目　录

第一部分　函数图象中点的存在性问题

版 权 声 明

选自东师范大学出版社出版的《挑战中考数学压轴题》（含光盘）一书。该书收录当年全国各地具有代表性的中考数学压轴题，并把它们分为 4 部分、24 小类。该书最大的特色是用几何画板和超级画板做成电脑课件，并为每一题录制了视频讲解，让你在动态中体验压轴题的变与不变，获得清晰的解题思路，完成满分解答，拓展思维训练。

《挑战中考数学压轴题》自出版以来广受读者欢迎，被评为优秀畅销图书。在上海、北京、江苏、浙江等省市的名牌初中的毕业班学生中，几乎人手一本，成为冲刺名牌高中必备用书。

由于格式问题，该书最具特色的电脑课件和视频文件在此无法一并附上，敬请原谅。

第一部分　函数图象中点的存在性问题

1.1　因动点产生的相似三角形问题

例 1　20XX 年上海市闸北区中考模拟第 25 题

直线 $y=-\frac{1}{3}x+1$ 分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点，△AOB 绕点 O 按逆时针方向旋转 90°后得到△COD，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A、C、D 三点.

(1) 写出点 A、B、C、D 的坐标；

(2) 求经过 A、C、D 三点的抛物线表达式，并求抛物线顶点 G 的坐标；

(3) 在直线 BG 上是否存在点 Q，使得以点 A、B、Q 为顶点的三角形与△COD 相似？若存在，请求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

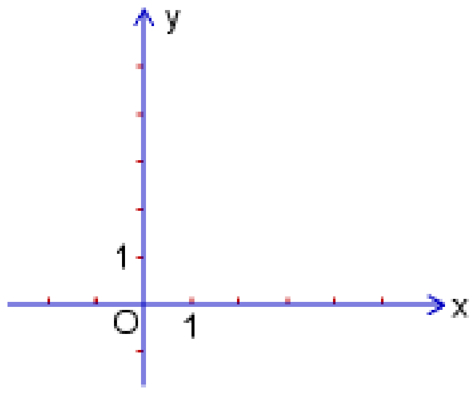


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名"11 闸北 25"， 拖动点 Q 在直线 BG 上运动， 可以体验到，△ABQ 的两条直角边的比为 1∶3 共有四种情况，点 B 上、下各有两种.

思路点拨

1．图形在旋转过程中，对应线段相等，对应角相等，对应线段的夹角等于旋转角.

2．用待定系数法求抛物线的解析式，用配方法求顶点坐标.

3．第（3）题判断∠ABQ＝90°是解题的前提.

4．△ABQ 与△COD 相似，按照直角边的比分两种情况，每种情况又按照点 Q 与点 B 的位置关系分上下两种情形，点 Q 共有 4 个.

满分解答

（1）$A(3，0)$，$B(0，1)$，$C(0，3)$，$D(-1，0)$.

（2）因为抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 $A(3，0)$、$C(0，3)$、$D(-1，0)$ 三点，所以

$$\begin{cases}9a+3b+c=0,\\c=3,\\a-b+c=0.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=-1,\\b=2,\\c=3.\end{cases}$$

所以抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，顶点 G 的坐标为$(1，4)$.

（3）如图 2，直线 BG 的解析式为 $y=3x+1$，直线 CD 的解析式为 $y=3x+3$，因此 $CD//BG$.

因为图形在旋转过程中，对应线段的夹角等于旋转角，所以 $AB\perp CD$．因此 $AB\perp BG$，即∠ABQ＝90°.

因为点 Q 在直线 BG 上，设点 Q 的坐标为$(x，3x+1)$，那么 $BQ=\sqrt{x^2+(3x)^2}=\pm\sqrt{10}x$.

Rt△COD 的两条直角边的比为 1∶3，如果 Rt△ABQ 与 Rt△COD 相似，存在两种情况：

①当$\frac{BQ}{BA}=3$时，$\frac{\pm\sqrt{10}x}{\sqrt{10}}=3$．解得$x=\pm3$．所以$Q_1(3,10)$，$Q_2(-3,-8)$．

②当$\frac{BQ}{BA}=\frac{1}{3}$时，$\frac{\pm\sqrt{10}x}{\sqrt{10}}=\frac{1}{3}$．解得$x=\pm\frac{1}{3}$．所以$Q_3(\frac{1}{3},2)$，$Q_4(-\frac{1}{3},0)$．

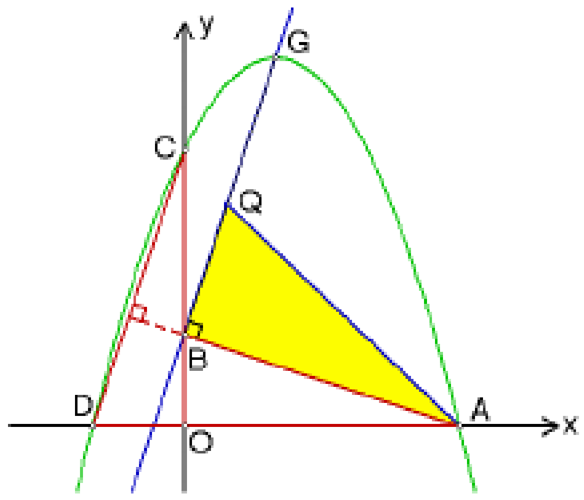


图 2

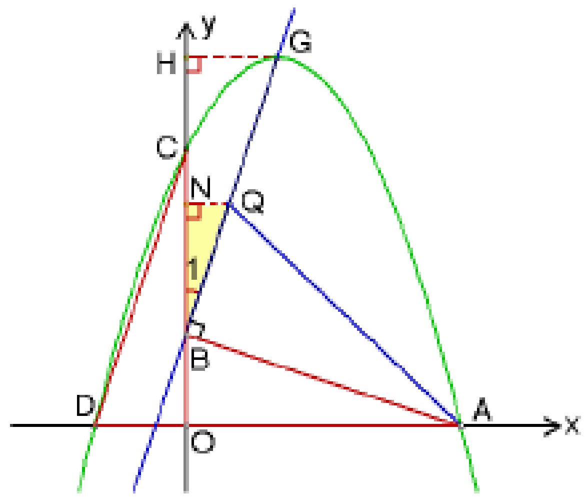


图 3

考点伸展

第（3）题在解答过程中运用了两个高难度动作：一是用旋转的性质说明 $AB\perp BG$；二是$BQ=\sqrt{x^2+(3x)^2}=\pm\sqrt{10}x$．

我们换个思路解答第（3）题：

如图 3，作 $GH\perp y$ 轴，$QN\perp y$ 轴，垂足分别为 H、N.

通过证明$\triangle AOB\cong\triangle BHG$，根据全等三角形的对应角相等，可以证明$\angle ABG=90°$．

在 Rt$\triangle BGH$ 中，$\sin\angle1=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\angle1=\frac{3}{\sqrt{10}}$．

①当$\frac{BQ}{BA}=3$时，$BQ=3\sqrt{10}$．

在 Rt$\triangle BQN$ 中，$QN=BQ\cdot\sin\angle1=3$，$BN=BQ\cdot\cos\angle1=9$．

当 Q 在 B 上方时，$Q_1(3,10)$；当 Q 在 B 下方时，$Q_2(-3,-8)$．

②当$\frac{BQ}{BA}=\frac{1}{3}$时，$BQ=\frac{1}{3}\sqrt{10}$．同理得到$Q_3(\frac{1}{3},2)$，$Q_4(-\frac{1}{3},0)$．

例 2　20XX 年上海市杨浦区中考模拟第 24 题

Rt△*ABC* 在直角坐标系内的位置如图 1 所示，反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 在第一象限内的图像与 *BC* 边交于点 *D*（4，*m*），与 *AB* 边交于点 *E*（2，*n*），△*BDE* 的面积为 2．

（1）求 *m* 与 *n* 的数量关系；

（2）当 $\tan\angle A=\frac{1}{2}$ 时，求反比例函数的解析式和直线 *AB* 的表达式；

（3）设直线 *AB* 与 *y* 轴交于点 *F*，点 *P* 在射线 *FD* 上，在（2）的条件下，如果△*AEO* 与△*EFP* 相似，求点 *P* 的坐标．

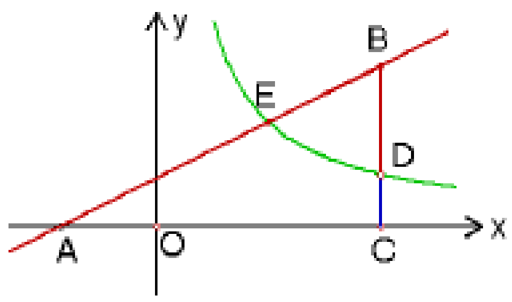


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“11 杨浦 24”，拖动点 *A* 在 *x* 轴上运动，可以体验到，直线 *AB* 保持斜率不变，*n* 始终等于 *m* 的 2 倍，双击按钮“面积 *BDE*＝2”，可以看到，点 *E* 正好在 *BD* 的垂直平分线上，*FD*//*x* 轴．拖动点 *P* 在射线 *FD* 上运动，可以体验到，△*AEO* 与△*EFP* 相似存在两种情况．

思路点拨

1．探求 *m* 与 *n* 的数量关系，用 *m* 表示点 *B*、*D*、*E* 的坐标，是解题的突破口．

2．第（2）题留给第（3）题的隐含条件是 *FD*//*x* 轴．

3．如果△*AEO* 与△*EFP* 相似，因为夹角相等，根据对应边成比例，分两种情况．

满分解答

（1）如图 1，因为点 *D*（4，*m*）、*E*（2，*n*）在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上，所以 $\begin{cases}4m=k,\\2n=k.\end{cases}$

整理，得 *n*＝2*m*．

（2）如图 2，过点 *E* 作 *EH*⊥*BC*，垂足为 *H*．在 Rt△*BEH* 中，tan∠*BEH*＝tan∠*A*＝$\frac{1}{2}$，*EH*＝2，所以 *BH*＝1．因此 *D*(4，*m*)，*E*(2，2*m*)，*B*(4，2*m*＋1)．

已知△*BDE* 的面积为 2，所以 $\frac{1}{2}BD\cdot EH=\frac{1}{2}(m+1)\times 2=2$．解得 *m*＝1．因此 *D*(4，1)，*E*(2，2)，*B*(4，3)．

因为点 *D*（4，1）在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上，所以 *k*＝4．因此反比例函数的解析式为 $y=\frac{4}{x}$．

设直线 *AB* 的解析式为 *y*＝*kx*＋*b*，代入 *B*(4，3)、*E*(2，2)，得 $\begin{cases}3=4k+b,\\2=2k+b.\end{cases}$ 解得 $k=\frac{1}{2}$，$b=1$．

因此直线 *AB* 的函数解析式为 $y=\frac{1}{2}x+1$．

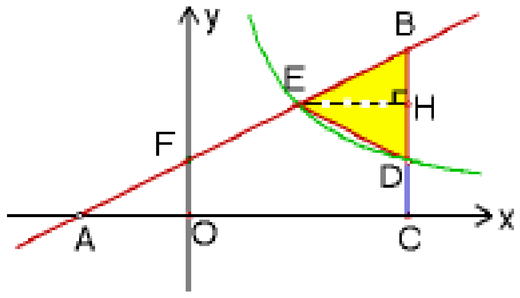


图 2

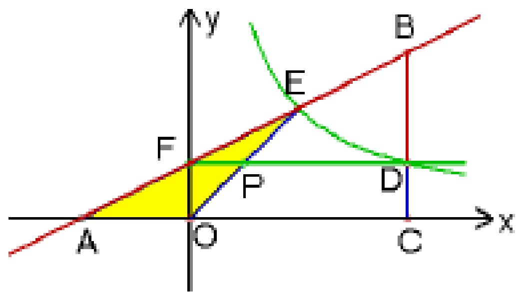


图 3

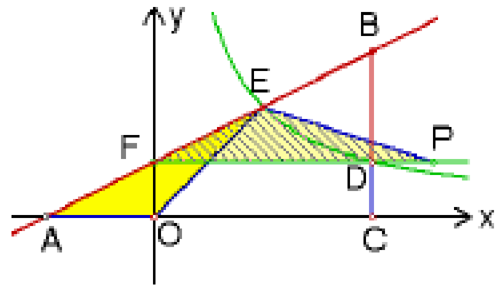


图 4

（3）如图 3，因为直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 与 y 轴交于点 F（0，1），点 D 的坐标为（4，1），所以 $FD//x$ 轴，$\angle EFP=\angle EAO$．因此$\triangle AEO$ 与$\triangle EFP$ 相似存在两种情况：

①如图 3，当 $\frac{EA}{AO}=\frac{EF}{FP}$ 时，$\frac{2\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{FP}$．解得 FP＝1．此时点 P 的坐标为（1，1）．

②如图 4，当 $\frac{EA}{AO}=\frac{FP}{EF}$ 时，$\frac{2\sqrt{5}}{2}=\frac{FP}{\sqrt{5}}$．解得 FP＝5．此时点 P 的坐标为（5，1）．

考点伸展

本题的题设部分有条件“Rt$\triangle ABC$ 在直角坐标系内的位置如图 1 所示”，如果没有这个条件限制，保持其他条件不变，那么还有如图 5 的情况：

第（1）题的结论 m 与 n 的数量关系不变．第（2）题反比例函数的解析式为 $y=-\frac{12}{x}$，直线 AB 为 $y=\frac{1}{2}x-7$．第（3）题 FD 不再与 x 轴平行，$\triangle AEO$ 与$\triangle EFP$ 也不可能相似．

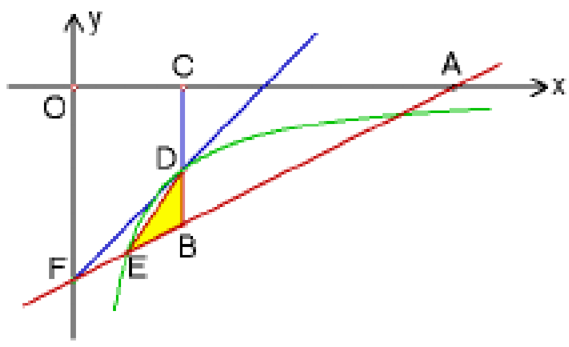


图 5

例 3　20XX 年义乌市中考第 24 题

如图 1，已知梯形 $OABC$，抛物线分别过点 O（0，0）、A（2，0）、B（6，3）.

（1）直接写出抛物线的对称轴、解析式及顶点 M 的坐标；

（2）将图 1 中梯形 $OABC$ 的上下底边所在的直线 OA、CB 以相同的速度同时向上平移，分别交抛物线于点 O_1、A_1、C_1、B_1，得到如图 2 的梯形 $O_1A_1B_1C_1$．设梯形 $O_1A_1B_1C_1$ 的面积为 S，A_1、 B_1 的坐标分别为 $(x_1，y_1)$、$(x_2，y_2)$．用含 S 的代数式表示 x_2-x_1，并求出当 $S=36$ 时点 A_1 的坐标；

（3）在图 1 中，设点 D 的坐标为(1，3)，动点 P 从点 B 出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿着线段 BC 运动，动点 Q 从点 D 出发，以与点 P 相同的速度沿着线段 DM 运动．P、Q 两点同时出发，当点 Q 到达点 M 时，P、Q 两点同时停止运动．设 P、Q 两点的运动时间为 t，是否存在某一时刻 t，使得直线 PQ、直线 AB、x 轴围成的三角形与直线 PQ、直线 AB、抛物线的对称轴围成的三角形相似？若存在，请求出 t 的值；若不存在，请说明理由．

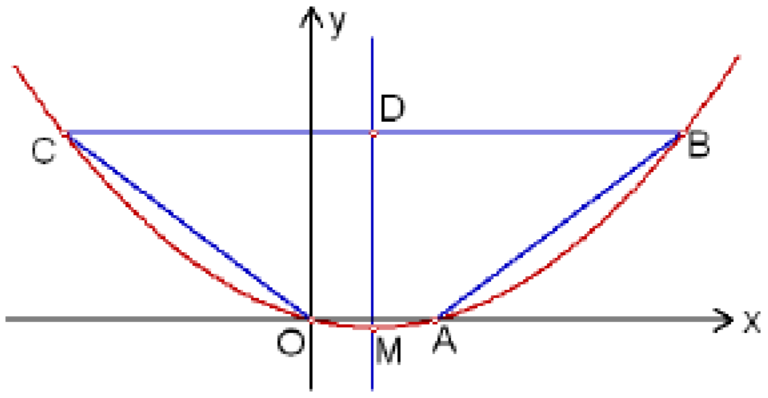


图 1

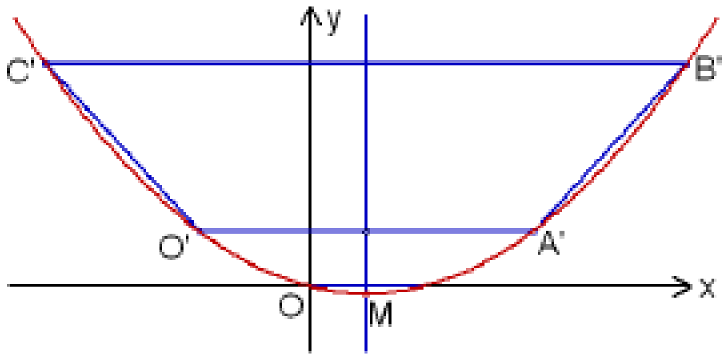


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“10 义乌 24”，拖动点 I 上下运动，观察图形和图像，可以体验到，x_2-x_1 随 S 的增大而减小．双击按钮“第（3）题”，拖动点 Q 在 DM 上运动，可以体验到，如果∠GAF＝∠GQE，那么△GAF 与△GQE 相似．

思路点拨

1．第（2）题用含 S 的代数式表示 x_2-x_1，我们反其道而行之，用 x_1，x_2 表示 S．再注意平移过程中梯形的高保持不变，即 $y_2-y_1=3$．通过代数变形就可以了．

2．第（3）题最大的障碍在于画示意图，在没有计算结果的情况下，无法画出准确的位置关系，因此本题的策略是先假设，再说理计算，后验证．

3．第（3）题的示意图，不变的关系是：直线 AB 与 x 轴的夹角不变，直线 AB 与抛物线的对称轴的夹角不变．变化的直线 PQ 的斜率，因此假设直线 PQ 与 AB 的交点 G 在 x 轴的下方，或者假设交点 G 在 x 轴的上方．

满分解答

（1）抛物线的对称轴为直线 $x=1$，解析式为 $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x$，顶点为 M（1，$-\frac{1}{8}$）．

（2） 梯形 $O_1A_1B_1C_1$ 的面积 $S=\frac{2(x_1-1+x_2-1)\times 3}{2}=3(x_1+x_2)-6$，由此得到 $x_1+x_2=\frac{s}{3}+2$．由于 $y_2-y_1=3$，所以 $y_2-y_1=\frac{1}{8}x_2^2-\frac{1}{4}x_2-\frac{1}{8}x_1^2+\frac{1}{4}x_1=3$．整理，得 $(x_2-x_1)\left[\frac{1}{8}(x_2+x_1)-\frac{1}{4}\right]=3$．因此得到 $x_2-x_1=\frac{72}{S}$．

当 $S=36$ 时，$\begin{cases}x_2+x_1=14,\\x_2-x_1=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=6,\\x_2=8.\end{cases}$ 此时点 A_1 的坐标为（6，3）．

（3）设直线 AB 与 PQ 交于点 G，直线 AB 与抛物线的对称轴交于点 E，直线 PQ 与 x

轴交于点 F，那么要探求相似的△GAF 与△GQE，有一个公共角∠G．

在△GEQ 中，∠GEQ 是直线 AB 与抛物线对称轴的夹角，为定值．

在△GAF 中，∠GAF 是直线 AB 与 x 轴的夹角，也为定值，而且∠GEQ≠∠GAF．

因此只存在∠GQE=∠GAF 的可能，△GQE∽△GAF．这时∠GAF=∠GQE=∠PQD．

由于 $\tan\angle GAF=\dfrac{3}{4}$， $\tan\angle PQD=\dfrac{DQ}{QP}=\dfrac{t}{5-t}$，所以 $\dfrac{3}{4}=\dfrac{t}{5-t}$．解得 $t=\dfrac{20}{7}$．

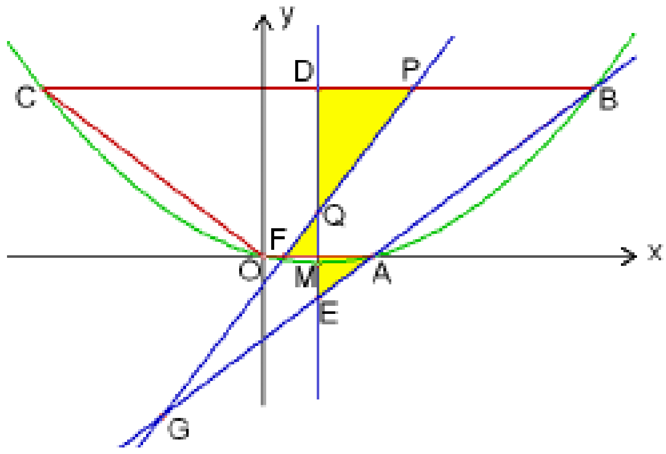


图 3

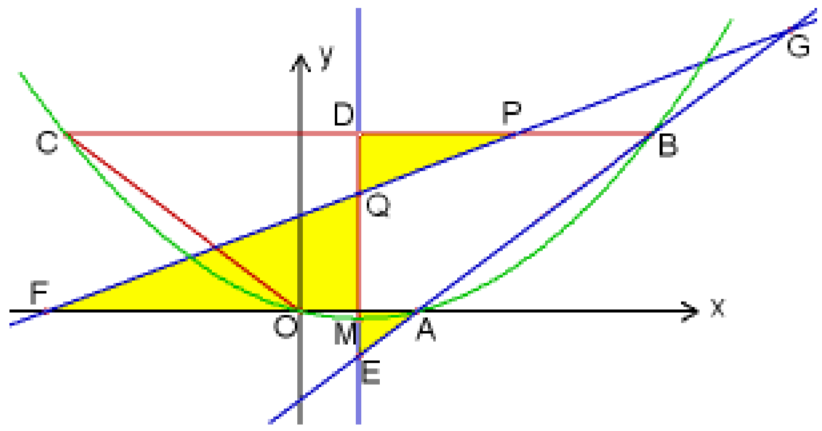


图 4

考点伸展

第（3）题是否存在点 G 在 x 轴上方的情况？如图 4，假如存在，说理过程相同，求得的 t 的值也是相同的．事实上，图 3 和图 4 都是假设存在的示意图，实际的图形更接近图 3．

例 4　20XX 年上海市宝山区中考模拟第 24 题

如图 1，已知点 A (−2，4) 和点 B (1，0)都在抛物线 $y = mx^2 + 2mx + n$ 上．

（1）求 m、n；

（2）向右平移上述抛物线，记平移后点 A 的对应点为 A'，点 B 的对应点为 B'，若四边形 $A\,A'B'B$ 为菱形，求平移后抛物线的表达式；

（3）记平移后抛物线的对称轴与直线 AB' 的交点为 C，试在 x 轴上找一个点 D，使得以点 B'、C、D 为顶点的三角形与△ABC 相似．

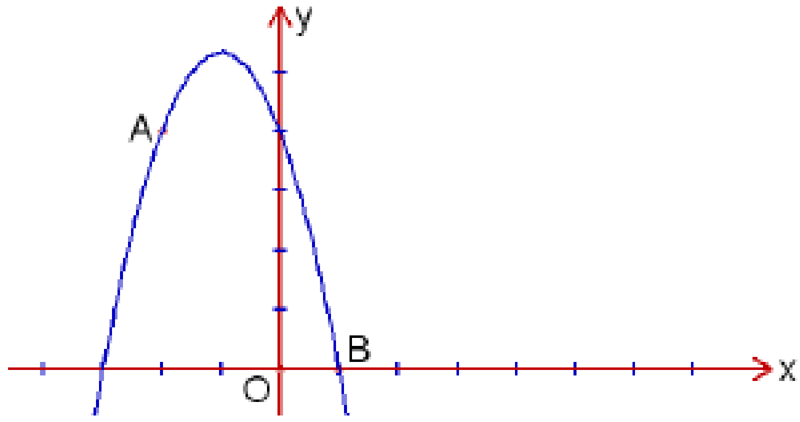


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“10 宝山 24”，拖动点 A'向右平移，可以体验到，平移 5 个单位后，四边形 $A\ A'B'B$ 为菱形．再拖动点 D 在 x 轴上运动，可以体验到，△$B'CD$ 与△ABC 相似有两种情况．

思路点拨

1．点 A 与点 B 的坐标在 3 个题目中处处用到，各具特色．第（1）题用在待定系数法中；第（2）题用来计算平移的距离；第（3）题用来求点 B′ 的坐标、AC 和 B′C 的长．

2．抛物线左右平移，变化的是对称轴，开口和形状都不变．

3．探求△ABC 与△$B'CD$ 相似，根据菱形的性质，∠BAC＝∠$CB'D$，因此按照夹角的两边对应成比例，分两种情况讨论．

满分解答

(1) 因为点 A (−2，4) 和点 B (1，0)都在抛物线 $y = mx^2 + 2mx + n$ 上，所以 $\begin{cases} 4m - 4m + n = 4, \\ m + 2m + n = 0. \end{cases}$ 解得 $m = -\dfrac{4}{3}$，$n = 4$．

(2)如图 2，由点 A (−2，4) 和点 B (1，0)，可得 AB＝5．因为四边形 $A\,A'B'B$ 为菱形，所以 $A\ A'$＝$B'B$＝ AB＝5．因为 $y = -\dfrac{4}{3}x^2 - \dfrac{8}{3}x + 4 = -\dfrac{4}{3}(x+1)^2 + \dfrac{16}{3}$，所以原抛物线的对称轴 x＝－1 向右平移 5 个单位后，对应的直线为 x＝4．

因此平移后的抛物线的解析式为 $y' = -\dfrac{4}{3}(x-4)^2 + \dfrac{16}{3}$．

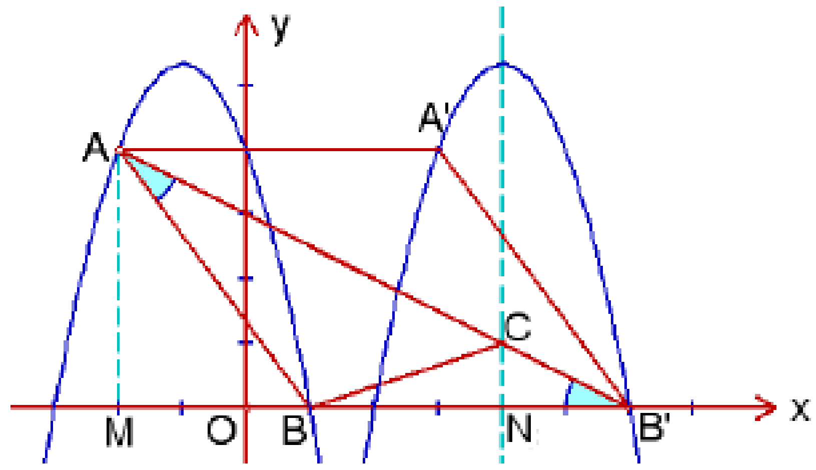


图 2

(3) 由点 $A(-2,4)$ 和点 $B'(6,0)$，可得 $AB'=4\sqrt{5}$.

如图 2，由 $AM//CN$，可得 $\dfrac{B'N}{B'M}=\dfrac{B'C}{B'A}$，即 $\dfrac{2}{8}=\dfrac{B'C}{4\sqrt{5}}$. 解得 $B'C=\sqrt{5}$. 所以 $AC=3\sqrt{5}$. 根据菱形的性质，在△ABC 与△$B'CD$ 中，∠BAC=∠$CB'D$.

①如图 3，当 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{B'C}{B'D}$ 时，$\dfrac{5}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{B'D}$，解得 $B'D=3$. 此时 $OD=3$，点 D 的坐标为（3，0）.

②如图 4，当 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{B'D}{B'C}$ 时，$\dfrac{5}{3\sqrt{5}}=\dfrac{B'D}{\sqrt{5}}$，解得 $B'D=\dfrac{5}{3}$. 此时 $OD=\dfrac{13}{3}$，点 D 的坐标为（$\dfrac{13}{3}$，0）.

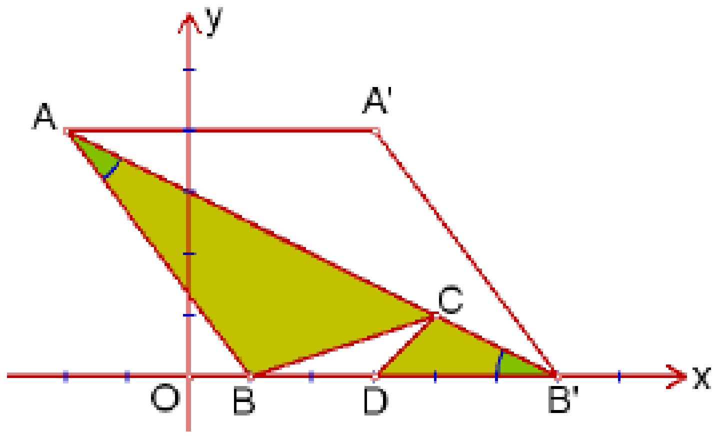


图 3

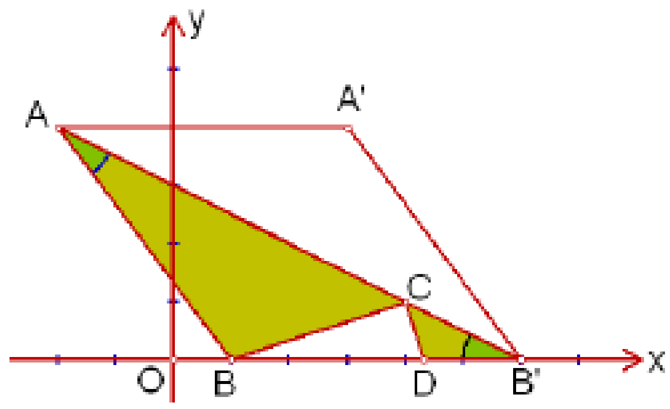


图 4

考点伸展

在本题情境下，我们还可以探求△$B'CD$ 与△$AB\,B'$相似，其实这是有公共底角的两个等腰三角形，容易想象，存在两种情况.

我们也可以讨论△$B'CD$ 与△$CB\,B'$相似，这两个三角形有一组公共角∠B，根据对应边成比例，分两种情况计算.

例 5　20XX 年临沂市中考第 26 题

如图 1，抛物线经过点 $A(4，0)$、$B（1，0)$、$C（0，-2）$三点．

（1）求此抛物线的解析式；

（2）P 是抛物线上的一个动点，过 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M，是否存在点 P，使得以 A、P、M 为顶点的三角形与△OAC 相似？若存在，请求出符合条件的 点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）在直线 AC 上方的抛物线是有一点 D，使得△DCA 的面积最大，求出点 D 的坐标．

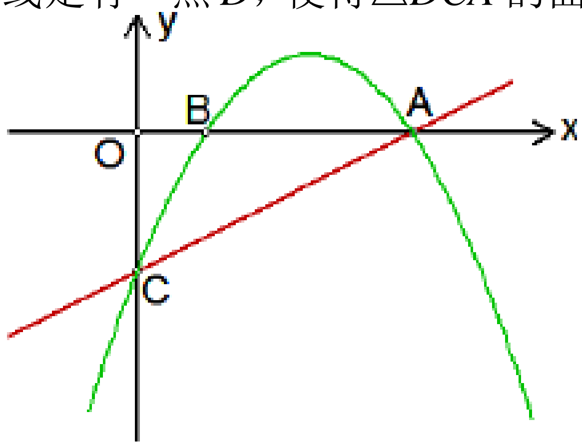


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“09 临沂 26”，拖动点 P 在抛物线上运动，可以体验到，△PAM 的形状在变化，分别双击按钮“P 在 B 左侧”、“ P 在 x 轴上方” 和 “P 在 A 右侧”，可以显示△PAM 与△OAC 相似的三个情景．

双击按钮“第(3)题”， 拖动点 D 在 x 轴上方的抛物线上运动，观察△DCA 的形状和面积随 D 变化的图象，可以体验到，E 是 AC 的中点时，△DCA 的面积最大．

思路点拨

1．已知抛物线与 x 轴的两个交点，用待定系数法求解析式时，设交点式比较简便．
2．数形结合，用解析式表示图象上点的坐标，用点的坐标表示线段的长．
3．按照两条直角边对应成比例，分两种情况列方程．
4．把△DCA 可以分割为共底的两个三角形，高的和等于 OA．

满分解答

（1）因为抛物线与　x　轴交于　$A(4，0)$、$B（1，0)$两点，设抛物线的解析式为 $y=a(x-1)(x-4)$，代入点 C 的 坐标（0，－2)，解得 $a=-\frac{1}{2}$．所以抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-2$．

（2）设点 P 的坐标为 $(x,-\frac{1}{2}(x-1)(x-4))$．

①如图 2，当点 P 在 x 轴上方时，$1<x<4$，$PM=-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$，$AM=4-x$．

如果 $\frac{AM}{PM}=\frac{AO}{CO}=2$，那么 $\frac{-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{4-x}=2$．解得 $x=5$ 不合题意．

如果 $\frac{AM}{PM}=\frac{AO}{CO}=\frac{1}{2}$，那么 $\frac{-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{4-x}=\frac{1}{2}$．解得 $x=2$．

此时点 P 的坐标为（2，1)．

②如图 3，当点 P 在点 A 的右侧时，$x>4$，$PM=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$，$AM=x-4$．

解方程 $\dfrac{\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{x-4}=2$，得 $x=5$．此时点 P 的坐标为 $(5,-2)$．

解方程 $\dfrac{\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{x-4}=\frac{1}{2}$，得 $x=2$ 不合题意．

③如图 4，当点 P 在点 B 的左侧时，$x<1$，$PM=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$，$AM=4-x$．

解方程 $\dfrac{\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{4-x}=2$，得 $x=-3$．此时点 P 的坐标为 $(-3,-14)$．

解方程 $\dfrac{\frac{1}{2}(x-1)(x-4)}{4-x}=\frac{1}{2}$，得 $x=0$．此时点 P 与点 O 重合，不合题意．

综上所述，符合条件的 点 P 的坐标为（2，1）或 $(-3,-14)$ 或 $(5,-2)$．

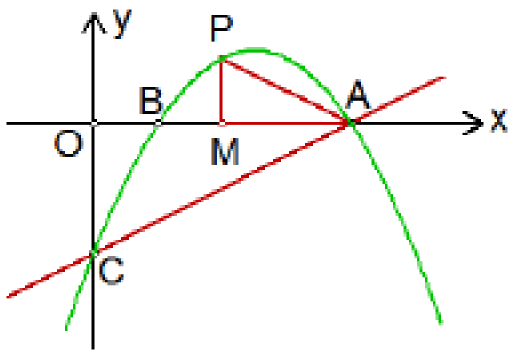


图 2

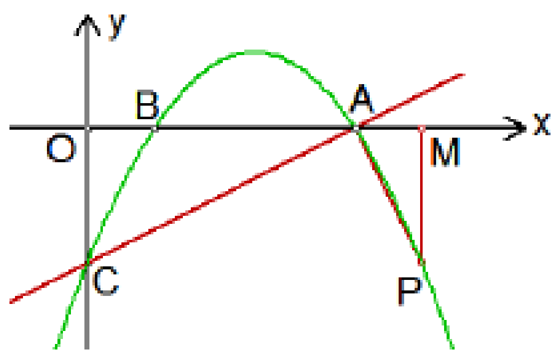


图 3

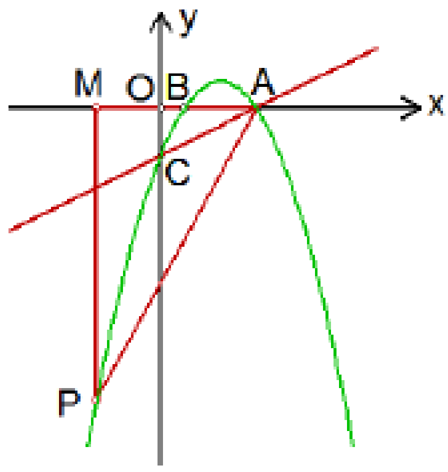


图 4

（3）如图 5，过点 D 作 x 轴的垂线交 AC 于 E．直线 AC 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-2$．

设点 D 的横坐标为 $m\,(1<m<4)$，那么点 D 的坐标为 $(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m-2)$，点 E 的坐标为 $(m,\frac{1}{2}m-2)$．所以 $DE=(-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m-2)-(\frac{1}{2}m-2)=-\frac{1}{2}m^2+2m$．

因此 $S_{\Delta DAC}=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}m^2+2m)\times 4=-m^2+4m=-(m-2)^2+4$．

当 $m=2$ 时，$\triangle DCA$ 的面积最大，此时点 D 的坐标为（2，1）．

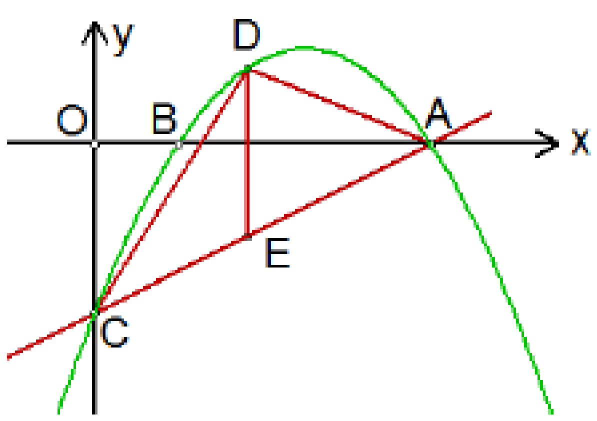


图 5

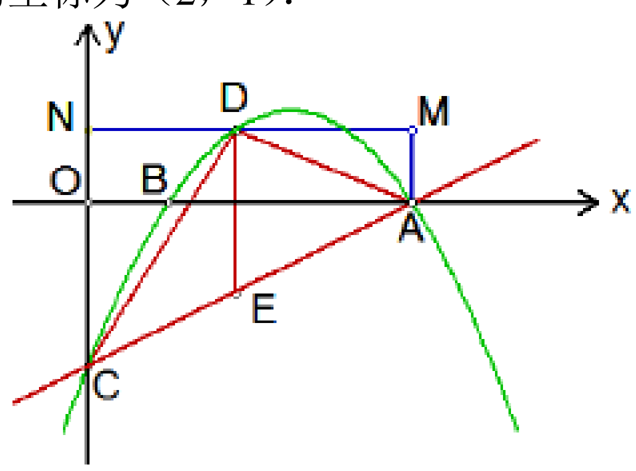


图 6

考点伸展

第（3）题也可以这样解：

如图 6，过 *D* 点构造矩形 *OAMN*，那么△*DCA* 的面积等于直角梯形 *CAMN* 的面积减去△*CDN* 和△*ADM* 的面积.

