

摘要

利率是金融市场上的基础价格变量之一，利率期限结构是由某个时点上不同期限的利率所组成的一条曲线。市场利率的动态规律和利率期限结构动态模型一直以来就是金融研究的重要领域之一，国外对这方面已有深入的研究，国内在这方面的研究则开展较晚，尚未形成对利率期限结构动态模型的系统性的研究，而且对这方面的研究结论也存在着较多争议。本文在总结国内外有关利率期限结构的理论和研究成果的基础上，对中国国债的利率期限结构动态模型进行了相关实证研究，得出了一些富有现实意义的结论。

论文首先对国内外有关利率期限结构的研究进行了比较详细的介绍，包括利率期限结构形成理论、静态估计方法、利率变动的行为特征和主成分分析、利率期限结构动态模型及估计方法。在随后实证研究的前两部分中，本文用上海证券交易所的国债交易数据，对我国国债利率期限结构进行了静态估计，并利用所得利率期限结构数据对利率的变动进行了主成分分析，得出了关于我国利率变动行为特征的一些基本结论。在实证研究的最后一部分中，本文针对短期利率和收益率曲线的变动建立了模型，通过分析模型的估计结果，对中国的利率变动的行为特征进行了研究，并探讨了如何对利率动态行为建模。最后，在对实证研究结果总结的基础上，本文探讨了未来的研究方向。

本文的创新之处是：通过对我国国债利率变动的主成分分析，发现影响不同期限利率变动的因素并不相同，并据此提出用中短期利率和长期利率作为驱动收益率曲线变动的两个因素，建立双因素模型来拟合中国市场利率的变动。

本文的主要结论有：(1) 中国的市场利率也具有均值回复现象和水平效应，期限短的利率具有更快的均值回复速度和更强的波动性；(2) 影响不同期限利率变动的因素并不相同，影响中短期利率变动的主要为水平因素，而影响长期利率变动的主要为水平和斜率因素；(3) 对于中短期利率的动态变化，只需建立单因素的模型，而如果要综合描述收益率曲线的变动，可以采用以中短期利率和长期利率的变动为两个因素的双因素模型。

关键词：期限结构；主成份分析；最大似然法

Abstract

The interest rates is one of the fundamental price variables in the financial markets, term structure of interest rate is the curve formed by interest rates of different maturities. Modeling the dynamic of interest rate is always one of the most important topics of finance research. The foreign academic researchers have done much research on this topic and developed so many term structure models. Domestic research on this topic began from recent years, academic researchers have not made a systematic research and there were still many arguments on some problem. Based on former theories and research, this dissertation makes some empirical research of modeling the term structure of interest rates in China and reaches some reasonable conclusions.

This dissertation reviews systematically the research on term structure at first, including hypothesis of term structure formation, methods of estimating term structure, dynamic behavior of interest rate, principal component analysis of term structure, dynamic models and methods of estimating these models. In the following empirical test part, this dissertation uses the historic Treasury-bond price data of Shanghai Stock Exchange to estimate term structure and studies the dynamic behavior of interest rates in China, including the shape of term structure, main factors of dynamic change of term structure. In the last part of empirical test, this dissertation uses two different dynamic models, such as two-factors CKLS and two-factor generalized models to model the dynamic of short-term interest rate and yield curve, and gets some conclusions to explaining the dynamic behavior of term structure of China. In the end, this dissertation summarizes my research and discusses prospect of research in this topic.

The innovation of the dissertation is that by conducting principal component analysis of term structure of China, I find the factors which affect the dynamic behavior of interest rates of different maturities are different, so using short, medium-term rate and long-term rate as two factors to build a two-factors model is reasonable way to modeling the dynamic of interest rates in China market.

The main conclusions of this dissertation are as follows: 1. Interest rates in China

market also show mean reversion and level effect, and the short-term rates have faster mean reversion speed and stronger volatility than long-term rates. 2. The factor which affects the dynamic behavior of short and medium-term rate is level, and the factors which affect the dynamic behavior of long-term rates are level and slope; 3. For modeling the dynamic of short and medium-term rates, it only need to build a one-factor model, but for long-term rates or term structure building a two-factors model is a more suitable choice.

Key Words: Term Structure; Principle Component Analysis; Maximum Likelihood Estimation

第一章 导论

本章简要介绍了选择利率期限结构模型作为研究课题的背景和意义、文章的结构安排以及本文的创新之处。

第一节 研究的背景、目的和意义

利率是借方为在一定期限内使用贷方提供的资金而付给贷方的报酬的一种度量，它是金融市场上的基础价格变量之一。利率期限结构 (term structure of interest rates) 是某个时点上不同期限的利率所组成的一条曲线，它也可以表示为某个时点零息票债券的收益率曲线 (yield curve)。市场利率的动态规律和利率期限结构动态模型一直是金融领域一个十分重要的研究课题。

在研究市场利率动态规律的过程中，国外学者们通过对国外的利率数据的实证研究发现，市场利率存在显著的均值回复（线性漂移）现象，而利率的波动则存在所谓的“水平效应 (level effect)”（即利率波动受到利率水平的影响）。对于利率是否存在非线性漂移，学术界还未有得到统一的结论。为了更准确刻画利率的动态规律，学者们提出了很多模型，如 Vasicek (1977)、CIR (1985)、CKLS (1992)、Brennan-Schwartz (1979)、Ho-Lee (1986)、Hull-White (1990, 1994)、BDT (1990)、HJM (1992) 等。此外，还有针对市场利率变动的非正态性、尖峰厚尾以及波动聚集效应 (volatility clustering) 所提出的更为复杂的模型，如随机波动模型 (stochastic volatility model)、BHK (1996) 加入 GARCH 效应的模型、马尔科夫机制转换模型以及跳跃—扩散模型。

可以看出，国外在研究利率动态规律和期限结构动态模型方面已有长足的进步，得出了一些基本结论，并形成了一套完备的理论体系。而在我国，这方面的研究是近几年才开展起来的。朱世武和陈健恒 (2003) 对利率的变动进行了主成分分析，研究了收益率曲线的主要变动形式。谢赤和吴雄伟 (2002) 通过广义矩法，用中国货币市场的数据，对 Vasicek 模型和 CIR 模型进行了实证检验。林海和郑振龙 (2004) 通过一个可变波动率的纯跳跃模型对中国政府利率变动行为进行了模拟和分析，并在考虑 GARCH 效应的基础上研究了中国市场利率的动态行

为。范龙振（2003）使用两因子 Vasicek 模型对上海证券交易所的国债利率进行了实证分析。这些对研究我国市场利率变动规律和如何建模等问题进行了初步而有益的尝试。

通过对我国在这方面的实证研究的综合考察，笔者发现：国内研究者们建立的模型主要都是用于刻画短期利率的变动，对于收益率曲线变动行为特征建模的则比较少。此外，国内研究很多都集中于验证某些模型，如 Vasicek、CIR、CKLS 等，而对这些模型加以扩展的则比较少。基于这些认识，本文的研究目的就是要综合分析收益率曲线上各点利率的变动特征，并尝试寻找一个合理的模型来刻画我国利率期限结构的动态特征。研究的意义在于：可以为资产定价、金融产品定价、利率风险管理等提供支持。

第二节 文章的结构安排

本文总共分为四章。

第一章是导论。简要介绍利率期限结构动态模型的研究背景、研究目的、研究意义、论文的结构安排、论文的创新和不足之处等。

第二章是文献回顾。主要对国内外有关利率期限结构动态模型的研究进行一个比较全面的文献综述。此章分为五个部分，包括利率期限结构的形成理论、利率期限结构静态估计、利率变动的主成分分析、利率期限结构动态模型以及利率期限结构模型的实证研究成果。

第三章是中国利率期限结构的实证研究。主要是利用中国的实际数据（上海证券交易所国债交易的历史数据）来研究中国市场利率的动态特征及寻找合适的模型来描述利率的变动。为了分析影响中国市场利率变动的因素，笔者对中国利率期限结构进行了主成分分析。本章中还分别用两个模型来拟合短期利率和利率期限结构的变动，模型估计的结果也印证了主成分分析所得到的某些结论，也为如何对中国利率变动行为建模提供了参考。

第四章是本文的结论。主要总结了本文在理论研究、实证分析中的一些重要结论，并对今后进一步研究的方向做了探讨。

第三节 本文的创新和不足之处

本文的创新之处有：

1. 通过对我国国债利率变动的主成分分析，发现影响不同期限利率变动的因素是不同的。对于中短期利率的变动，只用水平因素就能很好的解释；而对于长期利率或收益率曲线上各点利率的变动，需要用水平、斜率和曲度等多种因素来解释。

2. 对于中短期利率变动，本文尝试用双因素 CKLS 模型来拟合。模型估计结果表明两个模型中利率漂移函数的参数比较接近，可以看成是受同一利率水平因素的影响，更为重要的是双因素 CKLS 模型中的两个随机因素具有很高的相关性，即可以将它们看为一个因素，故对于中短期利率变动来说建立单因素动态模型比较合适。对于收益率曲线的变动，本文选择中短期利率和长期利率作为驱动收益率曲线变动的两个因素，建立了双因素模型，并在中短期利率过程的漂移项中加入了非线性漂移。模型估计结果表明中短期和长期利率过程的漂移函数的形式是不同的，反应了它们分别受到不同的利率水平因素，以及斜率和曲度因素的影响。同时，驱动中短期和长期利率的随机因素相关度较低，即不能把它们认为是同一个因素，故将中短期利率和长期利率分别作为驱动收益率曲线的两个不同因素的假设是合理的。

以上两点创新对于研究如何建立的利率期限结构动态模型，以更好的描述利率变动的行为特征具有较好的参考价值。

本文的不足之处体现在：

1. 模型尚不完善。对于中国利率变动的非正态性、尖峰厚尾现象和波动聚集效应，学者们提出在模型中加入 GARCH 效应、机制转换和跳跃因子来提高模型的拟合效果。在本文的实证研究中，有鉴于在模型中增加上述因子会增加不少参数，加大了模型参数估计的难度，故而没有采用，这就使得模型对中国利率变动的解释效果打了不少折扣。

2. 文章中没有对模型的总体拟合效果进行考察，而仅仅是从参数的显著性来检验模型对利率变动行为特征描述的效果。

第二章 文献回顾

第一节 有关利率的基本概念及常用记号的定义

$P(t, T)$: 指 T 时刻到期的零息票债券在 t 时刻的价格。

$R(t, T)$: 指 T 时刻到期的零息票债券在 t 时刻以连续复利计算的到期收益率。

$f(t, T)$: 指 T 时刻到期的零息票债券在 t 时刻的瞬间远期利率。

$r(t)$ 或 r_t : 瞬时无风险利率或称为短期利率。

使用上述记号, $R(t, T)$, $f(t, T)$ 也可以被表示为:

$$R(t, T) = \frac{-\ln P(t, T)}{T - t}$$

$$f(t, T) = \frac{-\partial P(t, T) / \partial T}{P(t, T)} = \frac{-\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$$

于是, 债券价格 $P(t, T)$ 可以表示为:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \text{ 或 } P(t, T) = e^{-\int_s^T f(t, s) ds}$$

第二节 利率期限结构形成理论

利率期限结构是指在某个时点上不同期限的利率所组成的一条利率曲线。利率期限结构形成理论讨论的是某一定时间债券的期限和收益率之间的关系的利率理论。由于不同期限的利率之间存在差异, 所以利率期限结构可能有好几种形状: 向上倾斜、向下倾斜、下凹、上凸等。为了解释这些不同形状的利率期限结构的内在原因及作用机制, 学者们提出了几种不同的理论假设。

— 市场预期理论 (Market Expectation Theory)

美国经济学家 Irving Fisher (1896) 第一个提出了市场预期影响期限结构

形状的假说，后来 I · Hicks 和 F · Lutz 将它发展成了市场预期理论。

市场预期理论假设当前利率期限结构完全取决于对未来利率变化的一种预期，即预期未来即期利率等于远期利率。该假设中隐含着几个重要的前提条件：

1. 投资者对债券的期限没有偏好，投资行为完全取决于预期收益。
2. 所有市场参与者都有着相同的预期。
3. 不同期限的债券之间可以完全替代。
4. 金融市场完全竞争。

在这些假设前提下，债券市场就会通过投资者在不同期限的债券之间的选择和竞争达到均衡。在这个均衡下，相同期限内不同投资方式所获得的预期收益率应该是相同的。

市场预期理论的基本结论是：债券的长期利率是短期利率的函数。该理论对收益率曲线的解释是：

1. 如果未来每年的短期利率一样，则现期长期利率就等于现期短期利率，收益率曲线表现为一条直线。
2. 如果未来的短期利率上升，则现期长期利率将大于现期短期利率，收益率曲线表现为一条向上倾斜的曲线。
3. 如果未来的短期利率下降，则现期长期利率将小于现期短期利率，收益率曲线表现为一条向下倾斜的曲线。

市场预期理论为不同期限债券利率不同的原因提供了一种解释。但这一理论存在着明显的缺陷。首先，它以人们对未来短期债券利率具有某种确定的预期为前提，即社会不存在由不确定性而产生的风险，这与现实生活不符。其次，它认为资金在短期资金市场与长期市场间的转移是完全自由的，事实上，资金的转移受多种因素的影响。再次，它对未来短期债券的利率是如何形成的没有加以说明，由于缺乏短期债券利率形成的基础，长期债券的利率也无法确定。

二 市场分隔理论 (Market Segmentation Theory)

市场分隔理论由诺贝尔经济学奖获得者 F · Modigliani 于 1967 年提出。

该理论认为，期限不同的债券的市场是完全隔离的，每一种期限的债券的利率是由对那种期限的债券的供求关系决定的，而不受其他期限的债券的预期报酬

率的影响。由于不同市场之间的差异以及投资者面临的众多投资限制，比如风险水平的限制、头寸的限制等，他们不会轻易地离开原先的市场而进入一个不同的市场，从而导致了不同市场之间的利率差异。该理论认为期限不同的债券根本没有替代性，不同期限的利率，不论短期或长期都只是由各自的供求情况决定，彼此之间并无交叉影响，因此，不能简单地把长期利率看成是预期的短期利率的函数，长期利率的高低应该取决于长期资金的供求状况。

该假设隐含的前提条件是：

1. 投资者对不同期限的债券有不同的偏好，只关心他所偏好的那种债券的预期收益水平。
2. 投资者对投资组合的调整有一定的局限性。
3. 期限不同的债券是完全不可替代的。
4. 投资者是理性的。

市场分隔理论对收益率曲线的解释如下：

1. 当投资者对短期债券的需求高于对长期债券的需求时，短期债券具有较高的价格和较低的利率水平，长期利率高于短期利率，收益率曲线向上倾斜。通常大多数人宁愿持有短期债券而非长期债券，因而收益率曲线通常是向上倾斜。
2. 当投资者对长期债券的需求高于对短期债券的需求时，长期债券具有较高的价格和较低的利率水平，短期利率高于长期利率，收益率曲线向下倾斜。

三 流动性偏好理论 (Liquidity Preference Theory)

流动性偏好这一概念是由凯恩斯 (Keynes) 首先提出的，它指对持有货币的偏好和需求。以 J·Hicks 为代表的一些凯恩斯主义的经济学家首先将它应用于利率期限结构的分析。

流动性偏好理论是对市场预期理论和市场分隔理论的综合和发展。市场预期理论将不同期限的债券看成是可以完全互相替代的，不同投资方式的预期收益率相等。市场分隔理论则走了另一个极端，认为不同期限的债券之间是完全不可替代的，一种期限债券利率的变动不会影响到另外一种债券，无法解释利率的共同变动。流动性偏好理论则是对二者的综合和发展，它既考虑了投资者的投资偏好，也考虑了不同债券之间的替代性。流动性偏好理论则认为：长期债券收益率等于

