摘 要

本文主要讨论具有某种特殊传递性的区组设计的分类和构造问题.全文由七章组成.

在第一章中,我们对群与设计的历史背景和研究现状进行了比较全面的综述.在第二章中, 我们介绍了本文所需要的群论和区组设计的若干基本概念.

在第三章中,在M.Huber工作的基础上, 我们考虑了更加一般的旗传递t-设计的分类问题,得到了

主要定理 1 *设$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$是一个非平凡的5-$(v,k,2)$设计.如果$G\leq Aut(\mathcal{D})$在$\mathcal{D}$上旗传递,那么$PSL(2,q)\leq G\leq Aut(PSL(2,q))$,这里$q=p^e$且$p=2$或3.*

在第四章中,在E.O'R.Regueiro工作的基础上,我们考虑了旗传递三平面,即$(v,k,3)$-对称设计,的分类问题,得到如下定理:

主要定理 2 *如果一个$(v,k,3)$-对称设计$\mathcal{D}$具有一个几乎单型的本原,旗传递自同构群G, 且$Soc(G)$为典型单群,那么设计$\mathcal{D}$具有参数(11,6,3)或(45, 12, 3).它们在同构的意义下是唯一的,且分别有$G\cong PSL_2(11)$与$G\cong PSp_4(3):2\cong PSU_4(2):2$.*

在第五章中,我们主要考虑T是非交换单群,$T\leq G\leq Aut(T)$且G线传递作用在其上的有限线性空间的分类问题. 应当指出,当T的李秩比较小时,往往需要将G是线传递约化成T是线传递.本章对这种约化进行了一些探索.我们证明了下面的定理:

主要定理 3 *设G是线传递地作用在一个有限线性空间$\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$上,且$L(q)\trianglelefteq G\trianglelefteq Aut(L(q))$, $L(q)$是有限域$GF(q)$上的李型单群.如果$L(q)\cong F_4(q)$, 则若T不是线传递的,那么T_L不能是${}^2F_4(q)$, $B_4(q)$, $D_4(q).S_3$, ${}^3D_4(q).3$, $F_4(q^{\frac{1}{2}})$的子群或T的抛物子群的子群,这里$T=L(q)$.*

我们知道, 刘伟俊在他的博士论文中[28]完成了可解区传递2-$(v,7,1)$设计的分类.因此对于非可解的相应设计的研究很有必要.在第六章中,我们对该种设计进行了研究,得到了如下结果:

主要定理 4 *设G是一2-$(v,7,1)$设计$\mathcal{D}$的自同构群,若G区传递非可解且点本原,但非旗传递的作用在设计$\mathcal{D}$上,则$G\neq PSL(n,q)$,这里q为奇数且$(n,q)\neq(2,2),(2,3)$.*

特殊线性群$PSL(2,q)$经常被人们用来构造t-设计.在第七章中,我们研究了区组长度为7且以$PSL_2(q)$为自同构群的单纯3-设计的存在性, 确定了以$PSL_2(q)$为自同构群的单纯3-$(q+1,7,\lambda)$ 设计的所有可能λ的取值.

主要定理 5 *以$PSL_2(q)$为自同构群,区组长度为7的单纯3-$(q+1,7,\lambda)$设计$(1<\lambda\leq\begin{pmatrix} q-2 \\ 4 \end{pmatrix})$存在,当且仅当下列条件之一成立:*

(i) 如果$q\equiv 71,251 \pmod{420}$,那么$\lambda\equiv 0,1,15,21 \pmod{35}$.

(ii) 如果$q\equiv 211,391 \pmod{420}$, 那么$\lambda\equiv 0,15,21,36 \pmod{105}$.

(iii) 如果$q\equiv 3,123,243,303,87,207,387,283,403,103,163,67,187,247,367,19,139,199,319 \pmod{420}$, 那么$35|\lambda$.

(iv) 如果$q\equiv 31,151,271,331 \pmod{420}$, 那么$\lambda\equiv 0,21 \pmod{35}$.

(v) 如果$q\equiv 311,11,131,191 \pmod{420}$, 那么$\lambda\equiv 0,21 \pmod{105}$.

(vi) 如果$q\equiv 183,363,27,267,43,223,127,307,379,139 \pmod{420}$, 那么$\lambda\equiv 0,15 \pmod{35}$.

(vii) 如果$q\equiv 323,83,379,239,419 \pmod{420}$, 那么$\lambda\equiv 0,15 \pmod{105}$.

(viii) 如果$q\equiv 23,143,203,383,47,227,347,59,79,179,299,359 \pmod{420}$,那么$105|\lambda$.

关键词 自同构群, 区组设计, 旗传递, 区传递,几乎单群, 非可解

ABSTRACT

The thesis aims at discussing the classification of block-designs, which have some particular transitivity, and consists of six Chapter.

In Chapter 1, we give a comprehensive survey of the backgrounds and modern developments of groups and designs.

In Chapter 2, we introduce some elementary concepts, which will be used in this thesis.

In Chapter 3, basing on Huber's works, we further consider the classification of more general flag-transitive designs, and get

Main Theorem 1 *Let $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B}, I)$ be a non-trivial 5-$(v, k, 2)$ design. Then if G is a flag-transitive automorphism group of a designs $\mathcal{D}$, then $PSL(2, q) \leq G \leq Aut(PSL(2, q))$, where $q = p^e$ and $p = 2$ or 3.*

In Chapter 4, basing on E.O'R.Regueiro's works, we further consider the classification of triplanes, and get following result

Main Theorem 2 *If a $(v, k, 3)$-symmetric design $\mathcal{D}$ admits a primitive, flag-transitive automorphism group G of almost simple type with classical socle T , then $\mathcal{D}$ is either the unique $(11, 6, 3)$-symmetric design or the unique $(45, 123)$-symmetric design, and $G \cong PSL(2, 11)$ or $G \cong PSp_4(3) : 2 \cong PSU_4(2) : 2$, respectively.*

In Chapter 5, we main consider the classification of finite linear-space admitting a line-transitive automorphism group , and $T \leq G \leq Aut(T)$, with T is a non- abelian simple group. Should point that when the Lie rank is small, we often reduce G block-transitive to socle T. This paper is an exploration of the reduction. We prove the following theorem:

Main Theorem 3*Let G act line-transitively on a linear space $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$,and $\trianglelefteq G \trianglelefteq Aut(L(q))$ with $L(q)$ is a Lie simple group on finite field $GF(q)$. If $T \cong F_4(q)$, and T is not line-transitive, then T_L is not the subgroups of ${}^2F_4(q)$, $B_4(q)$, $D_4(q).S_3$, ${}^3D_4(q).3$, $F_4(q^{\frac{1}{2}})$ or the parabolic subgroups of T, where $T = L(q)$.*

We are all know, in [28] Liu Weijun classified the 2-$(v, 7, 1)$ with solvable block-transitive automorphism group. Therefore, it is necessery to classify the same designs with unsolvable block-transitive automorphism group. In Chapter 6, we discuss them, and get following result.

Main Theorem 4 *If G is a group of automorphism of a 2-$(v, 7, 1)$ design $\mathcal{D}$,and is*

block-transitive, unsolvable and imprimitive, then $G \neq PSL(n,q)$, where q is odd and $(n,q) \neq (2,2),(2,3)$.

The projective special linear group $PSL(2,q)$ is often use for constructing t-designs. In Chapert 7, we investigate the existence of simple 3-designs with block size 7 from $PSL(2,q)$ and determine all the possible values of λ in the simple 3-$(q+1,7,\lambda)$ designs admitting $PSL(2,q)$ as an automorphism group.

Main Theorem 5: *There exists a simple 3-$(q+1,7,\lambda)$ design with automorphism group $PSL(2,q)$ and $1 < \lambda \leq \begin{pmatrix} q-2 \\ 4 \end{pmatrix}$ if and only if one of the following cases holds:*

(i) *If* $q \equiv 71, 251 \pmod{420}$, *then* $\lambda \equiv 0, 1, 15, 21 \pmod{35}$.

(ii) *If* $q \equiv 211, 391 \pmod{420}$, *then* $\lambda \equiv 0, 15, 21, 36 \pmod{105}$.

(iii) *If* $q \equiv 3, 123, 243, 303, 87, 207, 387, 283, 403, 103, 163, 67, 187, 247, 367, 19, 139, 199, 319 \pmod{420}$, *then* $35|\lambda$.

(iv) *If* $q \equiv 31, 151, 271, 331 \pmod{420}$, *then* $\lambda \equiv 0, 21 \pmod{35}$.

(v) *If* $q \equiv 311, 11, 131, 191 \pmod{420}$, *then* $\lambda \equiv 0, 21 \pmod{105}$.

(vi) *If* $q \equiv 183, 363, 27, 267, 43, 223, 127, 307, 379, 139 \pmod{420}$, *then* $\lambda \equiv 0, 15 \pmod{35}$.

(vii) *If* $q \equiv 323, 83, 379, 239, 419 \pmod{420}$, *then* $\lambda \equiv 0, 15 \pmod{105}$.

(viii) *If* $q \equiv 23, 143, 203, 383, 47, 227, 347, 59, 79, 179, 299, 359 \pmod{420}$, *then* $105|\lambda$.

KEY WORDS automorphism group, block-designs, flag-transitive, block-transitive, almost simple groups, unsolvable

第一章 绪论

1.1 群与设计的历史背景

群论是代数学的最重要的分支之一.人们最早是在考查域的自同构时发现群的.而后才形成抽象群的概念.但是不久人们就发现, 把群与某种代数结构或组合结构联系起来,对群的结构的理解有很大优越性.二十世纪三十年代, Witt([1,2])发现五个Mathieu群原来是五个t-设计的自同构群(或子群),由此很容易导出Mathieu群的性质. 五十年代,Chevalley([3])通过构造任意域上的某种Lie代数的自同构群而建立了统一的Lie型群的理论. 几乎与此同时Tits为了构造一些特殊类型的Lie群在任意域情形的对应物而提出了Building这种组合结构的概念因而形成了群的几何的理论([4]).因此,研究群与各种组合结构的联系是群论的一个非常重要方面.

在有限单群分类完成以后,关于这种联系的研究更为活跃.这涉及到图,区组设计,有限射影平面,Tits几何,广义多边形等等. 这种局面的形成有三方面的原因,首先在单群分类完成后,群论特别是置换群论的一些重要问题获得解决, 群论的新成果和新方法对于这些结构的研究有很大帮助; 其次在这些研究中也提出了群论方面的新问题,这些新问题形成对群论的一种挑战; 最后,这些组合结构中的某些有很强的应用背景(如在试验设计,编码和密码中的应用),以至数学上的一些成果可能带来经济上的巨大效益.

置换群与组合结构的研究是近年来代数学与组合学交叉渗透而形成的一个十分活跃的研究领域.澳大利亚院士C.E.Preager教授在2002年世界数学家大会上做的45分钟报告对此方向做了重点介绍, 国内一些学者在此方向也做出了很好的研究成果.目前,国际上的研究前沿课题是, 在假定区组设计的自同构群具有良好的传递性（如区组传递或区组本原）的条件下, 试图决定该区组设计和相应的自同构群,这种研究的意义在于一方面可以利用有限群的结果和方法发现新的区组设计, 另一方面可以利用区组设计的结构来理解抽象群的结构.这种研究也对群论界提出了新的挑战.

1.2 群论与组合设计的研究现状

1981年完成的有限单群分类定理是有限群理论发展史上的重要里程碑. 这一定理断言任一有限单群在同构意义下必在以下几类之中: (i) 素数阶循环群; (ii) 交错群$A_n(n \geq 5)$; (iii) 26个零散单群; (iv) Lie 型单群. 随着单群分类定理的完成, 置

换群中的若干问题得到了彻底的解决, 其中的重要结果有2–传递群和2–齐次传递群的分类, 奇数次本原群的分类, 等等. 几乎在群论中一重大成果的出现的同时, 该成果在组合设计上的应用就被考虑了.

首先,Kantor利用单群分类定理获得了自同构群在点集上2-传递的设计的分类.

引理 1.2.1 ([5]) 设$\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 是一个$2-(v,k,1)$ 设计, G 是它的2–传递的自同构群(在点集$\mathcal{P}$ 上), 则下列之一成立:

1. $\mathcal{S}=PG(d,q)$, 即$GF(q)$ 上的d–维射影空间, $d\geq 2$ 且$PSL(d,q)\leq G\leq P\Gamma L(d,q)$, 或者$(d,q)=(3,2)$ 且$G=A_7$;
2. $\mathcal{S}=AG(d,q)$, 即$GF(q)$ 上仿射空间, $d\geq 2$ 且G 是$A\Gamma L(d,q)$ 的2-传递子群;
3. $\mathcal{S}$ 是*Hermitian Unital*,它是这样的一个设计, 点和区分别是$GF(q)$ 上的3-维空间的q^3+1 个迷向1-维空间和非奇异2-维空间, 且$PSU(3,q)\leq G\leq P\Gamma U(3,q)$;
4. $\mathcal{S}$ 是*Ree Unital*, $Ree(q)={}^2G_2(q)\leq G\leq Aut(Ree(q))$, 这里$q=3^{2e+1}\geq 3$, $\mathcal{P}$ 是一个q^3+1 个点的集合, $\mathcal{L}$ 是一个G 中的对合的稳定点的集合;
5. $\mathcal{S}$ 是两个*non-Desarguesion*仿射平面, 且$k=27$(Hereing平面)或$k=9$(nearfield平面)([6, 7]);
6. $\mathcal{S}$是设计$2-(3^6,3^2,1)$ 设计([7]), $G=Z_3^6\rtimes SL(2,13)$.

在有限单群分类定理完成前后, 另一重大的成果也被发现,这即是置换群理论中关于本原群结构的$O'Nan-Scott$ 定理. 这一定理指出:有限本原置换群的基柱有一个几乎透明的结构−−基柱是同构单群的直积.这一定理指出了有限本原群按可按其基柱进行分类并且除所谓的"挠圈积型本原群"外阐述了基柱如何嵌入一置换群使得该置换群成为本原群. 它是研究有限本原置换群的出发点.解决几乎单群的极大子群或子群结构的问题使得有限群论继续蓬勃发展.

引理 1.2.2 *O'Nan-Scott*定理([8, 9])设G 是n 次本原置换群, $H=Soc(G)$. 则或者

1. H 是正则的初等*Abel* p–群, $n=|H|$, G 同构于仿射群$AGL(m,p)$ 的子群; 或者
2. H 同构于非交换单群T 的直积, $H\cong T^m$, 且以下情形之一成立.
   (a) $m=1$, $T\leq G\leq Aut(T)$, 即G 是几乎单型本原群;
   (b) $m\geq 2$, $n=|T|^{m-1}$, 即G 是对角型本原群;

(c) $m \geq 2$, 且存在d, $d \mid m$, $1 < d < m$ 和本原群U, 使得$Soc(U) \cong T^d$, 而$G \leq U\,wr\,Sym(m/d)$, $n = l^{m/d}$, l 是U 的次, 即G 是乘积型本原群;

(d) $m \geq 6$, H 是正则的, $n = |T|^m$, 即G 是挠圈积型本原群.

九十年代,Buekenhout等六位数学家利用O'Nan-Scott定理与单群分类定理分类了有旗传递2-$(v,k,1)$设计.

引理 1.2.3 ([10]) 假设G 是非平凡线性空间$\mathcal{S}$ 上旗传递自同构群, 则要么

1. $(\mathcal{S}, G)$ 是以下情况:

   (a) $\mathcal{S} = PG(d,q)$, $PSL(d+1,q) \leq G \leq P\Gamma L(d+1,q)$;

   (b) $\mathcal{S}$ 是Hermitean Unital $U_H(q)$ 且$PSU(3,q) \leq G \leq P\Gamma U(3,q)$;

   (c) $\mathcal{S}$ 是阶为$q = 3^{2n+1}$ 的Ree Unital 且${}^2G_2(q) \leq G \leq Aut({}^2G_2(q))$;

   (d) $\mathcal{S}$ 是用$PSL(2,q)$ 来定义的Witt-Bose-Shrikhande设计, 这里$q = 2^n$, $n \geq 3$, 且$PSL(2,q) \leq G \leq P\Gamma L(2,q)$;

   (e) $\mathcal{S}$ 是一个Desarguesian仿射空间, $G_0 \leq \Gamma L(d,q)$;

   (f) $\mathcal{S}$ 是一个非Desarguesian仿射空间: $\mathcal{S}$ 是一个阶为q^2 的仿射平面, 这里$q = 2^{2n+1}$, $n \geq 1$, 且${}^2B_2(q) \leq G_0 \leq Aut({}^2B_2(q))$; $\mathcal{S}$ 是一个阶为27的Hering平面且$G_0 = SL(2,13)$ 或$\mathcal{S}$ 为一个9阶的nearfield平面;

   (g) $\mathcal{S}$ 是具有3^9 个点及线长为3^2 的两个旗传递线性空间之一.

2. $\mathcal{S}$ 有$q = p^s$ 个点(p 为素数)且G 是一维半线性仿射变换群$A\Gamma L(1,q)$ 的子群.

对于$t > 2$的Steiner t-设计的研究相对滞后一些.虽然,有限单群的分类已经完成,但是40年来,对于$t > 2$的Steiner t-设计的分类一直是一个公开的问题.直到最近, M.Huber ([12, 13]) 根据下面的引理1.2.4解决了旗传递$3-(v,k,1)$ 设计及$4-(v,k,1)$设计的分类.

引理 1.2.4 ([11]) 设$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 是一个非平凡的Steiner $t-$设计, 且$t \geq 3$. 如果$G \leq Aut(\mathcal{S})$ 在$\mathcal{S}$ 上是旗传递的, 则G 在$\mathcal{P}$ 上是$2-$传递的.

引理 1.2.5 设$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 是一个非平凡的$3-(v,k,1)$ 设计. 则$G \leq Aut(\mathcal{S})$ 在$\mathcal{S}$ 上是旗传递的当且仅当下列情况成立:

1. $\mathcal{S}$ 同构于$3-(2^d,4,1)$ 设计，其中这里的点和区组是仿射空间$AG(d,2)$ 中的点和平面，并且以下情况成立：

   (a) $d \geq 3$, $G \cong AGL(d,2)$;

   (b) $d=3$, $G \cong AGL(1,8)$ 或者$A\Gamma L(1,8)$;

   (c) $d=4$, $G_0 \cong A_7$;

   (d) $d=5$, $G \cong A\Gamma L(1,32)$.

2. $\mathcal{S}$ 同构于$3-(q^e+1,q+1,1)$ 设计，其中点是射影线$GF(q^e)\cup\{\infty\}$ 中的元素，区组是$GF(q)\cup\{\infty\}$ 在$PGL(2,q^e)$ 下的像(相同的对$PSL(2,q^e)$, e 为奇数时), $q \geq 3$ 为素数幂，$e \geq 2$. 并且任何给定点的诱导设计同构于$2-(q^e,q,1)$ 设计，其中点和区组是仿射空间$AG(d,2)$ 中的点和平面，并且$PSL(2,q^e) \leq G \leq P\Gamma L(2,q^e)$;

3. $\mathcal{S}$ 同构于$3-(q+1,4,1)$ 设计，其中点是$GF(q^e)\cup\{\infty\}$ 中的元素且$q \equiv 7\,(mod 12)$, 区组是$\{0,1,\varepsilon,\infty\}$ 在$PSL(2,q^e)$ 下的像，这里ε 是$GF(q)$ 中的6次本原根，并且任何给定点的诱导设计同构于Netto 系$N(q)$, 并且$PSL(2,q) \leq G \leq P\Sigma L(2,q)$;

4. $\mathcal{S}$ 同构于Witt $3-(22,6,1)$ 设计，并且$G \trianglerighteq M_{22}$.

引理 1.2.6 设$\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 是一个非平凡的$4-(v,k,1)$ 设计. 则$G \leq Aut(\mathcal{S})$ 在$\mathcal{S}$ 上是旗传递的当且仅当下列情况成立：

1. $\mathcal{S}$ 同构于Witt $4-(11,5,1)$ 设计，并且$G \cong M_{11}$;

2. $\mathcal{S}$ 同构于Witt $4-(23,7,1)$ 设计，并且$G \cong M_{23}$.

2007年,Huber([14])又利用3-齐次置换群的分类,解决了5-$(v,k,1)$旗传递设计的分类,并且证明了不存在旗传递6-$(v,k,1)$. 本文考虑了更加一般的t-设计的分类,着重讨论了具有旗传递自同构群的5-$(v,k,2)$设计的分类问题.

引理 1.2.7 设$\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 是一个非平凡的$t-(v,k,1)$ 设计其中$t=5,6$. 则$G \leq Aut(\mathcal{S})$ 在$\mathcal{S}$ 上是旗传递的当且仅当下列情况成立：

1. $\mathcal{S}$ 同构于Witt $5-(12,6,1)$ 设计，并且$G \cong M_{12}$;

2. $\mathcal{S}$ 同构于Witt $5-(28,7,1)$ 设计,并且$G \cong PSL_2(23)$ 或M_{24}.

本文考虑了旗传递5-$(v,k,2)$设计的分类问题.

另一类重要的旗传递设计就是旗传递2-$(v,k,1)$对称设计.当$\lambda = 1$时即就是射影平面.当$\lambda = 2$时即就是所谓的双平面.2004年,E.O'R.Regueiro在文献([15])中给出了如下的归约定理:

引理 1.2.8 *设$\mathcal{D}$是一个具有旗传递,点本原自同构群G的非平凡(v,k,λ)-对称设计且$\lambda \leq 3$,则G是仿射型的或者是几乎单型的.*

由此,她在([16,17])给出了旗传递双平面的部分分类:

引理 1.2.9 *设$\mathcal{D}$是一个具有旗传递,点本原自同构群G的非平凡双平面,则*

(1) *$\mathcal{D}$具有参数(16,6,2), (7,4,2), (11,5,2);*

(2) *对某个奇素数幂q,有$G \leq A\Gamma L_1(q)$;*

(3) *G是几乎单型,且$Socle(G)$是一个例外Lie型单群.*

本文考虑了$\lambda = 3$,即三平面的分类问题.

旗传递2-$(v,k,1)$设计分类完成后,人们的注意力转到了更弱条件下的设计分类,于是线本原,线传递设计的构造与分类的问题就被提出.

对于线本原设计,Kantor([18])考虑了射影平面这个特别的情形, 得到了

引理 1.2.10 *设$\mathcal{S}$是一个q阶射影平面, 即一个2-$(q^2+q+1, q+1, 1)$设计, $G \leq Aut(\mathcal{S})$是线本原的. 则下面之一成立:*

1. *$\mathcal{S}$是Desarguesian, 且$PSL(3,q) \leq G \leq P\Gamma L(3,q)$;*

2. *$v = q^2+q+1$是一个素数, 且G是v阶循环群或者一个$v(q+1)$阶或者一个vq阶的Frobenius群.*

Delandtsheer ([19])考虑了不是射影平面的情形, 他得到了

引理 1.2.11 *设$\mathcal{S}$是一个$2-(v,k,1)$设计, 但非射影平面. 如果$G \leq Aut(\mathcal{S})$是线本原, 则存在非交换单群T, 使得$T \leq G \leq Aut(T)$, 即G是几乎单群.*

对于线本原2-$(v,k,1)$设计, Delandtsheer和Doyen([20])有如下猜想:

猜想 1.2.1 *如果$\mathcal{S} = (\mathcal{P},\mathcal{L})$是线本原的2-$(v,k,1)$设计, 则$\mathcal{P}$也是点本原的.*

这个猜想在下列附加条件之一下是成立的:

1. $\mathcal{S}$ 是有限射影平面([18]);
2. $k/(k,v) \le 10$([21, 22, 23, 24]);
3. $v > (\frac{k(k-1)}{2}-1)^2/2$([25]);
4. $k \le 40$([19, 26]);
5. G 有一个作用在$\mathcal{P}$ 上不超过7([20]);
6. G 作用$\mathcal{P}$ 上有一个正则子群([20]);
7. $Soc(G) \cong A_n$([27]);
8. $Soc(G) \cong PSL(2,q), Sz(q)$([28]);
9. $Soc(G) \cong {}^3D_4(q), G_2(q)$([29, 30, 31, 32]);
10. $Soc(G) \cong {}^2G_2(q), {}^2F_4(q^2)$([33, 34, 35, 36]);
11. $Soc(G) \cong PSL(3,q)$([37]).

对于线传递设计的分类,人们已得到了许多有用的结果.

引理 1.2.12 ([38]) *(Delandtsheer and Doyen 定理)设$\mathcal{D}$是一个区传递而非点本原的2-$(v,k,1)$设计,则$v \le (\frac{k(k-1)}{2}-1)^2$.*

引理 1.2.13 ([39])*设$\mathcal{D}$是一个2-$(v,k,1)$设计,$k \ne 4,5,3$和8,且$v = m^2 = (\frac{k(k-1)}{2}-1)^2$, $G \le Aut(\mathcal{D})$ 是区传递而非点本原的.则存在S_m的2-传递子群T_1, T_2使下面之一成立:*

(a) $T_1 \times T_2 \le Aut(T_1) \times Aut(T_2)$;

(b) $T_1 \le G \le AutT_1 \wr S_m$.

Cameron和Preager([40])证明了如下非常有意义的定理:

引理 1.2.14 *当$t \ge 8$时不存在非平凡的区传递t-设计;当$t \ge 7$ 时不存在非平凡的旗传递t-设计.*

并且有以下猜想:

猜想 1.2.2 *不存在非平凡的区传递6-设计.*

Cameron证明了以下分类区传递2-$(v,k,1)$ 设计的纲领性的结果:

引理 1.2.15 ([41]) *设G是线性空间$\mathcal{S}$上的一个线传递点本原的自同构群，则G的基柱要么是初等交换群要么是非交换单群.*

对于k固定的区传递2-$(v,k,1)$设计分类,Calpham[42]与1976年完成了对区传递2-$(v,3,1)$设计的分类.