设点 *D* 的横坐标为（*m*，*n*）$(1 < m < 4)$，那么

$$S = \frac{1}{2}(2n+2)\times 4 - \frac{1}{2}m(n+2) - \frac{1}{2}n(4-m) = -m + 2n + 4 .$$

由于 $n = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{5}{2}m - 2$，所以 $S = -m^2 + 4m$.

例 6　20XX 年上海市闸北区中考模拟第 25 题

如图 1，△*ABC* 中，*AB*＝5，*AC*＝3，cos*A*＝$\dfrac{3}{10}$．*D* 为射线 *BA* 上的点（点 *D* 不与点 *B* 重合），作 *DE*//*BC* 交射线 *CA* 于点 *E*..

(1) 若 *CE*＝*x*，*BD*＝*y*，求 *y* 与 *x* 的函数关系式，并写出函数的定义域；

(2) 当分别以线段 *BD*，*CE* 为直径的两圆相切时，求 *DE* 的长度；

(3) 当点 *D* 在 AB 边上时，*BC* 边上是否存在点 *F*，使△*ABC* 与△*DEF* 相似？若存在，请求出线段 *BF* 的长；若不存在，请说明理由．

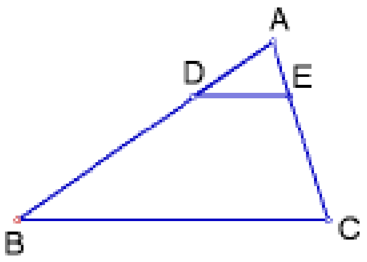
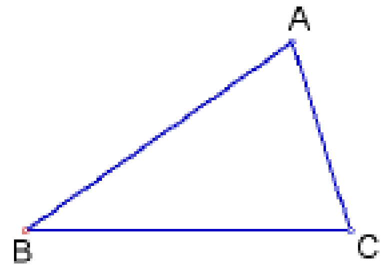
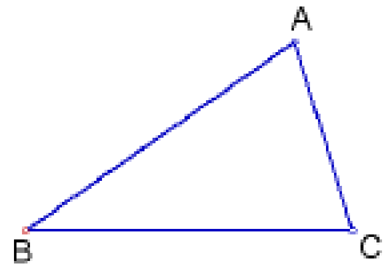


图 1



备用图



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“09 闸北 25”，拖动点 *D* 可以在射线 *BA* 上运动．双击按钮“第（2）题”，拖动点 *D* 可以体验到两圆可以外切一次，内切两次．

双击按钮“第（3）题”，再分别双击按钮“*DE* 为腰”和“*DE* 为底边”，可以体验到，△*DEF* 为等腰三角形．

思路点拨

1．先解读背景图，△*ABC* 是等腰三角形，那么第（3）题中符合条件的△*DEF* 也是等腰三角形．

2．用含有 *x* 的式子表示 *BD*、*DE*、*MN* 是解答第（2）题的先决条件，注意点 *E* 的位置不同，*DE*、*MN* 表示的形式分两种情况．

3．求两圆相切的问题时，先罗列三要素，再列方程，最后检验方程的解的位置是否符合题意．

4．第（3）题按照 *DE* 为腰和底边两种情况分类讨论，运用典型题目的结论可以帮助我们轻松解题．

满分解答

（1）如图 2，作 *BH*⊥*AC*，垂足为点 *H*．在 Rt△*ABH* 中，*AB*＝5，*cosA*＝$\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{3}{10}$，所以 *AH*＝$\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}AC$．所以 *BH* 垂直平分 *AC*，△*ABC* 为等腰三角形，*AB*＝*CB*＝5．

因为 *DE*//*BC*，所以 $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$，即 $\dfrac{5}{y}=\dfrac{3}{x}$．于是得到 $y=\dfrac{5}{3}x$，（$x>0$）．

（2）如图 3，图 4，因为 *DE*//*BC*，所以 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$，$\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{AN}{AC}$，即 $\dfrac{DE}{5}=\dfrac{|3-x|}{3}$，$\dfrac{MN}{5}=\dfrac{|3-\frac{1}{2}x|}{3}$．因此 $DE=\dfrac{5|3-x|}{3}$，圆心距 $MN=\dfrac{5|6-x|}{6}$．

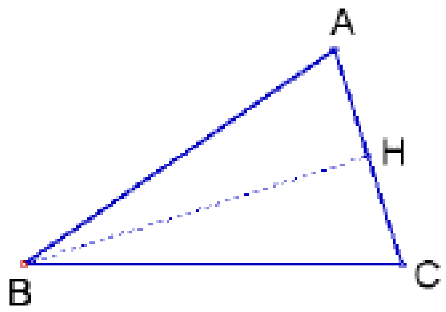


图 2

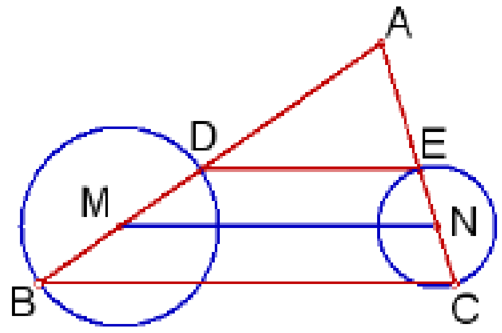


图 3

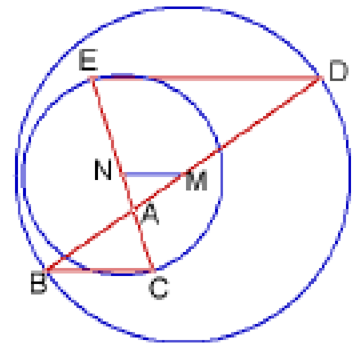


图 4

在⊙M 中，$r_M=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}y=\frac{5}{6}x$，在⊙$N$ 中，$r_N=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}x$．

①当两圆外切时，$\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}x=\frac{5|6-x|}{6}$．解得 $x=\frac{30}{13}$ 或者 $x=-10$．

如图 5，符合题意的解为 $x=\frac{30}{13}$，此时 $DE=\frac{5(3-x)}{3}=\frac{15}{13}$．

②当两圆内切时，$\frac{5}{6}x-\frac{1}{2}x=\frac{5|6-x|}{6}$．

当 x＜6 时，解得 $x=\frac{30}{7}$，如图 6，此时 E 在 CA 的延长线上，$DE=\frac{5(x-3)}{3}=\frac{15}{7}$；

当 x＞6 时，解得 $x=10$，如图 7，此时 E 在 CA 的延长线上，$DE=\frac{5(x-3)}{3}=\frac{35}{3}$．

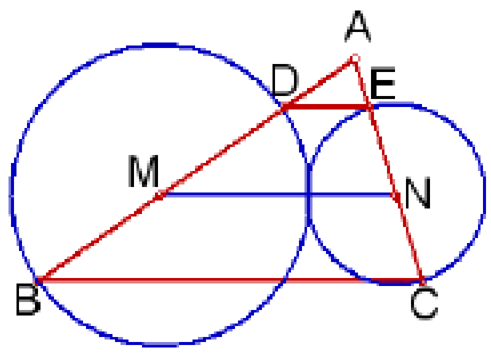


图 5

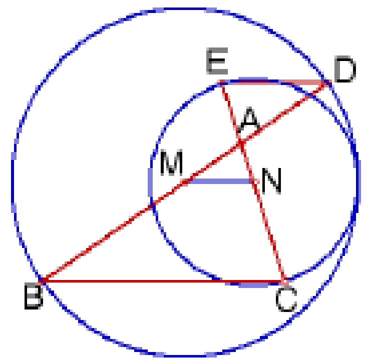


图 6

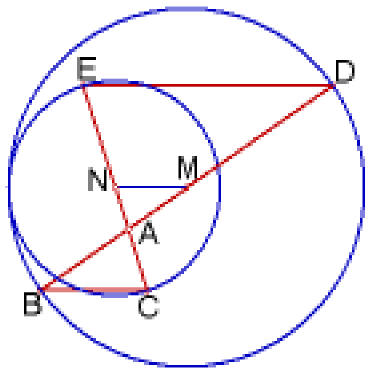


图 7

（3）因为△ABC 是等腰三角形，因此当△ABC 与△DEF 相似时，△DEF 也是等腰三角形．

如图 8，当 D、E、F 为△ABC 的三边的中点时，DE 为等腰三角形 DEF 的腰，符合题意，此时 BF＝2.5．根据对称性，当 F 在 BC 边上的高的垂足时，也符合题意，此时 BF＝4.1．

如图 9，当 DE 为等腰三角形 DEF 的底边时，四边形 $DECF$ 是平行四边形，此时 $BF=\frac{125}{34}$．

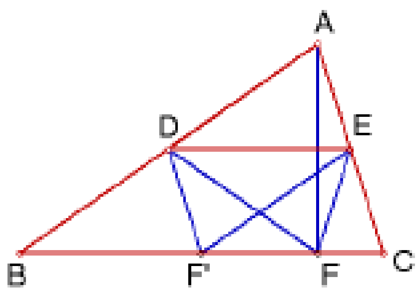


图 8

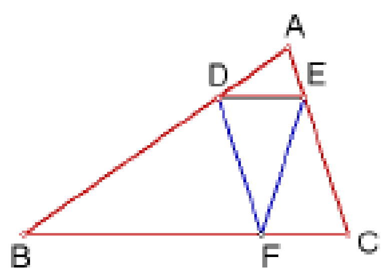


图 9

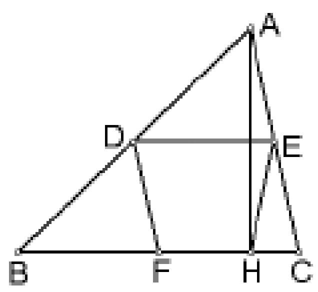


图 10

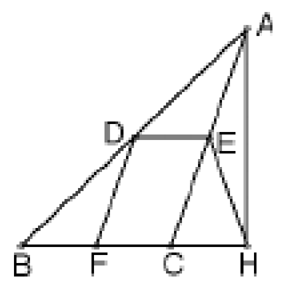


图 11

考点伸展

第（3）题的情景是一道典型题，如图10，如图11，AH 是△ABC 的高，D、E、F 为△ABC 的三边的中点，那么四边形 $DEHF$ 是等腰梯形．

例 7　20XX 年杭州市中考第 24 题

如图 1，在直角坐标系 xOy 中，设点 A（0，t），点 Q（t，b）．平移二次函数 $y=-tx^2$ 的图象，得到的抛物线 F 满足两个条件：①顶点为 Q；②与 x 轴相交于 B、C 两点（｜OB｜<｜OC｜），连结 A，B．

（1）是否存在这样的抛物线 F，使得 $|OA|^2=|OB|\cdot|OC|$？请你作出判断，并说明理由；

（2）如果 $AQ/\!/BC$，且 $\tan\angle ABO=\dfrac{3}{2}$，求抛物线 F 对应的二次函数的解析式．

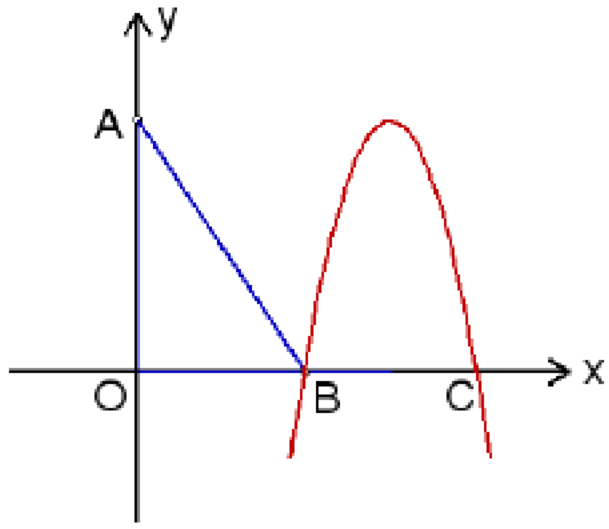


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“08 杭州 24”，拖动点 A 在 y 轴上运动，可以体验到，AQ 与 BC 保持平行，OA∶OB 与 OA∶OB' 保持 3∶2．

双击按钮“t=3”，“t=0．6”，“t=－0．6”，“t=－3”，抛物线正好经过点 B（或 B'）．

思路点拨

1．数形结合思想，把 $|OA|^2=|OB|\cdot|OC|$ 转化为 $t^2=|x_1\cdot x_2|$．

2．如果 $AQ/\!/BC$，那么以 OA、AQ 为邻边的矩形是正方形，数形结合得到 t=b．

3．分类讨论 $\tan\angle ABO=\dfrac{3}{2}$，按照 A、B、C 的位置关系分为四种情况．A 在 y 轴正半轴时，分为 B、C 在 y 轴同侧和两侧两种情况；A 在 y 轴负半轴时，分为 B、C 在 y 轴同侧和两侧两种情况．

满分解答

（1）因为平移 $y=-tx^2$ 的图象得到的抛物线 F 的顶点为 Q（t，b），所以抛物线 F 对应的解析式为 $y=-t(x-t)^2+b$．

因为抛物线与 x 轴有两个交点，因此 $tb>0$．

令 $y=0$，得 $OB=t-\sqrt{\dfrac{b}{t}}$，$OC=t+\sqrt{\dfrac{b}{t}}$．

所以 $|OB|\cdot|OC|=|(t-\sqrt{\dfrac{b}{t}})(t+\sqrt{\dfrac{b}{t}})|=|t^2-\dfrac{b}{t}|=t^2=OA^2$．即 $t^2-\dfrac{b}{t}=\pm t^2$．所以当 $b=2t^3$ 时，存在抛物线 F 使得 $|OA|^2=|OB|\cdot|OC|$．

（2）因为 $AQ/\!/BC$，所以 $t=b$，于是抛物线 F 为 $y=-t(x-t)^2+t$．解得 $x_1=t-1, x_2=t+1$．

①当 $t>0$ 时，由 $|OB|<|OC|$，得 $B(t-1,0)$．

如图 2，当$t-1>0$时，由$\tan\angle ABO=\frac{3}{2}=\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{t}{t-1}$，解得$t=3$．此时二次函数的解析式为$y=-3x^2+18x-24$．

如图 3，当$t-1<0$时，由$\tan\angle ABO=\frac{3}{2}=\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{t}{-t+1}$，解得$t=\frac{3}{5}$．此时二次函数的解析式为$y=-\frac{3}{5}x^2+\frac{18}{25}x+\frac{48}{125}$．

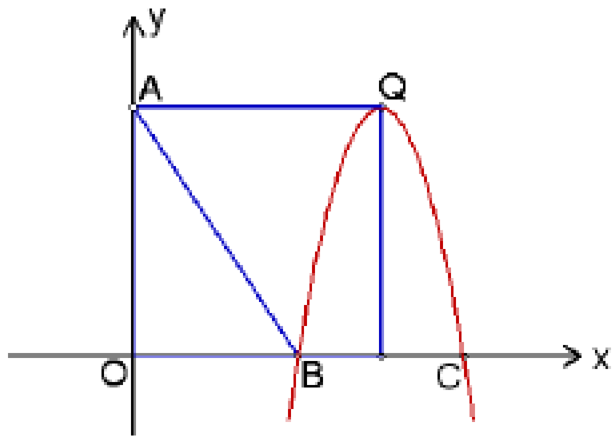


图 2

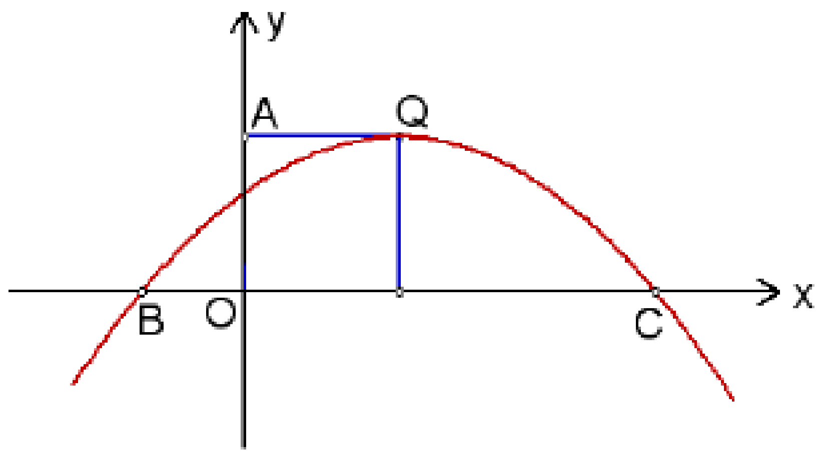


图 3

②如图 4，如图 5，当$t<0$时，由$|OB|<|OC|$，将$-t$代t,可得$t=-\frac{3}{5}$，$t=-3$．此时二次函数的解析式为$y=\frac{3}{5}x^2+\frac{18}{25}x-\frac{48}{125}$或$y=3x^2+18x+24$．

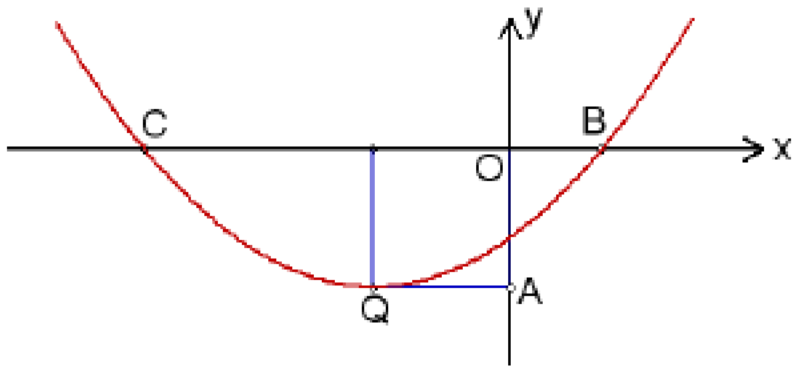


图 4

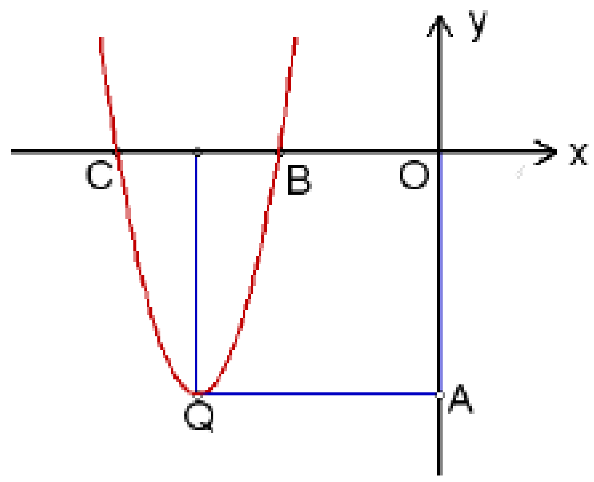


图 5

考点伸展

第（2）题还可以这样分类讨论：

因为$AQ//BC$，所以$t=b$，于是抛物线F为$y=-t(x-t)^2+t$．由$\tan\angle ABO=\frac{OA}{OB}=\frac{3}{2}$，得$OB=\frac{2}{3}OA$．

①把$B(\frac{2}{3}t,0)$代入$y=-t(x-t)^2+t$，得$t=\pm3$（如图 2，图 5）．

②把$B(-\frac{2}{3}t,0)$代入$y=-t(x-t)^2+t$，得$t=\pm\frac{3}{5}$（如图 3，图 4）．

第一部分　函数图象中点的存在性问题

1.2　因动点产生的等腰三角形问题

例 1　20XX 年湖州市中考第 24 题

如图 1，已知正方形 $OABC$ 的边长为 2，顶点 A、C 分别在 x、y 轴的正半轴上，M 是 BC 的中点．$P(0,m)$是线段 OC 上一动点（C 点除外），直线 PM 交 AB 的延长线于点 D．

（1）求点 D 的坐标（用含 m 的代数式表示）；

（2）当△APD 是等腰三角形时，求 m 的值；

（3）设过 P、M、B 三点的抛物线与 x 轴正半轴交于点 E，过点 O 作直线 ME 的垂线，垂足为 H（如图 2）．当点 P 从 O 向 C 运动时，点 H 也随之运动．请直接写出点 H 所经过的路长（不必写解答过程）．

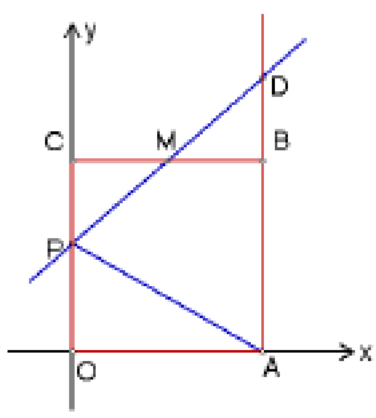


图 1

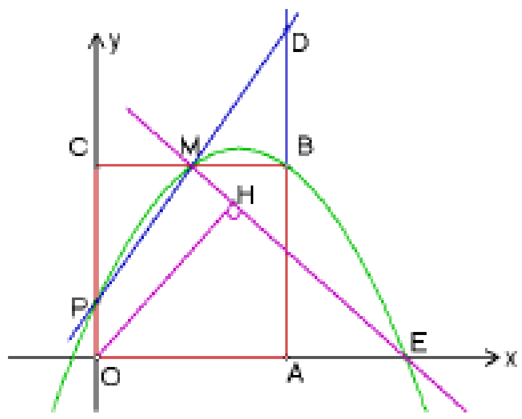


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“11 湖州 24”，拖动点 P 在 OC 上运动，可以体验到，△APD 的三个顶点有四次机会可以落在对边的垂直平分线上．双击按钮“第(3)题”， 拖动点 P 由 O 向 C 运动，可以体验到，点 H 在以 OM 为直径的圆上运动．双击按钮“第(2)题”可以切换．

思路点拨

1．用含 m 的代数式表示表示△APD 的三边长，为解等腰三角形做好准备．

2．探求△APD 是等腰三角形，分三种情况列方程求解．

3．猜想点 H 的运动轨迹是一个难题．不变的是直角，会不会找到不变的线段长呢？Rt△OHM 的斜边长 OM 是定值，以 OM 为直径的圆过点 H、C．

满分解答

（1）因为 $PC//DB$，所以 $\dfrac{CP}{BD}=\dfrac{PM}{DM}=\dfrac{MC}{MB}=1$．因此 $PM=DM$，$CP=BD=2-m$．所以 $AD=4-m$．于是得到点 D 的坐标为$(2，4-m)$．

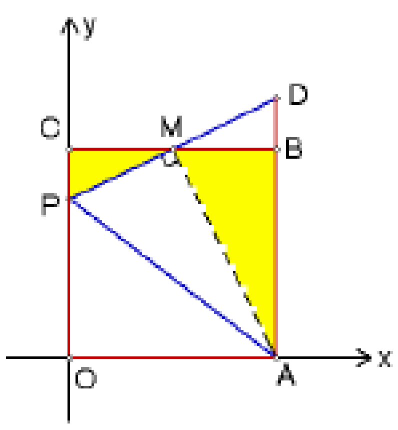
（2）在△APD 中，$AD^2=(4-m)^2$，$AP^2=m^2+4$，$PD^2=(2PM)^2=4+4(2-m)^2$．

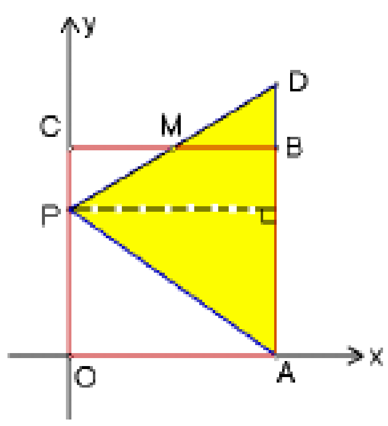
①当 $AP=AD$ 时，$(4-m)^2=m^2+4$．解得 $m=\dfrac{3}{2}$（如图 3）．

②当 $PA=PD$ 时，$m^2+4=4+4(2-m)^2$．解得 $m=\dfrac{4}{3}$（如图 4）或 $m=4$（不合题意，舍去）．

③当 $DA=DP$ 时，$(4-m)^2=4+4(2-m)^2$．解得 $m=\dfrac{2}{3}$（如图 5）或 $m=2$（不合题意，舍去）．

综上所述，当△APD为等腰三角形时，m的值为$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$或$\frac{2}{3}$.





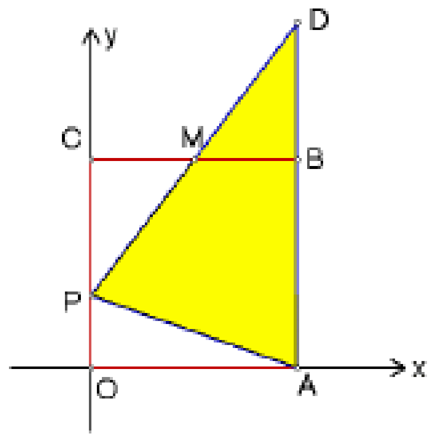


图 3　　　　图 4　　　　图 5

（3）点H所经过的路径长为$\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$.

考点伸展

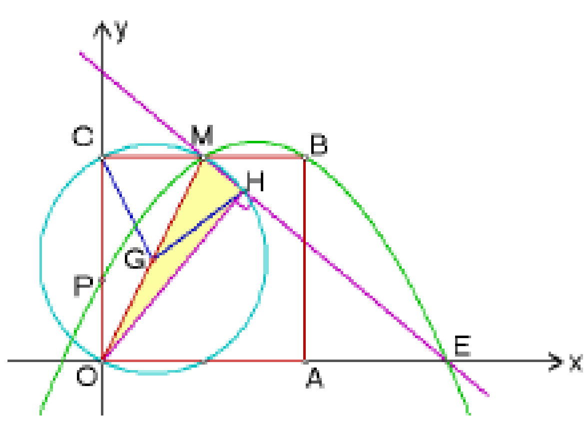
第（2）题解等腰三角形的问题，其中①、②用几何说理的方法，计算更简单：

①如图 3，当 $AP=AD$ 时，AM 垂直平分 PD，那么△PCM∽△MBA．所以$\frac{PC}{CM}=\frac{MB}{BA}=\frac{1}{2}$．因此$PC=\frac{1}{2}$，$m=\frac{3}{2}$．

②如图 4，当$PA=PD$时，P在AD的垂直平分线上．所以$DA=2PO$．因此$4-m=2m$．解得$m=\frac{4}{3}$．

第（2）题的思路是这样的：

如图 6，在 Rt△OHM 中，斜边 OM 为定值，因此以 OM 为直径的⊙G 经过点 H，也就是说点 H 在圆弧上运动．运动过的圆心角怎么确定呢？如图 7，P 与 O 重合时，是点 H 运动的起点，∠COH＝45°，∠CGH＝90°．



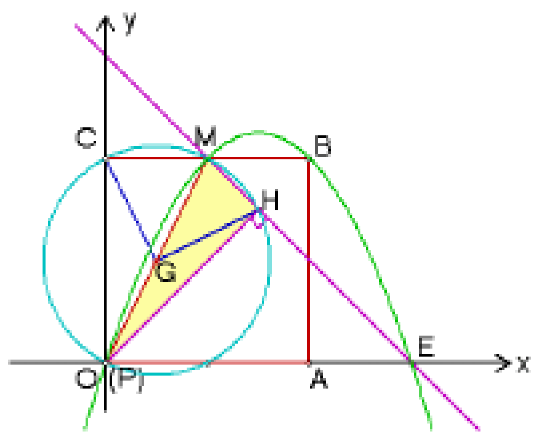


图 6　　　　图 7

例 2　　20XX 年盐城市中考第 28 题

如图 1，已知一次函数 $y=-x+7$ 与正比例函数 $y=\frac{4}{3}x$ 的图象交于点 A，且与 x 轴交于点 B.