预计在长期债券有效期内出现的连续短期收益率，加上与那种债券的相对应的流动性溢价。

该假设的隐含前提条件为：

1. 投资者具有一定的债券偏好，但会受到其他债券的影响，如果其他债券的收益率上升，则对此债券的偏好就可能被抵消。
2. 不同债券之间具有一定的替代性，一种债券的预期收益率会影响到其他债券的预期收益率，但是不是完全替代的。
3. 投资者具有偏好短期债券的倾向，因为他们认为这些投资可以更早地获得需要的资金，同时认为如果投资于较短期的证券，他们将面临较小的“价格风险”（即“利率风险”）。
4. 为了吸引投资者投资于长期债券，必须有一个正的时间溢价作为补偿，这个溢价就是流动性溢价（也称为“期限溢价”）。

流动性偏好理论对收益率曲线的解释如下：

1. 当短期利率较低时，市场预期短期利率在未来会上升，因此加上一个正的流动性溢价，长期利率会大大高于即期短期利率，收益率曲线出现一个很陡的上倾；当预期利率水平不变或有小幅上升，收益率曲线上升平缓。
2. 当市场预期短期利率在未来会小幅下降，收益率曲线呈水平状。
3. 当市场预期短期利率在未来会急剧持续下降时，长期利率尽管有正的流动性溢价，但仍然低于即期短期利率，从而使收益率曲线向下倾斜。

第三节 利率期限结构的静态估计

利率期限结构可以表示为在某个时点不同期限的零息票债券的到期收益率所组成的一条收益率曲线。而所谓利率期限结构的静态估计，就是指对某个时点的收益率曲线的估计。

在一个存在零息票债券的市场上，通过直接求出零息票债券的到期收益率就可以估计出某个时点的利率期限结构，但是如果不存在零息票债券或者其数量十分有限，那么这种方法就受到了很大的限制。由于在中国债券市场上大部分国债都是息票债券，零息票债券的数量很少，而且这些息票债券在息票率、付息时间上都存在着很大的差异。因此，就必须通过一定方法对这些息票进行剥离和分

析。具体的方法有两种选择：一种是息票剥离法（bootstrap method），另一种是样条逼近法（spline approximation）。

一 息票剥离法

息票剥离法是将票息从债券中进行剥离并在此基础上估计无息票债券利率水平的一种方法。具体的计算方法为：

首先根据经验假设一个最短期的利率水平 $r(T_0)$ 。假设市场上有两种债券，价格分别为 P_1 , P_2 , 短期债券的到期日为 T_1 , 到期之前不支付利息；长期债券的到期日为 T_3 , $T_3 > T_1$, 在 T_2 时刻支付一定的利息 C 。由于短期债券到期之前不再支付利息，因此它就类似于零息票债券。其到期收益率为：

$$r(T_1) = \frac{\ln(M_1) - \ln(P_1)}{T_1 - T_0}, \quad M_1 \text{ 是短期债券到期时获得的本息和}.$$

而对于长期债券的处理，则要分为两种情况：

1. 当 $T_2 < T_1$ 时，就可以通过对期限为 T_0 、 T_1 利率水平的线性插值求出期限为 T_2 的利率水平：

$$r(T_2) = \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} r(T_0) + \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_0} r(T_1), \quad \text{且由于 } P_2 = C e^{-r(T_2)(T_2 - T_0)} + M_2 e^{-r(T_3)(T_3 - T_0)},$$

$$\text{所以 } r(T_0) = \frac{\ln(M_2) - \ln(P_2) - C e^{-r(T_2)(T_2 - T_0)}}{T_3 - T_0}.$$

2. 当 $T_2 > T_1$ 时，可以假设 T_3 期的利率水平为 $r(T_3)$ ，则 T_2 期的利率水平为：

$$r(T_2) = \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_1} r(T_0) + \frac{T_3 - T_2}{T_3 - T_1} r(T_3), \quad \text{且 } P_2 = C e^{-r(T_2)(T_2 - T_0)} + M_2 e^{-r(T_3)(T_3 - T_0)}$$

通过单变量求解就可以计算出 $r(T_3)$ ，利用 $r(T_0)$, $r(T_3)$ ，就可以对 T_0 和 T_3 之间的利率进行线性插值估计。

二 样条逼近法

样条逼近法主要通过一个贴现函数将不同时期的票息和本金贴现到现在，通

过这些贴现的总值和目前实际债券价格的拟合对贴现函数进行估计,从而估计出不同期限的利率水平。

最先从附息国债中估算期限结构的是 McCulloch (1971, 1975), McCulloch 率先应用二次、三次多项式样条法于期限结构模型,为该领域开创了一片新天地,并引发了许多学者对其样条方法作出改进。比较著名的有 Vasicek 和 Fong(1982)的指数样条法和 Steeley (1991) 的 B 样条。由于完全的样条方法往往设置多个节点,且必须保证样条函数在节点处的高度光滑,因而涉及到的待估参数也较多。Nelsen 和 Siegel (1987) 倡导了运用样条函数但不设置内部节点的所谓“节约型”模型,意在减少参数估计的数目。后来 Svensson (1994) 对该模型的参数进行了一些扩展,使得该模型在拟合时更具灵活性。这些不同的估计方法各自有其优缺点,而且被不同的国家和机构所采用。下面,笔者将介绍一下多项式样条法 (polynomial splines)。

多项式样条法假设利率期限结构以贴现因子表示,而且贴现因子是到期期限 t 的连续函数 $D(t)$, 并进一步假设这个函数是一个多项式分段函数。在运用此函数时,仔细选择多项式的阶数是至关重要的,阶数的多少决定了利率曲线的平滑程度和拟合程度,同时也影响到待估参数的数量。

朱世武和陈健恒 (2003) 运用此方法,对我国上海证券交易所国债利率期限结构的静态估计方法做了研究^①。他们将多项式样条函数的阶数定为 3, 因为当多项式样条函数为二阶时, $D(t)$ 的导数 $D^{(2)}(t)$ 是离散的,而且当阶数过高 (四阶或五阶) 时,验证三阶或四阶导数是否连续的难度将增大。

因此,三阶多项式样条函数的形式如下:

$$D(t) = \begin{cases} D_1(t) = a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 \\ D_2(t) = a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3 \\ D_3(t) = a_3 + b_3 t + c_3 t^2 + d_3 t^3 \\ \dots \end{cases}$$

对于即期贴现率函数 $D(t)$ 来说,显然有 $D(0)=1$ 。另外,为了保证分段函数的平滑性以及在分段点的平滑过渡,必须保证贴现函数在整个定义域内连续且

^①朱世武, 陈健恒. 交易所国债利率期限结构实证研究 [J]. 金融研究, 2003, (10): 65-68.

一、二阶可导，还需要满足如下约束条件：

$$\begin{cases} D_i(T_i) = D_{i+1}(T_i) \\ D_i^{(1)}(t) = D_{i+1}^{(1)}(t) \\ D_i^{(2)}(t) = D_{i+1}^{(2)}(t) \end{cases}$$

对于样条数量的取值也是一个值得注意的问题。因为样条的数量决定了拟合程度和曲线的平滑度。样条值越大，则以残差项方差表示的拟合程度越好，但曲线平滑度越差。反之，样条值越小，曲线越平滑，估计的参数也较少，但曲线拟合的程度不高。鉴于上交所的固定附息国债的数量只有十多只，为了减少参数的数量，保证每一个函数段中都含有几个样本债券，他们将样条数量定为 3。这样既保证了有足够的拟合程度，也减少了需要估计的参数。

考虑到每个分段函数中，相应的国债数量要保持平均以及为了利率曲线的平滑过渡，函数的分段点最好接近国债收益率曲线的拐点。因此他们选择 5 年和 8 年作为函数的分界点。

在确定了样条数量和函数的分界点以后，就能够最终确定函数的形式。

$$D(t) = \begin{cases} D_0(t) = a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 & t \in [0, 5] \\ D_5(t) = a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3 & t \in [5, 8] \\ D_8(t) = a_3 + b_3 t + c_3 t^2 + d_3 t^3 & t \in [8, 20] \end{cases}$$

其中，函数必须满足以下的 7 个约束条件：

$$\begin{cases} D_0^{(i)}(5) = D_5^{(i)}(5) \\ D_5^{(i)}(10) = D_8^{(i)}(10) & i = 0, 1, 2 \\ D_0(0) = 1 \end{cases}$$

利用约束条件，就将互相独立的参数缩减到了 5 个

$$D(t) = \begin{cases} D_0(t) = 1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 & t \in [0, 5] \\ D_5(t) = 1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 [t^3 - (t-5)^3] + d_2 (t-5)^3 & t \in [5, 8] \\ D_8(t) = 1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 [t^3 - (t-5)^3] + d_2 [(t-5)^3 - (t-8)^3] + d_3 (t-8)^3 & t \in [8, 20] \end{cases}$$

在确定了样条函数的形式后，可以将息票债券的现金流贴现以得到样本债券的理论定价，再结合债券的实际价格就可以估计出样条函数的参数。参数估计采用的是加权最小二乘法，参数估计值应使债券理论价格与实际价格的差的加权平方和最小。由于债券价格的波动主要受利率变动的影响，而在利率变动同样大小的条件下，其价格同时受其久期 (duration) 和凸度 (convexity) 影响，债券样本中长期品种的价格波动性应大于短期品种，因此就产生在进行收益率曲线拟

合时无法避免的样本异方差特征。为了解决这个问题，需要采用加权最小二乘法，

权数 ω_i 设定为： $\omega_i = \frac{1/Dur_{M_i}}{\sum 1/Dur_{M_i}}$ ，其中 Dur_{M_i} 为第 i 种国债的久期。

三 两种估计方法的比较

通过上面对两种估计方法的描述和分析，我们可以对两种方法进行比较：

1. 息票剥离法是在假定两个最近期间之间的利率服从线性变化关系的条件下进行估计的，而样条逼近法则是在假定整个样本区间服从某种非线性关系的条件下进行估计的。

2. 息票剥离法是单个利率水平从短期到长期的不断单变量求解，最后将这些利率水平连接起来，就构成利率期限结构；而样条逼近法则是对整条利率期限结构的同时估计，使用的是一种非线性拟合的办法。

3. 息票剥离法由于是不断地进行单变量求解，因此它的计算误差相对比较小。但是由于假定线性关系，也就是某个时期的利率水平只跟最近两个时期的利率水平线性相关，因此对利率随期限变动的描述上就显得简单。样条逼近法则是进行曲线的拟合，误差比起单变量求解来说会比较大，但它可以考虑更为复杂的利率期限结构的形状。

4. 息票剥离法是不断地求解，计算相对比较麻烦；而样条逼近法则是估计出贴现函数，对利率的计算和估计则要简单得多。

5. 由于样条逼近方法在样条函数以及分割区间上存在着比较大的选择空间，因此最后的估计结果也会有差异。息票剥离法的利率期限结构估计则是为样条逼近法中分割区间的选择提供了一个标准，因为息票剥离法的误差很小，因此样条逼近法如果能够得出和息票剥离相近的结果，则既可以避免误差过大的缺陷，又可以发挥它非线性以及计算简单的优势。

第四节 利率期限结构主成分分析

利率期限结构是不同期限的利率所构成的一条收益率曲线，它可能有不同的形状，如水平的、向下凹、向上凸等，而且它的变动也有平行移动和非平行移动等。由于利率直接和债券的收益率相关，这些不同形状的利率期限结构以及不同

移动的方式对债券组合的收益会产生很大的影响，并进而影响债券组合管理的技术。为了衡量利率期限结构的形状变动对债券投资组合的影响并在此基础上进行有效的管理，众多的学者对利率期限结构本身的形态和变动规律作了大量的深入的研究。

一 主成分方法介绍

主成分分析是一种把多个指标化为少数几个综合指标的统计方法。它的目的在于通过适当的数学变换，用少数几个有代表性的综合指标代替原始指标，并且保留原始指标尽量多的信息，这就是主成分分析的实质。其中的综合指标叫做原始指标的主成分。在利率曲线变动的研究当中，由于将即期利率表示成了期限的连续函数，因此可以从连续的期限中选出一些特定的离散的期限，这些期限所对应的收益率曲线上的点被称为“主干点”，主干点所对应的利率为主干利率，随着时间的推移，主干利率的变化就是原始变量，而主成分可以表示成这些主干利率变化的线性组合，即：

$$P_i = \sum_{j=1}^n P_{i,j} \cdot \Delta r_j$$

其中： P_i 是主成分， Δr_j 是收益率曲线上主干利率的变化， $P_{i,j}$ 是主成分的系数， $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。

主成分系数矩阵可以由国债市场上的国债交易数据求得。方法是：选取一定数目的主干利率，在一段时间内按照一定的间隔（如在一年内每隔一周）算得其各自的变化，得到由各个期限所对应的主干利率的变化构成的矩阵 M ，再求得该矩阵的协方差矩阵 Σ ，可以证明 Σ 的特征向量构成的矩阵就是主成分的系数矩阵，即通过求解 $\Sigma \cdot \begin{bmatrix} P_{i,1} \\ \vdots \\ P_{i,n} \end{bmatrix} = \lambda_i \cdot \begin{bmatrix} P_{i,1} \\ \vdots \\ P_{i,n} \end{bmatrix}$ 得到。

一条国债利率曲线的整体波动性是用来度量该曲线的所有主干利率如何联合波动的，在数量上等于上述所得到的 λ_i 之和，即整体波动性 $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ ；而某个主成分对整体波动性的解释能力，即该主成分所能解释的整体波动性的百分比，可

以计算为解释比例 $\varepsilon_i = \lambda_i / \sum_{i=1}^n \lambda_i$ 。主成分的解释比例可以提供收益率曲线动态性的重要信息，它们可以用来决定要能够足够精确的描述收益率曲线的变动需要多少个主成分。主成分分析的重要价值在于它表明收益率曲线的变化可以只用少数几个驱动因素来解释，如Brennan和Schwartz模型、HJM多因素模型一样，更进一步，完全可以只选择一个变量来描述整个收益率曲线的变动，这就是单因素模型。

二 主成分分析的实证发现

利率期限结构主成分分析所能做的就是揭示了数据所暗含的利率变动潜在因素的统计形式。其经典文献是 Litterman 和 Scheinkman (1991) 的论文，他们称这些影响利率变动的潜在因素为水平 (level)、倾斜度 (steepness) 和曲度 (curvature)^②。Dai 和 Singleton (1999) 则称这些因素为：水平 (level)、斜率 (slope) 和蝴蝶式 (butterfly)^③。

Litterman 和 Scheinkman 通过对美国零息票债券和息票债券的方差分解研究了不同因素在利率期限结构变动中的重要性，发现对于从 6 个月期到 18 年期的各个期限的债券，其每周收益率的变动可以由三个因素变动的组合来解释，即前三个“主成分”，分别为水平因素、倾斜度因素和曲度因素，其中水平因素是最主要的因素，可以解释 90% 以上的变动性。他们还研究了这三个因素在利率期限结构变化中的作用：

1. 水平因素对应于最大特征根，反映了平行移动因素在利率期限结构变动中发挥着主导作用。收益率对水平因素变动敏感性与债券的到期期限长短无关是水平因素的重要特征，各种到期期限的债券收益率均受到该因素的显著影响。当然，利率期限结构的完全平行移动只有市场预期短期利率和长期利率以相同数量变化时才会出现。

2. 倾斜度因素对应于第二特征根，它是影响短期收益率和长期收益率朝不同方向变化的重要因素，当市场预期短期利率将发生变动，而长期利率维持不动（或者相反）时，利率期限结构就会发生倾斜移动。

^② Litterman R. & J. Scheinkman. Common Factors Affecting Bond Returns [J]. Journal of Fixed Income, 1991, 1(1): 54-61.

^③ Dai Q. & K. Singleton. Specification Analysis of Affine Term Structure Models [J]. Journal of Finance, 2000, 55(1): 385-407.

