^s ds = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t}$$

因为  $te^{3t}, e^{3t}$  是对应的齐线性方程的解

$$\text{故 } \varphi_1(t) = \frac{1}{4}e^t \text{ 也是原方程的一个解}$$

$$\text{故方程的通解为 } x = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} + \frac{1}{4}e^t$$

10、给定方程  $x'' + 8x' + 7x = f(t)$  其中  $f(t)$  在  $0 \leq t < +\infty$  上连续, 试利用常数变易公式, 证明:

a) 如果  $f(t)$  在  $0 \leq t < +\infty$  上有界, 则上面方程的每一个解在  $0 \leq t < +\infty$  上有界;

b) 如果当  $t \rightarrow \infty$  时,  $f(t) \rightarrow 0$ , 则上面方程的每一个解  $\varphi(t) \rightarrow \infty$  (当

$t \rightarrow \infty$  时)。

证明: a)  $\because f(t) \quad 0 \leq t < +\infty$  上有界

$\therefore$  存在  $M > 0$ , 使得  $|f(t)| \leq M, \forall t \in [0, +\infty)$

又  $\because x = e^{-t}, x = e^{-7t}$  是齐线性方程组的基本解组

$\therefore$  非齐线性方程组的解

$$\therefore \varphi(t) = \int_0^t \begin{vmatrix} e^{-7s} e^{-s} - e^{-t} e^{-7s} \\ e^{-s} & e^{-7s} \\ -e^{-s} & -7e^{-7s} \end{vmatrix} f(s) ds = \int_0^t \frac{e^{-7s} e^{-s} - e^{-t} e^{-7s}}{-6e^{-8s}} f(s) ds$$

$$\therefore |\varphi(t)| \leq \frac{M}{6} \int_0^t |e^{-7s} e^{-s} - e^{-t} e^{-7s}| ds \leq \frac{M}{6} \left( \frac{8}{7} - \frac{1}{7} e^{-7t} - e^{-t} \right) \leq \frac{4}{21} M$$

又对于非齐线性方程组的满足初始条件的解  $x(t)$ , 都存在固定的常数  $c_1, c_2$

使得  $x(t) = c_1 e^{-7t} + c_2 e^{-t} + \varphi(t)$

$$\text{从而 } |x(t)| \leq |c_1 e^{-7t}| + |c_2 e^{-t}| + |\varphi(t)| \leq |c_1| + |c_2| + \frac{4}{21} M$$

故上面方程的每一个解在  $0 \leq t < +\infty$  上有界

b)  $\because t \rightarrow \infty$  时,  $f(t) \rightarrow 0$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N$  当  $t > N$  时  $|f(t)| < \varepsilon$

由 a) 的结论

$$|x(t)| \leq |c_1 e^{-7t}| + |c_2 e^{-t}| + |\varphi(t)| \leq |c_1| + |c_2| + \frac{4}{21} M \leq \frac{4}{21} M, (t \rightarrow \infty)$$

故  $t \rightarrow \infty$  时, 原命题成立

11、给定方程组  $\dot{x} = A(t)x$  (5.15)

这里  $A(t)$  是区间  $a \leq t \leq b$  上的连续  $n \times n$  矩阵, 设  $\varphi(t)$  是 (5.15) 的一个基解矩阵,  $n$  维向量函数  $F(t, x)$  在  $a \leq t \leq b, \|x\| < \infty$  上连续,  $t_0 \in [a, b]$  试

证明初值问题:  $\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + F(t, x) \\ \varphi(t_0) = \eta \end{cases}$  (\*)

的唯一解  $\varphi(t)$  是积分方程组

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \int_{t_0}^t \phi(t)\phi^{-1}(s)F(s, x(s))ds \quad (**)$$

的连续解。反之，(\*\*) 的连续解也是初值问题 (8) 的解。

证明：若  $\varphi(t)$  是 (\*) 的唯一解

则由非齐线性方程组的求解公式

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \phi(t)\int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)F(s, \varphi(s))ds$$

即 (\*) 的解满足 (\*\*)

反之，若  $\varphi(t)$  是 (\*\*) 的解，则有

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \phi(t)\int_{t_0}^t \phi^{-1}(s)F(s, \varphi(s))ds$$

