

摘要

柔性宏-微机器人具有系统频带高、末端惯量小的特点，为提高机器人的综合性能提供了新的思路。目前国内关于宏-微机器人的研究大多局限于控制策略，很少从机器人动力学角度进行分析。本文在柔性宏-微机器人的动力学建模、末端有效惯量分析、误差补偿及控制策略等方面进行较为深入地分析与探讨。

首先，本文首次将传递矩阵法应用于柔性宏-微机器人系统，建立了动力学方程。先用传递矩阵法建立了平面 3R 柔性机器人弹性动力学方程，给出了一平面 3R 柔性机器人的数值算例，说明了传递矩阵法在柔性机器人动力学建模中是有效的。然后，通过将微机器人等效成激振力，建立了柔性宏-微机器人动力学方程。通过对 3 柔性/2 刚性宏-微机器人数值仿真，说明了将微机器人等效为惯性力这一建模方法的有效性。

其次，对柔性宏-微机器人末端有效惯量进行了较为深入的分析。首次基于宏-微机器人运动、动力学分析，从理论上推导出了末端有效惯量的数学表达式，证明了柔性宏-微系统机器人有效惯量以微机器人有效惯量为上界这个重要特点。然后利用宏-微机器人的冗余特性来规划机器人的关节运动，进一步降低了宏-微机器人末端有效惯量的上界值，提高机器人快速响应能力。最后给出了一柔性/二刚性宏-微机器人算例，验证了理论分析的有效性。

最后，对宏-微机器人的误差补偿及控制策略进行了研究。从运动学角度分析了宏-微机器人误差可补偿的几何条件，建立了衡量补偿能力的可补偿性指标。然后利用宏-微机器人冗余性对机器人进行运动规划，提高了可补偿能力，给出了一柔性/二刚性宏-微机器人算例。最后利用非线性控制方法，分别建立了宏-微机器人误差补偿控制算法，并首次利用非线性控制理论分析了宏、微机器人控制算法的稳定性。

关键词 柔性宏-微机器人；末端有效惯量；可补偿性；控制

ABSTRACT

The flexible macro-micro manipulator has many advantages, such as lower effective endpoint inertial, higher bandwidth, etc. This novel robot structure has offered a new method for improving the performance of manipulators. Research on the macro-micro manipulator mostly focused on the control strategy, while little on the dynamics. The modeling of the flexible macro-micro manipulator, the endpoint inertia, error compensation and its control strategy have been investigated comprehensively in this thesis.

Firstly, the dynamic model of the flexible macro-micro manipulator is established by using the transfer matrix method for the first time. The elastic dynamic equation of the 3R flexible manipulator is derived at first, and the simulation is performed on it. The results illustrate the effectiveness of the transfer matrix method in flexible manipulator analysis. Then, the dynamic model of a macro-micro manipulator is derived by regarding two rigid links attached to the end of the 3R flexible manipulator as a changing excitation. A simulation of the micromanipulator's changing excitation equivalence and lumped mass equivalence is performed and the results show the reasonableness and feasibility of the changing excitation equivalence.

Secondly, research on the effective endpoint inertial of the flexible macro-micro system based on the kinematic and dynamic analysis is investigated. The equation of the effective endpoint inertial of the flexible macro-micro system is derived for the first time and that the effective endpoint inertial is upperbounded by the micromanipulator is proved. A numerical simulation of a macro-micro manipulator with 2 micro rigid links attached to 1 macro flexible link is performed, and the results reveal that the rigid macro-micro manipulator has the smaller upperbounded value and this value can be decreased by optimizing the joint motion of the macro-micro system.

Finally, the error compensation and control strategy of the flexible macro-micro system are analyzed. The geometry compensable condition and compensability performance index are proposed based on the kinematics of macro-micro manipulator in this thesis. A numerical simulation of a macro-micro manipulator with 2 micro rigid

links attached to 1 macro flexible link is performed, and the results show that the compensability analysis method is effective and the compensability can be enhanced by optimizing the joint motion of the macro-micro system. The control algorithms of macro and micromanipulators are proposed respectively based on the stability demand of control strategy by utilizing the non-linear control method, and the control algorithm's stability is proved.

Keywords Flexible macro-micro manipulator; Effective endpoint inertial; Compensability; Control

独 创 性 声 明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得北京工业大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签名: 陈东海 日期: 2005.5.25.

关于论文使用授权的说明

本人完全了解北京工业大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

签名: 陈东海 导师签名: 洪鹤年 日期: 05.5.25.

第1章 绪论

1.1 引言

从世界上第一台遥控机械手的诞生到现在，机器人的发展已经历了 50 多年的时间，在此期间，机器人技术取得了巨大的进步。目前机器人的发展方向是高速、高精度、轻量化：高速以提高效率；高精度以适应精密加工；轻量化以降低能耗。轻质柔性机器人具有驱动器小，操作速度快，能耗低，载荷-自重比大等优点，符合机器人发展的潮流，因而得到了广泛的应用。在航空航天领域，柔性机器人的使用尤其具有重要意义。但是，柔性机器人也存在着致命缺点，即末端轨迹的精确控制始终难以实现。由于杆件的轻量化使得柔性变大，以及高速运动中产生较大的惯性力，都会引起较大的杆件的变形和振动，从而导致柔性机器人末端定位误差或者轨迹跟踪误差，因而无法实现快速、精确的运动。实践证明，单纯从控制学的角度已不能很好解决这个问题，于是人们试图从更广的角度探索提高柔性机器人的精确控制能力。

冗余度机器人以其自身具有的增加灵活性、躲避障碍、回避奇异、优化主运动任务下的操作指标、优化关节运动、力矩、能量等众多优点，被人们深入研究。上世纪 80 年代末，有学者^[1, 2, 3]在冗余机器人的研究中发现，通过在机器人末端附加一个微小的刚性机械手，如图 1-1。在增加冗余度的同时，使得机器人的性能明显改善。这种新颖的机器人结构被称为宏-微机器人（Macro-Micro Manipulator system 或 Long-Reach and Short-Reach Manipulators）。经过近 20 年的探索，不论是从理论验证还是从实际应用的情况，都证明了宏-微机器人在很多方面性能都优于传统的单一结构的机器人系统，特别是为提高柔性机器人的精度提供了一条新的思路。

在宏-微机器人不断应用过程中，设计者给出了宏-微机器人的描述性定义：一般认为，宏-微机器人系统由宏机器人和微机器人两个子系统构成，前者是用一个长的柔性轻质机械臂实现较大工作空间，在工作点附近实现粗略定位，称之为宏机器人（Macro-Manipulator）；同时为了克服宏机器人柔性导致的不可避免的振动，实现精确的末端控制，完成细微操作，人们在宏机器人的末端附加了一个小的机械手，拥有完全的自由度，称之为微机器人（Micro-Manipulator）。也有学者提出了所谓粗/精操作机器人系统（coarse /fine manipulator system）的概念^[4]。事实上，不论从组成结构、系统特征，还是从所从事的操作任务来看，粗/精操作机器人系统都符合宏-微机器人的特征，可以归为宏-微机器人一类。从结

构上看，宏机械手可以采用轻质、柔性材料，而微机械手应保持较大的刚性。这里的宏和微是一种相对概念，并不是从机器人自身结构的尺度来划分宏机器人和微机器人系统的，在某些系统中，宏、微机器人并没有尺度上的绝对差别。另外，宏、微机器人的组成形式也没有绝对的规定，宏-微机器人可以是两种不同性能的机器人的结合，比如宏机器人可以采用柔性连接和传动机构，而微机器人采用刚性连接和直接驱动。宏-微机器人系统最早在航空航天领域得到了应用，例如美国航天飞机上使用的 SRMS 机器人^[5]（Shutter Remote Manipulator System），国际空间站计划中也使用了这样的宏-微机器人系统。

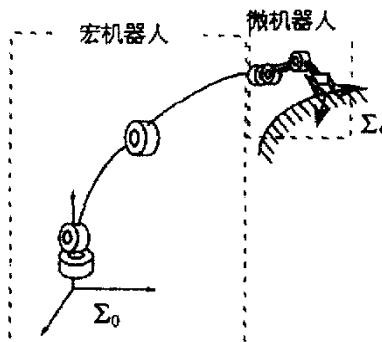


图 1-1 宏-微机器人结构简图
Fig1-1 Macro-micro manipulator system

研究和实践表明，宏-微机器人所具有的末端有效惯量小、操作精度高等优点是一般机器人所不具备的，主要有下列几个特点：

末端有效惯量小、系统频带高。在宏-微概念提出初期就有学者认识到这一特点，即当微机器人质量远远小于宏机器人质量时，系统的动力学特性体现为微机器人的动力学特性^[6]。也就是说，如果微机器人的响应速度很快，则整个系统的响应速度会大大提高。这个特点使得宏-微机器人在误差实时补偿、末端力的精确控制等领域得到广泛应用。

操作精度高。宏-微机器人的结构决定了其具有精度高的特性。从理论上讲，只要微机器人的运动空间大于宏机器人的误差空间，微机器人的分辨率足够高，借助有效的误差测量设备，宏-微机器人系统完全能够达到微机器人运动的精度，宏-微机器人系统的高精度特性在精密操作领域已经得到体现。

具备冗余自由度。对于宏-微机器人系统的研究，实际上是从对冗余机器人的研究起步的。宏-微机器人系统中一般存在冗余自由度，提高了机器人的性能，这是宏-微机器人系统的优势之一。冗余自由度给系统带来很大的调节空间，但同时也给系统的控制带来很大的难度。

宏-微组合形式灵活。针对不同的应用领域、不同的操作需要，宏-微机器人系统的组合结构形式也大相径庭。一般宏机器人还是采用液压驱动、交直流伺服电机等，而微型伺服电机、压电陶瓷等响应快、质量小的驱动器则广泛用于微机器人中。

宏-微机器人的上述优点引起了人们以极大的兴趣致力于对它们的研究。对宏-微机器人的工作原理或方式一直存在多种理解，一般可分为如下三种情况：

(1) 由宏机器人完成大范围内运动，将微机器人输送到工件附近后设法保持稳定，由微机器人完成细微操作^[7]，整个工作过程中宏机器人自身反馈控制。宏机器人实际上为微机器人提供了一个操作平台，这是人们对宏-微机器人最早的认识和利用。许多情况下，微机器人的形式、原理特殊，例如用于 μm 级精密作业的微动线圈^[8]、激光作业的反射镜^[9]等，人们把它们也可以归入到了宏-微机器人的范畴。在这种情况下，宏机器人一般具有较大的刚度，而对于柔性宏机器人，其精确控制实际上一直是一个难题。

(2) 宏机器人末端实施操作，微机器人通过自身运动抑制柔性宏机器人的弹性振动。这实际上是将微机器人作为控制变量而实施的振动的主动控制^[10]，这种情况下涉及不到误差的补偿问题。

(3) 宏、微机器人共同参与轨迹规划，微机器人在完成预定轨迹的同时，利用自身频带宽、响应快的特点，对宏机器人的误差实时补偿^[11]，这是目前人们一般认识的宏-微机器人的情形。这种情况下，由于关节误差、杆件变形在柔性宏机器人的末端所引起的误差必须得到补偿。

国内外对宏-微机器人围绕以上三种类型进行的研究已为数不少，发表了大量的论文和建立了一些实用装置。一方面，这些研究成果为本课题的继续研究提供了丰富的理论基础；另一方面，前人工作中没有涉及到的问题或不足之处，例如动力学分析、末端惯量分析、误差补偿及其控制等也为本课题提供了研究方向。下面就宏-微机器人国内外研究发展、现状及其中存在的问题作一简要概括。

1.2 宏-微机器人研究现状

对宏-微机器人的研究在国际上始于 80 年代后期，日、美两国的学者在此领域建树颇多，如 A. Sharon、O. Khatib、J. Y. Lew、T. Yoshikawa 等人。

对宏-微机器人的研究最早的是 MIT 的 A. Sharon 等人。他们于 1984 年提出了宏-微机器人的概念^[1]，并较早的对刚性宏-刚性微机器人系统进行了探讨^[2]。他们建立并分析了系统的质量-弹簧-阻尼集中参数模型，利用频率特性实验最早

说明了宏-微机器人具有减小末端有效惯量、扩充系统频带的特点，并且指出，当宏机械人的等效质量远大于微机械手的质量或弹簧系数足够大时，机器人的动态特性主要取决于微机械手的动态特性。在高频段下，机器人的力的负反馈难以实现，并且系统变的不稳定，而宏-微机器人结构由于末端惯性较小，能够有效的解决高频段下力控制的不稳定问题。A.Sharon 还探讨了机器人结构设计和控制器设计的关系^[3]。利用宏-微机器人的质量-弹簧-阻尼集中参数模型，说明传统控制方法在高频段下难以实现稳定，而宏-微机器人克服了结构上的“传递延迟”（Propagation Delay），可以及时对外力做出响应。

Stanford 大学的 O.Khatib 谈到了现有机器人的种种不足^[6]（Missing Capabilities）时指出，现有机器人应用受限的原因是高频段力控制和顺应控制难以实现。他以 ARTISAN 宏-微机器人系统为例，说明了宏-微机器人具有频带高、末端惯量小、冗余性等优点，因而能实现末端快速、精确运动。

国内对宏-微机器人的研究开展较晚，直到九十年代末期陈启军、王月娟等人注意到这种结构的优点^[12]，开始对宏-微机器人连续、不连续轨线控制^[13, 14]，以及建立奇异摄动模型等进行研究^[15]。但他们对宏机器人建立的系统模型为刚性，其研究集中在刚性宏/刚性微机器人及其控制上，对柔性臂的情况及动力学问题没有涉及。另外，利用宏-微机器人的末端惯性小、系统频带高的优点，哈尔滨工业大学进行了宏-微机器人实际机构的研究^[16, 17]。但他们的研究主要是机器人控制系统和微操作器的具体结构上，对宏-微机器人的运动学、动力学理论涉及有限。在宏-微机器人的具体实现上，同济大学开发出了用于激光作业的宏-微机器人机器控制系统^[9]，天津大学的徐颖^[18]也提出了一种宏-微机器人的具体结构。这些机器人系统的研究及实验，都显示出这种结构的一些优良特性。

作为课题研究的基础，以下就国内外宏-微机器人领域的研究现状作一简要概括，分为以下几个方面进行介绍：

1.2.1 提高宏-微机器性能的研究

1.2.1.1 宏-微机器人误差补偿的研究 利用宏-微机器人末端有效惯量小、系统频带高的特点，国内外学者开始了宏-微机器人的协调操作、通过微机器人实现误差的实时补偿以提高末端定位或轨迹跟踪的精度的研究。

许多作业机器人都要求按设定轨迹运动，需要将在笛卡尔坐标系下的点和路径转换成各关节运动变化。过去大都在示教过程中记下各点的关节坐标来绕过上述转换，对运动学求逆问题一般情况下还只能用数值法求解。计算速度慢，影响采样频率成为一个突出问题。低速运动时的轨迹跟踪精度通过设计控制器可以达到理想的效果，但高速运动时的轨迹跟踪精度始终没有得到很好的解决，一个很

重要的原因是受机器人频带的限制，高速运动时容易产生振动，跟踪曲线时，大曲率位置机器人响应慢。另外在轨迹不连续的情况下机器人跟踪能力受限，也主要是由于其频带决定。在不连续点附近需要很大的跟踪加速度，而机器人的频带很窄，只有几赫兹或十几赫兹，没有足够快的响应，因而造成大的轨迹误差甚至飞车。宏-微机器人可以作为一种解决方案，由于系统频带加宽，动态性能主要取决于微机器人的动态性能，微机器人可以设计实现快速精确调节，在完成预定运动的同时补偿宏机器人造成的误差。

柔性臂的轨迹跟踪控制已经有很多人研究。Asada 等人^[19]试图求解柔性臂的逆动力学问题，但是计算太复杂无法实现高速运动和精确实时控制。Yoshikawa 在文献[11、20]中利用宏-微系统进行柔性机械臂的轨迹跟踪。在文献[11]中，首先将柔性机械臂补偿的概念拓展到宏-微机器人系统中，通过修改微机器人初始设定的关节轨迹消除由于宏机械臂变形产生的跟踪误差。在文献[20]里，则考虑了当加速度变大时系统动力学影响及宏机械臂的形变，对宏机械臂采用关节空间控制，微机械臂采用工作空间控制，通过动力学求逆计算微机器人的控制力矩，简化了控制算法。

国内清华大学的杨唐文等^[21]基于机器人摄动理论和正、逆运动学理论，推导出利用微机械手的快速和精密运动消除柔性宏 / 微机械手误差的补偿原理。仿真结果表明采用微机器人补偿后，末端误差几乎为零，从而有效地提高机器人末端点的定位和跟踪作业精度。陈启军^[14]研究了不连续轨迹的跟踪，通过对轨迹进行分割：连续有界部分由宏机械臂进行跟踪，不连续部分由惯性小，频带宽的微机器人跟踪，（这时宏-微机器人系统变为两个非冗余系统）。实现了高速高精度末端轨迹控制。

另外，微机器人在不同位形时其继续运动的能力即补偿的能力有所不同，因而必须建立指标来衡量宏-微机器人系统的误差补偿能力。Yoshikawa 等基于宏-微机器人运动学提出了补偿性椭球指标^[11]，但是计算要用到柔性宏机器人变形的雅可比矩阵。在很多情况下，宏机器人的末端误差不是靠动力学计算得到，这时就无法使用补偿性椭球指标，所以使用上具有局限。建立合适的误差补偿指标对提高宏-微机器人误差补偿能力非常重要，

1.2.1.2 宏-微机器人动力学建模的研究 由前人的研究可知，利用微机器人快速的运动实时补偿柔性机器人末端变形误差，是提高柔性机器人精度的有效方法。在这种工作方式下，快速获得柔性臂的变形误差信息是实现误差有效补偿的基础。实际中应用的宏-微机器人一般都使用了应变片、光学变形测量设备等直接或间接获取柔性宏机器人的变形误差信息^[22]。虽然采用误差的直接测量有利于实时控制，但是考虑到设备造价、结构限制等因素，很多情况下只能用动力学方

法计算末端误差。

在柔性机器人建模方面人们已经用有限元方法^[23]、集中参数法^[24]、假设模态法^[26]进行研究。集中参数法模型粗略，精度较低；有限元方法的精度受到型函数选择、单元尺度划分等因素的影响，计算量较大；假设模态法用模态函数的线性组合描述杆件变形，方程规模较小。在宏-微机器人研究中，已经有人使用有限元方法等弹性机构学的研究方法描述宏机器人的柔性，但计算速度低成为限制误差补偿能力发挥的瓶颈。

传递矩阵法是对链状结构进行振动分析的有效工具，对于等直杆组成的结构，基于弹性体振动理论，根据动态响应的解析解导出的传递矩阵可以精确的描述杆件及结构的振动特性并得到动态响应的精确解。与有限元方法相比，传递矩阵法具有模型精确简明、计算量大大缩减，程序编制容易，应用范围广泛的特点。对宏-微机器人系统可以只用动力学的方法较快的得出宏机器人末端误差信息，这对误差的实时补偿是非常重要的。到目前为止，还没人使用传递矩阵法对宏-微机器人进行分析，课题将用这种方法对宏-微机器人动力学建模以及误差补偿进行研究。

1.2.2 利用小惯量、高频带特点的研究

机器人的末端有效惯量又叫“伪运动能量矩阵”(Pseudo kinetic energy matrix)或“操作空间惯量矩阵”。它基于操作空间运动方程，反映了机器人末端对外力响应的快捷程度，即加速性能，是衡量机器人运动灵活性的一个重要的动力学指标。频带宽度描述了控制系统的稳定性和动态性能，频带高对提高机器人控制性能有利。宏-微机器人最突出的特点即末端有效惯量小，这是人们通过实验得出的结论，小惯量同时相应带来了响应速度快，即系统频带高的特点。利用宏-微机器人的这些特点，人们对力控制及装配等特殊场合应用进行了研究，证明采用宏-微结构能够提高机器人的综合性能。

1.2.2.1 力控制

现在的机器人大多还仅仅采用位置信息进行控制。在机器人的很多作业场合（如：装配、切割、研磨）都需要与环境接触，这时必须控制机器人与环境之间的接触力。尽管力控制和顺应控制越来越重要，但是机器人尤其是柔性机器人的力控制在实际中成功应用至今屈指可数^[26]。

顺应控制本质上是力及位置的混合控制，例如切割玻璃的情况。阻抗控制也是力控制的一种。N.Hogen 提出阻抗控制的方法^[27]，通过位置和力的动态关系—阻抗，用位置调节实现力的调节，达到机器人顺应控制的目的，但实现阻抗控制要求精确的动力学和环境模型。有学者提出在对机器人末端操作器分别实施位置控制和力控制的顺应控制时，但引入力的负反馈后，系统在高频段出现响应不稳

定^[1]，而 H.C.Flower 则通过一直接驱动机器人的频带实验证了高频段力控制存在不稳定^[28]。目前机器人的频带一般较低（几或十几赫兹），通过控制策略拓宽系统频带已经很有限。关于刚性机器人位置/力复合控制的研究较多，而柔性机器人这方面的研究就少得多。原因是一方面柔性臂的响应较为缓慢，在末端同时实行力控制和位置控制比较困难，另外与环境作用的柔性臂的动力学方程较为复杂。

Marzewski 等对刚性宏-微系统的力控制了研究^[29]。系统由 5 自由度的 PUMA 机器人和 3 自由度的微机器人组成。宏-微机器人在高频带下的末端精确定位能力得到了体现。K.Nagai 等研究了刚性宏-微机器人的阻抗控制^[30]。考虑到动力学影响，由作用于宏机械手末端的惯性力来确定宏机械手的机械阻抗。结果表明：宏机器人依据外力中的低频成分运动，而微机器人依据其中的高频成分运动。针对宏机械臂为柔性的情况，T.Yoshikawa 等人^[31]利用“柔性宏/刚性微机器人”结构分别研究了柔性臂的位置/力复合控制问题，提出了准静态、动态的位置/力复合控制算法。对于柔性宏机器人只用了简单的 PD 反馈控制，而对微机械手则使用 M.H.Raibert 等最早提出的控制策略^[32]，将位置、力误差转换到关节空间，证明了无论宏-微机器人是刚性还是柔性，由于其末端有效惯量小、频带宽的特点，能够很好的实现力控制。

1.2.2.2 特殊应用 宏-微机器人末端有效惯量小的特点更多的用在精密加工等特殊场合，这时宏-微机器人一般采用第一种工作方式，即微机器人在宏机器人提供的大范围运动平台上进行操作。

机器人在实际工作中，由于臂杆的变形、关节结构的变形以及传动系统的变形以及多杆机械手的耦合、关节间的误差积累、构件的惯性与关节的摩擦力、码盘的分辨率和控制器品质的影响，会导致末端大的误差。通过宏-微机器人，就可以将提高加工精度的重点集中到微机械手上。微机器人可以加工的非常精密，采用独立的驱动方式，利用宏机器人作为支持平台，在扩大了运动范围的同时，实现精确的位置调节。T.Narikiyo 开发出了用于 μm 级精密作业的宏-微机器人^[33]。通过控制电子发射来进行金属表面处理。实验中宏机械手具有六个自由度，微机械手具有一个自由度。结果表明末端误差可以控制在 $8 \mu\text{m}$ 以内，满足 EDM 的要求，而去掉微机械手，末端误差大于 $200 \mu\text{m}$ ，无法满足要求。

国内同济大学的陈启军等人在从事这方面的研究，并研制出一个激光作业的宏-微机器人^[34]，通过实验证明了其具有相当的精度。其中宏机械手为直接驱动的两关节平面机械手，微机械手的核心是两个光学反射镜。机器人作业时通过控制反射镜使激光始终垂直于工作面。实验成功显示了宏-微系统在精密加工方面的优越性。

另外在装配作业上，宏-微机器人也具有重要的应用。装配操作是一个复杂的几何和力学过程，例如销孔装配作业，需要进行快速精细的操作以消除销孔偏差。利用微操作器惯量小、频带高，易于实现快速精细操作的特点，D.Y. Lee^[33]等人设计了利用宏-微机器人进行芯片安装的系统。由宏机器人实现粗略定位，微机器人实现细微运动以减小电子元件与电路板之间的冲击，在不同速度下与一般机器人比较优势明显。哈尔滨理工大学已经开发出销孔装配机器人^[17]，其宏操作器采用 PUMA 工业机器人，微操作器为机器人气动夹紧手抓。装配操作时，宏机器人负责零件的粗定位和下插运动，微机器人完成装配作业所需的快速，精细的顺应调整，两者的操作由控制器根据采集的力信息进行协调，该系统已成功应用于任意凸形零件的装配作业中。