3. 曲度因素对应于第三特征根，发生的背景比较复杂，当市场对收益率的波动率预期发生改变，市场的分割造成特定期限的债券供求关系发生暂时失衡，或者利率风险的期限溢酬发生变化等情况出现时，都会造成利率期限结构的曲度移动。

随后，研究人员们采取类似的方法，针对不同国家的债券市场展开大量的研究，如 Buhler 和 Zimmermann (1996), D' Ecclesia 和 Zenios (1994), Sherris (1994), Martellini 和 Priaulet (2000), Maitland (1999), Schere 和 Avelaneda (2000), Chapman 和 Pearson (2001) 分别对德国、瑞士、意大利、澳大利亚、法国、南非、拉美等国家和地区的利率期限结构进行了主成分分析和因子分析。

第五节 利率期限结构动态模型

总的来说，利率期限结构动态模型可以分为两类：均衡模型和无套利模型。均衡模型 (equilibrium model)，是根据市场的均衡条件求出利率所必须遵循的一个过程，在这类模型中，相关的经济变量是输入变量，利率水平是输出变量。无套利模型 (no-arbitrage model)，通过相关债券等资产之间必须满足的无套利条件进行分析，此时利率水平是一个输入变量，相关金融工具的价格是输出变量。必须特别指出的是，均衡模型和无套利模型都是建立在风险中性世界中，所描述的均是风险中性世界中的利率变动行为。

一 均衡模型

1. 单因素均衡模型

单因素均衡模型中的短期利率过程通常用下列方程来表示：

$$dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t)dw_t$$

该式表明短期利率的变动可以分解成两部分：在时段 $(t, t+dt)$ 内的漂移量 $\mu(r_t)dt$ 和由布朗运动代表的随机冲击 dw_t ，随机冲击对利率变化的影响用瞬时波动性 $\sigma(r_t)$ 衡量。 $\mu(r_t)$ 和 $\sigma(r_t)$ 只与当前的利率水平 r_t 有关，这体现了利率的无记忆性。

忆性。它意味着只要当前的利率水平中包含了全部过去利率的信息，则过去的记忆对未来的利率预测是毫无帮助的。

(1) Merton 模型

Merton (1973) 最先提出了一个单因素的均衡模型，它假设在风险中性的世界中，短期利率的动态变化服从以下随机微分方程：

$$dr_t = \mu dt + \sigma dw_t$$

其中， μ 和 σ 为正的常数，分别为 r_t 的均值和标准差， w_t 是标准布朗运动。

给定在时刻 s 的信息集，在时刻 t ($t \geq s$)，短期利率 r_t 服从正态分布：

$$r_t | F_s \sim N(r_s + \mu(t-s), \sigma^2(t-s))$$

给定在时刻 s 的信息集，在时刻 t ($t \geq s$)，到期收益率 $R(t, T)$ 服从正态分布：

$$R(t, T) | F_s \sim N(R(s, T) + \mu(t-s), \sigma^2(t-s))$$

Merton 模型的缺陷是过于简单，由于均值 μ 和标准差 σ 固定为常数，所以利率可能取负值，且无法反映利率的均值回复现象，与实际情况不符。

(2) Vasicek 模型

Vasicek (1977) 提出了第一个短期利率满足均值回复性的模型，它假设在风险中性的世界中，短期利率的动态变化服从以下随机微分方程：

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dw_t$$

其中， k ， θ 和 σ 为正的常数，分别为 r_t 的均值回复速度、长期均值和标准差， w_t 是标准布朗运动。

给定在时刻 s 的信息集，在时刻 t ($t \geq s$)，短期利率 r_t 服从正态分布：

$$r_t | F_s \sim N(\theta + (\theta - r_s)e^{-kt}, \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt}))$$

给定在时刻 s 的信息集，在时刻 t ($t \geq s$)，到期收益率 $R(t, T)$ 服从正态分布：

$$R(t, T) | F_s \sim N(\mu_R(s, t), \sigma_R^2(s, t))$$

$$\mu_R(s, t) = (1 - e^{-k(t-s)})(R(t, \infty) + \frac{1 - e^{-kT}}{kT}(\theta - R(t, \infty)) + \frac{\sigma^2(1 - e^{-kT})^2}{4k^3T}) + e^{-k(t-s)}R(s, T)$$

$$\sigma_R^2(s, t) = (\frac{1 - e^{-kT}}{kT})^2(1 - e^{-2k(t-s)})\frac{\sigma^2}{2k}$$

与 Merton 模型相比, Vasicek 模型满足了均值回复的特性。 r_t 是一个连续的马尔科夫 (Markov) 过程, 未来的短期利率仅与现在的利率水平有关, 而与短期利率的历史值无关。Vasicek 模型中波动率也是一个常数, 没有考虑到利率水平对波动率高低的影响以及波动率本身的 GARCH 效应等, 且它没有考虑 r_t 的不连续变动, 即没有考虑重要事件造成的“跳跃”, 故该模型不能反映出 r_t 所有的行为方式。此外, 由于 r_t 的条件分布是正态分布, 故 r_t 有可能取负值。

(3) CIR 模型

Cox, Ingersoll 和 Ross (1985) 提出了著名的 CIR 模型, 它假设在风险中性的世界中, 短期利率的动态变化服从以下随机微分方程:

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dw_t$$

其中, k , θ 和 σ 均为正的常数, r_t 围绕利率的长期均值 θ 上下波动, k 为均值回复速度, 短期利率 r_t 的标准差与利率水平的平方根成正比, w_t 是标准布朗运动。

给定在时刻 s 的信息集, 在时刻 t ($t \geq s$), 短期利率 r_t 服从非中心的 χ^2 分布:

$r_t | F_s \sim \chi(2\nu, 2q+2, 2u)$, 自由度为 $2q+2$, 非中心参数为 $2u$, 其中:

$$\nu = \frac{2k}{\sigma^2(1 - e^{-k(t-s)})}r_s, \quad q = \frac{2k\theta}{\sigma^2} - 1, \quad u = \frac{2k}{\sigma^2(1 - e^{-k(t-s)})}r_s e^{-k(t-s)}$$

根据这个分布, $r(t)$ 的均值和方差分别为:

$$E(r_t | F_s) = \theta + (r_s - \theta)e^{-k(t-s)}$$

$$V(r_t | F_s) = r_s \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-k(t-s)})^2$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时，其极限分别为 θ 和 $\theta \frac{\sigma^2}{2k}$ 。

到期收益率 $R(t, T)$ 则线性依赖于 r_t 和 $R(t, \infty)$ 。

CIR 模型中的利率过程 $r(t)$ 具有非负性。从公式可知，当 $r_t \rightarrow 0$ 时，漂移项恒为正数，而扩散系数 $\sigma\sqrt{r_t}$ 也以利率平方根的速度趋近于零，这表明利率的波动性也趋近于零，从整体来看预期的利率变化 dr_t 为正数，保证了利率不会降到零以下。CIR 模型中的利率过程 r_t 具有均值回复性，回复速度为 k 。

(4) CKLS 模型

Chars, Karolyi, Longstaff 和 Sanders (1992) 提出了一个基本的利率过程模型，即 CKLS 模型：

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dw_t$$

CKLS 模型有四个参数，当对这些参数添加一定的限制以后，可以得到几乎所有的单因素期限结构模型，如表 2.1 所示。

表 2.1：不同单因素利率期限结构模型的参数限制

模型	k	θ	σ	γ
Merton (1973)	无限制	0	无限制	0
Vasicek (1977)	无限制	无限制	无限制	0
CIR (1985)	无限制	无限制	无限制	0.5
Dothan (1978)	0	0	无限制	1
B-S (1973)	无限制	0	无限制	1
Cox-Ross (1976)	无限制	0	无限制	无限制
CKLS (1992)	无限制	无限制	无限制	无限制

CKLS 模型作为描述利率动态过程的模型，最大的优点就是考虑了利率的水平效应 (level effect)，即利率水平越大，其波动越剧烈。大多数的模型将其粘性系数 γ 限定为一个固定的值，这样作的原因纯粹是使得模型可以得到解析解，然而当用历史数据估计模型时，发现这些模型往往不能很好的解释利率的动

态行为，因此将 γ 视为一个参数是非常必要的。

(5) 小结

单因素均衡模型一般具有三类参数：均值回复速度、长期均值水平与波动率参数。在一定程度上，它们可以拟合初始利率期限结构、初始波动率期限结构和短期利率波动率的路径。但是这类模型都存在以下缺点：无法准确拟合现行的利率期限结构，无法准确描述期限结构的变动。

2. 多因素均衡模型

单因素均衡模型把短期利率 $r(t)$ 作为解释期限结构的唯一变量，也就是说认为不同期限债券的价格都是受同一个随机冲击量 $d\omega_t$ 的驱动，这种同源驱动性也就意味着不同期限的即期利率之间相关系数为1，这与实证研究的发现并不相符。

实证研究发现：不同期限的收益率之间的相关系数不为1。到期日接近的债券收益率之间的相关系数高，而到期日分散的债券收益率之间的相关系数明显较低。短期利率的波动性不是仅服从单因素均衡模型中简化的假设，如单因素均衡模型中假定短期利率的波动性是常数（Merton, Vasicek 模型）或取决于以前的利率水平（CIR 模型），而是具有更复杂的结构。由于利率衍生品的定价依赖于对短期利率波动性的假定，这一缺陷影响了利率衍生品的定价的准确性。单因素均衡模型一般不能拟合期初的市场债券价格。

因此，多因素模型是单因素模型一个自然的发展，其背后的思路是期限结构的动态变化是受多个因素驱动的，这些因素可以是宏观政策的冲击、当前的利率水平、收益率曲线的斜率、收益率曲线的曲率等等。

(1) Brennan-Schwartz 模型

Brennan 和 Schwartz (1979) 提出了一个双因素模型，在这个模型中，利率的期限结构依赖于短期利率 $r(t)$ 和长期利率 $I(t)$ ，其中长期利率定义为：

$$I(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T)$$

Brennan-Schwartz 模型的最一般形式为：

$$\begin{cases} dr(t) = \mu_1(r, l, t)dt + \sigma_1(r, l, t)dw_1(t) \\ dl(t) = \mu_2(r, l, t)dt + \sigma_2(r, l, t)dw_2(t) \end{cases}$$

这里 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ 都是 $t, r(t), l(t)$ 的函数, $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 是两个相关标准布朗运动, 相关系数为 ρ (常数), 表明该模型认为短期利率 $r(t)$ 的水平和波动性会影响到 $l(t)$ 。

由于上述模型中的 $r(t)$ 和 $l(t)$ 都没有均值回复性, Brennan 和 Schwartz (1982) 对模型进行了改进:

$$\begin{cases} dr(t) = [a_1 + b_1(l(t) - r(t))]dt + r(t)\sigma_1 dw_1(t) \\ dl(t) = l(t)[a_2 + b_2r(t) + c_2l(t)]dt + l(t)\sigma_2 dw_2(t) \end{cases}$$

其中 $a_1, b_1, \sigma_1, a_2, b_2, c_2, \sigma_2$ 是常数, 该模型一般不能求出解析解。

Hogan 于 1993 年指出, 该模型可能出现在有限时间内长期利率趋于无穷大的情况, 这与利率的基本特性不符, 也违反了无套利机会的要求, 这是该模型的主要缺陷^④。

Dybvig, Ingersoll 和 Ross (1996) 证明了如果排除了套利机会则模型中的长期利率不能是下降的^⑤, 故在 Brennan-Schwartz 模型的特殊形式中隐含着套利机会。

Brennan-Schwartz 模型是所有双因素模型中最贴近主成份分析框架的一个模型。它假设收益率曲线的变动行为可以用两个不可观测的环境变量 u_1 和 u_2 的运动来解释, 其特殊情形是使用可以直接观测到的短期利率和长期利率。在满足一定条件时, 可以理解为短期利率和长期利率是收益率曲线的驱动因素。因此, Brennan-Schwartz 模型可以认为是用利率水平(长期利率)和斜率(长、短期利率之差)来解释期限结构的。

Brennan-Schwartz 模型虽然使用的是长期利率这一特殊例子, 但是更重要的是它指出了双因素建模的一个发展方向。我们能否任意选择两个相隔较远的期限的收益率, 仿照 Brennan-Schwartz 的方法建立一个模型? 试想若某一种衍生品的价格只取决于收益率曲线上这两点之间的相对变动关系, 则这种建模思路很

^④ Hogan M. Problem in Certain Two-Factor Term Structure Models [J]. Annals of Applied Probability, 1993, (5).
^⑤ Dybvig J. E., Ingersoll Jr. and Ross S. A. Long Forward and Zero-coupon Rates can never fall [J]. Journal of finance, 1998, (136).

有实际价值。事实上，正是沿着这一思路发展，Schaefer 和 Schwartz (1984) 选择了长期利率和长短期利率之间的利差作为两个因素来建模。

另一种建模的思路是把 Vasicek 模型和 CIR 模型扩展到多因素的情形，其主要着眼点不再是从收益率曲线上选择几个代表点，而是以短期利率 $r(t)$ 为核心，把 $r(t)$ 的方差作为第二个因素引入。这就是下面将要介绍的 Fong-Vasicek 和 Longstaff-Schwartz 模型。

(2) Fong-Vasicek 模型

主成份分析指出收益率曲线的斜率可以作为加入模型的第二个因素，从而增加对收益率波动率的解释力度。沿着这种思路，任意两个不同期限的利率或其线性组合都可以用来构造两因素模型，也可以用短期利率与长期利率之间的利差 (spread) 作为第二个因素。

Dybvig (1988) 置疑了这种做法的合理性，他指出如果研究的目的局限于解释利率和债券价格的波动性，那么加入斜率因子确实可以很好地解释 95% 的方差；但是如果目的是为期权等衍生品定价，第二个因素的贡献微乎其微，此时应该把第二个因素改为主成分分析中得到的第一个因素的方差，才能在利率衍生品定价中发挥显著的作用^⑥。

沿着这种思路 Fong 和 Vasicek (1991) 将原 Vasicek 模型扩展到两因素情形，其重要改进就是在原来服从 Ornstein-Uhlenbeck 过程的 $r(t)$ 中增加了随机方差项 $v(t)$ 。

$$\begin{cases} dr(t) = a(\bar{r} - r(t))dt + \sqrt{v(t)}dw_1(t) \\ dv(t) = b(\bar{v} - v(t))dt + \xi\sqrt{v(t)}dw_2(t) \end{cases}$$

\bar{r} 和 \bar{v} 分别是短期利率 $r(t)$ 和随机 方差 $v(t)$ 的均值， $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 是相关的标准布朗运动。

Fong-Vasicek 模型下 $r(t)$ 和 $v(t)$ 都具有均值回复性，回复速度分别为 a 和 b 。
 $v(t)$ 是非负的，且服从平方根过程。由于冲击项 dw_i 的波动系数 $\sqrt{v(t)}$ 是非负的，

^⑥ Dybvig J. E., Jr. Ingersoll and S. A. Ross. Long Forward and Zero-coupon Rates can never fall [J]. Journal of Finance, 1998, (136)

并且与 $r(t)$ 的水平无关，所以当 $r(t) \rightarrow 0$ 时， $r(t)$ 的预计变动的偏移量虽然一定是正数，但是其波动性不会相应减少，从而使 $r(t)$ 可能小于零。

(3) Longstaff-Schwartz 模型

Longstaff 和 Schwartz (1992) 在 CIR 一般均衡框架下提出了一个两因素模型，他们选择了 $r(t)$ 和 $v(t)$ 的方差 $v(t)$ 作为考虑的因素，但是他们没有把 $r(t)$ 和 $v(t)$ 直接作为模型中的因素，而是作为两个经济因素 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的线性组合。Longstaff 和 Schwartz 并没有给出 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的具体含义，只给出了它们所满足的微分方程：

$$\begin{cases} dX(t) = (a - bX(t))dt + c\sqrt{X(t)}dw_1(t) \\ dY(t) = (d - eY(t))dt + f\sqrt{Y(t)}dw_2(t) \end{cases}$$