引理 1.2.16 *设G是2-$(v,3,1)$设计$\mathcal{D}$的区传递自同构群,则下列之一成立:*

(1) *G 在点上的作用是2-传递的;*

(2) *$|G|$ 为奇数,且G是$A\Gamma L(1,p^d)$的包含平移的子群,其中p是素数,d是自然数,下列之一成立:*

(a) *$GF(3)$上的d维仿射几何,d是奇素数且在点上是秩3.*

(b) *$\mathcal{D}$是一个Netto系.*

(c) *G有点秩7且$p^d \equiv 7 \pmod{12}$.*

对于区传递2-$(v,4,1)$设计Cameron和Siemons[43]给出了自同构群可解的情形,Li [44]讨论了非可解的情形.Li和Tong [45]讨论自同构群可解的区传递2-$(v,5,1)$,Han和Li [46]给出了非可解的情形.对于$k=6,7,8,9,10$ 且自同构群为可解的此类设计,刘伟俊在[28,47,48] 中给出了分类. 对一般区长k的区传递2-$(v,k,1)$设计的研究,现今国际上主要集中在Socle 是非交换单群的情形.Camina, Praeger, Neumann, Spiezie考虑了Scole(G) 是26个散在单群或交错群的情形([49,50]).刘伟俊在([51,52,53,54]) 中分别讨论了$G=Soc(G)=PSU_3(q)$(q是偶数),$PSL_2(q)$, $SZ(q)$, $Ree(q)$的情形.并且提出:

猜想 1.2.3 *设$T \le G \le Aut(T)$,$\mathcal{S}$是一个有限线性空间,若G作用在$\mathcal{S}$上是线传递的,则T也是线传递的.*

于是,对于区传递设计的研究一般可以约化到自同构群的基柱区传递.本文在这个方面做了部分工作.

1.3 本文的主要研究结果

本本文由四部分组成,第一部分主要考虑旗传递区组设计的分类问题,做了两个方面的工作.第一方面,在Huber工作的基础上,考虑了更加一般的旗传递-设计的分类问题,得到了

主要定理 1 *设$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$ 是一个非平凡的5-$(v,k,2)$ 设计.如果$G\le Aut(\mathcal{D})$在$\mathcal{D}$上旗传递,那么$PSL(2,q)\le G\le Aut(PSL(2,q))$,这里$q=p^e$且$p=2$或3.*

第二方面,在E.O'R.Regueiro工作的基础上,考虑了旗传递三平面的分类问题,得到如下定理

主要定理 2 如果一个$(v,k,3)$-对称设计$\mathcal{D}$具有一个几乎单型的本原,旗传递自同构群G, 且$Soc(G)$为典型单群,那么设计$\mathcal{D}$具有参数(11,6,3)或(45, 12, 3),且在同构的意义下是唯一的.且分别有$G\cong PSL_2(11)$与$G\cong PSp_4(3):2\cong PSU_4(2):2$.

第二部分主要考虑T是非交换单群,$T\le G\le Aut(T)$且G线传递作用在其上的有限线性空间的分类问题.应当指出,当T的李秩比较小时,往往需要将G是线传递约化成T是线传递.本章对这种约化进行了一些探索.我们证明了下面的定理

主要定理 3 设G是线传递地作用在一个有限线性空间$\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$上,且$L(q)\trianglelefteq G\trianglelefteq Aut(L(q))$, $L(q)$是有限域$GF(q)$上的李型单群.如果$L(q)\cong F_4(q)$, 则若T不是线传递的,那么T_L不能${}^2F_4(q)$, $B_4(q)$的子群, $D_4(q).S_3$, ${}^3D_4(q).3$, $F_4(q^{\frac{1}{2}})$ 或T的抛物子群的子群,这里$T=L(q)$

第三部分,我们对非可解区传递设计的分类进行了研究，得到了如下结果:

主要定理 4 设G是一2-$(v,7,1)$设计$\mathcal{D}$的自同构群,若G区传递非可解且点本原,但非旗传递的作用在设计$\mathcal{D}$上,则$G\neq PSL(n,q)$,这里q为奇数且$(n,q)\neq(2,2),(2,3)$.

第四部分,我们研究了区组长度为7且以$PSL_2(q)$ 为自同构群的单纯3-设计的存在性,确定了以$PSL_2(q)$为自同构群的单纯3-$(q+1,7,\lambda)$设计的所有可能λ的取值.

主要定理 5 以$PSL_2(q)$为自同构群,区组长度为7的单纯3-$(q+1,7,\lambda)$设计$(1<\lambda\le\begin{pmatrix}q-2\\4\end{pmatrix})$存在,当且仅当下列条件之一成立:

(i) 如果$q\equiv 71,251 \pmod{420}$,那么$\lambda\equiv 0,1,15,21 \pmod{35}$.

(ii) 如果$q\equiv 211,391 \pmod{420}$, 那么$\lambda\equiv 0,15,21,36 \pmod{105}$.

(iii) 如果$q\equiv 3,123,243,303,87,207,387,283,403,103,163,67,187,247,367,19,139,199,319 \pmod{420}$, 那么$35|\lambda$.

(iv) 如果$q\equiv 31,151,271,331 \pmod{420}$, 那么$\lambda\equiv 0,21 \pmod{35}$.

(v) 如果$q\equiv 311,11,131,191 \pmod{420}$, 那么$\lambda\equiv 0,21 \pmod{105}$.

(vi) 如果$q\equiv 183,363,27,267,43,223,127,307,379,139 \pmod{420}$, 那么$\lambda\equiv 0,15 \pmod{35}$.

(vii) 如果$q\equiv 323,83,379,239,419 \pmod{420}$, 那么$\lambda\equiv 0,15 \pmod{105}$.

(viii) 如果$q \equiv 23, 143, 203, 383, 47, 227, 347, 59, 79, 179, 299, 359 \pmod{420}$,那么$105|\lambda$.

第二章 预备知识

在本章中, 我们简单地介绍一下与本论文有关的群论和组合的基本概念及基本知识.

2.1 群论的一些基本概念

2.1.1 有限群的若干基本概念

定义 2.1.1 群G 的子群M 称为**极大子群**, 如果$M \subset G$, 且如果有G 的子群T 满足$M \subseteq T \subseteq G$, 那么总有$T = M$ 或者$T = G$.

定义 2.1.2 群G 的子群H 称为G 的**正规子群**, 如果对于任意的$x \in G$, 都有$x^{-1}Hx \subseteq H$, 记为$H \trianglelefteq G$.

我们也给出单群和几乎单群的定义.

定义 2.1.3 如果群G 没有非平凡的正规子群, 则称G 为**单群**.

定义 2.1.4 设G 为有限群, 群G 的**基柱**(Socle)是指G 的所有极小正规子群的积, 记为$Soc(G)$. 有限群G 称为**几乎单群**, 如果存在非交换单群使得$T = Soc(G) \trianglelefteq G \leq Aut(T)$.

定义 2.1.5 设G 为群, $a, g \in G$, 规定: $a^g = g^{-1}ag$, 称a^g 为a 在g 下的共轭变形. 称G 中元a, b(或子集H, K)在G 中**共轭**, 若存在元$g \in G$, 使得$a^g = b(H^g = K)$.

共轭关系是等价关系. 于是群G 的所有元素依共轭关系可划分为若干等价类, 称之为**共轭类**.

定义 2.1.6 G 为群, H 是G 的子集, $g \in G$. 若$H^g = H$, 则称元素g 正规化H, 而称G 中所有正规化H 的元素的集合

$$N_G(H) = \{g \in G | H^g = H\}$$

为H 在G 中的**正规化子**.

又若元素g 满足对所有$h \in H$ 恒有$h^g = h$, 则称g 元素中心化H, 而称G 中所有中心化H 的元素的集合

$$C_G(H) = \{g \in G | h^g = h, \forall h \in H\}$$

为H 在G 中的中心化子.

规定$Z(G)=C_G(G)$, 称之为群G 的中心.

定义 2.1.7 G 中元α 所属的共轭类C 的长度$|C|=|G:C_G(\alpha)|$. 因此$|C|$ 是G 的因子. 类似的, 子群(子集) H 的共轭子群(子集)的个数为$|G:N_G(H)|$ 也是G 的因子.

定义 2.1.8 设N, F 为两个抽象群, $\alpha: F\mapsto Aut(N)$ 是同态映射, 则N 和F 关于α 的半直积 $G=N\rtimes_\alpha F$ 规定为

$$G=N\rtimes_\alpha F=\{(a,x)|a\in N,x\in F\},$$

运算为

$$(a,x)(b,y)=(ab^{\alpha(x)^{-1}},xy)$$

N 和F 关于α 的半直积$G=N\rtimes_\alpha F$, 也可记为$N:F$, 即N 被F 的可裂扩张.

2.1.2 群在集合上的作用

定义 2.1.9 设$\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$ 是一个有限集合, 其元素称为点. S_Ω 表示Ω 上的对称群. 所谓G 在Ω 上的作用 ϕ 指的是G 到S_Ω 内的一个同态, 即对每个元素$x\in G$, 对应Ω 上的一个置换

$$\phi(x):\alpha\mapsto\alpha^x,$$

并且满足:

$$(\alpha^x)^y=\alpha^{xy},x,y\in G,\alpha\in\Omega.$$

如果$Ker(\phi)=1$, 则称G 忠实地作用在Ω 上, 这时G 看作Ω 上的置换群. 如果$Ker(\phi)=G$, 则称G 平凡地作用在Ω 上.

定义 2.1.10 $G_\alpha=\{x\in G|\alpha=\alpha^x\}$ 则G_α 是G 的一个子群, 称之为点α 的稳定子群. 对于任意的$y\in G$, 都有$G_{\alpha^y}=y^{-1}G_\alpha y$.

定义 2.1.11 设群G 作用在集合Ω 上, 称二元素$\alpha,\beta\in\Omega$ 为等价的, 记作$\alpha\sim\beta$, 如果存在$x\in G$, 使得$\alpha^x=\beta$. 易验证关系$\sim$ 是Ω 上的等价关系. 对$\sim$ 的一个等价类叫做G 在Ω 上的一个轨道. 一个轨道所包含的元素的个数叫做该轨道的长.

对于$\alpha\in\Omega$, 令$\alpha^G=\{\alpha^x|x\in G\}$, 则$\alpha^G$ 是包含α 的轨道.

定义 2.1.12 如果G 在Ω 上只有一个轨道, 即Ω 本身, 则称G 在Ω 上的作用是传递的.

引理 2.1.1 设群G作用在有限集合Ω上, $\alpha \in \Omega$, 则$|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$. 特别地, 轨道$\alpha^G$的长是$|G|$的因子.

定义 2.1.13 群G传递地作用在Ω上. 令$\Delta \subseteq \Omega$, 如果对于任意的$g \in G$, 都有$\Delta^g = \Delta$或$\Delta \cap \Delta^g = \varnothing$, 则称$\Delta$是$G$作用在$\Omega$上的一个区. 显然, Ω, 空集$\varnothing$以及单点集$\{\alpha\}$都是G的区, 则称它们是G的平凡区. 如果G仅有平凡区, 就称G作用在Ω上是**本原的**.

定义 2.1.14 设G是Ω上的一个置换群, 如果对于任意$\alpha \in \Omega$, 都有$G_\alpha = 1$, 则称G是半正则的. 如果G是传递的, 则称G是正则的.

2.1.3 Weyl群和Chevalley群简介

设设Φ是L维Euclidean空间V中的根系,对V中的任何非零向量r,都诱导出反射w_r: $w_r(x) = x - \frac{2(r,x)}{(r,r)}r$. 记$W(\Phi)$为由反射$w_r, r \in \Phi$生成的群,称为$\Phi$的Weyl群.显而易见$W(\Phi)$为有限群(简记为$W$). 设$\Pi = \{r_1, \cdots, r_l\}$为根系$\Phi$中的基础根系,其Dynkin图如表1,则$W = \{w_{r_i} | r \in \Pi\}$对于Weyl群有以下几点熟知的性质:

(1) 任一$w \in W$都可以写成一些$w_{r_i}, r_i \in \Pi$的乘积.

(2) w在根上的作用是将全部根进行置换.设$r_i \in \Pi$, 则w_{r_i}将r_i变为$-r_i$而将其余全部正根仍变为正根.

现设$w \in W$,把它表成$w = w_{r_i}w_{r_2}\cdots w_{r_s}$, 并设是$w$的这种表达式中最短的,则$s$叫$w$的长度,记作$l(w)$. W中长度最长的元素w_0的长度为$l(w_0) = |\Phi^+|$(Φ中所有正根的个数).此时w_0把所有的正根都变为负根,即$w_0(\Phi^+) = \Phi^-$.

设$GF(q)$为q个元素的有限域,其特征为p .域$GF(q)$上具有根系Φ的Chevalley群G指的是由根子群X_r(为p-群),$r \in \Phi$,生成的有限群.设$\bar{B}$为群G的Boiel子群, U为$\bar{B}$的Sylow p-子群,H为U在$\bar{B}$中的补,则$U \trianglelefteq \bar{B}, \bar{B} = U \rtimes H$,且$H$为交换群.

设G为具有根系Φ的Chevalley群,J为Π的子集.令$P_J =< H, X_r | r \in \Phi^+ \cup \Phi_J >$,则$P_J$及其在$G$中的共扼子群称为$G$的抛物子群.记$J_i = \Pi - \{r - i\}$,则P_{J_i}为极大抛物子群. 关于Weyl群和Chevalley群的进一步性质,请参考[55].

2.2 区组设计的定义及其基本性质

区组设计是一种常见的组合结构, 而线性空间是一个特殊的区组设计.

定义 2.2.1 设v, k, λ是使得$v > k > \lambda$的正整数. 设P是一个有v个点的集合, L是P中一些子集(也称为区组或简称区)的集合. 如果P的任意t个点恰好位于λ个

区组中, 则$\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$被称为一个$t$-$(v,k,\lambda)$ 设计.

特别地,有限线性空间其实就是一个2-(v,k,λ) 设计, 定义如下:

定义 2.2.2 *一个有限线性空间$\mathcal{S}$ 是由点集合P 和线集合L 构成的一个关联结构, 使得P 中任意两点都恰好与L中一条线是相关联的.*

一个线性空间被称为非平凡的, 如果每条线至少包含3个点且至少存在2条线.一个线性空间被称为正则的, 如果所有线都与同样数目的点是相关联的. 因此一个2-(v,k,λ) 设计恰好是一个正则线性空间.

定义 2.2.3 *设$\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 是一个t-(v,k,λ)设计,π是$\mathcal{P}$的一个置换.如果π将每个区组变成另一个区组,则称π 为$\mathcal{S}$ 的自同构.$\mathcal{S}$中所有自同构的集合形成一个群,即$\mathcal{S}$的自同构群, 用$Aut(\mathcal{S})$ 表示.*

由定义可知, 设$G\leq Aut(\mathcal{S})$ 是$\mathcal{S}$ 的自同构群, 则G分别作用在$\mathcal{P}$ 和$\mathcal{L}$ 上, 也可以通过定义使G作用在与其相关的更多集合上. G 在这些不同集合之间的作用有一定程度的制约关系, 研究这些制约关系即是研究群与区组设计联系的基本手段.

定义 2.2.4 *设$G\leq Aut(\mathcal{S})$.如果G在$\mathcal{P}$上是传递的,则称G是点传递的.如果G在$\mathcal{P}$是本原的,则称G是点本原的. 如果$Aut(\mathcal{S})$是点传递的(点本原的),则称$\mathcal{S}$是点传递的(点本原的).*

由自同构的定义,每个$\mathcal{S}$ 的自同构诱导集合$\mathcal{L}$的一个置换.

定义 2.2.5 *定义2.2.5 设$G\leq Aut(\mathcal{S})$.如果G 在$\mathcal{L}$上是传递的,则称G 是区传递的.如果G 在$\mathcal{L}$ 上是本原的, 则称G 是区本原的. 如果$Aut(\mathcal{S})$ 是区传递的(区本原的),则称$\mathcal{S}$ 是区传递的(区本原的).*

如果我们将这个概念引入有限线性空间,则区传递和区本原可以称为线传递和线本原.

定义 2.2.6 *设$\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 是一个t-(v,k,λ) 设计.一个对(p,L) 被称为旗, 如果,$p\in\mathcal{P}$, $L\in\mathcal{L}$ 且$p\in L$. 如果$G\leq Aut(\mathcal{S})$ 在旗集合上是传递的, 则称G 是旗传递的.*

引理 2.2.1 *一个t–设计$\mathcal{S}$ 也是一个s– 设计$(1\leq s\leq t)$. 如果$\mathcal{S}$ 作为t–设计的参数是$t-(v,k,\lambda)$, 则它作为s–设计的参数是$s-(v,k,\lambda_s)$, 且*

$$\lambda_s=\lambda\cdot\frac{(v-s)(v-s-1)\cdots(v-t+1)}{(k-s)(k-s-1)\cdots(k-t+1)}.$$

推论 2.2.1 记$\lambda_0 = b = |\mathcal{L}|, r = \lambda_1$, 则

(a) $b = \lambda \cdot \frac{v(v-1)\cdots(v-t+1)}{k(k-1)\cdots(k-t+1)}$;

(b) $bk = vr$;

(c) $r(k-1) = \lambda_2(v-1)$.

特别地, 当$t = 2, \lambda = 1$ 时,

$$b = \frac{v(v-1)}{k(k-1)}, \quad r = \frac{v-1}{k-1}.$$

引理 2.2.2 (**Block定理**[56]) 设G 作用在$t-$设计$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 上线传递, 则G 作用在$\mathcal{P}$上也是点传递.

引理 2.2.3 (**Higman-McLaughlin定理**[57]) G 是旗传递可推出G 点本原.

表2-1 单Lie代数的Dynkin图

2.3 本文所用的符号

本文中用到以下一些记号:

$H \leq G$	H是G的子群
$H \trianglelefteq G$	H是G的正规子群
$\|G\|$	群G的阶
$o(g)$	g的阶
$< g >$	由元素g生成的群
Z_t	t阶循环群
$H \cong K$	群H, K同构
$N_G(H)$	H在G内的正规化子
$C_G(H)$	H在G内的中心化子
$Z(G)$	G的中心
$A \rtimes B$	A, B的半直积
S_n	n个元素上的对称群
A_n	n个元素上的交错群
D_n	n阶二面体群
$Fix_\Omega(H)$	H作用在集合Ω上的不动点的集

G_α	点α的稳定子群
α^G	群G在点α上作用的轨道
G_B	区B的稳定子群
$GF(q)$	q个元素的有限域
i	群中的对合,即二阶元
$e(G)$	群G中对合的个数
$\varphi(n)$	欧拉函数
G'	G的导群
$Soc(G)$	群G的基柱
$Aut(G)$	群G的自同构群
$p^m \| q$	$p^m \mid q$ 但$p^{m+1} \nmid q$
$\|H\|_p$	群H中所以p因子之积

第三章 旗传递5-$(v,k,2)$设计

3.1 引言

对于正整数$t \le k \le v$ 和λ，定义一个t-(v,k,λ) 设计是一个由v个点的集合$\mathcal{X}$ (其元素称为点)和$\mathcal{X}$ 的一些k-子集的集合$\mathcal{B}$(其元素称为区)构成的相关结构$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$，使得$\mathcal{X}$中的任意$k$-子集恰好包含在$\lambda$个区中. 称$\mathcal{D}$ 的点-区对$(\alpha,B)(\alpha\in\mathcal{X},\alpha\in B\in\mathcal{B})$为一个旗.如果$\mathcal{B}$包含了点集$\mathcal{X}$ 的所有k -子集,则称$\mathcal{D}$ 为平凡的设计.如果点集$\mathcal{X}$的一个置换把的区仍然变为区,则称之为设计$\mathcal{D}$ 的一个自同构,$\mathcal{D}$的全体自同构组成一个群,记为$Aut(\mathcal{D})$.设$G\le Aut(\mathcal{D})$, 如果G在设计$\mathcal{D}$的旗集合上传递(在区集合上传递,在点集合上t -传递或在点集合上t-齐次),则称G 是旗传递(区传递, t-传递或t-齐次).如何构造具有给定参数的区组设计是组合数学的一个难题,特别对于比较大的t-设计的构造更为困难.因此需要借助其它数学工具,如有限群来帮助构造设计.

由文献[40]知, 如果一个非平凡的t-设计具有一个旗传递的自同构群, 那么$t\le 6$.因此,对$t\le 6$的旗传递t-设计的研究是很有必要的.在这个方面,旗传递Steiner 2 -设计(即任意的t-子集恰好包含在一个区组中的t-设计)首先得到了深入的研究.经过Buekenhout F, Delandtsheer A, Doyen J, Klaidman P B, Liebeck M W和Saxl J [10]的共同努力,旗传递线性空间(即Steiner 2-设计)的分类已经完成. 至于$2\le t\le 6$ 的旗传递Steiner t-设计,最近M.Huber [12,13,14]已经完成了对他们的刻画. 而现有文献中很少对$\lambda>1$ 的旗传递t-设计进行研究. 本章研究了一类$\lambda=2$的区组设计.根据3-齐次本原置换群的分类定理,研究了旗传递5-$(v,k,2)$设计得到了如下结果:

主要定理 1 *设$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$ 是一个非平凡的5-$(v,k,2)$ 设计.如果$G\le Aut(\mathcal{D})$在$\mathcal{D}$上旗传递,那么$PSL(2,q)\le G\le Aut(PSL(2,q))$,这里$q=p^e$且$p=2$或3.*

3.2 预备引理

如果$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$是一个$t$-$(v,k,\lambda)$ 设计,其中$t\ge 2$，那么对于任意$x\in\mathcal{X}$,关于x 的导出设计是$\mathcal{D}_x=(\mathcal{X}_x,\mathcal{B}_x,\mathcal{I}_x)$，这里$\mathcal{X}_x=\mathcal{X}\setminus x,\mathcal{B}_x=\{B\in\mathcal{B}:(x,B)\in\mathcal{I}\}$且$\mathcal{I}_x=\mathcal{I}|_{\mathcal{X}_x\times\mathcal{B}_x}$.显然,$\mathcal{D}_x$ 是一个$(t-1)$- (v,k,λ) 设计.

引理 3.2.1 ([12]) *设$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$是一个$t$ -设计,这里$t\ge 3$.如果$G\le Aut(\mathcal{D})$在$\mathcal{D}$ 上旗传递,那么G 在上2-传递.*

证明: 设$x\in X$.因为$G\leq Aut(\mathcal{D})$在$\mathcal{D}$上旗传递, 所以导出设计$\mathcal{D}_x$ 是一个区传递$(t-1)$-设计,从而G_x在$\mathcal{B}_x$上传递.由引理1知, G_x也在X_x传递,因此G 在$\mathcal{D}$上点2-传递.

引理 3.2.2 ([40])*如果$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$是一个$t$-$(v,k,\lambda)$ 设计,其中$t\geq 2$, 设$G\leq Aut(\mathcal{D})$则*

(a) 如果G 在$\mathcal{D}$ 上区传递,那么G 在$\mathcal{D}$ 是点$\lfloor t/2\rfloor$-齐次的.

(b) 如果G 在$\mathcal{D}$ 旗传递,那么G 在$\mathcal{D}$ 上是点$\lfloor (t+1)/2\rfloor$-齐次的.

由引3.2.2(b)知,可以充分利用有限3-齐次置换群的分类来研究旗传递5-$(v,k,2)$设计.有限3-齐次置换群的分类如下([5,59]):

设G 是一个在非空点集$\mathcal{X}(|\mathcal{X}|\geq 4)$ 上的有限3-齐次置换群, 那么要么G是

(A) 仿射型: G包含了一个阶为$v=2^d$ 的初等交换的正则正规子群T . 如将G 当作有限线性空间$V=V(d,2)$ 上的仿射变换$x\mapsto x^g+u$ 构成的群, 这里$g\in G_0,u\in V$, 那么下面的情形之一出现:

(1) $G\cong AGL(1,8), A\Gamma L(1,8)$或$A\Gamma L(1,32)$;

(2) $G_0\cong SL(d,2), d\geq 2$;

(3) $G_0\cong A_7, v=2^4$.

要么G 是

(B)几乎单型: G包含了一个单正规子群N ,使得$N\leq G\leq Aut(\mathcal{D})$. 特别的下面的情形之一出现:

(1)$A_v, v\geq 5$;

(2) $PSL(2,q), q\geq 3, v=q+1$;

(3) $M_v, v=11,12,22,23,24$;

(4)$M_{11}, v=12$.

引理 3.2.3 ([14]) *设$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$是一个$t$-$(v,k,\lambda)$设计.如果$G\leq Aut(\mathcal{D})$旗传递的作用在$D$上,那么对任意的$x\in\mathcal{X}$,整除关系$r||G_x|$成立.*

引理 3.2.4 ([58])*设$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$ 是一个t-(v,k,λ)设计,则:*

(a) $bk=vr$;

(b) $\lambda\begin{pmatrix} v\\ t\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} k\\ t\end{pmatrix}$;

(c) 对任意$t\leq s<t$,一个t-(v,k,λ)设计,也是一个s-(v,k,λ_s)设计,其中

$$\lambda_s=\lambda\frac{(v-s)(v-s-1)\cdots(v-t+1)}{(k-s)(k-s-1)\cdots(k-t+1)};$$

(d) 特别地,如果$t=5$,那么$r(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)=\lambda(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)$.

引理 3.2.5 ([58])如果$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$ 是一个非平凡的t-(v,k,λ)设计,那么$v>k+t$.

引理 3.2.6 $\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$是一个$t$-$(v,k,\lambda)$设计,那么如下的关系式成立:

$$\lambda\cdot(v-t+1)\geq(k-t+1)(k-t+2).$$

这里$t>2$.

证明: 任意取定$x\in\mathcal{X}$,那么关于x 的导出设计是$(t-1)$-$(v-1,k-1,\lambda)$ 设计.继续这个过程,可得到一个2-$(v-(t-2),k-(t-2),\lambda)$设计,由Fisher's不等式知,这个2-设计的区组数$b=\frac{(v-t+2)(v-t+1)}{(k-t+2)(k-t+1)}\geq v-t+2$, 从而有

$$\lambda\cdot(v-t+1)\geq(k-t+1)(k-t+2).$$

成立. □

3.3 主要定理的证明

设$\mathcal{D}=(X,\mathcal{B},I)$ 是一个非平凡的5-$(v,k,2)$设计,$G\leq Aut(\mathcal{D})$在$\mathcal{D}$上旗传递. 由引理3.2.2知,G是一个3-齐次置换群,因此我们只须对文章第2部分所列出的有限3-齐次置换群分别进行讨论. 因为我们的5-$(v,k,2)$设计是非平凡的,所以在下面的讨论中我们总假设$k>5$.