由上述可知宏-微机器人末端有效惯量小的特点在力控制、装配等特殊场合得到了广泛的应用。80 年代后期，MIT 的 Sharon 等已经指出：当宏机器人的等效质量远大于微机器人的质量时（10 倍以上时），机器人的动态特性将主要取决于微机械手的动态特性。而 Stanford 大学的 Khatib 也指出宏-微机器人具有频带高、有效惯量小的优点，其有效惯量以微机器人的有效惯量为上界^[6]。但是，所有宏-微机器人末端有效惯量小的表述都是基于宏机器人为刚性的情形。后人尽管对柔性宏-微机器人进行研究时也利用了这个特点并在实践中得到了验证，但是并未得出具体的数学表达形式来说明，课题将对这个问题进行深入探讨。

1.2.3 宏-微机器人控制策略的研究

柔性臂的轨迹跟踪控制已经有很多人研究，如 Asada 等人^[19]试图求解柔性臂的逆动力学问题，但是计算太复杂无法实现高速运动和精确实时控制。对于柔性机器人的控制，已经有学者提出消除杆件变形和振动引起的末端误差的补偿控制策略。在这种方法里，一个附加的补偿量被加入到每个关节的控制量中，以调节各个关节的运动，达到消除柔性机器人末端误差的目的。这时柔性机器人的电机要响应两类截然不同的任务：一要完成正常的大范围的刚性运动，二要能够实现实时补偿末端误差的附加微动任务，因此对电机的性能要求很高，且可能损害柔性机器人的控制性能，造成不利影响，因而柔性臂的精确控制一直是个难以解决的问题。由于宏-微机器人都有冗余自由度，对“刚性宏/刚性微”结构的宏-微机器人，基本上都借用了冗余机器人的控制思想。而对“柔性宏/刚性微”结构的宏-微机器人，一般采用了补偿的思想，即由宏机器人完成大范围粗略运动，通过微机器人的快速灵活运动补偿前者的变形和运动误差。由于微机器人惯量小、频带高，并且可以采用特殊作动方式，使用宏-微机器人成为解决这个问题的一种思路。

Yoshikawa 在文献[11、20]中利用宏-微系统进行柔性机械臂的轨迹跟踪。他

首先提出了准静态补偿控制，对宏机器人、微机器人都采用简单的PD反馈控制。PD控制根据位置跟踪误差和速度跟踪误差乘以相应的静态增益确定控制量，虽然控制算法简单，但对其稳定性未作探讨。另外由于没有考虑到系统的动力学模型，其动态性能并不理想，加速度大时会产生较大的轨迹误差。而在文献[20]里，则考虑了当加速度变大时系统动力学影响。通过分解给定任务，宏机械臂采用关节空间控制，微机械臂采用工作空间控制，通过动力学求逆计算微机器人的控制力矩，动力学模型考虑宏机械臂的形变，简化了控制算法，得到了好的效果。他还提出了宏-微机器人的力控制、位移/力的复合控制策略^[7]。

W.Yim 在动力学补偿的基础上，提出了基于VSC (Variable Structure Control) 控制和预测技术的控制方法^[34]。VSC 的控制方法源于刚性微机器人的末端轨迹控制。对于柔性宏机器人，利用一个由柔性宏机械臂末端轨迹误差、杆件弹性变形以及宏机器人的输入力矩的最小二次函数而得到了预测控制法则。这样对宏机械手采用预测控制，微机械手采用动力学求逆计算关节力矩。结果表明，在闭环系统中成功实现了末端的实时轨迹控制并保证了稳定性。

稳定性是控制系统的重要特征，它描述初始条件下系统方程解是否具有收敛性。对于宏-微机器人这种多变量、非线性时变系统，构造李雅普诺夫函数，分析控制器的稳定性，对于宏、微机器人控制算法的设计是非常必要的。因此本文将对柔性臂控制策略的稳定性进行分析，并在此基础上对宏-微机器人的控制策略作初步探讨。

1.3 本文研究内容

由以上表述可以看出，国内外围绕宏-微机器人的三种工作方式，在提高柔性机器人工作精度；小惯量、高频带特点的应用；宏-微机器人控制方面进行的研究已为数不少，发表了大量的论文并建立了一些实际装置。从目前关于宏-微机器人的研究成果来看，在动力学建模与分析、柔性机器人末端惯量属性分析、宏-微机器人的误差补偿及控制等方面还值得继续深入研究。本文将弹性动力学的方法引入到柔性宏-微机器人领域，对这些问题进行了较为深入的研究。主要内容如下：

第2章 宏-微系统的建模与动力学分析。利用传递矩阵法和拉格朗日方程，首先建立了弹性动力学方程。对3R 柔性宏机器人，通过将末端误差等计算结果与岳士岗对比，证明了传递矩阵法在柔性机器人动力学分析中的有效性。然后在此基础上建立了3R 柔性/2R 刚性宏-微机器人模型并进行了数值仿真，通过关节轨迹规划，将微机器人等效成激振力，对比了集中质量等效与激振力等效的差异，求出了末端误差。

第3章 末端惯量特性分析及优化。基于宏-微机器人运动、动力学分析，首次从理论上推导出了末端有效惯量的数学表达式，证明了柔性宏-微系统机器人有效惯量以微机器人有效惯量为上界这个重要特点。由于第二章建模方法得出的动力学方程惯性矩阵中不包含微机器人惯量信息，在此又建立了1柔性/2刚性宏-微机器人系统，然后以此模型为例进行了数值仿真，通过对柔性、刚性宏-微机器人末端惯量上界值的对比，说明刚性宏-微机器人具有较小的末端有效惯量的上界值。利用宏-微系统的冗余性，优化关节运动可以进一步降低此上界值，文中对此也作了研究。

第4章 宏-微机器人末端误差补偿。首先分析了协调操作宏-微机器人的运动，提出了宏-微系统可补偿的几何条件及建立了衡量系统误差补偿能力大小的可补偿性指标。然后利用宏-微系统的冗余性，规划机器人关节运动，增大了误差补偿能力。最后对宏-微系统控制进行了初步研究，对宏、微机器人末端误差的补偿控制策略的稳定性进行了理论上的证明，并以此为基础建立了宏、微机器人各自的控制算法。

最后是全文总结，归纳总结了本文的工作，分析展望了今后的发展方向。

第2章 宏-微机器人的建模

2.1 引言

宏-微机器人具有末端有效惯量小、系统频带高、运动冗余性等优点，能够实现末端快速、精确运动，因而在航空航天、精密加工等领域得到广泛应用。宏机器人由于杆件一般较长而具有柔性，运动时的弹性振动引起末端误差，降低了运动精度。因此建立合理有效的动力学模型，对机器人动力学分析、设计、及控制研究具有重要的意义。

国内对宏-微机器人的研究开展较晚，直到九十年代末期同济大学的陈启军、王月娟等人注意到这种结构的特点^[12]并对宏-微机器人连续^[13]、不连续轨线控制^[14]，以及建立奇异摄动模型^[15]等进行了研究，是国内对宏-微机器人系统研究较为深入的学者。但他们对宏机械臂建立的系统模型均为刚性，其研究方向集中在刚性宏/刚性微机器人运动学上，没有涉及柔性臂及其动力学的情况。国外对宏-微机器人的研究多集中在控制领域，对宏机械臂是柔性臂的情况，考虑柔性等动力学因素进行系统研究的文献还不多，或者仅仅从控制角度作了一些简单修正。近年来已经有人使用弹性机构学研究中的有限元方法^[23]、假设模态法^[25]等描述宏机器人的柔性。

传递矩阵法^[35]是振动学上分析大型复杂结构振动特性的有效方法——子系统综合法的一种。传递矩阵法把一个具有链状结构的多自由度系统分解成一系列类似的、比较简单的子系统（单自由度系统或基本的弹性或质量元件），各子系统在彼此连接的端面上的广义力与广义位移用状态向量表示，而子系统一端到另一端的状态向量之间的关系可用传递矩阵来表示。传递矩阵法就是通过建立从一个未知的状态向量推算下一个状态向量的公式，从原系统的起点推算到终点，再根据边界条件即得系统的频率方程，从而解出系统的固有频率与振型。工程中常见的很多系统可视为由彼此相似的子系统串联而成的链状结构，如连续梁、船舶推进轴系、柴油发电机轴系、汽轮发电机轴系等，采用传递矩阵法进行分析计算是很方便和有效的。

宏-微机器人的一个重要应用就是利用微机器人快速的运动可以实时补偿宏机器人末端变形误差，提高轨迹跟踪的精度。在这种工作方式下，快速获得柔性臂的变形误差信息是实现误差有效补偿的基础。国内外应用的宏-微机器人一般都使用了应变片、光学变形测量设备等直接或间接获取柔性宏机器人的变形误差

信息^[22]。误差的外部直接测量虽比动力学计算快捷得多，但考虑到装置的安放、经济性等因素，以及张力计、加速计的噪声影响，仍然有必要寻找快速精确的动力学建模方法。传递矩阵法具有计算速度快的特点，对宏-微机器人系统可以只用动力学的方法较快的得出宏机器人末端误差信息，这对误差的实时补偿是非常重要的。有关传递矩阵法对柔性机器人建模的问题，除了天津理工学院的王子良^[36, 37]在几篇文献有过论述外还未见有其他人对此进行研究，但文献[36、37]里也没有给出算例或者是仿真结果。

在本章中将传递矩阵法和拉格朗日方程用于柔性机器人建模，首先对 3R 柔性宏机器人建立了弹性动力学方程，并将末端误差等计算结果与岳士岗对比，说明了传递矩阵法在柔性机器人分析中的有效性。通过将微机器人等效成激振力，建立了 3R 柔性/2R 刚性宏-微机器人模型并进行了数值仿真。

2.2 用传递矩阵法建立平面柔性机器人模型

2.2.1 传递矩阵法的基本概念与思想

传递矩阵法是把复杂的弹性系统分割为若干个元素，各元素之间用矩阵表示，再将这些矩阵相乘，求出表示整个系统特性的矩阵，利用两端的边界条件，得到系统的振动特性的方法。传递矩阵法是对链状结构进行振动分析的有效工具，可以采用分布质量模型和集中质量模型建立传递矩阵。对于等直杆组成的结构，基于弹性体振动理论，根据动态响应的解析解导出的传递矩阵可以精确的描述杆件及结构的振动特性并得到动态响应的精确解。有限元方法精度受到型函数选择、单元尺度划分等因素的影响，与有限元方法相比，传递矩阵法具有模型精确简明、计算量大大缩减，程序编制容易，应用范围广泛的特点，尤其适用于等直杆机器人 KED 分析，是一种很有特色的弹性动力学分析方法。

以下首先对传递矩阵法中的状态向量、场传递矩阵和点传递矩阵的概念作一介绍。

状态向量 把弹性系统分割成如图 2-1 所示的若干个基本元素作为考查对象，规定这些基本元素两端的物理状态的量，是广义的内力及对应的位移。在第 i 个元素的右端， i 点的位移和内力用列向量表示，就是 i 点的状态向量。

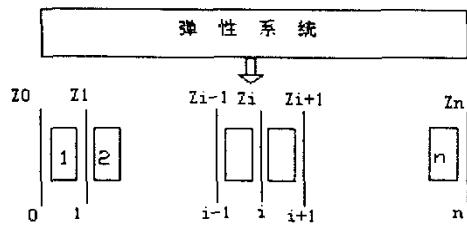


图 2-1 弹性系统的分割
Fig 2-1 Segmentation of flexible system

传递矩阵 分割点 $i-1$ 的状态量通过用方阵 T_i 描述的基本元素 i 的静特性和动特性，传递到 i 点的状态量，该关系可表示为

$$Z_i = T_i Z_{i-1} \quad (2-1)$$

$$T_i = P_i F_i \quad (2-2)$$

为把 $i-1$ 点的状态向量传递到 i 点的方阵 T_i ，称为传递矩阵。传递矩阵又可分为场传递矩阵 F_i 和点传递矩阵 P_i 。前者用具有长度的连续体表示基本元素，其两端 $i-1$ 点和 i 点的状态向量表示为

$$Z_i = F_i Z_{i-1} \quad (2-3)$$

点传递矩阵用没有长度的质点作为基本元素表示其左右两侧的传递特性，表示为

$$Z_i^R = P_i Z_i^L \quad (2-4)$$

式 (2-3)、式 (2-4) 称为传递方程式。有了各基本元素的传递方程式，则连接系统左端 (0 点) 和右端 (n 点) 的状态向量的传递矩阵为

$$Z_n = TZ_0 \quad (2-5)$$

式中 T ——系统传递矩阵， $T = T_n T_{n-1} \cdots T_2 T_1$

即整个系统的传递矩阵 T 由各元素的传递矩阵从头依次相乘到第 n 个即可。图 2-2 表示了两种传递矩阵的意义。在场传递矩阵里，分割点 $i-1$ 的状态量通过连续体传递到 i 点；点传递矩阵则将其两侧状态向量联系起来。

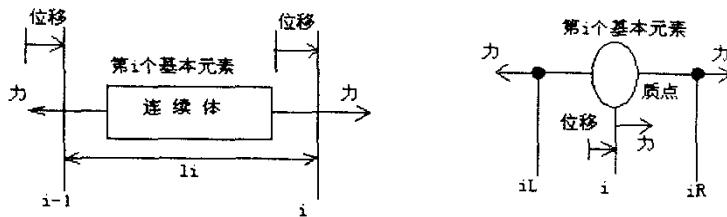


图 2-2 场传递矩阵和点传递矩阵
Fig 2-2 Field transfer matrix and point transfer matrix

2.2.2 机器人状态向量的传递

对于机器人系统，求解其 KED 响应就是求解杆系在刚体运动惯性力激励下的受迫振动响应。可以分为两步进行

(1) 从杆件的自由振动方程出发求解机构的固有频率和主振型，这相当于用有限元法建立模型并求解特征值和特征向量所完成的工作；

(2) 列出机构的运动微分方程，求解主坐标。对于分布质量模型，主振型阶数 r 为无穷大，一般只分析其几阶低频。

然后由振型叠加法即可求得杆的振动情况

$$\begin{bmatrix} u_i(x, t) \\ v_i(x, t) \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U_i^r(x) \\ V_i^r(x) \end{bmatrix} \cdot q_r(t) \quad (2-6)$$

式中 $u_i(x, t)$ —— 杆 i 在 t 时刻 x 截面的纵向变形，在杆 i 的局部坐标系内度量；

$U_i^r(x)$ —— 杆 i 纵向振动的第 r 阶主振型，在杆 i 的局部坐标系内度量；

$q_r(t)$ —— 第 r 阶主坐标

对于等直杆机器人，设杆长为 l ，横截面积为 S ，材料密度为 ρ ，弹性模量为 E 。等直杆的状态向量及在 OXY 坐标系内的振动如图 2-3。图 2-3 表示的是等直杆在 OXY 坐标系内的振动。 u 、 v 、 θ 分别表示杆上某截面的纵向位移、横向位移和转角， N 、 Q 、 M 分别代表该截面上的轴向力、剪切力和弯矩。它们都是简谐变化量的幅值，上标为截面代号， L 、 R 分别代表左右截面，箭头表示各量的正向。定义其状态矢量为 $Z = \{uv\theta MQN\}^T$ 。如果杆上某截面的状态矢量已知，那么该截面在振动中的位移和受力就是确定的。

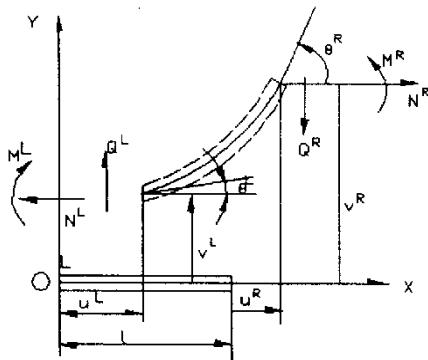


图 2-3 弹性杆状态向量
Fig 2-3 State vector of flexible link

首先考察纵向振动。由等直杆作自由振动的通解

$$u(x, t) = (A \sin \beta x + B \cos \beta x) \sin(\omega t + \varphi) \quad (2-7)$$

该截面的轴向力为

$$N(x, t) = EA \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = ES\beta(A \cos \beta x - B \sin \beta x) \sin \omega t \quad (2-8)$$

式中 A 、 B ——待定系数，且 φ 为零， $\beta = \omega \sqrt{\frac{E}{S}}$ 。

边界条件

左端： $x = 0$ $u(0, t) = u^L \sin \omega t$ $N(0, t) = N^L \sin \omega t$

右端： $x = l$ $u(l, t) = u^R \sin \omega t$ $N(l, t) = N^R \sin \omega t$

将左边界条件代入式 (2-7、2-8)，可得系数

$$A = \frac{N^L}{EA\beta}, \quad B = u^L \quad (2-9)$$

再代回式 (2-7、2-8)，由右边界条件得到杆件两端纵向参数的关系

$$\begin{Bmatrix} u \\ N \end{Bmatrix}^R = \begin{bmatrix} \cos \beta l & \frac{\sin \beta l}{EA\beta} \\ -EA\beta \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ N \end{Bmatrix}^L \quad (2-10)$$

其次考察杆的横向振动。由振动学理论，等直杆横向振动的振型函数为

$$v(x) = CS(kx) + DT(kx) + EU(kx) + FV(kx) \quad (2-11)$$

式中 C 、 D 、 E 、 F ——待定系数；

$S(kx), T(kx), U(kx), V(kx)$ —— 克雷洛夫函数;

J —— 杆截面惯性矩

由此可写出杆的转角 $\theta(x)$ 、弯矩 $M(x)$ 和切力 $Q(x)$ 的表达式

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = CkV(kx) + DkS(kx) + EkT(kx) + FkU(kx) \quad (2-12)$$

$$M(x) = EJ \frac{d\theta(x)}{dx} = k^2 EJ [CU(kx) + DV(kx) + ES(kx) + FT(kx)] \quad (2-13)$$

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = k^3 EJ [CT(kx) + DU(kx) + EV(kx) + FS(kx)] \quad (2-14)$$

和上面的步骤相同，如果弹性杆两端的状态向量 v^L, θ^L, M^L, Q^L 及 v^R, θ^R, M^R, Q^R 已知，利用左边界条件及转角 $\theta(x)$ 、弯矩 $M(x)$ 和切力 $Q(x)$ 的表达式，可确定待定系数

$$C = v^L \quad D = \frac{\theta^L}{k} \quad E = \frac{M^L}{k^2 EJ} \quad F = \frac{Q^L}{k^3 EJ} \quad (2-15)$$

再代回式 (2-11、2-12、2-13、2-14) 得

$$\begin{Bmatrix} v \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}^R = \begin{bmatrix} S(kl) & \frac{T(kl)}{k} & \frac{U(kl)}{k^2 EJ} & \frac{V(kl)}{k^3 EJ} \\ kV(kl) & S(kl) & \frac{T(kl)}{kEJ} & \frac{U(kl)}{k^2 EJ} \\ k^2 EJU(kl) & kEJV(kl) & S(kl) & \frac{T(kl)}{k} \\ k^3 EJT(kl) & k^2 EJU(kl) & kV(kl) & S(kl) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix}^L \quad (2-16)$$

式 (2-10)、式 (2-16) 可以统一为

$$Z^R = FZ^L \quad (2-17)$$

式中 F ——

$$\begin{bmatrix} \cos \beta l & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sin \beta l}{EA\beta} \\ 0 & S(kl) & \frac{T(kl)}{k} & \frac{U(kl)}{k^2 EJ} & \frac{V(kl)}{k^3 EJ} & 0 \\ 0 & kV(kl) & S(kl) & \frac{T(kl)}{kEJ} & \frac{U(kl)}{k^2 EJ} & 0 \\ 0 & k^2 EJU(kl) & kEJV(kl) & S(kl) & \frac{T(kl)}{k} & 0 \\ 0 & k^3 EJT(kl) & k^2 EJU(kl) & kV(kl) & S(kl) & 0 \\ -EA\beta \sin \beta l & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta l \end{bmatrix}$$

式 (2-17) 体现了杆两端状态矢量间的关系，称为传递方程式。它表示如果从杆左端输入一个状态矢量 $Z^L (uv\theta MQN)$ ，经等直杆传递，在杆右端会输出状

态矢量 $Z^R(uv\theta MQN)$ 。矩阵 F 称为等直杆的场传递矩阵，其元素决定于杆的尺寸、密度及弹性模量，并与振动频率有关，反映了等直杆的自振性能。

点传递矩阵给出了质点的动特性。机器人铰链多为平面单自由度铰链，并安装着驱动电机。在作振动分析时，须将铰链瞬时固接以维持来连机构的位姿。铰链左右的广义力及广义位移可由铰链从左侧连续的向右侧传递传递。如图 2-4。

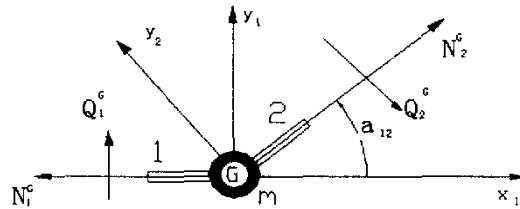


图 2-4 关节处的点传递关系
Fig 2-4 Point transfer relation at the joint

在机器人铰链 G 处，以铰链的刚体位置为原点建立坐标系如图 2-4，得到关系

$$Z_{i+1}^G = P^G Z_i^G \quad (2-18)$$

式中 P^G ——点传递矩阵，并且

$$P^G = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I\omega^2 & 1 & 0 & 0 \\ -m\omega^2 \sin \theta & m\omega^2 \cos \theta & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ -m\omega^2 \cos \theta & -m\omega^2 \sin \theta & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

式 (2-18) 体现了状态矢量($uv\theta MQN$)从 i 杆传入 G 点，再由 G 点传入 i+1 杆的传递关系， P^G 称为铰链 G 的点传递矩阵，其元素是铰链质量、转动惯量、相邻杆件夹角及振动频率的函数。

由上述过程可见，传递矩阵法的本质在于把完整机构划分为若干成链状连接的子结构，而反映子结构振动特性的线性方程组的个数大大减少。利用传递矩阵法，可把完整机构的大型线性方程组转化为一系列容易求解的相互关联的小型线性方程组。

2.3 三柔性杆平面机器人振动特性分析

2.3.1 传递矩阵法计算过程

传递矩阵法主要用在分析机构振动，但是应用于机器人振动分析还不多见，国内王子良等对这种方法进行了研究^[36, 37]。传递矩阵法应用到机器人与连杆机构的有所不同的是：对于连杆机构，其点传递矩阵无法在两杆间传递转角、转矩；而对于机器人操作机振动分析，需要将铰链瞬时固接以维持开链机构的位姿，称为“固接铰链”。这时的点传递矩阵不仅可以传递弹性位移 u, v 及其所对应的弹力 N, Q ，而且可以传递弹性角位移 θ 。

场传递矩阵描述了每个杆件的自由振动特性，点传递矩阵描述了运动副两侧杆件的弹性位移和力的传递关系。根据机器人结构呈链状的特点，将这些矩阵相乘即可得到描述整个系统振动特性的传递矩阵。利用边界条件可求得机构的固有频率和振型。用传递矩阵法进行机器人的振动分析，只需要进行阶次很低的行列式和矩阵运算，便于编制程序，节省计算工作量，易于实现机器人的实时控制。

应该说明的是：在建立宏-微机器人振动方程时，仅研究了系统的弹性和惯量的影响，没有考虑阻尼。这时各分点的状态量之间是同相位或反相位的，所以可以视为固有频率下的简谐振动，因为加速度可用本身的位移来表示，则在状态向量和传递矩阵按实数来处理。

分析柔性宏机器人由于弹性振动引起的末端误差主要考虑柔性杆的振动方向和第一阶振动频率。在柔性宏机器人无穷维振动模态中，其高阶振动频率会很快衰减，留下的低阶振动频率起着主要的作用，尤其是第一阶振动频率，也即柔性杆件的固有基本频率的振动幅值最大，发挥关键的影响^[38]。通过理论方法计算柔性杆第一阶振动的频率非常复杂，但使用传递矩阵法，可以较好的解决这个问题。

求解固有频率，首先应分析整个机构始末两端的边界条件，由齐次方程组有非零解的充要条件可得由传递矩阵中某些项所组成的行列式为零，它是以频率为未知数的超越方程，称为频率方程，它的根即为机构在此位置的固有频率。

求得机构某位置的固有频率 ω 以后，可以得到机构在该位置的固有振型。利用求解 ω 时的齐次方程组，令其中一个状态量为零，可解得另一状态量的相对值。机器人起始点的状态矢量的相对值 Z_1^L 确定以后，则可利用上述各传递矩阵很方便的得到各柔性杆起始点状态矢量 Z_2^L, Z_3^L 的相对值，进而利用杆的振型函数，可以求出柔性杆内任意点状态矢量的相对值。这些相对值描述了机器人结构