这里的 a, b, c, d, e, f 是常数，且 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 相互独立。易知 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 具有均值回复性，且均保持非负性。 $r(t)$ 和 $v(t)$ 与 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的关系是：

$$\begin{cases} r(t) = \mu c^2 X(t) + (\theta - \sigma^2) f^2 Y(t) \\ v(t) = \mu^2 c^4 X(t) + (\theta - \sigma^2)^2 f^4 Y(t) \end{cases}$$

Longstaff-Schwartz 模型下的债券价格 $P(t, T)$ 与 $r(t)$ 和 $v(t)$ 的指数线性相关。Longstaff-Schwartz 模型的形式过于复杂，所以只能用数值方法求解，且模型中的输入参数太多，要估计这些参数很困难，因此限制了它的应用。

(4) 小结

多因素模型比单因素模型能更好地接近现实，它们表明不同到期日的债券的价格是不完全相关的，并且能对实际利率及名义利率分别建模。多因素模型的另一个特点是当到期日趋近于无穷大时，模型收益率的极限仍是随机的，这一点不同于单因素模型收敛于一个常数的情形。

多因素模型的优越性是以更大的复杂性为代价的，这表现为通过多因素模型为利率衍生品定价一般得不到解析解，必须使用数值方法，而且使用数值方法来求解也十分困难，所以在实际应用中模型中因素的数量不能设定得太多。

表 2.2 归纳了一些常见多因素利率期限结构模型。

表 2.2：主要多因素利率期限结构模型的特征

模型	随机因素
Brennan-Schwartz	短期利率 $r(t)$ 和长期利率 $l(t)$
Fong-Vasicek	短期利率 $r(t)$ 和随机方差项 $v(t)$
Longstaff-Schwartz	两个没有说明的因素 X , Y

二 无套利模型

单因素和多因素模型都是从均衡分析框架下导出的，因此它们本身不会存在套利机会，否则市场就不是处于均衡状态了。均衡模型中的参数可以从历史数据中回归得到。但是由于利率期限结构的行为方式是不断变化的，对历史数据拟合的很好的模型往往不能很好地拟合当前的市场价格。对于利率衍生品的交易者而言，只有能够正确的拟合当前的期限结构的模型才能够保证衍生品的头寸准确地对冲基础资产的风险。

无套利模型就是以市场债券价格（也就是当前的利率期限结构）作为输入变量，并相应为利率衍生品定价的一种方法，因此这一类模型不能发现基础债券中定价的错误。但是就像股票期权中的 Black-Scholes 模型一样，基础资产的定价错误不会影响对衍生品的定价。

均衡分析的着眼点常常在均衡的存在性和均衡的变动情况上，而无套利定价方法是对金融市场中的某项头寸进行估值和定价，分析的基本方法是将这项头寸与市场中其他金融资产的头寸组合起来，构筑起一个在市场均衡时不能产生无风险的利润的组合头寸，由此推算出该项头寸在市场均衡时的价值，即均衡价格。

当市场处于不均衡状态时，价格偏离了由供求关系所决定的价值，此时就出现了套利机会，而套利力量将会推动市场重建均衡，市场一旦回复均衡，套利机会就会消失。在市场均衡时无套利机会，这就是无套利均衡分析的依据。市场的效率越高，重建均衡的速度就很快。无套利分析的意义在于认识到虽然在金融市场中各个市场参与者的看法各异，尤其是各人的风险偏好很不一样，但是只要出

现套利机会，所有的市场参与者就都会抓住机会去套取无风险利润。而套利机会消除后所确定的均衡价格，就与市场参与者的风险偏好无关。因此无套利均衡分析的思路是非常巧妙的，它抓住了金融市场均衡的最为本质的特性。

(1) Ho-Lee (1986) 模型

Ho 和 Lee (1986) 提出了一个基于无套利假设的利率期限结构模型，人们称之为 Ho-Lee 模型。

Ho-Lee 模型中短期利率的动态变化服从以下随机微分方程：

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dw(t)$$

其中 σ 为常数，表示短期利率的标准差， $\theta(t)$ 为时间的函数以保证模型能拟合初始的利率期限结构。

Ho-Lee 模型没有考虑到短期利率的均值回复性，而假定随机冲击对利率波动性的影响 σ 为常数，因此可能会出现负的远期利率，与事实不符。Ho-Lee 模型还隐含了一个所有利率的共同波动性，即长期利率和短期利率的波动性是相同的，但事实上长期利率的波动性要小于短期利率的波动性。

(2) Hull-White (1990, 1994a, 1994b) 模型

Hull 和 White 于 1990 年将 Vasicek 模型扩展为一个参数可变的模型族，并于 1993 年将其综合为：

$$dr(t) = (\theta(t) - k(t)r(t))dt + \sigma(t)r^\beta(t)dw(t)$$

其中 β 是恒定的。为了正确拟合初始期限结构，可以将 $k(t)$ 和 $\sigma(t)$ 作为随时间变化的函数，通过现行市场价格来校准模型，但由此可能导致产生的波动期限结构通常是不稳定的。Hull-White 模型是均值回复的，且短期利率可能为负。

为了克服单因素模型的限制，Hull 和 White 于 1994 年又提出了一个两因素模型：

$$\begin{cases} dr(t) = (\theta(t) + u(t) - r(t))dt + \sigma_1 dw_1(t) \\ du(t) = -bu(t)dt + \sigma_2 dw_2(t) \end{cases}$$

$dw_1(t)$ 、 $dw_2(t)$ 的相关系数为 ρ ； $u(0) = 0$ 。这个模型类似于它的单因素模型，

但具有一个随机漂移项；短期利率具有均值回复性， $u(t)$ 是 $r(t)$ 均值回复水平的一个成分， $u(t)$ 以速度 b 均值回复到 0。参数 $\theta(t)$ 被用来使模型与初始期限结构一致。

(3) Black-Derman-Toy (1990) 和 Black-Karasinski (1991) 模型

在 Black-Derman-Toy 模型中，短期利率的动态变化服从以下随机微分方程：

$$d \ln(r(t)) = \left[\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \ln(r(t)) \right] dt + \sigma(t) dw(t)$$

Black-Derman-Toy 模型假设短期利率服从对数正态分布，一方面避免了负利率的出现，另一方面允许波动率结构采用百分比波动率的形式，这与市场习惯的表示方法一致。由于短期利率的均值回复速度 $-\sigma'(t)/\sigma(t)$ 直接取决于波动性结构，给同时拟合初始利率期限结构和波动性结构带来了许多不便。因此 Black 和 Karasinski 于 1991 年对 Black-Derman-Toy 模型进行了推广。

在 Black-Karasinski 模型中，短期利率的动态变化服从以下随机微分方程：

$$d \ln(r(t)) = [\theta(t) - a(t) \ln(r(t))] dt + \sigma(t) dw(t)$$

该模型对 Black-Derman-Toy 模型进行了推广，即加入了时变的均值回复速度，这更符合市场的特征。

(4) Heath-Jarrow-Morton 模型

作为对 Ho-Lee 模型的扩展与推广，Heath, Jarrow 和 Morton 于 1992 年提出了一种新方法来对固定收益证券及其衍生品来进行定价，这是定价理论的一个突破。与其它模型先模拟短期利率，再导出远期利率的思路不同，HJM 先模拟远期利率，所以 HJM 能方便地拟合期初的收益率曲线，HJM 的另一个优点是很容易从单因素推广为多因素。

模型定义时刻 t 的瞬时远期利率为： $f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$ ，其中 $P(t, T)$ 服从以下随机微分方程：

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + v(t, T, P(t, T))dw(t)$$

远期利率服从方程： $df(t, T) = \mu_f(t, T)dt + \sigma_f(t, T)dw(t)$

其中 $\mu_f(t, T)$ 为到期日为 T 的远期利率的漂移， $\sigma_f(t, T)$ 是它的波动系数。

Heath-Jarrow-Morton 模型扩展为多因素形式时远期利率服从的随机微分方程为：

$$df(t, T) = \mu_f(t, T)dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{fi}(t, T)dw_i(t)$$

则短期利率的动态过程可以写为：

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \mu_f(s, T)ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_{fi}(s, T)dw_i(s)$$

作为 Ho-Lee 模型的推广，HJM 模型同样存在可能产生负利率或无穷大利率的缺陷。此外，HJM 模型导出的短期利率 $r(t)$ 一般不具有马尔科夫性，故在用二叉树模型来分析 $r(t)$ 时，任何一期的结点都不会重合，即第 n 期的结点数为 2^n 个，这就使得计算变得十分复杂。

三 其它模型

(1) 考虑波动率 GARCH 效应的利率期限结构模型

Brenner, Harjes and Kroner (1996) 研究认为，利率市场同股票市场一样，存在明显的波动聚集效应 (Volatility clustering)，因此他们提出将 GARCH 过程引入水平模型，即允许利率的波动成为利率水平和不可预期变动的函数，模型可以表示为：

$$\begin{cases} r_t - r_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \sigma r_{t-1}^{\gamma} h_t z_t \\ h_t^2 = \beta_0 + h_{t-1}^2 (\beta_1 r_{t-2}^{2\gamma} z_{t-1}^2 + \beta_2) \\ \{z_t\} - iid.N(0,1) \end{cases}$$

如果 $\beta_1 + \beta_2 = 0$ ，那么 GARCH 效应就会消失，模型又回到了 CKLS 模型；如果 $\gamma = 0$ ，则水平效应消失，模型变为标准的 GARCH 模型。

在金融市场上，利率的波动对好坏消息的反应是不同的，存在着杠杆效应，可以在条件方差 h_t^2 中引入参数 η ，以使 h_t^2 在随机扰动因素取正、负值时有不同程度的变化，从而能更准确地描述金融市场中利率波动的情况。模型改动如下：

$$h_t^2 = \beta_0 + h_{t-1}^2(\beta_1 r_{t-2}^{2\gamma} z_{t-1}^2 + \beta_2) + \beta_3 \eta_t^2$$

其中 $\eta_t = \min(\varepsilon_t, 0)$ ，系数 β_3 就是正负干扰不同效果的参数。如果 $\beta_3 > 0$ ，那么负干扰或坏消息对波动性的影响就大于正干扰或好消息的影响。

(2) 马尔科夫机制转换模型

很多研究表明，由于受到一些政治、经济因素的影响，在不同时期，市场利率的动态规律有可能发生差异。因此，利率模型的参数，甚至模型自身的结构也将随之发生变化。Gary (1996), Ball & Torous (1998) 和 Ang & Bakaert (2002) 等利用 Hamilton (1989) 使用的马尔科夫机制转换模型对此进行了研究。

在马尔科夫机制转换模型中，假定市场瞬时短期利率的变化服从两个或多个机制的安排，用状态变量 $S_t = 1, 2, \dots, k$ 表示， S_t 服从一个一阶马尔科夫链过程，

其中转移矩阵中的转换概率 $p_{ij} = \Pr[S_{t+1} = j | S_t = i]$ ，且 $\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$)。

Ang & Bakaert (2002) 假设状态变量 S_t 的转换概率和前一期的利率水平有关^⑦：

$$\Pr[S_{t+1} = i | S_t = i] = \frac{1}{1 + \exp(-a_i - b_i r_t)}, \quad i = 1, 2$$

模型可以表示为：

$$r_{t+1} - r_t = \alpha_0(S_{t+1}) + \alpha_1(S_{t+1})r_t + \varepsilon_{t+1}(S_{t+1})$$

其中 $\alpha_0(S_{t+1})$ 、 $\alpha_1(S_{t+1})$ 是状态 S_{t+1} 下的漂移项参数； $\varepsilon_{t+1}(S_{t+1})$ 是状态 S_{t+1} 下的方差项，它可以有多种形式，可以为 CKLS 或 BHK 模型中方差项的设定形式。

机制转换模型的条件密度函数为：

$$\Pr(dr_t | I_{t-1}) = \sum_{i=1}^2 \Pr(dr_t | S_t = i, I_{t-1}) \Pr(S_t = i | I_{t-1})$$

这里 I_{t-1} 是时刻 $t-1$ 时可利用的历史信息集合，这个条件概率密度函数为两个正态分布的加权平均，所以机制转换模型在模拟利率变动的非正态性上具有相当的灵活性。

^⑦ Ang A. and G. Bekaert. Regime Switches in Interest Rates [J]. Journal of Business and Economic Statistics, 2002, (20): 163-182.

(3) 跳跃—扩散模型

自从随机过程广泛应用在金融产品的定价中后，无论是股价、汇率，还是利率的动态过程我们大都假设其遵循扩散过程（diffusion process），也就是说这些变量的变化是连续且密集发生的，不会有跳跃或不连续的情况发生。但实际上某些突发事件的发生、重大经济信息的公布、央行的政策变化和市场干预等都会导致股价、汇率和利率的变化出现跳跃，因此，跳跃—扩散过程将能更好的解释上述变量的变化过程。

Das (2002) 和 Johannes (2004) 的研究表明，一般的扩散模型均无法解释利率波动所存在的过度尖峰（leptokurtosis）现象，而跳跃—扩散模型则是刻画这个现象的一个很有效的方法。

跳跃—扩散模型可以归纳为：

$$\begin{cases} r_t - r_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1} + \sigma r_{t-1}^{\gamma} z_t + J(\cdot) \pi(q_t) \\ \{z_t\} \sim iid.N(0,1) \end{cases}$$

其中随机变量 $J(\cdot)$ 表示利率发生跳跃时幅度的大小，它服从正态分布； $\pi(q_t)$ 是一个泊松过程， q_t 则表示跳跃发生的概率；与上述的模型一样，在模型的扩散部分的方差项中可以加入 GARCH 项的设定，以更好拟合利率波动聚集效应。

与马尔科夫机制转换模型类似，跳跃—扩散模型的条件概率密度函数也是两个正态分布的加权平均。因此，跳跃—扩散模型也是通过两个正态分布的混合来描述利率行为。与马尔科夫机制转换模型相比，跳跃—扩散模型的设定相对简单，在马尔科夫机制转换模型中，漂移项的所有系数都是可变的，而在跳跃—扩散模型中，只有条件均值和方差的截距项可以改变。

第六节 利率期限结构模型的研究

在连续时间框架下，假定短期利率服从以下随机微分方程：

$$dr_t = \mu(r_t)dt + \sigma(r_t)d\omega_t$$

我们定义 $\mu(r_t)$ 为漂移函数（drift function）， $\sigma(r_t)$ 为扩散函数（diffusion function）。它的离散时间形式为：

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \mu(r_t) \Delta t + \sigma(r_t) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t+\Delta t}$$

通过对 $\mu(r_t)$ 和 $\sigma(r_t)$ 作出不同的假设，可以得到不同的动态模型。例如，我们假定 $\mu(r_t) = \alpha + \beta r_t$, $\sigma(r_t) = \sigma r_t^\gamma$, 就得到了 CKLS 模型。近些年来对利率期限结构模型的研究中，包括了对利率的基本性质即利率动态变化的均值问题和利率的波动性问题的研究，即对利率动态模型中 $\mu(r_t)$ 和 $\sigma(r_t)$ 的形式的探讨。

一 均值回复性的研究

对于 $\mu(r_t)$ 的构成形式，早先的研究一直假设 $\mu(r_t)$ 和当前的利率水平 r_t 成线性关系，如前面所看到的 Vasicek 和 CIR 模型中， $\mu(r_t) = \alpha + \beta r_t$ 。将模型离散化可得到： $r_{t+\Delta t} = \alpha \Delta t + (1 + \beta \Delta t) r_t + \sigma(r_t) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t+\Delta t}$ 。

即经过 Δt 时间后，短期利率等于现在的利率水平乘以固定比例 $(1 + \beta \Delta t)$ ，加上固定常数 $\alpha \Delta t$ ，再加上均值为零、方差 $\sigma(r_t) \sqrt{\Delta t}$ 的随机冲击。利率的长期均值为 $-\alpha/\beta$ ，回复速度用 β 衡量。