（1）求点 A 和点 B 的坐标；

（2）过点 A 作 $AC\perp y$ 轴于点 C，过点 B 作直线 l//y 轴．动点 P 从点 O 出发，以每秒 1 个单位长的速度，沿 O—C—A 的路线向点 A 运动；同时直线 l 从点 B 出发，以相同速度向左平移，在平移过程中，直线 l 交 x 轴于点 R，交线段 BA 或线段 AO 于点 Q．当点 P 到达点 A 时，点 P 和直线 l 都停止运动．在运动过程中，设动点 P 运动的时间为 t 秒．

①当 t 为何值时，以 A、P、R 为顶点的三角形的面积为 8？

②是否存在以 A、P、Q 为顶点的三角形是等腰三角形？若存在，求 t 的值；若不存在，请说明理由．

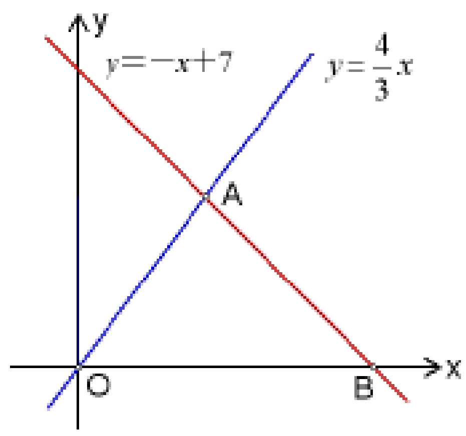


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“11 盐城 28”，拖动点 R 由 B 向 O 运动，从图像中可以看到，△APR 的面积有一个时刻等于 8．观察△APQ，可以体验到，P 在 OC 上时，只存在 $AP=AQ$ 的情况；P 在 CA 上时，有三个时刻，△APQ 是等腰三角形．

思路点拨

1．把图 1 复制若干个，在每一个图形中解决一个问题．

2．求△APR 的面积等于 8，按照点 P 的位置分两种情况讨论．事实上，P 在 CA 上运动时，高是定值 4，最大面积为 6，因此不存在面积为 8 的可能．

3．讨论等腰三角形 APQ，按照点 P 的位置分两种情况讨论，点 P 的每一种位置又要讨论三种情况．

满分解答

（1）解方程组 $\begin{cases} y=-x+7, \\ y=\frac{4}{3}x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$ 所以点 A 的坐标是(3，4)．

令 $y=-x+7=0$，得 $x=7$．所以点 B 的坐标是(7，0)．

（2）①如图 2，当 P 在 OC 上运动时，$0\leqslant t<4$．由 $S_{\triangle APR}=S_{梯形CORA}-S_{\triangle ACP}-S_{\triangle POR}=8$，得 $\frac{1}{2}(3+7-t)\times 4-\frac{1}{2}\times 4\times(4-t)-\frac{1}{2}\times t(7-t)=8$．整理，得 $t2-8t+12=0$．解得 $t=2$ 或 $t=6$（舍去）．如图 3，当 P 在 CA 上运动时，△APR 的最大面积为 6．

因此，当 $t=2$ 时，以 A、P、R 为顶点的三角形的面积为 8．

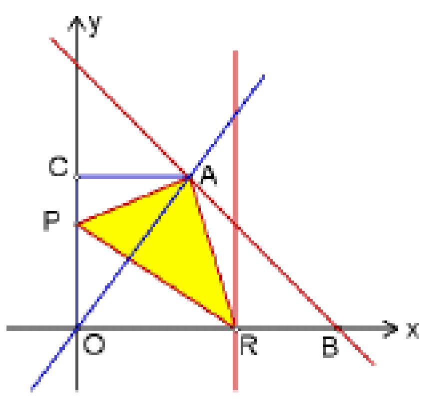


图 2

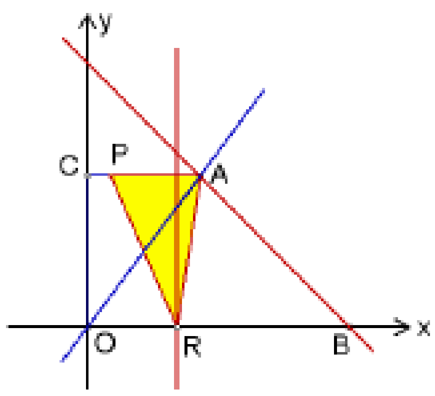


图 3

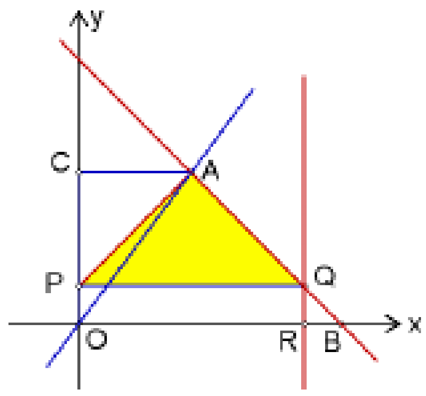


图 4

②我们先讨论 P 在 OC 上运动时的情形，$0 \leqslant t < 4$．

如图 1，在△AOB 中，$\angle B = 45°$，$\angle AOB > 45°$，$OB = 7$，$AB = 4\sqrt{2}$，所以 $OB > AB$．因此$\angle OAB > \angle AOB > \angle B$．

如图 4，点 P 由 O 向 C 运动的过程中，$OP = BR = RQ$，所以 $PQ // x$ 轴．

因此$\angle AQP = 45°$ 保持不变，$\angle PAQ$ 越来越大，所以只存在$\angle APQ = \angle AQP$ 的情况．

此时点 A 在 PQ 的垂直平分线上，$OR = 2CA = 6$．所以 $BR = 1$，$t = 1$．

我们再来讨论 P 在 CA 上运动时的情形，$4 \leqslant t < 7$．

在△APQ 中，$\cos\angle A = \dfrac{3}{5}$ 为定值，$AP = 7 - t$，$AQ = OA - OQ = OA - \dfrac{5}{3}OR = \dfrac{5}{3}t - \dfrac{20}{3}$．

如图 5，当 $AP = AQ$ 时，解方程$7 - t = \dfrac{5}{3}t - \dfrac{20}{3}$，得 $t = \dfrac{41}{8}$．

如图 6，当 $QP = QA$ 时，点 Q 在 PA 的垂直平分线上，$AP = 2(OR - OP)$．解方程 $7 - t = 2[(7 - t) - (t - 4)]$，得 $t = 5$．

如 7，当 $PA = PQ$ 时，那么 $\cos\angle A = \dfrac{\frac{1}{2}AQ}{AP}$．因此 $AQ = 2AP \cdot \cos\angle A$．解方程 $\dfrac{5}{3}t - \dfrac{20}{3} = 2(7 - t) \times \dfrac{3}{5}$，得 $t = \dfrac{226}{43}$．

综上所述，$t = 1$ 或 $\dfrac{41}{8}$ 或 5 或 $\dfrac{226}{43}$ 时，△APQ 是等腰三角形．

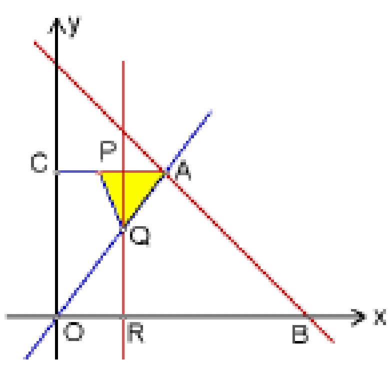


图 5

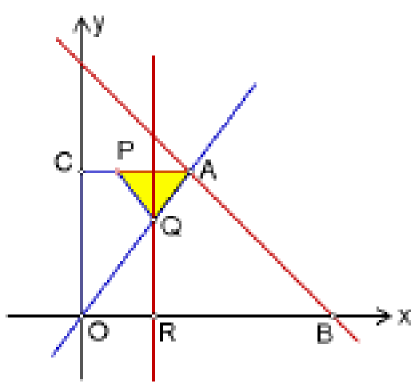


图 6

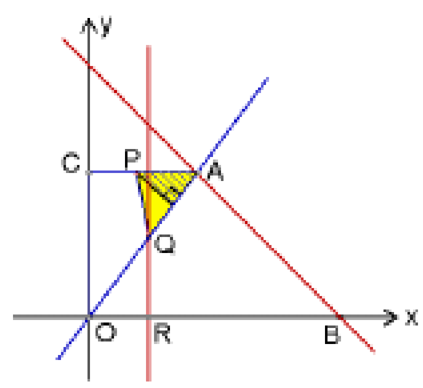


图 7

考点伸展

当 P 在 CA 上，$QP = QA$ 时，也可以用 $AP = 2AQ \cdot \cos\angle A$ 来求解．

例 3　　20XX 年上海市闸北区中考模拟第 25 题

如图 1，在直角坐标平面内有点 $A(6,\ 0)$，$B(0,\ 8)$，$C(-4,\ 0)$，点 M、N 分别为线段 AC 和射线 AB 上的动点，点 M 以 2 个单位长度/秒的速度自 C 向 A 方向作匀速运动，点 N 以 5 个单位长度/秒的速度自 A 向 B 方向作匀速运动，MN 交 OB 于点 P.

(1)求证：$MN∶NP$ 为定值；

(2)若△BNP 与△MNA 相似，求 CM 的长；

(3)若△BNP 是等腰三角形，求 CM 的长.

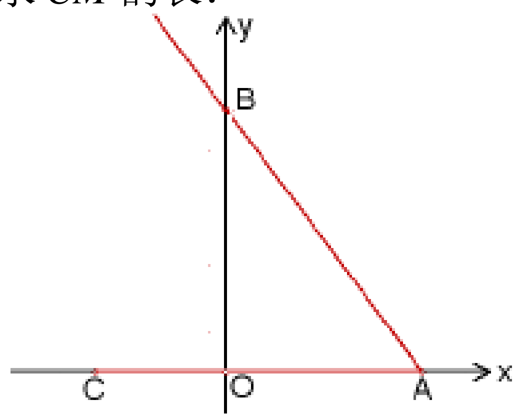


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名"10 闸北 25"，拖动点 M 在 CA 上运动，可以看到△BNP 与△MNA 的形状随 M 的运动而改变．双击按钮"△BNP∽△MNA"，可以体验到，此刻两个三角形都是直角三角形．分别双击按钮"$BP=BN$，N 在 AB 上"、"$NB=NP$"和"$BP=BN$，N 在 AB 的延长线上"，可以准确显示等腰三角形 BNP 的三种情况．

思路点拨

1．第（1）题求证 $MN∶NP$ 的值要根据点 N 的位置分两种情况．这个结论为后面的计算提供了方便．

2．第 ⑵ 题探求相似的两个三角形有一组邻补角，通过说理知道这两个三角形是直角三角形时才可能相似．

3．第（3）题探求等腰三角形，要两级（两层）分类，先按照点 N 的位置分类，再按照顶角的顶点分类．注意当 N 在 AB 的延长线上时，钝角等腰三角形只有一种情况．

4．探求等腰三角形 BNP，N 在 AB 上时，$\angle B$ 是确定的，把夹 $\angle B$ 的两边的长先表示出来，再分类计算．

满分解答

(1)如图 2，图 3，作 $NQ\perp x$ 轴，垂足为 Q．设点 M、N 的运动时间为 t 秒．

在 Rt△ANQ 中，$AN=5t$，$NQ=4t$ ，$AQ=3t$.

在图 2 中，$QO=6-3t$，$MQ=10-5t$，所以 $MN∶NP=MQ∶QO=5∶3$.

在图 3 中，$QO=3t-6$，$MQ=5t-10$，所以 $MN∶NP=MQ∶QO=5∶3$.

(2)因为△BNP 与△MNA 有一组邻补角，因此这两个三角形要么是一个锐角三角形和一个钝角三角形，要么是两个直角三角形．只有当这两个三角形都是直角三角形时才可能相似．

如图 4，△BNP∽△MNA，在 Rt△AMN 中，$\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{3}{5}$，所以 $\dfrac{5t}{10-2t}=\dfrac{3}{5}$．解得 $t=\dfrac{30}{31}$．此时 $CM=\dfrac{60}{31}$．

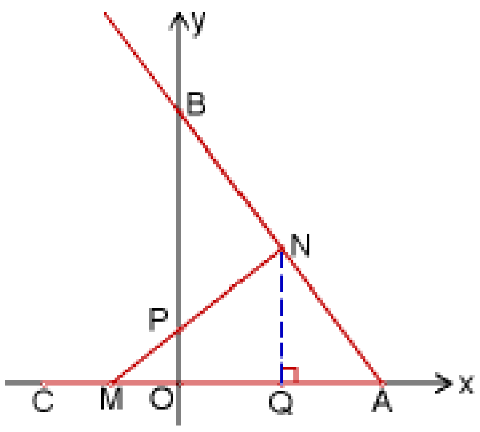


图 2

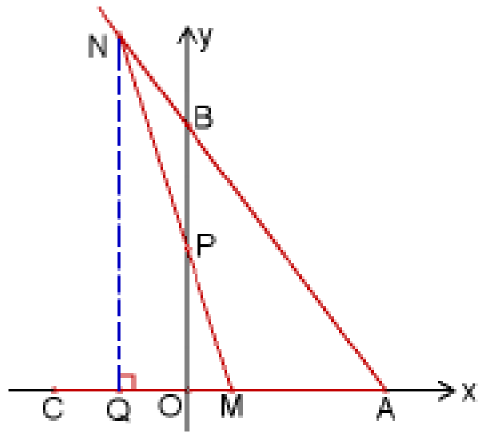


图 3

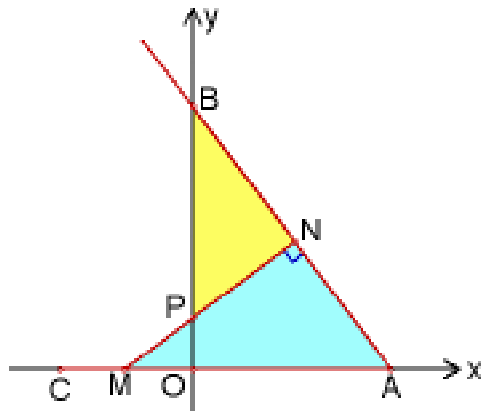


图 4

(3)如图 5，图 6，图 7 中，$\dfrac{OP}{QN}=\dfrac{MP}{MN}$，即 $\dfrac{OP}{4t}=\dfrac{2}{5}$．所以 $OP=\dfrac{8}{5}t$．

①当 N 在 AB 上时，在△BNP 中，$\angle B$ 是确定的，$BP=8-\dfrac{8}{5}t$，$BN=10-5t$．

(Ⅰ)如图 5，当 $BP=BN$ 时，解方程 $8-\dfrac{8}{5}t=10-5t$，得 $t=\dfrac{10}{17}$．此时 $CM=\dfrac{20}{17}$．

(Ⅱ)如图 6，当 $NB=NP$ 时，$BE=\dfrac{4}{5}BN$．解方程 $\dfrac{1}{2}\left(8-\dfrac{8}{5}t\right)=\dfrac{4}{5}(10-5t)$，得 $t=\dfrac{5}{4}$．此时 $CM=\dfrac{5}{2}$．

(Ⅲ)当 $PB=PN$ 时，$\dfrac{1}{2}BN=\dfrac{4}{5}BP$．解方程 $\dfrac{1}{2}(10-5t)=\dfrac{4}{5}\left(8-\dfrac{8}{5}t\right)$，得 t 的值为负数，因此不存在 $PB=PN$ 的情况．

②如图 7，当点 N 在线段 AB 的延长线上时，$\angle B$ 是钝角，只存在 $BP=BN$ 的可能，此时 $BN=5t-10$．解方程 $8-\dfrac{8}{5}t=5t-10$，得 $t=\dfrac{30}{11}$．此时 $CM=\dfrac{60}{11}$．

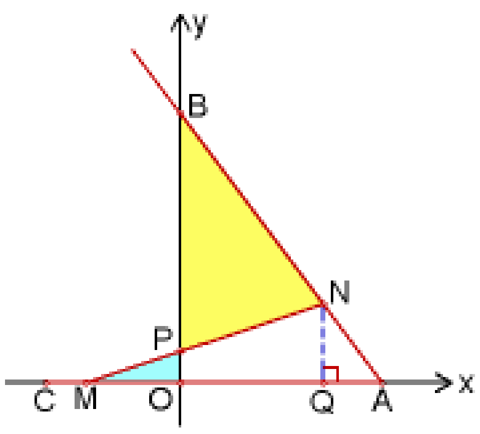


图 5

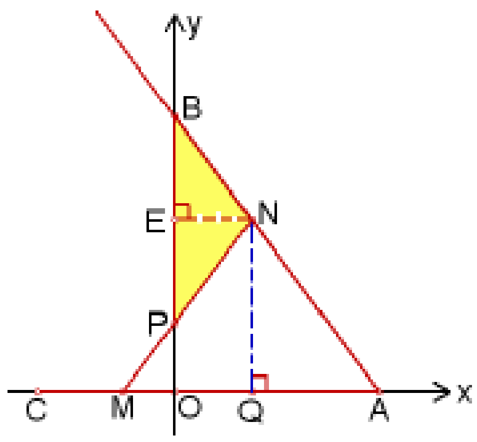


图 6

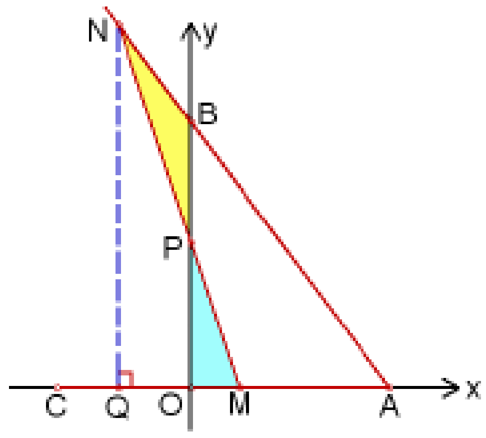


图 7

考点伸展

如图 6，当 $NB=NP$ 时，△NMA 是等腰三角形，$\dfrac{1}{2}BN=\dfrac{4}{5}BP$，这样计算简便一些．

例 4　20XX 年南通市中考第 27 题

如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=m$（m 是大于 0 的常数），$BC=8$，E 为线段 BC 上的动点（不与 B、C 重合）．连结 DE，作 $EF\perp DE$，EF 与射线 BA 交于点 F，设 $CE=x$，$BF=y$．

（1）求 y 关于 x 的函数关系式；

（2）若 $m=8$，求 x 为何值时，y 的值最大，最大值是多少？

（3）若 $y=\dfrac{12}{m}$，要使△DEF 为等腰三角形，m 的值应为多少？

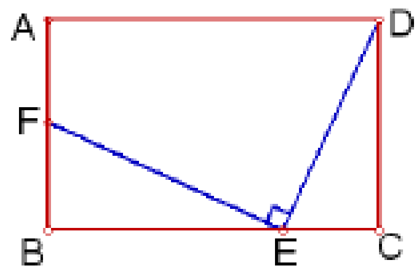


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“10 南通 27”，拖动点 E 在 BC 上运动，观察 y 随 x 变化的函数图像，可以体验到，y 是 x 的二次函数，抛物线的开口向下．对照图形和图像，可以看到，当 E 是 BC 的中点时，y 取得最大值．双击按钮“$m=8$”，拖动 E 到 BC 的中点，可以体验到，点 F 是 AB 的四等分点．

拖动点 A 可以改变 m 的值，再拖动图像中标签为“y 随 x” 的点到射线 $y=x$ 上，从图形中可以看到，此时△DCE≌△EBF．

思路点拨

1．证明△DCE∽△EBF，根据相似三角形的对应边成比例可以得到 y 关于 x 的函数关系式．

2．第（2）题的本质是先代入，再配方求二次函数的最值．

3．第（3）题头绪复杂，计算简单，分三段表达．一段是说理，如果△DEF 为等腰三角形，那么得到 $x=y$；一段是计算，化简消去 m，得到关于 x 的一元二次方程，解出 x 的值；第三段是把前两段结合，代入求出对应的 m 的值．

满分解答

(1)因为∠EDC 与∠FEB 都是∠DEC 的余角，所以∠EDC=∠FEB．又因为∠C=∠B=90°，所以△DCE∽△EBF．因此 $\dfrac{DC}{CE}=\dfrac{EB}{BF}$，即 $\dfrac{m}{x}=\dfrac{8-x}{y}$．整理，得 y 关于 x 的函数关系为 $y=-\dfrac{1}{m}x^2+\dfrac{8}{m}x$．

(2)如图 2，当 $m=8$ 时，$y=-\dfrac{1}{8}x^2+x=-\dfrac{1}{8}(x-4)^2+2$．因此当 $x=4$ 时，y 取得最大值为 2．

(3) 若 $y=\dfrac{12}{m}$，那么 $\dfrac{12}{m}=-\dfrac{1}{m}x^2+\dfrac{8}{m}x$．整理，得 $x^2-8x+12=0$．解得 $x=2$ 或 $x=6$．要使△DEF 为等腰三角形，只存在 $ED=EF$ 的情况．因为△DCE∽△EBF，所以 $CE=BF$，即 $x=y$．将 $x=y$ $=2$ 代入 $y=\dfrac{12}{m}$，得 $m=6$（如图 3）；将 $x=y$ $=6$ 代入 $y=\dfrac{12}{m}$，得 $m=2$（如图 4）．

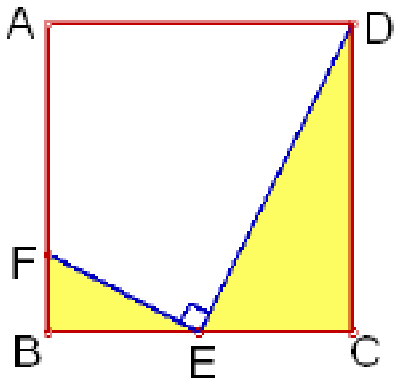


图 2

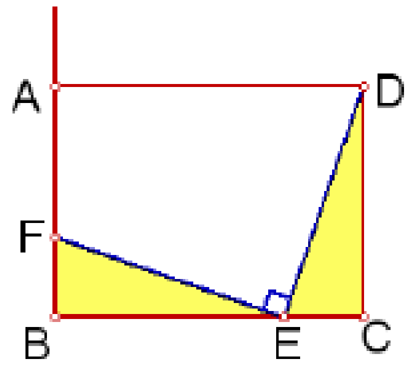


图 3

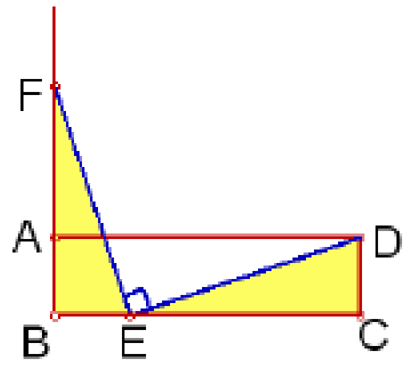


图 4

考点伸展

本题中蕴涵着一般性与特殊性的辩证关系，例如：

由第（1）题得到 $y=-\frac{1}{m}x^2+\frac{8}{m}x=-\frac{1}{m}(x^2-8x)=-\frac{1}{m}(x-4)^2+\frac{16}{m}$，

那么不论 m 为何值，当 $x=4$ 时，y 都取得最大值．对应的几何意义是，不论 AB 边为多长，当 E 是 BC 的中点时，BF 都取得最大值．第（2）题 $m=8$ 是第（1）题一般性结论的一个特殊性．

再如，不论 m 为小于 8 的任何值，△DEF 都可以成为等腰三角形，这是因为方程 $x=-\frac{1}{m}x^2+\frac{8}{m}x$ 总有一个根 $x=8-m$ 的．第（3）题是这个一般性结论的一个特殊性．

例 5　20XX 年重庆市中考第 26 题

已知：如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，矩形 $OABC$ 的边 OA 在 y 轴的正半轴上，OC 在 x 轴的正半轴上，OA＝2，OC＝3，过原点 O 作∠AOC 的平分线交 AB 于点 D，连接 DC，过点 D 作 DE⊥DC，交 OA 于点 E.

（1）求过点 E、D、C 的抛物线的解析式；

（2）将∠EDC 绕点 D 按顺时针方向旋转后，角的一边与 y 轴的正半轴交于点 F，另一边与线段 OC 交于点 G．如果 DF 与（1）中的抛物线交于另一点 M，点 M 的横坐标为$\frac{6}{5}$，那么 EF＝2GO 是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，请说明理由；

（3）对于（2）中的点 G，在位于第一象限内的该抛物线上是否存在点 Q，使得直线 GQ 与 AB 的交点 P 与点 C、G 构成的△PCG 是等腰三角形？若存在，请求出点 Q 的坐标；若不存在成立，请说明理由．

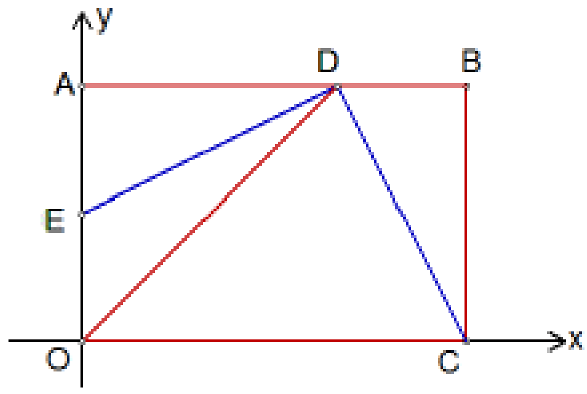


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“09 重庆 26”，拖动点 G 在 OC 上运动，可以体验到，△DCG 与△DEF 保持全等，双击按钮“M 的横坐标为 1.2”，可以看到，EF＝2，GO＝1．

拖动点 P 在 AB 上运动的过程中，可以体验到，存在三个时刻，△PCG 可以成为等腰三角形．

思路点拨

1．用待定系数法求抛物线的解析式，这个解析式在第（2）、（3）题的计算中要用到．

2．过点 M 作 MN⊥AB，根据对应线段成比例可以求 FA 的长．

3．将∠EDC 绕点 D 旋转的过程中，△DCG 与△DEF 保持全等．

4．第（3）题反客为主，分三种情况讨论△PCG 为等腰三角形，根据点 P 的位置确定点 Q 的位置，再计算点 Q 的坐标．

满分解答

（1）由于 OD 平分∠AOC，所以点 D 的坐标为（2，2），因此 BC＝AD＝1．

由于△BCD≌△ADE，所以 BD＝AE＝1，因此点 E 的坐标为（0，1）．

设过 E、D、C 三点的抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，那么 $\begin{cases}c=1,\\4a+2b+c=2,\\9a+3b+c=0.\end{cases}$ 解得 $a=-\frac{5}{6}$，$b=\frac{13}{6}$ $c=1$．因此过 E、D、C 三点的抛物线的解析式为 $y=-\frac{5}{6}x^2+\frac{13}{6}x+1$．

（2）把 $x=\frac{6}{5}$ 代入 $y=-\frac{5}{6}x^2+\frac{13}{6}x+1$，求得 $y=\frac{12}{5}$．所以点 M 的坐标为 $\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)$．

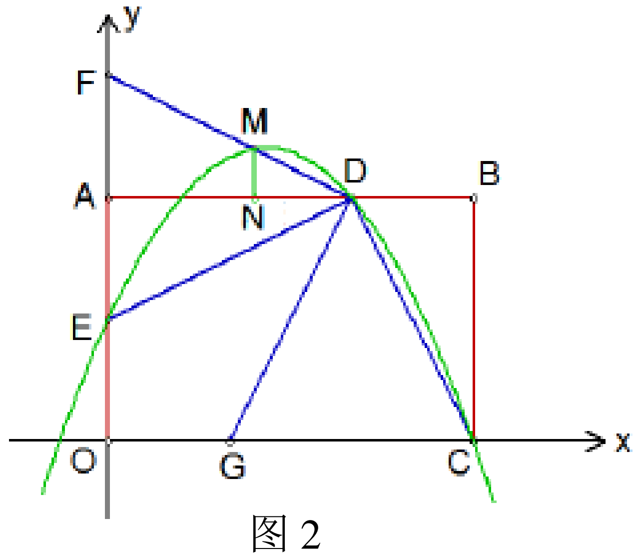


图 2

如图 2，过点 M 作 $MN\perp AB$，垂足为 N，那么 $\frac{MN}{FA}=\frac{DN}{DA}$，

即 $\frac{\frac{12}{5}-2}{FA}=\frac{2-\frac{6}{5}}{2}$．解得 $FA=1$．

因为∠*EDC* 绕点 *D* 旋转的过程中，△*DCG*≌△*DEF*，所以 *CG*＝*EF*＝2．因此 *GO*＝1，*EF*＝2*GO*．

（3）在第（2）中，*GC*＝2．设点 *Q* 的坐标为 $\left(x,-\frac{5}{6}x^2+\frac{13}{6}x+1\right)$．

①如图 3，当 *CP*＝*CG*＝2 时，点 *P* 与点 *B*（3，2）重合，△*PCG* 是等腰直角三角形．此时 $y_Q=x_Q-x_G$，因此 $-\frac{5}{6}x^2+\frac{13}{6}x+1=x-1$。由此得到点 *Q* 的坐标为 $\left(\frac{12}{5},\frac{7}{5}\right)$．

②如图 4，当 *GP*＝*GC*＝2 时，点 *P* 的坐标为（1，2）．此时点 *Q* 的横坐标为 1，点 *Q* 的坐标为 $\left(1,\frac{13}{6}\right)$．

③如图 5，当 *PG*＝*PC* 时，点 *P* 在 *GC* 的垂直平分线上，点 *P*、*Q* 与点 *D* 重合．此时点 *Q* 的坐标为（2，2）．

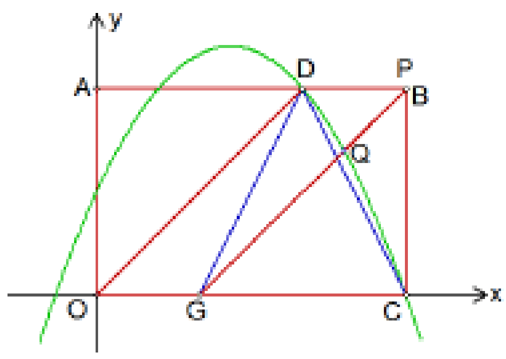


图 3

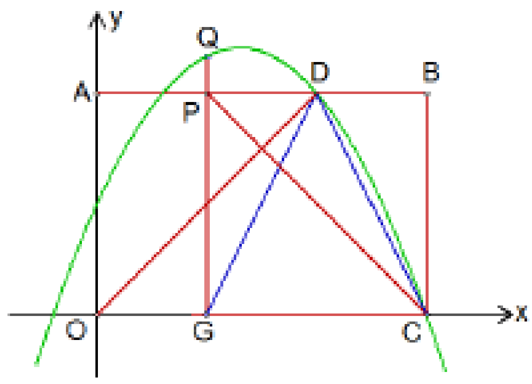


图 4

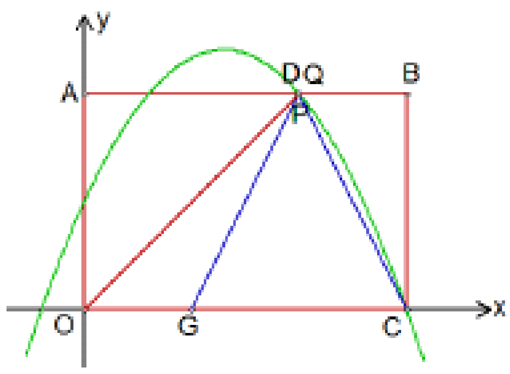


图 5

考点伸展

在第（2）题情景下，∠*EDC* 绕点 *D* 旋转的过程中，*FG* 的长怎样变化？

设 *AF* 的长为 *m*，那么 $FG=\sqrt{(2+m)^2+(2-m)^2}=\sqrt{2m^2+8}$．

点 F 由 E 开始沿射线 EA 运动的过程中，*FG* 先是越来越小，*F* 与 *A* 重合时，*FG* 达到最小值 $2\sqrt{2}$；*F* 经过点 *A* 以后，*FG* 越来越大，当 *C* 与 *O* 重合时，*FG* 达到最大值 4．

例 6　　20XX 年上海市中考第 24 题

在平面直角坐标系内，O 为原点，点 A 的坐标为（1，0），点 C 的坐标为（0，4），直线 $CM//x$ 轴（如图 1 所示）．点 B 与点 A 关于原点对称，直线 $y=x+b$（b 为常数）经过点 B，且与直线 CM 相交于点 D，联结 OD．

（1）求 b 的值和点 D 的坐标；

（2）设点 P 在 x 轴的正半轴上，若△POD 是等腰三角形，求点 P 的坐标；

（3）在（2）的条件下，如果以 PD 为半径的圆与圆 O 外切，求圆 O 的半径．

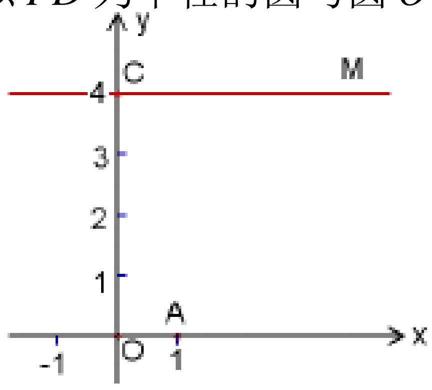


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“09 上海 24”，拖动点 P 在 x 轴正半轴上运动，可以体验到，△POD 的形状可以成为等腰三角形，分别双击按钮“$PD=PO$”、“$OD=OP$”和“$DO=DP$”可以显示三个等腰三角形．在点 P 运动的过程中，两个圆保持相切，可以体验到，当 $PD=PO$ 时，圆 O 不存在．

思路点拨

1．第（1）题情景简单，内容丰富，考查了对称点的坐标特征、待定系数法、代入求值、数形结合．

2．分三种情况讨论等腰三角形 POD 的存在性，三个等腰三角形的求解各具特殊性．

3．圆 O 与圆 P 的半径、圆心距都是随点 P 而改变，但是两圆外切，圆心距等于半径和的性质不变．

满分解答

（1）因为点 A 的坐标为（1，0），点 B 与点 A 关于原点对称，所以点 B 的坐标为（-1，0）．将 B（-1，0）代入 $y=x+b$，得 $b=1$．将 $y=4$ 代入 $y=x+1$，得 $x=3$．所以点 D 的坐标为（3，4）．

（2）因为 D（3，4），所以 $OD=5$，$\cos\angle DOP=\dfrac{3}{5}$．

①如图 2，当 $PD=PO$ 时，作 $PE\perp OD$ 于 E．在 Rt△OPE 中，$\cos\angle DOP=\dfrac{OE}{OP}=\dfrac{3}{5}$，$OE=\dfrac{5}{2}$，所以 $OO=\dfrac{25}{6}$．此时点 P 的坐标为 $(\dfrac{25}{6},0)$．

②如图 3，当 $OP=OD=5$ 时，点 P 的坐标为 $(5,0)$．

③如图 4，当 $DO=DP$ 时，点 D 在 OP 的垂直平分线上，此时点 P 的坐标为 $(6,0)$．

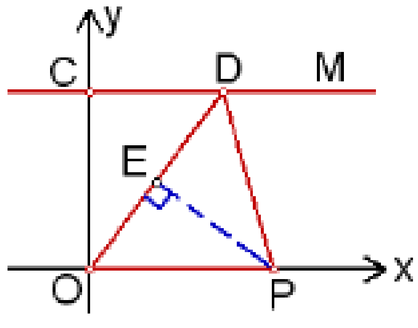


图 2

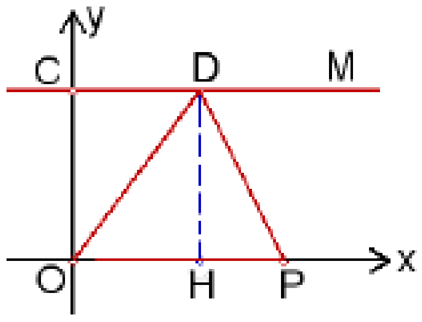


图 3

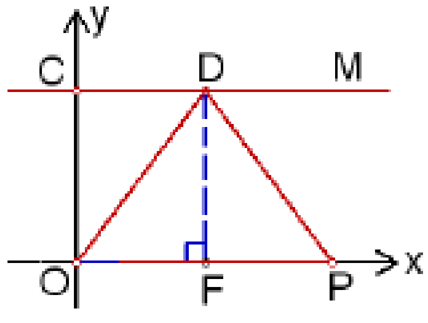


图 4

（3）圆 P 的半径 $r_P = PD$，两圆的圆心距为 OP．当两圆外切时，圆 O 的半径 $r_O = OP - PD$．

①如图 2，当 $PD=PO$ 时，$r_O = 0$，此时圆 O 不存在．

②如图 3，当 $OP=OD=5$ 时，作 $DH \perp OP$ 于 H．在 $\text{Rt}\triangle DHP$ 中，$DH=4$，$HP=2$，所以 $DP = 2\sqrt{5}$．此时 $r_O = OP - PD = 5 - 2\sqrt{5}$．

③如图 4，当 $DO=DP$ 时，$r_O = OP - PD = 6 - 5 = 1$．

考点伸展

如图 5，在本题情景下，如果圆 P 与圆 C 外切，那么点 P 的变化范围是什么？

如图 6，当圆 P 经过点 C 时，点 P 在 CD 的垂直平分线上，点 P 的坐标为$(\dfrac{3}{2},0)$．

因此当点 P 在 x 轴上点$(\dfrac{3}{2},0)$ 的右边时，圆 P 与圆 C 外切．

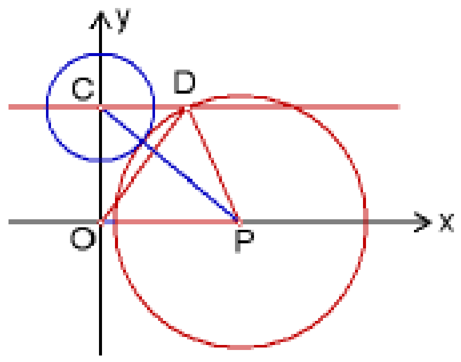


图 5

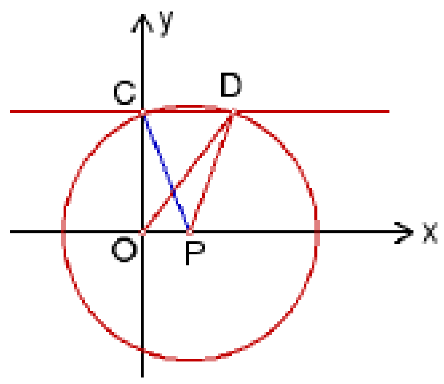


图 6

第一部分　函数图象中点的存在性问题

1.3　因动点产生的直角三角形问题

例 1　　20XX 年沈阳市中考第 25 题

如图 1，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 $C(0，-3)$，对称轴是直线 $x=1$，直线 BC 与抛物线的对称轴交于点 D.