振动时各点变形与受力的相互比例关系。而变形的比例关系即为机构的振型，最后由振型叠加法，可以求出某时刻柔性杆上 x 截面处的横向和纵向变形。

图 2-5 说明了传递矩阵法分析柔性机器人的计算步骤

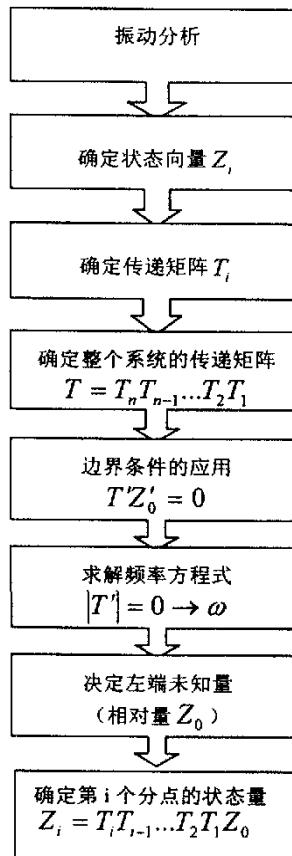


图 2-5 传递矩阵法的计算步骤
Fig 2-5 Calculation flow of transfer matrix method

2.3.2 三柔性杆机器人分析

柔性机器人是若干杆件由低副连接而成的链状结构。由于机器人杆件的柔性，在系统刚体运动的惯性力作用下，其杆件在沿轴线方向纵向振动的同时还在过轴运动平面内作横向振动。在振幅较小的情况下，杆件的振动是这些振动的线性叠加。空间机构与平面杆件的区别在于除了做纵向振动外，空间机构要在两个相互垂直的过轴平面内做横向振动，还要在过轴线的垂面内做扭转振动。

课题采用具有等直杆的机器人结构，采用质量分布模型，利用传递矩阵法建立 3R 柔性机器人的动力学方程，目的是为了与前人对比。分析过程中忽略了杆

的剪切振动，未计入纵向弯曲的影响。

坐标系如图 2-6。坐标系 (X_0, Y_0) 为固结于基座的惯性坐标系，坐标系 (X_i, Y_i) 为与第 i 杆相连的刚性坐标系，坐标系 (\hat{X}_i, \hat{Y}_i) 为与第 i 杆相连的柔性坐标系，关节角 θ_i 表示第 i 杆的刚体运动。设第 i 杆 x 处的弹性变形为 $v_i(x, t)$ ，杆长为 l_i 。

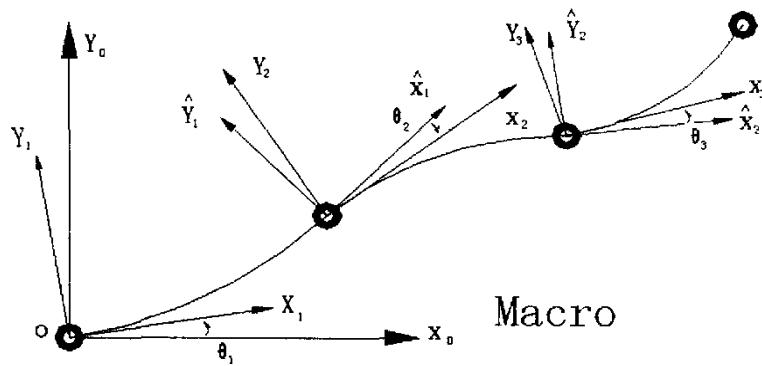


图 2-6 三柔性杆机器人简图
Fig 2-6 3R flexible manipulator

平面柔性机器人属于平面开链机构，其初始端按固定端处理，边界条件

$$u_1^L = v_1^L = \theta_1^L = 0 \quad (2-19)$$

即全部弹性位移均为零。杆 3 末端是自由端，其边界条件

$$N_3^R = Q_3^R = M_3^R = 0 \quad (2-20)$$

即全部弹性广义力均为零，按照杆件及其链接顺序可以得到三柔性杆机器人从始到终的状态矢量传递方程式

$$Z_3^R = F_3 P_3 F_2 P_2 F_1 Z_1^L = F Z_1^L \quad (2-21)$$

式中 F ——杆 i 的场传递矩阵；

P_i ——固结铰链 i 的点传递矩阵；

F ——各传递矩阵的乘积，此处为 6×6 矩阵

由式(2-21), 考虑到机器人的边界条件, 可以得到下面关系

$$\begin{Bmatrix} M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_3^R = \begin{bmatrix} T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ Q \\ N \end{Bmatrix}_1^L \quad (2-22)$$

根据齐次线性方程组有非零解的充分必要条件, 令其系数行列式为零, 即:

$$\begin{vmatrix} T_{44} & T_{45} & T_{46} \\ T_{54} & T_{55} & T_{56} \\ T_{64} & T_{65} & T_{66} \end{vmatrix} = 0 \quad (2-23)$$

此即柔性机器人固有频率方程, 解此方程可以得到各阶固有频率, 进而可求解对应的各阶振型。

2.3.3 柔性机器人动力学方程的建立

2.3.3.1 柔性机器人的动能、势能表达式 这里将用传递矩阵法和拉格朗日方程建立3R柔性机器人弹性动力学方程。

(1) 系统动能 机器人动能由杆件动能 T_1 、末端集中质量的平动动能 T_2 、末端集中质量的转动动能 T_3 组成。

$$T_1 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \rho A_i \left\{ \int \left[\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \int \left[\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \right\} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} M_r \dot{q}_r^2 = \frac{1}{2} M_1 \dot{q}_1^2(t) \quad (2-24)$$

式中 $M_1 = \sum_1^3 \rho A_i \int [V_i(x)]^2 + [U_i(x)]^2 dx$;

$V_i(x), U_i(x)$ ——杆 i 横向振动和纵向振动的第一阶主振型

末端集中质量的平动动能

$$T_2 = \sum_1^2 \frac{1}{2} m_i \{ [V_i(l_i)]^2 + [U_i(l_i)]^2 \} \dot{q}_r^2(t) = \frac{1}{2} M_2 \dot{q}_1^2(t) \quad (2-25)$$

式中 $M_2 = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} m_i \{ [V_i(l_i)]^2 + [U_i(l_i)]^2 \}$;

$V_i(l_i), U_i(l_i)$ ——杆 i 末端横向振动和纵向振动的第一阶主振型

末端集中质量的转动动能

$$T_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} I_i [\theta(l_i)]^2 \dot{q}_i^2(t) = \frac{1}{2} M_3 \dot{q}_1^2(t) \quad (2-26)$$

式中 $M_3 = \sum_{i=1}^3 I_i [\theta(l_i)]^2$;

I_i ——杆 i 末端集中转动惯量

系统总动能

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (2-27)$$

(2) 系统势能 平面机器人势能只有柔性机械臂的弹性势能 U ，主要是柔性杆拉压变形能和弯曲变形能。

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left\{ EJ_i \int_0^{l_i} \left[\frac{\partial^2 v_i(x, t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + EA_i \int_0^{l_i} \left[\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} \right]^2 dx \right\} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} q_r^2(t) K_r = \frac{1}{2} K q_1^2(t) \quad (2-28)$$

式中 $K = \sum_{i=1}^3 \left\{ EJ_i \int_0^{l_i} [V_i'(x)]^2 dx + EA_i \int_0^{l_i} [U_i'(x)]^2 dx \right\}$;

E ——材料弹性模量 (GP_a);

J_i, A_i ——杆 i 截面惯性矩 (m^4) 和截面积 (m^2)

(3) 系统惯性力做功

$$W = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} [f_i(x)v_i(x, t) + p_i(x)u_i(x, t)] dx + \sum_{i=1}^3 M_i(l_i)\theta_i(l_i)dx \quad (2-29)$$

改写为

$$W = \sum_1^3 q_i(t) \left\{ \int_0^l [f_i(x)V_i(x) + p_i(x)U_i(x)dx + M_i(l_i)\Phi(l_i)dx] \right\} = q_1(t)F \quad (2-30)$$

式中 $f_i(x)$ 、 $p_i(x)$ ——横向运动惯性力和纵向运动惯性力 (N)；

$M_i(x)$ ——惯性力矩 ($N \cdot m$)

$f_i(x)$ 、 $p_i(x)$ 、 $M_i(x)$ 三者均可由机器人刚体运动分析得出。将动能、势能及惯性力做功代入拉格朗日方程，可得三柔性杆机器人关于主坐标 q 的弹性动力学方程

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = F \quad (2-31)$$

2.3.3.2 方程求解 上面建立了关于主坐标的微分方程。前面的工作假设都基于系统做一种同步运动的假设，传递矩阵法不利于考虑阻尼的影响，这是它的不足之处。由于阻尼的作用将造成杆件内部及各杆件之间运动的不同步，无法分析传递效果。而在不考虑阻尼或阻尼较小的情况下，采用实振型叠加法求解振动问题非常有效。

由于机器人系统的动力学特性如频率、振型、刚体运动惯性力都与机器人的运动位置有关，式中的系数矩阵 M, K, F 都是机构位置（或时间）的函数，因而此方程是一个变系数的二阶微分方程，通常可以把时间离散化的方法来求解。即通过将运动时间划分为一定数目的小间隔，在每一小间隔中，系统的动力学性能视为不变的，这样在每个小的时间间隔中可以使用常系数微分方程的解法。

柔性机器人的振动是在刚体高速运动惯性力作用下的受迫振动，根据机械振动理论，在激振力为任意情形时，其位移响应与初始条件以及外加激振力产生的位移响应都有关，分别如下式的第一项和第二项所示

$$x = e^{-\alpha t} [x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \alpha x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t] + \frac{1}{m\omega_d} \int F(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau)d\tau \quad (2-32)$$

另外，由于划分的区间很小，因而激振力 $F(\tau)$ 在每个小区间段内也可认为是一个不变的值，这样对上式中积分 (Duhamel's integral) 的求解带来了很大的便利。振型坐标 q 及其导数 \dot{q} 可由式 (2-33) 求得

$$q(t_i) = \frac{1}{w'} \int_{t_{i-1}}^{t_i} F^i(\tau) \sin(w'(t_i - \tau))d\tau + q(t_{i-1}) \cos(w'\Delta t) + \frac{\dot{q}(t_{i-1})}{w'} \sin(w'\Delta t) \quad (2-33)$$

$$\dot{q}(t_i) = \int_{t_{i-1}}^t F'(\tau) \cos(w^i(t_i - \tau)) d\tau + q(t_{i-1})w^i \sin(w^i \Delta t) + \dot{q}(t_{i-1}) \cos(w^i \Delta t) \quad (2-34)$$

这样，如果知道了第*i-1*时刻的振型坐标及其导数 $q(t_{i-1}), \dot{q}(t_{i-1})$ ，则可由式(2-33)和式(2-34)求出第*i*时刻的振型坐标及其导数 $q(t_i), \dot{q}(t_i)$ 。然后，以每个时间间隔终点的振型坐标和速度作为下一个时间间隔的起始条件，逐个时间间隔计算，直到求出 t_i 时刻的响应 $q(t_i)$ 。然后再由振型叠加法即可求出以广义坐标表示的柔性机器人的位移响应。

2.3.4 数值仿真及分析

有关传递矩阵法对柔性机器人建模的问题，除了天津理工学院的王子良^[36]、^[37]在几篇文献有过论述外还未见有其他人对此进行研究。但文献[36、37]里也没有给出算例或者是仿真结果。因此，为了验证传递矩阵法在机器人研究中的作用，将上面对柔性机器人分析应用于三柔性杆机器人，并将结果（暂不涉及宏-微结构）与岳士岗博士学位论文^[38]中提到的平面三杆柔性机器人所得到的数值结果进行比较，证明传递矩阵方法用于柔性机器人振动分析的可行性。

岳士岗博士学位论文^[38]提到的平面三杆柔性机器人结构及坐标系如图2-6所示，其几何参数如下：

各杆材料均为铝，长度均为254mm，密度为2710Kgm⁻³。杆的横截面为正方形，边长5.08mm，弹性模量E为 7.10×10^{10} pa，剪切模量G为 2.60×10^{10} pa，重力加速度g为9.8ms⁻²，各根杆两端的集中质量均为40克。

机器人关节的运动规律

$$q_i = \begin{cases} \frac{\Delta_i}{2} [1 - \cos(\frac{2\pi t}{t_0})] & 0 \leq t \leq \frac{t_0}{2} \\ \Delta_i & t \geq \frac{t_0}{2} \end{cases} \quad (2-35)$$

式中 t_0 ——机器人的运动周期，此处取0.8秒；

Δ_i ——运动幅度，此处取30°

机器人关节运动的速度和加速度如图2-7所示，各关节最大速度发生在0.2秒处，最大加速度发生在0.4秒处，0.4秒后运动停止。然后由运动规律式(2-35)进行下面的研究。

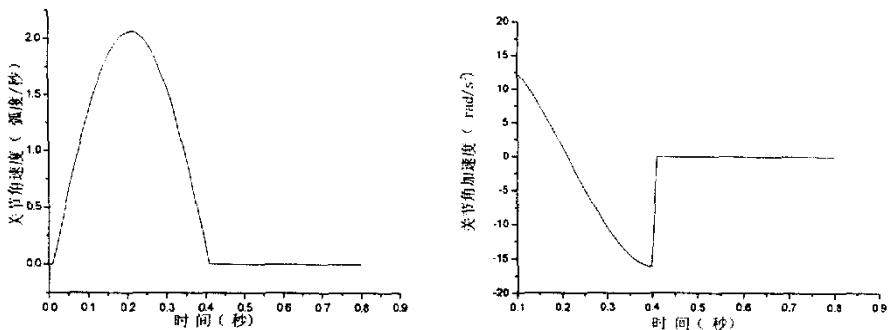


图 2-7 机器人关节速度、加速度
Fig 2-7 Joint velocity and acceleration of manipulator

传递矩阵法在振动学中主要用在用于分析复杂系统振动的固有频率上，其突出特点是求解固有频率快捷容易。将 3R 柔性机器人由头至尾建立传递关系以后，利用机器人两端边界条件得到机器人固有频率方程（式 2-23）。这是一个以固有频率为未知数的超越方程，方程的根即为关节各位置的固有频率，一般使用对分区间法求解。对上面三杆柔性机器人及运动规律（2-35），求出的一阶、二阶固有频率随时间的变化规律分别如图 2-8、图 2-9 所示。

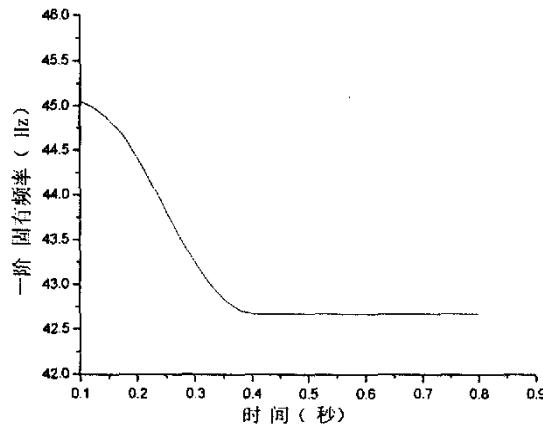


图 2-8 系统第一阶固有频率
Fig 2-8 The first order natural frequency

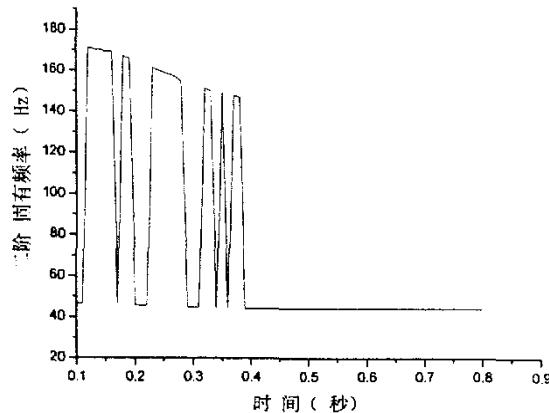


图 2-9 系统第二阶固有频率
Fig 2-9 The second order natural frequency

图 2-8 和图 2-9 表示在运动过程中系统的一阶、二阶固有频率的变化。二阶固有频率的变化非常剧烈，频率值要远大于第一阶固有频率。在 0.4 秒以后，机器人运动停止，刚性位形保持不动，所以这时系统保持此位形的固有频率在一个固定值上。

由图 2-3 可知，机器人柔性臂两端的状态向量通过柔性杆的场传递矩阵联系起来，其两端差值即体现了该柔性杆上发生的弹性变形。各杆相对其刚体位置的轴向变形及弹性转角分别如图 2-10、图 2-11 所示。

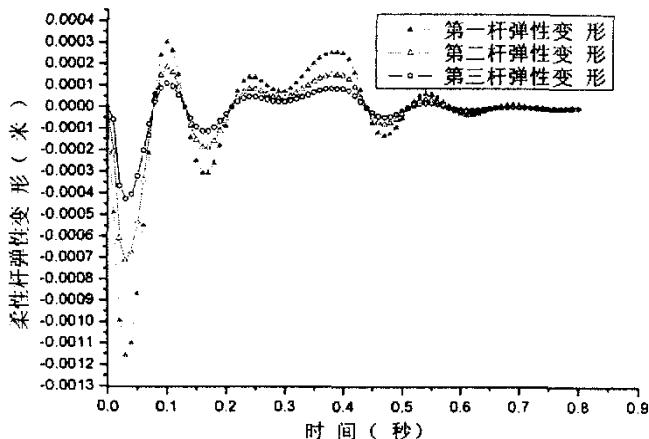


图 2-10 各柔性杆弹性变形
Fig 2-10 Elastic deformation in the axial direction

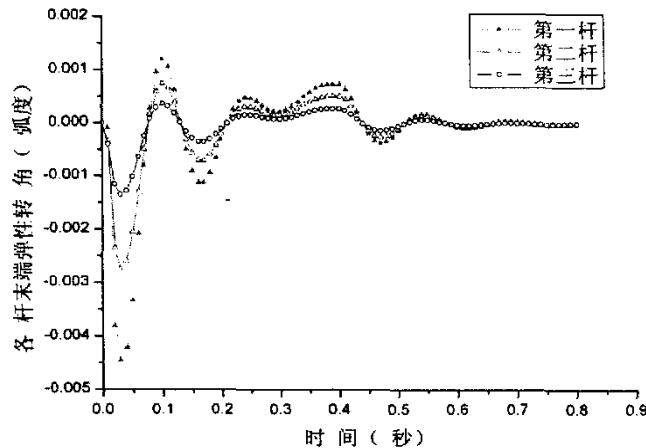


图 2-11 各杆末端的弹性转角
Fig 2-11 Angle deformation of the endpoint

由图 2-9、2-10 可以看出，各个杆的弹性变形都是同步进行的，这一点构成了传递矩阵法分析的基础。并且第一杆上发生的弹性变形量最大，这是因为作用上面的惯性力最大。

应力、应变的最大值都发生在关节处。传递矩阵法状态向量中既包含了杆件传递过程中的广义位移、又包括了广义力信息，因此利用传递矩阵法可以方便的分析杆件应力应变。将各杆关节处状态向量中的内力项 N 取出，由式 $\sigma = \frac{N}{A}$ 可得各杆关节处应力。然后由式 $\sigma = E\varepsilon$ 可得关节处应变，各杆关节处应变如图 2-12 所示。

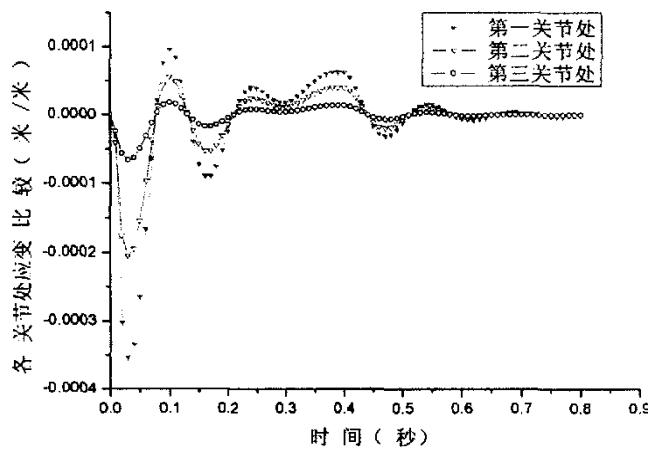


图 2-12 各关节处应变比较
Fig 2-12 Strain in the joints

根据图 2-6，柔性机器人末端点 $(X_f, Y_f)^T$ 在惯性系下表示为

$$X_f = L_1 \cos \theta_i - v_{1E} \sin \theta_i + L_2 \cos(\theta_i + \delta_i + \theta_2) - v_{2E} \sin(\theta_i + \delta_i + \theta_2) +$$

$$L_3 \cos(\theta_1 + \delta_1 + \theta_2 + \delta_2 + \theta_3) - v_{3E} \sin(\theta_1 + \delta_1 + \theta_2 + \delta_2 + \theta_3) \quad (2-36)$$

$$\begin{aligned} Y_f = L_1 \sin \theta_1 + v_{1E} \cos \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \delta_1 + \theta_2) + v_{2E} \cos(\theta_1 + \delta_1 + \theta_2) + \\ L_3 \sin(\theta_1 + \delta_1 + \theta_2 + \delta_2 + \theta_3) + v_{3E} \cos(\theta_1 + \delta_1 + \theta_2 + \delta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (2-37)$$

式中 v_{iE} —— 第 i 根柔性杆末端横向变形，此处忽略了各杆轴向变形对末端误差的影响。

δ_i —— 第 i 根柔性杆末端转角，这里的 v_{iE} 、 δ_i 分别对应着传递矩阵状态向量中的 v 、 θ 。

刚性机器人末端位置在惯性系下的表示为

$$X_r = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2-38)$$

$$Y_r = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2-39)$$

则末端误差

$$X_{Error} = X_f - X_r \quad (2-40)$$

$$Y_{Error} = Y_f - Y_r \quad (2-41)$$

由式 (2-40)、(2-41) 求出的由于各杆变形造成的机器人系统末端 X 方向、Y 方向误差分别如图 2-13、2-14 所示。

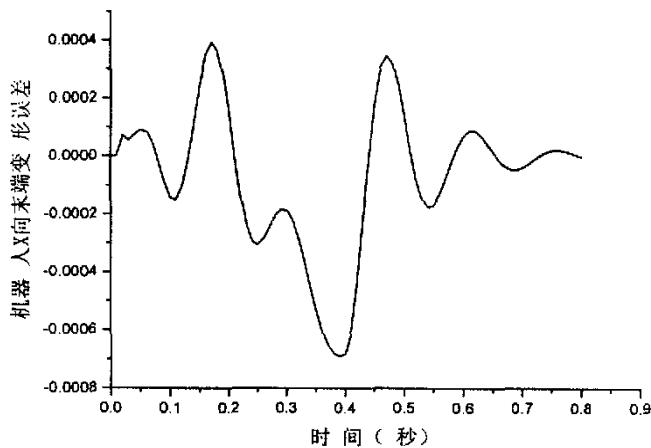


图 2-13 机器人末端的 X 向变形误差
Fig 2-13 Endpoint error in the X direction

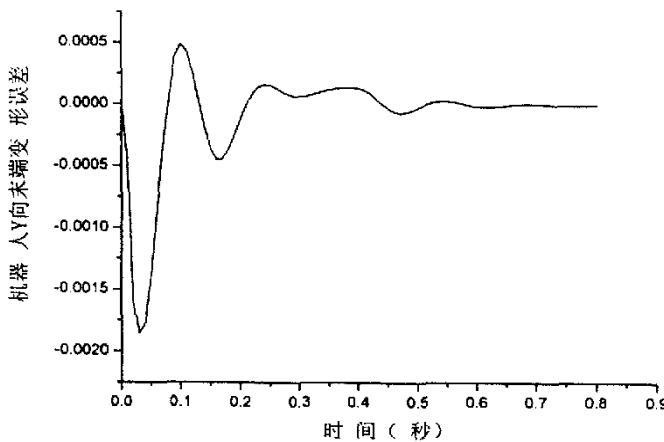


图 2-14 机器人末端的 Y 向误差

Fig 2-14 Endpoint error in the Y direction

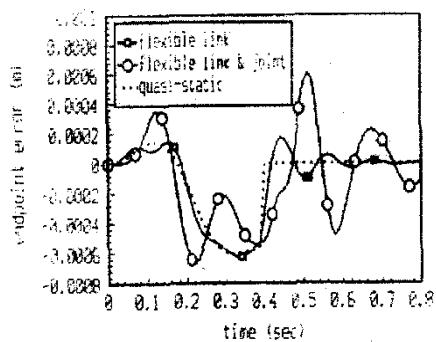


图2-9 柔性机器人x向末端变形误差比较

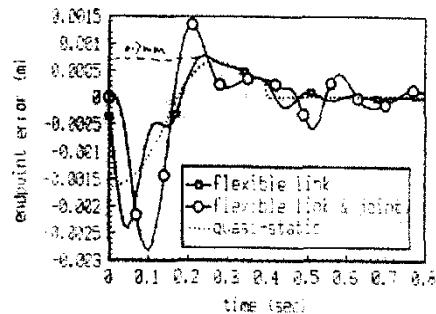


图2-10 柔性机器人y向末端变形误差比较

图 2-15 文献^[38]里 X、Y 向误差

Fig 2-15 Endpoint deformation in R[38]

图 2-15 所示为文献[39]中用有限元方法求出的末端误差。通过与图 2-13、2-14 比较，在惯性坐标系 Y 轴上的误差最大值都出现在 0.05 秒附近，幅值为 1~3 毫米，在 0.05、0.15、0.25 秒等处曲线均出现了拐点。因此可以认为传递矩阵法求出的末端误差无论是大小还是大致规律，与前人的结果是符合的，或者说接近的，从而证明了传递矩阵法的有效性。