1. 漂移项的斜率是否小于零

显然，短期利率应该趋于回复到某个长期平均值，否则短期利率分布的方差将随时间的增加也不断增加，是一个无界函数，如果短期利率具有均值回复特性，那么 β 就必须为负，而不能大于 0 或等于 0。Chan, Karol, Longstaff 和 Sanders 于 1992 年对美国国债月度收益率进行检验，发现 β 的估计值在 -0.18 和 -0.59 之间，但在统计上并不显著。Ait-Sahalia 于 1996 年利用一星期欧洲美元利率的日观察值，发现 β 的估计值在 -0.014 和 -0.038 之间，非常接近于零。

2. 漂移项的斜率是否与利率水平成线性关系

线性漂移是指利率均值回复的速度在所有利率水平上都是相同的，这是否合理呢？Ait-Sahalia (1996) 采用非参数估计方法，对 $dr_t = \mu(r_t) dt + \sigma(r_t) dw(t)$ 式

形式的扩散模型进行了广义的识别检验。检验结果表明利率回复速度与利率水平 r_t 没有线性关系：当利率水平在 4%-22% 之间时没有表现出回复性，而在这个区间之外、比较极端的利率水平上表现出了较强的回复性。Santon (1997) 采用不同的数据和估计方法也得出了类似结论。但是 Pritsker (1998) 发现 Ait-Sahalia (1996) 的检验对于漂移系数 β 的值十分敏感，而且如果 β 接近于零，其检验结果并不可靠。

Chapman 和 Pearson (2000) 使用了另一种检验方法，他们没有使用市场上可以观察到的数据，而是采用蒙特卡罗模拟产生了具有线性漂移的利率过程，然后使用 Ait-Sahalia 和 Santon 类似的方法对模拟数据进行参数估计和检验。结果表明即使利率过程具有线性漂移的特点，短期利率在极端值上仍然表现出更强的回复性，这显然与线性漂移的特点相矛盾。Chapman 和 Pearson 同时也指出这种方法的缺陷，因为当利率接近样本区间的极值时，利率增量必须是负数，也就是说利率必须改变运动方向，否则就没有均值回复性了，这种一致的负值增量当然会表现为较强的回复性。

Elerian, Chib, Shepherd (2001) 和 Jones (2000) 也发现对短期利率的均值回复现象难以得到统一的结论。他们采用贝叶斯 (Bayesian) 方法，结果发现均值回复程度在极值下是否比正常值下更强主要依赖于初始分布中是否假设了均值回复。因此，当样本数据较少时，初始分布的重要性要大于对数据的最终解释。

Durham (2001) 和 Li, Pearson 和 Potseshman (2001) 则发现漂移项的非线性特点并不存在。通过使用模拟的最大似然估计量，Durham 估计了一系列的模型，并进行了以似然函数值为基础的识别检验，他的结论表明简单的漂移形式要好于更为灵活的形式。Li, Pearson 和 Potseshman 采用以矩为基础的估计量，以解决 Chapman 和 Pearson 发现的矛盾，他们发现决定非线性的系数在统计上不能显著区别于零，故不能拒绝线性漂移函数的假设。

总的来说，短期利率的漂移项是否是 r_t 的线性函数目前尚无确切的结论。实证研究面临的主要问题在于利率极端值的数据很少，而从这样少的样本中得到确定性的结论是很困难的。

二 冲击项波动性的研究

如前所述，在 CKLS 框架下有 $\sigma(r_t) = \sigma r_t^\gamma$ ，这就是说，短期利率的波动性是短期利率水平的函数。因此，我们又称 CKLS 框架下的利率期限结构模型为水平模型。而 γ 就是表示利率波动性对利率水平敏感程度的参数。

CKLS 和 Nowman (1997) 采用美国国库券收益率的同一数据集，分别利用广义矩法和最大似然法对 CKLS 框架下的各个模型进行了实证的估计和比较，得出的 γ 值分别为 1.4999 和 1.3610。

Tse (1995), Dahlquist (1996), Hiraki 和 Takezawa (1997), Manus 和 Watt (1999) 采用广义矩法分别利用世界七国、欧洲四国、日本、加拿大的利率数据对 CKLS 下的模型进行了参数估计，得出的 γ 值基本上都比较显著，大小在 0.2–1.7 之间。

Nowman (1998), Manus and Watt (1999), Episcopos (2000) 采用最大似然法分别利用世界四国、加拿大、世界十国的利率数据进行了同样的研究，得出的 γ 估计值全部显著，大小在 0.1–2.8 之间。

水平模型把波动性与利率水平联系起来是有一定道理的，因为利率水平越高，利率波动的幅度就会相应增大，所以， $\gamma > 0$ 的模型是能够较好地刻画利率行为的。然而 $\gamma > 1$ 则暗示波动性对利率水平过于敏感，这可能并不符合实际情况。各种研究已经表明，利率的变动存在波动性聚类的特点，而且对货币政策等的改变相当敏感，所以单单利用利率水平来解释利率的波动性是远远不够的，需要引入更多的随机变量来考察利率的波动性。

三 模型参数的估计方法

1. 广义矩法 (Generalized Method of Moments)

Hansen (1982) 提出的广义矩法（简称 GMM）是一种广泛应用于计量经济学领域的估计模型参数的统计方法。这一方法的基本思想是通过参数的选择使模型的矩尽量符合数据的矩，矩条件可根据问题来选择，权重矩阵则决定了不同矩不

同的重要性。GMM 方法与其它估计方法相比，其优点在于估计过程中不需要作出统计假设，这也就是说我们无须假设利率的变动服从某特定分布，但这也可能是—个缺陷，因为 GMM 常不能对样本中的全部信息进行有效利用。

2. 最大似然法 (Maximum Likelihood Estimation)

最大似然法（简称 MLE）也是一种比较常用的估计模型参数的统计方法。其基本思想是假定总体 X 服从一定的概率分布，则可以得到样本 X_1, X_2, \dots, X_n 取观测值 x_1, x_2, \dots, x_n 的概率或概率密度，选择参数 θ 的值以使此概率或概率密度最大，这时的 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 就称为参数 θ 的最大似然估计值。

(1) 最大似然法估计

单因素情况下，假定利率服从以下随机微分方程：

$$dr(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 r(t) + \alpha_3 r(t)^2 + \alpha_4 r(t)^{-1}) dt + \sigma r^{\gamma}(t) dw(t)$$

其离散化形式为： $r_{t+\Delta} = \alpha_1 \Delta t + (1 + \alpha_2 \Delta t)r_t + \alpha_3 \Delta t r_t^2 + \frac{\alpha_4 \Delta t}{r_t} + \varepsilon_{t+\Delta}$ ，其中，

$$E(\varepsilon_{t+\Delta}) = 0, \quad E(\varepsilon_{t+\Delta}^2) = \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t.$$

则似然函数为： $L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_{t+\Delta}^2 (\sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t)^{-1}$ ，最大化这个

似然函数，就可以得到参数估计值。

如果模型是双因素的，形式如下：

$$\begin{cases} dr(t) = (\alpha_{11} + \alpha_{12} r(t) + \alpha_{13} r(t)^2 + \alpha_{14} r(t)^{-1}) dt + \sigma_1 r^{\gamma_1}(t) dw_1(t) \\ dl(t) = (\alpha_{21} + \alpha_{22} l(t) + \alpha_{23} l(t)^2 + \alpha_{24} l(t)^{-1}) dt + \sigma_2 l^{\gamma_2}(t) dw_2(t) \end{cases}$$

模型的离散化形式为：

$$\begin{cases} r_{t+\Delta} = \alpha_{11} \Delta t + (1 + \alpha_{12} \Delta t)r_t + \alpha_{13} \Delta t r_t^2 + \frac{\alpha_{14} \Delta t}{r_t} + \varepsilon_{1(t+\Delta)} \\ l_{t+\Delta} = \alpha_{21} \Delta t + (1 + \alpha_{22} \Delta t)l_t + \alpha_{23} \Delta t l_t^2 + \frac{\alpha_{24} \Delta t}{l_t} + \varepsilon_{2(t+\Delta)} \end{cases}$$

令 $\varepsilon_{t+\Delta} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1(t+\Delta)} \\ \varepsilon_{2(t+\Delta)} \end{bmatrix}$ ， ρ 为两个方差中随机冲击项的相关系数，则 $E(\varepsilon_{t+\Delta}) = 0$ ，

$$E(\varepsilon'_{t+\Delta} \varepsilon_{t+\Delta}) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 r_t^{2\gamma_1} & \rho \sigma_1 \sigma_2 r_t^{\gamma_1} l_t^{\gamma_2} \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 r_t^{\gamma_1} l_t^{\gamma_2} & \sigma_2^2 l_t^{2\gamma_2} \end{bmatrix} \Delta t = \Sigma.$$

则似然函数为: $L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon'_{t+\Delta} \Sigma^{-1} \varepsilon_{t+\Delta}$, 最大化这个似然函数,

就可以得到参数的估计值。

(2) 高斯似然估计法

K. B. Nowman (1997) 利用了由 Bergstrom (1983, 1985, 1986) 提出的高斯似然估计法对单因素连续时间利率期限结构模型进行了参数估计, 估计的效果比较显著。单因素 CKLS 连续时间利率期限结构模型统一框架为:

$$dr_t = [\alpha + \beta r_t] dt + \sigma r'(t) dw_t$$

Nowman (1997) 对上式提出了另一种离散化的形式^⑧, 即:

$$r_t = e^\beta r_{t-1} + \frac{\alpha}{\beta} (e^\beta - 1) + \varepsilon_t$$

其中, $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \frac{\sigma^2}{2\beta} (e^{2\beta} - 1) r_{t-1}^{2\gamma}$

似然函数为: $L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left[\frac{\sigma^2}{2\beta} (e^{2\beta} - 1) r_{t-1}^{2\gamma} \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \left[\frac{\sigma^2}{2\beta} (e^{2\beta} - 1) r_{t-1}^{2\gamma} \right]^{-1}$, 最

大化这个似然函数, 就可以得到参数估计值。

双因素 CKLS 连续时间利率期限结构模型的一般形式如下:

$$\begin{cases} dr_1(t) = [\alpha_1 + \beta_1 r_1(t)] dt + \sigma_1 r_1^{\gamma_1}(t) dw_1(t) \\ dr_2(t) = [\alpha_2 + \beta_2 r_2(t)] dt + \sigma_2 r_2^{\gamma_2}(t) dw_2(t) \end{cases}$$

其中, $E[dw_1(t)] = 0$, $E[dw_2(t)] = 0$, $E[\sigma_1 r_1^{\gamma_1}(t) dw_1(t) \sigma_2 r_2^{\gamma_2}(t) dw_2(t)] = dt \Sigma_t$,

$$\Sigma_t = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 r_1^{2\gamma_1}(t) & \rho \sigma_1 \sigma_2 r_1^{\gamma_1}(t) r_2^{\gamma_2}(t) \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 r_1^{\gamma_1}(t) r_2^{\gamma_2}(t) & \sigma_2^2 r_2^{2\gamma_2}(t) \end{bmatrix}$$

ρ 为两个方差中随机冲击项的相关系数。

根据 Bergstrom 定理 2^⑨, 可以得到双因素 CKLS 模型的一个离散化形式为:

$$r_t = e^\beta r_{t-1} + (e^\beta - 1) \beta^{-1} \alpha + \varepsilon_t$$

^⑧ Nowman K. B. Gaussian Estimation of Single-Factor Continuous Time Models of the Term Structures of Interest Rates [J]. Journal of Finance, 1997, (14): 721-38.

^⑨ Bergstrom, Albert R. Continuous Time Stochastic Models and Issues of Aggregation over Time [A]. Handbook of Econometrics, 1984, (2): 1163-1166.

$$\varepsilon_t \text{ 代表 } t \text{ 时刻的误差项向量, } \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{bmatrix}, E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \int_0^t e^{i\beta} \Sigma_t^* e^{i\beta'} di = \Omega,$$

Σ_t^* 为 Σ_t 的离散化形式。

似然函数为: $L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' \Omega^{-1} \varepsilon_t$, 最大化这个似然函数, 就可以得到参数的估计值。

第三章 中国利率期限结构的实证分析

第一节 中国利率期限结构的静态估计

为了对中国利率变动进行主成分分析,首先必须计算出不同时间点的利率期限结构。由于从2002年3月25日以后,国债交易价格是以扣除掉累计利息的净价法表示,所以本文选取从2002年3月29日起到2005年9月30日的每周末(共184周)上海证券交易所的国债交易数据,采用三阶多项式样条法计算出这段时间内每周末的利率期限结构。对于其中节假日的利率期限结构,则可用相邻时间点的加权平均值。2002年3月25日后上证国债的交易情况可见附录一。

通过计算得到了184周每周末的以1周、1月、1季度、半年、1年到10年所有整数年为期限的利率期限结构。利率的描述统计情况、2005年9月30日的利率期限结构以及2002年3月29日至2005年9月30日部分利率的变动情况如表3.1、图3.1和3.2所示。

表3.1: 184周利率数据的描述统计情况

期限	均值	标准差	偏度	峰度	Jarque-Bera值
1周	0.012784	0.019677	10.5712	131.8507	130712.78
1月	0.013041	0.019368	10.5512	131.5871	130179.63
1季度	0.013794	0.018522	10.5146	131.1730	129340.92
半年	0.015126	0.017106	10.5776	132.4338	131871.60
1年	0.017898	0.014100	10.7541	135.4808	138105.46
2年	0.022823	0.008964	8.4500	97.4102	70524.94
3年	0.026967	0.006851	1.7652	9.6879	438.47
4年	0.030330	0.007631	0.5241	1.8836	17.9783
5年	0.032798	0.008651	0.4258	1.7836	16.90
6年	0.034307	0.008851	0.3961	1.7429	16.93
7年	0.035120	0.008683	0.4097	1.6778	18.55
8年	0.035447	0.008590	0.4019	1.6634	18.65
9年	0.035433	0.008773	0.3737	1.6690	17.86
10年	0.035252	0.009165	0.3189	1.7000	16.08

图 3.1：2005 年 9 月 30 日的利率期限结构

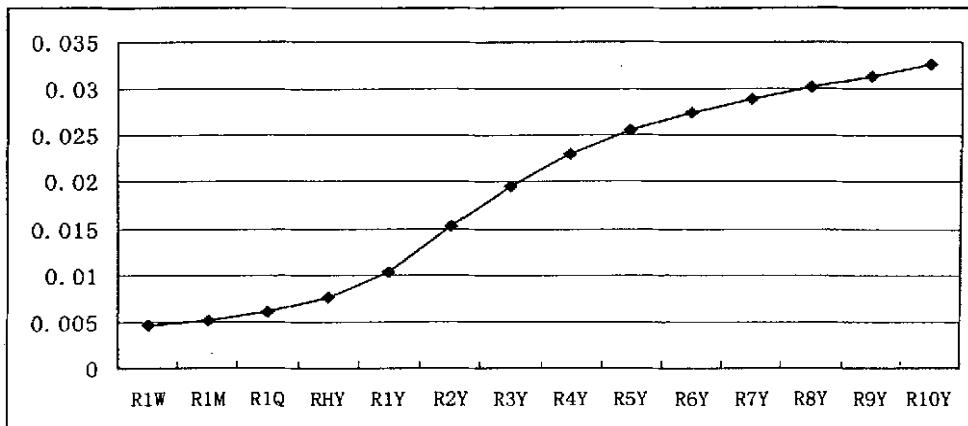
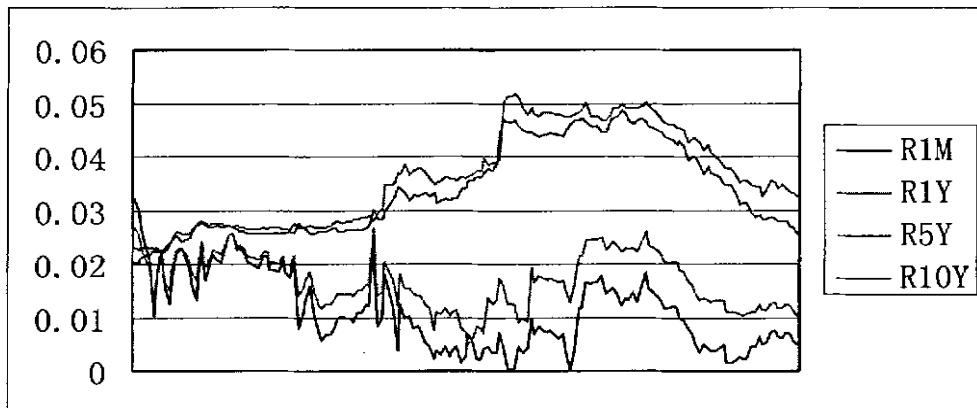