首先,我们假设G是仿射型.

情形(1) $G\cong AGL(1,8)$, $A\Gamma L(1,8)$, or $A\Gamma L(1,32)$.

如果$v=8$,由引理3.2.5有$k<8-5=3$,与假设$k>5$矛盾.如果$v=32$,那么$|G|=5v(v-1)$,且$|G_x|=5(v-1)=5\cdot 31$.由引理3.2.3知$r||G_x|=5\cdot 31$.这说明$r=5,31$ or 155. 由引理3.2.4(d)有$r(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)=2\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28$. 这又表明$k\geq 28$,与引理3.2.6矛盾.

情形(2) $G_0\cong SL(d,2), d\geq 2$.

设e_i表示向量空间$V=V(d,2)$的标准基的第i个向量,$< e_i >$表示由e_i生成的1-维向量子空间.

由于5-$(v,k,2)$是非平凡的,可假设$v=2^d>k+t>10$.若$d=3$,则$v=8$,矛盾. 因此$d>3$.令$\varepsilon=<e_1,e_2,e_3>$表示由$e_1,e_2,e_3$生成的3-维向量子空间. 记由$\{0,e_1,e_2,e_3,e_1+e_2\}$确定的两个区组为$B$和$B'$.如果$B\cup B'$中包含了$V\setminus\varepsilon$的某个点$\alpha$,则$\alpha^{G_\varepsilon}\subseteq B\cup B'$,从

而$V\setminus\varepsilon\subset B\cup B'$. 于是有$2k-10\geq 2^d-8$,即$k>2^{d-1}+1$,这与引理6矛盾.因此$B\subset\varepsilon$和$k\leq 8$, 从而由条件$(2^d-3)|\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}$(参看文献[61])推知$d\leq 3$, 与假设矛盾.

情形(3) $G_0\cong A_7, v=2^4$.

因为$v=2^4$, 由引理3.2.5知$k\leq 10$.但是,由引理3.2.4易知$k\neq 6,7,8,9$,或10.

现在,我们考虑G是几乎单型的情况.

情形(1) $N=A_v, v\geq 5$.

由引理5和$k>5$,可假设$v\geq 11$.于是A_v,因而G,在$\mathcal{D}$上是9-传递的. 因此G也5-传递,这推出$\mathcal{D}$包含了X的所有5-子集. 因此$\mathcal{D}$是一个平凡设计,矛盾.

情形(2). $N=PSL(2,q), q\geq 3, v=q+1$

此时,我们有$N=PSL(2,q), v=q+1, q=p^e>3$,且$p>3$. 因此$Aut(N)=P\Gamma L(2,q)$,$|G|=\frac{q(q^2-1)}{2}a$ 这里$a|2e$. 因5-$(v,k,2)$设计是非平凡的,由引理3.2.6,我们可假设$q\geq 10$.

下面我们分$N=G$与$N<G$两种情形进行讨论.

首先,我们假设$N=G$. 因为$G\leq Aut(\mathcal{D})$在5-$(v,k,2)$设计$\mathcal{D}$上是旗传递的, 又引理3.2.1和引理3.2.4(b)可得到等式$b=\frac{v(v-1)|G_{xy}|}{|G_B|}$,这里$x$和$y$是$X$中的两个不同的点,$B$是$\mathcal{B}$中的一个区,因此

$$2\cdot\begin{pmatrix} v-2\\ 3\end{pmatrix}=(k-1)\cdot\begin{pmatrix} k-2\\ 3\end{pmatrix}\frac{|G_{xy}|}{|G_{xB}|}\text{ 如果 } x\in B.$$

于是我们有

$$4(q-2)(q-3)|PSL(2,q)_{0B}|=(k-1)k-2)(k-3)(k-4). \tag{3.1}$$

由引理3.2.6有

$$2(q-3)\geq(k-3)(k-4), \tag{3.2}$$

从而由等式(3.1)得

$$2(q-2)|PSL(2,q)_{0B}|\leq(k-1)k-2). \tag{3.3}$$

如果$k\geq 9$, 那么显然

$$(k-1)(k-2)<2(k-3)(k-4).$$

又由引理3.2.6得

$$2(q-2)|PSL(2,q)_{0B}|<4(q-3).$$

这个不等式说明,$|PSL(2,q)_{0B}|=1$.当$k=8$时, 由引理3.2.6和等式(3.1)也可得到$|PSL(2,q)_{xB}|=1$.

于是,等式(3.1)等价于

$$4q(q-5) = k(k^3 - 10k + 35k - 50). \tag{3.4}$$

因此$k|4q(q-5)$. 因为$PSL(2,q)_B$传递的作用在区B的点上,所以$k = |PSL(2,q)_B| \mid \frac{q(q^2-1)}{2}$. 从而$k|(4q(q-5), \frac{q(q^2-1)}{2})$, 这推出$k \mid 48q$. 如果$(k,q) = 1$, 则$k = 12, 16, 24$或48. 注意到$q$为素数幂,因此$k$的这些取值都不满足方程(3.4). 因此,$k = aq_0$(这里$a|48, q_0|q$),将其代入(3.4)得

$$4q(q-5) = aq_0((aq_0)^3 - 10(aq_0)^2 + 35aq_0 - 50). \tag{3.5}$$

这表明$p|50$,因此$p = 5$(因为$p > 3$). 若$q_0 = 5$,则$k = 10, 15, 20, 30, 40, 60, 80, 120, 240$,同样由(3.4)可以得出矛盾. 于是$5 < q_0 < q$. 比较方程(3.5)两边的5因子得$q = 5q_0$, 这也与方程(3.5)矛盾.

如果$k = 6, 7$,可由方程式(3.4)得出矛盾.

现在,假设$N < G \leq Aut(N)$.

定义$G^* = G \cap (PSL(2,q) : \langle \tau_\alpha \rangle)$,这里$\tau_\alpha \in Sym(GF(p^e) \cup \{\infty\}) \cong S_v$是一个由Frobenuius自同构$\alpha : GF(p^e) \to GF(p^e), x \mapsto x^p$诱导出来的$e$阶元. 由Dedekind's定理,我们有

$$G^* = PSL(2,q) : G \cap \langle \tau_\alpha \rangle.$$

定义$P\Sigma L(2,q) = PSL(2,q) : \langle \tau_\alpha \rangle$. 我们可计算得$P\Sigma L(2,q)_{0,1,\infty} = \langle \tau_\alpha \rangle$, 且$\langle \tau_\alpha \rangle$恰好有$p+1$不同的稳定点([62, Ch.6.4]). 因为$p > 3$, 由5-$(v,k,2)$设计的定义有$\langle \tau_\alpha \rangle$ 稳定过0点的一个旗对$\mathcal{F} = \{(0,B), (0,B')\}$.因此, $G^*_{0B} \cap \langle \tau_\alpha \rangle \leq G^* \cap \langle \tau_\alpha \rangle \leq G^*_{\mathcal{F}}$. 另一方面,我们看到$G^* \cap \langle \tau_\alpha \rangle$中的任意元素要么稳定区$B$, 要么把区$B$与区$B'$交换,因此$G^*_{0B} \cap \langle \tau_\alpha \rangle$在$G^* \cap \langle \tau_\alpha \rangle$中的指数最多是2.显然$PSL(2,q) \cap G^* \cap \langle \tau_\alpha \rangle = 1$.从而,如果$|G^* \cap \langle \tau_\alpha \rangle : G^*_{0B} \cap \langle \tau_\alpha \rangle| = 1$,因此

$$\begin{aligned} |(0,B)^{G^*}| &= |G^* : G^*_{0B}| \\ &= |PSL(2,q) : G^* \cap \langle \tau_\alpha \rangle : PSL(2,q)_{0B} : G^*_{0B} \cap \langle \tau_\alpha \rangle| \\ &= |PSL(2,q) : PSL(2,q)_{0B}| \\ &= |(0,B)^{PSL(2,q)}|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

假设$G^* \leq Aut(\mathcal{D})$旗传递的作用在$\mathcal{D}$上,那么$|(0,B)^{G^*}| = |(0,B)^{PSL(2,q)}| = bk$.因此$PSL(2,q)$必定也旗传递的作用在$\mathcal{D}$上,这就回到了$N = G$的情形. 因此,我们总假设$G^* \leq Aut(\mathcal{D})$在$\mathcal{D}$是非旗传递的.于是,$G^* < G$ 并且有$|G : G^*| = \frac{|G|}{|G \cap PSL(2,q) : \langle \tau_\alpha \rangle|} =$

$\frac{|G(PSL(2,q):\langle\tau_\alpha\rangle)|}{|PSL(2,q):\langle\tau_\alpha\rangle|}=2$,因此$G^*$在旗集合上恰好有两个等长的轨道.因为$PSL(2,q)\lhd G$,又由方程(3.7)有$|(0,B)^{G^*}|=|(0,B)^{PSL(2,q)}|=\frac{bk}{2}$,从而$PSL(2,q)$在旗集合上也恰好有两个等长的轨道.我们对每一个轨道进行类似于情形$N=G$的讨论得到

$$2(q-2)(q-3)|PSL(2,q)_{0B}|=(k-1)k-2)(k-3)(k-4). \tag{3.7}$$

这等价于

$$2(q-2)(q-3)|PSL(2,q)_{0B}|-24=k(k^3-10k^2+35k-50). \tag{3.8}$$

因此,

$$k|2(q-2)(q-3)|PSL(2,q)_{0B}|-24. \tag{3.9}$$

因为$PSL(2,q)_B$作用在区B的点上或者传递,或者恰好有两个等长的轨道, 故有

$$k\text{或}\frac{k}{2}=|0^{PSL(2,q)_B}|=|PSL(2,q)_B:PSL(2,q)_{0B}|. \tag{3.10}$$

与情形$N=G$类似的,由引理3.2.6和等式(3.8)得

$$(q-2)|PSL(2,q)_{0B}|\leq(k-1)(k-2). \tag{3.11}$$

如果$k\geq 9$, 那么

$$(q-2)|PSL(2,q)_{0B}|<4(q-3).$$

这个不等式说明,$|PSL(2,q)_{0B}|=1,2,3$.如果$|PSL(2,q)_{0B}|=1$,那么

$$2(q-2)(q-3)=(k-1)k-2)(k-3)(k-4), \tag{3.12}$$

且$k|2(q-2)(q-3)-24$.另一方面,由(3.11)知k或$\frac{k}{2}=|PSL(2,q)_B||:PSL(2,q)=\frac{q^3-q}{2}$.因此,$k|q^3-q$.又易知$(q^3-q,2(q-2)(q-3)-24)|2^3\cdot 3\cdot 11$.利用计算机计算知,这样的$k$不满足(3.13). 如果$|PSL(2,q)_{0B}|=2,3$,同样可得出矛盾.

如果$k<9$,则由(3.2)和(3.8)很容易就可以排除.

若$|G^*\cap\langle\tau_\alpha\rangle:G^*_{0B}\cap\langle\tau_\alpha\rangle|=2$,则

$$\begin{aligned}|(0,B)^{G^*}| &= |G^*:G^*_{0B}|\\ &= |PSL(2,q):G^*\cap\langle\tau_\alpha\rangle:PSL(2,q)_{0B}:G^*_{0B}\cap\langle\tau_\alpha\rangle|\\ &= 2|PSL(2,q):PSL(2,q)_{0B}|\\ &= 2|(0,B)^{PSL(2,q)}|.\end{aligned} \tag{3.13}$$

如果$G^* \le Aut(\mathcal{D})$在$\mathcal{D}$上已经旗传递,则$|(0,B)^{G^*}| = bk = 2|(0,B)^{PSL(2,q)}|$,从而$PSL(2,q)$在旗集合上恰好有两个等长的轨道,这就是我们刚才讨论过的情形. 因此假设$G^* \le Aut(\mathcal{D})$在$\mathcal{D}$上非旗传递,故有$|(0,B)^{G^*}| = \frac{bk}{2} = 2|(0,B)^{PSL(2,q)}|$. 类似于$|G^* \cap \langle \tau_\alpha \rangle : G^*_{0B} \cap \langle \tau_\alpha \rangle| = 1$的情形讨论,我们可得到:

$$(q-2)(q-3)|PSL(2,q)_{0B}| = (k-1)(k-2)(k-3)(k-4), \tag{3.14}$$

$$k|(q-2)(q-3)|PSL(2,q)_{0B}| - 24, \tag{3.15}$$

和

$$k, \frac{k}{2} 或 \frac{k}{4} = |0^{PSL(2,q)_B}| = |PSL(2,q)_B : PSL(2,q)_{0B}|.$$

由引理3.2.6和等式(3.15)知,如果$k \ge 9$, 那么

$$(q-2)|PSL(2,q)_{0B}| < 8(q-3).$$

这个不等式说明,$|PSL(2,q)_{0B}| = 1,2,3,4,5,6,7$. 此时同上面一样,我们有$k|a(q-2)(q-3)-24, k|(q^3-q, a(q-2)(q-3)-24)|2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot a$,这里$a = 1,2,3,4,5,6,7$. 利用计算机计算知这样的$k$不满足(3.15).

如果$k < 9$则,由引理3.2.6和等式(3.15)很容易就可以排除.

情形(3) $N = M_v, v = 11,12,22,23,24$.

如果$v = 11$, 则由引理3.2.5有$k \le 5$,与$k > 5$的假设矛盾. 对于$v = 22$,由引理3.2.6知$k \le 16$.但是,另一方面,由引理3.2.3知$r||G| = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ 且$r(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) = 2 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18$.这表明$k \ge 20$,矛盾. 对于$v = 12,23,24$,同理可得出矛盾.

情形(4) $N = M_{11}, v = 12$.

我们都知道,这个例外的置换作用出现在Mathieu群M_{24}在它的24个点的作用之中. 这24个点的集合可划分成两个12个点的集合X_1和X_2,使得X_1 的集型稳定化子是Mathieu M_{12}. 而集合X_1中的点x在M_{12}中的稳定化子是同构于M_{11}且3-传递的作用在集合X_2的12 (除了它在$X_1 \setminus \{x\}$上的自然的4-传递作用外).但是,由M_{11}的这个3-传递作用所保持的几何不是一个5-$(v,k,2)$设计,而是一个3-$(12,6,2)$设计(cf,[58,Ch.,IV, 5.3].

这就完成了主要定理1的证明.□

第四章 旗传递$(v,k,3)$-对称设计

4.1 引言

一个$(v,k,3)$–是由v个点和v个区构成的相关结构,使得每个点恰好与k相关联,每个点队恰好与三个区相关联. 由于它们的对偶作用,这里的点和区可以互换. 如果$3<k<v-1$,则称$(v,k,3)$–对称设计是非平凡的.$(v,k,3)$–对称设计$\mathcal{D}$的一个有序对(p,B)称为一个旗, 这里p是$\mathcal{D}$的一个点,B是$\mathcal{D}$的一个区,且它们是相关联的. 因此,如果G是$\mathcal{D}$的一个自同构群,那么G是旗传递的,若它在$\mathcal{D}$的旗上是传递的.

由文献[63]知,满足条件$4n-1<v<n^2+n+1$的$(v,k,3)$-对称设计的k只能取值为$k=6$, 9, 10, 12和15(这里$n=k-3$). 上面的不等式没有包含参数为$(15,7,3)$的对称设计,事实上,有5个不同构的这样的设计存在[63, p11].

文献[15]证明了,如果一个$(v,k,3)$-对称设计具有一个旗传递,非点本原的自同构群,那么它有参数$(45,12,3)$. 因此,如果任意其它的$(v,k,3)$-对称设计具有一个旗传递自同构群G,那么G一定是本原的. 充分利用O'Nan-Scott定理,E.O'Reilly Regueiro获得了分类所有旗传递$(v,k,3)$-对称设计的归约定理: 如果G是$(v,k,3)$-对称设计的旗传递自同构群,那么它只能是仿射型或几乎单型.这里我们主要考虑后者,即G 的基柱是一个非交换单群的情形.在这一章总假设$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B})$ 是一个(v,k,λ)-对称设计,且$G\le Aut(\mathcal{D})$ 的基柱为T .得到如下主要定理

主要定理2如果一个$(v,k,3)$-对称设计$\mathcal{D}$具有一个几乎单型的本原,旗传递自同构群G,且$Soc(G)$为典型单群,那么设计$\mathcal{D}$具有参数*(11, 6, 3)*或*(45, 12, 3)*,且在同构的意义下是唯一的.且分别有$G\cong PSL_2(11)$与$G\cong PSp_4(3):2\cong PSU_4(2):2$.

4.2 预备引理

在这个部分我们给出本文中将要用到的一些基本的结论.

引理 4.2.1 ([58]) *如果$\mathcal{D}$是一个$(v,k,3)$–对称设计,那么如下的等式成立: $3(v-1)=k(k-1)$.*

引理 4.2.2 *如果$\mathcal{D}$是一个$(v,k,3)$–对称设计,那么$12v-11$是一个平方数.*

证明 由文献[15,引理3]直接就可得到这个结果.

引理 4.2.3 *如果$\mathcal{D}$是一个$(v,k,3)$–对称设计,那么$3v<k^2$,从而$3|G|<|G_x|^3$.*

证明 由$k(k-1)=3(v-1)$,可得$k^2=3v-3-k$,从而显然$3v<k^2$. 于是由$v=|G:G_x|$和$k\le|G_x|$立即就可得到结论.

引理 4.2.4 ([64]) 如果G是$(v,k,3)-$对称设计$\mathcal{D}$上的旗传递自同构群,那么$k|3\cdot gcd(v-1,|G_x|)$, 这里G_x是$\mathcal{D}$的任意点的稳定化子.

引理 4.2.5 ([65])如果X是一个特征为p的李型单群,那么它的任意指数与p互素的真子群都包含在X的某个抛物子群中.

引理 4.2.6 ([66]) 如果X是一特征为p的李型群,作用在一个极大抛物子群的陪集上,且X即不是$PSL_d(q),P\Omega_{2m}^{+}(q)$($m$是奇数),也不是$E_6(q)$,那么存在唯一的长为$p$的幂的次极.

引理 4.2.7 如果X是一个特征为3的几乎单群,那么它的任意满足$|X:H|_3\le 3$ 的真子群H 都包含在X的一个抛子群中.

证明: 首先假设$X=CL_n(q)$是典型群($q=3^f$), 令H 是X 的极大子群. 由Aschbacher's定理[67],H包含在$\Gamma L_n(q)$的子群集合$\mathcal{C}$ 中或$\mathcal{S}$ 中.若H包含在子群集合$\mathcal{C}$中,对每个子群类进行仔细考察发现除了H 是抛物子群外,都有$3|H|_3<|X|_3$.现在假设$H\in\mathcal{S}$.由[68, 定理4.2],知$|H|<q^{2n+4}$,或者H和X如文献[57, 表4]给定.如果$|H|\le 3|H|_3\le q^{2n+4}$,那么或者$X=L_n^{\epsilon}(q)$且$n\le 6$,或者$X=Sp_n(q)$或者$P\Omega_N^{\epsilon}$且$n\le 10$,这里$\epsilon=\pm$.对于$n\le 10$,通过考察文献[69, Chapter 5]中列出的X的极大子群可以看到任意子群都不满足不等式$|X|_3\le 3|H|_3$. 再考察文献[68,表4]的子群发现也没有子群满足这个不等式. 最后,假设X是一个特征为3的例外李型单群.由文献[69],如果$|X|_3\le 3|H|_3$,那么H或者包含在一个抛物子群里或者H和X如文献[70, Table 1]给定.考察文献[70, Table 1]中的所有子群看到所有子群都满足$|X|_3\le 3|H|_3$.□

引理 4.2.8 假设$\mathcal{D}$是一个(v,k,λ)-对称设计,$G\le Aut(\mathcal{D})$是一个基柱为X且特征为p的本原,旗传递几乎单群, 且点稳定子群G_x不是G的抛物子群.如果$p\ge 3$,那么$p\mid k$;且如$p=3$,那么$p\nmid 9$.因此$|G|<3|G_x||G_x|_{p'}^2$.

证明: 由引理3知$|G|<|G_x|^3$.又由引理6知,$p\mid v=|G:G_x|$.因为$k\mid 3(v-1)$,如果$3\nmid p$,那么$(k,p)=1$;如果$p=3$,那么$(k,p)\le 3$.因此$k\mid 3|G_x|_{p'}$,且因为$3v<k^2$,故$|G|<3|G_x||G_x|_{p'}^2$. □

由引理4.2.6和引理4.2.7,可得出如下有用的引理.

引理 4.2.9 假设$p\mid v$, G_x包含一个特征为p的拟单李型正规子群H,且$p\nmid|Z(H)|$; 那么,对于H的某个抛物子群P,有$|H:P|\mid k$.

证明: 因为$p \mid v$,且$k \mid 3(v-1)$,故$(k,p) \le (3,p)$.又$k = |G_x : G_{\{x,B\}}|$,这里B是一个包含x的区,因此$|H : H_B| \mid k$, 故$(|H : H_B|, p) \le (3,p)$.由引理4.2.6和4.2.7可推出H_B包含在H的一个抛子群P 中,且由P在H中的极大性推出H_B包含在P中,因此$|H : P| \mid k$.□

引理 4.2.10 (Liebeck and Saxl [71]) 设G是一个集合Σ上的奇数次v的本原置换群,$H = G_\alpha$,这里$\alpha \in \Sigma$,那么

(a) 或者对于某个素数p有$(Z_p)^d \trianglelefteq G \le AGL(d,p)$,或者$T_m \trianglelefteq G \le G_0 \wr S_m$,这里$G_)$是一个奇数次的本原群,$Scole(G_0) = T$;

(b) 若G具有单基柱T,则G和H是确定的,且下列(I)-(III)之一成立:

(I) $T = A_c$为交错群$H = (S_k \times S_{c-k} \cap G(1 \le k \le \frac{1}{2}c), (S_a \wr S_b) \cap G(ab = c, a > 1, b > 1)$或$G = A_7$且$v = 15$.

(II) 是散在单群(略);

(III) $T = T(q)$为$GF(q)$上的Lie型单群,分下列情形:

(A) 若q为偶数,则$H \cap T$是T的抛物子群;

(B) 若q为奇数,则下列(i)- (iii)之一成立:

(i) $H = N_G(T(q_0))$,这里$q = q_0^c$且c为奇素数;

(ii) T为n维向量空间V上的典型群,且下列(1)-(7)之一成立:

(1) H为V的非奇异子空间的稳定化子,(当$T = PSL_2(q)$时为任意的子空间);

(2) $T \cap H$为V的正交分解$V = \oplus V_i$的稳定化子,这里所有V_I是等距的(当$T = PSL_2(q)$时为任意分解$V = \oplus V_i$,这里$dim(V)$为常数);

(3) $T = PSL_n(q)$为子空间对$\{U, W\}$的稳定化子,这里$U < W$且$dim(U) + dim(W) = n$ 或$U \oplus W = V$且G包含交换U和V的自同构;

(4) $T \cap H$是$\Omega_7(2)$或$\Omega_8^+(2)$,且T分别是$P\Omega_7(q)$或$P\Omega_8^+(q)$,这里q为素数且$q \equiv \pm 3 \pmod 8$;

(5) $T = P\Omega_8^+(q)$,这里q为素数且$q \equiv \pm 3 \pmod 8$,G包含T的三阶外自同构且$T \cap H$为$2^3 \cdot 2^6 \cdot PSL_2(q)$;

(6) $T = PSL_2(q)$,且$T \cap H$为二面体群,A_4, S_4, A_5 或$FGL_2(q^{\frac{1}{2}}$;

(7) $L = PSU_3(5)$且$T \cap H = M_0$.

(iii) 为例外李型群, 如表所述(这里略).

4.3 主要定理的证明

由引理4.2.1知,v是奇数且G是$\mathcal{D}$上的v次本原置换群.因此,可以利用引理4.2.10(III)来

进行定理的证明. 设$H=G_x$,这里$x\in\mathcal{X}$.用$\hat{}H$ 表示H在对应的线性群中的原像.

首先,设q是偶数,则$H\cap T$是T的一个抛物子群.

如果$T=PSp_{2m}(q)(m\geq 2)$,则$H=P_i(i\leq m)$.我们容易算得

$$v=\frac{(q^{2m}-1)(q^{2m-2}-1)\cdots(q^{2m-2i+2}-1)}{(q^i-1)(q^{i-1}-1)\cdots(q-1)}$$

我们看到$v\equiv q+1 \pmod{pq}$.由引理4.2.6知存在唯一的一条长为素数p的幂的次轨道.因此,由引理4.2.1和引理4.2.4有$k\mid 3q$,与$k^2>3v$矛盾.

如果$T=U_n(q)$,那么$G_x=P_i$对某个$i\leq\lceil\frac{n}{2}\rceil$,那么

$$v=\frac{(q^n-(-1)^n)(q^{n-1}-(-1)^{n-1})\cdots(q^{n-2i+1}-(-1)^{n-2i+1})}{(q^{2i}-1)(q^{2i-2}-1)\cdots(q^2-1)}.$$

由引理4.2.6知存在唯一的一条长为素数p的幂的次轨道.经计算知,$q^2\parallel v-1$,除非$i=\lceil\frac{n}{2}\rceil$.此时如果$n$是偶数,那么$q\parallel v-1$;如果$n$是奇数,那么$q^3\parallel v-1$.因此,如果$n\neq 3$,那么$v>q^{i(2n-3i)}$,从而$v<k^2$,矛盾.如果$n=3$, 这个作用是2-传递的,由文献[72]知这是不可能的.

设$T=PSL_d(q)(n\geq 2,(n,q)\neq(3,2))$(因为$L_3(2)=L_2(7)$).