（1）求抛物线的函数表达式；

（2）求直线 BC 的函数表达式；

（3）点 E 为 y 轴上一动点，CE 的垂直平分线交 CE 于点 F，交抛物线于 P、Q 两点，且点 P 在第三象限.

①当线段 $PQ=\frac{3}{4}AB$ 时，求 $\tan\angle CED$ 的值；

②当以 C、D、E 为顶点的三角形是直角三角形时，请直接写出点 P 的坐标.

温馨提示：考生可以根据第（3）问的题意，在图中补出图形，以便作答.

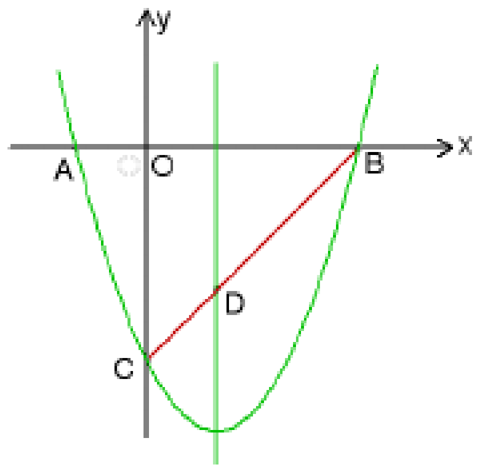


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“11 沈阳 25”，拖动点 E 或 F 在 y 轴上运动，可以体验到，△CDE 有两次机会成为等腰直角三角形．双击按钮“PQ＝3”可以准确显示 $PQ=\frac{3}{4}AB$ 时的位置.

思路点拨

1．第（1）、（2）题用待定系数法求解析式，它们的结果直接影响后续的解题.

2．第（3）题的关键是求点 E 的坐标，反复用到数形结合，注意 y 轴负半轴上的点的纵坐标的符号与线段长的关系.

3．根据 C、D 的坐标，可以知道直角三角形 CDE 是等腰直角三角形，这样写点 E 的坐标就简单了.

满分解答

（1）设抛物线的函数表达式为 $y=(x-1)^2+n$，代入点 $C(0，-3)$，得 $n=-4$．所以抛物线的函数表达式为 $y=(x-1)^2-4=x^2-2x-3$.

（2）由 $y=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$，知 $A(-1，0)$，$B(3，0)$．设直线 BC 的函数表达式为 $y=kx+b$，代入点 $B(3，0)$ 和点 $C(0，-3)$，得 $\begin{cases}3k+b=0,\\ b=-3.\end{cases}$ 解得 $k=1$，$b=-3$．所以

直线 BC 的函数表达式为 $y=x-3$.

（3）①因为 AB＝4，所以 $PQ=\frac{3}{4}AB=3$．因为 P、Q 关于直线 x＝1 对称，所以点 P 的横坐标为 $-\frac{1}{2}$．于是得到点 P 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{7}{4}\right)$，点 F 的坐标为 $\left(0,-\frac{7}{4}\right)$．所以 $FC=OC-OF=3-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}$，$EC=2FC=\frac{5}{2}$.

进而得到 $OE=OC-EC=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$，点 E 的坐标为 $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

直线 BC: $y=x-3$ 与抛物线的对称轴 x＝1 的交点 D 的坐标为（1，－2）.

过点 D 作 $DH\perp y$ 轴，垂足为 H.

在 Rt△EDH 中，DH＝1，$EH=OH-OE=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $\tan\angle CED=\frac{DH}{EH}=\frac{2}{3}$.

② $P_1(1-\sqrt{2},-2)$，$P_2(1-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{5}{2})$.

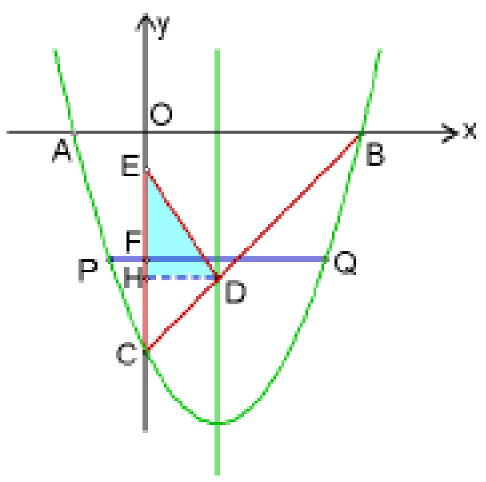


图 2

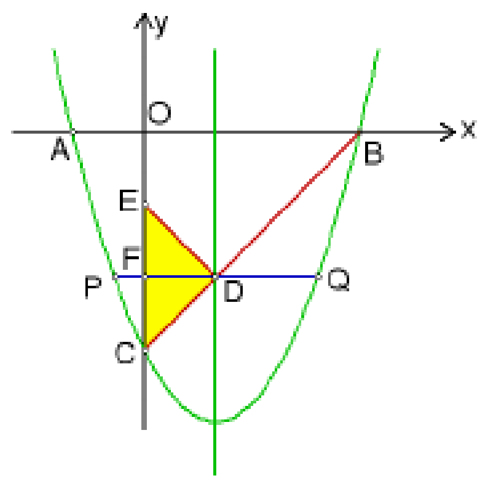


图 3

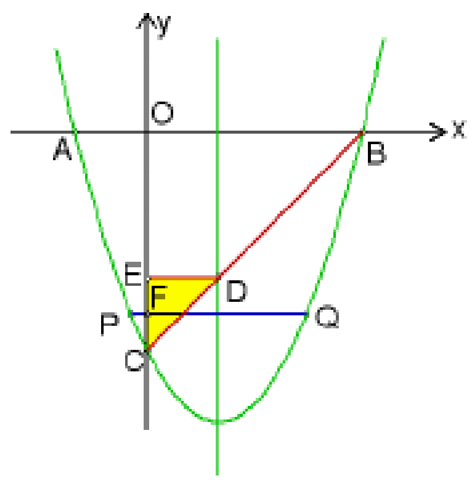


图 4

考点伸展

第（3）题②求点 P 的坐标的步骤是：

如图 3，图4，先分两种情况求出等腰直角三角形 CDE 的顶点 E 的坐标，再求出 CE 的中点 F 的坐标，把点 F 的纵坐标代入抛物线的解析式，解得的 x 的较小的一个值就是点 P 的横坐标.

例 2　20XX 年浙江省中考第 23 题

设直线 l_1：$y=k_1x+b_1$ 与 l_2：$y=k_2x+b_2$，若 $l_1\perp l_2$，垂足为 H，则称直线 l_1 与 l_2 是点 H 的直角线．

（1）已知直线①$y=-\frac{1}{2}x+2$；②$y=x+2$；③$y=2x+2$；④$y=2x+4$ 和点 $C(0，2)$，则直线________和________是点 C 的直角线（填序号即可）；

（2）如图，在平面直角坐标系中，直角梯形 $OABC$ 的顶点 $A(3，0)$、$B(2，7)$、$C(0，7)$，P 为线段 OC 上一点，设过 B、P 两点的直线为 l_1，过 A、P 两点的直线为 l_2，若 l_1 与 l_2 是点 P 的直角线，求直线 l_1 与 l_2 的解析式．

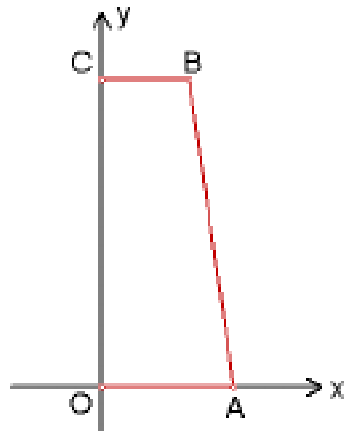


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“11 浙江 23”，拖动点 P 在 OC 上运动，可以体验到，$\angle APB$ 有两个时刻可以成为直角，此时$\triangle BCP\backsim\triangle POA$．

答案

（1）直线①和③是点 C 的直角线．

（2）当$\angle APB=90°$ 时，$\triangle BCP\backsim\triangle POA$．那么$\frac{BC}{CP}=\frac{PO}{OA}$，即$\frac{2}{7-PO}=\frac{PO}{3}$．解得 $OP=6$ 或 $OP=1$．

如图 2，当 $OP=6$ 时，l_1：$y=\frac{1}{2}x+6$，　l_2：$y=-2x+6$．

如图 3，当 $OP=1$ 时，l_1：$y=3x+1$，　l_2：$y=-\frac{1}{3}x+1$．

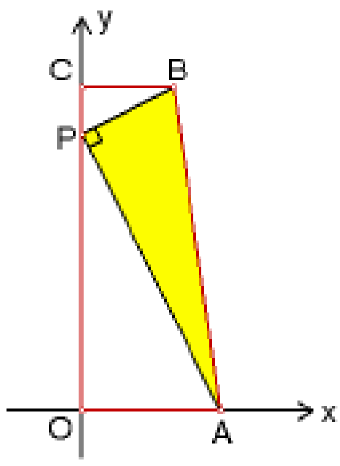


图 2

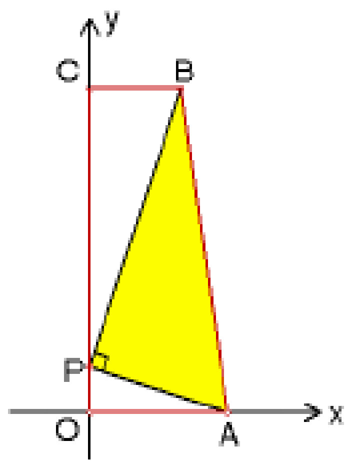


图 3

例 3　20XX 年北京市中考第 24 题

在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=-\frac{m-1}{4}x^2+\frac{5m}{4}x+m^2-3m+2$ 与 x 轴的交点分别为原点 O 和点 A，点 $B(2,n)$在这条抛物线上．

（1）求点 B 的坐标；

（2）点 P 在线段 OA 上，从点 O 出发向点 A 运动，过点 P 作 x 轴的垂线，与直线 OB 交于点 E，延长 PE 到点 D，使得 $ED=PE$，以 PD 为斜边，在 PD 右侧作等腰直角三角形 PCD（当点 P 运动时，点 C、D 也随之运动）．

①当等腰直角三角形 PCD 的顶点 C 落在此抛物线上时，求 OP 的长；

②若点 P 从点 O 出发向点 A 作匀速运动，速度为每秒 1 个单位，同时线段 OA 上另一个点 Q 从点 A 出发向点 O 作匀速运动，速度为每秒 2 个单位(当点 Q 到达点 O 时停止运动，点 P 也停止运动)．过 Q 作 x 轴的垂线，与直线 AB 交于点 F，延长 QF 到点 M，使得 $FM=QF$，以 QM 为斜边，在 QM 的左侧作等腰直角三角形 QMN（当点 Q 运动时，点 M、N 也随之运动）．若点 P 运动到 t 秒时，两个等腰直角三角形分别有一条边恰好落在同一条直线上，求此刻 t 的值．

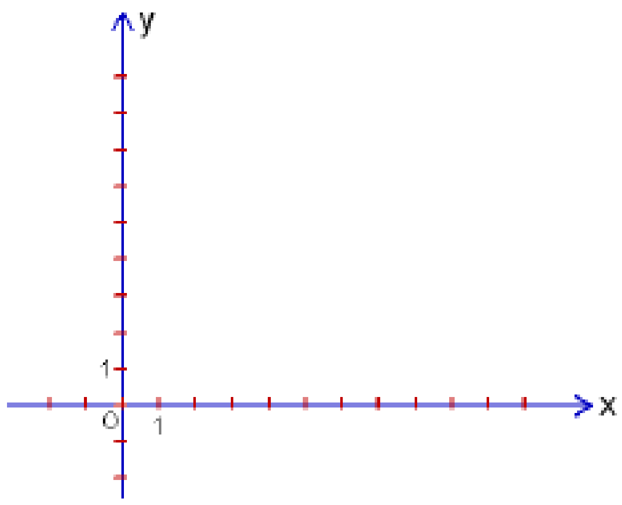


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“10 北京 24”，拖动点 P 从 O 向 A 运动，可以体验到，两个等腰直角三角形的边有三个时刻可以共线．

思路点拨

1．这个题目最大的障碍，莫过于无图了．

2．把图形中的始终不变的等量线段罗列出来，用含有 t 的式子表示这些线段的长．

3．点 C 的坐标始终可以表示为$(3t,2t)$，代入抛物线的解析式就可以计算此刻 OP 的长．

4．当两个等腰直角三角形有边共线时，会产生新的等腰直角三角形，列关于 t 的方程就可以求解了．

满分解答

(1) 因为抛物线 $y=-\frac{m-1}{4}x^2+\frac{5m}{4}x+m^2-3m+2$ 经过原点，所以 $m^2-3m+2=0$．解得 $m_1=2$，$m_2=1$（舍去）．因此 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x$．所以点 B 的坐标为（2，4）．

(2) ①如图 4，设 OP 的长为 t，那么 $PE=2t$，$EC=2t$，点 C 的坐标为$(3t,\ 2t)$．当点 C 落在抛物线上时，$2t=-\frac{1}{4}\times(3t)^2+\frac{5}{2}\times 3t$．解得 $t=OP=\frac{22}{9}$．

②如图 1，当两条斜边 PD 与 QM 在同一条直线上时，点 P、Q 重合．此时 $3t=10$．解

得$t=\dfrac{10}{3}$．

如图 2，当两条直角边 PC 与 MN 在同一条直线上，△PQN 是等腰直角三角形，PQ＝PE．此时$10-3t=2t$．解得$t=2$．

如图 3，当两条直角边 DC 与 QN 在同一条直线上，△PQC 是等腰直角三角形，PQ＝PD．此时$10-3t=4t$．解得$t=\dfrac{10}{7}$．

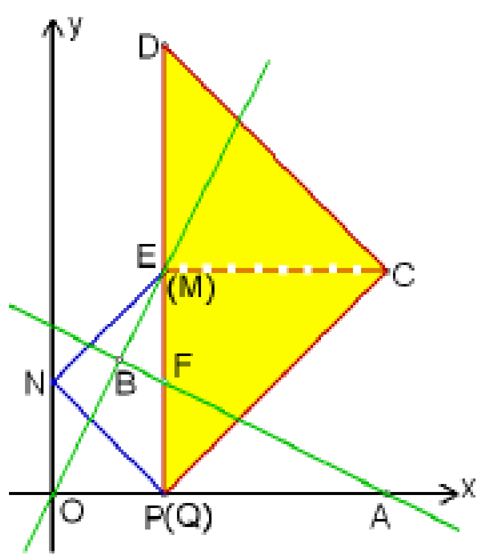


图 1

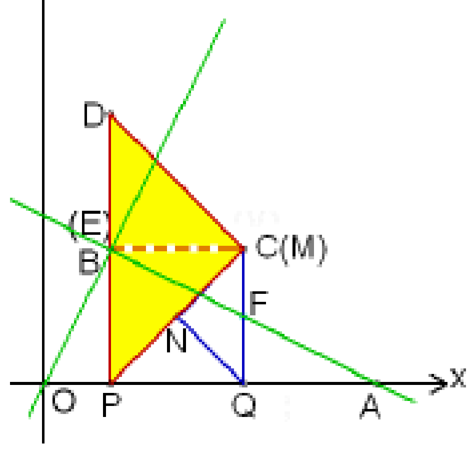


图 2

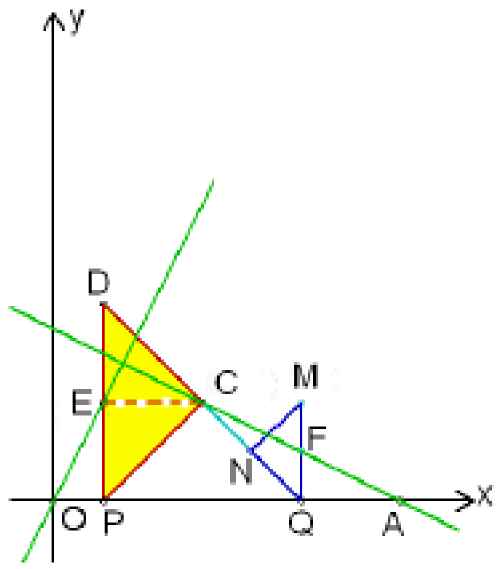


图 3

考点伸展

在本题情境下，如果以 PD 为直径的圆 E 与以 QM 为直径的圆 F 相切，求 t 的值．

如图 5，当 P、Q 重合时，两圆内切，$t=\dfrac{10}{3}$．

如图 6，当两圆外切时，$t=30-20\sqrt{2}$．

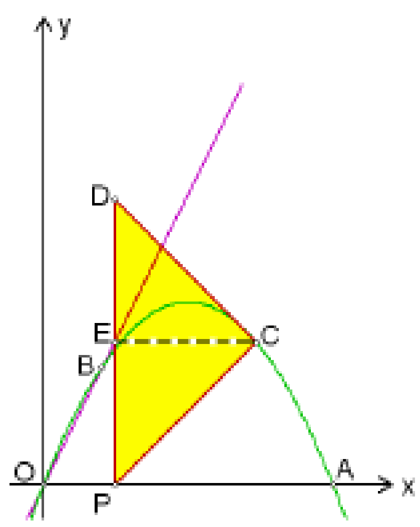


图 4

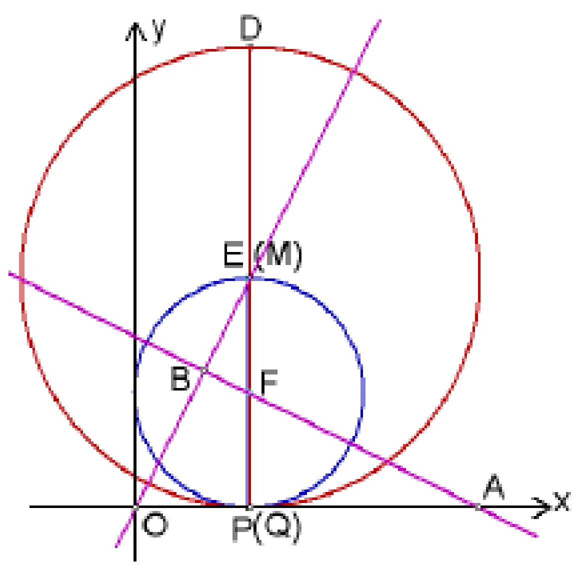


图 5

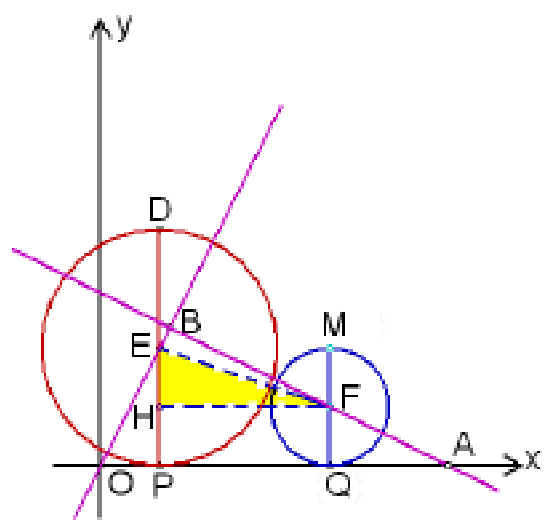


图 6

例 4　20XX 年嘉兴市中考第 24 题

如图 1，已知 A、B 是线段 MN 上的两点，$MN=4$，$MA=1$，$MB>1$．以 A 为中心顺时针旋转点 M，以 B 为中心逆时针旋转点 N，使 M、N 两点重合成一点 C，构成△ABC，设 $AB=x$．

（1）求 x 的取值范围；

（2）若△ABC 为直角三角形，求 x 的值；

（3）探究：△ABC 的最大面积？

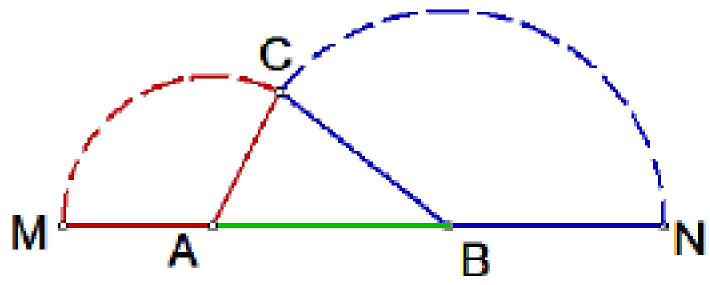


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“09 嘉兴 24”，拖动点 B 在 AN 上运动，可以体验到，三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边；$\angle CAB$ 和 $\angle ACB$ 可以成为直角，$\angle CBA$ 不可能成为直角；观察函数的图象，可以看到，图象是一个开口向下的“U”形，当 AB 等于 1.5 时，面积达到最大值．

思路点拨

1．根据三角形的两边之和大于第三边，两边之差小于第三边列关于 x 的不等式组，可以求得 x 的取值范围．

2．分类讨论直角三角形 ABC，根据勾股定理列方程，根据根的情况确定直角三角形的存在性．

3．把△ABC 的面积 S 的问题，转化为 $S2$的问题．AB 边上的高 CD 要根据位置关系分类讨论，分 CD 在三角形内部和外部两种情况．

满分解答

（1）在ΔABC 中，$AC=1$，$AB=x$，$BC=3-x$，所以$\begin{cases}1+x>3-x,\\1+3-x>x.\end{cases}$ 解得$1<x<2$．

（2）①若 AC 为斜边，则$1=x^2+(3-x)^2$，即 $x^2-3x+4=0$，此方程无实根．

②若 AB 为斜边，则 $x^2=(3-x)^2+1$，解得 $x=\frac{5}{3}$，满足$1<x<2$．

③若 BC 为斜边，则$(3-x)^2=1+x^2$，解得 $x=\frac{4}{3}$，满足$1<x<2$．

因此当 $x=\frac{5}{3}$ 或 $x=\frac{4}{3}$ 时，△ABC 是直角三角形．

（3）在ΔABC 中，作 $CD\perp AB$ 于 D，设 $CD=h$，ΔABC 的面积为 S，则 $S=\frac{1}{2}xh$．

①如图 2，若点 D 在线段 AB 上，则 $\sqrt{1-h^2}+\sqrt{(3-x)^2-h^2}=x$．移项，得 $\sqrt{(3-x)^2-h^2}=x-\sqrt{1-h^2}$．两边平方，得$(3-x)^2-h^2=x^2-2x\sqrt{1-h^2}+1-h^2$．整理，得 $x\sqrt{1-h^2}=3x-4$．两边平方，得 $x^2(1-h^2)=9x^2-24x+16$．整理，得 $x^2h^2=-8x^2+24x-16$

所以$S^2=\frac{1}{4}x^2h^2=-2x^2+6x-4=-2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}$（$\frac{4}{3}\leqslant x<2$）.

当$x=\frac{3}{2}$时（满足$\frac{4}{3}\leqslant x<2$），S^2取最大值$\frac{1}{2}$，从而S取最大值$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

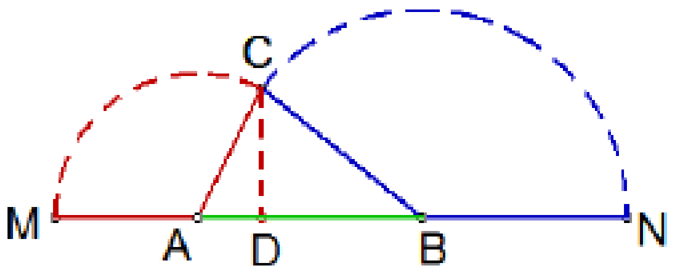


图 2

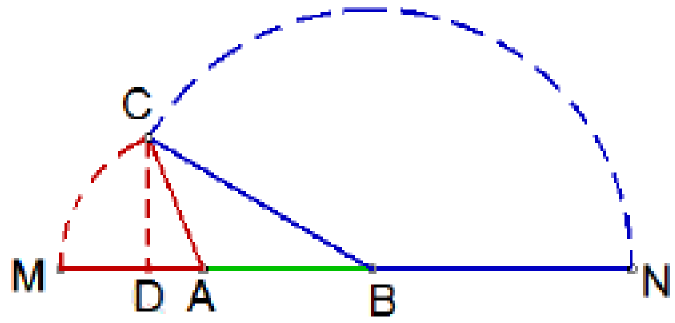


图 3

②如图 3，若点D在线段MA上，则$\sqrt{(3-x)^2-h^2}-\sqrt{1-h^2}=x$.

同理可得，$S^2=\frac{1}{4}x^2h^2=-2x^2+6x-4=-2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}$（$1<x\leqslant\frac{4}{3}$）.

易知此时$S<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

综合①②得，$\triangle ABC$的最大面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

考点伸展

第（3）题解无理方程比较烦琐，迂回一下可以避免烦琐的运算：设$AD=a$，

例如在图 2 中，由$AC^2-AD^2=BC^2-BD^2$列方程$1-a^2=(3-x)^2-(x-a)^2$.

整理，得$a=\frac{3x-4}{x}$. 所以

$$1-a^2=1-\left(\frac{3x-4}{x}\right)^2=\frac{-8x^2+24x-16}{x^2}.$$

因此

$$S^2=\frac{1}{4}x^2(1-a^2)=-2x^2+6x-4.$$

例 5　20XX 年河南省中考第 23 题

如图 1，直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 和 x 轴、y 轴的交点分别为 B、C，点 A 的坐标是（-2，0）．

（1）试说明△ABC 是等腰三角形；

（2）动点 M 从 A 出发沿 x 轴向点 B 运动，同时动点 N 从点 B 出发沿线段 BC 向点 C 运动，运动的速度均为每秒 1 个单位长度．当其中一个动点到达终点时，他们都停止运动．设 M 运动 t 秒时，△MON 的面积为 S．

① 求 S 与 t 的函数关系式；

② 设点 M 在线段 OB 上运动时，是否存在S＝4 的情形？若存在，求出对应的 t 值；若不存在请说明理由；

③在运动过程中，当△MON 为直角三角形时，求 t 的值．

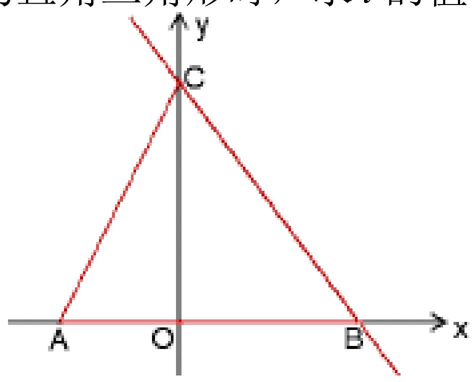


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“08 河南 23”，拖动点 M 从 A 向 B 运动，观察 S 随 t 变化的图象，可以体验到，当M 在 AO 上时，图象是开口向下的抛物线的一部分；当M 在 OB 上时，S 随 t 的增大而增大．

观察 S 的度量值，可以看到，S 的值可以等于 4．

观察△MON 的形状，可以体验到，△MON 可以两次成为直角三角形，不存在∠ONM＝90°的可能．

思路点拨

1．第（1）题说明△ABC 是等腰三角形，暗示了两个动点 M、N 同时出发，同时到达终点．

2．不论 M 在 AO 上还是在 OB 上，用含有 t 的式子表示 OM 边上的高都是相同的，用含有 t 的式子表示 OM 要分类讨论．

3．将 S＝4 代入对应的函数解析式，解关于 t 的方程．

4．分类讨论△MON 为直角三角形，不存在∠ONM＝90°的可能．

满分解答

（1）直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 与 x 轴的交点为 B（3，0）、与 y 轴的交点 C（0，4）．Rt△BOC 中，OB＝3，OC＝4，所以 BC＝5．点 A 的坐标是（-2，0），所以 BA＝5．因此 BC＝BA，所以△ABC 是等腰三角形．

（2）①如图 2，图 3，过点 N 作 NH⊥AB，垂足为 H．在 Rt△BNH 中，BN＝t，$\sin B=\frac{4}{5}$，所以 $NH=\frac{4}{5}t$．

如图 2，当 M 在 AO 上时，OM＝2－t，此时

$$S=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot NH=\frac{1}{2}(2-t)\times\frac{4}{5}t=-\frac{2}{5}t2+\frac{4}{5}t.$$

定义域为 0＜t≤2．

如图 3，当 M 在 OB 上时，$OM=t-2$，此时

$$S=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot NH=\frac{1}{2}(t-2)\times\frac{4}{5}t=\frac{2}{5}t^2-\frac{4}{5}t.$$

定义域为 $2<t\leqslant 5$.

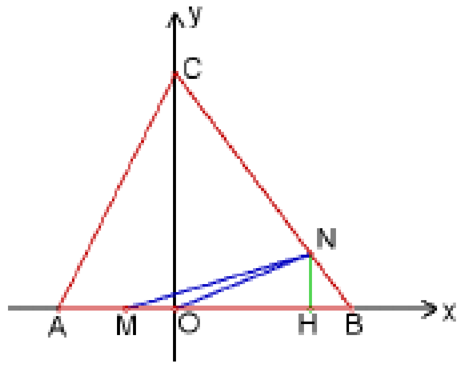


图 2

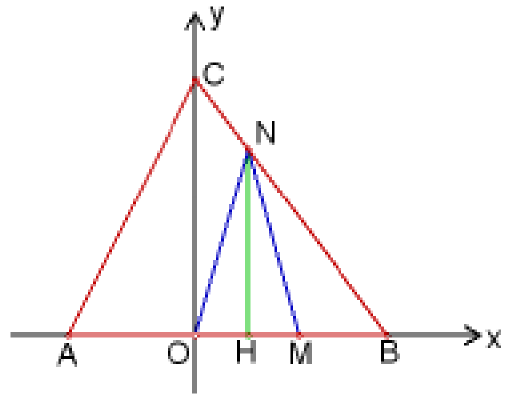


图 3

②把 $S=4$ 代入 $S=\frac{2}{5}t^2-\frac{4}{5}t$，得 $\frac{2}{5}t^2-\frac{4}{5}t=4$．解得 $t_1=2+\sqrt{11}$，$t_2=2-\sqrt{11}$（舍去负值）．因此，当点 M 在线段 OB 上运动时，存在 $S=4$ 的情形，此时 $t=2+\sqrt{11}$．

③如图 4，当 $\angle OMN=90°$ 时，在 Rt△BNM 中，$BN=t$，$BM=5-t$，$\cos B=\frac{3}{5}$，所以 $\frac{5-t}{t}=\frac{3}{5}$．解得 $t=\frac{25}{8}$．

如图 5，当 $\angle OMN=90°$ 时，N 与 C 重合，$t=5$．不存在 $\angle ONM=90°$ 的可能．

所以，当 $t=\frac{25}{8}$ 或者 $t=5$ 时，△MON 为直角三角形．

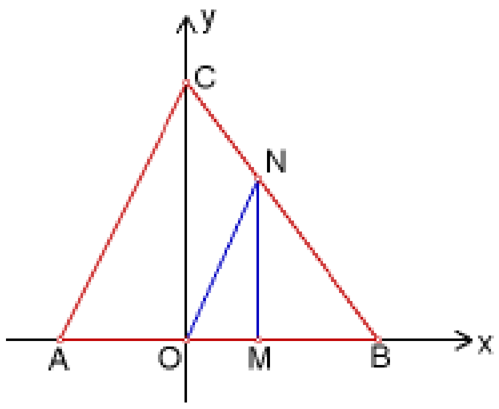


图 4

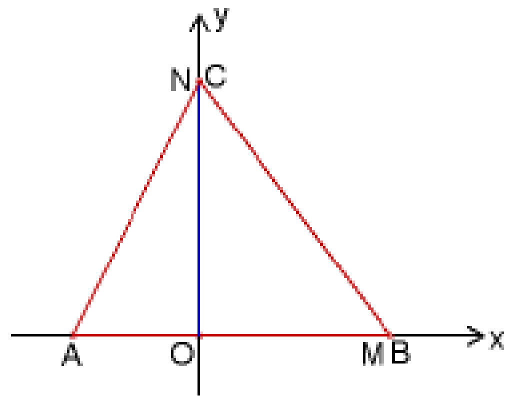


图 5

考点伸展

在本题情景下，如果△MON 的边与 AC 平行，求 t 的值．

如图 6，当 $ON//AC$ 时，$t=3$；如图 7，当 $MN//AC$ 时，$t=2.5$．

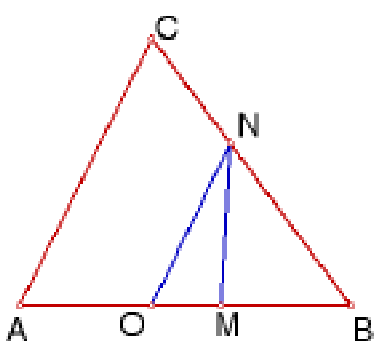


图 6

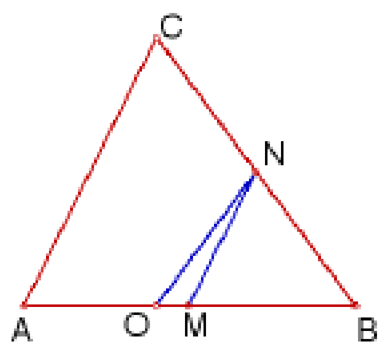


图 7

例 6　20XX 年天津市中考第 25 题

已知 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CA=CB$，有一个圆心角为$45°$，半径的长等于CA的扇形CEF 绕点 C 旋转，且直线 CE，CF 分别与直线AB 交于点 M，N.

（1）当扇形CEF绕点 C 在$\angle ACB$ 的内部旋转时，如图1，求证：$MN^2=AM^2+BN^2$；

思路点拨：考虑$MN^2=AM^2+BN^2$符合勾股定理的形式，需转化为在直角三角形中解决．可将$\triangle ACM$ 沿直线CE 对折，得$\triangle DCM$，连DN，只需证$DN=BN$，$\angle MDN=90°$就可以了．请你完成证明过程.

（2）当扇形 CEF 绕点 C 旋转至图 2 的位置时，关系式$MN^2=AM^2+BN^2$是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请说明理由.

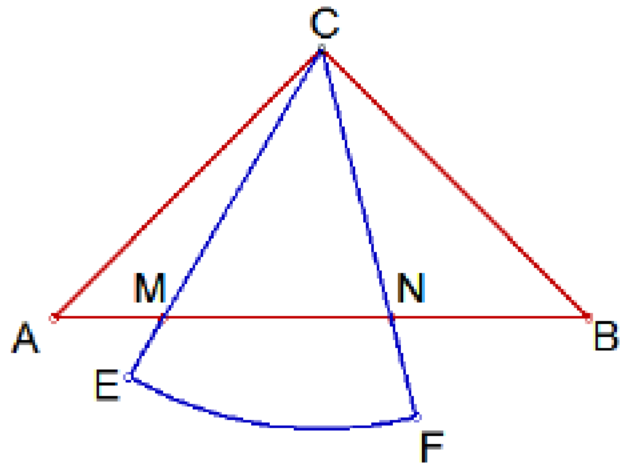


图 1

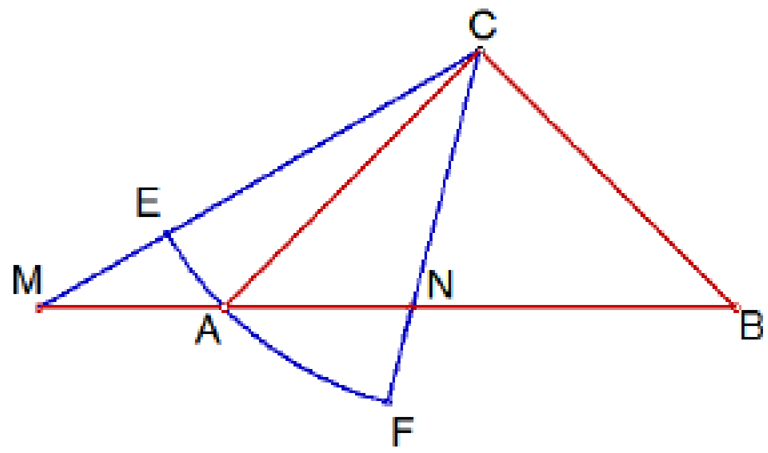


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“08 天津 25”，拖动点 E 绕点 C 任意旋转，可以体验到，△ACM≌△DCM，△BCN≌△DCN．观察度量值，可以看到∠MDN 总是等于 90°．

思路点拨

1．本题的证明思路是构造△ACM≌△DCM，证明△BCN≌△DCN.