两边对 t 求导：

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \phi'(t)\phi^{-1}(t_0)\eta + \phi'(t)\int_0^t \phi^{-1}(s)F(s, \varphi(s))ds + \phi(t)\phi^{-1}(t)F(t, \varphi(t)) \\ &= \phi'(t)[\phi^{-1}(t_0)\eta + \int_0^t \phi^{-1}(s)F(s, \varphi(s))ds] + F(t, \varphi(t)) \\ &= A(t)\phi(t)[\phi^{-1}(t_0)\eta + \int_0^t \phi^{-1}(s)F(s, \varphi(s))ds] + F(t, \varphi(t)) \\ &= A(t)\varphi(t) + F(t, \varphi(t)) \end{aligned}$$

即 (\*\*) 的解是 (\*) 的解

习题 5.3

1、假设  $\mathbf{A}$  是  $n \times n$  矩阵，试证：

a) 对任意常数  $c_1, c_2$  都有

$$\exp(c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}) = \exp c_1 \mathbf{A} \cdot \exp c_2 \mathbf{A}$$

b) 对任意整数  $k$ ，都有

$$(\exp \mathbf{A})^k = \exp k \mathbf{A}$$

(当  $k$  是负整数时，规定  $(\exp \mathbf{A})^k = [(\exp \mathbf{A})^{-1}]^{-k}$ )

证明：a)  $\because (c_1 \mathbf{A}) \cdot (c_2 \mathbf{A}) = (c_2 \mathbf{A}) \cdot (c_1 \mathbf{A})$

$$\therefore \exp(c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}) = \exp c_1 \mathbf{A} \cdot \exp c_2 \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} b) \quad k > 0 \text{ 时, } (\exp \mathbf{A})^k &= \exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{A} \cdots \exp \mathbf{A} \\ &= \exp (\mathbf{A} + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A}) \\ &= \exp k \mathbf{A} \end{aligned}$$

$k < 0$  时,  $-k > 0$

$$\begin{aligned} (\exp \mathbf{A})^k &= [(\exp \mathbf{A})^{-1}]^{-k} = [\exp(-\mathbf{A})]^{-k} = \exp(-\mathbf{A}) \cdot \exp(-\mathbf{A}) \cdots \exp(-\mathbf{A}) \\ &= \exp[(-\mathbf{A})(-k)] \\ &= \exp k \mathbf{A} \end{aligned}$$

故  $\forall k$ , 都有  $(\exp \mathbf{A})^k = \exp k \mathbf{A}$

2、试证：如果  $\varphi(t)$  是  $\dot{x} = \mathbf{A}x$  满足初始条件  $\varphi(t_0) = \eta$  的解，那么

$$\varphi(t) = [\exp \mathbf{A}(t-t_0)] \eta$$

证明：由定理 8 可知  $\varphi(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) \eta + \Phi(t) \int_{t_0}^t \phi^{-1}(s) f(s) ds$

又因为  $\Phi(t) = \exp \mathbf{A}t$ ,  $\Phi^{-1}(t_0) = (\exp \mathbf{A}t_0)^{-1} = \exp(-\mathbf{A}t_0)$ ,  $f(s) = 0$ ,

又因为矩阵  $(\mathbf{A}t) \cdot (-\mathbf{A}t_0) = (-\mathbf{A}t_0) \cdot (\mathbf{A}t)$

所以  $\varphi(t) = [\exp \mathbf{A}(t-t_0)] \eta$

3、试计算下面矩阵的特征值及对应的特征向量

a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$       d)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$

解: a)  $\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -4 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1)=0$

$\therefore \lambda_1=5, \lambda_2=-1$

对应于  $\lambda_1=5$  的特征向量  $u=\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}, (\alpha \neq 0)$

对应于  $\lambda_2=-1$  的特征向量  $v=\begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}, (\beta \neq 0)$

b)  $\det(\lambda E - A) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-2)=0$

$\therefore \lambda_1=-1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$

对应于  $\lambda_1=-1$  的特征向量  $u_1=\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\alpha \neq 0)$

对应于  $\lambda_2=2$  的特征向量  $u_2=\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\beta \neq 0)$

对应于  $\lambda_3=-2$  的特征向量  $u_3=\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\gamma \neq 0)$

c)  $\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-3)=0$

$\therefore \lambda_1=-1$  (二重),  $\lambda_2=3$

对于  $\lambda_1 = -1$  (二重) 的特征向量  $u = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ , ( $\alpha \neq 0$ )

对于  $\lambda_2 = 3$  的特征向量  $v = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , ( $\beta \neq 0$ )

$$d) \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

对于  $\lambda_1 = -1$  的特征向量  $u_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ( $\alpha \neq 0$ )