如果$n=2$,因为$T\cap H$是T的抛物子群,故$T\cap H$是指数为$q+1$的可解子群.因此$v=q+1$,从而由等式$k(k-1)=3(v-1)=3q$ 推出$k=4,5$于是我们得到一个平凡的2-$(5,4,3)$对称设计,矛盾.

因此$n>2$.如果$G_x=P_1$,那么G是2-传递的,由文献[72]知,这种情况不可能发生.

现在假设$G_x=P_i(1<i<n/2)$ 稳定V的一个i-子空间$W(i\leq\lceil\frac{n}{2}\rceil$.设$W$的一组基为$y=\{v_1,v_2,\cdots,v_i\}$,令$x=\{v_1,v_2,\cdots,v_{i-1},v_{i+1}\}$, 则有$k$整除

$$\frac{3|G_x|}{|G_{xy}}=\frac{3q(q^i-1)(q^{n-i}-1)}{(q-1)^2}.$$

另外,

$$v=\frac{(q^n-1)\cdots(q^{n-i+1}-1)}{(q^i-1)\cdots(q-1)}.$$

. 因为$k^2>3v$,所以或者$i=3$且$5<n<10$,或者$i=2$.

首先假设$i=3$且$q=2$.如果$n=9$那么$k=2^2\cdot 3^2\cdot 7^2$(因为$k^2>3v$), 但是方程$k(k-1)=3(v-1)$不成立.如果$n=8$那么$k=4\cdot 7\cdot 31$,方程$k(k-1)=3(v-1)$也不成立.如果$n=7$,那么$k=420$或10, 如果$n=6$,那么$k=196$或者98,但是此时,k都不能整除$3(v-1)$.

现在假设$i=3$且$q>2$.那么$n=6$或者7.如果$n=7$那么k整除

$$3\left(\frac{q(q^3-1)(q^4-1)}{(q-1)^2},\frac{(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)}{(q^3-1)(q^2-1)(q-1)}-1\right),$$

即就是k整除

$$3\left(q(q^2+q+1)(q^2+1)(q+1),(q^2+q+1)(q^4+\cdots+1)(q^6+\cdots+1)-1\right).$$

这说明$k\mid 3q(q^2+1)(q+1)$. 从而

$$k^2\le 9q^2(q^2+1)^2(q+1)^2<3(q^2+1+1)(q^4+\cdots+1)(q^6+\cdots+1)=3v.$$

这是一个矛盾.

如果$n=6$,那么

$$v=\frac{(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)}{(q^3-1)(q^2-1)(q-1)}$$

是偶数,矛盾.

因此$i=2$.这时$v=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q^2-1)(q-1)}$,且$G$有如下长度的次轨道:

$$|\{2-子空间H:dim(H\cap W)=1\}|=\frac{q(q+1)(q^{n-2}-1)}{(q-1)}$$

和

$$|\{2-子空间H:dim(H\cap W)=0\}|=\frac{q^4(q^{n-3}-1)(q^{n-2}-1)}{(q^2-1)(q-1)}$$

. 如果n是偶数,那么k整除:

$$3\left(\frac{q(q+1)(q^{n-2}-1)}{(q-1)},\frac{q^4(q^{n-3}-1)(q^{n-2}-1)}{(q^2-1)(q-1)}\right)=\frac{3q(q^{n-2}-1)}{(q^2-1)}.$$

这意味着$k^2<3v$,矛盾. 因此,n是奇数,且

$$k\mid\frac{3q(q^{n-2}-1)}{(q^2-1)}\left(q+1,\frac{n-3}{2}\right).$$

先假设$n=5$.那么$v=(q^2+1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$,且$k\mid 3q(q^2+q+1)$.于是不等式$k^2>3v$迫使$k=3q(q^2+q+1)$. 由方程$k(k-1)=3(v-1)$得

$$(q^2+q+1)(3q(q^2+q+1)-1)=q^5+q^4+2q^3+2q^2+2q+1.$$

从而$2q^5+5q^4+7q^3+3q^2-2=0$,这说明$q^2(2q^5+5q^4+7q^3+3q^2+3)=2$,这是不可能的.

因此$n\ge 7$.这时

$$v=(q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+q+1)(q^{n-3}+q^{n-5}+\cdots+q+1),$$

且$k\mid 3dc$,这里$d=q(q^{n-3}+q^{n-4}+\cdots+q+1)$且$c=\left(q+1,\frac{n-3}{2}\right)$. 记$k=\frac{3dc}{e}$,那么$v<k^2$迫使$e<3q$.于是我们有如下的等式:

$$\frac{v-1}{d}=q^{n-3}+q^{n-4}+\cdots+q^3+q+1.$$

因$k(k-1)=3(v-1)$,我们有

$$k=\frac{3(v-1)}{k}+1=\frac{3e(v-1)}{3dc}+1=\frac{e(q^{n-3}+q^{n-4}+\cdots+q^3+q+1)+c}{c}.$$

现在,$(kc,d)\mid d$且

$$\begin{aligned}&\left(kc,qe(q^{n-3}+q^{n-5}+\cdots+q^2+1\right)\\&=\left(e(q^{n-3}+q^{n-4}+\cdots+q^3+q+1)+c,e(q^{n-3}+q^{n-4}+\cdots+q+1\right),\\&=\left(e(q^{n-3}+q^{n-4}+\cdots+q^3+q+1)+c,e+c\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left(kc,\tfrac{ed}{q}\right)\\&=\left(e(q^{n-3}+q^{n-4}+\cdots+q^3+q+1)+c,e(q^{n-3}+q^{n-4}+\cdots+q+1\right)\cdot\\&=\left(e(q^{n-3}+q^{n-4}+\cdots+q^3+q+1)+c,(2e+c)+e+c\right)\end{aligned}$$

因此,$k\mid 3c(e+c)((2e+c)q+e+c)$. 因为$e<3q$且$c=\left(q+1,\frac{n-3}{2}\right)$, 所以对$n$和$q$仅有的可能是$n=7$且$q\leq 3$或者$n=9$且$q=2$.然而,此时的$12v-11$都不是一个平方数与引理4.2.2矛盾.

如果$H=G_x=P_{i,n-i}$,那么G包含了一个图自同构,且H稳定一个维数为$i(i\leq\frac{n}{2})$和$n-i$的子空间对$\{U,W\}$. 因为v是奇数,所以$V=U\oplus W$不可能出现.因此我们假设$U\subseteq W$. 注意到引理4.2.6可以应用到这里.于是存在一个长为2的次幂的次级.另一方面,经简单计算可知$2q\parallel v-1(q>2)$且如果$q=2$, 则$v-1$中2的因子小于等于2^{n-1}.因此,如果$q>2$,则$k<6q$.如果$q=2$,则$k<3\cdot 2^{n-1}$,与$k^2>3v$矛盾.

设$T=P\Omega_{2m}^{\epsilon}(q)(m\geq 4)$.

假设H稳定一个全奇异i-子空间,且$i<m$.如果$i=m-1$且$\epsilon=+$,n那么$H=P_{m,m-1}$,否则$H=P_i$. 在任意这两种情形,都存在唯一的T次极,它的长为p的幂(除了在情形$\epsilon=+,m$是奇数,且$G_x=P_m$(或P_{m-1}). 另一方面,容易看到$v-1$中p的最高次幂是q^2或8,由引理4.2.4知, $k^2<3v$,矛盾.

现在考虑$H=P_m$.这时,$T=P\Omega_{2m}^{+}(q)$.注意到P_{m-1}和P_m是来自于两个不同的T-轨道的全奇异m维子空间的稳定化子.如果m是偶数,那么

$$x=<e_1,e_2,\cdots,e_m>,\quad y=<f_1,f_2,\cdots,f_m>$$

在同一个T-轨道中,且包含y的H-轨道的长度是p的幂.然而,$v-1$中p的最高次幂是q,因此由引理4.2.4知,k太小.如果m是奇数,则$m>4$,那么

$$v=(q^{m-1}+1)(q^{m-2}+1)\cdots(q+1)>q^{m(m-1)/2}.$$

. 设

$$x = <e_1, e_2, \cdots, e_m>, \quad y = <e_1, f_2, \cdots, f_m>,$$

那么x和y在同一个T轨道中,且G_{xy}在G_x中的指数具有整除q^m-1的p'-成分.因$v-1$中p的次幂最高是q,于是$| 3q(q^m-1)$.再由不等式$3v<k^2$得,$m=5$.此时这个作用是秩3的,具有非平凡的次级

$$\frac{(q^2+1)(q^5-1)}{q-1} \quad 和 \quad \frac{q^6(q^5-1)}{q-1}.$$

因此,$k \mid \frac{3q(q^5-1)}{q-1}$. 从而由不等式$k<v^2$得,$k=3q(q^4+q^3+q^2+q+1)$或$q(q^4+q^3+q^2+q+1)$. 但是它们都不满足等式$k(k-1)=3(v-1)$.

现在,讨论q是奇数的情形.下面我们分别对引理4.2.10 情形(III)的(B)进行讨论.

(i) $H=N_G(T(q_0))$,这里$q=q_0^c$且c为奇素数.有文献[67]知,此时H是一个子域空间的稳定化子,且$T(q_0)$是极大子群. 因此,$T_x := T\cap H = T(q_0)$.

情形1. $T_x = L_n(q_0)$.因$c>2$, 故由不等式$3|G_x||G_x|_{p'}^2 > |G|$可推出,$n=2$.因此,

$$q_0 \mid v = \frac{q_0^{c-1}(q_0 2c-1)}{q_0^2-1}.$$

注意到$|G_x| \mid (2,q-1)m|T_x|$, 这里$q=p^m$.因此,由引理4.2.4知

$$k \mid 3(v-1, 2mq_0(q_0^2-1),$$

从而对某个r,有$k=\frac{6m(q_0^2-1)}{r}$.记$q_0=p^b$,因此$m=bc$且有$b<\sqrt{q_0}$(因$B^2<p^b=q_0$). 又由不等式$k^2>3v$,可推出

$$\frac{36m^2(q_0^2-1)^2}{r^2} > 3\frac{q_0^{c-1}(q_0^{2c}-1)}{q_0^2-1)}.$$

因此,$r^2 < \frac{12m^2(q_0^2-1)^3}{q_0^{c-1}(q_0^{2c}-1)}$.

设$c>5$,则$q_0^c > b^2c^2 = m^2$.另一方面,

$$12m^2 > \frac{q_0^{c-1}(q_0^{2c}-1)}{(q_0^2-1)^3}.$$

因此,$12q_0^c > \frac{q_0^{c-1}(q_0^{2c}-1)}{(q_0^2-1)^3}$, 这是一个矛盾.

现在假设$c=3$.由不等式$k^2>3v$,得$27b^2(q_0^2-1)^3 > r^2q_0^2(q_0^6-1)$,这个不等式与$b^2<q_0$一起可推出$r^2(q_0^6-1)<27q_0^5$.因此,$q_0\le 26$. 通过计算知,对于$q_0$的所有可能值,$12v-11$都不是平方数,与引理4.2.2矛盾.

情形2. $T_x = PSp_{2m}(q_0)(m\ge 2)$或$P\Omega_{2m}^{\epsilon}(q_0)(m\ge 4)$,那么不等式$3|G_x||G_x|_{p'}^2 > |G|$迫使$c=2$(cf, [73], 4.5.6, 4.5.10), 与c为奇素数矛盾.

情形3. $T_x = PSU_n(q_0)(n \geq 3)$,那么由不等式$3|G_x||G_x|_{p'}^2 > |G|$可以推出$q = 8$且$n \leq 4$,与$q$ 是奇数矛盾.

情形4. $T_x = P\Omega_{2m+1}(q_0)(m \geq 2)$,那么$v = q^{m^2}(q^{2m}+1)(q^2+1)$是偶数, 与等式$k(k-1) = 3(v-1)$矛盾.

(ii) T为n维向量空间V上的典型群$(V = V(n,q))$.

(1) H为V的非奇异子空间的稳定化子(当$T = PSL_n(q)$时为任意的子空间).

情形1. $T = PSL_n(q)(n > 2)(n = 2$的情形在后面讨论).此时,$q$为偶数时的相应情形的讨论在这里仍然成了,因此可以排除此种情形.

情形2. $T = PSp_{2m}(q)(m > 1)$.

设$\{e_1, f_1, \cdots, e_m, f_m\}$是$V$的一组标准辛基,这里$(e_i, e_j) = (f_i, f_j) = 0$且$(e_i, f_j) = \delta_{ij}$(对任意的$i, j$). 因为,$q$为偶数时的相应情形的讨论在这里仍然成了,所以我们可假设$H = N_{2i}$,V的$2i$-维非奇异子空间的稳定化子且$m > 2i$. 于是,$p \mid v$.因此$(k,p) \leq 3$.令$U =< e_1, f_1, \cdots, e_i, f_i >, W =< e_1, f_1, \cdots, e_{i-1}, f_{i-1}, e_{i+1}, f_{i+1} >$. 那么,包含$W$的$G_x$-轨道长度的$p'$-成分为

$$\frac{(q^{2i}-1)(q^{2m-2i}-1)}{(q^2-1)^2}.$$

因为$v < q^{4(m-i)}$,故由不等式$k^2 > 3v$可推出$q = 2$且$m = i+1$,矛盾.

情形3. $T = PSU_n(q)(n \geq 3)$,(因$PSU_2(q) \cong PSL_2(q)$).

因为,q为偶数时的相应情形的讨论在这里仍然成了,所以我们可假设$H = N_i(i < \frac{n}{2}$. 如果令$x =< u_1, \cdots, u_i >, y =< u_1, \cdots, u_{i-1}, ui+1 >$,那么$k \mid 3\frac{|G_x|}{|G_{xy}|} = 3(q^i - (-1)^i)(q^{n-1} - (-1)^{n-1})$.然而,此时有

$$v = \frac{q^{i(n-1)}(q^n - (-1)^n) \cdots (q^{n-i+1} - (-1)^{n-i+1})}{(q^i - (-1)^i) \cdots (q+1)},$$

与$v < k^2$,因此$i = 1$. 因此,$k \mid 3(q+1)(q^{n-1} - (-1)^{n-1})$.另一方面, 将引理4.2.9应用到$PSU_{n-1}$,可以看到存在$PSU_{n-1}$的某个抛物子群$P$使得$|PSL_{n-1} : P| \mid k$. 通过考察每个抛物子群及$k \mid 3|G_x|$和$k^2 > v$可得$n \leq 5$. 如果$n = 5$,那么$k \mid 3(q+1)(q^4 - 1)$且$q^3+1 \mid k$,故只可能$q = 2$,矛盾. 如果$n = 4$,则$v = \frac{q^3(q^4-1)}{(q+1)}$为偶数,又与引理4.2.1矛盾. 最后,设$n = 3$,那么$q+1 \mid k$. 但是$v - 1 = \frac{q^2(q^3+1)}{q+1} - 1 = q^4 - q^3 + q^2 - 1$,从而$(q+1, v-1) = (q+1, q^4 - q^3 + q^2 - 1) \leq 2$.这表明$q+1 = 2$或$6$.前者是不可能的,因为$q$是幂一个素数.对于后者,有$q = 5$且$v = 524$是偶数,矛盾.

情形4. $T = P\Omega_{2m+1}(q)(n = 2m+1 \geq 7)$(因为$\Omega_3(q) \cong L_2(q), \Omega_5(q) \cong PSP_4(q),$). 由$q$为偶数的情形知,$H$不能是抛物子群,因此,由文献[73],可假设$H = N_i^{\epsilon}$,符号为$\epsilon = \pm$的$V$的$i$-维非奇异子空间$W$的稳定化子(如果$i$是奇数,则$\epsilon$是$W_{\perp}$的符号).

先设$i=1$,那么$v=\frac{q^m(q^m+\epsilon)}{2}$且$T$-次极是

$$(q^m-\epsilon)(q^m+\epsilon),\frac{q^{m-1}(q^m-\epsilon)}{2}\text{和}(q^{m-1}(q^m-\epsilon))^{\frac{q-2}{2}},$$

这里a^b表示长为a的次轨道出现b次.这说明$k\mid\frac{3(q^m-\epsilon)}{2}$,与$3v<k^2$矛盾.

因此,$i\geq 2$.如果W是被G_x稳定的i-子空间,选择$w\in W(Q(w)=1)$且$u\in W^{\perp}(Q(u)=-e)$,这里e为$GF(q)$中的一个非平方数.于是$<u,w>$具有型N_2^+.如果$g\in G$稳定$W^{\perp}$(作为一个集合)但即不稳定u也不稳定w,那么$G_x\cap G_x^g$包含$SO_{i-1}(q)\times\times SO_{n-i-1}(q)$.由此可推出$k\leq 6q^m log_pq$,与$k^2>3v$矛盾,因为$v>q^{\frac{i(n-i)}{4}}$,$q$是奇数且$2m+1\geq 7$.

情形5. $T=P\Omega_{2m}^{\epsilon}$.设$\beta_+=\{e_1,f_1,\cdots,e_m,f_m\}$是$O_{2m}^+$型空间的标准基, $\beta_-=\{e_1,f_1,\cdots,e_{m-1},f_{m-1},d,d'\}$是型空间$O_{2m}^-$ 的标准基.我们也只需考虑$H=N_i$与$H=N_i^{\epsilon_1}$.

先考虑$H=N_i$.首先设$i=1$.由文献[74, 命题2] 知T的次极为:

$q^{2m-2}-1,\frac{q^{m-1}(q^{m-1}+\epsilon)}{2},\frac{q^{m-1}(q^{m-1}-\epsilon)(q-1)}{4}$和$\frac{q^{m-1}(q^{m-1}+\epsilon)(q-5)}{4}$

如果$q\equiv 1 \pmod 4$;

$q^{2m-2}-1,\frac{q^{m-1}(q^{m-1}-\epsilon)}{2},\frac{q^{m-1}(q^{m-1}-\epsilon)(q-3)}{4}$和$\frac{q^{m-1}(q^{m-1}+\epsilon)(q-3)}{4}$

如果$q\equiv 3 \pmod 4$.

从而,$k\leq\frac{(q^{m-1}+1}{2}$.但是,$v=\frac{q^{m-1}(q^m-\epsilon)}{2}$, 因此,$k^2<3v$,矛盾.

现在设$H=N_i^{\epsilon_1}(i\leq m)$,且仅当$i$是偶数时$\epsilon_1=\pm$. 因为$q$是奇数,所以同奇数维的情形一样可找到一个元素$g\in G\setminus G_x$,使得$SO_{i-1}(q)\times SO_{n-i-1}(q)\leq H\cap H^g$.从而$k\mid\frac{3|G_x|}{|G_{xxg}|}\leq 13q^m log_pq$,与$k^2>3v$矛盾.

(2) $T\in H$为V的正交分解$V=\oplus V_i$的稳定化子,这里所有V_i是等距的(当$T=PSL_n(q)$时为任意分解$V=\oplus V_i$ 这里$dim(V_i)$为常数).

情形1. $T=PSL_n(q)$,此时$T\cap H$是划分$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_a$的稳定化子,这里$dim(V_i)=b$为常数记,且$n=ab$于是.

先假设$b=1,n=a$.设

$$x=\{<v_1>,<v_2>,\cdots,<v_n>\},\quad y=\{v_1+v_2>,<v_2>,\cdots,<v_n>\}.$$

因为$n>2(n=2$在后面讨论),故$k\mid 6n(n-1)(q-1)=3|G_x:G_{xy}|$.因为$v>\frac{q^{n(n-1)}}{n!}$且$k^2>v$,因此$n=3$且$q<7$. 此时$v=\frac{q^3(q^3-1)(q+1)}{(3,q-1)6}$为偶数,这是一个矛盾.

现在设$b>1$,取

$x=\{<v_1,\cdots,v_b>,<v_{b+1},\cdots,b_{2b}>,\cdots\}$,

$x=\{<v_1,\cdots,v_{b-1},v_{b+1}>,<v_b,v_{b+2},\cdots,b_{2b}>,\cdots,<v_{n-b+1},\cdots,v_n>\}$,

那么$k\mid\frac{3a(a-1)(q^b-1)^2}{q-1}$.由$v>\frac{q^{n(n-b)}}{a!}$和$k^2>v$,可推出$3a^2(a-1)^2a!>q^{n^2-nb-4b+1}$,从

而可得$a=2=b, q\le 23$.故由$v=\frac{q^4(q^2+q+1)(q^2+1)}{2}$可算得,对所有的$k$值,都不满足方程$k(k-1)=3(v-1)$.

情形2. $T=PSp_{2m}(q)$.设$\{e_1,f_1,\cdots,e_m,f_m\}$是$V$的标准辛基.因为$T\cap H$是正交分解$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_a$的稳定化子,这里所有的$V_i$是同构的子空间,所以可假设每个$V_i$是$2i$-维的非奇异子空间. 因此,$T\cap H=\hat{}Sp_{2i}(q)\wr S_a, ia=m$.设

$x=\{<e_1,f_1,\cdots,e_i,f_i>,<e_{i+1},f_{i+1},\cdots,e_{2i},f_{2i}>,\cdots\}$

$y=\{<e_1,f_1,\cdots,e_{i-1},f_{i-1},e_i,f_i+e_{i+1}>,<e_{i+1},f_{i+1}-e_i,\cdots,e_{2i},f_{2i}>,\cdots\}$

则我们考察包含y的G_x-规道,可得

$$k\mid\frac{3a(a-1)(q^{2i}-1)^2}{2(q-1)}=3|G_x:G_{xy}|.$$

注意到$v>\frac{q^{2i^2a(a-1)}}{a!}$,因此由$k^2>3v$可推出,$a!a^4>q^{2a(a-1)i^2-8i+2}$.故有,$a^{a+4}>q^{2a(a-1)-6}$.因此$a<4$.

如果$a=3$,那么$2\cdot 3^6>q^{12i^2-8i+2}$,故$q=2$且$i=1$,矛盾.

如果$a=2$,那么$3\cdot 2^5>q^{4i^2-8i+2}$.故$i\le 2$.

如果$i=2$,那么$q=3,5,7$.但是在这些情形中,$12v-11$都不是平方数,矛盾.

若$i=1$,则$T=PSp_4(q)$且$v=\frac{q^2(q^2+1)}{2}$.T的这个作用可以看成$\Omega_5(q)$在$N_1^+(O_5(q)$的$O_4^+(q)$型的非奇异超平面集合)上的作用,由文献[74, 命题1]知,T的次极为:

$$(q^2-1)(q+1),\frac{q(q^2-1)}{2}\text{和}\frac{q(q^2-1)(q-3)}{2}$$

由$k^2>3v$与k整除T的每一个次极的事实可推出,$k=\frac{3(q^2-1)}{2}$.于是方程$k(k-1)=3v$迫使$q=3$.因此,$v=45,k=13$. 从而,我们可得到一个$(45,12,3)$-对称设计,$T=PSp_4(q)\cong PSU_4(2), G=PSU_4(2):2$. 这个设计已经被C.E.Preager在文献[75]中构造出来.

情形3.$T=PSU_n(q), n\ge 3$(因为$PSU_2(q)=PSL_2(q)$).此时,$T\cap H$是V一个正交分解$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots V_a(dim(V_i)=b)$的稳定化子,因此$n=ab$且每个$V_i$是非奇异.

如果$b>1$,取

$x=\{<v_1,v_2,\cdots,v_b>,<v_{b+1},v_{b+2},\cdots,v_{2b}>,\cdots\}$,

$y=\{<v_1,v_2,\cdots,v_{b-1},v_{b+1}>,<v_b,v_{b+2},\cdots,v_{2b}>,\cdots\}$.

因此,$k\mid 3a(a-1)q^b-(-1)^b)^2=3|G_x:G_{xy}|$.由$T\cap H=[\frac{(q+1)^{a-1}(q+1,b)}{(q+1,n)}]\cdot U_b(q)^a\cdot[(q+1,b)^{a-1}$([73])与$k^2>3v$可推出,$n=4,b=2$. 因而,

$$v=\frac{q^4(q^4-1)(q^3+1)}{2(q^2-1)(q+1)}=\frac{q^4(q^2+1)(q^2-q+1)}{2},$$

且$k|6(q^2-1)^2$.显然,$(v-1,q+1)=(2,q+1)=2$,因此$k\mid 24(q-1)^2$,这与不等式$k^2>3v$矛盾.

如果$b=1$,那么$T\cap H=\hat{}(q+1)^{n-1}\cdot S_n$.首先假设$n=3$,因为$q$是奇数,所以

$$v=\frac{q^3(q^3+1)(q^2-1)}{6(q+1)^2}$$

且$k\mid 18(q+1)^2log_pq$.因此,不等式$v<k^2$迫使$q\leq 27$.应用$k\mid 3(v-1)$这个事实,这些情况很容易用计算机排除掉.

现在设$n>3$.令

$$x=\{<v_1>,<v_2>,\cdots,<v_n>\}.$$

若$q>3$,则取$W=<v_1,v_2>$.如果取$g\in G\backslash G_x$,它平凡的作用在$W^{\perp}$上,则可以看出$k|\frac{3}{2}n(n-1)(q+1)^2$,与$v<k^2$矛盾.因此,$q=3$.取$W=<v_1,v_2,v_3>$.如果取$g\in G\backslash G_x$,它平凡的作用在$W^{\perp}$上,则可以看出$k|\frac{n(n-1)(n-2)(q+1)^3}{2}$.因此,$n=3$或4.从而$v=63$或8505,但此时$12v-11$不是一个平方数,矛盾.

情形4 $T=P\Omega_{2m+1}(q)(n=2m+1\geq 7)$.因为$|G|<3|G_x||G_x|_{p'}^2$,故仅有的可能是

$$(i)T\cap H=2^6.A_7<\Omega_7(q),q=3\text{或}5$$

和

$$(ii)T\cap H=2^{n-1}.A_n<\Omega_n(3),n=7,9\text{或}11$$

容易由关系式$k|3(v-1)$推出$3v>k^2$,矛盾.