2．证明△BCN≌△DCN 的关键是证明$\angle DCN=\angle BCN$.

3．证明的结论是勾股定理的形式，基本思路是把三条线段 AM、BN、MN 集中在一个三角形中，设法证明这个三角形是直角三角形.

满分解答

（1）如图 3，将$\triangle ACM$ 沿直线CE 对折，得$\triangle DCM$，连DN，则$\triangle DCM\cong\triangle ACM$．因此$CD=CA$，$DM=AM$，$\angle DCM=\angle ACM$，$\angle CDM=\angle A$.

又由 $CA=CB$，得 $CD=CB$．由 $\angle DCN=\angle ECF-\angle DCM=45°-\angle DCM$，$\angle BCN=\angle ACB-\angle ECF-\angle ACM=90°-45°-\angle ACM=45°-\angle ACM$，得$\angle DCN=\angle BCN$.

又$CN=CN$，所以$\triangle CDN\cong\triangle CBN$．因此$DN=BN$，$\angle CDN=\angle B$.

所以$\angle MDN=\angle CDM+\angle CDN=\angle A+\angle B=90°$.

在 Rt$\triangle MDN$中，由勾股定理，得$MN^2=DM^2+DN^2$．即$MN^2=AM^2+BN^2$.

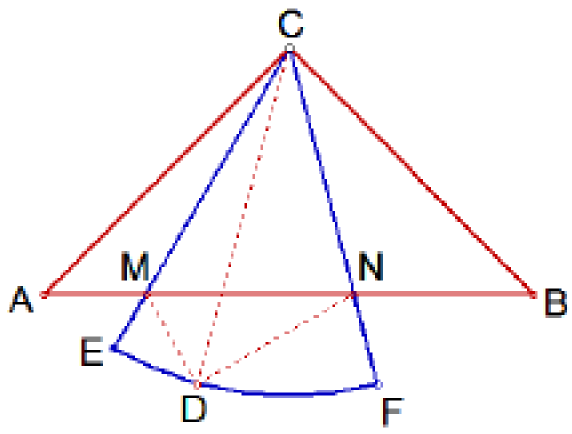


图 3

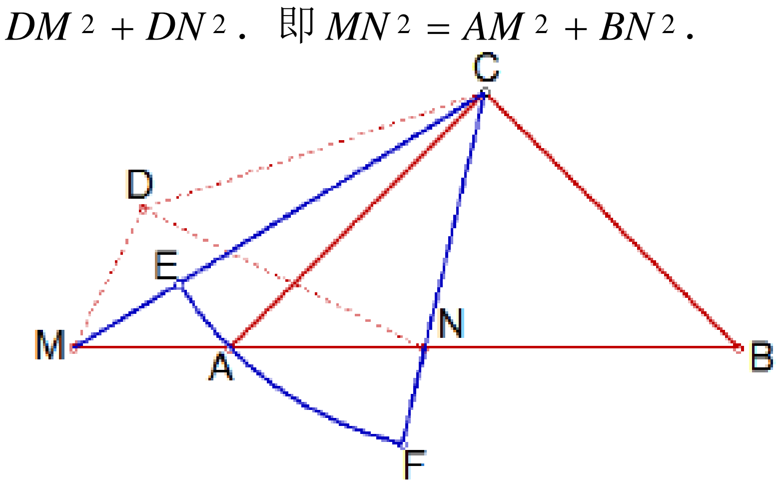


图 4

（2）关系式$MN^2 = AM^2 + BN^2$仍然成立.

如图4，将$\triangle ACM$沿直线CE对折，得$\triangle DCM$，连DN，则$\triangle DCM \cong \triangle ACM$.

所以$CD = CA$，$DM = AM$，$\angle DCM = \angle ACM$，$\angle CDM = \angle CAM$.

又由$CA = CB$，得$CD = CB$.由$\angle DCN = \angle DCM + \angle ECF = \angle DCM + 45^\circ$，$\angle BCN = \angle ACB - \angle ACN = 90^\circ - (\angle ECF - \angle ACM) = 45^\circ + \angle ACM$，得$\angle DCN = \angle BCN$.

又$CN = CN$，所以$\triangle CDN \cong \triangle CBN$.因此$DN = BN$，$\angle CDN = \angle B = 45^\circ$.

又由于

$$\angle CDM = \angle CAM = 180^\circ - \angle CAB = 135^\circ,$$

所以$\angle MDN = \angle CDM - \angle CDN = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$.

在Rt$\triangle MDN$中，由勾股定理，得$MN^2 = DM^2 + DN^2$.即$MN^2 = AM^2 + BN^2$.

考点伸展

当扇形CEF绕点C旋转至图5，图6，图7的位置时，关系式$MN^2 = AM^2 + BN^2$仍然成立.

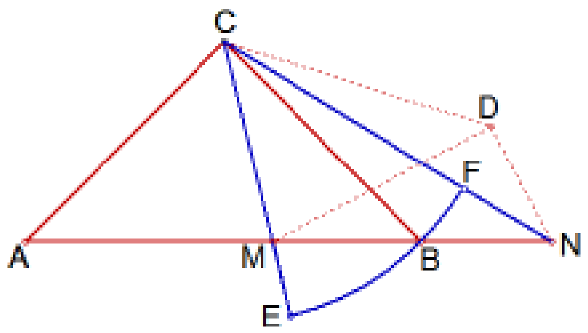


图5

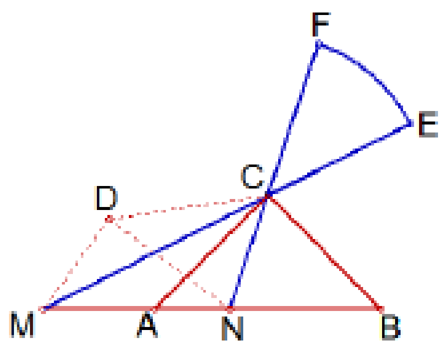


图6

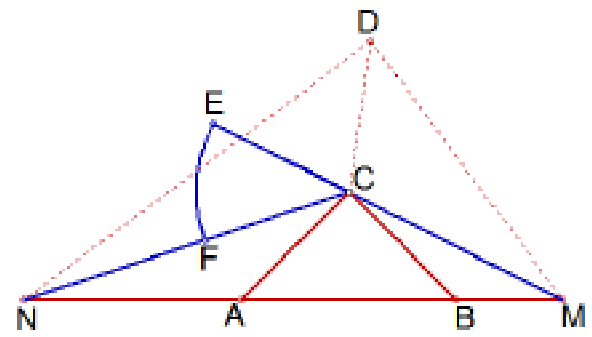


图7

1.4 因动点产生的平行四边形问题

例 1　20XX 年上海市中考第 24 题

已知平面直角坐标系 xOy（如图 1），一次函数 $y=\frac{3}{4}x+3$ 的图像与 y 轴交于点 A，点 M 在正比例函数 $y=\frac{3}{2}x$ 的图像上，且 $MO=MA$．二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像经过点 A、M．

（1）求线段 AM 的长；

（2）求这个二次函数的解析式；

（3）如果点 B 在 y 轴上，且位于点 A 下方，点 C 在上述二次函数的图像上，点 D 在一次函数 $y=\frac{3}{4}x+3$ 的图像上，且四边形 $ABCD$ 是菱形，求点 C 的坐标．

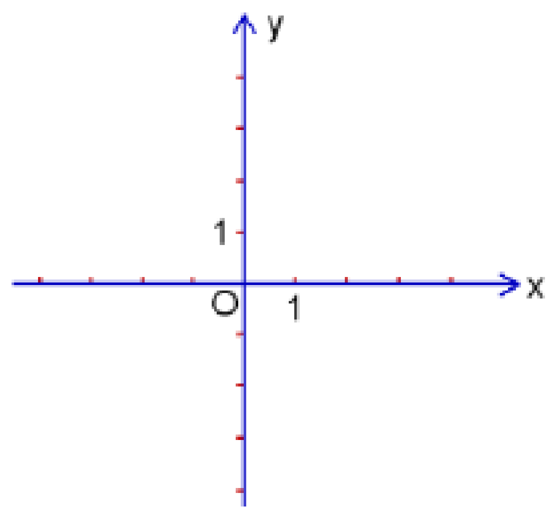


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“11 上海 24”，拖动点 B 在 y 轴上点 A 下方运动，四边形 $ABCD$ 保持菱形的形状，可以体验到，菱形的顶点 C 有一次机会落在抛物线上．

思路点拨

1．本题最大的障碍是没有图形，准确画出两条直线是基本要求，抛物线可以不画出来，但是对抛物线的位置要心中有数．

2．根据 $MO=MA$ 确定点 M 在 OA 的垂直平分线上，并且求得点 M 的坐标，是整个题目成败的一个决定性步骤．

3．第（3）题求点 C 的坐标，先根据菱形的边长、直线的斜率，用待定字母 m 表示点 C 的坐标，再代入抛物线的解析式求待定的字母 m．

满分解答

（1）当 $x=0$ 时，$y=\frac{3}{4}x+3=3$，所以点 A 的坐标为(0，3)，$OA=3$．

如图 2，因为 $MO=MA$，所以点 M 在 OA 的垂直平分线上，点 M 的纵坐标为 $\frac{3}{2}$．将 $y=\frac{3}{2}$ 代入 $y=\frac{3}{2}x$，得 $x=1$．所以点 M 的坐标为 $(1,\frac{3}{2})$．因此 $AM=\frac{\sqrt{13}}{2}$．

（2）因为抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 A(0，3)、$M(1,\frac{3}{2})$，所以 $\begin{cases}c=3,\\ 1+b+c=\frac{3}{2}.\end{cases}$ 解得 $b=-\frac{5}{2}$，$c=3$．所以二次函数的解析式为 $y=x^2-\frac{5}{2}x+3$．

（3）如图 3，设四边形 $ABCD$ 为菱形，过点 A 作 $AE\perp CD$，垂足为 E．

在 Rt△ADE 中，设 $AE=4m$，$DE=3m$，那么 $AD=5m$．

因此点 C 的坐标可以表示为($4m$，$3-2m$)．将点 C($4m$，$3-2m$)代入 $y=x^2-\frac{5}{2}x+3$，得 $3-2m=16m^2-10m+3$．解得 $m=\frac{1}{2}$ 或者 $m=0$（舍去）．

因此点 C 的坐标为（2，2）.

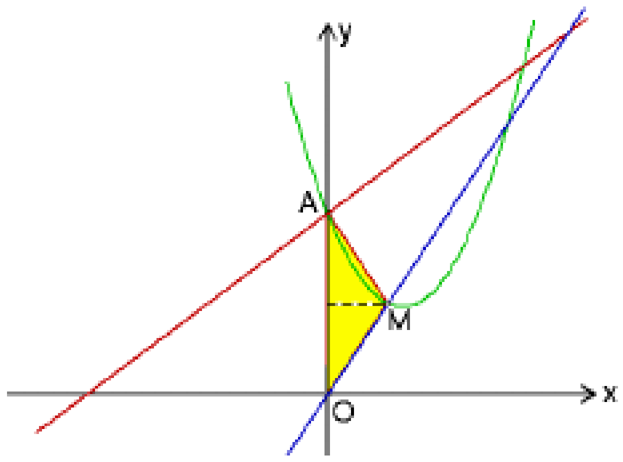


图 2

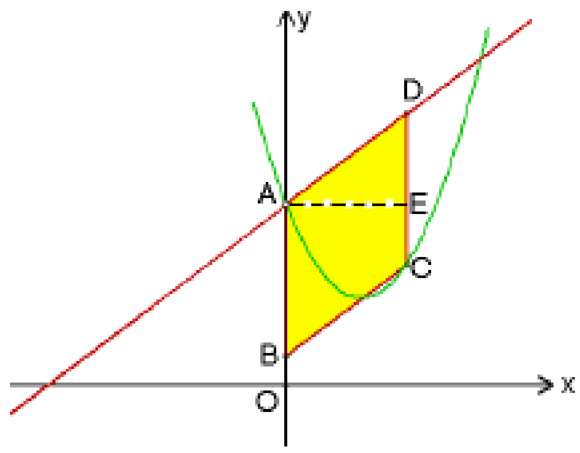


图 3

考点伸展

如果第（3）题中，把“四边形 $ABCD$ 是菱形”改为“以 A、B、C、D 为顶点的四边形是菱形”，那么还存在另一种情况：

如图 4，点 C 的坐标为$(\frac{7}{4},\frac{27}{16})$.

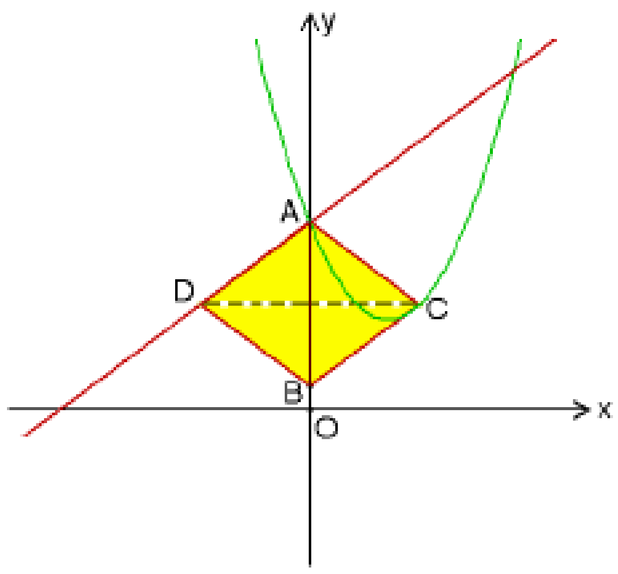


图 4

例 2　20XX 年江西省中考第 24 题

将抛物线 c_1：$y=-\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}$ 沿 x 轴翻折，得到抛物线 c_2，如图 1 所示．

（1）请直接写出抛物线 c_2 的表达式；

（2）现将抛物线 c_1 向左平移 m 个单位长度，平移后得到新抛物线的顶点为 M，与 x 轴的交点从左到右依次为 A、B；将抛物线 c_2 向右也平移 m 个单位长度，平移后得到新抛物线的顶点为 N，与 x 轴的交点从左到右依次为 D、E．

①当 B、D 是线段 AE 的三等分点时，求 m 的值；

②在平移过程中，是否存在以点 A、N、E、M 为顶点的四边形是矩形的情形？若存在，请求出此时 m 的值；若不存在，请说明理由．

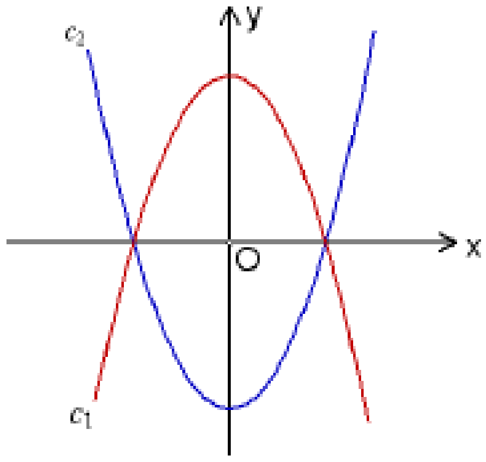


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“11 江西 24”，拖动点 M 向左平移，可以体验到，四边形 $ANEM$ 可以成为矩形，此时 B、D 重合在原点．观察 B、D 的位置关系，可以体验到，B、D 是线段 AE 的三等分点，存在两种情况．

思路点拨

1．把 A、B、D、E、M、N 六个点起始位置的坐标罗列出来，用 m 的式子把这六个点平移过程中的坐标罗列出来．

2．B、D 是线段 AE 的三等分点，分两种情况讨论，按照 AB 与 AE 的大小写出等量关系列关于 m 的方程．

3．根据矩形的对角线相等列方程．

满分解答

（1）抛物线 c_2 的表达式为 $y=\sqrt{3}x2-\sqrt{3}$．

（2）抛物线 c_1：$y=-\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}$ 与 x 轴的两个交点为(－1，0)、(1，0)，顶点为$(0,\sqrt{3})$．

抛物线 c_2：$y=\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}$ 与 x 轴的两个交点也为(－1，0)、(1，0)，顶点为$(0,-\sqrt{3})$．

抛物线 c_1 向左平移 m 个单位长度后，顶点 M 的坐标为$(-m,\sqrt{3})$，与 x 轴的两个交点为 $A(-1-m,0)$、$B(1-m,0)$，AB＝2．

抛物线 c_2 向右平移 m 个单位长度后，顶点 N 的坐标为$(m,-\sqrt{3})$，与 x 轴的两个交点为 $D(-1+m,0)$、$E(1+m,0)$．所以 AE＝(1＋m)－(－1－m)＝2(1＋m)．

①B、D 是线段 AE 的三等分点，存在两种情况：

情形一，如图2，B 在 D 的左侧，此时 $AB=\frac{1}{3}AE=2$，AE＝6．所以 2(1＋m)＝6．解得 m＝2．

情形二，如图3，B 在 D 的右侧，此时 $AB=\frac{2}{3}AE=2$，AE＝3．所以 2(1＋m)＝3．解得

$m\quad\frac{1}{2}$.

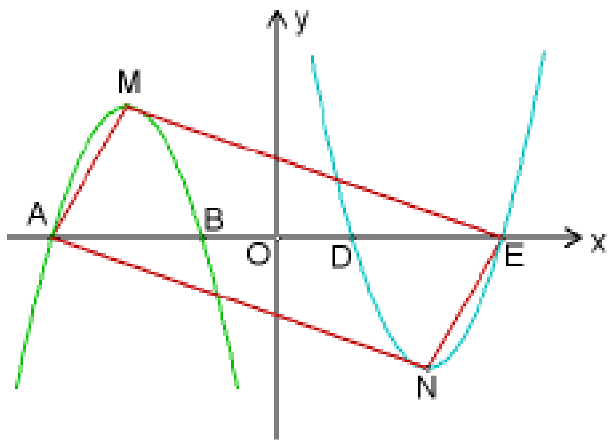


图 2

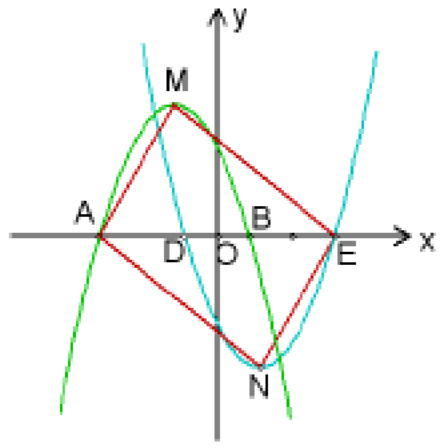


图 3

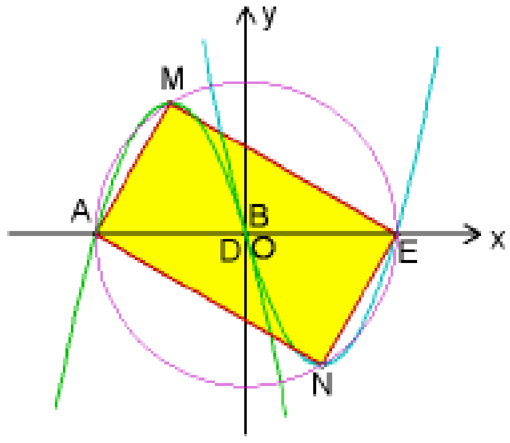


图 4

②如果以点 A、N、E、M 为顶点的四边形是矩形，那么 $AE=MN=2OM$．而 $OM^2=m^2+3$，所以 $4(1+m)^2=4(m^2+3)$．解得 $m=1$（如图 4）．

考点伸展

第（2）题②，探求矩形 $ANEM$，也可以用几何说理的方法：

在等腰三角形 ABM 中，因为 $AB=2$，AB 边上的高为$\sqrt{3}$，所以△ABM 是等边三角形．

同理△DEN 是等边三角形．当四边形 $ANEM$ 是矩形时，B、D 两点重合．

因为起始位置时 $BD=2$，所以平移的距离 $m=1$．

例 3　　20XX 年河南省中考第 23 题

如图 1，在平面直角坐标系中，已知抛物线经过 $A(-4,0)$、$B(0,-4)$、$C(2,0)$三点．

（1）求抛物线的解析式；

（2）若点 M 为第三象限内抛物线上一动点，点 M 的横坐标为 m，△MAB 的面积为 S，求 S 关于 m 的函数关系式，并求出 S 的最大值；

（3）若点 P 是抛物线上的动点，点 Q 是直线 $y=-x$ 上的动点，判断有几个位置能使以点 P、Q、B、O 为顶点的四边形为平行四边形，直接写出相应的点 Q 的坐标．

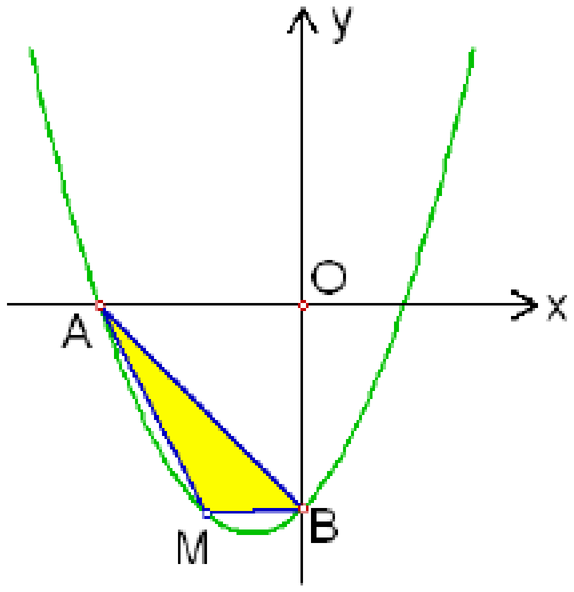


图 1

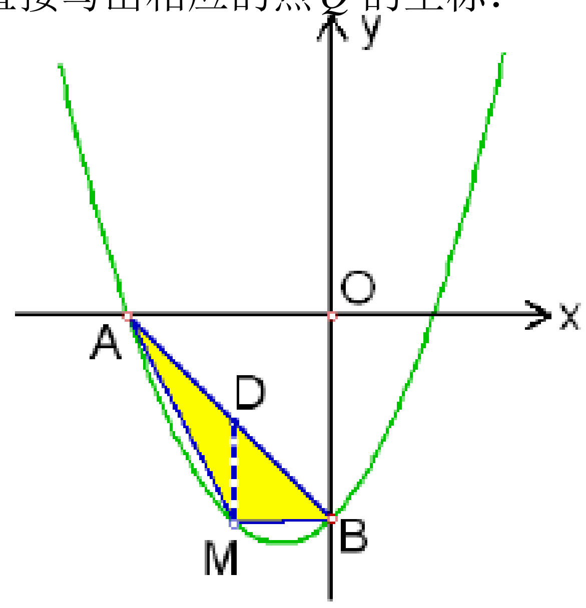


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“10 河南 23”，拖动点 M 在第三象限内抛物线上运动，观察 S 随 m 变化的图像，可以体验到，当 D 是 AB 的中点时，S 取得最大值．拖动点 Q 在直线 $y=-x$ 上运动，可以体验到，以点 P、Q、B、O 为顶点的四边形有 3 个时刻可以成为平行四边形，双击按钮可以准确显示．

思路点拨

1．求抛物线的解析式，设交点式比较简便．

2．把△MAB 分割为共底 MD 的两个三角形，高的和为定值 OA．

3．当 PQ 与 OB 平行且相等时，以点 P、Q、B、O 为顶点的四边形是平行四边形，按照 P、Q 的上下位置关系，分两种情况列方程．

满分解答

(1) 因为抛物线与 x 轴交于 $A(-4,0)$、$C(2,0)$两点，设 $y=a(x+4)(x-2)$．代入点 $B(0,-4)$，求得 $a=\frac{1}{2}$．所以抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}(x+4)(x-2)=\frac{1}{2}x^2+x-4$．

(2)如图 2，直线 AB 的解析式为 $y=-x-4$．过点 M 作 x 轴的垂线交 AB 于 D，那么 $MD=(-m-4)-(\frac{1}{2}m^2+m-4)=-\frac{1}{2}m^2-2m$．所以

$$S=S_{\triangle MDA}+S_{\triangle MDB}=\frac{1}{2}MD\cdot OA=-m^2-4m=-(m+2)^2+4.$$

因此当 $m=-2$ 时，S 取得最大值，最大值为 4．

(3) 如果以点 P、Q、B、O 为顶点的四边形是平行四边形，那么 $PQ//OB$，$PQ=OB=4$．

设点 Q 的坐标为 $(x,-x)$，点 P 的坐标为 $(x,\frac{1}{2}x^2+x-4)$．

①当点 P 在点 Q 上方时，$(\frac{1}{2}x2+x-4)-(-x)=4$．解得 $x=-2\pm2\sqrt{5}$．

此时点 Q 的坐标为 $(-2+2\sqrt{5},2-2\sqrt{5})$（如图 3），或 $(-2-2\sqrt{5},2+2\sqrt{5})$（如图 4）．

②当点 Q 在点 P 上方时，$(-x)-(\frac{1}{2}x2+x-4)=4$．

解得 $x=-4$ 或 $x=0$（与点 O 重合，舍去）．此时点 Q 的坐标为(－4,4)（如图 5）．

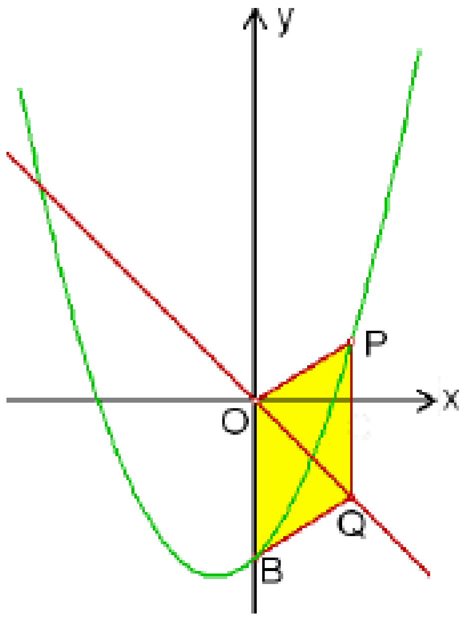


图 3

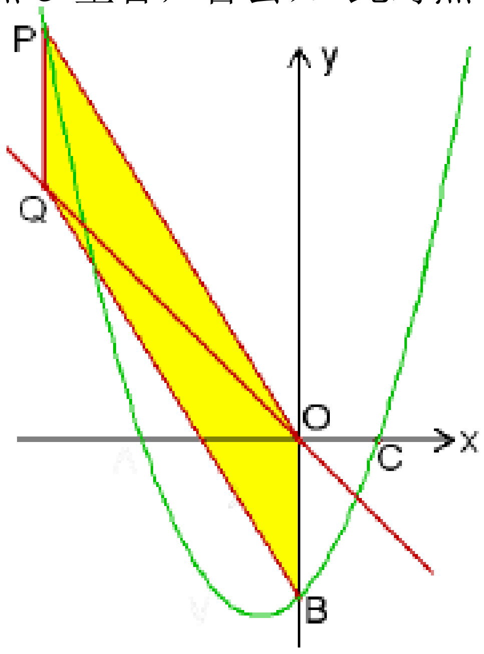


图 4

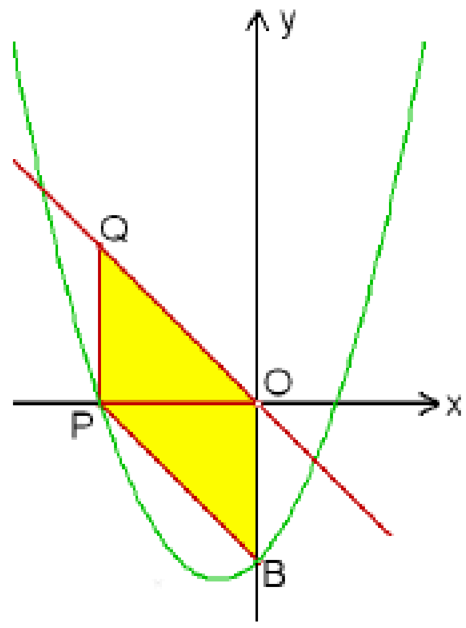


图 5

考点伸展

在本题情境下，以点 P、Q、B、O 为顶点的四边形能成为直角梯形吗？

如图 6，Q(2,－2)；如图 7，Q(－2,2)；如图 8，Q(4,－4)．

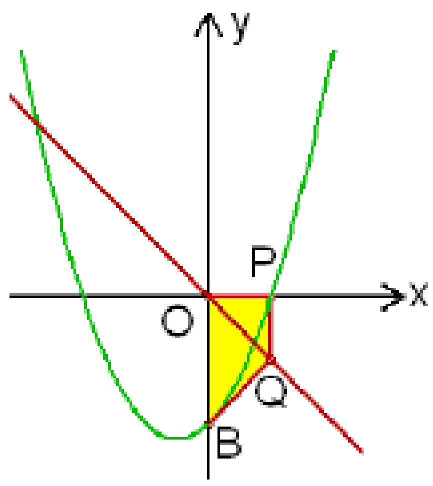


图 6

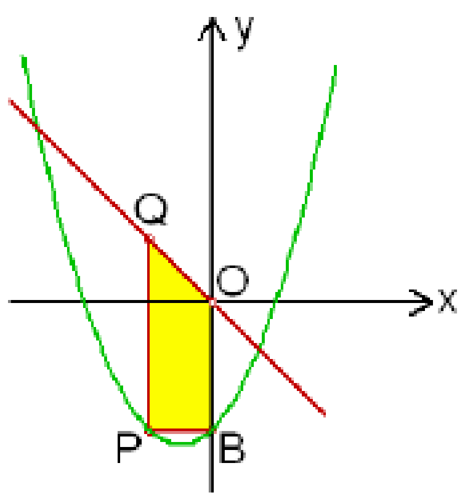


图 7

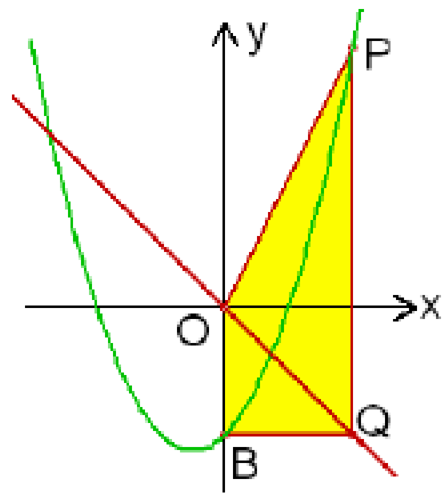


图 8

例 4　　20XX 年山西省中考第 26 题

在直角梯形 $OABC$ 中，$CB//OA$，$\angle COA=90°$，$CB=3$，$OA=6$，$BA=3\sqrt{5}$．分别以 OA、OC 边所在直线为 x 轴、y 轴建立如图 1 所示的平面直角坐标系．

（1）求点 B 的坐标；

（2）已知 D、E 分别为线段 OC、OB 上的点，$OD=5$，$OE=2EB$，直线 DE 交 x 轴于点 F．求直线 DE 的解析式；

（3）点 M 是（2）中直线 DE 上的一个动点，在 x 轴上方的平面内是否存在另一点 N，使以 O、D、M、N 为顶点的四边形是菱形？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．

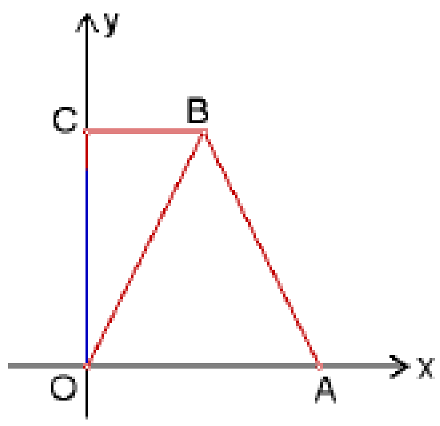


图 1

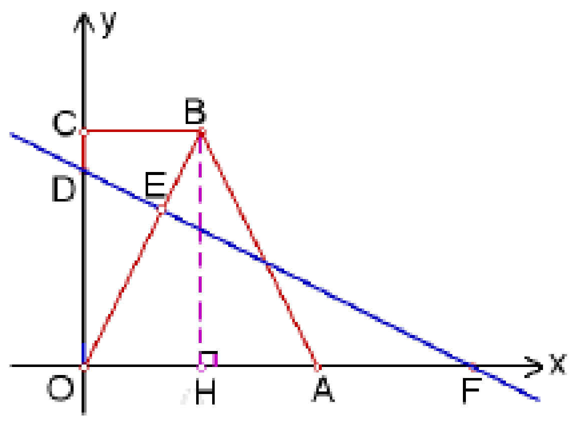


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“10 山西 26”，拖动点 M 可以在直线 DE 上运动．分别双击按钮“DO、DM 为邻边”、“ DO、DN 为邻边”和“DO 为对角线”可以准确显示菱形．

思路点拨

1．第（1）题和第（2）题蕴含了 OB 与 DF 垂直的结论，为第（3）题讨论菱形提供了计算基础．

2．讨论菱形要进行两次（两级）分类，先按照 DO 为边和对角线分类，再进行二级分类，DO 与 DM、DO 与 DN 为邻边．

满分解答

(1)如图 2，作 $BH\perp x$ 轴，垂足为 H，那么四边形 $BCOH$ 为矩形，$OH=CB=3$．

在 Rt$\triangle ABH$ 中，$AH=3$，$BA=3\sqrt{5}$，所以 $BH=6$．因此点 B 的坐标为(3,6)．

(2) 因为 $OE=2EB$，所以 $x_E=\dfrac{2}{3}x_B=2$，$y_E=\dfrac{2}{3}y_B=4$，$E(2,4)$．

设直线 DE 的解析式为 $y=kx+b$，代入 $D(0,5)$，$E(2,4)$，得 $\begin{cases}b=5,\\2k+b=4.\end{cases}$ 解得 $k=-\dfrac{1}{2}$，$b=5$．所以直线 DE 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+5$．

(3) 由 $y=-\dfrac{1}{2}x+5$，知直线 DE 与 x 轴交于点 $F(10,0)$，$OF=10$，$DF=5\sqrt{5}$．

①如图 3，当 DO 为菱形的对角线时，MN 与 DO 互相垂直平分，点 M 是 DF 的中点．此时点 M 的坐标为$(5,\dfrac{5}{2})$，点 N 的坐标为$(-5,\dfrac{5}{2})$．