用传递矩阵法求出各杆发生的弹性变形以后，除了用式 (2-40)、式 (2-41) 计算以外，还可以借助坐标系转换的观点求解机器人末端误差：

如文献[40]中所述：一个坐标系相对于另一个坐标系之间的位姿转换可以通过齐次变换矩阵来表示。上面已经按照 D—H 规则建立了三杆柔性宏机器人的坐标系统。在机器人手臂没有出现变形时，定义相邻两个坐标系 $i-1$ 和 i 之间的转换矩阵为 A_i ，则系统所有相邻坐标系之间的转换依次为： A_1 、 A_2 ，…， A_i ，… A_M 。当柔性杆件发生变形时，定义相邻两个杆件坐标系之间的转换依次为： A'_1 、

$A_1, \dots, A_i, \dots A_M$ 。

如果机器人坐标系统中某一坐标系发生了变化，它必然影响到后面所有坐标系的位姿。对于柔性宏-微机器人系统，在系统快速运动时，由于杆件柔性所引起的坐标系的变化不可忽视。柔性杆 i 在发生弹性变形之前其坐标系 $x_i o_i y_i$ 相对于惯性系 XOY 的变换为 A_i ，杆件变形以后，其坐标系 $x'_i o'_i y'_i$ 相对于惯性系的变换为 A'_i 。但是，一般来讲，柔性杆件的变形相对于其刚体运动来说还是很小，所以把因柔性杆件变形引起的坐标系的微运动称为摄动。下面利用机器人摄动理论，求出由于宏机器人杆件变形所引起的，在惯性系下表示的平移和旋转。

设柔性机器人杆件 i 在发生弹性变形前后其坐标系 $x'_i o'_i y'_i$ 相对于 $x_i o_i y_i$ 的微分变化：

$$\Delta_i = [d_i^T \quad \delta_i^T]^T = [dx_i \quad dy_i \quad dz_i \quad \delta x_i \quad \delta y_i \quad \delta z_i]^T \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad (2-42)$$

式中 $d_i = [dx_i \quad dy_i \quad dz_i]^T$ ，表示柔性杆件变化前后的微分位移；

$\delta_i = [\delta x_i \quad \delta y_i \quad \delta z_i]^T$ ，表示变形前后坐标系的微分旋转

在将杆 i 坐标系的微分变化 Δ_i 转化为惯性坐标系下的微分变化之前，先求出在刚性假设条件下杆 i 刚性坐标系 $x_i o_i y_i$ 相对惯性系的坐标系 XOY 的坐标转换 T_i ，由机器人运动学，容易求得

$$T_i = A_1 A_2 \cdots A_i \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad (2-43)$$

式中 A_i ——相邻两个坐标系 $i-1$ 和 i 之间的转换矩阵

为方便计算，采用姿态矢量 n_i 、 s_i 、 a_i 和位移矢量 p_i 描述上述变换

$$T_i = \begin{bmatrix} n_i & s_i & a_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{xi} & s_{xi} & a_{xi} & p_{xi} \\ n_{yi} & s_{yi} & a_{yi} & p_{yi} \\ n_{zi} & s_{zi} & a_{zi} & p_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad (2-44)$$

利用坐标系间微分运动矢量的转换关系，假设宏机器人其它柔性杆件不发生变形，将柔性杆件 i 在变形后坐标系 $x'_i o'_i y'_i$ 相对于变形前的坐标系 $x_i o_i y_i$ 的微分变化 Δ_i 等效转换成相对惯性系 XOY 的微分变化

$${}^o\Delta_i = \begin{bmatrix} {}^o d_i \\ {}^o \delta_i \end{bmatrix} = J_\Delta \Delta_i = J_\Delta \begin{bmatrix} d_i \\ \delta_i \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, M) \quad (2-45)$$

式中 ${}^o\Delta_i$ ——微分变化 Δ_i 在惯性系下引起的相对微分变化；

${}^o d_i$ ——微分变化 Δ_i 在惯性系下引起的微分平移,

$${}^o d_i = [{}^o dx_i \quad {}^o dy_i \quad {}^o dz_i]^T;$$

${}^o \delta_i$ ——微分变化 Δ_i 在惯性系下引起的微分旋转,

$${}^o \delta_i = [{}^o \delta x_i \quad {}^o \delta y_i \quad {}^o \delta z_i]^T$$

J_Δ ——坐标系间微分转换雅可比矩阵, 且有

$$\begin{aligned} J_\Delta &= \begin{bmatrix} {}^o R^T & -{}^o R^T S(P) \\ 0 & {}^o R^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_{xi} & n_{yi} & n_{zi} & p_{yi}n_{zi} - p_{zi}n_{yi} & p_{zi}n_{xi} - p_{xi}n_{zi} & p_{xi}n_{yi} - p_{yi}n_{xi} \\ s_{xi} & s_{yi} & s_{zi} & p_{yi}s_{zi} - p_{zi}s_{yi} & p_{zi}s_{xi} - p_{xi}s_{zi} & p_{xi}s_{yi} - p_{yi}s_{xi} \\ a_{xi} & a_{yi} & a_{zi} & p_{yi}a_{zi} - p_{zi}a_{yi} & p_{zi}a_{xi} - p_{xi}a_{zi} & p_{xi}a_{yi} - p_{yi}a_{xi} \\ 0 & 0 & 0 & n_{xi} & n_{yi} & n_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & s_{xi} & s_{yi} & s_{zi} \\ 0 & 0 & 0 & a_{xi} & a_{yi} & a_{zi} \end{bmatrix} \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (2-46) \end{aligned}$$

式中 R ——旋转矩阵, $R = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix}$;

S ——反对称矩阵, $S(p) = \begin{bmatrix} 0 & -p_x & p_y \\ p_x & 0 & -p_z \\ -p_y & p_z & 0 \end{bmatrix}$

将所有柔性杆件变形在宏-微系统惯性系下引起的微分变化 ${}^o \Delta_i$ 叠加, 即可得到由于柔性宏机器人杆件变形引起的柔性臂末端相对惯性坐标系 XOY 的总误差 ${}^o \Delta$

$${}^o \Delta = [{}^o dx \quad {}^o dy \quad {}^o dz \quad {}^o \delta x \quad {}^o \delta y \quad {}^o \delta z]^T = \sum_{i=1}^M {}^o \Delta_i \quad (2-47)$$

用上面的方法求得的三柔性杆宏机器人末端惯性误差如图 2-16 所示。

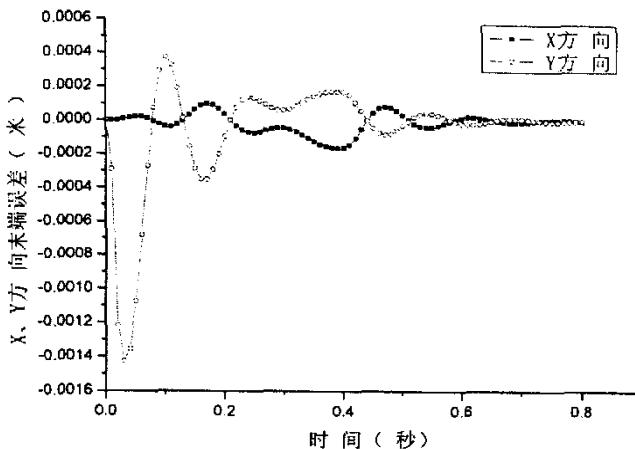


图 2-16 摆动法求 X、Y 向末端误差误差

Fig 2-16 Endpoint error in X and Y direction using perturbation method

由图 2-16 与图 2-13、图 2-14 的比较可以看出，无论是趋势还是各拐点处的值均非常接近，用上面两种计算末端误差的方法结果是相同的。

两种方法计算所耗时间分析如图 2-17 所示

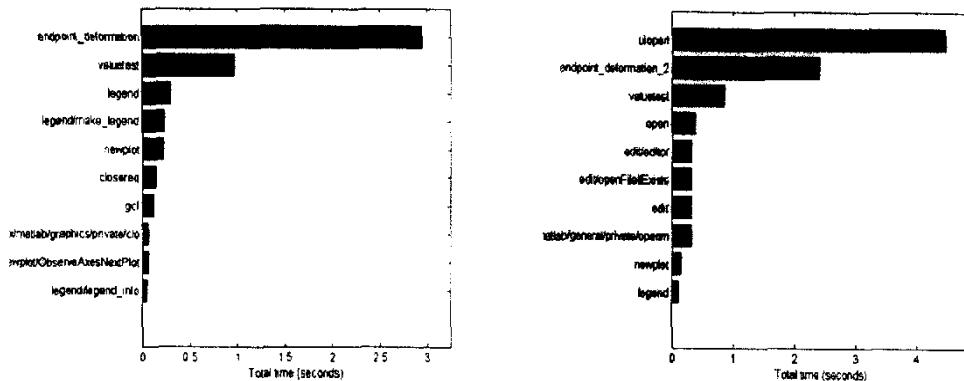


图 2-17 两种计算方法耗用的时间

Fig 2-17 Consumed caculation time using two different method

由图 2-17 可见，第一种方法计算 100 个采样点总用时 2.7 秒，第二种方法总用时 4.5 秒，第一种方法明显比使用坐标系变换的方法简单且快捷，因为后者涉及到了较多的三角正弦、余弦计算，消耗了计算时间。

2.4 宏-微机器人动力学建模

2.4.1 建模思路与过程

国内外已经有很多人对宏-微机器人进行研究。就柔性部分建模来说，国外

T.Yoshikawa^[20]采用弹簧-质量模型描述了杆件变形，K.Harada 等用有限元方法建立了二柔性杆的宏-微机器人系统^[41]。国内如陈启军等建立的宏机器人一般都是刚性臂^[13, 14, 15]，或者使用应变片、光学变形测量设备等直接或间接获取柔性宏机器人的变形误差信息^[22]。虽然采用误差的直接测量有利于实时控制，但是考虑到设备造价、结构限制等因素，很多情况下还只能用动力学方法计算末端误差。动力学方法计算一般耗时较多，不利于实时控制，因此研究柔性机器人变形的快速计算法很有意义。

在柔性机器人建模方面人们已经用有限元方法^[23]、集中参数法^[24]、假设模态法^[25]进行研究。集中参数法模型粗略，精度较低；有限元方法的精度受到型函数选择、单元尺度划分等因素的影响，计算量较大；假设模态法用模态函数的线性组合描述杆件变形，方程规模较小。在宏-微机器人研究中，利用弹性动力学的方法描述宏机器人的弹性变形，计算速度低成为限制微机器人补偿能力的瓶颈。由 2.3 小节的过程来看，传递矩阵法求解各柔性杆的弹性变形还是比较方便的，既然用传递矩阵法计算速度快，因此下面尝试用这种方法计算柔性杆的末端变形误差，作为微机器人补偿的目标。

宏-微机器人具有较多的自由度，在对多柔性杆宏-微机器人建立弹性动力学方程时，考虑到杆件较多，建立过程、形式非常麻烦，于是考虑将这个过程分解为微机器人等效、柔性宏机器人建模两个过程，从而降低研究对象的自由度数，简化动力学方程。这样处理，在使用传递矩阵法分析时非常方便，因为系统每增加一根柔性杆只是增加一个杆的场传递矩阵和一个关节的点传递矩阵而已，其频率方程只作相应修改即可，尤其适用于对多柔性杆进行分析。

对末端微机器人的等效一般文献语焉不详，国内杨唐文在微机器人相对质量很小的前提下，忽略微机器人自身运动，并将它作为附着在柔性臂末端的一个集中质量处理^[21]。虽然简化了分析过程，但由于微机器人要执行误差补偿任务，运动加速度一般较大，其惯性力也大，这样处理显然增大了误差。

考虑到上述不足，本文将微机器人的惯性力等效为反作用在柔性杆末端变化的激振力处理，以精确求出末端误差，然后按照式（2-29）、（2-30）所示的过程加入到方程的右侧，按照 2.3 小节的过程对其建立动力学方程。当然这种等效的后果就是建立的系统动力学方程惯性矩阵中不含有微机器人的惯量信息，不利于直接利用动力学方程建立宏-微机器人的控制算法。

这里要建立的模型是在上面三柔性杆机器人末端增加两根刚性杆构成的 3 柔性杆/2 刚性杆宏-微机器人系统，下面通过将微机器人分别等效为作用于宏机器人末端的集中质量和变化的激振力进行比较。

微机器人激振力由微机器人质心惯性力、质心惯性力在柔性臂末端引起的力矩以及微机器人惯性力矩共同组成。

$$F_s = -\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^2 m_i r_{si} \quad (2-48)$$

式中 m_i ——各杆件质量；

r_{si} ——各杆质心相对固定坐标系中的向量

$$M_{so} = \sum_{i=1}^n (r_{si} \times F_{si} + M_i) \quad (2-49)$$

式中 F_{si} ——杆件 i 的惯性力；

M_i ——杆件 i 的惯性力矩

对 3 柔性杆/2 刚性杆宏-微机器人的建模，按照上面的分析思路还是对柔性宏机器人的分析。这个过程与上面对三柔性杆机器人分析的过程相同，这里就不再重复。

2.4.2 数值仿真及分析

这里仿真所用的宏机器人几何参数为：各杆材料均为铝；密度为 2710Kg m^{-3} ；弹性模量 E 为 $7.10 \times 10^{10} \text{Pa}$ ，剪切模量 G 为 $2.60 \times 10^{10} \text{Pa}$ 。宏机器人杆长均为 $0.5m$ ；杆的横截面为正方形，边长 5.08mm ；各杆末端的集中质量均为 50 克。微机器几何参数为：两杆长均为 $0.25m$ ；杆端集中质量 20 克；材料、截面等参数与宏机器人相同。

宏-微机器人末端运动轨迹为直线 $y = 0.5x$ ，各关节初始位置为：

$$[\theta_M \quad \theta_m]^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\pi}{3} & \frac{2\pi}{3} & 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T ; \text{ 末端速度 } V = [V_x \quad V_y]^T \text{ 为 } [0.8 \quad 0.4]^T (\text{m/s})$$

2.4.2.1 宏-微机器人逆运动学 3 柔性杆/2 刚性杆宏-微机器人是一个多自由度冗余系统，由冗余度机器人的逆运动学，其速度、加速度运动反解为

$$\dot{\theta} = J^+ \dot{X} + (I - J^+ J) \dot{\Phi}$$

$$\ddot{\theta} = J^+ (\ddot{X} - J \dot{\theta}) + \ddot{\theta}_N \quad (2-50)$$

式中 J^+ ——机器人雅可比矩阵 J 的伪逆，并且

$$JJ^+J = J; \quad J^+JJ^+ = J^+; \quad (J^+J)^T = J^+J; \quad (JJ^+)^T = JJ^+$$

$\ddot{\theta}_N$ ——机器人雅可比矩阵 J 的零空间矢量

在下面的分析中，设 $\dot{\Phi} = 0, \ddot{\theta}_N = 0$ ，即在最小范数解下求解出关节速度、加速度 $\dot{\theta}_{Mm}, \ddot{\theta}_{Mm}$ ，保证所要求的终端运动。

图 2-18、2-19、2-20 表现了为保证末端运动路线，逆解出的宏-微机器人各关节的角度、速度、加速度运动规律。

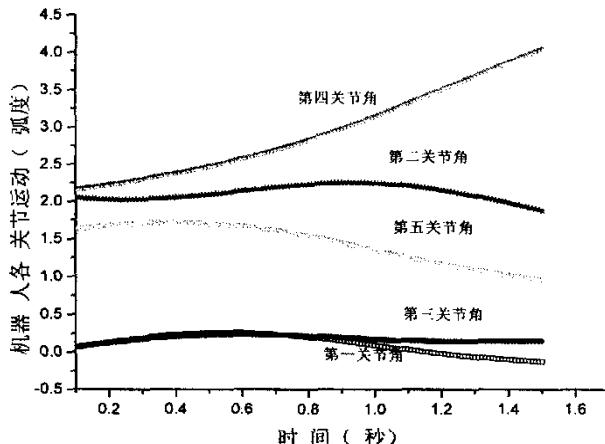


图 2-18 各关节运动
Fig 2-18 Angle of the joints

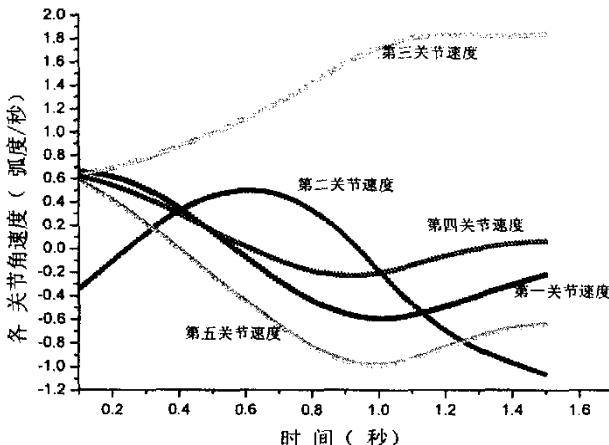


图 2-19 各关节角速度
Fig 2-19 Velocity of the joints

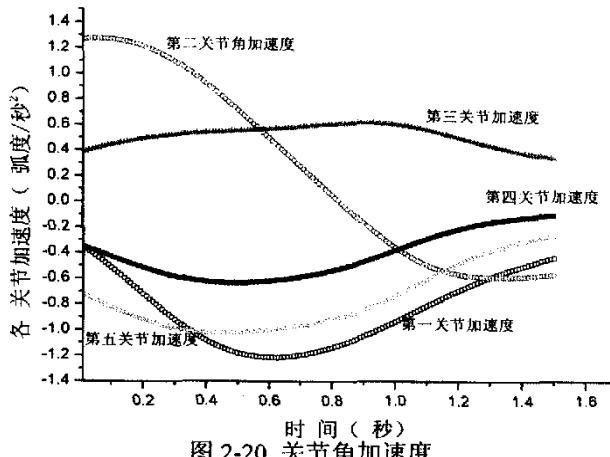


图 2-20 关节角加速度
Fig 2-20 Acceleration of the joints

2.4.2.2 宏机器人末端误差分析 图 2-21、2-22 是式 (2-48、2-49) 解出的微机器人惯性力和惯性力矩。图 2-23、图 2-24 所示为把微机器人当做在宏机器人末端作用一质量块处理 (相当于微机器人关节锁定时的情形) 和把微机器人当做宏机器人末端作用的变力处理 (微机器人运动惯性力) 在固定坐标系下引起的末端误差。

由图可见, 将微机器人作为变力处理和作为宏机器人末端集中质量引起的柔杆末端变形相比差别还是比较大的。因为微机器人除随着宏机器人末端运动外还有自身的运动, 微机器人的质心速度、加速度一般要大于宏机器人末端的速度、加速度。实际上在微机器人实施误差补偿时, 由于其运动变化快, 加速度大且运动不规则, 把它作为集中质量处理是不合理的。

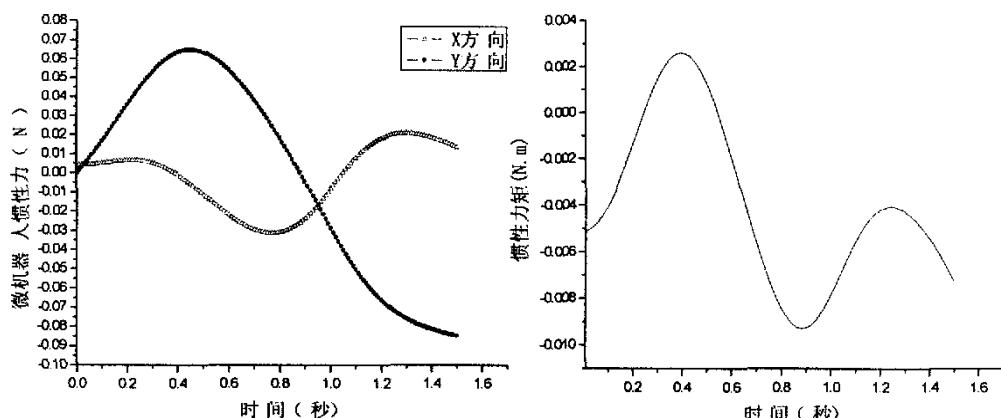


图 2-21 微机器人惯性力
Fig.2-21 Inertial force of the micro manipulator 图 2-22 微机器人惯性力矩
Fig.2-22 Inertial torque of the micro manipulator

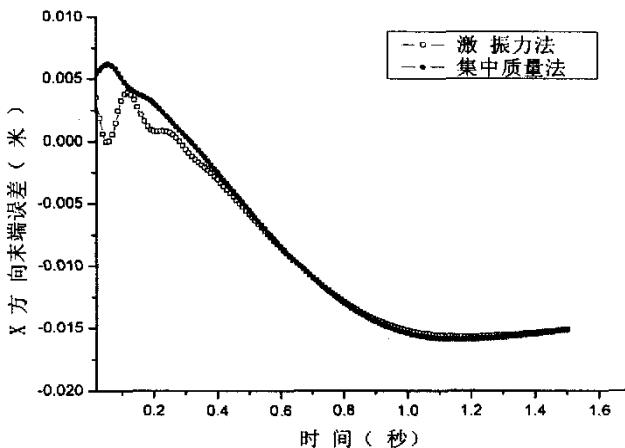


图 2-23 机器人 X 方向末端误差比较
Fig 2-23 Endpoint error calculated in X direction.