情形5 $T=P\Omega_{2m}(q)(m\geq 4)$. 由[73, 4.2.11, 4.2.14]知稳定V的正交分解$V=\oplus_{i=1}^{a}V_i$的$P\Omega_{2m}$的子具有型$O_a^{\epsilon_1}\wr S_b$,这里$\epsilon_1=\{+,-,\circ\}$,$b=dim(V_i)$.因为v是奇数,所以所有的V_i是非奇异且同构的.

如果$b=1$,那么不等式$|G|<|G_x||G_x|_{p'}^2$迫使$T\cap H=2^{n-2}.A_n$,$n=8$或10且分别有$T=P\Omega_8^+(3)$或$P\Omega_{10}^-(3)$.(注意到如果$T=P\Omega_8^+(5)$那么H在G中的极大性迫使$G\leq T.2$,因此H 太小.)对于前者,$v=3^{10}\cdot 5\cdot 13$且$|Out(T)||T_x|=2^{15}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$,因此$k|3(v-1,|G-x|)=168$. 对于后者$v-1=2^6\cdot 21868406873$,因此$k|3\cdot 2^6$.都与不等式$k^2>3v$矛盾.

现在假设$b=2$.因为q是奇数,我们能找到一个$g\in H$,使得$H\cap H^g$包含$V_3\oplus\cdots\oplus V_a$的稳定化子.从而$k\leq 3a(a-1)2(q+1)^2|Out(T)|$.由于$k^2>3v$,故可推出$n=8,q=3$,因此$v$为偶数,矛盾.

最后假设$b>2$,不等式$|G|<|G_x||G_x|_{p'}^2$迫使$b=m$(因此$\epsilon=+$). 如果$m=4$, V_i的型为+,由文献[73],$T\cap H=(\Omega_4^+(q)\times\Omega_4^+(q))\cdot 2^2$,$|T\cap H|=q^4(q^4-1)^2$ 因此,$v=$

$\frac{q^8(q^6-1)^2(q^2-1)}{4}$为偶数,矛盾.故$V_i$的型为+,从而由文献[73],$T\cap H=(\Omega_4^+(q)\times\Omega_4^+(q))\cdot 2^2$,$|T\cap H|=2q^4(q^2-1)^4$.故$v=\frac{q^8(q^2+1)^2(q^4+q^2+1)}{8}$. 因为$(q^2-1,v-1)\leq 2$且4不整除$v-1$,因此$k\mid(v-1,|Out(T)||T\cap H|)=(v-1,24f\cdot 2q^4(q^2-1)^4)\mid|18f_{2'}$,这里$f=log_pq$与不等式$k^2>3v$矛盾.

因此$m\geq 5$,此时与前面的(2)的情形5类似的讨论就可以排除这种情形.

(3) $T=PSL_n(q)$,H是一个子空间对$\{U,W\}$的稳定化子.设子空间$\{U,W\}$的维数分别为i和$n-i$,其中$i<\frac{n}{2}$. 记G^0为G中的指数为2的子群$G\cap P\Gamma L_n(q)$.

(a) 先假设$U\subset W,dim(U)+dim(W)=n$. 由引理4.2.6,$G$存在长为$p$的次幂的次极.另一方面,因为$p$是奇数,故$|v-1|_p=q$.因此,$k^2<v$,这是一个矛盾.

(b) 现假设$V=U\oplus W$.这里$p|v$,因此$(k,p)\leq 3$.首先假设$i=1$.若$x=\{<v_1>,<v_2,\cdots,v_n>\}$, 则取$y=\{<v_1,v_2,\cdots,v_{n-1},<v_n>\}$.从而

$$|G_x:G_{xy}|=\frac{q^{n-2}(q^{n-1}-1)}{q-1}\text{且}k\mid\frac{3(q^{n-1}-1)}{q-1}$$

然而

$$v=\frac{q^{n-1}(q^{n-1}-1)}{q-1}>q^{2(n-1)},$$

这表明$k^2<v$,矛盾.

现在假设$i>1$.令

$x=\{<v_1,v_2,\cdots,v_i>,<v_{i+1},\cdots,v_n>\}$

与

$y=\{<v_1,v_2,\cdots,v_{i-1},v_i+v_n>,<v_{i+1},\cdots,v_n>\}$. 从而,$|G_x^0:G_{xy}^0|_{p'}\mid(q^i-1)9q^{n-i}-1)$这表明$k<3q^n$,但是$v>q^{2i(n-i)}$,因此又有$k^2<3v$,矛盾.

(4) $T=P\Omega_7(q)$或$P\Omega_8^+(q)$,$T\cap H$分别是$\Omega_7(2)$或$\Omega_8^+(2)$,这里q为素数且$q\equiv\pm3 \pmod 8$.

情形1. $T=P\Omega_7(q),T\cap H=\Omega_7(2)$.因为

$$k\mid 3H\mid 3|Out(T)|T\cap H|=6\cdot 2^9(2^2-1)(2^4-1)(2^6-1),$$

而

$$v=\frac{q^9(q^2-1)q^4-1)q^6-1)}{2^9(2^2-1)(2^4-1)(2^6-1)},$$

如果$q\geq 11$,那么$k^2<3v$,矛盾.如果$q=3,5,11$那么$v=3159,157421875,2527896770828823$.但是此时,$12v-11$都不是平方数,矛盾.

情形2. $T=P\Omega_8^+(q), T\cap H=\Omega_8^+(2)$.此时,$|T|=\frac{1}{4}q^{12}(q^4-1)^2(q^2-1)(q^6-1)$, $|\Omega_8^+(2)|=2^{12}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$, 因此,

$$v=\frac{q^{12}(q^4-1)^2(q^2-1)(q^6-1)}{2^{14}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7}.$$

因为$k\mid 3|Out(T)||T\cap H|=2^{15}\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7$,若$q>13$,则$k^2<3v$,矛盾.

如果$k=3,5,11$和13,则v的值分别为$3^7\cdot 13, 5^{10}\cdot 13^2\cdot 31, 5^2\cdot 11^{12}\cdot 19\cdot 37\cdot 61$和$7^3\cdot 13^{12}\cdot 17^2\cdot 157\cdot 61$.但是,此时的$12v-11$都不是平方数,矛盾.

(5) $T=P\Omega_8^+(q)$,这里q为素$q\equiv\pm 3 \pmod 8$,G包含T的三阶外自同构且$T\cap H=2^3\cdot 2^6\cdot PSL_3(2)$.此时,

$$v=\frac{|P\Omega_8^+(q)|}{|2^3\cdot 2^6\cdot PSL_3(2)|}=\frac{q^{12}(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)}{2^{14}\cdot 3\cdot 7}$$

因为$q\equiv\pm 3 \pmod 8$,故v是偶数,与引理4.2.1矛盾.

(6) $T=PSL_2(q)$且$T\cap H$为二面体群,A_4, S_4, A_5或$PGL_2(q^{\frac{1}{2}})$.

情形1.$T\cap H=D_{q-1}$.此时,$v=\frac{1}{2}q(q+1)$.由文献[67]知,$T\cap H$是划分$V=V_1\oplus V_2$的稳定化子.设

$$x=\{<v_1>,<v_2>\},\quad \{<v_1+v_2>,<v_2>\}.$$

于是由引理4.2.4有$k\mid 3|G_x:G_{xy}|=6(q-1)$.因为$k^2>3v=\frac{3}{2}q(q+1)$,故$k>q+1>q-1$.因$k\mid 6(q-1)$,故可令$k=\frac{6(q-1)}{b}$, $b=1,2,3,4$或5.现在

$$k-1=\frac{3(v-1)}{k}=\frac{b(q+2)}{2}.$$

如果$b=1,3,5$,那么q是偶数,矛盾.如果$b=2$,那么$k=3q$.从而$3(q-1)-1=q+2$,这可推出$q=3$.但是此时,$v=6, k=6$,这是个矛盾. 如果$b=4$,那么$k=\frac{3}{2}(q-1)$,从而$\frac{3}{2}(q-1)=2(q+2)$,这是不可能的.

情形2. $T\cap H=D_{q+1}$.此时,$v=\frac{1}{2}q(q-1)$.由文献[67]知,此时$T\cap H$是T的一个扩域子群.它的非平凡的次轨道为:

$$\frac{q+1}{2}\quad 和\quad (q+1)^{\frac{q-3}{2}}.$$

故$k\mid\frac{3(q+1)}{2}$.令$k=\frac{3(q+1)}{2m}$,则

$$\frac{3(q+1)}{2m}\left(\frac{3(q+1)}{2m}-1\right)=\frac{3}{2}q(q-1).$$

因此,$(2m^2-3)(q-2)=9-2m$,即$q=\frac{9-2m}{2m^2-3}+2$.从而,$m=2, q=3$,因此,$v=k=3$,矛盾.

情形3. $T\cap H=PGL_2(q_0)(q_0=q^{\frac{1}{2}},q=p^m)$.这时,$v=\frac{q_0(q_0^2+1)}{2}$.因此,

$$gcd(2(v-1),|T\cap H|)=(q_0(q_0^2+1)-1,2mq_0(q_0-1))|2m(q_0-1).$$

从而$k=|\ 12m(p^b-1)$若设$q_0=p^b$,则$m=2b$.因此$k=|\ 24bp^b-1)$且$v=\frac{p^{3b}+p^b}{2}$.由不等式$k^2>3v$推出,

$$p^{3b}\le p^{3b}+p^b<384b^2(p^b-1)^2<384b^2p^{2b},$$

即

$$p^b<\frac{(p^{3b}+p^b)}{p^{2b}}<384b^2.$$

因此,$1\le b\le 9$(因为$3^{10}=59049>384\times 10^2=38400$). 于是,$(b,p)$的可能取值为:(1)$b=1,p\le 384$; (2)$b=2,p\le 37$; (3)$b=3,p\le 13$; (4)$b=4,p=3,5,7$; (5)$b=5,p=3,5$; (5)$b=6,7,8,9,p=3$. 我们很容易用$C^{++}$编程算得,对于上面的参数,仅有当$b=1,p=3$时,$v=15$才满足$12v-11$是一个平方数.但是,由等式$k(k-1)=3(v-1)$得$k=7$,与$k\mid 24b(p^b-1)=48$矛盾.

情形4. $T\cap H=S_4$.由文献([77])知,此时有$p=q\equiv\pm1\pmod 8$. 因此$v=\frac{q(q^2-1)}{48}$, $|Out(T)|=2$.从而,$k\mid 3(\frac{q(q^2-1)}{48}-1,48)\mid 114$.故由不等式$k^2>3v$推出,$q<71$. 因此,$q=7,17,23,31,41,47,59,67$. 然而此时$12v-11$的值都不是平方数,这与引理2矛盾.

情形5. $T\cap H=A_4$.由文献([77])知,此时有$p=q\equiv 3,5,13,27,37\pmod{40}$. 因此$v=\frac{q(q^2-1)}{24}$, $|Out(T)|=2$.从而,$k\mid 3(\frac{q(q^2-1)}{24}-1,24)\mid 72$.故由不等式$k^2>3v$推出,$q=3,5,13,27,37$. 若$q=3$,则$v=1$,矛盾.若$q=5$,则$v=5,k=4$,此时$\mathcal{D}$是平凡的.若$q=13,27,37.$,则分别有$v=91,819,2109$.然而此时$12v-11$的值都不是平方数,这与引理4.2.2矛盾.

情形6. $T\cap H=A_5$. 由文献[77])知,此时$q=p$或P^2且$q\equiv\pm1\pmod{10}$.因此,$v=\frac{q(q^2-1)}{120}$, $k\mid 360m, m=1$ 或2.故不等式$3v>k^2$表明$q^3-q<40(360)^2m^2$.因此,$q=9,11,19,29,31,41,49,59,61,71,79,81,89,101,109,131,149,151$或$13^2$.在这些值中仅有$q=11$才保证$12v-11$是一个平方数. 此时,$v=11,k=6$.因此我们可得到一个(11,6,3)-对称设计, 且$G=T\cong PSL_2(q),G_x\cong A_5$.

情形7.$T=PSU_3(5)$且$T\cap H=M_{10}$.此时,$v=\frac{|T|}{|T\cap H|}=175$,但是$12v-11=2089$不是一个平方数,矛盾.

至此我们完成了主要定理2的证明.□

第五章　作用在有限线性空间上基柱为$F_4(q)$的几乎单群

5.1 引言

一个线性空间$\mathcal{S}$ 是由点集合$\mathcal{P}$ 和线集合$\mathcal{L}$ 构成的相关结构, 使得$\mathcal{P}$ 中任意的两点都恰好包含在唯一的一条线中. 本文关心的是有一个线传递自同构群的线性空间. 这意味着每一条线都包含着同样数目的点. 我们将此线性空间称为正则线性空间. 并假定$\mathcal{P}$ 是有限点集, $|\mathcal{L}| > 1$.

设G 和$\mathcal{S}$ 分别表示为一个群和一个线性空间, 使得G 是线传递地作用在$\mathcal{S}$ 上的自同构群. 假定$\mathcal{S}$ 的参数为(b, v, r, k), 其中b 为线的数目, v 为点的数目, r 表示通过一个点的线的数目, k 表示一条线上点的数目且$k > 2$. 既然G 在$\mathcal{L}$ 上是传递的, 则G 也是在$\mathcal{P}$ 上传递的, 这是Block R E 定理的一个结果(见[78]).

旗传递线性空间的分类完成(见[10], [79])以后, 人们开始关注线传递线性空间. 线传递线性空间可以分为非点本原和点本原两种情况. 根据Delandtsheer-Doyen 理论, 非点本原线传递分类比较容易解决. 而点本原的情况, 根据O'Nan-Scott 理论和Camina A R 的一些前期工作, 又可以分成基柱为初等交换群或非交换单群两种情形. 本章主要考虑T 是非交换单群, $T \leq G \leq Aut(T)$ 且G 线传递作用在有限线性空间上的情形. 在这种情况下, Camina A R 和他的学生Spiezia F 在2000 年证明了T 不能是零散单群(见[49]). 在2003 年, Camina A R, Neumann P M 和Praeger C E 证明了T 不能是交错群(见[5]).当假设$G = T$ 时, 有几个结果(见[51,52,53,54,80]). 应当指出,当T的李秩比较小时, 往往需要将G是线传递约化成T是线传递.本章是这种约化的一个探索.在这章中,证明了下面的定理:

主要定理3 *设G 是线传递地作用在一个有限线性空间$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 上的几乎单群, 且$L(q) \trianglelefteq G \leq Aut(L(q))$, $L(q)$ 是有限域$GF(q)$ 上的李型单群. 如果$L(q)$ 同构于$F_4(q)$, 则若$L(q)$ 不是线传递的,那么T_L不能是${}^2F_4(q)$, $B_4(q)$, $D_4(q).S_3$, ${}^3D_4(q).3$, $F_4(q^{\frac{1}{2}})$ 或T的抛物子群的子群,这里$T = L(q)$.*

5.2 概念, 定义及初等结果

设G 和A 是一个有限群, Ω 是一个有限集合. 一个三元系(A, G, Ω) 被称为是例外的(exceptional), 如果它们满足以下条件:

(1) G 是A 的正规子群;(2) A 和G 都是Ω 上的传递置换群; (3) A 和G 在$\Omega\times\Omega$ 上的相同轨道只有$\Omega\times\Omega$ 中的对角, 即$\{(\alpha,\alpha)|\alpha\in\Omega\}$.

我们称三元系(A,G,Ω)是算术例外的, 如果A 的一个子群B 包含G, 使得(B,G,Ω) 是例外的, 并有B/G 是循环群. 当A 是一个几乎单的本原置换群时, Guralnick R M, Muller P 及Saxl J 获得了他们的分类(见[81]). 特别地, 当$Soc(A)$ 有李秩≥ 2 时, 有下面的引理:

引理 5.2.1 ([81]) *设G 是一个几乎单的本原群, 且$L\trianglelefteq A\leq Aut(L)$ 及L 是非交换单群. 假设存在A 的子群B 和G, 使得(B,G) 是例外的, 其中G 在A 中是正规的, B/G 是循环的. 设M 是A 的一个点稳定子群. 若L 是李秩≥ 2 且$L\neq Sp_4(2)'\cong PSL_2(9)$. 则$M\cap L$ 是一个子域群, 即一个阶为奇素数r 的域自同构的中心化子. 更进一步地:*

(i) $r\neq p$ *(这里p 是域的特征);*

(ii) *如果$r=3$, 则L 是$Sp_4(q)$ 型群且q 是偶数;*

(iii) *不存在$Aut(L)-$ 稳定的r 阶元的$L-$ 共轭类.*

表5.1

群的结构	群的阶	注记
$[q^9]:(SL_2(q^3)\circ(Z_{q-1}))\cdot d$	$q^{12}(q^6-1)(q-1)$	$d=(2,q-1)$
$[q^{11}]:((Z_{q^3-1})\circ SL_2(q))\cdot d$	$q^{12}(q^3-1)(q^2-1)$	$d=(2,q-1)$
$G_2(q)$	$q^6(q^6-1)(q^2-1)$	李型单群
$PGL_3^{\epsilon}(q)$	$q^3(q^3-\epsilon 1)(q^2-1)$	$q>2, 3\|(q-\epsilon 1), \epsilon=\pm$
${}^3D_4(q_0)$	$q_0^{12}(q_0^6-1)^2\cdot(q_0^4-q_0^2+1)$	$q=q_0^m$, $m\neq 3$ 是素数
$L_2(q^3)\times L_2(q)$	$q^4(q^6-1)(q^2-1)$	$2\|q$
$(SL_2(q^3)\times SL_2(q))\cdot 2$	$q^4(q^6-1)(q^2-1)$	q 奇数, 对合的中心化子
$(Z_{q^2+\epsilon q+1}\circ SL_3^{\epsilon}(q))\cdot f_{\epsilon}\cdot 2$	$2q^3(q^3-\epsilon 1)^2(q+\epsilon 1)$	$f_{\epsilon}=(3,q-\epsilon 1), \epsilon=\pm$
$(Z_{q^2+\epsilon q+1})^2\cdot SL_2(3)$	$24(q^2+\epsilon q+1)^2$	$\epsilon=\pm$
$(Z_{q^4-q^2+1})\cdot 4$	$4(q^4-q^2+1)$	

引理 5.2.2 ([82]) *设${}^3D_4(q)=H_0\leq H\leq Aut({}^3D_4(q))$, 这里$q$ 是素数方幂. 假设M 是H 的不包含H_0 的一个极大子群, 则$M_0=M\cap H_0$ 与H_0- 共轭于表5.1中的子群之一:*

引理 5.2.3 *设$q=q_0^m$, $m=5,7$,则(1) (q^3-1) 不整除$|F_4(q_0)|$; (2) q^2-q+1 不整除$|F_4(q_0)|$.*

证明: 当$m=5$时,

(1)因为$q^3-1=q_0^{15}-1=(q_0-1)(1+q_0+\ldots+q_0^{14})$,且

$$\begin{aligned}|F_4(q_0)| &= q_0^{24}(q_0^{12}-1)(q_0^8-1)(q_0^6-1)(q_0^2-1)\\ &= q_0^{24}(q_0-1)^4(1+q_0+\ldots+q_0^7)(1+q_0+\ldots+q_0^{11})(1+q_0+\ldots+q_0^5)(1+q_0)\end{aligned}$$

而经过简单计算知$((1+q_0+\ldots+q_0^{14}),(1+q_0+\ldots+q_0^7))=1$, $((1+q_0+\ldots+q_0^{14}),(1+q_0+\ldots+q_0^{11}))=1+q_0+q_0^2$, $((1+q_0+\ldots+q_0^{14}),(1+q_0))=1$, $((1+q_0+\ldots+q_0^{14}),(q_0-1))=(15,q_0-1)$, $((1+q_0+\ldots+q_0^{14}),(1+q_0+\ldots+q_0^5))=1+q_0+q_0^2$, 显然

$$(1+q_0+\ldots+q_0^{14})>(1+q_0+q_0^2)^2((q_0-1),15),$$

所以(q^3-1)不整除$|F_4(q_0)|$.

(2) 经简单计算可得$(q^2-q+1,q_0^{24})=1$, $(q^2-q+1,q_0^{24})=1$或3, $(q^2-q+1,q_0^2-1)=q_0^2-q_0+1$, $(q^2-q+1,q_0^6-1)<4q_0^2$, $(q^2-q+1,q_0^8-1)=3q_0^3$. 当$q_0\geq 3$时，有

$$q^2-q+1=q_0^{10}-q_0^5+1>36q_0^5(q_0^2-q_0+1),$$

所以q^2-q+1不整除$|F_4(q_0)|$.

当$m=7$时同理可证明结论成立.□

引理 5.2.4 *对任意的正整数$q_0=p^r$(p为素数,$r\geq 1$), 下面论断成立:*

$$(q_0^2\pm q_0+1,(1-q^c)/(1-q))=1$$

其中,$q=q_0^h$ $c=5,7,h=2,6,8,12$

证明: 用辗转相除法可得,当$h=2,8$时,

$$(q_0^3\pm 1,1-q^c)=(q_0^3\pm 1,1-q_0^{hc})==q_0\pm 1$$

当$h=6,12$时,

$$(q_0^3\pm 1,1-q^c)=(q_0^3\pm 1,1-q_0^{hc})=q_0^3\pm 1,$$

从而结论也成立.□

设G 是线性空间S 的一个自同构群且是线传递的, 则S 是正则线性空间. 假定S 的参数为(b,v,r,k). 设

$$b_1=(b,v),\ b_2=(b,v-1),\ k_1=(k,v),\ \ k_2=(k,v-1).$$

显然,

$$k = k_1k_2,\ b = b_1b_2,\ r = b_2k_2,\ \ v = b_1k_1.$$

这里有两个在本文中经常用到的事实: 第一是G 中任意一个对合和G_L 中的某个对合是共轭的. 第二是如果G 中有一个对合不稳定$\mathcal{S}$ 中任何点，则G 是旗传递的(见[43]). 因此我们假设每一个对合都至少稳定一个点.

以下论断在研究线性空间的线传递自同构群时是非常有用的.

引理 5.2.5 ([83]) 设G 线传递地作用在线性空间$\mathcal{S}$ 上. K 是G 的一个子群. 如果对于任意的$L \in \mathcal{L}$ 和某个$\alpha \in \mathcal{P}$, 有$K \not\leq G_L$ 及$K \leq G_\alpha$, 则$N_G(K) \leq G_\alpha$.

引理 5.2.6 ([84]) 设G 线传递地作用在线性空间$\mathcal{S}$ 上. 如果存在一个素数p 使得$p|b$ 但$p \nmid v$, 则对于某个$\alpha \in \mathcal{P}$, $N_G(P) \leq G_\alpha$, 其中P 是G 的$Sylow\ p-$ 子群.

引理 5.2.7 ([85]) 设G 线传递地作用在线性空间$\mathcal{S}$ 上. 对于某个$\alpha \in \mathcal{P}$, P 是G_α 的一个$Sylow\ p-$ 子群. 如果P 不是G 的$Sylow\ p-$ 子群, 则存在一条通过点α 的线L, 使得$P \leq G_L$.

下面的引理在计算稳定点的数目时是非常有用的.

引理 5.2.8 ([54]) 设G 是一个作用在Ω 上传递的群, K 是G 中一个元素的共轭类. 设$x \in K$, $\mathrm{Fix}_\Omega(\langle x\rangle)$ 表示被$\langle x\rangle$ 稳定的Ω 中点的集合, 则$|\mathrm{Fix}_\Omega(\langle x\rangle)| = |G_\alpha \cap K| \cdot |\Omega|/|K|$, 这里$\alpha \in \Omega$. 特别地, 如果$G$ 仅含有一个对合的共轭类, 则有$|\mathrm{Fix}_\Omega(\langle i\rangle)| = \frac{e(G_\alpha)\cdot|\Omega|}{e(G)}$, 这里$i$ 是G 中的对合, $e(G)$ 表示G 包含对合的数目.

引理 5.2.9 ([86]) 设G 线传递地作用在线性空间$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 上, $\mathcal{S}$ 的参数是(b, v, r, k). 设i 是G_L 中的一个对合, 这里L 是$\mathcal{S}$ 中的一条线. 令$f_1 = |\mathrm{Fix}_\mathcal{P}(\langle i\rangle)|$, $f_2 = |\mathrm{Fix}_\mathcal{L}(\langle i\rangle)|$. 如果$\mathcal{S}$ 不是射影平面且$f_1 \geq 2$, 则$v \leq f_2^2$.

引理 5.2.10 ([87]) 设$T = F_4(q)$是一个定义在有限域$GF(q)$上的例外李型单群,$T \trianglelefteq G \leq Aut(T)$, 若$M$是一个$G$不包含$T$的极大子群,那么如下的三种情形成立:

情形1.$|M \cap T| < q^{k(T)} = q^{24}$;

情形2.$M \cap T$是抛物子群;

情形3.$M \cap T$=$B_4(q)$, $D_4(q).S_3$, ${}^3D_4(q).3$, $F_4(q^{\frac{1}{2}})$ 或${}^2F_4(q)$.

引理 5.2.11 ([88]) 设G 传递地作用在有限集合Ω 上. 假设在G 中存在极大子群H, 使得H 是G 的正规子群. 如果H 不是传递的, 则对于某个$\alpha \in \Omega$, 有$H_\alpha = G_\alpha$.

引理 5.2.12 ([88]) 设G 线传递地作用在线性空间$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$上. 如果$H$ 是G 的正规子群且$|G:H| = s$, s 是素数, 但H 不是线传递的. 则要么$(G, H, \mathcal{P})$ 是例外的, 要么$\mathcal{S}$ 是一个射影平面.

引理 5.2.13 ([88]) 设$G = T:\langle x\rangle$ 在线性空间$\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 上是线传递的. 则T 作用在$\mathcal{P}$ 上是传递的.

5.3 主要定理的证明

因为$T = F_4(q) \trianglelefteq G \leq Aut(F_4(q))$, 可以假设$G = T:\langle x\rangle$, 其中$x \in Out(T)$, $Out(T)$ 是T 的外自同构群. 设$q = p^a$, a 是一个正整数, p 是一个素数. 假设x 是一个域自同构. 设$o(x) = m$, 则$m|a$.