图 3.2：不同期限的利率变动的折线图



从以上结果我们可以得到关于中国国债利率及其变动规律的一些结论：

1. 中国国债利率期限结构的整体形状是上升的，即长期利率高于短期利率。
2. 期限越长的利率的波动一般来说就越小，各期限的利率都不服从正态分布，期限短的利率呈现出更为明显的尖峰厚尾现象。
3. 短期利率和长期利率存在着一定的同涨同跌联动现象，期限相近的利率联动现象越明显，即变动相关程度越高。
4. 长短期利率的变动都呈现出均值回复现象，短期利率的均值回复速度比长期利率的快。
5. 8-10 年期的利率的均值出现了递减现象，主要原因可能是因为部分时期长期国债的交易量太小，使长期国债价格严重偏离了理论价格。

第二节 中国利率期限结构的主成分分析

通过对国债利率期限结构的静态估计,得到了2002年3月29日至2005年9月30日的每周末的利率期限结构,即以1周、1月、1季度、半年、以及1年到10年所有整数年为期限的一共14组复利利率时间序列数据。为了研究利率的动态变化规律,需先将这些利率数据差分,然后对差分后的数据进行主成分分析。

对所有14组数据进行主成分分析的结果如表3.2和表3.3。

表3.2: 主成分分析结果1-1

主成分	特征根	解释比例 (%)	累计解释比例 (%)
1	8.699620	62.14	62.14
2	4.253914	30.39	92.53
3	0.852827	6.09	98.62
4	0.186355	1.33	99.95
5	0.006446	0.05	99.99
6	0.000440	0.00	100.00

表3.3: 主成分分析结果1-2(前3个主成分的系数)

年限	Prin1	Prin2	Prin3	年限	Prin1	Prin2	Prin3
1周	0.329184	0.112048	-0.036285	4年	0.253242	0.266639	0.385243
1月	0.329288	0.112198	-0.036562	5年	-0.182066	0.300059	0.607895
1季度	0.329245	0.113558	-0.036435	6年	-0.257379	0.277427	0.331068
半年	0.329128	0.114872	-0.030482	7年	-0.190807	0.388233	0.064352
1年	0.328811	0.117209	-0.020966	8年	-0.091604	0.448173	-0.215255
2年	0.327120	0.126920	0.012533	9年	-0.104314	0.429156	-0.376512
3年	0.319705	0.154929	0.093622	10年	-0.173038	0.347936	-0.407352

注: 主成分分析的结果通过SAS软件计算得到。

主成分分析结果1表明这14个期限的利率变动大部分可以由前三个主成分来解释(总方差贡献率达到98.62%),但是各主成分系数的变动却难以解释。方差贡献率最大的是主成分1(达到62.14%),其系数的符号在5年这个点发生了

改变。

为了验证是否是因为在静态估计中将样条函数的分段点设为 5 年而产生了这种现象，笔者又将样条函数的第一个分段点设为 3 年，重新估计了利率期限结构，并对新的利率数据进行了主成分分析，结果如表 3.4 和表 3.5。

表 3.4：主成分分析结果 2-1

主成分	特征根	解释比例 (%)	累计解释比例 (%)
1	8.920938	63.72	63.72
2	3.757831	26.84	90.56
3	1.067332	7.62	98.19
4	0.226726	1.62	99.81
5	0.025172	0.18	99.99
6	0.001185	0.01	100.00

表 3.5：主成分分析结果 2-2（前 3 个主成分的系数）

年限	Prin1	Prin2	Prin3	年限	Prin1	Prin2	Prin3
1 周	0.314723	0.168649	-.053392	4 年	0.095819	0.357961	0.621414
1 月	0.314911	0.168386	-.054250	5 年	-.250599	0.230224	0.472668
1 季度	0.315322	0.167682	-.055794	6 年	-.284566	0.235074	0.227058
半年	0.316419	0.164078	-.054717	7 年	-.248991	0.325894	-.010442
1 年	0.317324	0.158784	-.043532	8 年	-.186662	0.400503	-.232574
2 年	0.315734	0.168218	-.007586	9 年	-.168420	0.403682	-.350288
3 年	0.301929	0.210091	0.125533	10 年	-.180345	0.352914	-.363814

注：主成分分析的结果通过 SAS 软件计算得到。

从主成分分析结果 2 可以看出，主成分 1 系数的符号在 5 年这个点也发生了改变，说明这种现象的出现与进行利率期限结构静态估计时样条函数所采用的分段点无关，而是由利率自身变动的特有规律产生的。

根据以上的分析，下面以 5 年为分界点，将原利率差分数据分成两组分别进行主成分分析。第 1 组为 5 年期以下的数据，第 2 组包括 5 年期及以上的数据。

对第 1 组数据进行主成分分析的结果如表 3.6、表 3.7 和图 3.3。

表 3.6: 主成分分析结果 3-1

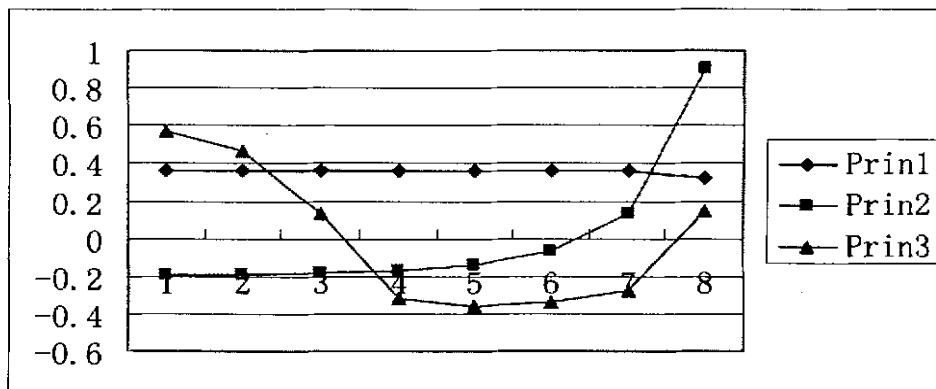
主成分	特征根	解释比例 (%)	累计解释比例 (%)
1	7.734780	96.68	96.68
2	0.259506	3.24	99.93
3	0.004919	0.06	99.99
4	0.000516	0.01	100.00

表 3.7: 主成分分析结果 3-2 (前 3 个主成分的系数)

年限	Prin1	Prin2	Prin3	年限	Prin1	Prin2	Prin3
1 周	0.357588	-.188793	0.571561	1 年	0.358459	-.144923	-.361662
1 月	0.357717	-.187934	0.463419	2 年	0.359233	-.068746	-.338059
1 季度	0.357952	-.181578	0.134601	3 年	0.358687	0.129246	-.278778
半年	0.358163	-.166422	-.312864	4 年	0.318686	0.908811	0.140567

注: 主成分分析的结果通过 SAS 软件计算得到。

图 3.3: 主成分分析结果 3-3 (前 3 个主成分的关系图)



主成分分析结果 3 表明, 前 3 个主成分就可以解释 1 周、1 月、1 季度、半年、1 年、2 年、3 年、4 年的利率变动, 其中前 2 个主成分的累计方差贡献率就已经达到了 99.93%。主成分 1 的系数全部在 0.2-0.4 之间变动, 比较平稳, 对此可以解释为水平因素对利率变动的影响。主成分 2 的系数变动曲线向上倾斜, 代表了斜率因素对利率变动的影响, 它对期限短的利率的影响为负, 对期限长的利率的影响为正。主成分 3 的系数先下降, 后又上升, 体现了曲度因素的影响。

主成分 2 和 3 对利率变动的影响很小。

对第 2 组数据进行主成分分析的结果表 3.8、表 3.9 和图 3.4

表 3.8：主成分分析结果 4-1

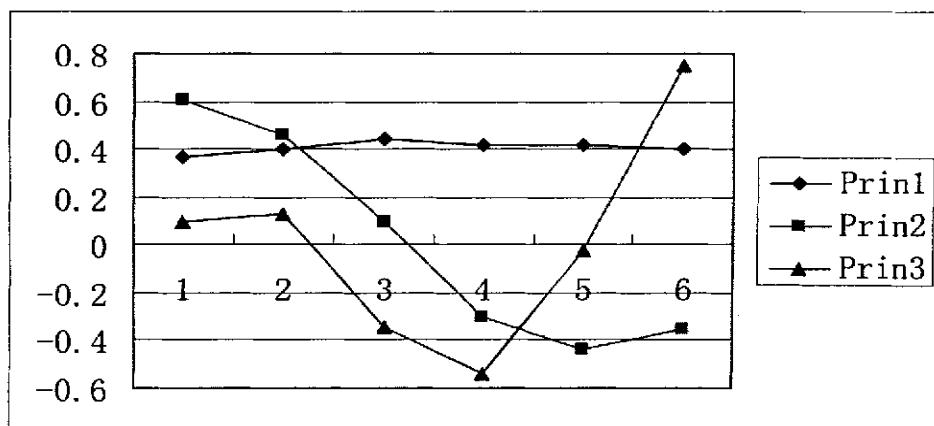
主成分	特征根	解释比例 (%)	累计解释比列 (%)
1	4.866743	81.11	81.11
2	0.849038	14.15	95.26
3	0.207526	3.46	98.72
4	0.076684	1.28	100.00

表 3.9：主成分分析结果 4-2（前 3 个主成分的系数）

年限	Prin1	Prin2	Prin3	年限	Prin1	Prin2	Prin3
5 年	0.364650	0.608534	0.097250	8 年	0.419876	-0.305996	-0.540408
6 年	0.403205	0.462356	0.132202	9 年	0.414280	-0.435435	-0.024093
7 年	0.443546	0.093141	-0.342417	10 年	0.399749	-0.352137	0.750463

注：主成分分析的结果通过 SAS 软件计算得到。

图 3.4：主成分分析结果 4-3（前 3 个主成分的关系图）



主成分结果 4 表明，前 3 个主成分可以解释 5 年到 10 年所有整数年限的大部分的利率变动，前 3 个主成分的累计方差贡献率达到 98.72%。主成分 1 的系数大部分在 0.4 左右变动，比较平稳，对此可以解释为水平因素对利率变动的影响。主成分 2 的系数变动曲线向下倾斜，代表斜率因素对利率变动的影响，对期

限短的利率的影响为正，对期限长的利率的影响为负。主成分 3 的系数变动曲线先下降，后又上升，呈现“U”形，体现了曲度因素的影响。主成分 2 对方差的解释比例达到 14.15%，不可忽视。由此可以看出，影响长期利率的变动的因素更多，且更为复杂，因而也更难以用统一的模型加以解释。

第三节 中国利率期限结构动态模型的实证分析

主成分分析的结果表明，对于中短期利率的变动，可以用较少的因素来解释，一般只用水平和斜率两个因素，甚至只用水平因素就可以解释；而对于长期利率的变动，水平因素也具有较强的解释能力，但并不足，其它的主要因素是斜率和曲度因素。因此，在对中短期利率变动建模时，我们可以建立单因素模型，并将漂移函数和扩散函数的设定得比较简单，主要体现利率的均值回复特性和波动的水平效应；在对长期利率的变动建模时，应该采用多因素模型；在对于收益率曲线的变动建模时，需要考虑收益率曲线上多点的变动，可以用分别代表短、中、长期利率的多个点的利率水平作为收益率曲线的驱动因素，建立多因素模型。

主成分分析为我们对中国的短期利率乃至利率期限结构建模提供了很好的参考，建立多因素模型确实是一个很好的思路。但是，如果模型中的因素太多，就会使模型过于复杂，从而使参数的估计变得十分困难。

由于本节中的模型涉及到了非线性最优化计算，参数的位置比较复杂，当参数比较多时，很难估计参数值。对于模型参数的估计，本文用到了回归法、格点法和最大似然法。对于模型漂移项部分的参数初值，可以用回归的方法来确定；对于模型扩散项部分的参数初值，则要用格点法来确定。格点法的具体做法是：

- (1) 给扩散项部分的参数设定可能的取值范围。对于 σ ，参考国内已有研究的结果，将其可能取值范围设定为 (0, 2)；对于 γ ，由于本文第二章第六节中已介绍了国外研究得到的 γ 取值一般在 0.1-2.8 之间，故这里将其可能取值范围设为 (0, 3)。(2) 将这些区间划分成许多格点，通过大量循环计算选取使似然函数值最大的点。如果参数估计值到达了区间的边界，则还需要相应的扩大区间。
- (3) 在前一步得到的点周围缩小区间范围，并进一步细分格点，继续通过循环计算选取使似然函数值更大的点。通过上述方法确定参数的初值以后，就可以用 Matlab 的最优化模块来计算参数的估计值了。

一 描述短期利率动态变化的模型

主成分分析的结果表明，影响短期利率变动的主要因素是水平因素，而斜率和曲度因素对短期利率的变动影响很小。因此，这里采用较为简单的双因素 CKLS 模型来拟合短期利率的变动。双因素 CKLS 连续时间利率期限结构模型的一般形式如下：

$$\begin{cases} dr_1(t) = [\alpha_1 + \beta_1 r_1(t)]dt + \sigma_1 r_1^{\gamma_1}(t)dw_1(t) \\ dr_2(t) = [\alpha_2 + \beta_2 r_2(t)]dt + \sigma_2 r_2^{\gamma_2}(t)dw_2(t) \end{cases}$$

注意，本文实证部分模型中的 dt 或 Δt 均为 1/52，而一些文献中将则其设为 1。

拟合模型所选取的数据为 1 周和半年期国债复利利率（分别用 R1W 和 RHY 表示）。对 R1W、RHY 及其变动（即一阶差分）的单位根检验结果见表 3.10。

表 3.10：R1W 和 RHY 及其差分数据的单位根 ADF 检验结果

变量	检验统计量	临界值	P 值
R1W	-3.872609	1% -2.577730	0.0001
D (R1W)	-15.723401	1% -2.577801	0.0000
RHY	-4.398826	1% -2.577730	0.0000
D (RHY)	-15.738862	1% -2.577801	0.0000

从单位根检验的结果可以看出，对于 R1W 和 RHY 的利率水平及利率变动，可以在 1% 的显著水平下认为其不存在单位根，是平稳序列。随后，用高斯似然法对双因素 CKLS 模型进行估计，结果如表 3.11。

表 3.11：双因素 CKLS 模型的估计结果

	α_1	β_1	σ_1	γ_1	ρ
R1W	0.4985 (5.6685*)	-39.3442 (-10.5043*)	0.3872 (1.3453)	1.2973 (9.9268*)	0.9841 (81.5624*)
	α_2	β_2	σ_2	γ_2	
RHY	0.6074 (7.0571*)	-40.3736 (-10.7216*)	0.1149 (5.2760*)	0.7168 (2.0720*)	

注： $\Delta t = 1/52$ ，括号内为参数的 T 检验统计量值，*表示在 5% 的显著水平下通过检验。

从模型的估计结果看, R1W 和 RHY 的长期均值 $-\alpha/\beta$ 分别为 0.0127 和 0.0151, 与实际均值接近; R1W 和 RHY 的均值回复速度 β 相近, 且都是显著的。 $\sigma_1 > \sigma_2$, $\gamma_1 > \gamma_2$, 可见 R1W 的波动性以及其波动对利率水平的敏感性都要高于 RHY。随机冲击项的相关系数 ρ 为 0.9841, 说明影响 R1W 和 RHY 波动的随机因素是高度相关的。