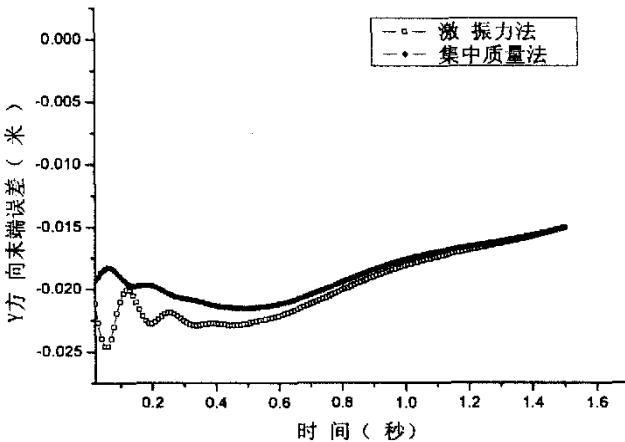


图 2-24 机器人 Y 方向末端误差比较
Fig 2-24 Endpoint error calculated in Y direction

传递矩阵法的最大优点就是分析多柔性杆机器人弹性变形信息方便快捷。像宏-微机器人这种自由度数目较多的多柔性杆机器人系统，将微机器人作上述处理可以很方便地进行动力学分析。

2.5 本章小结

在本章中，将传递矩阵法和拉格朗日方程用于柔性机器人建模，首先对 3R 柔性宏机器人建立了弹性动力学方程，并将频率、变形、末端误差等计算结果与前人对比，证明了传递矩阵法在柔性机器人分析中是方便、快捷的，这非常有利于微机器人的实时误差补偿。然后，在 3R 柔性臂末端增加二根刚性杆，构成宏-微机器人，并进行了数值仿真。通过对微机器人等效成激振力和等效为集中质量的比较，说明将微机器人等效为惯性力的处理是完全合理可行的。

第3章 柔性宏-微机器人末端有效惯量分析与优化

3.1 引言

宏-微机器人的主要特性之一即末端有效惯量小。当微机器人质量远小于宏机器人质量（小于 1/10）时，系统的动力学特性体现为微机器人的动力学特性。也就是说，如果微机器人的响应速度极快，则整个系统的响应速度会大大提高。由于机器人由末端执行操作，并与环境接触，从而更直接的描述了机器人的动力学性能，因此研究宏-微机器人系统，首先分析其末端有效惯量属性十分有必要。

末端有效惯量又叫“伪运动能量矩阵”（Pseudo kinetic energy matrix）或“操作空间惯量矩阵”。机器人动力学性能的很多指标都基于对雅可比矩阵的研究，但雅可比矩阵仅刻画了机构运动时速度的性能。末端有效惯量基于操作空间运动方程，反映了机器人末端对外力响应的快捷程度，即加速性能，是衡量其运动灵活性的一个重要的动力学指标。

对宏-微机器人的研究在国际上始于 80 年代后期。MIT 的 Sharon 等在 1984 年开始对刚性宏-微机器人系统进行了探讨^[1, 2, 3]。他们建立了弹簧-质量-阻尼模型，利用频率特性实验证明了宏-微机器人具有减小末端有效惯量、扩充系统频带的特点，并指出：当宏机械人的等效质量远大于微机械人的质量时（10 倍以上时），机器人的动态特性将主要取决于微机械手的动态特性。Stanford 大学的 Khatib^[6]指出宏-微机器人具有频带高、有效惯量小的优点，其有效惯量以微机器人的有效惯量为上界。但是，所有对宏-微机器人末端有效惯量特性的表述都是基于宏机器人为刚性的情形。尽管这个特点在以后很多人对柔性宏-微机器人进行研究时广泛引用，并在实践中得到了验证，但是并未得出具体的数学表达形式从理论上进行论证，以下将着重探讨这个问题。

本章对柔性宏-微机器人末端有效惯量进行了较为深入的研究。首次基于宏-微机器人运动、动力学分析，从理论上推导出了末端有效惯量的数学表达式，证明了柔性宏-微系统机器人有效惯量以微机器人有效惯量为上界这个重要特点。由于第二章将微机器人等效为激振力的处理方法，使得动力学方程质量矩阵中不含微机器人质量信息，所以对末端惯量的数值仿真之前对一柔性/二刚性杆结构的宏-微机器人建立了系统动力学方程。本章末端惯量的数值仿真，以及后面的误差补偿、宏-微机器人的控制策略都将以这个模型为基础。之后，利用宏-微机器人的冗余特性来规划机器人的关节运动，进一步降低了宏-微机器人系统末端

有效惯量的上界值。最后通过对柔性、刚性宏-微机器人末端惯量上界值的对比，说明刚性宏-微机器人具有较小的末端有效惯量的上界值，数值仿真也说明了这一点。

3.2 宏-微机器人的末端惯量的分析

宏-微机器人末端惯量是一个动力学性能指标，涉及到机器人运动的雅可比矩阵以及动力学方程中的质量矩阵，故首先对宏-微机器人的运动学、动力学进行分析。

3.2.1 宏-微机器人末端惯量的定义

对具有 n 个关节的串联型机器人，其关节空间运动方程为

$$A(q)\ddot{q} + b(\dot{q}, q) + g(q) = \tau \quad (3-1)$$

式中 q —— n 维关节坐标；

$A(q)$ ——关节空间惯性矩阵；

$b(\dot{q}, q)$ ——向心力、哥氏力矢量；

$g(q)$ ——重力项；

τ ——关节力矩矢量

对于冗余机器人系统，其末端惯量的动力学方程由下式描述^[43]

$$\Lambda(q)\ddot{X} + \mu(\dot{q}, q) + g(q) = F \quad (3-2)$$

式中 $\Lambda(q)$ ——操作空间的惯量矩阵；

$\mu(\dot{q}, q)$ ——为向心力、哥氏力矢量；

F ——操作空间广义力

$\Lambda(q)$ 即为机器人在操作空间的惯量矩阵，又叫“伪运动能量矩阵”(Pseudo kinetic energy matrix)或末端等效惯量。和机器人惯性矩阵一样，它也随机器人手臂的位姿而变化，表示了一定方位机器人末端的瞬时质量特性。

$$\Lambda^{-1}(q) = J(q)A^{-1}(q)J^T(q) \quad (3-3)$$

3.2.2 刚性、柔性宏-微机器人运动、动力学方程

宏-微机器人本质上还是串联型机器人。对于刚性宏-微机器人，其末端位置是宏、微机器人的关节位移 θ_M ($\in \Re^N$)、 θ_m ($\in \Re^L$) 的非线性函数

$$p = f(\theta_M, \theta_m) \quad (3-4)$$

微分得

$$\dot{p} = J_M \dot{\theta}_M + J_m \dot{\theta}_m = J \dot{q} \quad (3-5)$$

$$\ddot{p} = J[\ddot{\theta}_M^T, \ddot{\theta}_m^T]^T + J[\dot{\theta}_M^T, \dot{\theta}_m^T]^T \equiv J[\ddot{\theta}_M^T, \ddot{\theta}_m^T]^T + \alpha \quad (3-6)$$

式中 J —— f 对于 q 的 Jacobian 矩阵, $J \in \Re^{n \times (\lambda+\lambda)}$, $J = [J_M, J_m]$, $\dot{q} = [\dot{\theta}_M^T, \dot{\theta}_m^T]^T$;

J_M —— f 对于 θ_M 的 Jacobian 矩阵, $J_M \in \Re^{n \times \lambda}$;

J_m —— f 对于 θ_m 的 Jacobian 矩阵, $J_m \in \Re^{n \times \lambda}$

用拉格朗日方法得到宏-微机器人的动力学方程形式如下

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_M \\ \ddot{\theta}_m \end{bmatrix} + b(\dot{q}, q) = \tau - J^T F \quad (3-7)$$

对于柔性宏-微机器人, 与刚性不同的是其末端位置是宏、微机器人的关节位移 θ_M ($\in \Re^\lambda$)、 θ_m ($\in \Re^\lambda$) 及宏机器人杆件弹性变形矢量 e ($\in \Re^g$) 的非线性函数

$$p = f(\theta_M, \theta_m, e) \quad (3-8)$$

微分得

$$\dot{p} = J_M \dot{\theta}_M + J_m \dot{\theta}_m + J_e \dot{e} = J \dot{q} \quad (3-9)$$

$$\ddot{p} = J[\ddot{\theta}_M^T, \ddot{\theta}_m^T, \ddot{e}^T]^T + J[\dot{\theta}_M^T, \dot{\theta}_m^T, \dot{e}^T]^T \equiv J[\ddot{\theta}_M^T, \ddot{\theta}_m^T, \ddot{e}^T]^T + \alpha \quad (3-10)$$

式中 J —— f 对于 q 的 Jacobian 矩阵, $J \in \Re^{n \times (\lambda+\lambda+g)}$, $J = [J_M, J_m, J_e]$,

$$\dot{q} = [\dot{\theta}_M^T, \dot{\theta}_m^T, \dot{e}^T]^T;$$

J_e —— f 对于 e 的 Jacobian 矩阵, $J_e \in \Re^{n \times g}$

用拉格朗日方法得到宏-微机器人的动力学方程形式如下

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_M \\ \ddot{\theta}_m \\ \ddot{e} \end{bmatrix} + b(\dot{q}, q) = \tau - J^T F \quad (3-11)$$

各符号意义同式 (3-1)、(3-8)。

3.2.3 刚性宏-微机器人的末端惯量的计算与分析

刚性宏-微机器人的关节空间惯性矩阵 $A(q)$ 可以写成如下分块矩阵的形式

$$A(q) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

这是一个正定对称矩阵，为求逆方便，可将其分解为下面的形式

$$A(q) = \begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & \\ & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & \\ A_{22}^{-1}A_{12} & I \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

利用分块矩阵性质

$$\begin{bmatrix} I & \\ A & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & \\ -A & I \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

$$\begin{bmatrix} I & A \\ & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A \\ & I \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

$$\begin{bmatrix} A & \\ B & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

由式(3-3)，刚性宏-微机器人的末端有效惯量 Λ 为

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(q) &= J(q)A^{-1}(q)J^T(q) = \\ &[J_M \quad J_m] \cdot \begin{bmatrix} I & \\ -A_{22}^{-1}A_{12} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & \\ & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_M^T \\ J_m^T \end{bmatrix} \\ &= J_m A_{22}^{-1}(q) J_m^T + h \end{aligned} \quad (3-17)$$

式中 $h = (J_M - J_m A_{22}^{-1}A_{21})(A_{11} - A_{12}^T A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}(J_M - J_m A_{22}^{-1}A_{21})^T$

由式(3-17)可见

$$\Lambda^{-1}(q) = \Lambda_m^{-1}(q) + h \quad (3-18)$$

得出末端等效惯量的形式后，用二次型

$$U = \frac{1}{2} x^T \Lambda(q) x \quad (3-19)$$

表示机器人工作空间下的动能。

式中 x —— 表示末端 x, y 方向的速度, $x = [\dot{x} \quad \dot{y}]^T$

作为平动动能, 式 (3-19) 只能是 $U = \lambda_x \dot{x}^2 + \lambda_y \dot{y}^2$ 的形式, 所以对末端惯量大小的衡量等效于其特征值 $\lambda(\cdot)$ 大小的比较。由正定矩阵的定义及性质

(1) 同维数正定矩阵的代数和、差仍然是正定矩阵;

(2) 若矩阵 A 正定, 则 $BA^T B$ 也正定

容易证得式 (3-17) 中 $\Lambda(q)$ 、 $\Lambda_m(q)$ 、 h 均正定, 再由矩阵特征值性质及式 (3-18) 可得

$$\lambda(\Lambda^{-1}(q)) \geq \lambda(\Lambda_m^{-1}(q)) \quad (3-20)$$

也即

$$\lambda(\Lambda(q)) \leq \lambda(\Lambda_m(q)) \quad (3-21)$$

上式证明了刚性宏-微机器人末端有效惯量以 $\Lambda_m(q)$ 为上界。

3.2.4 柔性宏-微机器人末端惯量的计算与分析

对于柔性宏-微机器人, 证明过程与上面刚性情况类似。将机器人关节空间惯性矩阵 $A(q)$ 写成分块矩阵的形式

$$A(q) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

式中 —— $A_{i,j}$ 为系统质量矩阵中相应位置元素, $A_{11} \in \Re^{\lambda \times \lambda}$, $A_{12} \in \Re^{\lambda \times \lambda}$,

$$A_{13} \in \Re^{\lambda \times g}, \quad A_{22} \in \Re^{\lambda \times \lambda}, \quad A_{33} \in \Re^{g \times g}$$

$A(q)$ 为正定对称阵, 可以分解为

$$A(q) = \begin{bmatrix} I & (A_{12} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{32})W^{-1} & A_{13}A_{33}^{-1} \\ & I & A_{23}A_{33}^{-1} \\ & & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} * & & \\ & W & \\ & & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & & \\ W^{-1}(A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}) & I & \\ & A_{33}^{-1}A_{31} & A_{33}^{-1}A_{32} \\ & & I \end{bmatrix}$$

(3-23)

式中 $W = A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}$;

$$* = A_{11} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{31} - (A_{12} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{32})W^{-1}(A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31})$$

利用分块矩阵性质

$$\begin{bmatrix} I & A & B \\ & I & C \\ & & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A & AC - B \\ & I & -C \\ & & I \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

$$\begin{bmatrix} I & & \\ A & I & \\ B & C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & & \\ -A & I & \\ CA - B & -C & I \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

由式(3-3), 柔性宏-微机器人系统末端有效惯量的逆阵 $\Lambda^{-1}(q)$ 为

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(q) &= J(q)A^{-1}(q)J^T(q) = \\ &[J_M \quad J_m \quad J_e] \cdot \begin{bmatrix} I & & \\ & -W^{-1}(A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}) & I \\ & A_{33}^{-1}(A_{32}W^{-1}(A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}) - A_{31}) & -A_{33}^{-1}A_{32} & I \end{bmatrix} \cdot \\ &\begin{bmatrix} *^{-1} & & \\ W^{-1} & & \\ & A_{33}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & -(A_{12} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{23})W^{-1} & (A_{12} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{32})W^{-1}A_{23}A_{33}^{-1} - A_{13}A_{33}^{-1} \\ & I & -A_{23}A_{33}^{-1} \\ & & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_M^T \\ J_m^T \\ J_e^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-26)$$

式(3-26)经展开整理, 得

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(q) &= (J_m W^{-1} J_m^T + J_e A_{33}^{-1} J_e^T) + [J_M - J_m W^{-1}(A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}) \\ &\quad + J_e A_{33}^{-1}(A_{23}W^{-1}(A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}) - A_{31})] \cdot [*]^{-1} \cdot \\ &\quad [J_M - J_m W^{-1}(A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}) + J_e A_{33}^{-1}(A_{23}W^{-1}(A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}) - A_{31})]^T \end{aligned} \quad (3-27)$$

简写为

$$\Lambda^{-1}(q) = \Lambda_{m,e}^{-1} + h \quad (3-28)$$

式中 $\Lambda_{m,e}^{-1}$ ——与微机器人及弹性变形有关的惯量项，且

$$\Lambda_{m,e}^{-1} = (J_m W^{-1} J_m^T + J_e A_{33}^{-1} J_e^T) \quad (3-29)$$

$$h = [J_M - J_m W^{-1} (A_{21} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{31}) + J_e A_{33}^{-1} (A_{23} W^{-1} (A_{21} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{31}) - A_{31})] \cdot [*]^{-1}.$$

$$[J_M - J_m W^{-1} (A_{21} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{31}) + J_e A_{33}^{-1} (A_{23} W^{-1} (A_{21} - A_{23} A_{33}^{-1} A_{31}) - A_{31})]^T$$

(3-30)

对末端惯量大小的衡量等效于其特征值 $\lambda(\cdot)$ 大小的比较。由正定矩阵的定义容易证得 $\Lambda(q)$ 、 $\Lambda_{m,e}$ 、 h 均正定，再由矩阵特征值性质 (3-24) 及式 (3-28) 可得

$$\lambda(\Lambda^{-1}(q)) \geq \lambda(\Lambda_{m,e}^{-1}(q)) \quad (3-31)$$

也即

$$\lambda(\Lambda(q)) \leq \lambda(\Lambda_{m,e}(q)) \quad (3-32)$$

上式即证明了柔性宏-微机器人末端有效惯量以 $\Lambda_{m,e}(q)$ 为上界。

由上面的证明过程可以看出：无论柔性还是刚性宏-微机器人，其末端有效惯量上界值都可以用通用形式 (式 3-28) 来表达。宏机器人为刚性时可以看作宏机器人为柔性时的一种特殊情形，即

$$e = 0, \quad W = A_{22}, \quad J_e = 0 \quad (3-33)$$

代入柔性宏-微机器人末端惯量逆阵的表达式得

$$\Lambda_{m,e}^{-1} = \Lambda_m^{-1} = J_m A^{-1} J_m^T \quad (3-34)$$

代入 (3-32) 式可得

$$\lambda(\Lambda(q)) \leq \lambda(J_m^{-T} A_{22} J_m^{-1}) \quad (3-35)$$

式 (3-35) 说明刚性宏-微机器人有效惯量以微机器人的有效惯量为上界，这与 Khatib 做出的理论分析^[4]是一致的。另外，由式 (3-32) 可以看出，柔性宏-微机器人的末端有效惯量仍然有减小末端惯量的特性，但是相对于刚性机器人系统，末端有效惯量不再仅以微机器人的有效惯量为上界，还与宏机器人的弹性变形有关。由于宏-微机器人的末端惯量决定于系统构件质量、转动惯量、结构参数、运动状态等，因此对柔性宏-微机器人，在考虑了杆件变形以后，其形式必然有所变化。

其实在宏-微机器人文献里频频提到的末端有效惯量很早就有人研究，H.Asada 在文献[44]就曾提出利用广义惯性椭球 GIE 来评定机器人的动力学特征。它实质上是利用末端有效惯量矩阵的特征值来度量操作臂在各个笛卡尔方向上的加速特性。

用二次型方程

$$x^T \Lambda(q) x = 1 \quad (3-36)$$

表示 n 维空间的一个椭球，称为广义惯性椭球。其主轴长度等于末端惯量矩阵 $\Lambda(q)$ 特征值的平方根。广义惯性椭球越接近于球，体积越小，则动力学性能越好。

对于柔性宏-微机器人，其末端有效惯量可以进一步以下式表示其上界值（证明方法与上面相同）

$$\lambda(\Lambda(q)) \leq \lambda(J_e^{-T} A_{33} J_e^{-1}) \quad (3-37)$$

上式即为柔性宏-微机器人末端有效惯量上界值。相对于刚性宏-微机器人上界值（式 3-21），这两个式子的大小关系如何呢？下面通过数值仿真对这个问题做进一步的研究。

3.3 基于末端惯量的数值仿真与运动规划

3.3.1 建立 1 柔性/2 刚性机器人动力学方程

第二章中将微机器人等效为激振力的处理方法尽管方便，但由此推导出的动力学方程质量矩阵中不含有微机器人的质量信息，不利于对宏-微系统作深入的研究，例如后面末端惯量的分析、误差补偿以及建立宏-微机器人的控制策略等。为简单起见，本文采用 1 柔性杆/2 刚性杆宏-微机器人，这种结构已经具有宏-微系统特征：冗余度和宏-微结构，虽然结构简单，对其研究是具有一般意义的。

建立动力学方程时用到下面的假设：

- (1) 由于宏机器人杆件质量相对较大，因此忽略其末端关节等质量。
- (2) 由于微机器人补偿运动速度较快，加速度大，因此微机器人只记入末端集中质量，忽略其细小杆件质量。
- (3) 宏机器人只计入杆件横向变形及转角，不计入纵向变形及其影响。

下面利用传递矩阵法和拉格朗日方程建立 1 柔性/2 刚性的宏-微机器人动力学方程，对柔性宏机器人的分析过程与第二章对 3R 柔性机器人的分析相同。

由上面的假设，机器人的动能 T 为柔性杆动能及微机器人集中质量的动能

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \dot{r}^T \dot{r} \rho dr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{p}_i^T \dot{p}_i \quad (3-38)$$

机器人的势能 U 为柔性宏机器人拉压变形能及弯曲变形能

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x)dx}{2EI} + \int_0^l \frac{N^2(x)dx}{2EA} = \frac{1}{2} EI \int_0^l [\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}]^2 dx + \frac{1}{2} EA \int_0^l [\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}]^2 dx \quad (3-39)$$

式中 r —— 柔性杆上微元在惯性坐标系下的位置矢量；

p —— 微机器人杆件末端集中质量位置矢量；

u 、 v —— 柔性杆上微元的纵向和横向变形

由拉格朗日方程

$$L = T - U \quad (3-40)$$

$$Q_j = \frac{d}{dt} (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \quad (3-41)$$

整理出整个宏-微机器人系统的动力学方程

$$M \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_M \\ \ddot{\theta}_m \\ \ddot{e} \end{bmatrix} + h = \begin{bmatrix} E_\wedge \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tau_M + \begin{bmatrix} 0 \\ E_\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \tau_m \quad (3-42)$$

式中 \wedge 、 λ —— 宏、微机器人自由度；

e —— 宏机器人弹性变形向量；

τ_M 、 τ_m —— 分别为宏、微机器人输入关节力矩；

E_i —— $i \times i$ 的单位矩阵；

h —— 包含向心力、哥氏力的非线性项

质量矩阵 M 及 h 的形式见附录。在下面对末端惯量的优化及仿真，以及在下一章中宏-微机器人误差补偿、控制策略的建立，都将基于这个模型开展。

3.3.2 运动规划策略

利用宏-微系统的冗余特性，可以对末端惯量进行优化，使其运动过程中的上界值更小。对于冗余度机器人，其速度、加速度反解可由雅可比矩阵的零空间向量及雅可比矩阵的广义逆得到。

$$\dot{q} = J^+ \dot{X} + (I - J^+ J) \dot{\Phi} \quad (3-43)$$

$$\ddot{q} = J^+ (\ddot{X} - J \dot{q}) + (I - J^+ J) \ddot{\Phi} = J^+ (\ddot{X} - J \dot{q}) + \ddot{q}_N \quad (3-44)$$

式中 J^+ ——雅可比矩阵的伪逆；

Φ 、 \ddot{q}_N ——零空间矢量

零空间矢量是机器人连杆间的自身运动，不影响末端的运动。由于各惯量项都与臂杆位置 θ_i 有关，使得利用自运动优化末端惯量成为可能。对于刚性宏-微机器人其末端有效惯量以 $\Lambda_m^{-1}(q) = J_m A_{22}^{-1}(q) J_m^T$ 为上界，柔性宏-微机器人末端有效惯量以 $\Lambda_{m,e}(q)$ 为上界。优化策略以 X 方向上特征值最大为优化目标，即以 λ_k 规划关节路径。

因为 $\Lambda_m^{-1}(q)$ 正定，所以其特征值均正，即

$$\begin{aligned} \text{Min } & \lambda_k \\ \text{s.t. } & \dot{X} = J(q)\dot{q} \end{aligned} \quad (3-45)$$

Matlab 最优化工具箱中提供了一个优化函数 fmincon，非常利于求解非线性约束下的最优化问题^[45]。该函数的调用格式为

$$[x, fopt, key, c] = fmincon(F, x_0, A, B, A_{eq}, B_{eq}, x_m, x_M, Cfun, OPT) \quad (3-46)$$

式中 x ——优化变量，此即各关节角；

$fopt$ ——目标函数优化值；

key ——函数返回的条件；

c 、 F ——附加信息和目标函数；

x_0 、 x_m 、 x_M ——初始搜索点和优化变量 x 的上下界；

A, B, A_{eq}, B_{eq} ——线性等式 $A_{eq}x = B_{eq}$ 、线性不等式 $Ax \leq B$ 约束条件；

$Cfun$ ——非线性约束条件；

OPT ——为控制选项

利用这个优化函数，可以求出线性、非线性约束条件下非线性函数的最小值。

3.3.3 数值仿真与分析

这里仿真所用的宏-微机器人为 1 柔性/2 刚性机器人，刚性机器人使用几何参数相同的系统，设其弹性变形为零。利用上面所推导的公式 (3-21)、(3-37)，以宏-微机器人末端操作空间 x 方向特征值为例进行比较其大小：

设定机器人末端运动规律为直线 $y = 0.5x$ ；

速度: $\dot{x} = 0.5m/s$, $\dot{y} = 0.25m/s$, 运行时间 1 秒;

关节初始位置: $\theta_M = -\pi/2$, $\theta_{m1} = \theta_{m2} = \pi/2$;

杆长: $L_M = 1m$ 、 $L_{m1} = L_{m2} = 0.25m$

优化策略以 X 方向上特征值最大为优化目标, 即以 λ_k 规划关节路径, 约束条件为宏-微机器人末端轨迹, 直线 $y = 0.5x$ 。

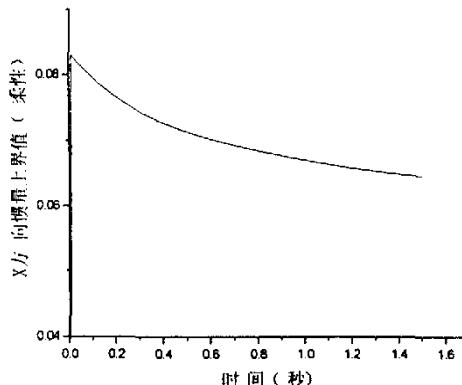


图 3-1 柔性机器人 X 方向惯量上界值
Fig 3-1 Up bounded value in the Xdirection

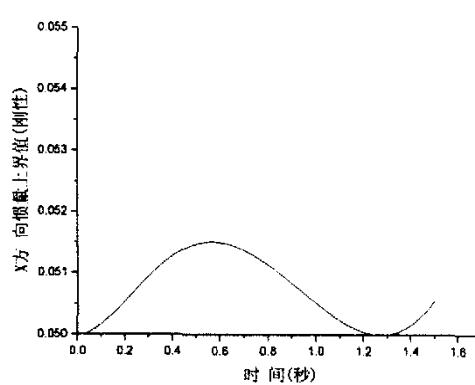


图 3-2 刚性机器人 X 方向惯量上界值
Fig 3-2 Up bounded value in the Xdirection

图 3-1 与图 3-2 表明: 如果几何参数相同, 则柔性机器人末端惯量的上界值式 (3-35) 要大于相应的刚性机器人式 (3-34) 计算出的结果, 这似乎可以理解为由于弹性元件的储能造成响应的延迟。但总的来讲柔性宏-微机器人、刚性宏-微机器人都有降低末端有效惯量的特点。

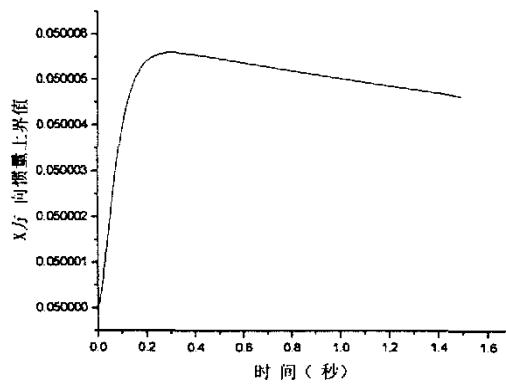


图 3-3 优化后的 X 方向惯量上界值
Fig 3-3 Optimized up bounded value in the
X direction of rigid manipulator