假设T 作用在$\mathcal{S}$ 上不是线传递的. 更进一步假设G 是一个阶最小的线传递群. 因此存在一个子群H 使得$T \trianglelefteq H \lhd G$, 且$|G:H|$ 是一个素数, 和H 不是线传递的. 由引理5.2.12, $(G, H, \mathcal{P})$ 是一个例外的三元系. 由引理5.2.13, T是点传递的, 因此x 包含在G_α 之中但不包含在G_L 中. 再由引理5.2.1, T_α为子域群. 又因为G点本原, 所以G_α是极大子群,于是我们有$T_\alpha = F_4(q_0)$, 这里$q = q_0^c$ 且$c \mid a$为素数, 且有

$$v = \frac{q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)}{q_0^{24}(q_0^{12}-1)^2(q_0^8-q_1)(q_0^6-1)(q_0^2-1)}.$$

设i 是T 中的一个对合, 当q为奇数时,由文献([89], 3.3)知, T中有两个对合共轭类. 我们取i为不中心化任何Sylow 2-子群的那个对合, 则$|C_G(i)| = q^{10}(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)^2m$.

另外由引理5.2.8及5.2.9, 我们有$v < f_2^2 < |C_G(i)|^2$ 于是

$$\frac{q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)}{q_0^{24}(q_0^{12}-1)^2(q_0^8-q_1)(q_0^6-1)(q_0^2-1)} < (q^{10}(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)^2m)^2.$$

整理得到,

$$q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1) < (q^{10}(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)^2m)^2q_0^{52}.$$

由此可推出$q^4 < aq_0^{26}$,即$p^{2a(2c-13)/c} < a$, 这里c为素数, 且$c|a$, 因此我们得到$c = 2, 3, 5$. 由[81]知$c \nmid |F_4(p)|$.因此c只可能是5. 当q是偶数, 由文献([90],13.1)知, T中有四个对合共轭类, $t = U_r(1), u = U_s(1), tu = U_r(1)U_s(1), v = U_\alpha(1)U_\beta(1)$. 取$i = v$, 则$|C_G(i)| = q^{19}(q^2-1)^2m$. 于是

$$\frac{q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)}{q_0^{24}(q_0^{12}-1)^2(q_0^8-q_1)(q_0^6-1)(q_0^2-1)} < (q^{19}(q^2-1)^2m)^2.$$

整理得到, $q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)<(q^{19}(q^2-1)^2m)^2q_0^{52}$. 由此可推出$q^3<aq_0^{26}$,即$2^{a(3c-26)/c}<a$, 从而,$c$只可能为5和7.

因为由引理5.2.1,$T_\alpha=F_4(q_0)$, $q=q_0^c$ (当q是奇数时,$c=5$,当q是偶数时,$c=5$,或7). 所以$G_\alpha=T_\alpha:\langle x\rangle$ 不包含G 的Sylow p-子群. 因此由引理5.2.7, $Q_0\le G_L$, 于是$Q_0\le T\cap G_L=T_L$, 这里Q_0 是$F_4(q_0)$ 的Sylow p-子群.

设$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$为$F_4$的一个基础根系$J_i=\Pi-\{\alpha_i\},i=1,2,3,4$ 由引理5.2.10,我们知道群T_L只可能为下面五种情形: (1)$T_L\le P_{J_j}$,(极大抛物子群); (2) $T_L\le B_4(q)$;(3)$T_L\le D_4(q)\cdot S_3$; (4) $T_L\le {}^3D_4(q)\cdot 3$; (5)$T_L\le F_4(q^{\frac{1}{2}})$.

下面分别对这五种情形进行讨论:

先设$b=\frac{|G|}{|G_L|}=\frac{|T|m}{|T_L|m_1}=\frac{|T|a_1m}{|M|m_1}$. 这里$|M|=|T_L|a_1$. 令$\frac{|T|}{|M|}=b'$, 则$b'$ 整除b.

(1) (a) $T_L\le P_{J_1}$(或P_{J_4}),(极大抛物子群)

此时,$J_1=\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$为$B_3$型根系.于是由[55]知$|P_{J_1}|=q^{24}(q-1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)$

(i) 当$c=5$时,

$v=q_0^{26}(1+q_0^2+q_0^4+q_0^6+q_0^8)(1+q_0^6+q_0^{12}+q_0^{18}+q_0^{24})(1+q_0^8+q_0^{16}+q_0^{24}+q_0^{32})(1+q_0^{12}+q_0^{24}+q_0^{36}+q_0^{48})$

$$b'=|\frac{T}{P_{J_1}}|=\frac{q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)}{q^{24}(q-1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)}=(q^4+1)(q^6+1)(q^3+1)(q^2+q+1)$$

于是$q_0^2-q_0+1|(q^2+q+1)|b'|b$, 但是由引理5.2.4,我们知道$q_0^2-q_0+1\nmid v$,于是存在一个素数$s$ 整除$q_0^2-q_0+1$, 使得$s\mid b$ 但是$s\nmid v$. 令S 为T 的Sylow s-子群. 由引理5.2.5, $N_G(S)\le G_\alpha$. 又$S\le T_\alpha\le G_\alpha$, 但是$S\not\le T_L$(否则$S\le T_L\le M$, 故$s\nmid\frac{|T|}{|T_L|}$, 矛盾). 于是$S\not\le G_L$. 从而得到$N_T(S)\le T_\alpha$. 由于$q_0^2-q_0+1$ 整除q^3-1, 从而$S\le Z_{(q^3-1)}$, 于是$Z_{(q^3-1)}\le N_T(S)\le T_\alpha$, 即$(q^3-1)$ 整除$|T_\alpha|=|F_4(q_0)|(q=q_0^c)$. 显然,与引理5.2.3矛盾.

(ii) 当$c=7$时,同样由引理5.2.4知$q_0^2-q_0+1\nmid v$,从而与(i)同法可得出矛盾.

(b)$T_L\le P_{J_2}$或P_{J_3},(极大抛物子群)

此时,$J_2=\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\}$为$A_1\times A_2$型的根系.由[45]知$|P_{J_2}|=q^{24}(q-1)(q^2-1)^2(q^3-1)$

$$b'=\frac{|T|}{|P_{J_2}|}=\frac{q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)}{q^{24}(q-1)(q^2-1)^2(q^3-1)}=(q^6+1)(q^4+1)(q^3+1)(q^2+1)(q^2+q+1)$$

含有因子q^2+q+1,同(a)可得出矛盾. 从而$T\not\le P_{J_i}(i=1,2,3,4)$

(2) $T_L\le B_4(q)$, (3)$T_L\le D_4(q)\cdot S_3$

此时,它们对应的b'分别为$b'=\frac{|T|}{|B_4(q)|}=q^8(q^6+1)(q^4+1)(q^3+1)(q^2+q+1)(q-1)$与$b'=$

$\frac{|T|}{|^3D_4(q)|}=q^{12}(q^6+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)/3$.它们都含有因子$q^2+q+1$于是,与(1)同理可得出$T\nleq B_4(q), T\nleq D_4(q)\cdot S_3$.

(4) $T_L\leq {}^3D_4(q)\cdot 3$,由引理5.2.2,及$Q_0\leq T_L$知, (a)$T_L\leq [q^9]:(SL_2(q^3)\circ Z_{q-1})\cdot d\cdot 3$; (b)$T_L\leq [q^{11}]:(SL_2(q)\circ Z_{q^3-1})\cdot d\cdot 3$; (c)$T_L\leq G_2(q)\cdot 3$; (d)$T_L\leq L_2(q^3)\times L_2(q)\cdot 3, (c=7)$; (e)$T_L\leq (SL_2(q^3)\times SL_2(q)\cdot 2\cdot 3, (c=7)$ 它们的b'所有可能情况列见表(5.2),显然它们都含因子(q^2+q+1),因此同上可排除.

表5.2

情况	群M 的结构	b' 的值
(a)	$[q^9]:(SL_2(q^3)\circ(Z_{q-1}))\cdot d\cdot 3$	$q^{12}(q^8-1)(q^6+1)(q^3+1)(q^2-1)(q^2+q+1)/3$
(b)	$[q^{11}]:((Z_{q^3-1})\circ SL_2(q))\cdot d\cdot 3$	$q^{12}(q^8-1)(q^6+1)(q^3+1)^2(q-1)(q^2+q+1)/3$
(c)	$G_2(q)\cdot 3$	$q^{18}(q^8-1)(q^6+1)(q^3+1)(q-1)(q^2+q+1)/3$
(d)	$L_2(q^3)\times L_2(q)\cdot 3$	$q^{20}(q^8-1)(q^6+1)(q^3+1)(q-1)(q^2+q+1)/3$
(e)	$(SL_2(q^3)\times SL_2(q))\cdot 2\cdot 3$	$q^{20}(q^8-1)(q^6+1)(q^3+1)(q-1)(q^2+q+1)/3$

(5)$T_L\leq F_4(q^{\frac{1}{2}})$

此时$b'=\frac{|T|}{|F_4(q^{\frac{1}{2}})|}=q^{12}(q^6+1)(q^3+1)(q+1)$, 于是有$(q_0^2+q_0+1)\mid(q^2-q+1)\mid b'$. 而由引理5.2.4知,$(q_0^2+q_0+1)\nmid v$.令$S$ 为T 的Sylow s-子群. 由引理5.2.5, $N_G(S)\leq G_\alpha$. 又$S\leq T_\alpha\leq G_\alpha$, 但是$S\nleq T_L$(否则$S\leq T_L\leq M$, 故$s\nmid\frac{|T|}{|T_L|}$, 矛盾). 于是$S\nleq G_L$. 从而得到$N_T(S)\leq T_\alpha$. 由于$q_0^2+q_0+1$ 整除q^2-q+1, 从而$S\leq Z_{(q^2-q+1)}$, 于是$Z_{(q^2-q+1)}\leq N_T(S)\leq T_\alpha$, 即$(q^2-q+1)$ 整除$|T_\alpha|=|F_4(q_0)|(q=q_0^c)$. 显然,与引理5.2.3矛盾.

综上所述, 完成了主要定理3的证明.

第六章 典型单群与非可解区传递2-$(v,7,1)$设计

6.1 引言

一个2-$(v,k,1)$设计是一个对$(\mathcal{P},\mathcal{L})$,这里$\mathcal{P}$表示$v$个点的集合,$\mathcal{L}$表示$\mathcal{P}$的一些$k$-子集的集合, 满足对于$\mathcal{P}$中任意两点,在$\mathcal{L}$中恰好有一个元素包含该两点. $\mathcal{P}$中的元素称为点,$\mathcal{L}$中的元素B 称为区组.本文中,我们用$\mathcal{D}$表示一2-$(v,7,1)$设计,用b表示$\mathcal{D}$中区组的个数,用r表示包含$\mathcal{P}$中一指定点的区组的个数.

设π是$\mathcal{D}$的点集合上的一个置换,如果它把$\mathcal{D}$的区仍然变为区,则称π是$\mathcal{D}$的一个自同构.$\mathcal{D}$的全体自同构组成一个群,记为$Aut(\mathcal{D})$.设$G\leq Aut(\mathcal{D})$.如果G作用在$\mathcal{D}$的区组集合(点集合)上是传递的,则称G 是区-传递(点-传递)的.如果G作用在$\mathcal{D}$的区组集合(点集合)上是本原的,则称G是区-本原(点-本原)的.对于2-$(v,k,1)$ 设计的研究,一个很自然且重要的问题就是对区传递2-$(v,k,1)$设计的分类.早在八十年代初,人们就完全解决了区-传递2-$(v,3,1)$设计的分类[42].在文献[43]中,Camina A.R.和Siemons J. 分类了可解区传递2-$(v,4,1)$设计.在[45]中李分类了非可解区传递2-$(v,4,1)$设计.在[3]中,李和童分类了可解区传递2-$(v,5,1)$设计.在[46]中, 韩和李分类了非可解区传递2-$(v,5,1)$设计.在文[28]中,刘伟俊分类了$k=6,7,8,9$和10时的可解区传递2-$(v,k,1)$设计.由此可见, 与可解区传递的2-$(v,k,1)$设计的研究相比,对于非可解的情形的该类设计的分类相对滞后些. 在本章中,我们考虑了非可解区传递2-$(v,7,1)$设计.运用Lie型单群理论,典型单群的子群结构理论以及置换群的知识和技巧,部分的完成了非可解区传递2-$(v,7,1)$设计的分类,得到了如下的定理:

主要定理4 *设G是一2-$(v,7,1)$设计$\mathcal{D}$的自同构群,若G区传递非可解且点本原,但非旗传递的作用在设计$\mathcal{D}$上, 则$G\neq PSL(n,q)$,这里q为奇数且$(n,q)\neq(2,2),(2,3)$.*

6.2 预备知识

引理 6.2.1 ([43]) *设G是2-$(v,k,1)$设计的区传递自同构群,B是一个区组且T是G_B的一个sylow2-子群. 如果T在B上的不动点多于一个,那么区组b是奇数.*

设X为一集合,定义集合$X^{(2)}=\{(x,y)|x\neq y,x,y\in X\}$.

引理 6.2.2 ([44]) *设$\mathcal{D}$是一2-$(v,7,1)$设计,$G\leq Aut(\mathcal{D})$.如果$\psi_1,\cdots,\psi_s$是G_B在集合$B^{(2)}$上*

的轨道,$\Psi_1,\cdots,\Psi_t$是G在集合$\mathcal{P}^{(2)}$上的轨道.那么,映射$\sigma:\sigma(\psi_i)=\Psi_j(\psi_i\in\Psi_j)$是集合$\{\psi_i|i=1,2,\cdots,s\}$到集合$\{\Psi_i|i=1,2,\cdots,t\}$的一个双射.特别的我们有$s=t$.因此,$G$的秩是$s+1$.如果$\psi_i^\sigma=\Psi_i$,那么$|\Psi|=b|\psi_i|$.

引理 6.2.3 ([43]) 设G是2-$(v,k,1)$设计的区传递自同构群,B是一个区组.如果G的任意非平凡元素最多固定B上的一个点,那么或者G是奇数阶的或者G是旗传递的.

引理 6.2.4 ([46]) 设G是2-$(v,k,1)$设计$\mathcal{D}$的非可解区传递自同构群,基柱$Soc(G)=T$,则$|T|\leq\lceil\frac{v}{\lambda}\rceil|T_\alpha|^2|G:T|$,这里$\alpha\in\mathcal{P}$, λ为G的最长次轨道的长度,$\lceil\frac{v}{\lambda}\rceil$表示不小于$\frac{v}{\lambda}$的最小整数.

引理 6.2.5 ([46]) 设G是点集$\mathcal{P}$上的传递置换群, $T\trianglelefteq G\leq Aut(T)$.记$\Gamma$为$G$的次轨道,则$\Gamma$为$T$的某些等长的次轨道的并.

6.3 主要定理的证明

设G为一2-$(v,7,1)$设计$\mathcal{D}$的区传递且点本原,但非旗传递的自同构群,$B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$为$\mathcal{D}$的一个区. 我们知道$7b=rv$且$42b=v(v-1)$.因G非旗传递,故$7\nmid v$不整除且$6\mid(v-1)$,从而$42\mid(v-1)$.故存在正整数b', 使$v=42b'+1$.因G非旗传递,故G^B在B上是非传递的.又由G的非可解性知,G^B的阶应为偶数. 于是由引理6.2.1,引理6.2.2,引理6.2.3和引理6.2.5,我们可列出G^B的结构,G的秩和次轨道如下表:

表6.1

序号	B的结构	G的秩	G次轨道	b'的奇偶性
(1)	$\langle 1\rangle$	43	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{42}$	奇
(2)	$\langle(12)\rangle$	32	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{20},\overbrace{2b',\cdots 2b'}^{11}$	奇
(3)	$\langle(123)\rangle$	23	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{12},\overbrace{3b',\cdots 3b'}^{10}$	奇
(4)	$\langle(123),(12)\rangle$	22	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{12},\overbrace{3b',\cdots 3b'}^{8},6b'$	奇
(5)	$\langle(1234)\rangle$	16	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{6},\overbrace{4b',\cdots 4b'}^{9}$	奇

续表6.1

(6)	$\langle(12),(34)\rangle$	23	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{6},\overbrace{2b',\cdots 2b'}^{14},4b'4b'$	奇
(7)	$\langle(12),(1234)\rangle$	14	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{6},\overbrace{4b',\cdots 4b'}^{6},12b'$	奇
(8)	$\langle(12)(34)\rangle$	25	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{6},\overbrace{2b',\cdots 2b'}^{18}$	奇
(9)	$\langle(12)(34),(13)(24)\rangle$	20	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{6},\overbrace{2b',\cdots 2b'}^{12},4b',4b',4b'$	奇
(10)	$A_4=\langle(123),(124)\rangle$	14	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{6},\overbrace{4b',\cdots 4b'}^{6},12b'$	奇
(11)	$S_4=\langle(12)(23),(34)\rangle$	14	$1,\overbrace{b',\cdots b'}^{6},\overbrace{4b',\cdots 4b'}^{6},12b'$	奇
(12)	$\langle(12),(345)\rangle$	18	$1,b',b',\overbrace{2b',\cdots 2b'}^{5},\overbrace{3b',\cdots 3b'}^{6},6b',6b'$	奇
(13)	$\langle(123),(12)(45)\rangle$	15	$1,b',b'\overbrace{2b',\cdots 2b'}^{5},\overbrace{3b',\cdots 3b'}^{4},6b',6b',b6'$	奇
(14)	$\langle(12),(12345)\rangle$	8	$1,b',b',\overbrace{4b',\cdots 4b'}^{5},20b'$	奇
(15)	$\langle(45),(1234)\rangle$	8	$1,b',b',\overbrace{4b',\cdots 4b'}^{5},20b'$	奇
(16)	$\langle(12345)\rangle$	11	$1,b',b',\overbrace{4b',\cdots 4b'}^{5}$	奇
(17)	$\langle(12),(123),(45)\rangle$	15	$1,b',b'\overbrace{2b',\cdots 2b'}^{5},\overbrace{3b',\cdots 3b'}^{4}6b',6b',6b'$	奇
(18)	$A_5=\langle(12),(23),(34),(45)\rangle$	8	$1,b',b',\overbrace{4b',\cdots 4b'}^{5},20b'$	?
(19)	$S_5=\langle(12),(1234)\rangle$	8	$1,b',b',\overbrace{4b',\cdots 4b'}^{5},20b'$	?
(20)	$\langle(123),(456)\rangle$	11	$1,\overbrace{3b',\cdots 3b'}^{8},9b',9b'$	?
(21)	$\langle(12)(45),(13),(46)\rangle$	9	$1,\overbrace{3b',\cdots 3b'}^{4},6b',6b',9b',9b'$	?
(22)	$\langle(123),(45),(456)\rangle$	11	$1,\overbrace{3b',\cdots 3b'}^{8},9b',9b'$	?
(23)	$\langle(12),(123),(45),(456)\rangle$	9	$1,\overbrace{3b',\cdots 3b'}^{4},6b',6b',9b',9b'$	?
(24)	$A_6=\langle(123),(124),(125),(126)\rangle$	4	$1,6b',6b',30b'$	?
(25)	$S_6=\langle(12),(23),(34),(45),(56)\rangle$	4	$1,6b',6b',30b'$	?
(26)	$\langle(12345),(67)\rangle$	8	$1,2b',2b',\overbrace{5b',\cdots 5b'}^{4},10b',10b'$	?

续表6.1

(27)	$\langle(12),(45),(67)\rangle$	11	$1,2b',2b',3b',3b,4b',4b',\overbrace{6b',\cdots 6b'}^{4}$	?
(28)	$\langle(12),(123),(45),(67)\rangle$	10	$1,2b',2b',4b',4b',\overbrace{6b',\cdots 6b'}^{5}$	?
(29)	$\langle(12),(123),(45)(67)\rangle$	10	$1,2b',2b',4b',4b',\overbrace{6b',\cdots 6b'}^{5}$	?
(30)	$\langle(12),(123),(456)(67))\rangle$	6	$1,4b',4b',4b',6b',12b',12b'$	?

因在情形(1), (3), (16)和(20)中,G_B的阶为奇数,从而G的阶也是奇数,G为可解群,故它们不可能发生. 又由文献[45]的方法知,情形(24)和(25)也不会出现.因此,观察表6.1我们可得到如下结论:

结论1: $\frac{v}{x}\leq 43$或$\frac{v-1}{x}\leq 42$ (这里x为的任一非平凡次轨道的长度), 特别的,$\lceil\frac{v}{\lambda}\rceil\leq 22$ (这里λ为最长的次轨道的长度);

结论2: $(v,x)=1,3$或5 (这里x为的任一非平凡次轨道的长度);

结论3: $\frac{x}{y}\leq 20$ (这里x和y为的任一非平凡次轨道的长度);

结论4: $b'\mid |G_\alpha|\,(\alpha\in\mathcal{P})$.

因为$v=1+42b'$,G在$\mathcal{P}$上本原,从而G是奇数次本原群.设$T=PSL_n(q)\,((n,q)\neq(2,3),q$为奇数) 为$n$维线性空间$V$上的线性典型单群,$T\leq G\leq Aut(T)$.由文献[71]中奇数次本原群的分类定理知, G的基柱T和$H=G_\alpha\,(\alpha\in\mathcal{P})$为下列情形之一:

(1) $H=N_G(T(q_0)$,这里$q=q_0^c$且c为奇素数;

(2) H为n维线性空间V的子空间的稳定化子.

(3) $T\cap H$为V的分解$V=\oplus V_i$的稳定化子这里$\dim(V_i)$为常数.

(4) T_α为子空间对$\{U,W\}$的稳定化子,这里$U\leq W$且$\dim(U)$+$\dim(W)=n$或$U\oplus W=V$且G包含交换U和W的自同构.

(5) $T\cap H$为二面体群,A_4,S_4,A_5或$PGL_2(q^{\frac{1}{2}})$.

下面我们就以上5种情形分别进行讨论:

(1) $H=N_G(T(q_0)$,这里$q=q_0^c$且c为奇素数;

此时,$f\geq c\geq 3$, 由$PSL_n(q)$的极大子群结构理论知,$T(q_0)=PSL_n(q_0)$是T的极大子群. 从而,$T_\alpha=T\cap G_\alpha=T(q_0)$.此时

$$|T|=|PSL_n(q)|=\frac{1}{d}q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^2-1)\cdots(q^n-1)>\frac{1}{d}q^{\frac{(2n+1)(n-1)}{2}},\ (d=(n,q-1)),$$

(上式中用到不等式$q^i-1>q^{i-1}(q-1)$和$(q-1)^i>q^{i/2}$).

另一方面,

$$|T_\alpha| = |PSL_n(q_0)| = \frac{1}{d_0} q_0^{\frac{n(n-1)}{2}} (q_0^2 - 1) \cdots (q_0^n - 1) < \frac{1}{d} q_0^{\frac{(2n+2)(n-1)}{2}}.$$

从而,

$$\begin{aligned} \frac{|T|}{|T_\alpha|^2} &= \frac{d_0^2 q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^2-1)\cdots(q^n-1)}{d q_0^{n(n-1)} (q_0^2-1)^2 \cdots (q_0^n-1)^2} \\ &> \frac{d_0^2 q^{\frac{(2n+1)(n-1)}{2}}}{d q_0^{\frac{(2n+2)(n-1)}{2}}} \\ &> \frac{d_0^2}{d} q^{\frac{n-1)(2n-1)}{6}} > 22|G:T| \, (T \neq PSL_2(q)), \end{aligned}$$

与引理6.2.4矛盾.

若$T = PSL_2(q)$,则有

$$|T| = \frac{1}{2} q(q^2 - 1), \ |T_\alpha| = \frac{1}{2} q_0 (q_0^2 - 1), \ v = \frac{q_0^{c-1}(q_0^{2c} - 1)}{q_0^2 - 1}.$$

因$(v-1, q) = 1$,故存在T的非平凡次轨道,其长度满足

$$x \mid |T_\alpha|_{p'} = \frac{1}{2}(q_0^2 - 1).$$

从而,$x \leq \frac{1}{2}(q_0^2 - 1)$.故

$$\frac{v}{x} = \frac{2q_0^{c-1}(q_0^{2c} - 1)}{(q_0^2 - 1)^2} > 2q_0^{3c-5} > 6q > 43|G:T|,$$

与结论1矛盾.

(2) H为n维线性空间V的子空间的稳定化子.

设W为V的子空间,$\{e_1, \cdots, e_m\}$和$\{e_1, \cdots, e_n\}$分别为W和V的一组基,这里$m \leq n/2$. 若G_α为子空间W的稳定化子,则

$$\widehat{T}_\alpha = \left\{ A \;\middle|\; \begin{array}{c} A \in SL_n(q), \text{且具有形式} \begin{pmatrix} A_1 & \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}, \\ \text{其中} A_1 \in GL_m(q), A_2 \in GL_{n-m}(q) \end{array} \right\}.$$

这里$\widehat{T}_\alpha$为T_α在同态$SL_n(q) \to PSL_n(q)$下的原象(下文出现时不再说明).

当时$m \geq 2$时,设子空间W'的一组基为$\{e_1, \cdots, e_{m-1}, e_{m+1}\}$, G_β为W'的稳定化子, 则存在$g \in SL_n(q)$使$\widehat{T}_\alpha^g = \widehat{T}_\beta$.故

$$\widehat{T}_{\alpha\beta} = \widehat{T}_\alpha \cap \widehat{T}_\beta = \left\{ B \;\middle|\; \begin{array}{c} B \in SL_n(q), \text{且具有形式} \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ \star & a & & \\ \star & 0 & b & \\ \star & \star & \star & B_2 \end{pmatrix}, \\ \text{其中} B_1 \in GL_{m-1}(q), B_2 \in GL_{n-m-1}(q), \\ a, b \in GF(q), a, b \neq 0 \end{array} \right\}.$$

设子空间$\widetilde{W}$的一组基为$\{e_{m+1},\cdots,e_{2m-1},e_{2m}\}$, G_γ为$\widetilde{W}$的稳定化子, 则存在$g_1\in SL_n(q)$使$\widehat{T}_\alpha^{g_1}=\widehat{T}_\gamma$.从而

$$\widehat{T}_{\alpha\gamma}=\widehat{T}_\alpha\cap\widehat{T}_\gamma=\left\{B\;\middle|\;\begin{array}{c}B\in SL_n(q),\text{且具有形式}\begin{pmatrix}X & & \\ 0 & Y & \\ \star & \star & Z\end{pmatrix},\\ \text{其中}X,Y\in GL_m(q),Z\in GL_{n-2m}(q)\end{array}\right\}.$$

故T的两次轨道长度之比为

$$\begin{aligned}&\tfrac{(q-1)^2q^{n+nm-m^2-3}|GL_{m-1}(q)||GL_{n-m-1}(q)|}{q^{2m(n-2m)}|GL_m(q)|^2|GL_{m-2m}(q)|}\\ >\ & q^{\frac{2mn-2m^2-3n+2m+2}{2}}>q^9\\ >\ & 20|G:T|\ (m\geq 4),\end{aligned}$$

与结论3矛盾.