②如图 4，当 DO、DN 为菱形的邻边时，点 N 与点 O 关于点 E 对称，此时点 N 的坐标为(4,8)．

③如图 5，当 DO、DM 为菱形的邻边时，$NO=5$，延长 MN 交 x 轴于 P．

由△NPO∽△DOF，得 $\frac{NP}{DO}=\frac{PO}{OF}=\frac{NO}{DF}$，即 $\frac{NP}{5}=\frac{PO}{10}=\frac{5}{5\sqrt{5}}$．解得 $NP=\sqrt{5}$，$PO=2\sqrt{5}$．此时点 N 的坐标为$(-2\sqrt{5},\sqrt{5})$．

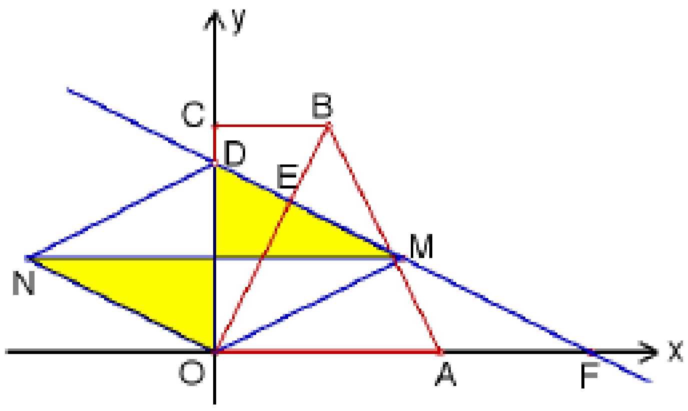


图 3

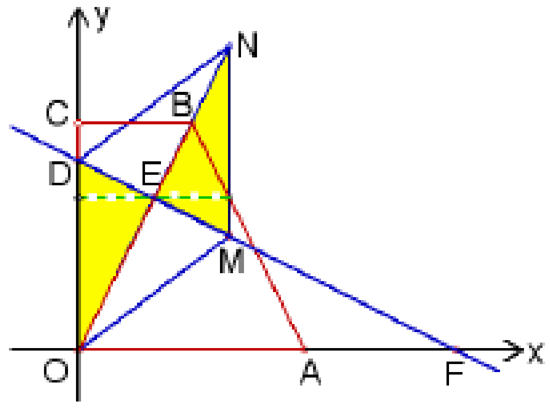


图 4

考点伸展

如果第（3）题没有限定点 N 在 x 轴上方的平面内，那么菱形还有如图6 的情形．

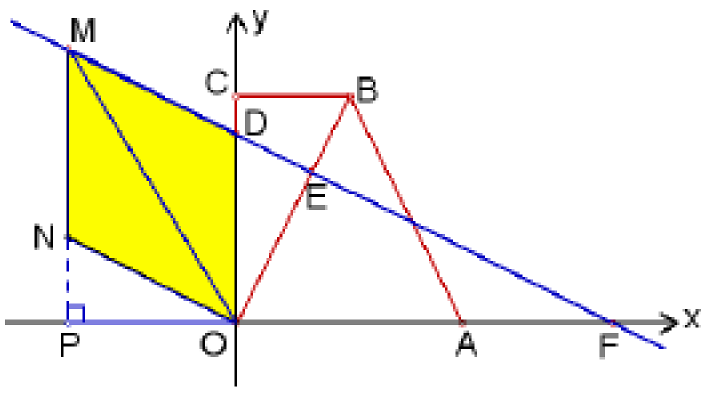


图 5

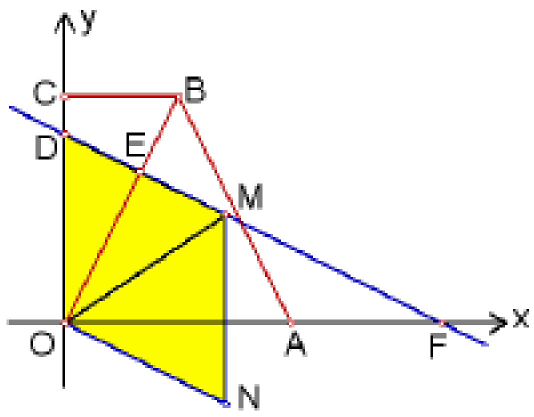


图 6

例 5　20XX 年福州市中考第 21 题

如图 1，等边△*ABC* 的边长为 4，*E* 是边 *BC* 上的动点，*EH*⊥*AC* 于 *H*，过 *E* 作 *EF*∥*AC*，交线段 *AB* 于点 *F*，在线段 *AC* 上取点 *P*，使 *PE*＝*EB*．设 *EC*＝*x*（$0<x\leqslant 2$）．

（1）请直接写出图中与线段 *EF* 相等的两条线段（不再另外添加辅助线）；

（2）*Q* 是线段 *AC* 上的动点，当四边形 *EFPQ* 是平行四边形时，求平行四边形 *EFPQ* 的面积（用含 *x* 的代数式表示）；

（3）当（2）中 的平行四边形 *EFPQ* 面积最大值时，以 *E* 为圆心，*r* 为半径作圆，根据⊙*E* 与此时平行四边形 *EFPQ* 四条边交点的总个数，求相应的 r 的取值范围．

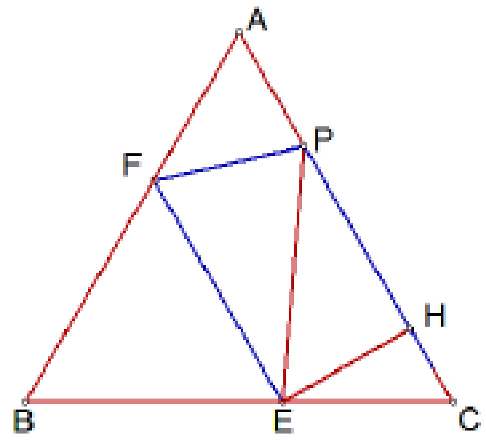


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“09 福州 21”，拖动点 *E* 在 *BC* 上运动，观察面积随 *x* 变化的图象，可以体验到，当 *E* 是 *BC* 的中点时，平行四边形 *EFPQ* 的面积最大，此时四边形 *EFPQ* 是菱形．

拖动点 *M* 在 *BC* 的垂直平分线上运动可以改变⊙*E* 的大小，可以体验到，⊙*E* 与平行四边形 *EFPQ* 四条边交点的总个数可能为 2，4，6，3，0．

思路点拨

1．如何用含有 *x* 的式子表示平行四边形的边 *PQ*，第（1）题作了暗示．

2．通过计算，求出平行四边形面积最大时的 *x* 值，准确、规范地画出此时的图形是解第（3）题的关键，此时点 *E* 是 *BC* 的中点，图形充满了特殊性．

3．画出两个同心圆可以帮助探究、理解第（3）题：过点 *H* 的圆，过点 *C* 的圆．

满分解答

（1）*BE*、*PE*、*BF* 三条线段中任选两条．

（2）如图 2，在 Rt△*CEH* 中，∠*C*＝60°，*EC*＝*x*，所以 $EH=\frac{\sqrt{3}}{2}x$．因为 *PQ*＝*FE*＝*BE*＝4－*x*，所以 $S_{平行四边形EFPQ}=PQ\cdot EH=\frac{\sqrt{3}}{2}x(4-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2\sqrt{3}x$．

（3）因为 $S_{平行四边形EFPQ}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2\sqrt{3}x=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)^2+2\sqrt{3}$，所以当 *x*＝2 时，平行四边形 *EFPQ* 的面积最大．

此时 *E*、*F*、*P* 分别为△*ABC* 的三边 *BC*、*AB*、*AC* 的中点，且 *C*、*Q* 重合，四边形 *EFPQ* 是边长为 2 的菱形（如图 3）．

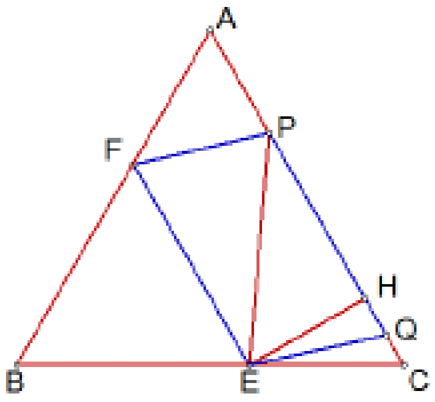


图 2

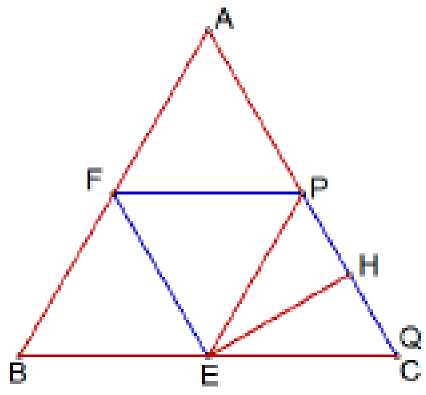


图 3

过点 E 点作 $ED\perp FP$ 于 D，则 $ED=EH=\sqrt{3}$.

如图 4，当⊙E 与平行四边形 $EFPQ$ 的四条边交点的总个数是 2 个时，$0<r<\sqrt{3}$ ；

如图 5，当⊙E 与平行四边形 $EFPQ$ 的四条边交点的总个数是 4 个时，$r=\sqrt{3}$ ；

如图 6，当⊙E 与平行四边形 $EFPQ$ 的四条边交点的总个数是 6 个时，$\sqrt{3}<r<2$;

如图 7，当⊙E 与平行四边形 $EFPQ$ 的四条边交点的总个数是 3 个时，$r=2$ 时；

如图 8，当⊙E 与平行四边形 $EFPQ$ 的四条边交点的总个数是 0 个时，$r>2$ 时．

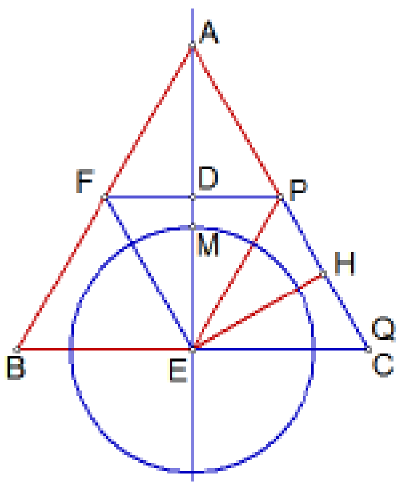


图 4

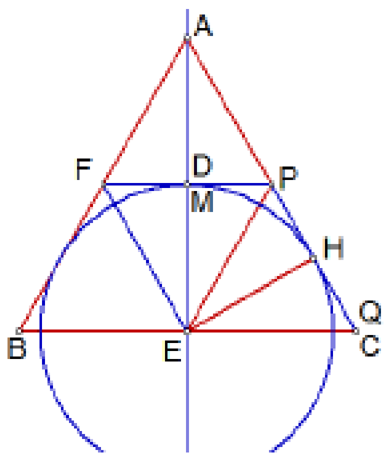


图 5

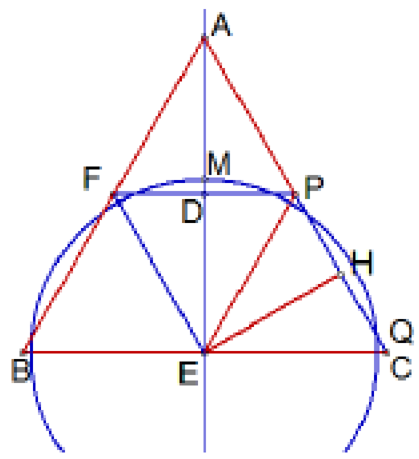


图 6

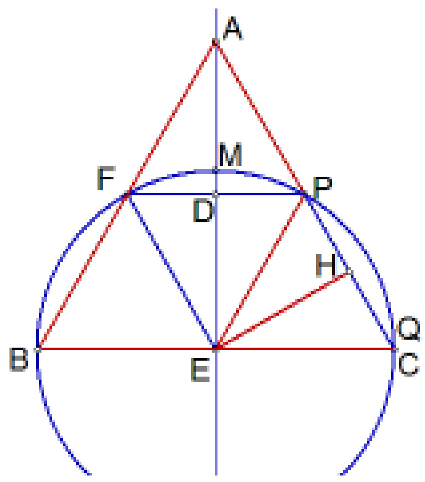


图 7

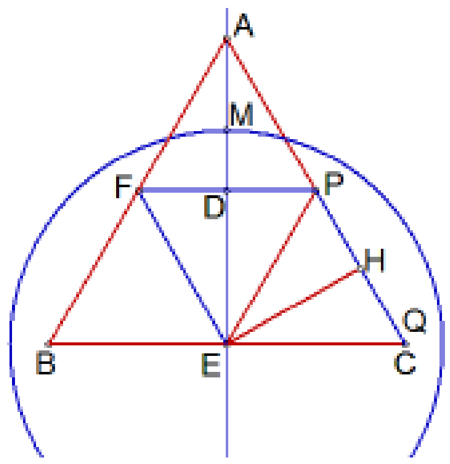


图 8

考点伸展

本题中 E 是边 BC 上的动点，设 $EC=x$，如果没有限定 $0<x\leqslant 2$，那么平行四边形 $EFPQ$ 的面积是如何随 x 的变化而变化的？

事实上，当 $x>2$ 时，点 P 就不存在了，平行四边形 $EFPQ$ 也就不存在了．

因此平行四边形 $EFPQ$ 的面积随 x 的增大而增大．

例 6　20XX 年江西省中考第 24 题

如图 1，抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴相交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴相交于点 C，顶点为 D.

（1）直接写出 A、B、C 三点的坐标和抛物线的对称轴；

（2）连结 BC，与抛物线的对称轴交于点 E，点 P 为线段 BC 上的一个动点，过点 P 作 $PF//DE$ 交抛物线于点 F，设点 P 的横坐标为 m.

①用含 m 的代数式表示线段 PF 的长，并求出当 m 为何值时，四边形 $PEDF$ 为平行四边形？

②设△BCF 的面积为 S，求 S 与 m 的函数关系.

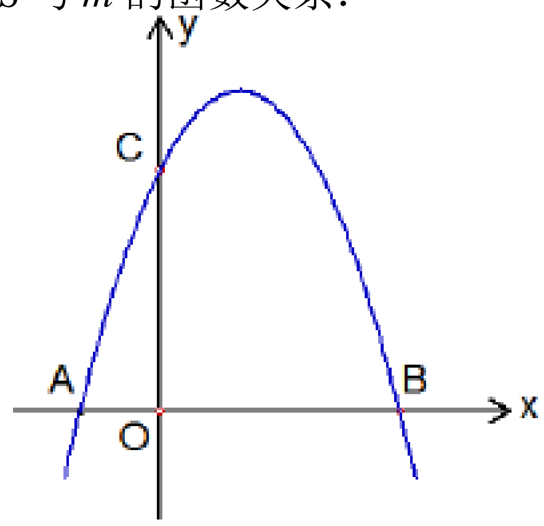


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“09 江西 24”，拖动点 P 在 BC 上运动，可以体验到，四边形 $PEDF$ 可以成为平行四边形．观察△BCF 的形状和 S 随 m 变化的图象，可以体验到，S 是 m 的二次函数，当 P 是 BC 的中点时，S 取得最大值．

思路点拨

1．数形结合，用函数的解析式表示图象上点的坐标，用点的坐标表示线段的长．

2．当四边形 $PEDF$ 为平行四边形时，根据 $DE=FP$ 列关于 m 的方程．

3．把△BCF 分割为两个共底 FP 的三角形，高的和等于 OB．

满分解答

（1）A（－1，0），B（3，0），C（0，3）．抛物线的对称轴是 x＝1．

（2）①直线 BC 的解析式为 y＝－x＋3．

把 x＝1 代入 y＝－x＋3，得 y＝2．所以点 E 的坐标为（1，2）．

把 x＝1 代入 $y=-x^2+2x+3$，得 y＝4．所以点 D 的坐标为（1，4）．

因此 DE=2．

因为 $PF//DE$，点 P 的横坐标为 m，设点 P 的坐标为 $(m,-m+3)$，点 F 的坐标为 $(0,-m^2+2m+3)$，因此 $FP=(-m^2+2m+3)-(-m+3)=-m^2+3m$．

当四边形 $PEDF$ 是平行四边形时，DE=FP．于是得到 $-m^2+3m=2$．解得 $m_1=2$，$m_2=1$（与点 E 重合，舍去）．

因此，当 m=2 时，四边形 $PEDF$ 是平行四边形时．

②设直线 PF 与 x 轴交于点 M，那么 OM+BM=OB=3．因此

$$S=S_{\Delta BCF}=S_{\Delta BPF}+S_{\Delta CPF}=\frac{1}{2}FP\cdot OM+\frac{1}{2}FP\cdot BM$$

$$=\frac{1}{2}(-m^2+3m)\times 3=-\frac{3}{2}m^2+\frac{9}{2}m.$$

m 的变化范围是 0≤m≤3．

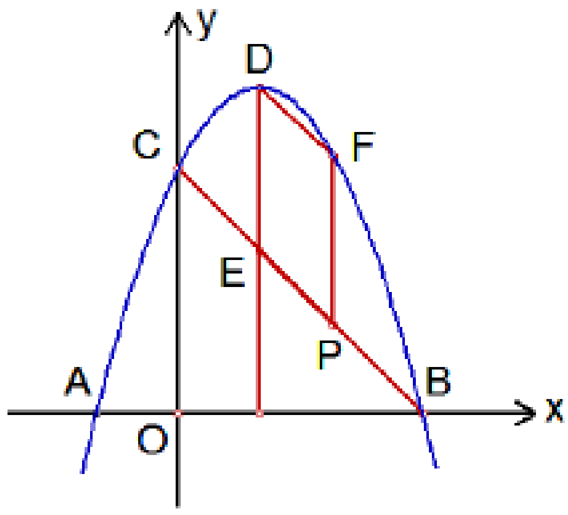


图 2

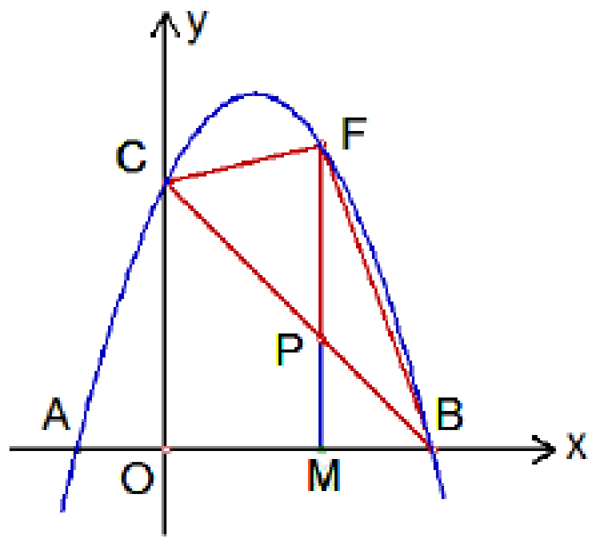


图 3

考点伸展

在本题条件下，四边形 *PEDF* 可能是等腰梯形吗？如果可能，求 m 的值；如果不可能，请说明理由.

如图 4，如果四边形 *PEDF* 是等腰梯形，那么 *DG=EH*，因此 $y_D - y_F = y_P - y_E$.

于是 $4-(-m^2+2m+3)=(-m+3)-2$. 解得 $m_1=0$（与点 CE 重合，舍去），$m_2=1$（与点 E 重合，舍去）.

因此四边形 *PEDF* 不可能成为等腰梯形.

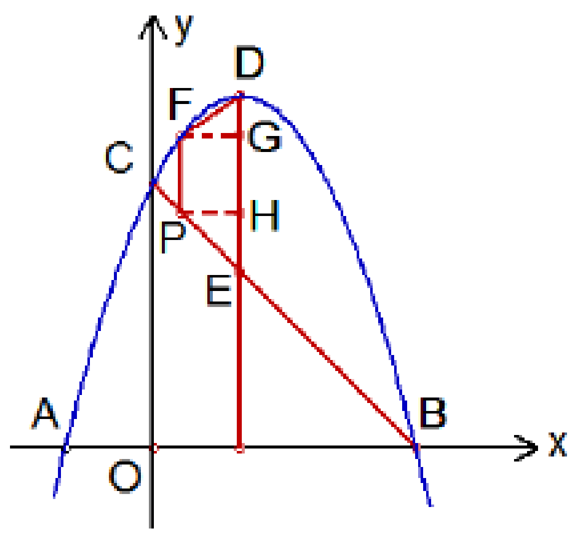


图 4

例 7　20XX 年太原市中考第 29 题

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=x+1$ 与 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 交于点 A，分别交 x 轴于点 B 和点 C，点 D 是直线 AC 上的一个动点.

（1）求点 A、B、C 的坐标.

（2）当△CBD 为等腰三角形时，求点 D 的坐标.

（3）在直线 AB 上是否存在点 E，使得以点 E、D、O、A 为顶点的四边形是平行四边形？如果存在，直接写出 $\frac{BE}{CD}$ 的值；如果不存在，请说明理由.

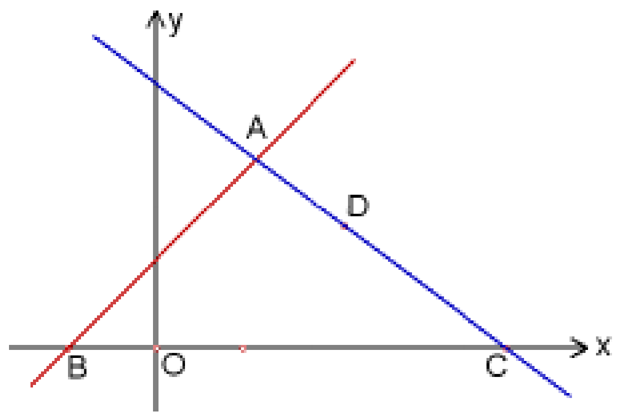


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“08 太原 29”，拖动点 D 可以在直线 AC 上运动.

分别双击按钮“$BC=BD$”，“$CB=CD$”和“$DB=DC$”，可以准确显示△CBD 为等腰三角形.

双击按钮“平行四边形”，可以体验到，以点E、D、O、A 为顶点的平行四边形有三个.

思路点拨

1．数形结合，由两条直线的解析式组成的方程组的解，就是点A 的坐标.

2．分类讨论等腰三角形 CBD，按照顶角的顶点分三种情况讨论.

3．在计算点 D 的坐标时，构造以 C 为顶点的直角三角形，灵活运用三边比 $3∶4∶5$.

4．画平行四边形时，是点 E 决定点 D 的位置：过点 O 作 AC 的平行线交 AB 于 E，由 OE 与 AD 平行且相等得到点 D 的两个位置，这样就容易得到三个平行四边形.

满分解答

（1）在 $y=x+1$ 中，当 $y=0$ 时，$x=-1$，所以点 B 的坐标为 $(-1,0)$. 在 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 中，当 $y=0$ 时，$x=4$，所以点 C 的坐标为（4，0）. 解方程组 $\begin{cases} y=x+1, \\ y=-\frac{3}{4}x+3, \end{cases}$ 得 $x=\frac{8}{7}$，$y=\frac{15}{7}$. 所以点 A 的坐标为 $\left(\frac{8}{7},\frac{15}{7}\right)$.

（2）因为点 D 在直线 $y=-\frac{3}{4}x+3$ 上，设点 D 的坐标为 $(x,\frac{3}{4}x+3)$. 当△CBD 为等腰三角形时，有以下三种情况：

①如图 2，当 $DB=DC$ 时，设底边 BC 上的高为 DM. 在 Rt△CDM 中，$CM=\frac{1}{2}BC=\frac{5}{2}$，

所以$DM=\dfrac{3}{4}CM=\dfrac{15}{8}$．这时点 D 的坐标为$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{8}\right)$．

②如图 3，当 CD＝CB＝5 时，点 D 恰好落在 y 轴上，此时点 D 的坐标为（0，3）．根据对称性，点 D 关于点 C 对称的点 D' 的坐标为（8，－3）．

③如图 4，当 BC＝BD 时，设 BC、DC 边上的高分别为 DM、BN．在 Rt△BCN 中，BC＝5，所以 CN＝4，因此 DC＝8．在 Rt△DCM 中，DC＝8，所以$DM=\dfrac{3}{5}DC=\dfrac{24}{5}$，$DM=\dfrac{4}{5}DC=\dfrac{32}{5}$．这时点 D 的坐标为$\left(-\dfrac{12}{5},\dfrac{24}{5}\right)$．

综上所述，当△CBD 为等腰三角形时，点 D 的坐标为$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{8}\right)$、（0，3）、（8，－3）或$\left(-\dfrac{12}{5},\dfrac{24}{5}\right)$．

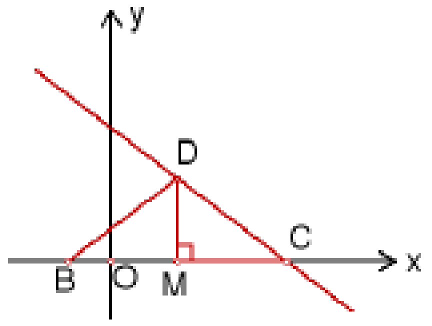


图 2

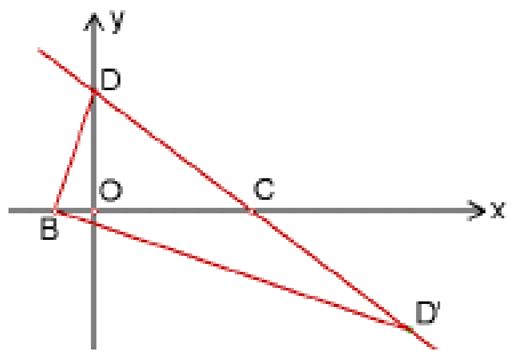


图 3

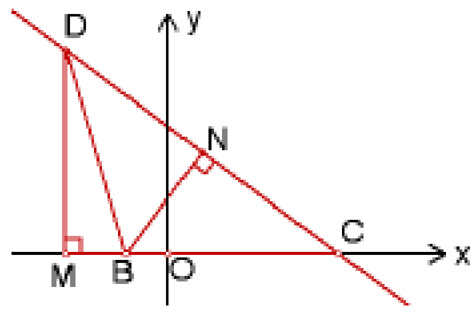


图 4

（3）如图 5，以点 E、D、O、A 为顶点的四边形是平行四边形有以下三种情形：

①当四边形 $AEOD$ 为平行四边形时，$\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{3\sqrt{2}}{20}$．

②当四边形 $ADEO$ 为平行四边形时，$\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$．

③当四边形 $AODE$ 为平行四边形时，$\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{27\sqrt{2}}{20}$．

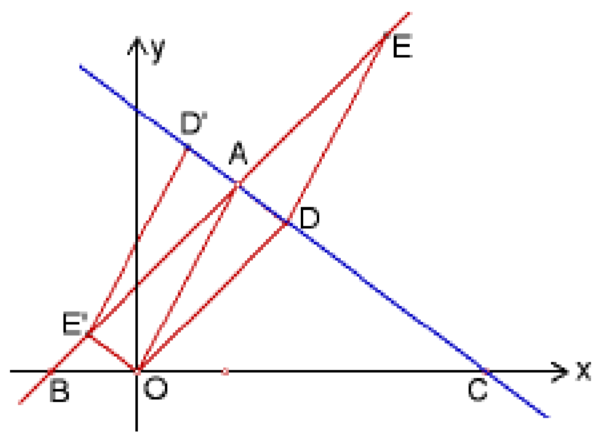


图 5

考点伸展

如图 5，第（3）题这样解：

在△ABC 中，已知 BC＝5，BC 边上的高为$\dfrac{15}{7}$，解得 AB＝$\dfrac{15}{7}\sqrt{2}$，AC＝$\dfrac{25}{7}$．

由$\dfrac{BE'}{BA}=\dfrac{BO}{BC}=\dfrac{1}{5}$，得$BE'=\dfrac{3}{7}\sqrt{2}$，所以$BE=\dfrac{27}{7}\sqrt{2}$．

由$\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{CO}{CB}=\dfrac{4}{5}$，得$CD=\dfrac{20}{7}$，所以$CD'=\dfrac{30}{7}$．

结合图 5，可以计算出$\dfrac{BE}{CD}=\dfrac{3\sqrt{2}}{20}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$或$\dfrac{27\sqrt{2}}{20}$．

1.5　因动点产生的梯形问题

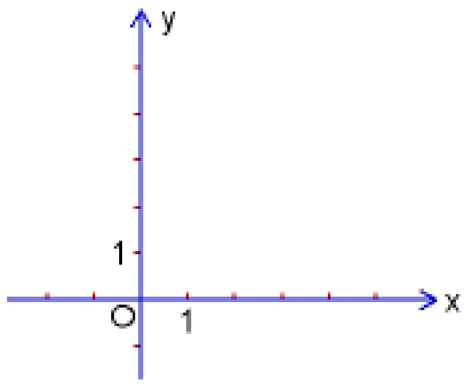
例 1　　20XX 年北京市海淀区中考模拟第 24 题

已知平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-(a+1)x$ 与直线 $y=kx$ 的一个公共点为 A(4，8).

（1）求此抛物线和直线的解析式;

（2）若点 P 在线段 OA 上，过点 P 作 y 轴的平行线交（1）中抛物线于点 Q，求线段 PQ 长度的最大值;

（3）记（1）中抛物线的顶点为 M，点 N 在此抛物线上，若四边形 $AOMN$ 恰好是梯形，求点 N 的坐标及梯形 $AOMN$ 的面积.



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“11 海淀 24”，拖动点 P 在 OA 上运动，观察 PQ 的长随点 P 变化的跟踪点，可以体验到，当 P 运动到 OA 的中点时，PQ 的长取得最大值.

答案

（1）抛物线的解析式为 $y=x^2-2x$，直线的解析式为 $y=2x$.

（2）如图 1，当 P 为 OA 的中点时，PQ 的长度取得最大值为 4.

（3）如图 2，如果四边形 $AOMN$ 是梯形，那么点 N 的坐标为(3，3)，梯形 $AOMN$ 的面积为 9.

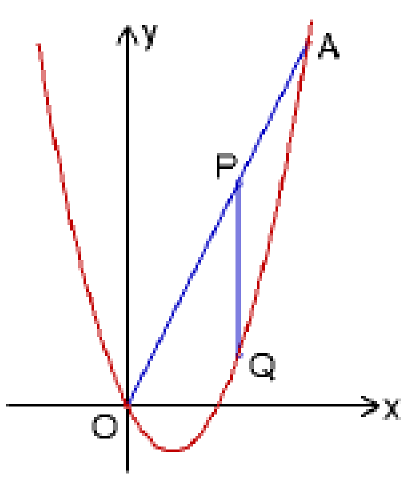


图 1

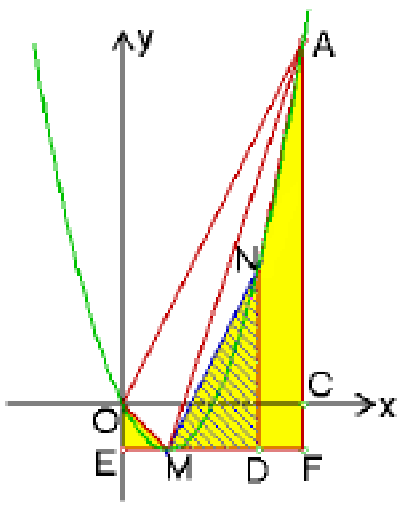


图 2

例 2　　20XX 年义乌市中考第 24 题

已知二次函数的图象经过 A（2，0）、C(0，12) 两点，且对称轴为直线 $x=4$，设顶点为点 P，与 x 轴的另一交点为点 B．

（1）求二次函数的解析式及顶点 P 的坐标；

（2）如图 1，在直线 $y=2x$ 上是否存在点 D，使四边形 $OPBD$ 为等腰梯形？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）如图 2，点 M 是线段 OP 上的一个动点（O、P 两点除外），以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位长度的速度由点 P 向点 O 运动，过点 M 作直线 $MN//x$ 轴，交 PB 于点 N． 将△PMN 沿直线 MN 对折，得到△P_1MN． 在动点 M 的运动过程中，设△P_1MN 与梯形 $OMNB$ 的重叠部分的面积为 S，运动时间为 t 秒，求 S 关于 t 的函数关系式．

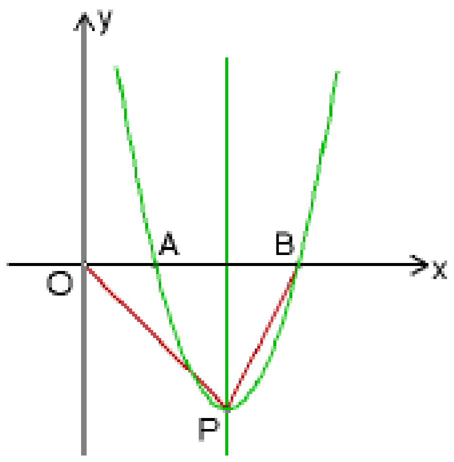


图 1

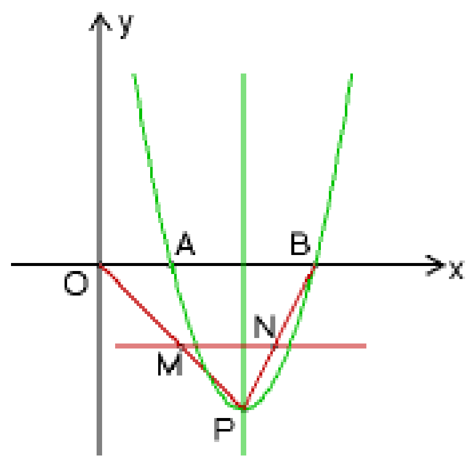


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“11 义乌 24”，拖动点 M 从 P 向 O 运动，可以体验到，M 在到达 PO 的中点前，重叠部分是三角形；经过中点以后，重叠部分是梯形．

思路点拨

1．第（2）题可以根据对边相等列方程，也可以根据对角线相等列方程，但是方程的解都要排除平行四边形的情况．

2．第（3）题重叠部分的形状分为三角形和梯形两个阶段，临界点是 PO 的中点．

满分解答

（1）设抛物线的解析式为 $y=a(x-4)^2+k$，代入 A（2，0）、C(0，12) 两点，得

$$\begin{cases}4a+k=0,\\16a+k=12.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=1,\\k=-4.\end{cases}$$

所以二次函数的解析式为 $y=(x-4)^2-4=x^2-8x+12$，顶点 P 的坐标为（4，－4）．

（2）由 $y=x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$，知点 B 的坐标为（6，0）．

假设在等腰梯形 $OPBD$，那么 DP＝OB＝6．设点 D 的坐标为(x，$2x$)．

由两点间的距离公式，得 $(x-4)^2+(2x+4)^2=36$．解得 $x=\dfrac{2}{5}$ 或 x＝－2．

如图 3，当 x＝－2 时，四边形 $ODPB$ 是平行四边形．

所以，当点 D 的坐标为($\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{4}{5}$)时，四边形 $OPBD$ 为等腰梯形．

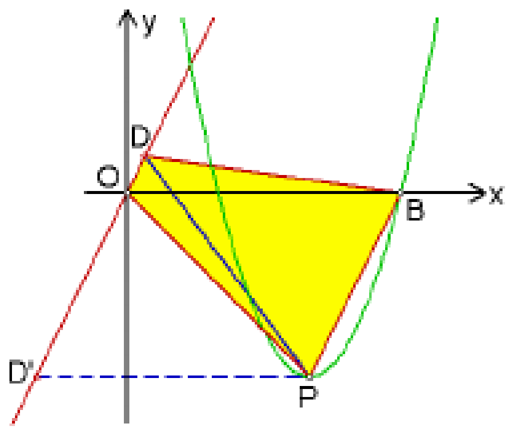


图 3

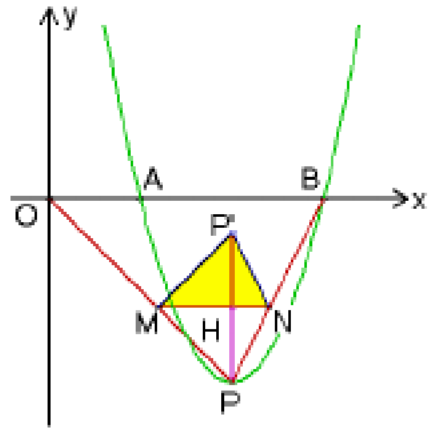


图 4

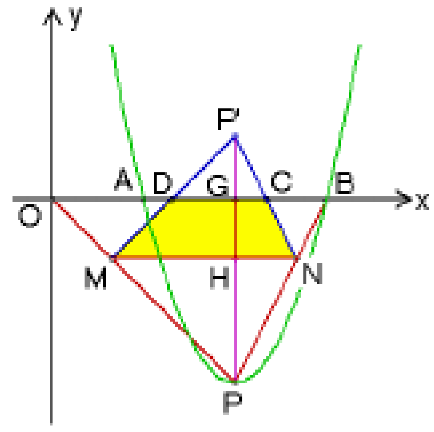


图 5

（3）设△PMN与△POB的高分别为PH、PG.