对于  $\lambda_2 = -2$  的特征向量  $u_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ , ( $\beta \neq 0$ )

对于  $\lambda_3 = -3$  的特征向量  $u_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ , ( $\gamma \neq 0$ )

4、试求方程组  $\dot{x} = Ax$  的一个基解矩阵，并计算  $\exp At$ ，其中  $A$  为：

$$a) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

解：a)  $\det(\lambda E - A) = 0$  得  $\lambda_1 = \sqrt{3}$ ,  $\lambda_2 = -\sqrt{3}$

对于  $\lambda_1$  的特征向量为  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \alpha$ , ( $\alpha \neq 0$ )

对应于  $\lambda_2$  的特征向量为  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \beta, \quad (\beta \neq 0)$

$\therefore u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$  是对应于  $\lambda_1, \lambda_2$  的两个线性无关的特征向量

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{3}t} & e^{-\sqrt{3}t} \\ (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t} & (2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$  是一个基解矩阵

$$\text{ExpAt} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -(2-\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t} + (2+\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} & e^{\sqrt{3}t} - e^{-\sqrt{3}t} \\ -e^{\sqrt{3}t} + e^{-\sqrt{3}t} & (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}t} - (2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}t} \end{pmatrix}$$

b) 由  $\det(\lambda E - A) = 0$  得  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$

解得  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  是对应于  $\lambda_1, \lambda_2$  的两个线性无关的特征向量

则基解矩阵为  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \text{expAt} = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{5t} + 2e^{-t} & e^{5t} - e^{-t} \\ 2e^{5t} - 2e^{-t} & 2e^{5t} + e^{-t} \end{pmatrix}$$

c) 由  $\det(\lambda E - A) = 0$  得  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1$

解得基解矩阵  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-2t} & 0 \end{pmatrix}$

$$\Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \text{expAt} = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{2t} + e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-2t} & -e^{2t} + e^{-2t} + e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-2t} & -e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

d) 由  $\det(\lambda E - A) = 0$  得  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = 2 + \sqrt{7}$ ,  $\lambda_3 = 2 - \sqrt{7}$

$$\text{解得基解矩阵 } \Phi(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & e^{(2+\sqrt{7})t} & e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 7e^{-3t} & \frac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \frac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

则  $\exp At = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) =$

$$\frac{1}{4\sqrt{7}} \begin{pmatrix} \frac{-8\sqrt{7}}{3}e^{-3t} + \frac{-2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{2+4\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{56\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{-122-28\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{32\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{-26+2\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

5、试求方程组  $\dot{x} = Ax$  的基解矩阵，并求满足初始条件  $\varphi(0) = \eta$  的解  $\varphi(t)$

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解: a) 由第 4 题 (b) 知, 基解矩阵为  $\begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$

$$\eta = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

所以  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{5t} + e^{-t} \\ 4e^{5t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

b) 由第 4 题 (d) 知, 基解矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & \frac{e^{(2+\sqrt{7})t}}{3} & \frac{e^{(2-\sqrt{7})t}}{3} \\ 7e^{-3t} & \frac{4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{-4\sqrt{7}-5}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ 4e^{-3t} & \frac{1+\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} & \frac{1-\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

所以

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\sqrt{7}} \begin{pmatrix} \frac{52\sqrt{7}}{3}e^{-3t} + \frac{4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{-4-26\sqrt{7}}{3}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-364\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{-748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{748+146\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \\ \frac{-208\sqrt{7}}{9}e^{-3t} + \frac{-178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2+\sqrt{7})t} + \frac{178-22\sqrt{7}}{9}e^{(2-\sqrt{7})t} \end{pmatrix}$$

c) 由 3 (c) 可知, 矩阵 A 的特征值为  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -1$  (二重)

$$\lambda_1 \text{ 对应的特征向量为 } u_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ -\frac{4\beta+2\gamma}{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ -\frac{4\beta+2\gamma}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \therefore v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = e^{3t}Ev_1 + e^{-t}[E + t(A + E)]v_2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

6、求方程组  $\dot{x} = Ax + f(t)$  的解  $\varphi(t)$  :

a)  $\varphi(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $\varphi(0) = 0, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

c)  $\varphi(0) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -2 \cos t \end{pmatrix}$