当$m=3$时,T的两次轨道长度之比为

$$\begin{aligned}&\tfrac{(q-1)^2q^{n+nm-m^2-3}|GL_{m-1}(q)||GL_{n-m-1}(q)|}{q^{2m(n-2m)}|GL_m(q)|^2|GL_{m-2m}(q)|}\\ >\ & q^{\frac{2mn-2m^2-3n+2m+2}{2}}>q^{\frac{3n-10}{2}}\\ >\ & 20|G:T|\ (n\geq 7),\end{aligned}$$

与结论3矛盾.

当$n=6$时, 直接计算可得,v为偶数,矛盾.

当$m=2$时,T的两次轨道长度之比为

$$\begin{aligned}&\tfrac{(q-1)^2q^{n+nm-m^2-3}|GL_{m-1}(q)||GL_{n-m-1}(q)|}{q^{2m(n-2m)}|GL_m(q)|^2|GL_{m-2m}(q)|}\\ =\ & \tfrac{(q-1)^3q^{3n}|GL_{n-3}(q)|}{q^{4n-16}|GL_3|^2|GL_{n-4}(q)|}>q^{n-4}\\ >\ & 20|G:T|\ (n\geq 8),\end{aligned}$$

与结论3矛盾.

当$n=4,5$时,直接计算可得,v为偶数,矛盾.当$n=6$时,

$$\frac{(q-1)^3q^{11}|GL_3(q)|}{q^6|GL_2(q)|^2}>q^4>20|G:T|,$$

与结论3矛盾.当$n=7$时,

$$\frac{(q-1)^3q^{14}|GL_4(q)|}{q^{12}|GL_2(q)|^2|GL_3(q)|}=\frac{(q^2+1)q^3}{q+1}>20|G:T|,$$

与结论3盾.

当$m=1$时,$\frac{|T_\alpha|}{|T_{\alpha\beta}|}=\frac{q^n-1}{q-1}$.这说明$T_\alpha$在$V$的一维子空间上传递, 从而是2-传递的,矛盾.

(3) $T\cap H$为V的分解$V=\oplus V_i$的稳定化子,这里$\dim(V_i)$为常数.

设V的一组正交基为

$$\{e_1,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_{2m},\cdots,e_{m(t-1)+1},\cdots,e_{mt}\}\,(n=mt,t\geq 2),$$

相应地,V_i的一组正交基为$\{e_{m(t(i-1)+1},\cdots,e_{mi}\}\,(i=1,2,\cdots,t)$. 由[73,命题4.2.9]知$T_\alpha$为$GL_m(q)\wr S_t$型的.

当$m=1$时,可得

$$\frac{|T|}{(n,q-1)|T_\alpha|^2}=\frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^n(q^i-1)}{(q-1)^{2n}(n!)^2}>\frac{q^{\frac{2n^2-5n}{2}}}{(n!)^2}>22f\,(n\geq 4),$$

与引理6.2.4矛盾.

当$n=2$时,设

$$V=\langle e\rangle\perp\langle f\rangle=\langle e+f\rangle\perp\langle f\rangle.$$

可得$v=\frac{1}{2}q(q+1)$,由$(v-1,q)=1$知,必存在T的一条非平凡的次轨道,其长度$x\mid|T_\alpha|_{p'}$, 于是$x\leq 2(q-1)$.从而$\frac{v-1}{x}>\frac{q}{4}$.当$f=1$且$p>168$, $f=2$且$p>11$, $f=3$且$p\neq 3$和$f>4$时, $\frac{v-1}{4}>\frac{q}{4}>42|G:T|$,与结论1矛盾.而对例外的情形,当$q=9,25,27,49,81,121,125$和$q\neq 61$为小于168的素数时,通过计算可知,$v$的值为偶数,与$v=1+42b'$矛盾.当$q=61$时,计算得,$v=1890,b'=45$, 但是$|G_\alpha|\mid 2f|T_\alpha|=120$.因此$b'\nmid|G_\alpha|$,与结论4矛盾.

当$n=3$时,有

$$\frac{|T|}{(n,q-1)|T_\alpha|^2}=\frac{q^3(q+1)((q^2+q+1)}{36(q-1)^3}>\frac{1}{36}(q^3+q^2+q)>22f\;(q\neq 3,5,7,9),$$

与结论4矛盾. 若$q=3,5,7,9$时,计算得,v分别为234, 3875, 26068, 1105665,与$v=1+42b'$矛盾.

当$m\geq 2$时,取

$$V_1'=\{e_1,\cdots,e_{m-1},e_{2m}\},V_2'=\{e_{m+1},\cdots,e_{2m-1},e_m\},V_i'=V_i\;(i=3,4,\cdots,t).$$

记T_β为正交分解$V+\oplus_{i=1}^t V_i'$的稳定化,则存在$g\in SL_n(q)$使$\widehat{T}_\beta^g=T_\beta$. 故$\widehat{T}_{\alpha\beta}$中的元素

具有形式

$$\begin{pmatrix} A & & & & \\ & a & & & \\ & & B & & \\ & & & b & \\ & & & & C \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} & & A & & \\ & & & a & \\ B & & & & \\ & b & & & \\ & & & & C \end{pmatrix}$$

这里$A,B \in GL_{m-1}(q), a,b \in GF(q)^*, C \in GL_{n-2m}(q)$且$C$为对应于正交分解$V+\oplus_{i=3}^{t}V_i'$的稳定化子. 那么$v$和$T$的非平凡次轨道的长度$x$分别为

$$v = \frac{|GL_n(q)|}{|GL_m(q)|^t t!} > \frac{1}{t!}q^{2n^2-2nm-n},$$
$$x = \frac{|GL_m(q)|^t t!}{2(q-1)^2|GL_{m-1}(q)|^2|GL_m(q)|^{t-2}(t-2)!} < \frac{t(t-1)}{2}q^{4m-3}.$$

故

$$\frac{v}{x} > \frac{2}{t(t-1)t!q^{\frac{2n^2-2nm-n-8m+6}{2}}} > 43|G:T|\ (n \geq 6),$$

与结论1矛盾.

当$n=4$时,$m=2,\ t=2$,因此

$$v = \frac{1}{2}q^4(q^2+1)(q^2+q+1).$$

因$(v-1,q)=1$,故存在T的非平凡次轨道,其长度x满足

$$x \leq |T_\alpha|_{p'} = (q-1)(q^2-1)^2.$$

故我们有

$$\frac{v}{x} > \frac{q^4(q^2+1)(q^2+q+1)}{2(q-1)(q^2-1)^2} > \frac{1}{2}(q^3+q^2+q) > 43|G:T|\ (q \neq 3,5),$$

与结论1矛盾.若$q=3$,则算得$v=5265$,与$v=1+42b'$矛盾.若$q=5$,则$v=251875,\ b'=5997$, 而$|G_\alpha| \mid 8f|T_\alpha|=230400$.因此,$b'$不整除$|G_\alpha|$,与结论4矛盾.

(4) T_α为子空间对$\{U,W\}$的稳定化子,这里$U \leq W$且$\dim(U)+\dim(W)=n$或$U \oplus W = V$且G包含交换U和W的自同构.

(1°) $U \leq W$且$dim(U)+dim(W)=n$的情形.

设$dim(U)=m,\ U,\ W,\ V$的一组基分别为

$$\{e_1,e_2,\cdots,e_m\},\ \{e_1,e_2,\cdots,e_m,\cdots,e_{n-m}\},\ \{e_1,e_2,\cdots,e_n\}.$$

那么$\widehat{T}_\alpha$中的元素具有形状

$$\begin{pmatrix} A_m & & \\ \star & B_{n-2m} & \\ \star & \star & C_m \end{pmatrix}.$$

若$m=1$,则$v=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)^2}$为偶数,与$v=1+42b'$矛盾.

若$m=2$,则$v=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-2}-1)(q^{n-3}-1)}{(q-1)^2(q^2-1)^2}$为偶数,与$v=1+42b'$矛盾.

若$m\geq 3$,取$\widetilde{U}$的一组基为$\{e_2,e_3,\cdots,e_{m+1}\}$,并且$\widetilde{W}=W$, 记$T_\beta$为子空间对$\{\widetilde{U},\widetilde{W}\}$的稳定化子.我们知道存在$g\in SL_n(q)$使$\widetilde{T}_\alpha^g=\widetilde{T}_\beta$.故$\widetilde{T}_{\alpha\beta}$中的元素具有形式

$$\begin{pmatrix} a & \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & b & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & B_{n-2m-1} & 0 \\ \star & \star & \star & \star & C_m \end{pmatrix}.$$

从而v和T的非平凡次轨道的长度x分别为

$$v=\frac{|GL_n(q)|}{|GL_m(q)||GL_{n-2m}|q^{m(2n-3m)}}>q^{\frac{4mn-6m^2-n}{2}},$$

$$x=\frac{|GL_m(q)||GL_{n-2m}(q)|q^{m(2n-3m)}}{|GL_m(q)||GL_{n-2m-1}||GL_{m-1}|q^{2mn-3m^2-m+n-3)(q-1)^2}}<\frac{q^{n-m+1}}{(q-1)^2}.$$

故

$$\frac{v}{2f(q-1,n)x}>q^{\frac{4mn-6m^2-3n+2m-2}{2}}>q^6>43,$$

与结论1矛盾.

(2°) $U\oplus W=V$ 且G包含交换U和W的自同构.

设U和W的一组基分别是$\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$和$\{e_{m+1},e_{m+2},\cdots,e_n\}$, $\widetilde{U}$和$\widetilde{W}$的一组基分别是$\{e_1,e_2,\cdots,e_{m-1},e_{m+1}\}$和$\{e_m,e_{m+2},\cdots,e_n\}$,并且$T_\alpha$和$T_\beta$分别为子空间对$\{U,W\}$和$\{\widetilde{U},\widetilde{W}\}$的稳定化子则存在$g\in SL_n(q)$使$\widetilde{T}_\alpha^g=\widetilde{T}_\beta$. 故$\widetilde{T}_\alpha$和$\widetilde{T}_{\alpha\beta}$中的元素具有形式

$$\begin{pmatrix} A_m & \\ & B_{n-m} \end{pmatrix} 和 \begin{pmatrix} A_{m-1} & & & \\ & a & & \\ & & b & \\ & & & B_{n-m-1} \end{pmatrix}.$$

从而v和T的非平凡次轨道的长度x分别为

$$v=\frac{|GL_n(q)|}{|GL_m(q)||GL_{n-m}|}=q^{m(n-m)}Y_1,$$

$$x=\frac{|GL_m(q)||GL_{n-m}(q)|}{|GL_m(q)||GL_{n-m-1}||GL_{m-1}|(q-1)^2}=q^{n-2}Y_2,$$

这里Y_1,Y_2为正整数.当$n>3$时,有$q^2\mid(v,x)$,与结论2矛盾.当$n=3$时,此时$m=1$,则由结论2知,$q=3$或5. 因此,$v=117$或775,与$v=1+42b'$矛盾.当$n=2$时,此时$m=1$,从而$v=q(q+1)$为偶数,矛盾.

(5) $T\cap H$为二面体群,A_4, S_4, A_5或$PGL_2(q^{\frac{1}{2}})$.

(a) $T_\alpha=A_4$.

当$f=1$且$p\geq 29$或$f=2$且$p\neq 3$或$f\geq 3$且$p\neq 3$或$f\geq 4$时,有

$$\frac{|T|}{(2,q-1)f|T_\alpha|^2}=\frac{q(q^2-1)}{576f}>22,$$

与结论4矛盾.

例外情形由下表给出

表6.2

q	3	7	11	13	17	9	25	27
$v=\frac{q(q^2-1)}{24}$	1	14	55	78	204	30	650	819

经计算知，以上情形均与$v=1+42b'$矛盾.

当T_α为二面体群,S_4和A_5时,可以类似的得出矛盾.

(b) 当$T_\alpha=PGL_2(q^{\frac{1}{2}})$时. 容易算得,$v=\frac{1}{2}q^{\frac{1}{2}}(q+1)$.从而$(v-1,q)=1$,故存在$T$的非平凡次轨道,其长度$x$满足$x\leq q-1$. 当$f=2$且$p>236$或$f=4$且$p\geq 29$或$f=6$且$p\geq 11$或$f=8$且$p\geq 7$或$f=10,12$且$p\neq 3$或$f\geq 14$时,有

$$\frac{v-1}{x}>\frac{\frac{1}{2}q^{\frac{1}{2}}(q+1)-1}{q-1}>\frac{1}{2}q^{\frac{1}{2}}\geq 42|G:T|,$$

与结论1矛盾.例外情形我们可直接通过计算v和b'得出矛盾.例如当$f=2$且$p\leq 236$时,通过计算可知, 当$p=43$, 73, 127, 199, 211时,b'不整除$|G_\alpha|$,与结论4矛盾.其余情形与$v=1+42b'$矛盾.类似可证另外几种例外情形.

综上所述,我们完成了主要定理4的证明.

第七章 以$PSL(2,q)$为自同构群且区组长度为7的单纯3-设计

7.1 引言

对于正整数k,v和$\lambda(3\le k\le v,\lambda>0)$,我们定义一个3-$(v,k,\lambda)$设计是一个相关结构$\mathcal{D}=(\mathcal{X},\mathcal{B},\mathcal{I})$,这里$\mathcal{X}$表示$v$个点的集合,$\mathcal{B}$是$\mathcal{X}$的一个$k$-子集集合(称为区组),使得$\mathcal{X}$的任意$k$- 子集恰好与$\lambda$个区组相关.我们用$b$表示$\mathcal{B}$中元素的个数.如果$\mathcal{B}$中没有重复的区组,则称这样的一个设计$\mathcal{D}$是单纯的.本章只考虑单纯3-设计.称点集$\mathcal{X}$上的一个置换为设计$\mathcal{D}$的自同构,如果它将$\mathcal{B}$中的元素变为中的元素且保持相关关系不变.$\mathcal{D}$的自同构群是由$\mathcal{D}$的自同构构成的群.如果它作用在$\mathcal{D}$的点集上是$t$- 齐次的,则称之为$t$- 齐次的.

在典型单群中,特殊射影线性群$PSL_2(q)$的子群结构和元素的置换特征是最明了的(参考[92]).众所周之,$PSL_2(q)$ 是3-齐次的,当且仅当$q\equiv 3 \pmod 4$.因此,一个3-$(q+1,k,\lambda)$设计具有$PSL_2(q)$ 作为自同构群当且仅当他的区组集合是$PSL_2(q)$在k-子集上的轨道集合.容易看出,如果$k>3$,X的每个k- 子集轨道是一个关于某个λ的3-$(q+1,k,\lambda)$, 设计的区组集合. 这使得不同的作者用这个群构造3-设计([91.93-99]).在[1]中,区组长度为4和5且具有$PSL_2(q)$, $(q\equiv 3 \pmod 4)$ 为自同构群的3-设计被完全确定.当$q\equiv 1 \pmod 4$)时,由$PSL_2(q)$构造的3-$(q+1,4,\lambda)$设计在[8]中被确定. 对于区组长度为6且具有$PSL_2(q)$为自同构群的3-设计,当$q\equiv 3 \pmod 4$和$q\equiv 1 \pmod 4$ 时,分别在文献[99]和[97]中得到确定.本章用与[99]类似的方法研究了区组长度为7且以$PSL_2(q)$为自同构群的3-设计的存在性,确定了以$PSL_2(q)$为自同构群的3-$(q+1,7,\lambda)$设计的所以可能的λ的值. 在这一章,总假设$q\equiv 3 \pmod 4$, $G=PSL_2(q)$.

主要定理5 *以$PSL(2,q)$为自同构群,区组长度为7的3-$(q+1,7,\lambda)$ 设计$\left(1<\lambda\le\begin{pmatrix} q-2 \\ 4\end{pmatrix}\right)$存在,当且仅当下列条件之一成立*

(i) *如果*$q\equiv 71,251 \pmod{420}$, *那么*$\lambda\equiv 0,1,15,21 \pmod{35}$.

(ii)*如果*$q\equiv 211,391 \pmod{420}$, *那么*$\lambda\equiv 0,15,21,36 \pmod{105}$.

(iii)*如果*$q\equiv 3,123,243,303,87,207,387,283,403,103,163,67,187,247,367,19,139,199,319 \pmod{420}$, *那么*$35|\lambda$.

(iv)*如果*$q\equiv 31,151,271,331 \pmod{420}$,*那么*$\lambda\equiv 0,21 \pmod{35}$.

(v) *如果*$q\equiv 311,11,131,191 \pmod{420}$,*那么*$\lambda\equiv 0,21 \pmod{105}$.

(vi)如果$q \equiv 183, 363, 27, 267, 43, 223, 127, 307, 379, 139 \pmod{420}$, 那么$\lambda \equiv 0, 15 \pmod{35}$.

(vii)如果$q \equiv 323, 83, 379, 239, 419 \pmod{420}$,那么$\lambda \equiv 0, 15 \pmod{105}$.

(viii)如果$q \equiv 23, 143, 203, 383, 47, 227, 347, 59, 79, 179, 299, 359 \pmod{420}$, 那么$105|\lambda$.

7.2 定义与初步结论

在这一部分,我们给出一些本章中将要用到的符号和初步的结论.

对于$B \subseteq \mathcal{X}$,令$G(B) = \{g(B) : g \in G\}$表示$B$在$G$下的轨道;$G_B = \{g \in G : g(B) = B\}$表示$B$在$G$下的稳定化子.显然,$|G| = |G(B)||G_B|$.从而$G$是3-设计$(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$的自同构群当且仅当它的区组集合$\mathcal{B}$是$X$的$k$-子集在$G$下的轨道的集合([93]).如果$G(B)$是3-$(v, k, \lambda)$设计的区组集合,那么我们称$G(B)$是一个3-$(v, k, \lambda)$设计.

设$q = p^f$,p是素数,f是一个正整数.令$\mathcal{X} = GF(q) \cup \infty$.定义$\frac{b}{0} = \infty$, $\frac{b}{\infty} = 0$, $b - \infty = \infty - b = \infty$, $\frac{\infty}{\infty} = 1$. 对任意$a, b, c, d \in GF(q)$,如果$ad - bc$是一个非零的平方数,那么集$\mathcal{X}$上的形如

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

的映射的集合,在映射乘法下构成一个群,称为射影特殊线性群,记为$PSL_2(q)$.从文献[92],我们整理了一些下面将要用到的关于的重要的结论.

引理 7.2.1 *群$G = PSL_2(q)$作用在点集$\mathcal{X}$上的作用是2-传递的,且G每个非单位元素在$\mathcal{X}$上最多有两个稳定点.*

引理 7.2.2 *设P是$PSL(2, q)$的一个p-Sylow子群,那么P同构于$GF(q)$的加法群,P中的元素有一个公共的稳定点且P中的每个非零元素仅有这个稳定点.*

引理 7.2.3 *$G = PSL(2, q)$的稳定数字0和1的子群U是一个阶为$u = \frac{q^f - 1}{d}$的循环群,这里$d = (p^f - 1, 2)$.*

引理 7.2.4 *群$G = PSL(2, q)$有一个阶为$u = \frac{p^f + 1}{d}$的循环子群S,这里$d = (p^f - 1, 2)$.如果$e \neq s \in S$,那么s在$GF(q) \cup \infty$上没有稳定点.*

引理 7.2.5 *群G的元素结构由表7-1给定,这里$\varphi(d)$表示Euler函数*

表7-1

元素的阶	稳定化子的阶	Number of 共轭类数	置换类型
1	$\frac{q^3-q}{2}$	1	1^{q+1}
2	$q+1$	1	$2^{q+1)/2}$
p	q	2	$1^1\ p^{q/d}$
$d\mid\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{\varphi(d)}{2}$	$1^2\ d^{(q-1)/d}$
$d\mid\frac{q+1}{2},\ d\neq 2$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{\varphi(d)}{2}$	$d^{(q-1)/d}$

这里a^b表示b个a循环分解.

引理 7.2.6 ([93]) 设$\mathcal{D}=(X,\mathcal{B},I)$是一个$t$-$(v,k,\lambda)$设计.那么如下的方程成立:

(a) $bk=vr$.

(b) $\begin{pmatrix} v \\ t \end{pmatrix}\lambda=b\begin{pmatrix} k \\ t \end{pmatrix}$.

7.3 7-子集的轨道

在这部分,我们将确定集$\mathcal{X}$的7-子集在群G的作用下的轨道类型及其数量.设B是$\mathcal{X}$的一个7-子集.现在我们来讨论B的稳定化子G_B的阶.

引理 7.3.1 设B是$\mathcal{X}$的一个7-子集.那么$|G_B|\neq 15,21,35,105$.

证明: 首先假设$G_b|=15$.由Sylow定理,$n_3=n_5=1$,这里n_i表示Sylow i-子群个数(下文相同).因此存在唯一的15阶循环子群,从而G_B有一个15阶的元素,但是这样的元素不能够稳定7-子集B

当$|G_B|=21$时,$3\mid q(q-1)(q+1)$.注意到$q\equiv 3 \pmod 4$,因此$3\mid q$或$3\mid q-1$. 首先假设$k\mid q-1$.因为在群G_B中存在一个7阶正规子群H和7个3阶子群$K_i(i=1,2,\cdots,7)$,对任意$h\in H$和$k_1\in K_i$(对某个i)存在某个$k_2\in K_j$(对某个j)使得$hk_1=k_2$.由引理7.2.3,k_1和k_2恰好稳定B中两点x_1和x_2. 因为$hk_1(x_i)=k_2(x_i)(i=1,2)$,我们有$h(x_i)=x_i$.这与$h$在$B$中没有稳定点或阶为7的事实矛盾.对于$3\mid q$, 类似的讨论可得出矛盾.

若$|G_B|=35$,由Sylow定理,$n_5=n_7=1$.因此存在唯一的35阶循环子群,从而G_B有一个35阶的元素,但是这样的元素不能够稳定7-子集B

最后假设$|G_B|=105$.这时n_3,n_5和n_7中至少有一个等于1.如果$n_3=1$或$n_5=1$,那么G_B中存在3阶或5阶正规子群,从在G_B 中而存在15阶循环子群,这是不可能的.如果$n_7=1$,那么G_B中存在7阶正规子群,从而在G_B 中存在35阶循环子群,这也是不可能的.□

我们都知道一个设计$\mathcal{D}$存在的必要条件是:

$$\binom{v-i}{t-i} \equiv 0 \pmod{\binom{k-i}{t-i}} \tag{7.1}$$

对于$0 \le i \le t$.由这一事实与引理7.2.6能够推出如下引理:

引理 7.3.2 *在G作用下的每个7-子集的轨道都是一个3-$(q+1,7,\lambda)$设计,这里$\lambda \in \{15,21,35,105\}$.*

证明: 因为$G(B)$是一个3-$(q+1,7,\lambda)$设计,由引理7.2.6,

$$G(B) = \lambda \binom{q+1}{3} / \binom{7}{3}.$$

因此,由条件(7.1)知,$5 \mid \lambda(q-1)$.因此,如果$q \not\equiv 11 \pmod{20}$,那么$5 \pmod{\lambda}$.从而$\lambda = 5,15,35$或者105.如果$q \equiv 11 \pmod{20}$,那么$\lambda = 1,3,5,7,15,21,35$或者105.由引理7.3.1,知$\lambda \ne 1,3,5$或7.因此,$\lambda \in \{15,21,35,105\}$. □

现在,我们令N_λ表示构成3-$(q+1,7,\lambda)$设计的轨道数. 设$G(B)$是$\mathcal{X}$的一个7-子集,$GB)$是一个3-$(q+1,7,\lambda)$设计的区组集合.那么G区传递的作用在这个设计上.

注1: 如果$G(B)$与$G(B')$都是一个3-$(q+1,7,\lambda)$设计,那么或者$G(B)\cap G(B') = \emptyset$或者$G(B) = G(B')$.因此,对于固定的λ,满足$G(B)$是一个3-$(q+1,7,\lambda)$设计的区组B的个数等于

$$G(B) = \lambda \binom{q+1}{3} N_\lambda / \binom{7}{3}.$$

下面,我们将确定N_λ, $\lambda \in \{15,21,35,105\}$.

引理 7.3.3 *如果$q \equiv 11 \pmod{20}$,那么$N_{21} = 1$.否则,$q \equiv 3,7,19 \pmod{20}$,且$N_{21} = 0$.*

证明: 设$G(B)$构成一个3-$(q+1,7,21)$设计.因为$\lambda | G_B| = 105$且$\lambda = 21$,于是有$|G_B| = 5$.因此G_B 的每个5阶元至少稳定B中两个点. 由引理7.2.2-7.2.4,有$5 \mid q-1$.因为$q \equiv 3 \pmod 4$,于是有$q \equiv 11 \pmod{20}$. 由注1知,这样的区组B的个数为$21\binom{q+1}{3} N_{21} / \binom{7}{3}$.另一方面,由引理7.2.5知$G$的每个5阶元恰好稳定$\mathcal{X}$的$(q-1)/5$个7-子集,而每个7-子集都被4个5阶元稳定且在$G$中恰好有$2q(q+1)$个5阶元.因此,$G$中5阶元恰好稳定$\mathcal{X}$的$q-1)q(q+1)/10$个不同的7-子集.因此,有

$$21\binom{q+1}{3} N_{21} / \binom{7}{3} = (q-1)q(q+1)/10$$

从而$N_{21}=1$.□

引理 7.3.4 如果$q\equiv 15,27 \pmod{28}$,那么$N_{15}=1$.否则$q\equiv 3,7,11,19,23 \pmod{28}$,且$N_{15}=0$.