图 3-3 以刚性宏-微机器人 X 方向为例, 说明通过关节自运动可以进一步降低其末端惯量上界值。通过与未经关节优化的图 3-2 相比, 可以看出, 利用宏-

微机器人的冗余性，通过优化关节自运动进一步可以降低末端有效惯量的上界值。优化策略取得了明显效果。

优化前后的关节角、关节角速度、关节角加速度分别如图 3-4~3-12 所示。

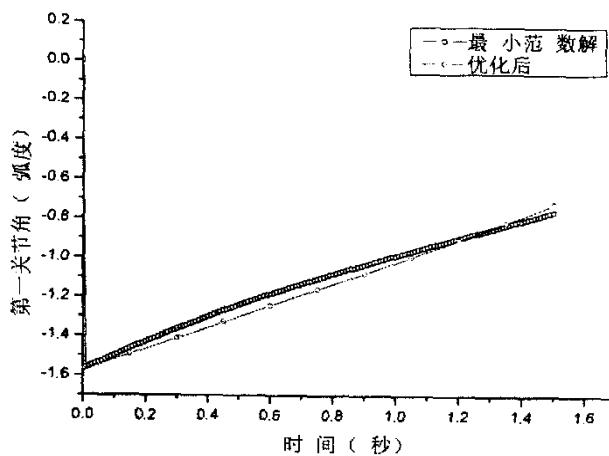


图 3-4 优化前后的第一关节角
Fig 3-4 Movement of the first joint

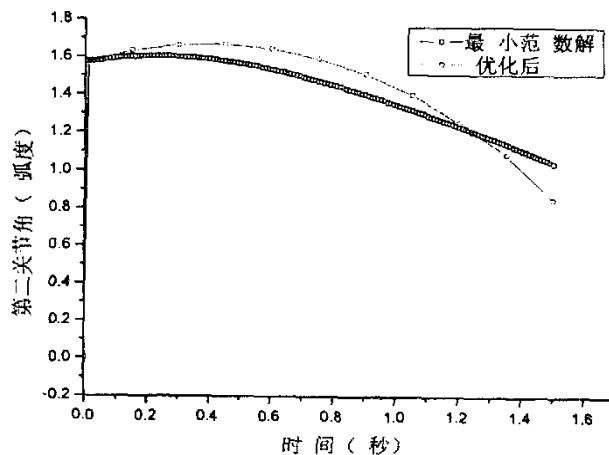


图 3-5 优化前后的第二关节角
Fig 3-5 Movement of the second joint

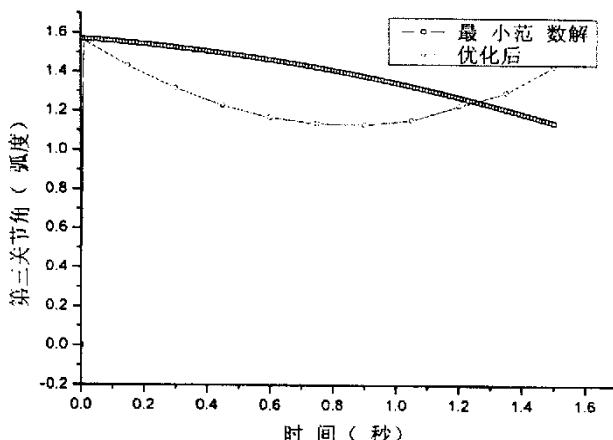


图 3-6 优化前后的第三关节角
Fig 3-6 Movement of the third joint

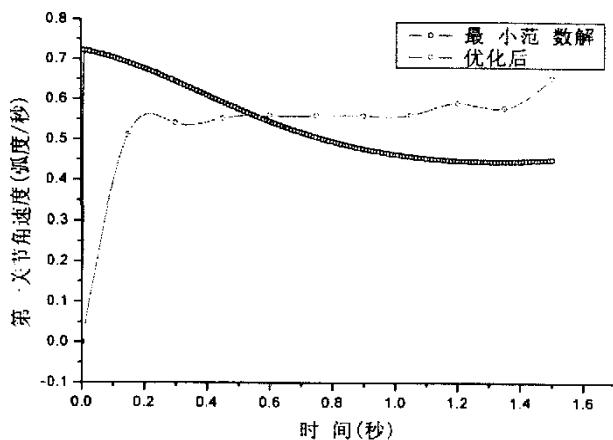


图 3-7 优化前后的第一关节角速度
Fig 3-7 Velocity of the first joint

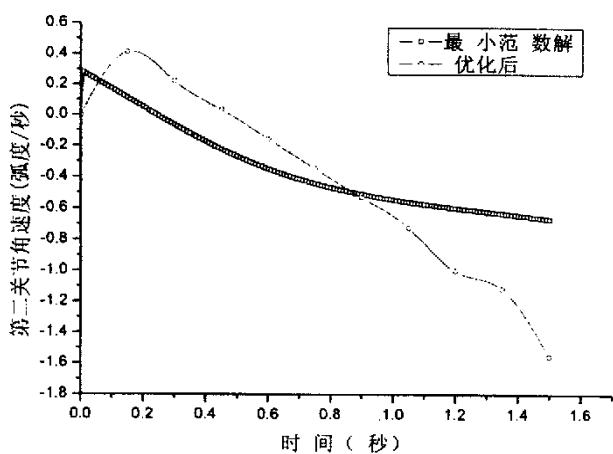


图 3-8 优化前后的第二关节角速度
Fig 3-8 Velocity of the second joint

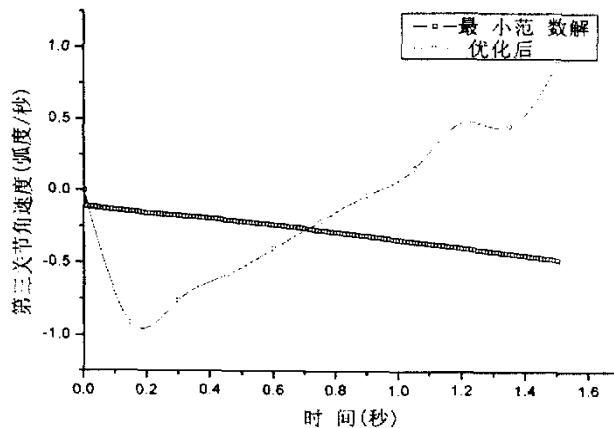


图 3-9 优化前后的第三关节角速度

Fig 3-9 Velocity of the third joint

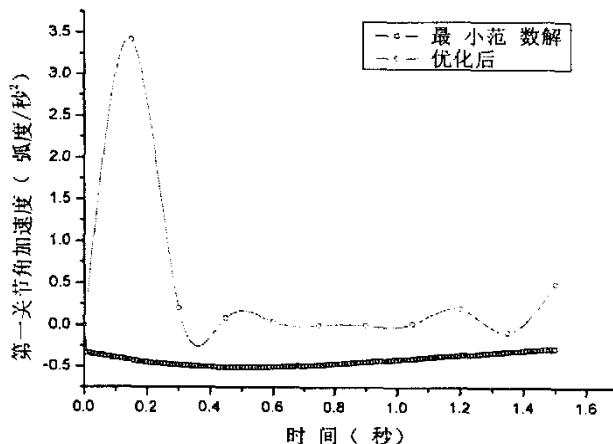


图 3-10 优化前后的第一关节角加速度

Fig 3-10 Acceleration of the first joint

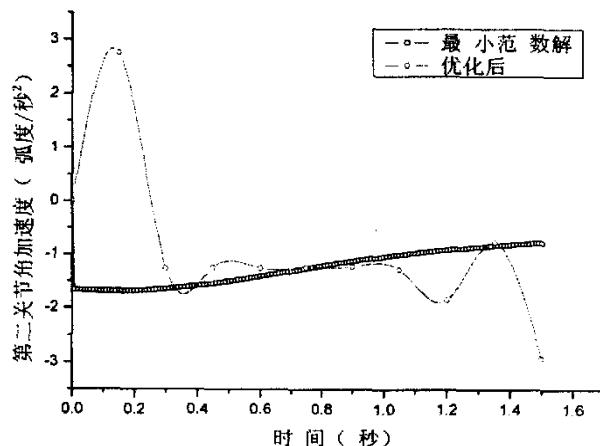


图 3-11 优化前后的第二关节角加速度

Fig 3-11 Acceleration of the second joint

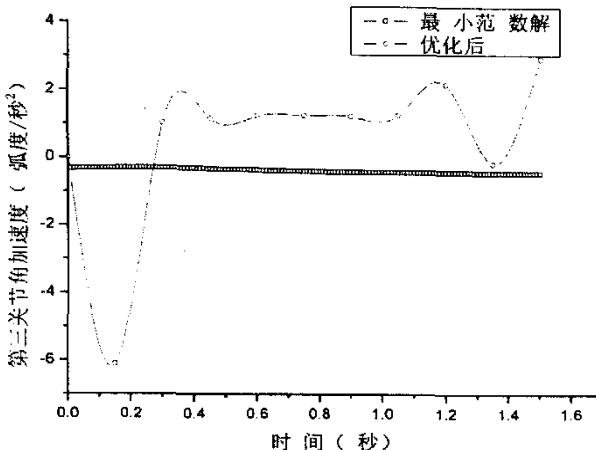


图 3-12 优化前后的第三关节角加速度

Fig 3-12 Acceleration of the third joint

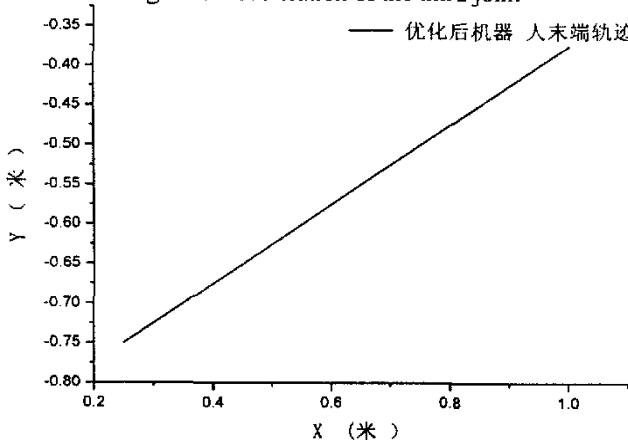


图 3-13 优化后机器人末端轨迹

Fig 3-13 Endpoint trace of manipulator

刚性宏-微机器人的最小范数解和规划关节轨迹后关节角、关节角速度、关节角加速度如图 3-4~3-12 所示。利用宏-微系统的冗余性，沿着规划后关节运动能够进一步降低其惯量上界值。很明显，在以降低 X 方向惯量上界值为指标规划关节运动后，微机器人关节速度变大，说明性能的提高是以牺牲最小范数解为代价的。

图 3-13 是优化惯量上界值的同时，机器人末端的实际轨迹严格的沿预定路线 $y = 0.5x$ 运动，说明上面的优化过程确实在末端轨迹约束下的优化。从目标优化效果以及约束条件来看，都说明上述非线性优化过程是成功的。

上面仅仅是对末端惯量上界值的单目标优化，优化后微机器人在进一步降低了惯量上界值的同时，由于关节加速度增大会导致柔性臂弹性变形量的增大等其它影响。鉴于这种情况，可以选择可补偿性指标和其它性能指标，共同构造一个

多目标函数，达到综合性能的优化。多目标优化对提高宏-微机器人的性能很有实际意义，但限于时间及缺乏相应的优化工具，本论文没有进行这方面的研究。

3.4 本章小结

本章利用宏-微机器人的运动学、动力学分析结果，推导出了柔性宏-微机器人末端惯量数学表达式，首次在理论上证明了柔性宏-微机器人系统的末端等效惯量的上界与糅合了宏机器人弹性变形因素的微机械手末端等效惯量有关系。从而说明，宏机械手为柔性时其末端的动态性能已不仅仅取决于微机械手的动态性能，但柔性宏-微机器人系统仍然具有减小末端有效惯量的特点，两种情况下各自有不同的上界值表达形式。然后又对一柔性/二刚性杆结构的宏-微机器人建立了系统动力学方程，并以此为基础对末端惯量进行了数值仿真。仿真说明，在参数相同的情况下，就上界值而言，刚性机器人要小于柔性机器人。利用宏-微系统的冗余特性和非线性优化技术，可以进一步降低末端有效惯量的上界值，提高宏-微机器人动力学响应性能。

第4章 柔性宏-微机器人的误差补偿及控制

4.1 引言

机器人作业时都要求按设定轨迹运动，尤其是对于柔性机器人，高速运动时的轨迹跟踪精度始终没有得到很好的解决，一个很重要的原因是受机器人频带的限制。频带宽度描述了控制系统的稳定性和动态性能，频带高对提高机器人控制性能有利。由于机器人的频带很窄，在大曲率、轨迹不连续位置没有足够快的响应，导致高速运动时容易产生振动，因而造成大的轨迹误差。宏-微机器人可以作为一种解决方案，利用宏-微系统从结构上拓宽了系统频带，使得系统动态性能主要取决于微机器人的动态性能。这样在用宏机器人保证机器人大范围运动的同时，微机器人可以设计实现快速精确调节，在完成预定运动的同时补偿宏机器人造成的误差，从而提高了定位及轨迹跟踪精度，提高了机器人的性能。

在机器人的控制中，用微机器人的附加运动补偿误差而不是整体关节的误差反馈控制提高精度，是宏-微机器人的新颖之处，引起了人们极大的兴趣。但是宏-微系统的误差补偿专题还缺少系统的整理和研究，因此有必要对宏-微机器人的误差补偿作进一步的归纳与分析。本章对宏-微机器人的补偿问题作了探讨，首先分析了协调操作宏-微机器人的运动，提出了宏-微系统可补偿的几何条件并建立了衡量系统误差补偿能力大小的可补偿性指标。然后利用宏-微系统的冗余性，规划机器人关节运动，增大了误差补偿能力。最后对宏-微机器人的控制进行了初步研究，对宏、微机器人末端误差的补偿控制策略的稳定性进行了理论上的证明，并以此为基础建立了宏、微机器人各自的控制算法。

4.2 宏-微机器人的可补偿性分析

宏-微机器人的结构决定了其具有灵活性好、精度高的特性。从理论上讲，只要微机器人的运动空间大于宏机器人的误差空间，微机器人的分辨率足够高，借助有效的误差测量设备，通过微机器人的实时补偿，宏-微机器人系统完全能够达到微机器人运动的精度，宏-微机器人系统的高精度特性在精密操作领域已经得到体现和应用。

要利用微机器人的快速补偿能力，在宏-微机器人的结构设计中，需要考虑到下面三个因素：第一，微机器人的可否有效补偿。即微机器人的运动空间能否

完全覆盖宏机器人末端误差范围，这是实现误差可补偿的前提；第二，微机器人的惯性质量应尽可能小，以提高补偿的灵活性；第三，微机器人的响应速度能够满足实时补偿的要求。K.Nagai 等人^[46]在冗余宏-微机器人阻抗控制的基础上，以平面 3 自由度的微机械手为例，对于给定的宏机器人根据其性能要求，推导出微机器人的惯性属性条件并作为宏-微机构机构设计中的指导原则（为了满足微机器人频率是宏机器人频率 10 倍的要求，前者的质量（惯性）必须是后者的 1/100，所以微机器人驱动器应尽量置于宏机器人末端以减轻惯性质量）。MIT 的 Sharon 等人利用建立的弹簧-质量-阻尼模型，指出当宏机器人的等效质量远大于微机器人的质量时，机器人的动态特性将主要取决于微机械手的动态特性。本文第 3 章也从数学上证明了宏-微机器人具有减小末端有效惯量的特性。

另外，微机器人在不同位形时其继续运动的能力即补偿的能力有所不同，因而必须建立指标来衡量宏-微机器人系统的误差补偿能力。Yoshikawa 等^[11]基于宏-微机器人运动学在提出了补偿性椭球指标，但是计算要用到柔性宏机器人变形的雅可比矩阵。在很多情况下，宏机器人的末端误差并非计算得出，所以使用上也有局限。

研究宏-微机器人的误差补偿必须明确宏-微机器人的工作方式，一般可分为分为如下三种情况：

(1) 由宏机器人完成大范围内运动，将微机器人输送到工件附近后设法保持稳定，由微机器人完成细微操作^[7]，整个工作过程中宏机器人自身反馈控制，这是人们对宏-微机器人最早的认识和利用。许多情况下，微机器人的形式、原理特殊，例如用于 μm 级精密作业的微动线圈^[8]、激光作业的反射镜^[9]等。人们把它们也可以归入到了宏-微机器人的范畴。但是在这种情况下，宏机器人一般设计的刚度较大，而对于柔性宏机器人，其精确控制实际上一直是一个难题，所以这种策略对柔性宏-微机器人效果并不好，并且涉及不到微机器人的误差补偿问题。

(2) 宏机器人末端实施操作，微机器人通过自身运动抑制柔性宏机器人的弹性振动，这实际上是将微机器人作为控制变量而实施的振动的主动控制^[10]。这种情况下也涉及不到补偿问题。

(3) 宏、微机器人共同参与轨迹规划，微机器人在完成预定轨迹的同时，利用自身频带宽、响应快的特点，对宏机器人的误差实时补偿^[11]。这是目前人们一般认识的宏-微机器人的情形。这种情况下，由于关节误差、杆件变形在柔性宏机器人的末端所引起的误差必须得到补偿。课题主要对第(3)种情况作了研

究，并且这里仅考虑了由于柔性杆的振动引起的末端误差。

在第(3)种情况下，借鉴文献[47]里建立柔性机器人最大变形量指标的思路，首先对宏-微机器人的结构设计提出了可补偿性的几何条件。

4.2.1 实现误差补偿的几何条件

弯曲变形的主要特征是柔性杆轴线变成了曲线，成为挠曲线。在平面弯曲时挠曲线是一条连续且光滑的平面曲线。当杆内最大正应力不超过材料比例极限时，截面形心在中性层上，所以挠曲线长度不变。因此，当杆件发生变形后，杆轴上任意一点既有水平位移，又有垂直位移。柔性宏-微机器人在航空航天上广泛使用，其各杆件一般比较细长，可以看作欧拉——伯努力梁，所以忽略了剪切变形和扭转变形，因此只考虑弯曲正应力和拉压正应力两项引起的弹性变形的影响。

由拉压正应力公式可得由于杆件轴向拉压所引起的变形量 Δl_1 为

$$\Delta l_1 = \frac{Nl}{EA} \quad (4-1)$$

式中 N ——引起拉伸或弯曲的轴向力；

l ——柔性杆长；

E ——弹性模量；

A ——杆件截面积

又因为 $\sigma = \frac{N}{A}$ ，若取 $\sigma = [\sigma]$ 代入式(4-1)，可得拉伸引起的杆件最大弹性

变形量 $\Delta l_{1\max}$ 为

$$\Delta l_{1\max} = [\sigma] \frac{l}{E} \quad (4-2)$$

式中 $[\sigma]$ ——杆件材料的最大许用应力 (N/m^2)

式(4-2)求出的即是柔性杆件 x 方向的最大弹性变形。

杆件的弯曲变形量为

$$\Delta l_2 = \frac{Ml^2}{2EI} \quad (4-3)$$

式中 M ——杆件上作用的转矩 ($N\cdot m$)；

E ——杆件材料的弹性模量 (GPa)

由材料力学公式，杆件由于弯曲所引起的最大弹性变形量 $\Delta l_{2\max}$ 为

$$\Delta l_{2\max}^* = \frac{l^2}{2E} \cdot \frac{[\sigma]}{y_{\max}} \quad (4-4)$$

式(4-4)求得的即是柔性杆件 y 方向的最大弹性变形。

不考虑杆的弹性转角,求出由于柔性机器人各杆弹性变形在柔性机器人末端产生的最大误差为

$$x_{\text{error}} = \sum_{i=1}^n \Delta l_{1i\max}^* \quad (4-5)$$

$$y_{\text{error}} = \sum_{i=1}^n \Delta l_{2i\max}^*$$

式中 $\Delta l_{1i\max}^*$ —— 第 i 杆 x 方向的弹性变形转化于惯性坐标系下的值;

$\Delta l_{2i\max}^*$ —— 第 i 杆 y 方向的弹性变形转化于惯性坐标系下的值

要实现通过微机器人实时补偿宏机器人末端误差的目的,微机器人的灵活运动空间必须能够完全覆盖柔性宏机器人的末端误差范围。

以图4-1所示两杆宏/两杆微机器人系统为例, XOY 为惯性坐标系,由于杆件弹性变形,在宏机器人末端以其刚性位置为中心形成了面积为 $2x_{\text{error}} \times 2y_{\text{error}}$ 的误差区域,实际上宏机器人的末端将出现在阴影区域中。

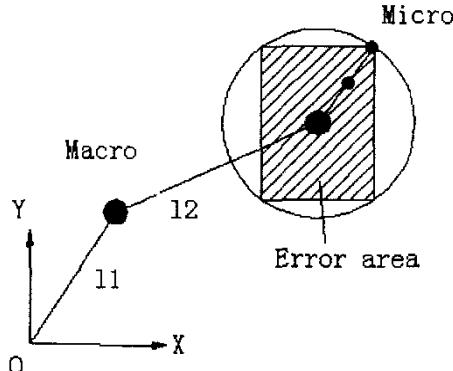


图4-1 宏机器人末端误差区域
Fig 4-1 End point error area of the macro manipulator

微机器人为平面2R机器人,如果两臂杆长度均为 l_m ,则其灵活空间和机器人运动可达空间都是半径为 $2l_m$ 的圆。以最大弹性变形量设计微机器人长度,则需满足下面的几何条件

$$2l_m \geq \sqrt{x_{\text{error}}^2 + y_{\text{error}}^2} \quad (4-6)$$

式中 x_{error} 、 y_{error} —— X 、 Y 方向的宏机器人末端误差

实际上由于许用应力的值一般很大，因此公式（4-2、4-4）求出的弹性变形一般远远大于实际变形。一般机器人杆件变形误差希望在总长度的 5% 以内^[4]，

如果机器人总长为 l_{sum} ，则可取 $\Delta l_{2max} = \frac{l^2}{l_{sum}} \cdot 5\%$ 。

4.2.2 微机器人可补偿性指标

微机器人同时负担着两个任务：在完成规划运动的同时，利用其快速的响应能力，同时实现宏机器人的实时补偿。上面给出了保证微机器人具有全局补偿能力的几何条件，理论上说，只要微机器人的灵活运动空间大于宏机器人的误差范围，就可以实现误差补偿。

对于宏-微机器人，其末端位置是宏、微机器人的关节位移 θ_M ($\in \Re^{\Lambda}$)、 θ_m ($\in \Re^{\lambda}$) 及宏机器人杆件弹性变形矢量 e ($\in \Re^g$) 的非线性函数

$$p = f(\theta_M, \theta_m, e) \quad (4-7)$$

将宏、微机器人关节运动 θ_M 、 θ_m ，宏机器人杆件弹性变形矢量 e 表示成一阶无穷小的形式，对式（4-7）微分，忽略二阶及高阶项

$$\Delta p = J_M \Delta \theta_M + J_m \Delta \theta_m + J_e \Delta e = J \Delta q \quad (4-8)$$

式中 J ——机器人系统雅可比矩阵， $J = [J_M : J_m : J_e]$ ；且 $J \in \Re^{n \times (\Lambda + \lambda + g)}$

J_M ——雅可比矩阵中与宏机器人有关的成分， $J_M \in \Re^{n \times \Lambda}$

J_m ——雅可比矩阵中与微机器人有关的成分， $J_m \in \Re^{n \times \lambda}$

J_e ——雅可比矩阵中与柔性杆末端变形有关的成分， $J_e \in \Re^{n \times g}$

如果宏机器人末端误差仅仅由杆件变形造成，其关节运动无误差，即 $\Delta \theta_M = 0$ ，欲使整个宏-微系统末端误差为零，则

$$0 = J_m \Delta \theta_m + J_e \Delta e \quad (4-9)$$

则微机器人的关节补偿运动量可以确定。

$$\Delta\theta_m = -J_m^+ J_e \Delta e \quad (4-10)$$

微机器人要实现误差补偿，即对任意的 Δe 都有 $\Delta\theta_m$ 存在，其关节自由度至少应等于操作空间的自由度数 n ，所以有

$$R(J_m) = n \quad (4-11)$$

式中 $R(\cdot)$ ——微机器人雅可比矩阵的秩

即 $R(J_m J_m^T) = n \quad (4-12)$

所以 $|J_m J_m^T| \neq 0 \quad (4-13)$

这个条件保证了微机器人运动中没有奇异点。

微机器人在不同位形时其继续运动的能力即误差补偿的能力有所不同，因而必须建立指标来衡量宏-微机器人系统的误差补偿能力。例如微机器人已达到其关节极限位置，无法进一步运动，这时单靠微机器人自身调整则无法实施补偿，必须调整宏机器人关节角。但这时已经失去宏-微系统灵活性好的优点，所以轨迹规划时必须要保证微机器人一定的可补偿性。

基于上述思想，在满足几何上可补偿、运动上不奇异的条件后，可以建立如下指标衡量微机器人的误差补偿性

$$C_m = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{r_i} \times 100 \% \quad (4-14)$$

式 (4-14) 中的分子为微机器人总的杆长，也表示最大运动空间的半径，分母为某位形时微机器人相对宏机器人末端矢径长度， C_m 是一个始终大于 1 的数。这个指标的具有直观的几何意义，即在进行宏-微系统轨迹规划时，尽量避免微机器人手臂完全伸展的大范围运动，使其离此最大补偿量极限位置尽可能远。因此，可以将此指标看作“补偿裕度”。 C_m 越大，则此位置上微机器人完成预定轨迹的同时再运动补偿误差的能力越大。利用宏-微系统的冗余性规划关节轨迹，可以优化其可补偿性。

4.2.3 补偿能力的优化

4.2.3.1 优化策略 利用宏-微系统的冗余特性，可以对宏-微机器人的可补偿性进行优化，增大其可补偿性。对于冗余度机器人，其速度、加速度反解可由雅

可比矩阵的零空间向量及雅可比矩阵的广义逆得到。

$$\dot{q} = J^+ \dot{X} + (I - J^+ J) \dot{\Phi} \quad (4-15)$$

$$\ddot{q} = J^+ (\ddot{X} - J \dot{q}) + (I - J^+ J) \ddot{\Phi} = J^+ (\ddot{X} - J \dot{q}) + \ddot{q}_N \quad (4-16)$$