解: a) 令  $\dot{x} = Ax$  的基解矩阵为  $\Phi(t)$

$$p(\lambda) = \det(\lambda E - A) = (\lambda - 5)(\lambda + 1) = 0$$

所以  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$

解得  $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ 2e^{5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$ , 则  $\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{-3e^{4t}} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ -2e^{5t} & e^{5t} \end{pmatrix}$

$$\Phi^{-1}(0) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

求得  $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{20}e^{5t} - e^{-t} - \frac{1}{4}e^t - \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10}e^{5t} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

b) 由  $\det(\lambda E - A) = 0$  得  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$

设  $\lambda_1$  对应的特征向量为  $v_1$ , 则

$$(\lambda_1 E - A) v_1 = 0, \text{ 得 } v_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

取  $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 同理可得  $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\text{则 } \Phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{从而解得 } \varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-3t} - \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} \\ -2e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{5}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} \\ 4e^{-2t} - \frac{9}{4}e^{-3t} - \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} \end{pmatrix}$$

c) 令  $x' = \mathbf{A}x$  的基解矩阵为  $\Phi(t)$

由  $\det(\lambda E - \mathbf{A}) = 0$  得  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$$\text{解得对应的基解矩阵为 } \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & \frac{3}{2}e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \Phi^{-1}(t) = -2 \begin{pmatrix} e^{-t} & -\frac{3}{2}e^{-t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \text{ 从而 } \Phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)\varphi(0) + \phi(t) \int_0^t \phi^{-1}(s)f(s)ds$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \cos t - 2\sin t + e^t(-4 - 2\eta_1 + 3\eta_2) + 3e^{2t}(1 + \eta_1 - \eta_2) \\ 2\cos t - 2\sin t + e^t(-4 - 2\eta_1 + 3\eta_2) + 2e^{2t}(1 + \eta_1 - \eta_2) \end{pmatrix}$$

7、假设  $m$  不是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值。试证非齐线性方程组

$$x' = Ax + ce^{mt}$$

有一解形如

$$\varphi(t) = pe^{mt}$$

其中  $\mathbf{c}, \mathbf{p}$  是常数向量。

证：要证  $\varphi(t) = pe^{mt}$  是否为解，就是能否确定常数向量  $\mathbf{p}$

$$pme^{mt} = Ape^{mt} + ce^{mt}$$

则  $\mathbf{p}(mE - \mathbf{A}) = \mathbf{c}$

由于  $m$  不是  $\mathbf{A}$  的特征值

故  $|mE - A| = 0$

$mE - A$  存在逆矩阵

那么  $p = c(mE - A)^{-1}$  这样方程就有形如  $\varphi(t) = pe^{mt}$  的解

8、给定方程组

$$\begin{cases} x_1'' - 3x_1' + 2x_1 + x_2' - x_2 = 0 \\ x_1' - 2x_1 + x_2' + x_2 = 0 \end{cases}$$

a) 试证上面方程组等价于方程组  $\mathbf{u}' = \mathbf{Au}$ , 其中

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) 试求 a) 中的方程组的基解矩阵

c) 试求原方程组满足初始条件

$$x_1(0)=0, \quad x_1'(0)=1, \quad x_2(0)=0$$

的解。

证: a) 令  $u_1 = x_1, u_2 = x_1', u_3 = x_2$  则方程组①化为

$$\begin{cases} u_1' = x_1' = u_2 \\ u_2' = x_1'' = 3u_2 - 2u_1 - u_3' + u_3 \\ u_3' = x_2' = -u_2 + 2u_1 - u_3 \end{cases}$$

$$\text{即 } \mathbf{u}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{u} \quad \mathbf{u}' = \mathbf{Au} \quad ①$$

反之, 设  $x_1 = u_1, x_1' = u_2, x_2 = u_3$  则方程组②化为

$$\begin{cases} x_1'' = -4x_1 + 4x_1' + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_1' - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1'' = 2x_1' - 2x_1 - x_2' + x_2 \\ x_2' = 2x_1 - x_1' - x_2 \end{cases}$$

b) 由  $\det(\lambda E - A) = 0$  得  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

$$\text{由 } \begin{cases} -u_2 = 0 \\ 4u_1 - 4u_2 - 2u_3 = 0 \\ -2u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \text{ 得 } u_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