在 Rt△PMH中，$PM=\sqrt{2}t$，$PH=MH=t$．所以$P'G=2t-4$．

在 Rt△PNH中，$PH=t$，$NH=\frac{1}{2}PH=\frac{1}{2}t$．所以$MN=\frac{3}{2}t$．

① 如图 4，当 0＜t≤2 时，重叠部分的面积等于△PMN的面积. 此时$S=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}t\cdot t=\frac{3}{4}t^2$．

②如图 5，当 2＜t＜4 时，重叠部分是梯形，面积等于△PMN的面积减去△$P'DC$的面积．由于$\frac{S_{\triangle P'DC}}{S_{\triangle PMN}}=\left(\frac{P'G}{PH}\right)^2$，所以$S_{\triangle P'DC}=\left(\frac{2t-4}{t}\right)^2\times\frac{3}{4}t^2=\frac{3}{4}(2t-4)^2$．

此时$S=\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{4}(2t-4)^2=-\frac{9}{4}t^2+12t-12$．

考点伸展

第（2）题最好的解题策略就是拿起尺、规画图：

方法一，按照对角线相等画圆．以P为圆心，OB长为半径画圆，与直线$y=2x$有两个交点，一个是等腰梯形的顶点，一个是平行四边形的顶点．

方法二，按照对边相等画圆．以B为圆心，OP长为半径画圆，与直线$y=2x$有两个交点，一个是等腰梯形的顶点，一个是平行四边形的顶点．

例 3　20XX 年杭州市中考第 24 题

如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线的解析式是 $y=\frac{1}{4}x^2+1$，点 C 的坐标为 $(-4, 0)$，平行四边形 $OABC$ 的顶点 A，B 在抛物线上，AB 与 y 轴交于点 M，已知点 $Q(x, y)$在抛物线上，点 $P(t, 0)$在 x 轴上．

(1) 写出点 M 的坐标；

(2) 当四边形 $CMQP$ 是以 MQ，PC 为腰的梯形时．

① 求 t 关于 x 的函数解析式和自变量 x 的取值范围；

② 当梯形 $CMQP$ 的两底的长度之比为 1∶2 时，求 t 的值．

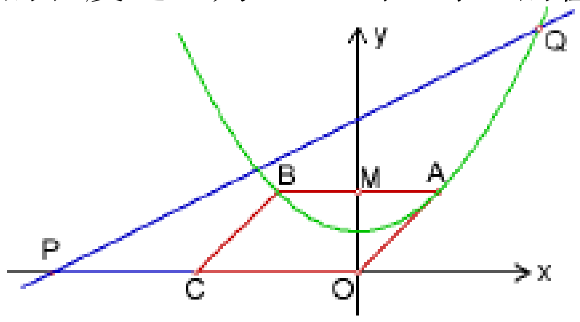


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“10 杭州 24”，拖动点 Q 在抛物线上运动，从 t 随 x 变化的图像可以看到，t 是 x 的二次函数，抛物线的开口向下．还可以感受到，PQ∶CM＝1∶2 只有一种情况，此时 Q 在 y 轴上；CM∶PQ＝1∶2 有两种情况．

思路点拨

1．第（1）题求点 M 的坐标以后，Rt△OCM 的两条直角边的比为 1∶2，这是本题的基本背景图．

2．第（2）题中，不变的关系是由平行得到的等角的正切值相等，根据数形结合，列关于 t 与 x 的比例式，从而得到 t 关于 x 的函数关系．

3．探求自变量 x 的取值范围，要考虑梯形不存在的情况，排除平行四边形的情况．

4．梯形的两底的长度之比为 1∶2，要分两种情况讨论．把两底的长度比转化为 QH 与 MO 的长度比．

满分解答

(1)因为 AB＝OC＝ 4，A、B 关于 y 轴对称，所以点 A 的横坐标为 2．将 x=2 代入 $y=\frac{1}{4}x^2+1$，得 y=2．所以点 M 的坐标为（0，2）．

(2) ① 如图 2，过点 Q 作 $QH\perp x$ 轴，设垂足为 H，则 $HQ=y=\frac{1}{4}x^2+1$，$HP=x-t$．

因为 $CM//PQ$，所以∠QPH＝∠MCO．因此 tan∠QPH＝tan∠MCO，即 $\frac{HQ}{HP}=\frac{OM}{OC}=\frac{1}{2}$．所以 $\frac{1}{4}x^2+1=\frac{1}{2}(x-t)$．整理，得 $t=-\frac{1}{2}x^2+x-2$．

如图 3，当 P 与 C 重合时，$t=-4$，解方程 $-4=-\frac{1}{2}x^2+x-2$，得 $x=1\pm\sqrt{5}$．

如图 4，当 Q 与 B 或 A 重合时，四边形为平行四边形，此时，$x=\pm 2$．

因此自变量 x 的取值范围是 $x\neq 1\pm\sqrt{5}$，且 $x\neq\pm 2$ 的所有实数．

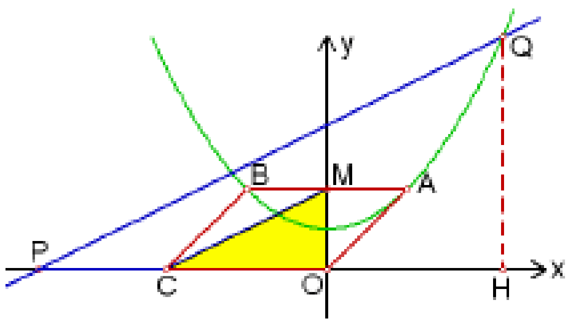


图 2

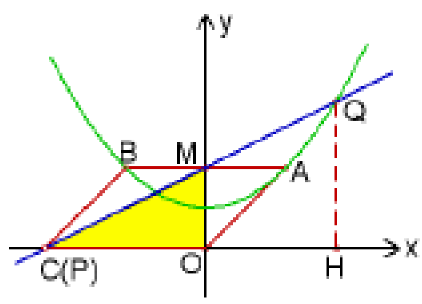


图 3

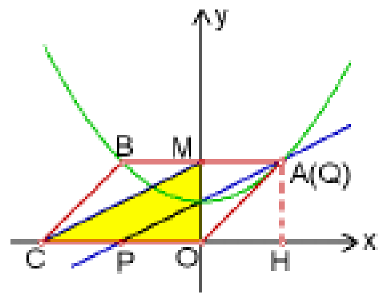


图 4

②因为 $\sin\angle QPH=\sin\angle MCO$，所以 $\dfrac{HQ}{PQ}=\dfrac{OM}{CM}$，即 $\dfrac{PQ}{CM}=\dfrac{HQ}{OM}$．

当 $\dfrac{PQ}{CM}=\dfrac{HQ}{OM}=\dfrac{1}{2}$ 时，$HQ=\dfrac{1}{2}OM=1$．解方程 $\dfrac{1}{4}x^2+1=1$，得 $x=0$（如图 5）．此时 $t=-2$．

当 $\dfrac{PQ}{CM}=\dfrac{HQ}{OM}=2$ 时，$HQ=2OM=4$．解方程 $\dfrac{1}{4}x^2+1=4$，得 $x=\pm2\sqrt{3}$．

如图 6，当 $x=2\sqrt{3}$ 时，$t=-8+2\sqrt{3}$；如图 6，当 $x=-2\sqrt{3}$ 时，$t=-8-2\sqrt{3}$．

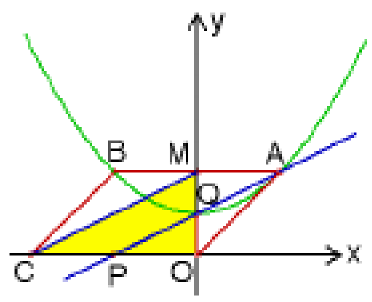


图 5

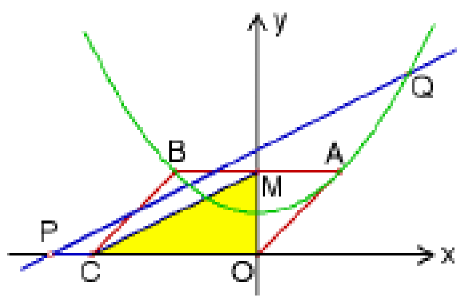


图 6

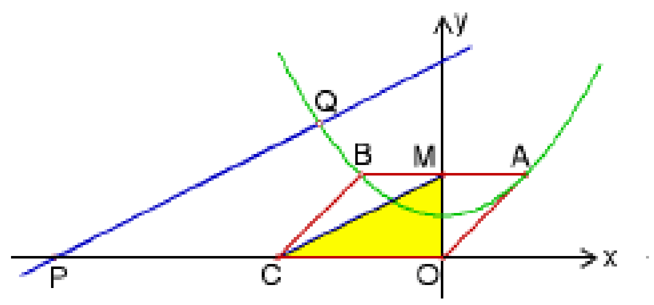


图 7

考点伸展

本题情境下，以 Q 为圆心、QM 为半径的动圆与 x 轴有怎样的位置关系呢？

设点 Q 的坐标为 $\left(x,\dfrac{1}{4}x^2+1\right)$，那么 $QM^2=x^2+\left(\dfrac{1}{4}x^2-1\right)^2=\left(\dfrac{1}{4}x^2+1\right)^2$．

而点 Q 到 x 轴的距离为 $\dfrac{1}{4}x^2+1$．

因此圆 Q 的半径 QM 等于圆心 Q 到 x 轴的距离，圆 Q 与 x 轴相切．

例 4　　20XX 年上海市奉贤区中考模拟第 24 题

已知，矩形 $OABC$ 在平面直角坐标系中位置如图 1 所示，点 A 的坐标为(4,0)，点 C 的坐标为$(0,-2)$，直线 $y=-\frac{2}{3}x$ 与边 BC 相交于点 D.

(1)求点 D 的坐标；

(2)抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 A、D、O，求此抛物线的表达式；

(3)在这个抛物线上是否存在点 M，使 O、D、A、M 为顶点的四边形是梯形？若存在，请求出所有符合条件的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

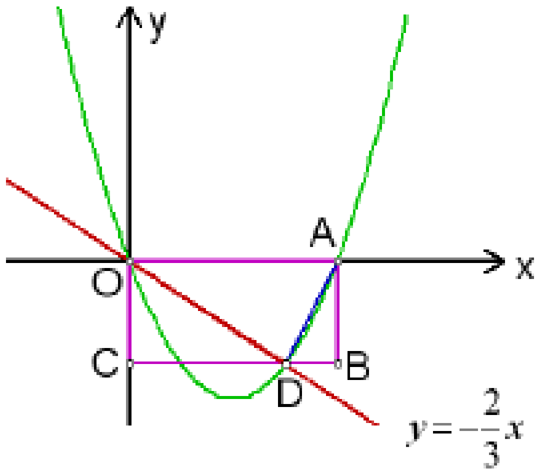


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“10 奉贤 24”，分别双击按钮“$MO//AD$”、“$MA//OD$”和“$MD//OA$”，可以体验到，在“$MO//AD$”和“$MA//OD$”两种情况下，根据两直线平行，内错角相等，可以判定直角三角形相似；在“$MD//OA$”情况下，根据对称性可以直接得到点 M 的坐标.

思路点拨

1．用待定系数法求抛物线的解析式，设交点式比较简便.

2．过△AOD 的三个顶点分别画对边的平行线与抛物线相交，可以确定存在三个梯形.

3．用抛物线的解析式可以表示点 M 的坐标.

满分解答

(1)因为 $BC//x$ 轴，点 D 在 BC 上，$C(0,-2)$，所以点 D 的纵坐标为-2．把 $y=-2$ 代入 $y=-\frac{2}{3}x$，求得 $x=3$．所以点 D 的坐标为$(3,-2)$.

(2)由于抛物线与 x 轴交于点 O、$A(4,0)$，设抛物线的解析式为 $y=ax(x-4)$，代入 D (3,-2)，得 $a=\frac{2}{3}$．所求的二次函数解析式为 $y=\frac{2}{3}x(x-4)=\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x$.

(3) 设点 M 的坐标为$\left(x,\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x\right)$.

①如图 2，当 $OM//DA$ 时，作 $MN\perp x$ 轴，$DQ\perp x$ 轴，垂足分别为 N、Q．由 $\tan\angle MON=\tan\angle DAQ$，得 $\dfrac{\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x}{x}=2$.

因为 $x=0$ 时点 M 与 O 重合，因此$\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}=2$，解得 $x=7$．此时点 M 的坐标为（7，14）.

②如图 3，当 $AM//OD$ 时，由 $\tan\angle MAN=\tan\angle DOQ$，得 $\dfrac{\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x}{4-x}=\dfrac{2}{3}$.

因为 $x=4$ 时点 M 与 A 重合，因此 $-\dfrac{2}{3}x=\dfrac{2}{3}$，解得 $x=-1$. 此时点 M 的坐标为 $(-1,\dfrac{10}{3})$.

③如图 4，当 $DM//OA$ 时，点 M 与点 D 关于抛物线的对称轴对称，此时点 M 的坐标为（1，－2）.

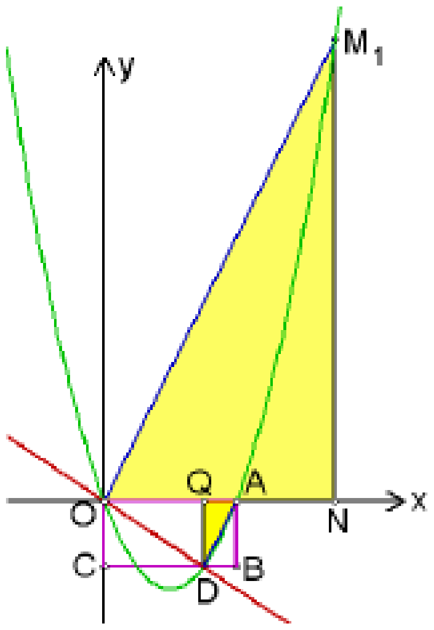


图 2

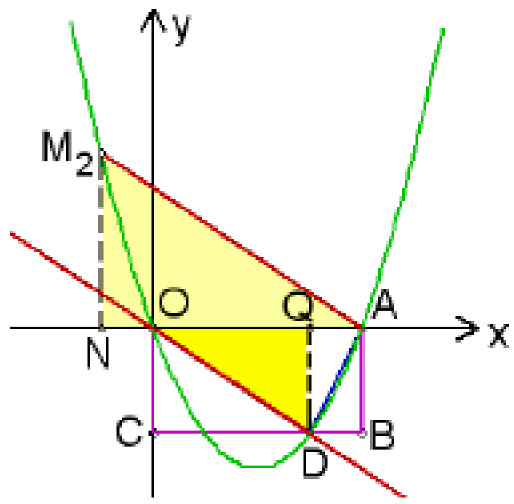


图 3

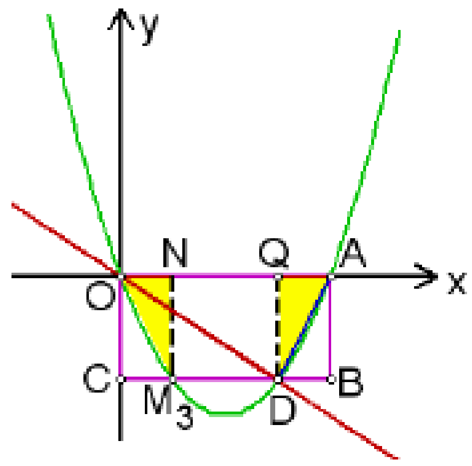


图 4

考点伸展

第（3）题的①、②用几何法进行计算，依据是两直线平行，内错角的正切相等.

如果用代数法进行，计算过程比较麻烦．以①为例，先求出直线 AD 的解析式，再求出直线 OM 的解析式，最后解由直线 OM 和抛物线的解析式组成的二元二次方程组.

例 5　20XX 年广州市中考第 25 题

如图 1，二次函数 $y=x^2+px+q(p<0)$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C（0，－1），△ABC 的面积为 $\frac{5}{4}$．

（1）求该二次函数的关系式；

（2）过 y 轴上的一点 M（0，m）作 y 轴的垂线，若该垂线与△ABC 的外接圆有公共点，求 m 的取值范围；

（3）在该二次函数的图象上是否存在点 D，使以 A、B、C、D 为顶点的四边形为直角梯形？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由．

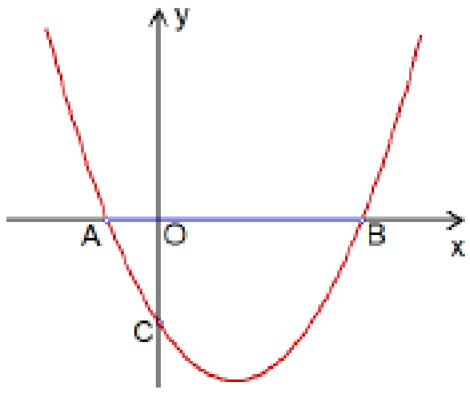


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“09 广州 25”，可以看到，△ABC 是以 AB 为斜边的直角三角形，AB 是它的外接圆直径，拖动点 M 在 y 轴上运动，可以体验到，过 M 的直线与圆相切或者相交时有公共点．

在抛物线上有两个符合条件的点 D，使以 A、B、C、D 为顶点的四边形为直角梯形．

思路点拨

1．根据△ABC 的面积和 AB 边上的高确定 AB 的长，这样就可以把两个点的坐标用一个字母表示．

2．数形结合，根据点 A、B、C 的坐标确定 OA、OB、OC 间的数量关系，得到△AOC∽△COB，从而得到△ABC 是以 AB 为斜边的直角三角形，AB 是它的外接圆直径，再根据对称性写出 m 的取值范围．

3．根据直角梯形的定义，很容易确定符合条件的点 D 有两个，但是求点 D 的坐标比较麻烦，根据等角的正切相等列方程相对简单一些．

满分解答

（1）因为 OC＝1，△ABC 的面积为 $\frac{5}{4}$，所以 AB＝$\frac{5}{2}$．

设点 A 的坐标为（a，0），那么点 B 的坐标为（a＋$\frac{5}{2}$，0）．

设抛物线的解析式为 $y=(x-a)(x-a-\frac{5}{2})$，代入点 C（0，－1），得 $a(a+\frac{5}{2})=-1$．解得 $a=-\frac{1}{2}$ 或 $a=-2$．

因为二次函数的解析式 $y=x^2+px+q$ 中，$p<0$，所以抛物线的对称轴在 y 轴右侧．因此点 A、B 的坐标分别为 $(-\frac{1}{2},0)$，$(2,0)$．

所以抛物线的解析式为$y=(x+\frac{1}{2})(x-2)=x^2-\frac{3}{2}x-1$.

（2）如图 2，因为$OA\cdot OB=1$，$OC^2=1$，所以$\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{OB}$．因此△$AOC$∽△$COB$．所以△$ABC$ 是以 AB 为斜边的直角三角形，外接圆的直径为AB．

因此 m 的取值范围是$-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant\frac{5}{4}$．

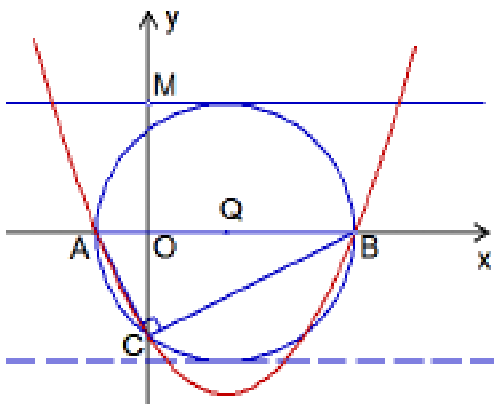


图 2

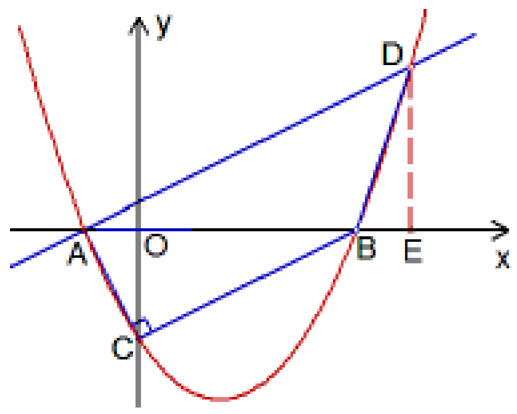


图 3

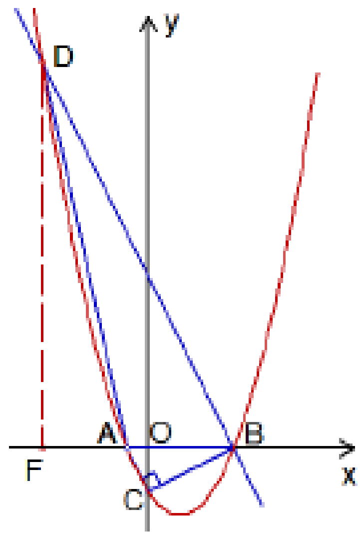


图 4

（3）设点 D 的坐标为$(x,(x+\frac{1}{2})(x-2))$．

①如图 3，过点 A 作 BC 的平行线交抛物线于 D，过点 D 作 $DE\perp x$ 轴于 E.

因为$\tan\angle DAB=\tan\angle OBC$，所以$\frac{DE}{AE}=\frac{CO}{BO}=\frac{1}{2}$．因此$\frac{(x+\frac{1}{2})(x-2)}{x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$．解得$x=\frac{5}{2}$．此时点 D 的坐标为$(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$．

过点 B 作 AC 的平行线交抛物线于 D，过点 D 作 $DF\perp x$ 轴于 F．因为$\tan\angle DBF=\tan\angle CAO$，所以$\frac{DF}{BF}=\frac{CO}{AO}=2$．因此$\frac{(x+\frac{1}{2})(x-2)}{2-x}=2$．解得$x=-\frac{5}{2}$．此时点 D 的坐标为$(-\frac{5}{2},9)$．

综上所述，当 D 的坐标为$(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$或$(-\frac{5}{2},9)$时，以 A、B、C、D 为顶点的四边形为直角梯形．

考点伸展

第（3）题可以用代数的方法这样解：例如图 3，先求得直线 BC 为$y=\frac{1}{2}x-1$，再根据 $AD//BC$ 求得直线 AD 为$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$，由直线 AD 和抛物线的解析式组成的方程组，得到点 D 的坐标．

例 6　　20XX 年河北省中考第 26 题

如图 1，在 Rt△*ABC* 中，∠*C*＝90°，*AC*＝3，*AB*＝5．点 *P* 从点 *C* 出发沿 *CA* 以每秒 1 个单位长的速度向点 *A* 匀速运动，到达点 *A* 后立刻以原来的速度沿 *AC* 返回；点 *Q* 从点 *A* 出发沿 *AB* 以每秒 1 个单位长的速度向点 *B* 匀速运动．伴随着 *P*、*Q* 的运动，*DE* 保持垂直平分 *PQ*，且交 *PQ* 于点 *D*，交折线 *QB-BC-CP* 于点 *E*．点 *P*、*Q* 同时出发，当点 *Q* 到达点 *B* 时停止运动，点 *P* 也随之停止．设 *P*、*Q* 运动的时间是 *t* 秒（$t>0$）．

（1）当 $t=2$ 时，*AP*＝_____，点 *Q* 到 *AC* 的距离是________；

（2）在点 *P* 从 *C* 向 *A* 运动的过程中，求△*APQ* 的面积 *S* 与 *t* 的函数关系式（不必写出 *t* 的取值范围）；

（3）在点 *E* 从 *B* 向 *C* 运动的过程中，四边形 *QBED* 能否成为直角梯形？若能，求 *t* 的值；若不能，请说明理由；

（4）当 *DE* 经过点 *C* 时，请直接写出 *t* 的值．

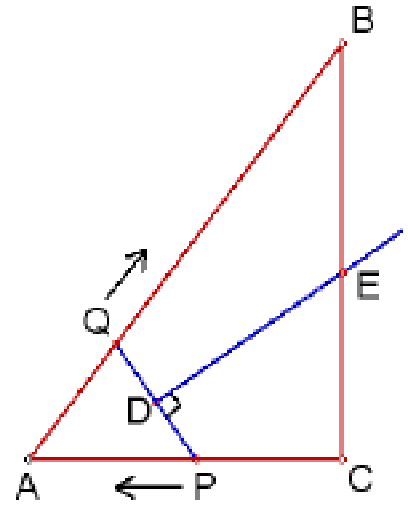


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“09 河北 26”，拖动点 *Q* 由 *A* 向 *C* 运动，可以体验到：

在点 *P* 从 *C* 向 *A* 运动的过程中，*S* 关于 *t* 的函数图象是开口向下的抛物线的一部分；

四边形 *QBED* 可以两次成为直角梯形，双击按钮“直角梯形 1”和“直角梯形 1”可以准确显示；

DE 两次经过点 *C*，双击按钮“*P* 向 *A* 时，*DE* 过 *C*”和“*P* 向 *C* 时，*DE* 过 *C*”可以准确显示．

思路点拨

1．第（1）题求点 *Q* 到 *AC* 的距离，暗示了第（2）题求△*APQ* 的高的方法．

2．分类讨论直角梯形 *QBED* 的存在性，按照 *DE* 与 *AB*、*AC* 平行的可能性分两种情况，列方程的依据是 Rt△*AQP* 的三边比为 3∶4∶5．

3．分类讨论 *DE* 经过点 *C*，按照 *P* 运动的方向分两种情况，列方程的依据是 *PC*＝*QC*．

满分解答

（1）1；$\dfrac{8}{5}$．

（2）如图 2，作 *QF*⊥*AC* 于 *F*．

在 Rt△*ABC* 中，*AC*＝3，*AB*＝5，所以 *BC*＝4，$\sin A=\dfrac{4}{5}$．

在 Rt△*AQF* 中，*AQ*＝*t*，$\sin A=\dfrac{4}{5}$，所以 $QF=\dfrac{4}{5}t$．

因此 $S=\dfrac{1}{2}AP\cdot QF=\dfrac{1}{2}(3-t)\times\dfrac{4}{5}t=-\dfrac{2}{5}t2+\dfrac{6}{5}t$．

（3）①如图 3，当 *DE*//*QB* 时，∠*AQP*＝90°．在 Rt△*AQP* 中，$AP=3-t$，*AQ*＝*t*，

$\cos A=\dfrac{QP}{AP}=\dfrac{3}{5}$，所以$\dfrac{t}{3-t}=\dfrac{3}{5}$．解得$t=\dfrac{9}{8}$．

②如图 4，当 $DE//BC$ 时，$\angle APQ=90^\circ$．在 Rt△AQP 中，AP＝$3-t$，$AQ=t$，$\cos A=\dfrac{AP}{QP}=\dfrac{3}{5}$，所以$\dfrac{3-t}{t}=\dfrac{3}{5}$．解得$t=\dfrac{15}{8}$．

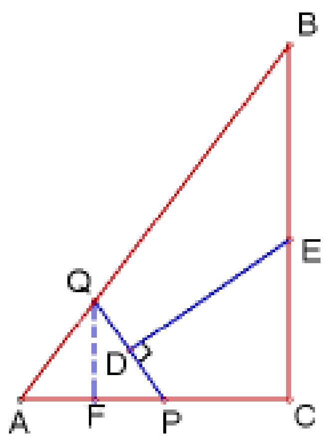


图 2

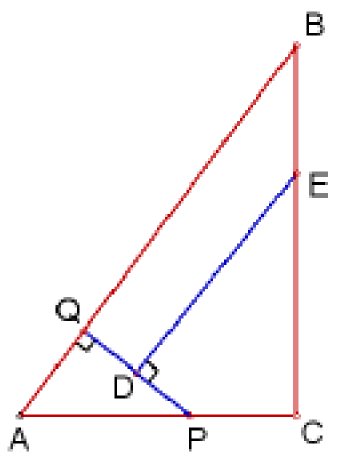


图 3

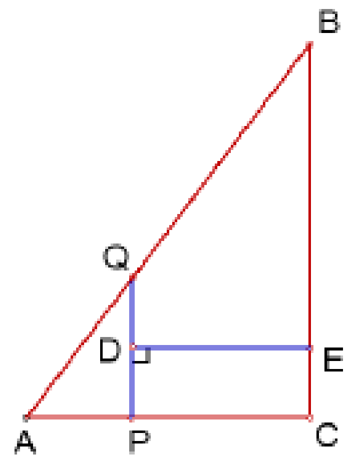


图 4

（4）$t=\dfrac{5}{2}$或$t=\dfrac{45}{14}$．

考点伸展

第（4）题可以这样解：过点 Q 作 $QG\perp BC$ 于 G，那么

$$QC^2=QG^2+GC^2=\left[\frac{3}{5}(5-t)\right]^2+\left(\frac{4}{5}t\right)^2=t^2-\frac{18}{5}t+9.$$

①如图 5，点 P 由 C 向 A 运动，DE 经过点 C，此时 $PC=t$．由$PC^2=QC^2$，得$t^2=t^2-\dfrac{18}{5}t+9$．解得$t=\dfrac{5}{2}$．

②如图 6，点 P 由 A 向 C 运动，DE 经过点 C，此时 $PC=6-t$．由$PC^2=QC^2$，得$(6-t)^2=t^2-\dfrac{18}{5}t+9$．解得$t=\dfrac{45}{14}$．

情形①还可以用几何说理解答：由于 $CQ=CP=AQ$，所以$\angle QAC=\angle QCA$．

根据等角的余角相等，因此$\angle B=\angle BCQ$．所以 $CQ=BQ$．于是得到 Q 是 AB 的中点，$t=\dfrac{5}{2}$．

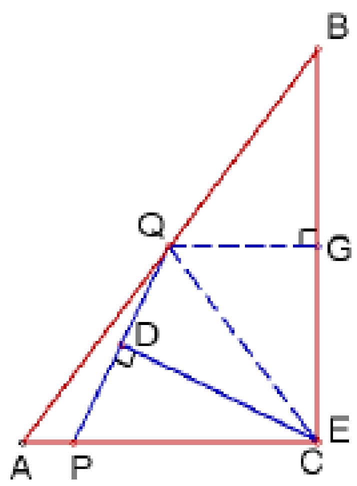


图 5

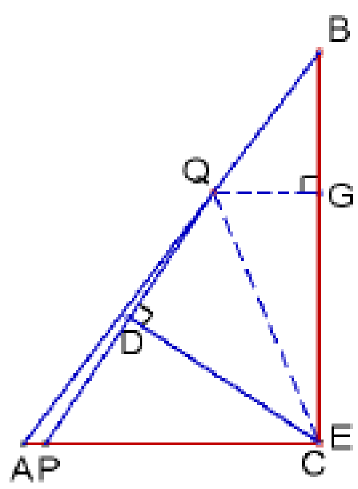


图 6

第一部分　函数图象中点的存在性问题

1.6　因动点产生的面积问题

例 1　　20XX 年南通市中考第 28 题

如图 1，直线 l 经过点 $A(1，0)$，且与双曲线 $y=\frac{m}{x}(x>0)$交于点 $B(2，1)$．过点 $P(p,p-1)(p>1)$作 x 轴的平行线分别交曲线 $y=\frac{m}{x}(x>0)$和 $y=-\frac{m}{x}(x<0)$于 M、N 两点．

（1）求 m 的值及直线 l 的解析式；

（2）若点 P 在直线 $y=2$ 上，求证：$\triangle PMB\backsim\triangle PNA$；

（3）是否存在实数 p，使得 $S_{\triangle AMN}=4S_{\triangle AMP}$？若存在，请求出所有满足条件的 p 的值；若不存在，请说明理由．

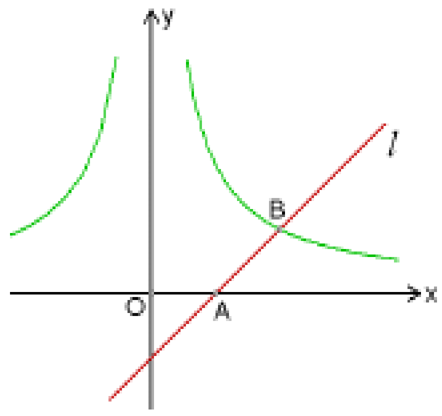


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“11 南通 28”，拖动点 P 在射线 AB 上运动，可以体验到，当直线 MN 经过（0，2）点时，图形中的三角形都是等腰直角三角形；△AMN 和△AMP 是两个同高的三角形，MN＝4MP 存在两种情况．

思路点拨

1．第（2）题准确画图，点的位置关系尽在图形中．

2．第（3）题把 $S_{\triangle AMN}=4S_{\triangle AMP}$ 转化为 $MN=4MP$，按照点 M 与线段 NP 的位置关系分两种情况讨论．

满分解答

（1）因为点 $B(2，1)$在双曲线 $y=\frac{m}{x}$上，所以 $m=2$．设直线 l 的解析式为 $y=kx+b$，代入点 $A(1，0)$和点 $B(2，1)$，得$\begin{cases}k+b=0,\\2k+b=1.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=1,\\b=-1.\end{cases}$ 所以直线 l 的解析式为 $y=x-1$．

（2）由点 $P(p,p-1)(p>1)$的坐标可知，点 P 在直线 $y=x-1$上 x 轴的上方．如图 2，当 $y=2$ 时，点 P 的坐标为(3，2)．此时点 M 的坐标为(1，2)，点 N 的坐标为(－1，2)．

由 $P(3，2)$、$M(1，2)$、$B(2，1)$三点的位置关系，可知△PMB 为等腰直角三角形．

由 $P(3，2)$、$N(－1，2)$、$A(1，0)$三点的位置关系，可知△PNA 为等腰直角三角形．

所以$\triangle PMB\backsim\triangle PNA$．

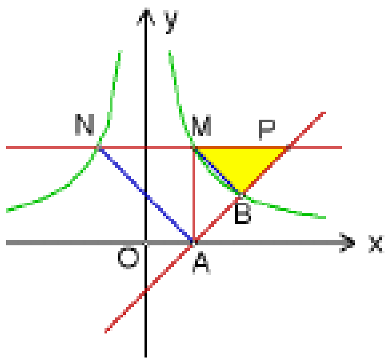


图 2

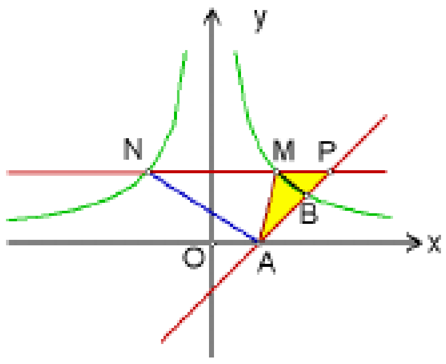


图 3

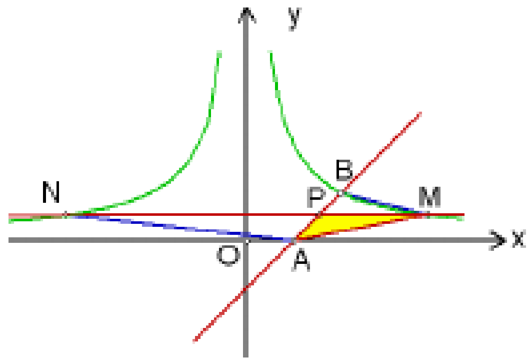


图 4

（3）△AMN 和△AMP 是两个同高的三角形，底边 MN 和 MP 在同一条直线上．

当 $S_{\triangle AMN}=4S_{\triangle AMP}$ 时，$MN=4MP$．

①如图 3，当 M 在 NP 上时，$x_M-x_N=4(x_P-x_M)$．因此 $\left(\frac{2}{x}-(-\frac{2}{x})\right)=4\left((x-1)-\frac{2}{x}\right)$．解得 $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ 或 $x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$（此时点 P 在 x 轴下方，舍去）．此时 $p=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$．

②如图 4，当 M 在 NP 的延长线上时，$x_M-x_N=4(x_M-x_P)$．因此 $\left(\frac{2}{x}-(-\frac{2}{x})\right)=4\left(\frac{2}{x}-(x-1)\right)$．解得 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$（此时点 P 在 x 轴下方，舍去）．此时 $p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$．

考点伸展

在本题情景下，△AMN 能否成为直角三角形？

情形一，如图 5，$\angle AMN=90°$，此时点 M 的坐标为（1，2），点 P 的坐标为（3，2）．

情形二，如图 6，$\angle MAN=90°$，此时斜边 MN 上的中线等于斜边的一半．

不存在 $\angle ANM=90°$ 的情况．

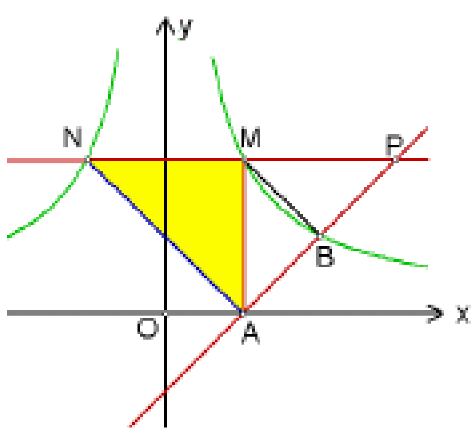


图 5

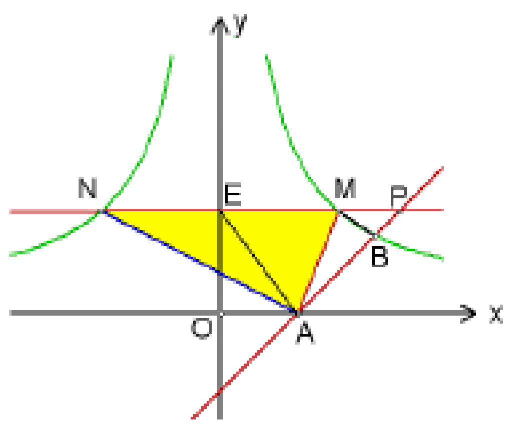


图 6

例 2　20XX 年上海市松江区中考模拟第 24 题

如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，直角梯形 $OABC$ 的顶点 O 为坐标原点，顶点 A、C 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上，$CB \parallel OA$，$OC=4$，$BC=3$，$OA=5$，点 D 在边 OC 上，$CD=3$，过点 D 作 DB 的垂线 DE，交 x 轴于点 E.