式中 J^+ ——雅可比矩阵的伪逆；

$\dot{\Phi}$ 、 \ddot{q}_N ——零空间矢量

零空间矢量是机器人连杆间的自身运动，不影响末端的运动。

梯度的方向是函数增长最快的方向。因此基于建立的可补偿性指标式(4-14)，使用梯度投影方法(Gradient Projection Method)决定 $\dot{\Phi}$ 以增大可补偿性指标 C_m 。将式(4-15)写成下面的形式

$$\dot{q} = J^+ \dot{X} + (I - J^+ J) \nabla C_m \quad (4-17)$$

式中 ∇C_m —— C_m 的梯度矢量，且

$$\nabla C_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_m}{\partial q_1} & \frac{\partial C_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial C_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

由式(4-17)可以求出关节速度 \dot{q} ，根据 \dot{q} 可计算出角位移，得出机器人的位姿。按照上述规划算法所得出的机器人位姿具有较大的误差补偿能力。

4.2.3.2 数值仿真与分析 在上述优化策略下，利用建立的可补偿性指标 C_m ，通过优化关节运动，可以进一步提高机器人的补偿能力。

这里仿真使用1柔性/2刚性杆宏-微机器人系统。

设定机器人末端运动规律为直线 $y = 0.5x$ ；

速度： $\dot{x} = 0.4m/s$ ， $\dot{y} = 0.2m/s$ ，运行时间3秒；

关节初始位置： $\theta_M = \pi/2$ ， $\theta_{m1} = \theta_{m2} = \pi/4$ ；

杆长： $L_M = 1m$ 、 $L_{m1} = L_{m2} = 0.5m$

宏-微机器人的最小范数解和冗余规划后的 C_m 值如图4-2所示。可见，利用宏-微系统的冗余性规划关节运动能够大大提高微机器人的补偿能力，沿着这种规划路径工作，宏-微系统补偿误差的能力得到了提高。

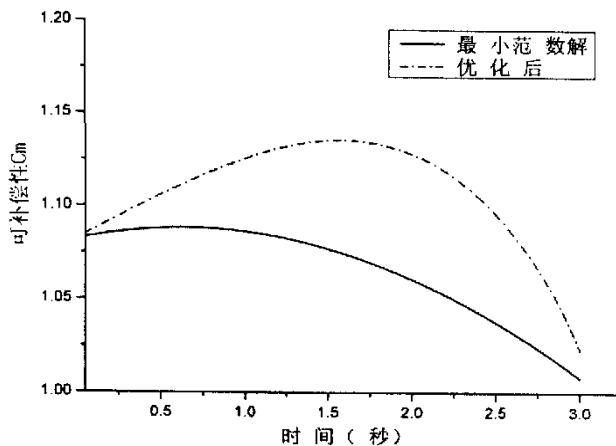


图 4-2 优化前后的可补偿性指标 C_m
Fig 4-2 The compensability measure C_m

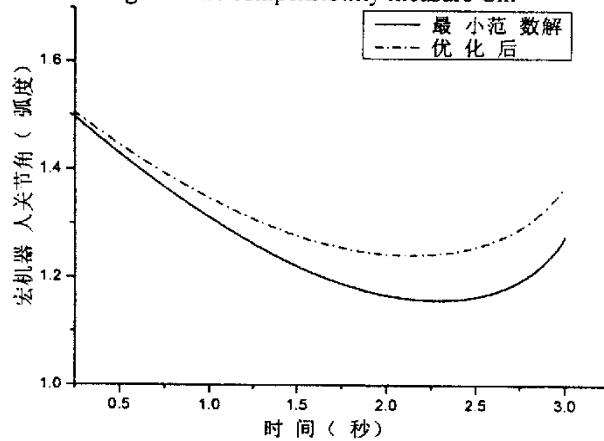


图 4-3 优化前后的宏机器人关节角
Fig 4-3 Joint movement of the macro manipulator

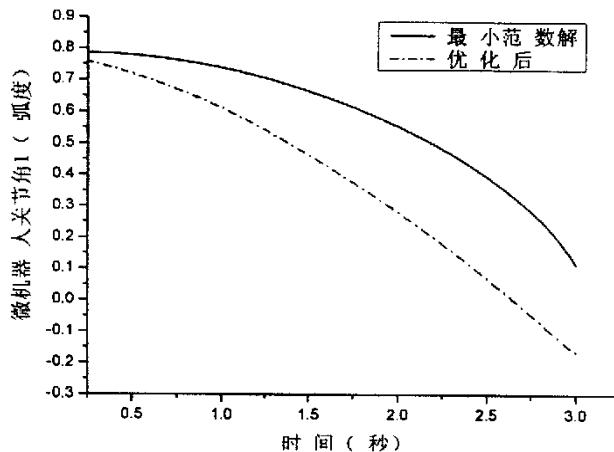


图 4-4 优化前后的微机器人关节角 I
Fig 4-4 The first joint movement of micro manipulator

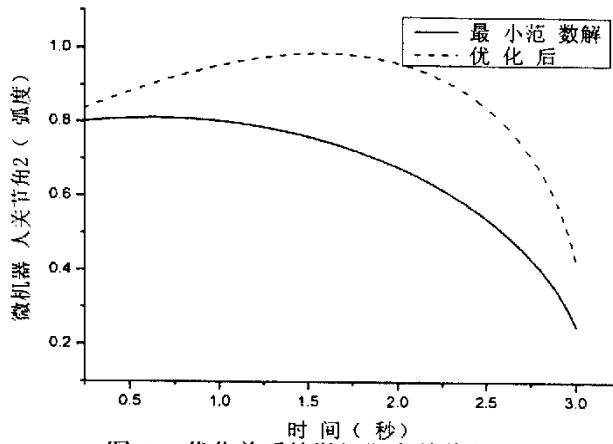


图 4-5 优化前后的微机器人关节角 2

Fig 4-5 The second joint movement of micro manipulator

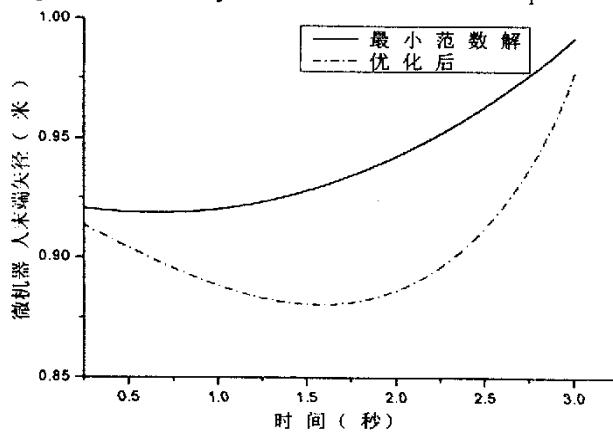


图 4-6 优化前后的微机器人矢径 r 长

Fig 4-6 The ' r ' of the micro manipulator

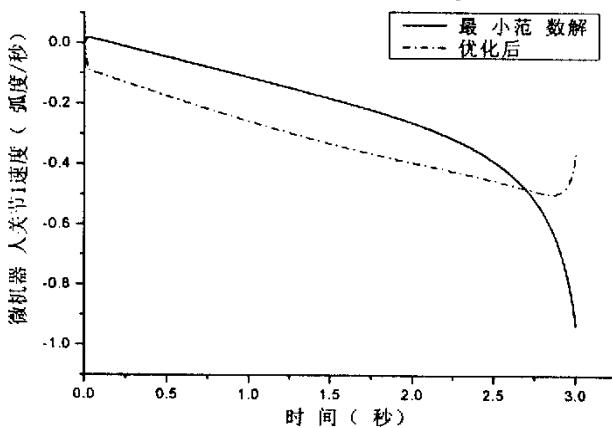


图 4-7 优化前后的微机器人关节 1 角速度

Fig 4-7 The first joint velocity of micro manipulator

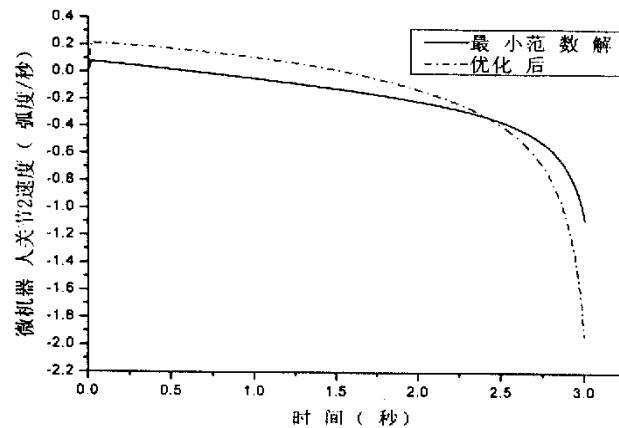


图 4-8 优化前后的微机器人关节 2 角速度
Fig 4-8 The second joint velocity of micro manipulator

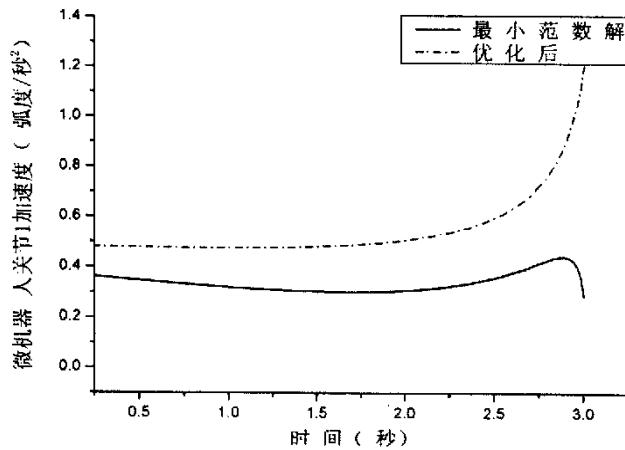


图 4-9 优化前后的微机器人关节 1 角加速度
Fig 4-9 The first joint acceleration of micro manipulator

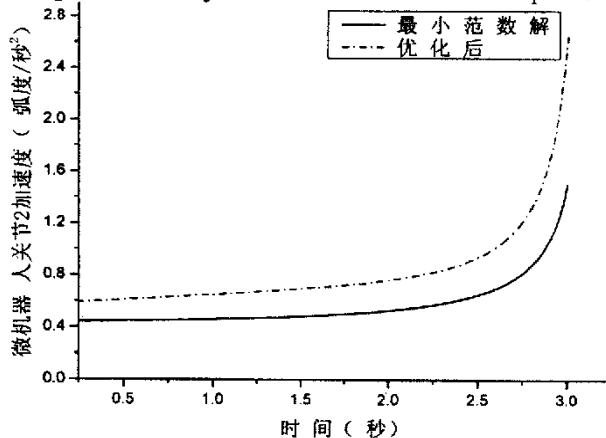


图 4-10 优化前后的微机器人关节 2 角加速度
Fig 4-10 The second joint acceleration of micro manipulator

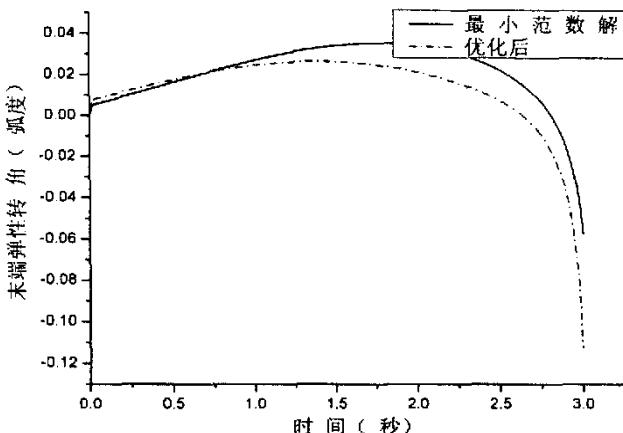


图 4-11 优化 C_m 前后宏机器人末端弹性转角
Fig 4-11 Angle displacement of the endpoint

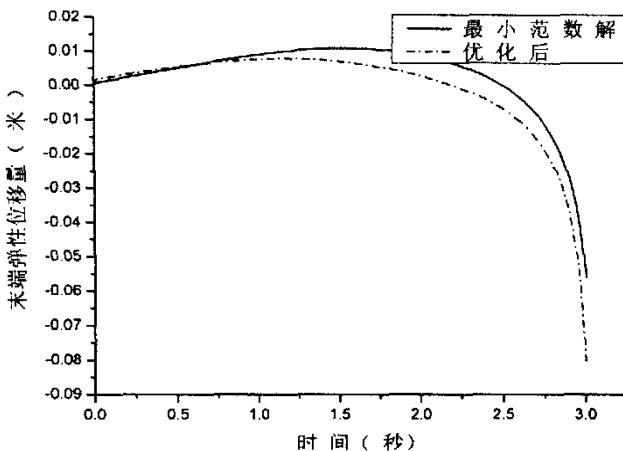


图 4-12 优化 C_m 前后宏机器人末端弹性位移
Fig 4-12 Endpoint displacement of the macro manipulator

图 4-3、图 4-4、图 4-5 表明在路径规划前后，微机器人在完成预定轨迹时宏、微部分的运动范围有所改变。优化指标 C_m 以后，同时为了满足末端轨迹的要求，增大了宏机器人的运动，而减小了微机器人关节运动范围，为微机器人保留了较大的“补偿裕度”，从而提高了其再运动补偿误差能力。可见指标 C_m 实际上根据末端轨迹任务，在对宏、微机器人运动分配时，起到了增大宏机器人运动，从而相应减小微机器人的关节运动的作用，提高了系统的补偿能力。

图 4-6 说明，关节路径规划以后降低了矢径 r 值，说明微机器人位形相对“紧凑”，即两臂“伸展”的程度不同。在这种情况下，如果输入误差补偿命令，其继续运动的“裕度”较大，误差补偿能力更好，从而说明利用宏-微机器人的冗余特性，可以增大微机器人整个运动过程中的自身再调整能力。另外，优化算例中微机器人完全伸展开长度为 1 米，通过轨迹规划后，微机器人矢径 r 值明显减

小，从而远离了其最大边界处的奇异点，客观上起到了降低奇异发生的作用。

图 4-7、图 4-8、图 4-9、图 4-10 所示为微机器人第一、第二关节角速度及角加速度。很明显可以看出，在以 C_m 为指标规划关节运动后，微机器人关节速度、加速度变大了，说明误差补偿性能的提高是以牺牲最小范数解为代价的。

图 4-11、图 4-12 所示是以 C_m 为指标规划关节运动后，宏机器人末端无论是弹性转角还是弹性位移都有所扩大。这是因为上面仅仅以可补偿性指标进行了单目标优化，优化后微机器人在增大了补偿能力的同时，由于关节加速度增大导致柔性臂弹性变形量的增大，这是微机器人误差补偿能力的提高对柔性臂带来的影响。鉴于这种情况，可以选择可补偿性指标和其它性能指标，共同构造一个多目标函数，达到综合性能的优化。多目标优化对提高宏-微机器人的性能很有实际意义，但限于时间，本论文没有进行这方面的研究。

4.3 宏-微机器人控制器设计

机器人伺服控制系统的目的是通过给定各关节的驱动力矩，使得机器人的位置、速度等状态变量跟踪给定的理想轨迹。在机器人的结构及其参数确定以后，其动态特性将由动力学方程即数学模型来描述。因此，我们可以利用自控理论所提供的设计方法，基于该数学模型来设计机器人的伺服控制器。

国内外对宏-微机器人研究最多的方面还是控制。宏-微机器人既可借鉴一般柔性机器人的控制经验，还可采用微机器人补偿等措施提高运动精度。Yoshikawa 等^[11, 20]研究了宏-微机器人的静态、动态补偿运动。在前文中他对宏机器人、微机器人都采用简单的 PD 反馈控制。PD 控制根据位置跟踪误差和速度跟踪误差乘以相应的静态增益确定控制量，虽然结构简单，但对其稳定性未作探讨。他还提出了宏-微机器人的力控制、位移/力的复合控制策略^[7]。W.Yim 在动力学补偿的基础上，提出了基于 VSC (Variable Structure Control) 控制和预测技术的控制方法^[34]。VSC 的控制方法源于刚性微机器人的末端轨迹控制。对于柔性宏机器人，作者利用一个由柔性宏机械臂末端轨迹误差、杆件弹性变形以及宏机器人的输入力矩的最小二次函数而得到了预测控制法则，对宏机械手采用预测控制，微机械手采用动力学求逆计算关节力矩。结果表明，在闭环系统中成功实现了末端的实时轨迹控制并保证了稳定性。

由于机器人各关节的控制不是独立的，相互之间存在耦合，因此其控制必须以多输入、多输出系统处理。而杆件的柔性变形，更是加重了耦合的严重程度。

这种耦合关系，使得多自由度机器人呈现比较严重的非线性特性，给机器人的动态控制带来了不便。一般非线性系统，如果其数学模型足够精确的话，可以通过状态反馈实现精确线性化，从而利用线性系统经典伺服控制理论设计出控制器。我们在对机器人建立模型时总是忽略了一些不确定因素的，但正是这些因素会引起控制品质的恶化，甚至是系统变得不稳定。针对模型中的不确定性，采用现代控制理论的机器人技术可分为三大类，即自适应控制、变结构控制、以及现代鲁棒控制。现代鲁棒控制系统设计理论的一种重要方法是基于李雅普诺夫（Lyapunov）函数的方法，下面将使用鲁棒控制^[48]里的 Lyapunov 函数推导出宏-微机器人的控制器，并分析其稳定性。

对于实际工程中的动态系统来讲，稳定性是最基本的要求。Lyapunov 稳定性分析方法是确定系统的稳定性的最一般的理论，广泛用于多变量、非线性、时变系统稳定性分析，采用状态向量方法描述。以下将构造 Lyapunov 函数，分析宏-微机器人控制器的稳定性，并以此为基础设计出宏、微机器人各自的控制器。这部分研究将第二、三、四章的理论分析引入到实际应用中，具有实际意义。

4.3.1 李雅普诺夫函数与稳定性分析

分析系统的稳定性，最关键的步骤就是 Lyapunov 函数的构造。Lyapunov 函数是一个虚构的能量函数，记作 $V(x, t)$ ，能量衰减特性用 $\dot{V}(x, t)$ 表示。利用 V 及 \dot{V} 的符号特征，可直接对平衡状态稳定性做出判断，无需求系统状态方程的解。对非线性系统，Lyapunov 函数的构造一直没有一个统一的方法。但是，利用机器人系统的物理特性，则很容易找到理想的 Lyapunov 函数，并且如果定义适当的输出信号，可以保证系统的耗散性。

基于拉格朗日方法建立的机器人模型具有下面的形式

$$A(q)\ddot{q} + b(\dot{q}, q)\dot{q} + g(q) = \tau \quad (4-19)$$

式 (4-19) 中各符号意义与式 (3-1) 相同。

由轨迹规划生成的 \ddot{q}_d 、 \dot{q}_d 、 q_d 可以计算出相应的驱动力矩，但是由于动力学模型的不精确性，以及干扰的影响，这种开环控制策略实际上并不适用，因此采用反馈控制，计算期望值与实际值之差，构成 PD 控制器。

对于式 (4-19) 描述的机器人，假设理想轨迹由 q_d 、 \dot{q}_d 、 \ddot{q}_d 描述。机器人的轨迹跟踪问题就是设计控制器，使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0 \quad (4-20)$$

式中 $e(t)$ —— 跟踪位置误差, $q(t) - q_d(t)$;

$\dot{e}(t)$ —— 跟踪速度误差, $\dot{q}(t) - \dot{q}_d(t)$

通过适当的非线性补偿, 可以将机器人的跟踪问题转化为渐进稳定性控制问题。

$$\tau = u + A(q)\ddot{q}_d + b(\dot{q}, q)\dot{q} + g(q) \quad (4-21)$$

基于动力学逆问题的解, 考虑非线性补偿, 并忽略重力项, 将式 (4-21) 代入式 (4-19), 得

$$A(q)\ddot{e} + b(\dot{q}, q)\dot{e} = u \quad (4-22)$$

对于该系统, 首先进行坐标变换

$$\begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x \quad (4-23)$$

式中 x_1 —— e ;

x_2 —— $\dot{e} + e$

在新的坐标系下, 系统 (4-19) 可以表示为

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$A(q)\dot{x}_2 = -(A - b)x_1 + (A - b)x_2 + u \quad (4-24)$$

如果能够找到反馈控制器

$$u = \alpha(t, x)$$

使得闭环系统是渐进稳定的, 那么该控制器就能满足式 (4-20) 的设计要求。

对系统 (4-19), 考虑如下形式的 Lyapunov 函数

$$V(x, t) = \frac{1}{2} x_1^T x_1 + \frac{1}{2} x_2^T A(q) x_2 \quad (4-25)$$

沿系统的状态轨迹, 求其时间微分得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= x_1^T \dot{x}_1 + x_2^T A(q) x_2 + \frac{1}{2} x_2^T \dot{A}(q) x_2 \\ &= x_1^T \dot{x}_1 + x_2^T \{A(x_2 - x_1) + b x_1 + u\} + \frac{1}{2} x_2^T (\dot{A} - ab) x_2 \\ &= -x_1^T x_1 + x_2^T \{A(x_2 - x_1) + b x_1 + x_1 + u\} \end{aligned} \quad (4-26)$$

显然如果令反馈控制律为

$$u = -A(x_2 - x_1) - b x_1 - x_1 - x_2 \quad (4-27)$$

代入式(4-26)得

$$\dot{V}(x, t) = -x_1^T x_1 - x_2^T x_2 \leq -\left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\|^2 < 0 \quad (4-28)$$

根据式(4-28)知由(4-24)和反馈控制律(4-27)构成的闭环系统全局渐进稳定。

将坐标变换代入式(4-27)得原坐标系下控制率

$$u = -A\dot{e} - b\dot{e} - \dot{e} - e \quad (4-29)$$

因此将式(4-29)代入到式(4-21)即得机器人轨迹跟踪控制器

$$\tau = A(q)\ddot{q}_d + b(\dot{q}, q)\dot{q}_d + g(q) - A\dot{e} - b\dot{e} - \dot{e} - e \quad (4-30)$$

上述设计过程还可以由无源性与渐进稳定性之间的关系证明。

无源性是研究非线性系统稳定性的重要概念^[48]。通俗地说，如果一个系统只从外部吸收能量，而本身并不向外释放能量，则系统称为无源的。其数学定义如下：

对于非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ \dot{y} = h(x) \end{cases} \quad (4-31)$$

u 和 y 分别是系统的输入和输出信号。如果存在一个正定函数 $V(x)$ 使得不等式

$$\dot{V} \leq u^T y, \quad \forall t \geq 0 \quad (4-32)$$

对于任意输入信号成立，则该系统称为无源的。

对于上面的系统，定义输出信号

$$y = x_2 \quad (4-33)$$

将控制律(4-27)写为

$$u = \beta(x) + v \quad (4-34)$$

式中 $\beta(x) = -A(x_2 - x_1) - bx_1 - x_1$ ；

$$v = y$$

与式(4-28)的证明相同，沿由系统(4-24)和控制律(4-34)构成的闭环系统的轨迹，有

$$\dot{V}(t, x) = -x_1^T x_1 + y^T v \leq y^T v, \quad \forall v \quad (4-35)$$

成立，这表明由输入 v 到输出 y 的闭环系统是无源的。由无源性与渐进稳定性的关系可知闭环系统稳定。

4.3.2 宏-微机器人控制策略

4.3.2.1 微机器人控制策略 由宏-微机器人最常用第三种工作方式知，微机器人在完成预定关节轨迹运动的同时，通过自身快速的响应对宏机器人末端误差进行实时动态补偿，因此微机器人必须采用简单快速的控制算法、利用其惯量小的特点，作出快速、准确的响应。在大量资源用于弹性动力学模型计算的情况下，必须考虑微机器人控制算法的时间，以使其发挥最大的效用。在很多前人的文献里，都对微机器人的控制采用了如下算法

$$\tau_m = K_{pm}(\theta_{md} + \Delta\theta_m - \theta_m) + K_{vm}(\dot{\theta}_{md} - \dot{\theta}_m) \quad (4-36)$$

式中 θ_m 、 θ_{md} ——刚性微机器人关节的实际位置和理想位置；

$\dot{\theta}_m$ 、 $\dot{\theta}_{md}$ ——刚性微机器人关节的实际速度和理想速度；

K_{pm} 、 K_{vm} ——微机器人比例、微分控制增益矩阵；

$\Delta\theta_m$ ——关节微动误差补偿量，由公式 (4-10) 计算得到

在式 (4-36) 中，微机器人的理想关节位置 θ_{md} 、速度 $\dot{\theta}_{md}$ 由宏-微系统运动规划得到，其实际值 θ_m 、 $\dot{\theta}_m$ 将由光电码盘、速度计测出。这种算法简单、快捷，适于微机器人的控制特点。如果宏机器人的末端误差是由测量得到的，而不仅是动力学计算出的杆件变形信息，那么上述微机器人的控制算法可以对机器人系统所有因素引起的末端误差进行补偿。