证明: 设$G(B)$构成一个3-$(q+1,7,15)$设计.那么$|G_B|=7$.因此$7\mid q(q-1)(q+1)$.如果$7\mid(q+1)$,那么$q\equiv 27 \pmod{28}$.由引理7.2.5知G的每个7阶元恰好稳定$\mathcal{X}$的$q+1/7$ 个7-子集,而每个7-子集都被6个7阶元稳定且在G中恰好有$3q(q-1)$个7阶元.因此,G中7阶元恰好稳定$\mathcal{X}$的$q(q+1)(q-1)/14$ 个不同的7-子集.由注1,有

$$15\begin{pmatrix} q+1 \\ 3 \end{pmatrix} N_{15}/\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}=(q-1)q(q+1)/14.$$

从而$N_{15}=1$.

如果$q\mid q-1$,那么$q\equiv 15 \pmod{28}$.类似的可得出$N_{15}=1$.

如果$7\mid q$,那么$q=7^f$,f是奇数(注意到$q\equiv 3 \pmod 4$).由引理7.2.5知G的每个7阶元恰好稳定$\mathcal{X}$的$q/7$ 个7-子集,而每个7-子集都被6个7阶元稳定且在G中恰好有$q(-1)(q+1)$ 个7阶元.因此,G 中7阶元恰好稳定$\mathcal{X}$的$q(q+1)(q-1)/42$个不同的7-子集.由注1,有

$$15\begin{pmatrix} q+1 \\ 3 \end{pmatrix} N_{15}/\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}=(q-1)q(q+1)/42.$$

从而$N_{15}=1/3$,这是不可能的.□

引理 7.3.5 N_{35}的值如下给定

$$N_{35}=\begin{cases} \frac{q-3}{6} & \text{如果 } q\equiv 3 \pmod{12} \\ \frac{q-4}{3} & \text{如果 } q\equiv 7 \pmod{12} \\ 0 & \text{如果 } q\equiv 11 \pmod{12} \end{cases}.$$

.

证明: 设$G(B)$构成一个3-$(q+1,7,35)$设计.那么$|G_B|=3$.因此G的每个3阶元至少稳定$\mathcal{X}$ 中的一个点.由引理7.2.2-7.2.4,有$3\mid q-1$或$3\mid q$.

如果$3\mid q+1$, 那么$N_35=0$且$q\equiv 11 \pmod{12}$.

如果$3\mid q$,由引理7.2.5知G的每个3阶元恰好稳定$\mathcal{X}$的$\begin{pmatrix} \frac{q}{3} \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{q(q-3)}{18}$ 个7-子集,而每个7-子集都被2个3阶元稳定且在G中恰好有$(q-1)(q+1)$个3阶元.因此,G中3阶

元恰好稳定$\mathcal{X}$的$q(q+1)(q-1)(q-3)/36$个不同的7-子集.由注1,有

$$35\begin{pmatrix} q+1 \\ 3 \end{pmatrix} N_{35}/\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = q(q+1)(q-1)(q-3/36.$$

从而$N_{15}=\frac{q-3}{6}$.

如果$3 \mid q-1$,由引理7.2.5知的每个3阶元恰好稳定$\mathcal{X}$的$2\begin{pmatrix} \frac{q-1}{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{(q-1)(q-4)}{9}$个7-子集,而每个7-子集都被2个3阶元稳定且在$G$中恰好有$q(q+1)$个3阶元.因此,$G$中3阶元恰好稳定$\mathcal{X}$的$q(q+1)(q-1)(q-4)/18$个不同的7-子集.由注1,有

$$35\begin{pmatrix} q+1 \\ 3 \end{pmatrix} N_{35}/\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = q(q+1)(q-1)(q-4)/18.$$

从而$N_{35}=\frac{q-4}{3}$. □

引理 7.3.6 N_{105}的值如下:

(1)如果$q \equiv 27, 267, 183, 363 \pmod{420}$,那么

$$N_{105} = \frac{q^4-14q^3+71q^2-294q+180}{2520};$$

(2)如果$q \equiv 3, 123, 243, 303, 87, 207, 387 \pmod{420}$, 那么

$$N_{105} = \frac{q^4-14q^3+71q^2-294q+540}{2520};$$

(3) 如果$q \equiv 211, 391 \pmod{420}$, 那么

$$N_{105} = \frac{q^4-14q^3+71q^2-434q+376}{2520};$$

(4) 如果$q \equiv 31, 151, 271, 331 \pmod{420}$, 那么

$$N_{105} = \frac{q^4-14q^3+71q^2-434q+736}{2520};$$

(5) 如果$q \equiv 139, 379, 223, 43, 307, 127 \pmod{420}$, 那么

$$N_{105} = \frac{q^4-14q^3+71q^2-434q+880}{2520};$$

(6) 如果$q \equiv 7, 343 \pmod{420}$, 那么

$$N_{105} = \frac{q^4-14q^3+71q^2-434q+1000}{2520};$$

(7) 如果$q \equiv 283,403,103,163,67,187,247,367,19,139,199,319 \pmod{420}$, 那么

$$N_{105}=\frac{q^4-14q^3+71q^2-434q+1240}{2520};$$

(8)如果$q \equiv 71,251 \pmod{420}$, 那么

$$N_{105}=\frac{q^4-14q^3+71q^2-154q-744}{2520};$$

(9) 如果$q \equiv 311,11,131,191 \pmod{420}$,那么

$$N_{105}=\frac{q^4-14q^3+71q^2-154q-384}{2520};$$

(10) 如果$q \equiv 323,83,379,139,239,419 \pmod{420}$, 那么

$$N_{105}=\frac{q^4-14q^3+71q^2-154q-240}{2520}.$$

(11) 如果$q \equiv 23,143,203,383,47,227,347,59,79,179,299,359 \pmod{420}$, 那么

$$N_{105}=\frac{q^4-14q^3+71q^2-154q+120}{2520}.$$

证明: 通过计算X的包含$0,1,\infty$的7-子集个数,有方程

$$15N_{15}+21N_{21}+35N_{35}+105N_{105}=\binom{q-2}{4}. \tag{7.2}$$

由引理7.3.3-7.3.5知,N_{15}, N_{21}和N_{35}是已知的.因此,我们容易由方程(7.2)解得N_{105}的值.□

7.4 主要定理的证明

证明: (i)设$\mathcal{D}$是一个具有自同构群G的单纯3-$(q+1,7,\lambda)$设计.我们知道,单纯3-$(q+1,7,\lambda)$ 设计具有自同构群G当且仅当它的区组集合是7-子集在G下的轨道的集合.由引理7.3.2,知在G的每个7-子集的轨道中,与$\{0,1,\infty\}$相关的区组数为15,21,35或者105.如果$q \equiv 71,251 \pmod{420}$,那么由引理7.3.3和7.3.4知$N_{21}=1=N_{15}, N_{35}>2$.因此,$\lambda \equiv 0,1,15,21 \pmod{35}, 1<\lambda \le \binom{q-2}{4}$,因此必要条件成了.

反过来,对每个$\lambda \equiv 0,1,15,21 \pmod{35}, 1<\lambda \le \binom{q-2}{4}$,存在非负整数$x \le N_{35}$, $y \le N_{105}$, $z \le 1$和$k \le 1$,使得

$$\lambda = 35x+105y+15z+21k.$$

我们取x个长为$|G|/3$的轨道,y个长为$|G$的轨道,z个长为$|G|/7$的轨道和k个长为$|G|/5$的轨道, 这就给出了一个单纯3-$(q+1,7,\lambda)$设计,它具有自同构群G.这就证明了充分性.

类似于(i)的证明,我们能够证明(ii)-(viii).□

参考文献

[1] Witt E. Uber Steinersche Systeme. A bhandlungen ausd em Math S em der Univ H amburg, 1938, 26(12) :5-264.

[2] Witt E. Die 5-fachen transitive Gruppen von Mathieu, Abhandlungen aus dem Math. Sem der Univ. Hamburg, 1938, 12: 256-264.

[3] Chevally C. Theory of Lie Group, Princeton University Press, 1946.

[4] Tits J. Buidings of spherical type and finite BN-paires, Springer-Verlag, LNM, 1974, 386.

[5] Kantor W M. Homogeneous designs and geometric lattices. J Comb Theory, Series A, 1985, 38: 66-74

[6] Foulser D A. Solvable flag-tranmsitive affine groups. Math Z, 1964, 86: 191-204

[7] Hering C. Two new sporadic doubly transitive linear spaces, in finite Geometries, Lecture Notes in Pure and App. Math. Eds. C.A.Baker and L.M.Baken 1985:127-129

[8] Liebeck M W, Praeger C M, Saxl J. On O'Nan-Scott theorem for finite primitive permutation groups. J. Austral Math Soc A, 1988, 44: 389-396

[9] Praeger C E. On O'Nan-Scott theorem for finite qusiprimitive permutation groups and an application to 2-arc transitive graphs. J London Math. Soc., 1993, 47(2): 227-239

[10] Buekenhout F, Delandtsheer A, Doyen J, Kleidman P, Liebeck M W and Saxl J. Linear spaces with flag transitive automorphism groups. Geom Dedicata, 1990, 36: 89-94

[11] Buekenhout F. Remarques sur l'homogeneite des espaces lineaires et des systemes de blocs. Math Z, 1968, 104: 144-146

[12] Huber M. The classification of flag-transitive Steiner 3-designs. Adv Geom, 2005, 5: 195-221

[13] Huber M. The classification of flag-transitive Steiner 4-designs. J Algebr Comb, 2007, (to appear), 25. DOI:10.1007/s10801-006-0053-0

[14] Huber M. A sensus of highly symmetric combinatoricdesigns[J]. J Algbr Comb, 2007, 26: 453-476

[15] O'Reilly Regueiro E. On primitivity and reduction for flag-transitive symmetic designs, J Comb Theory Ser A, 2005, 109:135-148.

[16] O'Reilly Regueiro E. Biplanes with flag-transitive automorphism groups of almost simple type, with classicl socle, J Algebr Comb, 2007, 26:529-552.

[17] O'Reilly Regueiro E. Biplanes with flag-transitive automorphism groups of almost simple type, with alternating or spordic socle, Europ J Comb, 2007, 26: 529-552.

[18] Kantor W M. Primitive permutation groups of odd degree and an application to finite projective planes. J Algebra, 1987, 106: 15-45

[19] Delandtsheer A. line-primitive automorphism groups of finite linear spaces. Europ J Combin, 1989, 10: 161-169

[20] Delandtsheer A. line-primitive groups of small rank. Dicrete Math, 1988, 68: 103 -106.

[21] Camina A R. and Gagen T. M. Block transitive autmorphism groups of block designs. J Algebra, 1984, 86: 549-554

[22] 方卫东, 李慧陵. Camina-Gage定理的一个推广. 数学杂志, 1993, 13: 437-441.

[23] 刘伟俊, 李慧陵. Camina-Gagen定理的一个推广(II). 数学进展, 1996, 25: 438-444

[24] Li H l and Liu W J. Line-primitive 2-$(v,k,1)$ designs with $k/(k,v) \leq 10$. J Combin Theory Ser A, 2001, 93:153-167.

[25] Delandtsheer A and Doyen J. Most block-transitive t-designs are point- primitive. Geom Dedicata, 1989, 29:397-410.

[26] 刘伟俊. 具有小k的线本原2-$(v,k,1)$设计. 数学杂志, 1995, 15: 375-379

[27] Li H. L. Alternating groups A_n and 2-$(v,k,1)$ designs. Journal of Combinatorial Theory Series A, 2004, 105(1): 51-62

[28] 刘伟俊. 区传递2-$(v,k,1)$ 设计, [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 1997.

[29] 刘伟俊. 区组设计的自同构群, [浙江大学博士后研究工作报告]. 杭州: 浙江大学, 2000.

[30] Li Huiling, Liu Weijun. Soluble Bloc-transitive Automorphism Groups of 2-$(v,k,1)$ Designs. J Combin Theory Ser A, 2001, 93: 182-191.

[31] Liu W J, Li H L and Ma C G. Suzuki groups and 2-$(v,k,1)$ designs. Europ J Combinatorics, 2001, 22: 513-519.

[32] Liu W J. The Chevalley groups $G_2(q^n)$ and 2-$(v,k,1)$ designs. Algebra Colloquium, 2001, 8: 471-480.

[33] 周胜林. 区本原的2-$(v,k,1)$设计, [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 1999.

[34] 周胜林, 李慧陵. 李型单群$^2F_4(q^2)$ 与2-$(v,k,1)$ 区组设计. 数学年刊, 2002, 23A(6): 715-722.

[35] Zhou S L. Block primitive 2-$(v,k,1)$ designs admitting a Ree group. Europ J Combinatorics, 2002, 23(8): 1085-1090.

[36] Zhou S L, Li H L and Liu W J. The Ree groups $^2G_2(q)$ and 2-$(v,k,1)$ block designs. Discrete Math, 2000, 224: 251-258.

[37] Ding S F. 2-$(v,k,1)$ design and $PSU(3,q)$ where q is odd. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2003, 3(18): 343-351.

[38] Delandtsheer A. and Doyen J., Most block-transitivet-designs are point-primitive, Geom Dedicata 29(1989),397-410.

[39] Cameron P J and Praeger C E. Block-transitive designs I: point-imprimitive designs, D iscrete Math, 1993, 118:33 -43.

[40] Cameron P J, Praeger C E. Block-transitive t-designs, II: large t. In F. De Clerck, et al. London Math. Soc Lecture Note Series 191, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[41] Camina A R. The socle of automorphism groups of linear spaces. Bull London Math Soc, 1996, 28(3): 269-272.

[42] Calpham P C. Steiner system with block transitive automorphism groups, Discrete Math, 1976, 14: 121-131.

[43] Camina A R and Siemons J. Block transitive automorphism groups of 2-$(v,k,1)$ block designs. J Combin Theory Ser A, 1989, 51:268-276.

[44] Li Huiling. On block-transitive 2-$(v,4,1)$designs. J Combin Theory Ser A, 1995, 69: 115-124.

[45] Li H L and Tong Wenwen. Soluble block transitive automorphism groups of 2-$(v,5,1)$ designs. Disc Math, 2003, 260: 267 - 273.

[46] Han Guangguo and Li Huiling, Unsolvable block transitive automorphism groups of 2-$(v,5,1)$ designs J Combin Theory Series A, 2007, 114 : 77-96.

[47] 刘伟俊, 李慧陵, 马传贵. 2-(v,7,1)设计的可解区传递自同构群. 数学进展, 2001, 30(1): 56-62.

[48] 刘伟俊, 马传贵. Suzuki单群的一个特性. 浙江大学学报(理学版), 1999, 26(3):18-21.

[49] Camina A R. Spiezia F. Sporadic Groups and Automorphisms of Linear Spaces. J Combin Designs, 2000, 8: 353-362.

[50] Camina A R. Neumann P M. Praeger C E. Alternating groups acting on finte linear spaces. Proc London Math Society, 2003, 87: 29-53.

[51] Liu W J. Finite linear spaces admitting a projective group $PSU(3,q)$ with q even. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 374: 291-305.

[52] Liu W J. Finite linear spaces admitting a two-dimensional projective linear group. J Combin Theory, Series A, 2003, 103: 209-222.

[53] Liu W J. Suzuki groups and automorphisms of finite linear spaces. Discrete Math, 2003, 269: 181-190

[54] Liu W J, Zhou S L. Li H. L, Fang X G. Finite linear spaces admitting a Ree simple group. Europ J Combin, 2004, 25: 311-325

[55] Carter R W. Simple Groups of Lie Type. Wiley Calssics Library Edition, J Wiley, New York, 1989,

[56] Block R E. On the orbits of collineation groups. Math Z, 1967, 96: 33 -49.

[57] Higman D G, Mclaughlin J E. Geometric ABA-groups. Illinois J Math, 1961, 38 (5): 2- 397.

[58] Beth Th, Jungnickel D, Lenz H. Design Theory. Cambridge: Cambiridge Univ Press, 1999.

[59] Cameron P J. Finite permutation groups and finite simple groups. Bull London Math, 1981, 13: 1-22.

[60] Huber M. A sensus of highly symmetric combinatoricdesigns. J Algbr Comb, 2007, 26: 453-476.

[61] Alltop W O. 5-designs in affine spaces. Pac J Math, 1971, 39: 547-551.

[62] Dembowski P. Finite Geometries. New York: Springer,1997.

[63] Colburn C J and Dinitz J H. The CRC Handbook of Combinatorial Designs. CRC Press, Boca Raton, FE, 1996.

[64] Davies H. Flag-transitivity and primitivity. Discrete Math, 1987, 63:91-93.

[65] Seitz G M. Flag-tansitive subgroups of Chevalley group. Ann Math, 1973,97(1):27-56.

[66] Liebeck M W, Saxl J and Seitz G M. On the overgroups of irreducible subgroups of the finite classical group. Proc Lond Math Soc, 1987, 55: 507-537.

[67] Aschbacher M. On the maximal subgroups of the finite classical groups. Invent Math, 19847, 6: 469-514.

[68] Liebeck M W. On the orders of maximal subgroups of the finite classical groups. Proc Lond Math, 1985, 50: 426-424.

[69] Kleidman P B. The subgroup structrue of some finit simple groups. PhD thesis, University of Cambridge, 1987.

[70] Liebeck M W, Saxl J. On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type. Proc Lond Math Soc, 1987, 55: 299-330.

[71] Liebeck M W, Saxl J. The primitive permutation groups of odd order. J London Math Soc, 1995, 31(2): 550-264.

[72] Kantor W. Classfication of 2-transitive symmetrical designs. Graphs Comb, 1985, 1: 165-166.

[73] Kleidman P B, Liebeck M W. The subgroup structure of the finite classical groups. London math soc lecture note series, Vol. 129. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

[74] Liebeck M W, Praeger C E, and Saxl J. On the 2-closures of finite permutation group. J London Math Soc, 1988, 37: 241-252.

[75] Praeger C E. The flag-transitive symmetric designs with 45 points, blocks of size 12 and 3 blocks on every point pair (in press).

[76] Kleidman P B. The maximal subgroups of the finite 8-dimensional orthogonal groups and of their automorphism groups. J Algebra, 1987, 110: 172-242.

[77] Huppert B. Endliche Gruppen. Berlin: Springer. 1967.

[78] Block R E. On the orbits of collineation groups. Math Z, 1967, 96(1): 33-49.

[79] Buekout F, Delandstheer A, Doyen J. Finite linear spaces with flag-transitive groups. J Combin Theory Ser A, 1988, 49(1): 268-293.

[80] Spiezie F. Simple groups and automorphisms of linear spaces. Ph D thesis, University of East Anglia, 1997.

[81] Guralnick R M, Muller P, Saxl J. The Rational Function Analogue of a Question of Schur and Exceptionality of Permutation Representations. Memoirs of the American Mathematical Society, 2003, 162, No:773.

[82] Kleidman P B. The Maximal subgroups of the steinberg triality groups ${}^3D_4(q)$ and of their automorphism groups. J Algebra, 1988, 115(1): 182-199.

[83] Zhou S L, Li H L and Liu W J. The Ree Groups ${}^2G_2(q)$ and 2-$(v,k,1)$ Block Designs. Discrete Mathematics, 2000, 224: 251-258.

[84] Liu W J, Li H L and Ma C G. Suzuki Groups $Sz(q)$ and 2-$(v,k,1)$ designs. Europ J Combin, 2001, 22(3): 513-519.

[85] Liu W J. The Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd and 2-$(v,k,1)$ designs. European J Combin, 2003, 24(2): 331-346.

[86] Liu W J, Li S Z, Gong L Z. Almost simple groups with socle Ree(q) acting on finite linear spaces. Europ J Combin, 2006, 27(6): 788-800.

[87] Liebeck M, Saxl J. On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type. Proc London Math Soc, 1987, 55: 299-330.

[88] Gill N. Line-transitive linear spaces. Ph D Thesis, University of Cambridge, 2005.

[89] Rimhak Ree. Classification of involutions and centralizers of involutions in certain simple groups. Proc Internat Conf Theory of Groups, Austral. Nat. Univ. Canberra, 1965, 218-301.

[90] Aschbcher M, Steitz G M. Involutions in chevalley groups over fields of even order. Nagoya Math J, 1976, 63:1-391.

[91] Cusack C A, Graham S W, Kreher D L. Large sets of 3-designs from $PSL(2,q)$ with block sizes 4 and 5. J Combin Des, 1995, 3(2) :147-160.

[92] Dickson L E. Linear Groups with an Introduction to the Galois Field Theory. Dover Publications, NewYork, 1958.

[93] Beth T, Jungnickel D, Lenz H. Design Theory. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1993.

[94] Hughes D R. On t-designs and groups. Amer J Math, 1965, 87: 761-778.

[95] Kreher D L. t-Designs,$t \geq 3$, in: C.J. Colbourn, J.H. Dinitz (Eds.), The CRC Handbook of Combinatorial Designs, CRC Press Series on Discrete Mathematics and its Applications, CRC Press, Boca Raton, 1996: 47-66.

[96] Laue R, Magliveras S S, Wassermann A. New large sets of t-designs. J Combin Des, 2001, 9(1): 40-59.

[97] Li W X and Shen H. 3-Designs of $PSL(2,2^n)$ with block size 6. Discrete Math 2008, 308: 3061-3071.

[98] Iwasaki S. Infnite families of 2- and 3-designs with parameters $v = p + 1, k = (p-1)/2^i + 1$ where p odd prime, $2^e \top (p-1), e \geq 2, 1 \leq i \leq 2$. J Combin Des, 1997, 5(2) : 95-110.

[99] Omidi G R, Pournaki M R and Tayfeh-Rezaie B. 3-Designs with block size 6 from $PSL(2,q)$ and their large sets. Discrete Math 2007, 307: 1580-1588.

致谢

回顾我攻读博士学位的三年多时间,我首先要衷心感谢我的导师刘伟俊教授.我的硕士阶段的学习也是在刘老师的指导下完成的,刘老师严谨的治学态度, 敏锐的学术思想,精深的学术造诣,渊博的知识体系以及诲人不倦的工作作风, 使我获益匪浅,在我的工作和学习中给了我许多的启迪和帮助.在我的博士论文选题和撰写过程中, 刘老师不仅给予了我方向性指引,而且给予了许多具体的知识性指导, 使我能够顺利的完成博士学位论文的撰写工作.我这几年来的取得的每一点进步都是与刘老师的关心与指导分不开的. 师恩似海终身难忘.

我要感谢我的同学代少军,张浩敏,在硕士和博士的六年同学期间,我们建立了深厚的友谊. 特别是在我在职攻读博士学位期间,是他们帮助我解决了许多学习和生活上的困难,使我在这三年中能够做到学习和工作两不误. 感谢我的师兄谭琼华副教授,他在学习和生活上给了我许多的鼓励和帮助. 感谢我的母亲,兄弟姊妹,他们殷切的期望始终是我前进的动力. 特别是我的岳父母,在我的硕士和博士阶段的求学期间,一直都是我精神和物质的资助者.这样才使我能够顺利完成学业.

最后,我要特别感谢我的妻子曾玲玲女士.在我的硕博两个阶段的求学期间,她一直都是我坚定的支持者.她承担了一切家务和培养教育孩子的责任, 在生活上给了我无微不至的照顾,让我们能够经受住共同的磨难,实现共同的目标.

有两样东西，愈是经常和持久地思考它们，对它们日久弥新和不断增长之魅力以及崇敬之情就愈加充实着心灵：我头顶的星空，和我心中的道德律.

—康德

龚罗中

2010年06月

攻读学位期间主要的研究成果

1. Luozhong Gong and Weijun Liu. Simple 3-desidns of $PSL(2,q)$ with block size 7[J]. ARS. Comb. 2010,95:289-296. (SCI检索)

2. 龚罗中,刘伟俊,代少军.作用在有限线性空间上基柱为$F_4(q)$ 的几乎单群[J]. 数学学报.2010, 53(2):341-348.

3. 刘伟俊,龚罗中.旗传递5-$(v,k,2)$设计[J]. 江苏大学学报. (已经录用)

4. Gong Luozhong, Zhou Xuegan, Liu Weijun and Wu Kun. First-order optimality conditions for fuzzy number quadratic programming with fuzzy coefficients, Fuzzy systems and knowledge discovery, Vol.4, Tianjing, China,14-16 August 2009 286-290.(EI检索)

5. 龚罗中,刘伟俊. 2-$(v,p,1)$设计的可解区传递自同构群[J]. 浙江大学学报(理学版), 2009,36(2): 128-131.

6. 龚罗中,刘伟俊,谭琼华.典型单群与非可解区传递2-$(v,7,1)$ 设计. 浙江大学学报(理学版), 2009,36(5): 487-492.

7. 龚罗中,唐海华. 旗传递$(v,k,3)$对称设计的自同构群与它们的抛物子群[J]. 湖南科技学院学报学,2009(4) :5-8.

8. 龚罗中,刘伟俊,谭琼华.有限线性空间的线传递自同构群[J]. 广西师范大学学报,2008，26(3): 21-25.

9. 龚罗中,苏星. $(v,k,3)$对称设计的旗传递本原自同构群[J]. 湖南科技学院学报学,2008(4) :1-3.

10. 龚罗中,曹国平.非可解区传递2-$(v,11,1)$ 设计[J]. 湖南科技学院学报学,2007(7) :5-6.

11. Liu Weijun, Li Shangzhao and Gong Luozhong. Almost simple groups with socle Ree(q) acting on finite linear spaces, European J. Combin,2006,27(6):788-799.(SCI检索)

12. Liu Weijun, Dai Shaojun and Gong Luozhong.Almost simple groups with socle $^3D_4(q)$ act on finite linear spaces. Science in China Ser A, 2006, 49(12):1768-1776.(SCI检索)