从双因素 CKLS 模型的分析结果看出, 短期利率的漂移项的形式比较接近, 可以认为短期利率的变动是受同一利率水平因素的影响。同时, 影响短期利率波动的随机因素具有高度的同源性, 故可以认为它们是同一个随机因素。因此, 用单因素模型来拟合短期利率的变动更为合适。

二 描述中国利率期限结构动态变化的模型

为了描述中国利率期限结构的动态变化, 下面选择收益率曲线上两点的利率水平作为收益率曲线的驱动因素, 建立双因素模型, 这两个点分别为代表中短期利率和长期利率的 1 年和 10 年期国债复利利率 (分别用 R1Y 和 R10Y 表示)。

对 R1Y、R10Y 及其变动 (即一阶差分) 的单位根检验结果见表 3.12。

表 3.12: R1Y 和 R10Y 及其差分数据的单位根 ADF 检验结果

变量	检验统计量	临界值	P 值
R1Y	-3.498478	1% -2.577730	0.0005
D (R1Y)	-15.782392	1% -2.577801	0.0000
R10Y	0.028541	1% -2.577730	0.6906
D (R10Y)	-13.070549	1% -2.577801	0.0000

从单位根检验的结果可以看出, 可以认为 R1Y 及其变动在 1% 的显著水平下不存在单位根, 是平稳序列; 而对于 R10Y, 可以接受其存在单位根的原假设, 对于 R10Y 的变动, 可以在 1% 的显著水平下认为其不存在单位根, 是平稳序列。

主成分分析的结论表明, 中短期利率和长期利率的变动分别受到不同的水平、斜率和曲度因素的影响。为了在模型中体现出这些影响, 可以对中短期利率和长期利率的扩散项做出不同的设定。为了更合理的设定中短期利率和长期利率的扩散项, 可先按如下两个方程的形式对 R1Y 和 R10Y 分别进行逐步回归:

$$r_{t+\Delta} - r_t = \alpha_{11}\Delta t + \alpha_{12}\Delta r_t + \alpha_{13}\Delta r_t^2 + \frac{\alpha_{14}\Delta t}{r_t}$$

$$l_{t+\Delta} - l_t = \alpha_{21}\Delta t + \alpha_{22}\Delta l_t + \alpha_{23}\Delta l_t^2 + \frac{\alpha_{24}\Delta t}{l_t}$$

通过逐步回归，最终可以将模型的形式确定如下：

$$\begin{cases} dr(t) = \left(\alpha_{11} + \alpha_{12}r(t) + \frac{\alpha_{13}}{r(t)} \right) dt + \sigma_1 r^{\gamma_1}(t) dw_1(t) \\ dl(t) = (\alpha_{21} + \alpha_{22}l(t)) dt + \sigma_2 l^{\gamma_2}(t) dw_2(t) \end{cases}$$

$r(t)$ 、 $l(t)$ 分别代表着中短期利率和长期利率。在这个模型中，中短期利率的漂移函数中加入了非线性漂移项 $\frac{\alpha_{13}}{r(t)}$ 。

由于此处的模型中加入了中短期利率的非线性漂移项，故不再用高斯最大似然估计法进行估计。这里采用如下形式对模型进行了离散：

$$\begin{cases} r_{t+\Delta} = \alpha_{11}\Delta t + (1 + \alpha_{12}\Delta t)r_t + \frac{\alpha_{13}\Delta t}{r_t} + \sigma_1 r_t^{\gamma_1} \sqrt{\Delta t} z_{1(t+\Delta)} \\ l_{t+\Delta} = \alpha_{21}\Delta t + (1 + \alpha_{22}\Delta t)l_t + \sigma_2 l_t^{\gamma_2} \sqrt{\Delta t} z_{2(t+\Delta)} \end{cases}$$

随后，可以求出似然函数，通过对似然函数最大化就可以求得参数的估计值。模型的估计结果如表 3.13。

表 3.13：以 R1Y 和 R10Y 为双因素的模型的估计结果

	α_{11}	α_{12}	α_{13}	σ_1	γ_1
R1Y	1.5361 (7.5029*)	-50.6829 (-12.1494*)	-0.0096 (-4.1937*)	0.2870 (3.8295*)	0.8718 (13.7972*)
	α_{21}	α_{22}	σ_2	γ_2	ρ
R10Y	0.0204 (1.1043)	-0.5377 (-1.0616)	0.0718 (3.7010*)	0.6287 (8.1934*)	-0.2552 (-5.2457*)

注： $\Delta t = 1/52$ ，括号内为参数的 T 检验统计量值，*表示在 5% 的显著水平下通过检验。

从模型参数估计的结果看，R1Y 除了表现出了均值回复性外，还具有非线性漂移的特性，而长期利率 R10Y 的均值回复速度 α_{22} 并不显著，可见期限越短的利率均值回复速度越快。 $\sigma_1 > \sigma_2$ ，说明中短期利率的波动大于长期利率的波动。

粘性系数 γ 都是显著的，说明中国市场利率的变动对利率水平比较敏感，结合上文的短期利率双因素 CKLS 模型，可以看出期限短的利率的变动对利率水平更为敏感。随机冲击项的相关系数 ρ 为 -0.2552，可见 R1Y 和 R10Y 波动的两个随机因素的相关程度不高。

可以看出，R1Y 和 R10Y 的漂移函数还是有较大差别的，说明对于收益率曲线的变动，仅仅用利率水平因素来解释是不够的，需要加入斜率、曲度等来解释。同时，影响 R1Y 和 R10Y 的两个随机因素具的相关程度较低，因此不能把它们认为是同一个因素，证明了收益率曲线的变动是受多个因素驱动的，这也与前一部分主成分分析的结论相同。所以，分别选取中短期利率和长期利率作为驱动收益率曲线的两个因素，并对它们的扩散函数做出不同的设定是一个较为合理的建模思路。

第四章 结论及今后的研究方向

本文在对利率期限结构动态模型的相关理论和实证研究的综合考察的基础上，对中国利率期限结构的动态特征进行了实证分析，并建立了相应的动态模型来拟合短期利率和收益率曲线的变动。通过实证研究，得到了以下结论：

1. 中国国债利率期限结构的是一条上升的曲线。期限越长的利率的波动一般来说就越小，各个期限的利率都不服从正态分布，期限短的利率呈现出更明显的尖峰厚尾现象。短期利率和长期利率存在着一定的同涨同跌联动现象，期限相近的利率的变动相关程度高。

2. 主成分分析的结果表明，中短期利率的变动和长期利率的变动分别受不同因素驱动。影响 5 年期以下的中短期利率变动的主要因素是水平因素，而影响 5 年期及以上的长期利率变动的主要为水平和斜率因素。

3. 中国国债市场利率具有均值回复性，期限越短的利率的均值回复速度越快，长期利率的均值回复特性并不显著。国债利率的波动存在水平效应，期限短的利率的变动对利率水平更为敏感。

4. 从如何建模拟合利率或收益率曲线的变动方面来看，如果要拟合短期利率的动态变化，建立单因素的模型比较合适；而如果要综合描述整个收益率曲线上利率的变动情况，应该采用多因素模型，可以用中短期利率和长期利率的变动作为驱动收益率曲线的两个因素来建立双因素模型。

总之，本文的研究在中国利率期限结构动态建模方面做了一定尝试，但还有不少问题需要做进一步的探讨。例如，为了拟合中国市场利率的变动，可以在模型中加入 GARCH 效应，采用机制转换模型或跳跃—扩散模型，这样的话模型拟合效果会不会有显著的提高呢？此外，学者们已经提出了很多模型来拟合短期利率或利率期限结构的动态变化，如何对这些模型的拟合效果进行评价和比较，也是值得进一步研究的。

参考文献

- [1] McCulloch J.H. Measuring the Term Structure of Interest Rates [J]. *Journal of Finance*, 1971, (44): 19-31.
- [2] Vasicek O. A. and H. G. Fong. Term Structure Modeling using Exponential Splines [J]. *Journal of Finance*, 1982, (37): 339-348.
- [3] Nelson C. R. and A. F. Siegel. Parsimonious Modeling of Yield Curves [J]. *Journal of Business*, 1987, (60): 473-489.
- [4] Litterman R. and J. Scheinkman. Common Factors Affecting Bond Returns [J]. *Journal of Fixed Income*, 1991, 1 (1): 54-61.
- [5] Dai Q. and K. Singleton. Specification Analysis of Affine Term Structure Models [J]. *Journal of Finance*, 2000, 55(1): 385-407.
- [6] Buhler A. and H. Zimmermann. A Statistical Analysis of The Term Structure of Interest Rates in Switzerland and Germany [J]. *Journal of Fixed Income*, 1996, (6): 55-67.
- [7] D' Ecclesia R. L. and S. A. Zenios. Risk Factor Analysis and Portfolio Immunization in the Italian Bond Market [J]. *Journal of Fixed Income*, 1994, (4): 51-58.
- [8] Sherris M. Interest Risk Factor in the Australian Bond Market [Z]. Macquarie University, 1994.
- [9] Martellini L. and P. Priaulet. *Fixed Income Securities: Dynamic Methods for Interest Rate Risk Pricing and Hedging* [M]. John Wiley & Sons, 2000.
- [10] Maitland J. Interpolating the South African Yield Curve [Z]. University of Witwatersrand, 1999.
- [11] Schere K. and M. Avellaneda. A Principal Component Analysis of Latin American Brady Bond Debt from 1994-2000 [Z]. New York University, 2000.
- [12] Chapman David A. and D. Neil. Pearson. Is the Short Rate Drift Actually Nonlinear? [J]. *Journal of Finance*, 2000, (55): 355-388.
- [13] Merton R. C. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model [J]. *Econometrica*, 1973, (41): 867-887.
- [14] Vasicek O. An Equilibrium Characterization of the Term Structure [J]. *Journal of Financial*

- Economics, 1977, (5): 177-188.
- [15] Cox J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross. A Re-Examination of Traditional Hypothesis about the Term Structure of Interest Rates [J]. Journal of Finance, 1981, (36): 769-799.
- [16] Cox J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross. An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices [J]. Econometrica, 1985a, (53): 363-384.
- [17] Cox J. C., J. E. Ingersoll and S. A. Ross. A theory of the term structure of interest rates [J]. Econometrica, 1985b, 53(2): 385-407.
- [18] Chan K. C., G. A. Karolyi, F. A. Longstaff and A. B. Sanders. An Empirical Comparison of Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates [J]. Journal of Finance, 1992, (47): 1209-1228.
- [19] Dothan L. Uri. On the Term Structure of Interest Rates [J]. Journal of Financial Economics, 1978, 6(3): 59-69.
- [20] Brennan M. J. and E. S. Schwartz. A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds [J]. Journal of Banking and Finance, 1979, (3): 133-155.
- [21] Brennan M. J. and E. S. Schwartz. An Equilibrium Model of Bond Prices and a Test of Market Efficiency [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1982, 17(2): 301-329.
- [22] Hogan M. Problem in Certain Two-Factor Term Structure Models [J]. Annals of Applied Probability, 1993, (5).
- [23] Dybvig J. E., Jr. Ingersoll and S. A. Ross. Long Forward and Zero-coupon Rates can never fall [J]. Journal of finance, 1998, (136).
- [24] Schaefer S. M. and E. S. Schwartz. A Two-Factor Model of the Term Structure: An Approximate Solution [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1984, 19(5): 413-424.
- [25] Fong G. H. and O. A. Vasicek. Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor [Z]. Ohio State University, 1992.
- [26] Longstaff F. A. and E. S. Schwartz. Interest Rate Volatility and Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model [J]. Journal of Finance, 1992, (47): 1259-1282.
- [27] Ho Thomas S. Y. and Sang-Bin Lee. Term Structure Movements and the Pricing of Interest Rate Contingent Claims [J]. Journal of Finance, 1986, (41): 1011-1029.
- [28] Hull John and Alan White. Pricing Interest Rate Derivative Securities. The Review of Financial Studies, 1990, (3): 573-592.

- [29] Hull John and Alan White. Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models [J]. *The Journal of Derivatives*, 1994a, 3(2): 7-16.
- [30] Hull John and Alan White. Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models [J]. *The Journal of Derivatives*, 1994b, 4(2): 37-47.
- [31] Black F., E. Derman, and W. Toy. A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options [J]. *Financial Analysts Journal*, 1990, 46(1): 33-39.
- [32] Black F. and P. Karasinski. Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal [J]. *Financial Analysts Journal*, 1991, 47 (4): 52-59.
- [33] Heath D., R. Jarrow and A. Morton. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation [J]. *Journal of Financial Quantitative Analysis*, 1990, 25(4): 419-440.
- [34] Heath D., R. Jarrow and A. Morton. Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology [J]. *Econometrica*, 1992, 60(1): 77-105.
- [35] Brenner R. J., R. H. Harjes, and K. B. Kroner. Another Look at Models of the Short-Term Interest Rate [J]. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1996, 31(2): 95-107.
- [36] Gray S. Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as Regime-Switching Process [J]. *Journal of Financial Economics*, 1996, (42): 27-62.
- [37] Ball C. and W. Torous. Regime Shifts in Short-Term Riskless Interest Rates [Z]. University of California Los Angeles, 1998.
- [38] Ang A. and G. Bekaert. Regime Switches in Interest Rates [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 2002, (20): 163-182.
- [39] Hamilton J. D. A New Approach to the Econometric Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle [J]. *Econometrica*, 1989, (57): 357-384.
- [40] Das S. R. The Surprise Element: Jumps in Interest Rates [J]. *Journal of Econometrics*, 2002, (106): 27-65.
- [41] Johannes M. The Statistical and Economic Role of Jumps in Interest Rates [J]. *Journal of Finance*, 2004, (59): 227-260.
- [42] Ait-Sahalia Yacine. Testing Continuous-Time Models of the Spot Rate [J]. *The Review of Financial Studies*, 1996a, 9(2): 385-426.
- [43] Ait-Sahalia Yacine. Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities [J].

- Econometrica, 1996b, 64(3): 527-560.
- [44] Stanton R. A Nonparametric Model of Term Structure Dynamics and the Market Price of Interest Rate Risk [J]. Journal of Finance, 1997, (52): 1973-2002.
- [45] Prisker M. Nonparametric Density Estimation and Tests of Continuous Time Interest Rate Models [J]. Review of Financial Studies, 1998, 11(3): 449-487.
- [46] Elerian O., S. Chib, and N. Shepherd. Likelihood Inference for Discretely Observed Non-Linear Diffusions [J]. Econometrica, 2001.
- [47] Jones C. S. Nonlinear Mean Reversion in the Short-Term Interest Rate [J]. Manuscript, Simon School of Business, University of Rochester.
- [48] Durham G. B. Likelihood-Based Specification Analysis of Continuous-Time Models of the Short-Term Interest Rates [J]. Manuscript, Economics Department, University of North Carolina at Chapel Hill.
- [49] Li M., N.D. Pearson, and A.M. Pотешман. Facing Up to Conditioned Diffusions [J]. Manuscript, Finance Department, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [50] Nowman K. B. Gaussian Estimation of Single-Factor Continuous Time Models of the Term Structures of Interest Rates [J]. Journal of Finance, 1997, (14): 721-38.
- [51] Tse Y. K. Some International Evidence on Stochastic Behavior of Interest Rates [J]. Journal of International Money and Finance, 1995, (14): 721-738.
- [52] Dalquist M. On Alternative Interest Rate Processes [J]. Journal of Banking and Finance, 1996, (20): 1093-1119.
- [53] Hiraki T. and N. Takezawa. How Sensitive is Short-term Japanese Interest Rate Volatility to the Level of the Interest Rate? [J]. Economics Letteres, 1997, (56): 325-332.
- [54] Manus D. M., and D. Watt. Estimating One-Factor Models of Short-Term Interest rates [Z]. Bank of Canada, 1999.
- [55] Nowman K.B. Continuous-time Short Term Interest Rate Models [J]. Applied Financial Economics, 1998, (8): 401-407.
- [56] Episcopos A. Further Evidence on Alternative Continuous Time Models of the Short-term Interest Rate [J]. Journal of International Financial Markets, Institutions and Money, 2000, (10): 199-212.
- [57] Hansen. Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators [J].