4.3.2.2 宏机器人控制策略 利用上面已经证明了稳定性的非线性控制策略式 (4-30)，下面推导出柔性宏机器人的控制方案。

第三章已经建立一柔性杆/二刚性杆的宏-微机器人动力学方程，它具有下面的形式

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_M \\ \ddot{q}_m \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_M \\ \dot{q}_m \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_M \\ \tau_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

式中 q_M ——柔性宏机器人关节变量；

q_m ——刚性微机器人关节变量；

q_f ——柔性宏机器人末端变形变量；

τ_M —— 柔性宏机器人控制力矩；

τ_m —— 微机器人控制力矩

上面推导的控制策略是基于整个系统的算法，下面对宏机器人控制算法进行推导。

对于式 (4-35)，求出 \ddot{q}_m 的表达式为

$$\ddot{q}_m = M_{22}^{-1}(\tau_m - M_{21}\ddot{q}_M - M_{23}\ddot{q}_f - H_{21}\dot{q}_M - H_{22}\dot{q}_m - H_{23}\dot{q}_f) \quad (4-38)$$

将式 (4-36) 代入式 (4-35) 的第一行和第三行，可以推导出宏机器人刚性运动与其末端弹性变形的关系

$$\begin{bmatrix} D_{MM} & D_{MF} \\ D_{FM} & D_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_M \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{MM} & C_{MF} \\ C_{FM} & C_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_M \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_M - M_{12}M_{22}^{-1}\tau_m + M_{12}M_{22}^{-1}H_{22}\dot{q}_m \\ -M_{32}M_{22}^{-1}\tau_m + M_{32}M_{22}^{-1}\tau_m + M_{32}M_{22}^{-1}H_{22}\dot{q}_m \end{bmatrix} \quad (4-39)$$

式中 $D_{MM} = M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$ ；

$D_{MF} = M_{13} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{23}$ ；

$D_{FF} = M_{33} - M_{32}M_{22}^{-1}M_{23}$ ；

$C_{MM} = H_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{21}$ ；

$C_{MF} = H_{13} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{23}$ ；

$C_{FM} = H_{31} - M_{32}M_{22}^{-1}M_{21}$ ；

$C_{FF} = H_{33} - M_{32}M_{22}^{-1}M_{23}$

柔性宏机器人期望误差 $q_{Md} = 0$ ，所以宏机器人运动误差矢量为

$$e = \begin{bmatrix} e_M \\ e_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_M - q_{Md} \\ q_f \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

式中 q_{Md} —— 宏机器人的期望关节矢量

由式 (4-30)、式 (4-39) 可得出宏机器人控制算法

$$\tau_M = -\tau^* + D_{MM}\ddot{q}_{Md} + C_{MM}\dot{q}_{Md} - D_{MM}\dot{e}_M - D_{MF}\dot{e}_f - (C_{MM} + I)\ddot{e}_M - C_{MF}e_f - 2e_M \quad (4-41)$$

式中 $\tau^* = M_{12}M_{22}^{-1}\tau_m + M_{12}M_{22}^{-1}H_{22}\dot{q}_m$

上面已经构建了柔性宏-微机器人控制方案设计，其控制策略来源于李雅普诺夫稳定性分析，所以由式（4-36）、式（4-41）构成的控制算法一定是稳定、有效的。

基于李雅普诺夫函数的稳定性分析不要求解系统运动的微分方程就可以得到有关稳定性的结论。然而，李雅普诺夫方法只用于判别系统稳定性，一般不能提供系统的过渡过程或动态性能的任何信息。因此，上面所述的能量分析方法得不到系统是过阻尼还是欠阻尼的信息，也得不到系统抑制干扰所用的时间。

另外，有必要区分稳定性和动态品质这两个概念。虽然上面推导出的控制系统是稳定的，但是它的动态性能可能并不令人满意，也许这就是目前还没有人从稳定性角度出发构建宏-微机器人控制策略的原因。到底上面的控制策略的动态性能如何，需要进一步进行实验来验证和说明。

4.4 本章小结

本章基于宏-微机器人的工作原理，首先提出了实现宏-微机器人运动补偿的几何条件，这是宏-微机构设计的前提之一。然后对衡量微机器人的补偿能力提出了可补偿性指标，该指标的计算更为简单，且几何意义明显。利用可补偿性指标及宏-微机器人的冗余特性，通过规划关节运动可以进一步提高微机器人的误差补偿能力，从而提高了机器人的性能。本章最后还对宏-微机器人的控制做了初步探讨，利用创建的李雅普诺夫函数分析了宏机器人非线性控制律的稳定性，并以此为基础设计出了宏、微机器人各自的控制算法，为宏-微机器人的实际应用打下了基础。

结论

宏-微机器人具有系统频带高、末端惯量小的特点，较好的解决了柔性机器人末端精确控制问题。国内外对宏-微机器人的研究大都侧重于控制策略，没有从动力学角度展开深入探讨。本文对宏-微机器人的动力学建模、末端惯量属性、误差补偿及控制策略等方面进行了深入研究，取得了以下创造性成果。

(1) 本文首次将传递矩阵法应用于柔性宏-微机器人系统，建立了动力学方程。先用传递矩阵法建立了平面3R柔性机器人弹性动力学方程，并给出了一平面3R柔性机器人的数值算例，说明了传递矩阵法在柔性机器人分析中是方便有效的。然后，在3R柔性臂末端增加二根刚性杆，构成宏-微机器人。通过将微机器人等效成激振力和等效为集中质量，建立了宏-微机器人动力学方程，并对数值结果进行比较，说明了将微机器人等效为惯性力这一建模方法的特点和有效性。

(2) 其次，本文对柔性宏-微机器人末端有效惯量进行了较为深入的研究。首次基于宏-微机器人运动、动力学分析，从理论上推导出了末端有效惯量的数学表达式，证明了柔性宏-微机器人末端有效惯量以微机器人有效惯量为上界这个重要特点。然后在一柔性/二刚性宏-微机器人算例中，利用宏-微机器人的冗余特性来规划机器人的关节运动，进一步降低了宏-微机器人系统末端有效惯量的上界值，提高机器人快速响应能力。并且通过对柔性、刚性宏-微机器人末端惯量上界值的对比，说明了刚性宏-微机器人具有较小的末端有效惯量的上界值。

(3) 最后对宏-微机器人的误差补偿及控制策略进行了研究。从运动学角度分析了微机器人的关节微动补偿量，并建立了宏-微机器人误差可补偿的几何条件及衡量补偿能力大小的可补偿性指标。文中给出了一柔性/二刚性宏-微机器人算例，利用宏-微机器人冗余度进行关节规划提高了可补偿能力。最后利用非线性控制方法，在稳定性分析的基础上分别建立了宏-微系统补偿控制算法，为宏-微机器人的实际应用打下了基础。

以上工作为宏-微机器人的进一步研究打下了一定的基础，但是由于时间和能力有限，所作的工作还不太完善，还存在很多非常值得深入研究之处，如：

(1) 宏-微机器人在结构上和串联机器人并没有本质的区别，其具有的末端惯量小、响应频率高的特性来源于宏、微部分不同的使用机理，从机器人动力学

角度来看对它的研究还很不足。传递矩阵法具有程序编制容易、计算速度快的特点，在柔性机器人动力学上应用值得进一步探讨。

(2) 本文仅仅考虑了柔性宏机器人杆件变形造成的末端误差，但是关节柔性、间隙等造成的误差同样不能忽略，下一步应该将这些因素考虑进去，建立一个更精确的数学模型，使之更加具有实用性。

(3) 文中利用宏-微系统的冗余度规划关节运动，对末端有效惯量、误差补偿能力进行的优化，仅仅是单目标优化，下一步应结合其它因素进行多目标优化提高机器人的综合性能，这方面研究具有重要意义。

(4) 文中提出了保证控制器稳定性的控制策略，但是控制系统的性能高低需要进行实验验证，应该建立实验装置研究。另外，建立计算速度快、稳定的控制策略以进一步提高宏-微机器人性能，值得进一步的理论分析和实验研究。

参考文献

- 1 A.Sharon, D.E.Hardt. Enhancement of Robot Accuracy Using Endpoint Feedback and A Macro-micro Manipulator System. Proc of American Control Conference. 1984:1836-1842
- 2 A.Sharon, N.Hogen, D.E.Hardt. High Bandwidth Force Regulation and Inertia Reduction Using A Macro/micro Manipulator System. Proc of IEEE Conf on Robotics and Automation. Philadelphia. 1988:126-132
- 3 A.Sharon, N.Hogen, D.E.Hardt. Controller Design in the Physical Domain (Application to Robot Impedance Control). Journal of IEEE on Robotics and Automation.1989: 552-559
- 4 S.Salcudean, C.An. On the Control of Redundant Coarse-fine Manipulators. IEEE International Conference on Robotics and Automation. Proceedings.14-19 1989,3:1834 - 1840
- 5 G.Hirzinger, B.Brunner, J.Dietrich et al. Sensor-Based Space Robotics and Its Telerobotic Feathers, IEEE Transaction on Robotics and Automation. 1993, 9:649-663
- 6 O.Khatib, B.Roth. New Robot Mechanisms for New Robot Capabilities. Proc of IEEE/RS Conf on Intelligent Robots and Systems IROS'. Osaka, Japan. 1991:44-49
- 7 T.Yoshikawa, K.Harada, A.Matsumoto. Hybrid Position/Force Control of Flexible Macro/Rigid Micro Manipulator System. Journal of IEEE on Robotics and Automation. 1996,12(4):633-640
- 8 T.Narikiyo, H.Nakane, T.Akuta, et al. Control System Design for Macro/Micro Manipulator with Application to Electro Discharge Machining. Proc of the 94th Conf on Intelligent Robots and Systems.1994:1454-1460
- 9 陈启军, 王月娟等. 激光作业的宏-微机器人控制系统. 机器人. 1999,21 : 128-133
- 10 J.Y.Lew, D.Trudnowski. Micro Manipulator Motion Control to Suppress Macro Manipulator Structural Vibrations. Proc of IEEE Conf on Robotics and Automation. Nagoya, Japan. 1995:3116-3120
- 11 T.Yoshikawa, K.Hosoda, T.Do, et al. Quasi-Static Trajectory Control of Flexible Manipulator System. Proc of IEEE Conf on Robotics and Automation. Atalanta, GA.1993:210-214
- 12 陈启军, 王月娟等. 宏-微机器人: 概念、动态、控制及几点看法. 机器人. 1998, 20(4):315-320

- 13 陈启军, 王月娟等. 宏-微机器人及其连续轨迹控制研究. 同济大学学报 1998,26(6):725-728
- 14 陈启军, 王月娟等. 基于宏-微机器人的不连续轨线的跟踪. 机器人. 2000, 22(5):337-343
- 15 陈启军, 王月娟等. 宏-微机器人动力学模型的奇异摄动形式的表示方法. 机器人. 1999,21(7):740-745
- 16 刘劲松, 孙立宁. 基于力反馈机器人宏/微操作系统的研究. 电工技术学报. 1996,11(3):37-41
- 17 尤波, 蔡鹤皋. 基于宏/微操作技术的装配及其人机控制系统. 电机与控制学报. 1998,2(2):119-122
- 18 徐颖. 一种宏微机器人结构. 机电工程 2001,18(1):41-44
- 19 H.Asada, Z.D.Ma, H.Tokumaru. Inverse Dynamics of Flexible Robot Arms: Modeling and Computation for Trajectory Control. Trans of ASME, Journal of Dynamic System. Measurement and Control. 1988,112:117-185
- 20 T.Yoshikawa, K.Hosoda. Dynamic Trajectory Tracking Control of Flexible Manipulator by Macro-Micro Manipulator System. IEEE Robotics and automation. 1994:1804-1809
- 21 T.W.Yang, Z.Q.Sun, S.K.Tso et al: Trajectory Control of a Space Manipulator Utilizing A Macro-Micro Architecture. Proceedings of the 2003 IEEE Conference on Robotics and Automation. Taipei,Taiwan. 2003:2522-2528
- 22 W.L.Xu, T.W.Yang, S.K.Tso. Dynamic Control of A Flexible Macro-Micro Manipulator Based on Rigid Dynamics with Flexible State Sensing. M.M.T. 2000, 35:41-53
- 23 曹彤, 孙杏初. 机器人弹性动力学研究及结构综合优化. 机械工程学报. 1995, 31(5):64-69
- 24 G.Sandor, X.Zhuang. A Linearized Lumped Parameter Approach to Vibration and Stress Analysis of Elastic Linkages. MMT. 1985,20(5):427-437
- 25 荣莉莉, 范懋基. 机器人弹性手臂的模型与控制. 机器人. 1992,14(1):32-36
- 26 蒋新松. 机器人及机器人学中的控制问题. 机器人. 1989,12(5):1-12
- 27 N.Hogen. Impedance Control: An Approach to Manipulation. Trans ASME Journal of Dynamic System. Measurement and Control. 1985,107(1):1-24
- 28 H.C.Flower, S.D.Eppinger. Bandwidth Performance of A Direct Drive Manipulator Under Joint Torque and Endpoint Force Control. IEEE Conf on Robotics and automation. 1991:230-237
- 29 N.L.Marzwell, D.R.vecker, Y.L.Wang. Force Controllable Macro-Micro Manipulator and Its Application to Medical Robotics. Proceedings of the 4th National Technology Transfer Conference & Exposition. Anaheim, Canada, 1993:3-17

- 30 K.Nagai, T.Yoshikawa. Impedance Control of Redundant Macro-Micro Manipulator. Proc of IEEE/RSJ/GI Conf on Robotics and Automation. 1994: 1438-1445
- 31 T.Yoshikawa, K.Hosoda. Hybrid Position/Force Control of Flexible Manipulators by Macro-Micro System. IEEE Robotics and Automation.1994:2125-2130
- 32 M.H.Raibert, J.J.Craig. Hybrid Position /Force Control of Manipulator. Trans ASME, Journal of Dynamic System. Measurement and Control.1981:126-131
- 33 D.Y.Lee, H.C.Source. Precision Force Control via Macro/Micro Actuator for Surface Mounting System. Proceedings IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2002:2227-32
- 34 W.Yim, S.N.Singh. Trajectory Control of Flexible Manipulator Using Macro-Micro Manipulator System. Proceedings of the 34th IEEE conference on decision & control. New Orleans.1995:2841-2846
- 35 师汉民等. 机械振动系统——分析、测试、建模、对策. 华中理工大学出版社 1992:48-63
- 36 王子良. 机器人柔性操作机弹性动力学方程. 天津理工学院学报. 1997, 13(4):28-34
- 37 王子良. 平面连杆机构 KED 分析的新方法. 河北理工学院学报. 1997, 13(3):14-20
- 38 张策等. 弹性连杆机构的分析与设计. 机械工业出版社. 1997:125-147
- 39 岳士岗. 冗余度柔性机器人动力学研究. 北京工业大学博士学位论文. 1995:20-26
- 40 熊有伦. 机器人学. 机械工业出版社. 1993: 253-274
- 41 K.Harada, T.Yoshikawa. Internal Stabilization in Dynamic Trajectory Control of Flexible Manipulators. Proc of IEEE IROS.1996:252-259
- 42 殷际英, 何广平编. 关节型机器人. 化学工业出版社.2003:68-70
- 43 O.Khatib. Inertial Properties in Robotic Manipulation: An Object-level Framework. the International Journal of Robotics Research. 1995,vol.13:19-36
- 44 H.Asada. A Geometrical Representation of Manipulator Dynamics and Its Application to Arm Design. Trans. of ASME. Journal of Dynamic System. Measurement and Control.1983,105(3):131-142
- 45 薛定宇, 陈阳泉. 基于 MATLAB/Simulink 的系统仿真技术与应用. 清华大学出版社.2002:165-174
- 46 K.Nagai, Y.Nakagawa, S.Iwasa, et al. Development of A Redundant Macro-micro Manipulator and Contour Tasks Utilizing Its Compliant Motion. Proc of the 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 1997,1:279-284
- 47 刘迎春. 冗余度柔性协调操作机器人的运动学和动力学研究. 北京工业大学

博士学位论文.2004: 66-81

- 48 梅生伟, 申铁龙, 刘康志. 现代鲁棒控制理论与应用. 清华大学出版社.2003:
112-149

附录 宏-微机器人的雅可比矩阵和质量矩阵

(1) 柔性/刚性宏-微机器人雅可比矩阵:

$$x = L_1 \cos \theta_1 - v_e \sin \theta_1 + l_{m1} \cos(\theta_1 + \delta + \theta_{m1}) + l_{m2} \cos(\theta_1 + \theta_{m1} + \theta_{m2} + \delta)$$

$$y = L_1 \sin \theta_1 + v_e \cos \theta_1 + l_{m1} \sin(\theta_1 + \delta + \theta_{m1}) + l_{m2} \sin(\theta_1 + \theta_{m1} + \theta_{m2} + \delta)$$

对时间求导得运动学方程: $\dot{X} = J\dot{q}$

式中 J —— 机器人系统雅可比矩阵, $J = [J_M : J_m : J_e] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$;

J_M —— 雅可比矩阵中与宏机器人有关的成分, $J_M = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$;

J_m —— 雅可比矩阵中与微机器人有关的成分, $J_m = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$;

J_e —— 雅可比矩阵中与柔性杆末端变形有关的成分, $J_e = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$;

\dot{q} —— 机器人关节角速度与柔性杆末端弹性变形速度,

$\dot{q} = [\dot{\theta}_M \quad \dot{\theta}_{m1} \quad \dot{\theta}_{m2} \quad \dot{v}_e \quad \dot{\delta}]^T$, δ 为柔性杆末端弹性转角, v_e 为柔性杆末端横向弹性位移

为简便起见, 忽略了轴向位移对末端点的影响。整个系统的雅可比矩阵中各项的意义如下:

第 1 项具体形式为:

$$-L_1 \sin \theta_1 - v \cos \theta_1 - l_{m1} \sin(\theta_1 + \delta + \theta_{m1}) - l_{m2} \sin(\theta_1 + \delta + \theta_{m1} + \theta_{m2})$$

第 2 项具体形式为:

$$-l_{m1} \sin(\theta_1 + \delta + \theta_{m1}) - l_{m2} \sin(\theta_1 + \delta + \theta_{m1} + \theta_{m2})$$

第 3 项具体形式为:

$$-l_{m2} \sin(\theta_1 + \delta + \theta_{m1} + \theta_{m2})$$

第 4 项具体形式为:

$$-\sin \theta_1$$

第 5 项具体形式为:

$$-l_{m1} \sin(\theta_1 + \delta + \theta_{m1}) - l_{m2} \sin(\theta_1 + \delta + \theta_{m1} + \theta_{m2})$$

第 6 项具体形式为：

$$l_1 \cos\theta_1 - v \sin\theta_1 + l_{m1} \cos(\theta_1 + \delta + \theta_{m1}) + l_{m2} \cos(\theta_1 + \delta + \theta_{m1} + \theta_{m2})$$

第 7 项具体形式为：

$$l_{m1} \cos(\theta_1 + \delta + \theta_{m1}) + l_{m2} \cos(\theta_1 + \delta + \theta_{m1} + \theta_{m2})$$

第 8 项具体形式为：

$$l_{m2} \cos(\theta_1 + \delta + \theta_{m1} + \theta_{m2})$$

第 9 项具体形式为：

$$\cos\theta_1$$

第 10 项具体形式为：

$$l_{m1} \cos(\theta_1 + \delta + \theta_{m1}) + l_{m2} \cos(\theta_1 + \delta + \theta_{m1} + \theta_{m2})$$

整个机器人的雅可比矩阵是与宏机器人关节角 θ_i 、微机器人关节角 θ_{mi} 以及宏机器人的变形量 v 、 δ 有关的一个 2×5 的矩阵。将宏机器人的变形量 v_e 、 δ 相应项去掉即得对应的刚性宏-微机器人的雅可比矩阵，此处从略。

(2) 1 柔性/2 刚性宏-微机器人的质量矩阵

机器人系统质量矩阵矩阵 A 整体正定、对称，且对角线上三矩阵也正定、对称，写成分块矩阵的形式如下：

$$A(q) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

式中 —— $A_{i,j}$ 为系统质量矩阵中相应位置元素， $A_{11} \in \Re^{1 \times 1}$ ； $A_{12} \in \Re^{2 \times 2}$ ；

$$A_{13} \in \Re^{2 \times 2} ; A_{22} \in \Re^{2 \times 2} ; A_{33} \in \Re^{2 \times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & & 10 & 11 & 12 \\ & & & 13 & 14 \\ & & & & 15 \end{bmatrix}$$

第 1 项具体形式为：

$$\frac{1}{3} \rho l_1^3 + \rho \int_0^{l_1} v^2(x, t) dx + 2ml_1^2 + 2mv_e^2 + 2ml_2^2 + 4ml_1 l_2 \cos(\theta_2 + \delta) + 4ml_2 v_e \sin(\theta_2 + \delta)$$

$$+ ml_3^2 + 2ml_1l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \delta) + 2ml_3v_e \sin(\theta_2 + \theta_3 + \delta) + 2ml_2l_3 \cos\theta_3;$$

第 2 项具体形式为:

$$2ml_2^2 + 2ml_1l_2 \cos(\theta_2 + \delta) + 2ml_2v_e \sin(\theta_2 + \delta) + ml_3^2 + ml_1l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \delta)$$

$$+ ml_3v_e \sin(\theta_2 + \theta_3 + \delta) + 2ml_2l_3 \cos\theta_3;$$

第 3 项具体形式为:

$$ml_3^2 + ml_1l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \delta) + ml_3v_e \sin(\theta_2 + \theta_3 + \delta) + ml_2l_3 \cos\theta_3;$$

第 4 项具体形式为:

$$2ml_1 + 2ml_2 \cos(\theta_2 + \delta) + ml_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \delta);$$

第 5 项具体形式为:

$$2ml_2^2 + 2ml_1l_2 \cos(\theta_2 + \delta) + 2ml_2v_e \sin(\theta_2 + \delta) + ml_3^2 + ml_1l_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \delta)$$

$$+ ml_3v_e \sin(\theta_2 + \theta_3 + \delta) + 2ml_2l_3 \cos\theta_3;$$

第 6 项具体形式为:

$$2ml_2^2 + ml_3^2 + 2ml_2l_3 \cos\theta_3;$$

第 7 项具体形式为:

$$ml_3^2 + ml_2l_3 \cos\theta_3;$$

第 8 项具体形式为:

$$2ml_2 \cos(\theta_2 + \delta) + ml_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \delta);$$

第 9 项具体形式为:

$$2ml_2^2 + ml_3^2 + 2ml_2l_3 \cos\theta_3;$$

第 10 项具体形式为:

$$ml_3^2;$$

第 11 项具体形式为:

$$ml_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \delta);$$

第 12 项具体形式为:

$$ml_3^2 + ml_2l_3 \cos\theta_3;$$

第 13 项具体形式为:

$$2m;$$

第 14 项具体形式为:

$$2ml_2 \cos(\theta_2 + \delta) + ml_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \delta);$$

第 15 项具体形式为：

$$2ml_2^2 + ml_3^2 + 2ml_2l_3 \cos\theta_3$$

攻读硕士学位期间所发表的学术论文

- 1 陈东海, 张绪平, 余跃庆. 柔性宏-微机器人末端有效惯量分析. 机械制造(已录用)。
- 2 陈东海, 张绪平, 余跃庆. 柔性宏-微机器人可补偿性分析. 机械制造(已录用)。

致 谢

本学位论文是在张绪平副教授的悉心指导下完成的。无论是课题的选定、研究内容的确立，还是论文的构思、撰写和后期的修改、定稿，都得到了张老师的认真审核与精心指导，他对本文提出了很多有益的建议。张老师思维敏锐，视野开阔，他严谨求实的工作作风和精益求精的科研态度使我受益匪浅。短短的三年时间，张老师的治学态度已经深深地感染了我，并为我今后的工作打下了坚实的基础，在此谨致以衷心的感谢！

作者还要特别感谢余跃庆教授对本人的无私指导。余老师学识渊博而平易近人，治学严谨却不拘一格。他指导的每周实验室学术例会，为我的课题研究带来了思维的创新；他淡泊名利、专心治学的学者风度更是深深地影响了我，为我树立了人生的榜样。

作者还要感谢赵京、伍良生、许东来、苏丽颖、杨建新等老师在前期课程学习和后期研究工作中给与的指导与帮助。

北京工业大学电控学院的解晖同学在课题的研究中提出了很好的建议，谨在此表示衷心的感谢。

对学友刘迎春、陈炜、杜启联、陈知泰、杜兆才、宋小康、张龙君、陈晏、王雯静、马春荣、黄用华等在生活和学习中给予的热情帮助表示感谢。

特别还要感谢作者的父母及爱人，感谢他们在生活上、精神上无微不至的关心与支持，才使得作者充实而愉快地度过了艰苦的研究生生活。

最后，还要对北京市教委发展项目和北京市科技新星项目的大力资助表示感谢。