同理可求得  $u_2$  和  $u_3$

$$\text{取 } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^t & e^{2t} \\ 0 & e^t & 2e^{2t} \\ 2 & \frac{1}{2}e^t & 0 \end{pmatrix} \text{ 是一个基解矩阵}$$

c) 令  $u_1 = x_1, u_2 = x_1', u_3 = x_2$ ，则 ① 化为等价的方程组 ① 且初始条件变为

$u_1(0) = 0, u_2(0) = 1, u_3(0) = 0$ . 而 ② 满足此初始条件的解为：

$$e^{At} \eta = e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2e^t + \frac{3}{2}e^{2t} \\ -2e^t + 3e^{2t} \\ 1 - e^t \end{pmatrix} \quad ③$$

于是根据等价性，① 满足初始条件的解为 ③ 式

9、试用拉普拉斯变换法解第 5 题和第 6 题。

证明：略。

10、求下列初值问题的解：

$$a) \begin{cases} x_1' + x_2' = 0 \\ x_1' - x_2' = 1 \end{cases} \quad \varphi_1(0) = 1, \varphi_2(0) = 0$$

$$b) \begin{cases} x_1'' + 3x_1' + 2x_1 + x_2' + x_2 = 0 \\ x_1' + 2x_1 + x_2' - x_2 = 0 \end{cases} \quad \varphi_1(0) = 1, \varphi_1'(0) = -1, \varphi_2(0) = 0$$

$$c) \begin{cases} x_1'' - m^2 x_2 = 0 \\ x_2'' + m^2 x_1 = 0 \end{cases} \quad x_1(0) = \eta_1, x_1'(0) = \eta_2, x_2(0) = \eta_3, x_2'(0) = \eta_4$$

解：a) 根据方程解得  $x_1' = \frac{1}{2}$ ， $x_2' = -\frac{1}{2}$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{2}t + c_1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}t + c_2$$

$$\therefore \varphi_1(0) = 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 0 + c_1 = 1 \quad \therefore c_1 = 1 \quad \therefore x_1 = \frac{1}{2}t + 1$$

$$\therefore \varphi_2(0) = 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \times 0 + c_2 = 0 \quad \therefore c_2 = 0 \quad \therefore x_2 = -\frac{1}{2}t$$

$$\text{综上: } x_1 = \frac{1}{2}t + 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}t$$

b) 对方程两边取拉普拉斯变换, 得

$$\begin{cases} s^2 X_1(s) - s + 1 + 3(sX_1(s) - 1) + 2X_1(s) + sX_2(s) + X_2(s) = 0 \\ sX_1(s) - 1 + 2X_1(s) + sX_2(s) - X_2(s) = 0 \end{cases}$$

解得

$$X_1(s) = \frac{s^2 - 3}{(s+1)(s+2)(s-2)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$X_2(s) = \frac{-s-2}{(s+1)(s+2)(s-2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$\therefore \varphi_1(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{12}e^{2t}$$

$$\therefore \varphi_2(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{2t})$$

c) 对方程两边取拉普拉斯变换, 得

$$\begin{cases} s^2 X_1(s) - s\eta_1 - \eta_2 - m^2 X_2(s) = 0 \\ s^2 X_2(s) - s\eta_3 - \eta_4 + m^2 X_2(s) = 0 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} s^2 X_1(s) - m^2 X_2(s) = s\eta_1 + \eta_2 \\ m^2 X_1(s) + s^2 X_2(s) = s\eta_3 + \eta_4 \end{cases}$$

$$\text{解得} X_1(s) = \frac{\eta_1 s^3 + \eta_2 s^2 + m^2 s \eta_3 + \eta_4 m^2}{s^4 + m^4}$$

$$X_2(s) = \frac{\eta_3 s^3 + \eta_4 s^2 - m^2 \eta_1 s - m^2 \eta_2}{s^4 + m^4}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \left[ \left( \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \cos \frac{m}{\sqrt{2}}t + \left( \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \sin \frac{m}{\sqrt{2}}t \right] \cdot e^{-\frac{m}{2}t} \\ &\quad + \left[ \left( \frac{1}{2}\eta_1 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 - \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \cos \frac{m}{\sqrt{2}}t + \left( \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \sin \frac{m}{\sqrt{2}}t \right] \cdot e^{\frac{m}{2}t} \\ \varphi_2(t) &= \left[ \left( -\frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 - \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \cos \frac{m}{\sqrt{2}}t + \left( \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \sin \frac{m}{\sqrt{2}}t \right] \cdot e^{-\frac{m}{2}t} \\ &\quad + \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \cos \frac{m}{\sqrt{2}}t + \left( -\frac{1}{2}\eta_1 - \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_2 + \frac{\sqrt{2}}{4m}\eta_4 \right) \sin \frac{m}{\sqrt{2}}t \right] \cdot e^{\frac{m}{2}t}\end{aligned}$$