- Econometrica, 1982, (50): 1029-1054.
- [58] Bergstrom, Albert R. Gaussian Estimation of Structural Parameters In Higher Order Continuous Time Dynamic Models [J]. Econometrica, 1983, (51): 117-152.
- [59] Bergstrom, Albert R. The Estimation of Parameters in Nonstationary Higher-order Continuous-time Dynamic Models. Econometric Theory, 1985, (1): 369-385.
- [60] Bergstrom, Albert R. The estimation of Open Higher-order Continuous Time Dynamic Models with Mixed Stock and Flow Data. Econometric Theory, 1986, (2): 350-373.
- [61] Bergstrom, Albert R. Continuous Time Stochastic Models and Issues of Aggregation over Time [A]. Handbook of Econometrics, 1984, (2): 1146-1210.
- [62] John C. Hull. Options, Future, and Other Derivatives, 4th ed [M]. Prentice Hall, Inc., 2000.

中文部分

- [63] 朱世武, 陈健恒. 交易所国债利率期限结构实证研究[J]. 金融研究, 2003, (10): 63-73.
- [64] 范龙振. 上交所债券利率期限结构与两因子 Vasicek 模型[J]. 复旦学报(自然科学版), 2003, (5): 773-778.
- [65] 林海, 郑振龙. 中国利率期限结构: 理论及应用[M]. 北京: 中国财经出版社, 2004.
- [66] 谢赤, 吴雄伟. 基于 Vasicek 模型和 CIR 模型中的中国货币市场利率行为实证分析[J]. 中国管理科学, 2002, (3): 22-25.
- [67] 郑振龙, 林海. 中国市场利率期限结构的静态估计[J]. 货币政策研究, 2003, (3): 33-36.
- [68] 朱世武. 基于 SAS 系统的金融计算[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [69] 李子奈. 计量经济学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [70] 于俊年. 计量经济学[M]. 北京: 对外经济贸易大学出版社, 2000.
- [71] 詹姆斯 D. 汉密尔顿著, 刘明志译. 时间序列分析[M]. 北京: 中国社会科学出版社, 1999.
- [72] 傅曼丽, 董荣杰, 屠梅曾. 动态利率模型估计方法的一个实证检验[J]. 华中科技大学学报, 2005, (4): 97-100

附录

附录一：中国上海证券交易所国债交易情况

中国上海证券交易所国债交易情况（2002-3-28—2005-9-30）

债券代码	债券简称	发行日	到期日	年票息率	年付息次数
000696	96 国债(6)	1996-7-12	2006-6-14	11.83%	1
009704	97 国债(4)	1997-9-25	2007-9-5	9.78%	1
009905	99 国债(5)	1999-9-6	2007-8-20	3.28%	1
009908	99 国债(8)	1999-10-13	2009-9-23	3.30%	1
010103	21 国债(3)	2001-5-10	2008-4-24	3.27%	1
010107	21 国债(7)	2001-8-20	2021-7-31	4.26%	2
010110	21 国债(10)	2001-10-11	2011-9-25	2.95%	1
010112	21 国债(12)	2001-11-13	2011-10-30	3.05%	1
010115	21 国债(15)	2002-1-4	2008-12-18	3.00%	1
010203	02 国债(3)	2002-4-29	2012-4-18	2.54%	1
010210	02 国债(10)	2002-9-2	2009-8-16	2.39%	1
010213	02 国债(13)	2002-10-9	2017-9-20	2.60%	2
010214	02 国债(14)	2002-11-1	2007-10-24	2.65%	1
010215	02 国债(15)	2002-12-16	2009-12-6	2.93%	1
010301	03 国债(1)	2003-2-26	2010-2-19	2.66%	1
010303	03 国债(3)	2003-4-25	2023-4-17	3.40%	2
010307	03 国债(7)	2003-9-1	2010-8-20	2.66%	1
010308	03 国债(8)	2003-9-25	2013-9-17	3.02%	1
010311	03 国债(11)	2003-12-2	2010-11-19	3.50%	1
010403	04 国债(3)	2004-4-30	2009-4-19	4.42%	1
010404	04 国债(4)	2004-6-7	2011-5-24	4.89%	1
010405	04 国债(5)	2004-6-25	2006-6-14	零票息	
010407	04 国债(7)	2004-9-6	2011-8-24	4.71%	1
010408	04 国债(8)	2004-11-1	2009-10-19	4.30%	1
010410	04 国债(10)	2004-12-6	2011-11-24	4.86%	1
010411	04 国债(11)	2004-12-24	2006-12-14	2.98%	1
010501	05 国债(1)	2005-3-11	2015-2-27	4.44%	2
010502	05 国债(2)	2005-3-21	2006-3-14	零票息	
010503	05 国债(3)	2005-5-10	2010-4-25	3.30%	1
010504	05 国债(4)	2005-5-25	2025-5-14	4.11%	2
010505	05 国债(5)	2005-6-3	2012-5-24	3.37%	1
010506	05 国债(6)	2005-6-22	2006-6-14	零票息	
010507	05 国债(7)	2005-7-26	2007-7-14	1.58%	1
010508	05 国债(8)	2005-8-25	2008-8-14	1.93%	1
010509	05 国债(9)	2005-9-5	2012-8-24	2.83%	1
010510	05 国债(10)	2005-9-22	2006-9-14	零票息	

资料来源：由 Wind 资讯金融数据库整理而得。

附录二：有关 Matlab 程序

1. 中国利率期限结构的静态估计

```

function [termrate]=bndterm(setdate)
load bonddata;
settle=setdate;
bndata=zeros(36, 7);

idx=find(bd000696.date==settle);
if isempty(idx)
    bndata(1,:)=zeros(1, 7);
else
    bndata(1,1)=str2num(bd000696.code); % Code %
    bndata(1,2)=bd000696.maturity;        % Maturity %
    bndata(1,3)=bd000696.fre;            % Frequency %
    bndata(1,4)=bd000696.price(idx);     % Price %
    bndata(1,5)=bd000696.coupon;         % Coupon %
    bndata(1,6)=bd000696.duration(idx);  % Duration %
    bndata(1,7)=bd000696.AI(idx);
end

```

.....

/* 中间为从 bonddata 数据库中调用债券数据的步骤, 由于前后程序类似, 故省略未列出 */

```

idx=find(bd010509.date==settle);
if isempty(idx)
    bndata(32,:)=zeros(1, 7);
else
    bndata(32,1)=str2num(bd010509.code);
    bndata(32,2)=bd010509.maturity;

```

```

bndata(32, 3)=bd010509. fre;
bndata(32, 4)=bd010509. price(idx);
bndata(32, 5)=bd010509. coupon;
bndata(32, 6)=bd010509. duration(idx);
bndata(32, 7)=bd010509. AI(idx);
end

price=bndata(:, 4);
idx=find(~(price==0));
bndata=bndata(idx, :);

code=bndata(:, 1);
maturity=bndata(:, 2);
fre=bndata(:, 3);
price=bndata(:, 4)+bndata(:, 7);
coupon=bndata(:, 5);
duration=bndata(:, 6);

n=size(bndata, 1);
ydif = (maturity-settle)./365; % 距到期日年数 %
dif = ydif-floor(ydif); % 距下一个付息日年数 %

pay=[fre dif];
c1=(find(pay(:, 1)==1&pay(:, 2)==0)); % 确定现金流日 %
c2=(find(pay(:, 1)==1&pay(:, 2)~=0));
c3=(find(pay(:, 1)==2&pay(:, 2)==0.5));
c4=(find(pay(:, 1)==2&pay(:, 2)>0.5));
c5=(find(pay(:, 1)==2&pay(:, 2)<0.5));

y(c1)=ydif(c1);a(c1)=coupon(c1);b(c1)=1; % 计算现金流次数和付息日期 %

```

```

y(c2)=floor(ydif(c2))+1;a(c2)=coupon(c2);b(c2)=dif(c2);
y(c3)=ydif(c3).*2;a(c3)=coupon(c3)./2;b(c3)=0.5;
y(c4)=floor(ydif(c4)).*2+2;a(c4)=coupon(c4)./2;b(c4)=dif(c4)-0.5;
y(c5)=floor(ydif(c5)).*2+1;a(c5)=coupon(c5)./2;b(c5)=dif(c5);
y=y';

% 现金流及日期矩阵 %
for i=1:n
    c(i,:)=[a(i).*ones(1,y(i)-1), a(i)+100, zeros(1,max(y)-y(i))];
    t(i,:)=[b(i):1/fre(i):ydif(i), zeros(1,max(y)-y(i))];
end

w=(1./duration)/(sum(1./duration));      % 计算权数 %

s0=sum(c, 2);
s1=sum(c.*t, 2);
s2=sum(c.*(t.^2), 2);

e3=zeros(n, max(y)); e4=zeros(n, max(y)); e5=zeros(n, max(y));
e3(find(t<=5))=t(find(t<=5)).^3;
e4(find(t<=5))=0;
e5(find(t<=5))=0;
e3(find(5<t&t<=8))=t(find(5<t&t<=8)).^3-(t(find(5<t&t<=8))-5).^3;
e4(find(5<t&t<=8))=(t(find(5<t&t<=8))-5).^3;
e5(find(5<t&t<=8))=0;
e3(find(8<t))=t(find(8<t)).^3-(t(find(8<t))-5).^3;
e4(find(8<t))=(t(find(8<t))-5).^3-(t(find(8<t))-8).^3;
e5(find(8<t))=(t(find(8<t))-8).^3;

```

```

s3=sum(c.*e3, 2);
s4=sum(c.*e4, 2);
s5=sum(c.*e5, 2);

Y=price-s0;
S=[s1 s2 s3 s4 s5];
B=glmfit(S, Y, [], [], [], w, 'off');

td=[1/52 1/12 1/4 1/2 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];
trate(1:9)=1+B(1).*td(1:9)+B(2).*(td(1:9).^2)+B(3).*(td(1:9).^3);
trate(10:12)=1+B(1).*td(10:12)+B(2).*(td(10:12).^2)+B(3).*(td(10:12).^3)-(td(10:12)-5).^3)+B(4).*((td(10:12)-5).^3);
trate(13:14)=1+B(1).*td(13:14)+B(2).*(td(13:14).^2)+B(3).*(td(13:14).^3)-(td(13:14)-5).^3)+B(4).*((td(13:14)-5).^3-(td(13:14)-8).^3)+B(5).*((td(13:14)-8).^3);
termrate=log(trate)./(-td);

```

2. 最大似然法估计用到的似然函数以及格点法的程序

注意：这里所有的似然函数都是模型中实际似然函数的 -2 倍，所以最优化实际上就是求似然函数的极小值。

(1) 双因素 CKLS 模型的似然函数

```

function l1f=ufun2(x)
load r1why;

e(:, 1)=r1(:, 1)-exp(x(3)).*r0(:, 1)-(exp(x(3))-1)*x(1)/x(3);
e(:, 2)=r1(:, 2)-exp(x(4)).*r0(:, 2)-(exp(x(4))-1)*x(2)/x(4);
H11=x(7)*x(7).*(r0(:, 1).^(2*x(5)));
H12=x(9)*x(7)*x(8).*(r0(:, 1).^x(5)).*(r0(:, 2).^x(6));
H22=x(8)*x(8).*(r0(:, 2).^(2*x(6)));
O11=(exp(2*x(3))-1).*H11./(2*x(3))+2*(exp(x(3))-1).*H12./x(3)+H22;

```

```

012=(exp(x(3)+x(4))-1).*H12./(x(3)+x(4))+(exp(x(3))-1).*H11./x(3)+(exp(x(4))-1)
.*H22./x(4)+H12;
022=(exp(2*x(4))-1).*H22./(2*x(4))+2*(exp(x(4))-1).*H12./x(4)+H11;
Q11=(011-012.*022.^(-1)).*012).^(-1);
Q12=(012-022.*012.^(-1)).*011).^(-1);
Q21=(012-011.*012.^(-1)).*022).^(-1);
Q22=(022-012.*011.^(-1)).*012).^(-1);

11f=sum(log(011.*022-012.*012))+sum(e(:,1).^2.*Q11+e(:,1).*e(:,2).*(Q12+Q21)+e(:,2).^2.*Q22);

```

(2) 以 1 年和 10 年期利率为双因素的模型的似然函数

```

function l1f=ufun3(x)
load rlyr10y;

e(:,1)=r1(:,1)-x(1)-(1+x(2)).*r0(:,1)-x(7)./r0(:,1);
e(:,2)=r1(:,2)-x(5)-(1+x(6)).*r0(:,2);
H11=x(3)*x(3).* (r0(:,1).^(2*x(4)));
H12=x(10)*x(3)*x(8).* (r0(:,1).^x(4)).*(r0(:,2).^x(9));
H22=x(8)*x(8).* (r0(:,2).^(2*x(9)));
Q11=((1-x(10)^2)*x(3)^2)^(-1).* (r0(:,1).^(-2*x(4)));
Q12=((x(10)-x(10)^-1)*x(3)*x(8).* (r0(:,1).^x(4)).*(r0(:,2).^x(9))).^(-1);
Q22=((1-x(10)^2)*x(8)^2)^(-1).* (r0(:,2).^(-2*x(9)));

11f=sum(log(H11.*H22-H12.*H12))+sum(e(:,1).^2.*Q11+2.*e(:,1).*e(:,2).*Q12+e(:,2).^2.*Q22);

```

(3) 格点法循环求解 (2) 中似然函数极小值的第一步程序，以后的步骤只需改变参数的区间和格点的间隔就可以实现。

```
load r1yr10y;
x(1)=0.0295;x(2)=-0.9747;x(7)=-0.000185;x(5)=0.0004;x(6)=-0.0103;
x1=0.0295;x2=-0.9747;x7=-0.000185;x5=0.0004;x6=-0.0103;

fval=0;
for x10=-1:0.1:1;
    for x9=0:0.1:3;
        for x8=0:0.1:2;
            for x4=0:0.1:3;
                for x3=0:0.1:2;
                    .....
/* 此处省略的部分即为 (2) 中的似然函数 */

if fval>llf
    fval=llf;
    x(10)=x10;x(9)=x9;x(8)=x8;x(4)=x4;x(3)=x3;
end
    end;
    end;
    end;
    end;
```

致 谢

在本文的写作过程中，得到了许多人的关心、支持和帮助。在此，首先对我的导师黄长全副教授表示衷心的感谢。硕士三年，我一直在他的言传身教中学习如何做学问与做人，正是他的谆谆教诲使我始终保持谦虚谨慎、求实奋进的精神。硕士论文从选题到写作大纲的拟定以及文章的遣词用句都是在他的悉心指导下完成的。

同时，我也要感谢厦门大学计划统计系的老师们在我研究生学习期间给予我的关怀，他们传授给我了令我终身受用的知识，为我这篇论文的写作提供了坚实的理论基础。感谢我的同学郭鹏辉、霍竟春、林松等在我论文写作过程中对我提供的许多宝贵建议以及无私帮助。

我还要感谢我的父母，他们在精神上给予了我极大的鼓励和支持，没有他们对我生活、学习上的关怀，我也不可能有走进厦大，接受深造的机会。

借此机会，我还要向其他所有曾经关心、帮助和支持过我的老师、同学和朋友一并致以真诚的谢意。

由于本人学识所限，故本文仍然还有许多不足，对此敬请各位师长及同学们批评指正。

杨 海 涛

2006 年 4 月于厦门大学