11、假设  $y = \varphi(x)$  是二阶常系数线性微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

的解, 试证  $y = \int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$  是方程

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

的解, 这里  $f(x)$  为已知连续函数。

$$\text{证明: } y = \int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt$$

$$\because y' = \varphi(0)f(x) + \int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt = \int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt$$

$$y'' = \int_0^x \varphi''(x-t)f(t)dt + \varphi'(0)f(x) = \int_0^x \varphi''(x-t)f(t)dt + f(x)$$

∴

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= \int_0^x \varphi''(x-t)f(t)dt + f(x) + a \int_0^x \varphi'(x-t)f(t)dt + b \int_0^x \varphi(x-t)f(t)dt \\ &= \int_0^x [\varphi''(x-t) + a\varphi'(x-t) + b\varphi(x-t)]f(t)dt + f(x) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

## 习题 6.3

1. 试求出下列方程的所有奇点,并讨论相应的驻定解的稳定性

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x-y) \\ \frac{dy}{dt} = 1/4 y(2-3x-y) \end{cases}$$

解: 由  $\begin{cases} x(1-x-y) = 0 \\ 1/4 y(2-3x-y) = 0 \end{cases}$  得奇点(0,0),(0,2),(1,0),(1/2,1/2)

对于奇点(0,0),  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$  由  $|\lambda E - A| = 0$  得  $\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = 1/2 > 0$

所以不稳定

对于奇点(0,2),令  $X=x, Y=y-2$ , 则  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$  得  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/2$

所以渐进稳定

同理可知,对于奇点(1,0),驻定解渐进稳定

对于奇点(1/2,1/2),驻定解渐进不稳定

$$(2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 9x - 6y + 4xy - 5x^2 \\ \frac{dy}{dt} = 6x - 6y - 5xy + 4y^2 \end{cases}$$

解: 由  $\begin{cases} 9x - 6y + 4xy - 5x^2 = 0 \\ 6x - 6y - 5xy + 4y^2 = 0 \end{cases}$  得奇点(0,0),(1,2),(2,1)

对于奇点(0,0)可知不稳定

对于奇点(1,2)可知不稳定

对于奇点(2,1)可知渐进稳定

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \mu(y - x^2), \mu > 0 \end{cases}$$

解: 由  $\begin{cases} y = 0 \\ -x + \mu(y - x^2) = 0, \mu > 0 \end{cases}$  得奇点(0,0),(-1/μ,0)

对于奇点(0,0) 驻定解不稳定

对于奇点(-1/μ,0) 得驻定解不稳定

$$(4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x \\ \frac{dy}{dt} = y - x^2 - (x - y)(y^2 - 2xy + 2/3x^3) \end{cases}$$

解: 由  $\begin{cases} y - x = 0 \\ y - x^2 - (x - y)(y^2 - 2xy + 2/3x^3) = 0 \end{cases}$  得奇点(0,0),(1,1)

对于奇点(0,0)得驻定解不稳定

对于奇点(1,1)得驻定渐进稳定

2. 研究下列纺车零解的稳定性

$$(1) \frac{d^3x}{dt^3} + 5 \frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

解:  $a_0 = 1 > 0, a_1 = 5 > 0, a_2 = 6 > 0$

$$\Delta_2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} > 0 \quad a_3 = 1 > 0 \quad \text{所以零解渐进稳定}$$

$$(2) \frac{dx}{dt} = \mu x - y, \frac{dy}{dt} = \mu y - z, \frac{dz}{dt} = \mu z - x (\mu \text{为常数})$$

$$\text{解: } A = \begin{pmatrix} \mu & -1 & 0 \\ 0 & \mu & -1 \\ -1 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{由 } |\lambda E - A| = 0 \text{ 得 } \lambda^3 - 3\mu\lambda^2 + 3\mu^2\lambda - \mu^3 + 1 = 0$$

$$\text{得 } \lambda_1 = \mu - 1, \lambda_2 = \mu + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

i)  $\mu + 1/2 < 0$  即  $\mu < -1/2$ , 渐进稳定

ii)  $\mu + 1/2 > 0$  即  $\mu > -1/2$  不稳定

iii)  $\mu + 1/2 = 0$  即  $\mu = -1/2$  稳定