（1）求点 E 的坐标；

（2）二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图像经过点 B 和点 E.

①求二次函数的解析式和它的对称轴；

②如果点 M 在它的对称轴上且位于 x 轴上方，满足 $S_{\triangle CEM}=2S_{\triangle ABM}$，求点 M 的坐标.

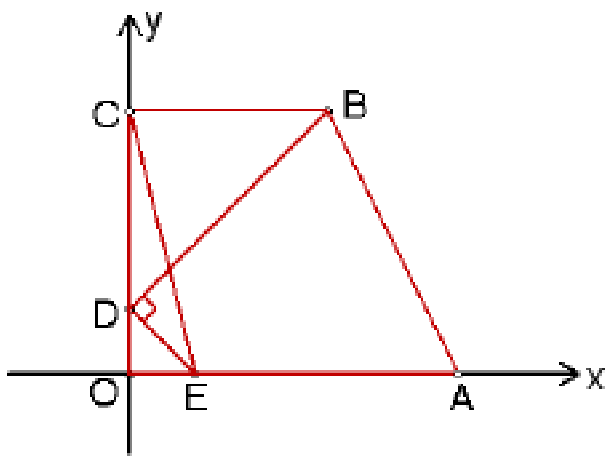


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“11 松江 24”，拖动点 M 在抛物线的对称轴上运动，观察面积比的度量值，可以体验到，有两个时刻，面积的比值等于 2.

思路点拨

1．这三道题目步步为赢，错一道题目，就要影响下一道的计算.

2．点 M 在抛物线的对称轴上且位于 x 轴上方，要分两种情况讨论，分别为点 M 在线段 FB 和 FB 的延长线上．因为用点 M 的纵坐标表示△ABM 的底边长，因点 M 的位置不同而不同.

满分解答

（1）因为 $BC \parallel OA$，所以 $BC \perp CD$．因为 $CD=CB=3$，所以△BCD 是等腰直角三角形．因此 $\angle BCD=45°$．又因为 $BC \perp CD$，所以 $\angle ODE=45°$．所以△ODE 是等腰直角三角形，$OE=OD=1$．所以点 E 的坐标是（1，0）.

（2）①因为抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $B(3,4)$ 和点 $E(1,0)$，所以 $\begin{cases}-9+3b+c=4,\\-1+b+c=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=6,\\c=-5.\end{cases}$ 所以二次函数的解析式为 $y=-x^2+6x-5$，抛物线的对称轴为直线 $x=3$.

②如图 2，如图 3，设抛物线的对称轴与 x 轴交于点 F，点 M 的坐标为（3，t）.

$$S_{\Delta CEM}=S_{\text{梯形}OFMC}-S_{\Delta MEF}-S_{\Delta COE}$$
$$=\frac{1}{2}(4+t)\times 3-\frac{1}{2}\times 2\times t-\frac{1}{2}\times 1\times 4=\frac{t}{2}+4.$$

（ⅰ）如图 2，当点 M 位于线段 BF 上时，$S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}(4-t)\times 2=4-t$．解方程 $\frac{t}{2}+4=2(4-t)$，得 $t=\frac{8}{5}$．此时点 M 的坐标为（3，$\frac{8}{5}$）.

（ii）如图3，当点 M 位于线段 FB 延长线上时，$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}(t-4)\times 2=t-4$．解方程 $\frac{t}{2}+4=2(t-4)$，得 $t=8$．此时点 M 的坐标为（3，8）．

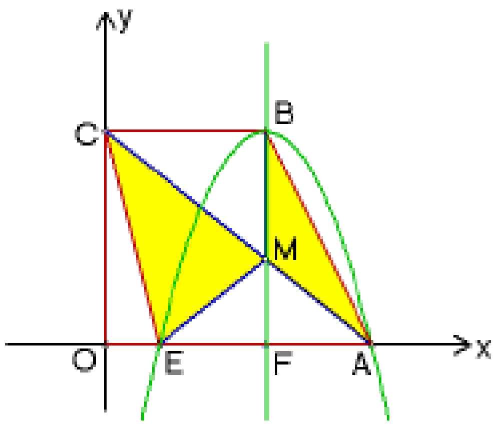


图 2

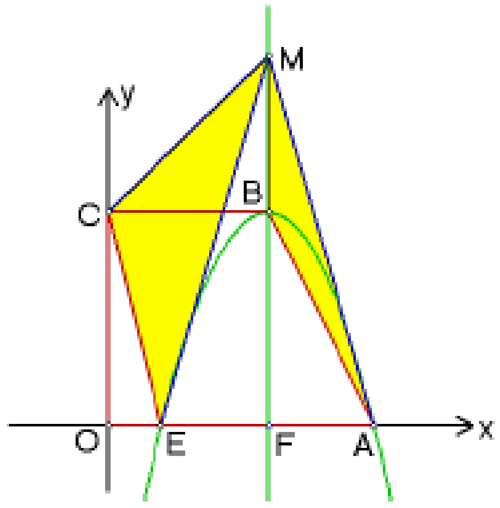


图 3

考点伸展

对于图2，还有几个典型结论：

此时，C、M、A 三点在同一条直线上；△CEM 的周长最小．

可以求得直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{4}{5}x+4$，当 x=3 时，$y=\frac{8}{5}$．

因此点 M（3，$\frac{8}{5}$）在直线 AC 上．

因为点 A、E 关于抛物线的对称轴对称，所以 ME＋MC＝MA＋MC．

当 A、M、C 三点共线时，ME＋MC 最小，△CEM 的周长最小．

例 3　20XX 年广州市中考第 25 题

如图 1，四边形 $OABC$ 是矩形，点 A、C 的坐标分别为(3,0)，(0,1)．点 D 是线段 BC 上的动点（与端点 B、C 不重合），过点 D 作直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 交折线 OAB 于点 E.

（1）记△ODE 的面积为 S，求 S 与 b 的函数关系式；

（2）当点 E 在线段 OA 上时，若矩形 $OABC$ 关于直线 DE 的对称图形为四边形 $O_1A_1B_1C_1$，试探究四边形 $O_1A_1B_1C_1$ 与矩形 $OABC$ 的重叠部分的面积是否发生变化？若不变，求出重叠部分的面积；若改变，请说明理由．

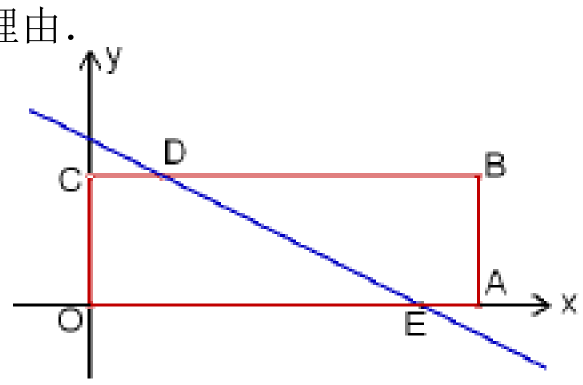


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“10 广州 25”，拖动点 D 由 C 向 B 运动，观察 S 随 b 变化的函数图像，可以体验到，E 在 OA 上时，S 随 b 的增大而增大；E 在 AB 上时，S 随 b 的增大而减小．双击按钮“第（3）题”，拖动点 D 由 C 向 B 运动，可以观察到，E 在 OA 上时，重叠部分的形状是菱形，面积不变．双击按钮“第（2）题”可以切换．

思路点拨

1．数形结合，用 b 表示线段 OE、CD、AE、BE 的长．

2．求△ODE 的面积，要分两种情况．当 E 在 OA 上时，OE 边对应的高等于 OC；当 E 在 AB 边上时，要利用割补法求△ODE 的面积．

3．第（3）题中的重叠部分是邻边相等的平行四边形．

4．图形翻着、旋转等运动中，计算菱形的边长一般用勾股定理．

满分解答

(1)①如图 2，当 E 在 OA 上时，由 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 可知，点 E 的坐标为(2b,0)，OE＝2b．此时 S＝$S_{\triangle ODE}$＝$\frac{1}{2}OE\cdot OC=\frac{1}{2}\times 2b\times 1=b$.

②如图 3，当 E 在 AB 上时，把 y＝1 代入 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 可知，点 D 的坐标为(2b－2,1)，CD＝2b－2，BD＝5－2b．把 x＝3 代入 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 可知，点 E 的坐标为$(3,b-\frac{3}{2})$，AE＝$b-\frac{3}{2}$，BE＝$\frac{5}{2}-b$．此时

S＝S 矩形 $OABC$－S△OAE－ S△BDE －S△OCD

$=3-\frac{1}{2}\times 3(b-\frac{3}{2})-\frac{1}{2}(\frac{5}{2}-b)(5-2b)-\frac{1}{2}\times 1\times(2b-2)$

$=-b2+\frac{5}{2}b$.

(2)如图 4，因为四边形 $O_1A_1B_1C_1$ 与矩形 $OABC$ 关于直线 DE 对称，因此 $DM=DN$，那么重叠部分是邻边相等的平行四边形，即四边形 $DMEN$ 是菱形．

作 $DH\perp OA$，垂足为 H．由于 $CD=2b-2$，$OE=2b$，所以 $EH=2$．

设菱形 $DMEN$ 的边长为 m．在 Rt△DEH 中，$DH=1$，$NH=2-m$，$DN=m$，所以 $1^2+(2-m)^2=m^2$．解得 m $\frac{5}{4}$．所以重叠部分菱形 $DMEN$ 的面积为 $\frac{5}{4}$．

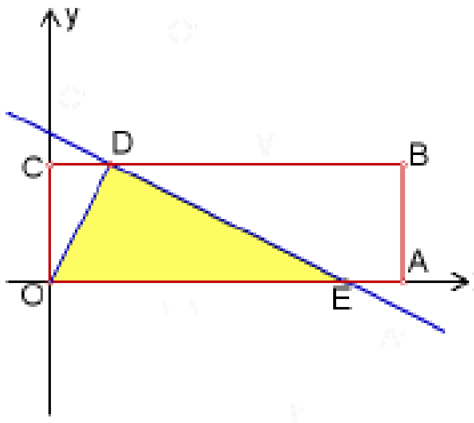


图 2

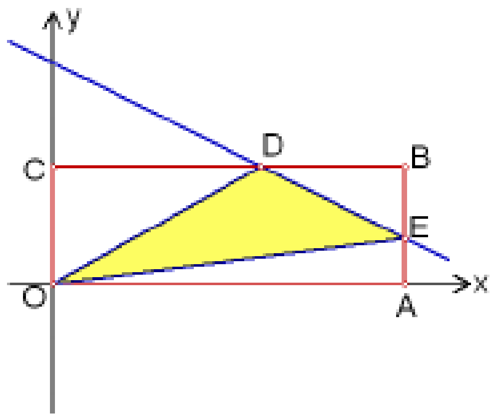


图 3

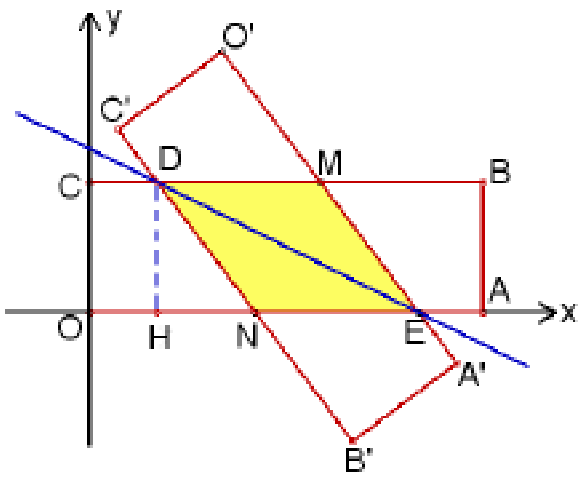


图 4

考点伸展

把本题中的矩形 $OABC$ 绕着它的对称中心旋转，如果重叠部分的形状是菱形（如图 5），那么这个菱形的最小面积为 1，如图 6 所示；最大面积为 $\frac{5}{3}$，如图 7 所示．

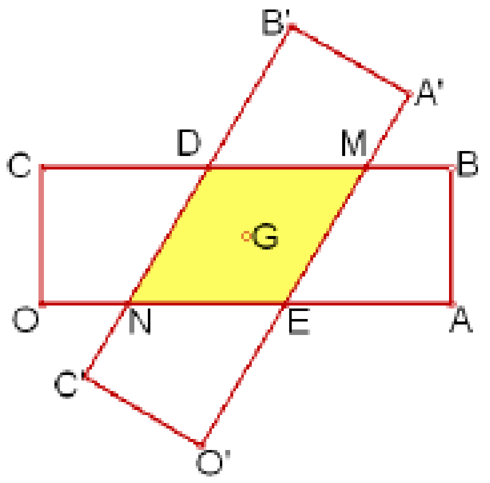


图 5

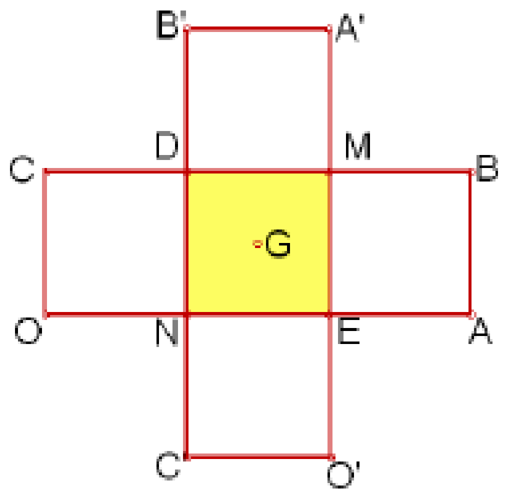


图 6

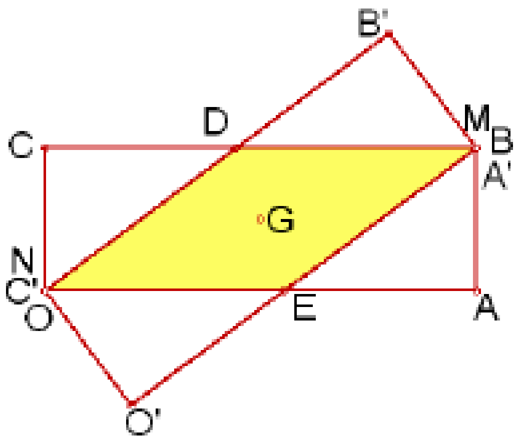


图 7

例 4　20XX 年扬州市中考第 28 题

如图 1，在△ABC 中，∠C＝90°，AC＝3，BC＝4，CD 是斜边 AB 上的高，点 E 在斜边 AB 上，过点 E 作直线与△ABC 的直角边相交于点 F，设 AE＝x，△AEF 的面积为 y．

（1）求线段 AD 的长；

（2）若 EF⊥AB，当点 E 在斜边 AB 上移动时，

①求 y 与 x 的函数关系式（写出自变量 x 的取值范围）；

②当 x 取何值时，y 有最大值？并求出最大值．

（3）若点 F 在直角边 AC 上（点 F 与 A、C 不重合），点 E 在斜边 AB 上移动，试问，是否存在直线 EF 将△ABC 的周长和面积同时平分？若存在直线 EF，求出 x 的值；若不存在直线 EF，请说明理由．

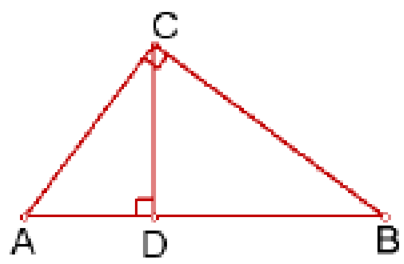
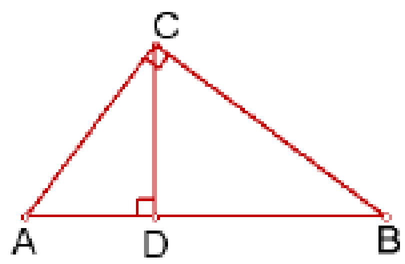


图 1



备用图

动感体验

请打开几何画板文件名“10 扬州 28”，拖动点 E 在 AB 上运动，从 y 随 x 变化的图像可以体验到，当 F 在 AC 上时，y 随 x 的增大而增大；当 F 在 BC 上时，y 随 x 变化的图像是开口向下的抛物线的一部分，y 的最大值对应抛物线的顶点．双击按钮“第（3）题”，我们已经设定好了 EF 平分△ABC 的周长，拖动点 E，观察图像，可以体验到，“面积 AEF”的值可以等于 3，也就是说，存在直线 EF 将△ABC 的周长和面积同时平分．双击按钮“第（2）题”可以切换。

思路点拨

1．第（1）题求得的 AD 的长，就是第（2）题分类讨论 x 的临界点．

2．第（2）题要按照点 F 的位置分两种情况讨论．

3．第（3）题的一般策略是：先假定平分周长，再列关于面积的方程，根据方程的解的情况作出判断．

满分解答

(1) 在 Rt△ABC 中，$AC=3$，$BC=4$，所以 $AB=5$．在 Rt△ACD 中，$AD=AC\cos A=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$．

(2) ①如图 2，当 F 在 AC 上时，$0<x<\frac{9}{5}$．在 Rt△AEF 中，$EF=AE\tan A=\frac{4}{3}x$．所以 $y=\frac{1}{2}AE\cdot EF=\frac{2}{3}x^2$．

如图 3，当 F 在 BC 上时，$\frac{9}{5}\leqslant x<5$．在 Rt△BEF 中，$EF=BE\tan B=\frac{3}{4}(5-x)$．所以 $y=\frac{1}{2}AE\cdot EF=-\frac{3}{8}x^2+\frac{15}{8}x$．

②当 $0<x<\frac{9}{5}$ 时，$y=\frac{2}{3}x^2$ 的最大值为 $\frac{54}{25}$；

当$\frac{9}{5}\leqslant x<5$时，$y=-\frac{3}{8}x^2+\frac{15}{8}x=-\frac{3}{8}(x-\frac{5}{2})^2+\frac{75}{32}$的最大值为$\frac{75}{32}$.

因此，当$x=\frac{5}{2}$时，y的最大值为$\frac{75}{32}$.

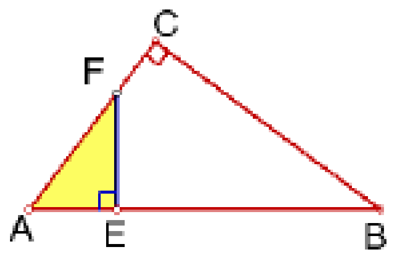


图 2

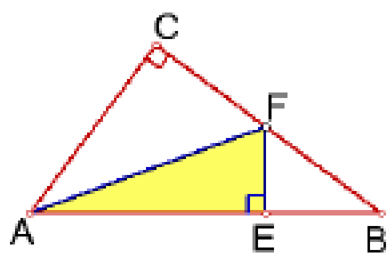


图 3

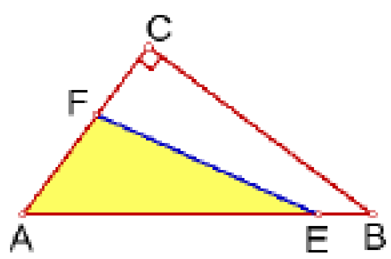


图 4

(3)△ABC的周长等于 12，面积等于 6.

先假设EF平分△ABC的周长，那么$AE=x$，$AF=6-x$，x的变化范围为$3<x\leqslant 5$．因此$S_{\Delta AEF}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF\sin A=\frac{1}{2}x(6-x)\times\frac{4}{5}=-\frac{2}{5}x(x-6)$．解方程$-\frac{2}{5}x(x-6)=3$，得$x=3\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

因为$x=3+\frac{1}{2}\sqrt{6}$在$3\leqslant x\leqslant 5$范围内（如图 4），因此存在直线EF将△ABC的周长和面积同时平分.

考点伸展

如果把第（3）题的条件“点F在直角边AC上”改为“点F在直角边BC上”，那么就不存在直线EF将△ABC的周长和面积同时平分.

先假设EF平分△ABC的周长，那么$AE=x$，$BE=5-x$，$BF=x+1$.

因此$S_{\Delta BEF}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot BF\sin B=\frac{1}{2}(5-x)(x+1)\times\frac{3}{5}=-\frac{3}{10}(x^2-4x-5)$.

解方程$-\frac{3}{10}(x^2-4x-5)=3$．整理，得$x^2-4x+5=0$．此方程无实数根.

例 5　20XX 年兰州市中考第 29 题

如图 1，正方形 $ABCD$ 中，点 A、B 的坐标分别为（0，10），（8，4），点 C 在第一象限．动点 P 在正方形 $ABCD$ 的边上，从点 A 出发沿 $A\to B\to C\to D$ 匀速运动，同时动点 Q 以相同速度在 x 轴上运动，当 P 点到 D 点时，两点同时停止运动，设运动的时间为 t 秒．

（1）当 P 点在边 AB 上运动时，点 Q 的横坐标 x（长度单位）关于运动时间 t（秒）的函数图象如图 2 所示，请写出点 Q 开始运动时的坐标及点 P 运动速度；

（2）求正方形边长及顶点 C 的坐标；

（3）在（1）中当 t 为何值时，△OPQ 的面积最大，并求此时 P 点的坐标．

（4）如果点 P、Q 保持原速度速度不变，当点 P 沿 $A\to B\to C\to D$ 匀速运动时，OP 与 PQ 能否相等，若能，写出所有符合条件的 t 的值；若不能，请说明理由．

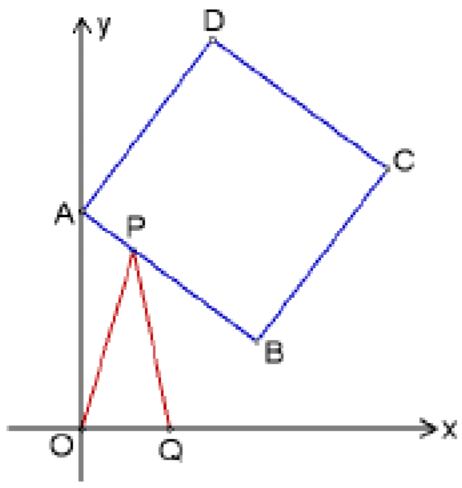


图 1

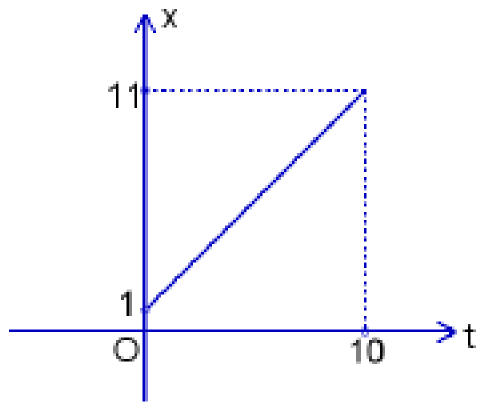


图 2

动感体验

请打开几何画板文件名“09 兰州 29”，拖动点 Q 在 x 轴上运动，可以体验到，点 Q 运动的起点为（1，0）；当 P 在 AB 上时，△OPQ 的面积随 x 变化的图象是开口向下的抛物线的一部分；观察点 P 与 OQ 的垂直平分线的位置关系，可以体验到，有两个时刻，PO=PQ．双击按钮“$PO=PQ$，P 在 AB 上”和“$PO=PQ$，P 在 CD 上”，可以准确显示 $PO=PQ$．

思路点拨

1．过点 B、C、P 向 x 轴、y 轴作垂线段，就会构造出全等的、相似的直角三角形，出现相等、成比例的线段，用含有 t 的式子表示这些线段是解题的基础．

2．求点 C 的坐标，为求直线 BC、CD 的解析式作铺垫，进而为附加题用两点间的距离公式作准备．

3．不论点 P 在 AB、BC 还是 CD 上，点 P 所在的直角三角形的三边比总是 3∶4∶5，灵活运用方便解题．

4．根据二次函数的解析式求函数的最值时，要注意定义域与对称轴的位置关系．

满分解答

（1）$Q(1,0)$，点 P 每秒钟运动 1 个单位长度．

（2）过点 B 作 $BE\perp y$ 轴于点 E，过点 C 作 x 轴的垂线交直线 BE 于 F，交 x 轴于 H．

在 Rt△ABE 中，$BE=8$，$AE=10-4=6$，所以 $AB=10$．由△ABE≌△BCF，知 $BF=AE=4$，$CF=BE=6$．所以 $EF=8+6=14$，$CH=8+4=12$．因此点 C 的坐标为（14，12）．

（3）过点 P 作 $PM\perp y$ 轴于 M，$PN\perp x$ 轴于 N．因为 $PM//BE$，所以 $\frac{AP}{AB}=\frac{AM}{AF}=\frac{MP}{BF}$，即 $\frac{t}{10}=\frac{AM}{6}=\frac{MP}{8}$．因此 $AM=\frac{3}{5}t$，$PM=\frac{4}{5}t$．于是 $PN=OM=10-\frac{3}{5}t$，$ON=PM=\frac{4}{5}t$．

设△OPQ 的面积为 S（平方单位），那么 $S=\frac{1}{2}\cdot OQ\cdot PN=\frac{1}{2}(1+t)(10-\frac{3}{5}t)=-\frac{3}{10}t2+\frac{47}{10}t+5$，

定义域为 $0 \leqslant t \leqslant 10$．

因为抛物线开口向下，对称轴为直线$t=\dfrac{47}{6}$，所以当$t=\dfrac{47}{6}$时，△*OPQ* 的面积最大．此时 *P* 的坐标为($\dfrac{94}{15}$，$\dfrac{53}{10}$)．

（4）当$t=\dfrac{5}{3}$或$t=\dfrac{295}{13}$时，*OP* 与 *PQ* 相等．

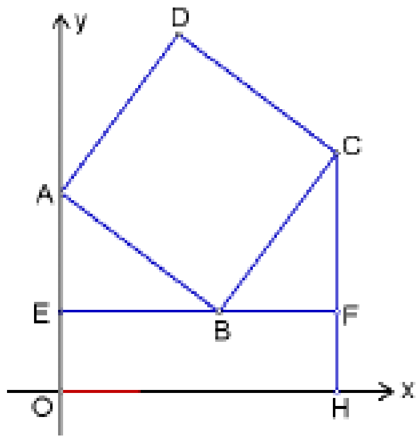


图 3

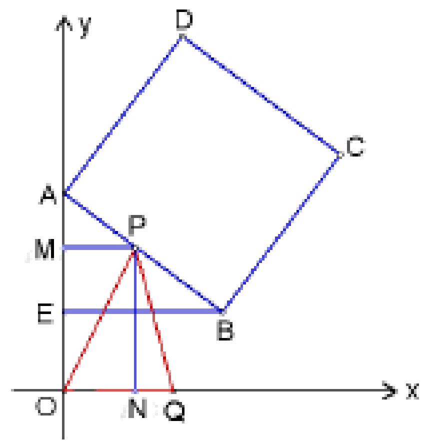


图 4

考点伸展

附加题的一般思路是：点 *Q* 的横坐标是点 *P* 的横坐标的 2 倍．先求直线 *AB*、*BC*、*CD* 的解析式，根据直线的解析式设点 *P* 的坐标，再根据两点间的距离公式列方程 *PO*＝*PQ*．

附加题也可以这样解：

①如图 4，在 Rt△*AMP* 中，设 *AM*＝3m，*MP*＝4 m，*AP*＝5m，那么 *OQ*＝8m．根据 *AP*、*OQ* 的长列方程组$\begin{cases}5m=t,\\8m=1+t,\end{cases}$解得$t=\dfrac{5}{3}$．

②如图 5，在 Rt△*GMP* 中，设 *GM*＝3m，*MP*＝4 m，*GP*＝5m，那么 *OQ*＝8m．在 Rt△*GAD* 中，*GD*＝7.5．根据 *GP*、*OQ* 的长列方程组$\begin{cases}5m=37.5-t,\\8m=1+t,\end{cases}$解得$t=\dfrac{295}{13}$．

③如图 6，设 *MP*＝4m，那么 *OQ*＝8m．根据 *BP*、*OQ* 的长列方程组$\begin{cases}5m-10=t-10,\\8m=1+t,\end{cases}$解得$t=\dfrac{5}{3}$，但这时点 *P* 不在 *BC* 上．

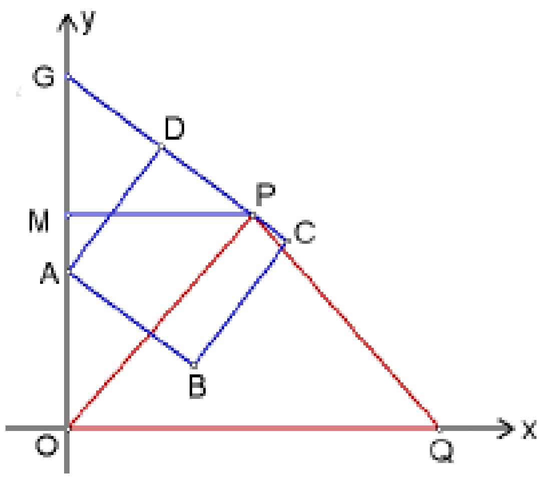


图 5

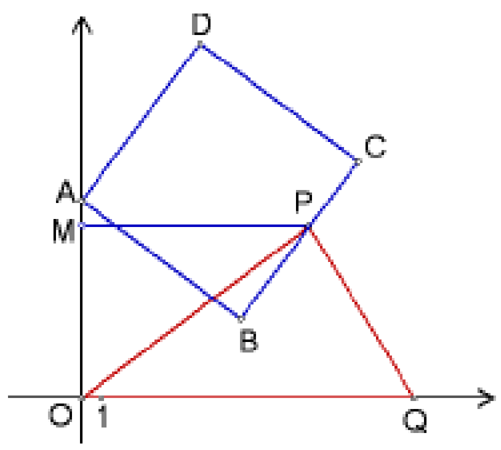


图 6

例 6　　20XX 年长春市中考第 25 题

在直角坐标系中，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点（0，10）和点（4，2）.

（1）求这条抛物线的解析式.

（2）如图 1，在边长一定的矩形 $ABCD$ 中，CD＝1，点 C 在 y 轴右侧沿抛物线 $y=x^2+bx+c$ 滑动，在滑动过程中 CD∥x 轴，AB 在 CD 的下方. 当点 D 在 y 轴上时，AB 落在 x 轴上.

①求边 BC 的长.

②当矩形 $ABCD$ 在滑动过程中被 x 轴分成两部分的面积比为 1:4 时，求点 C 的坐标.

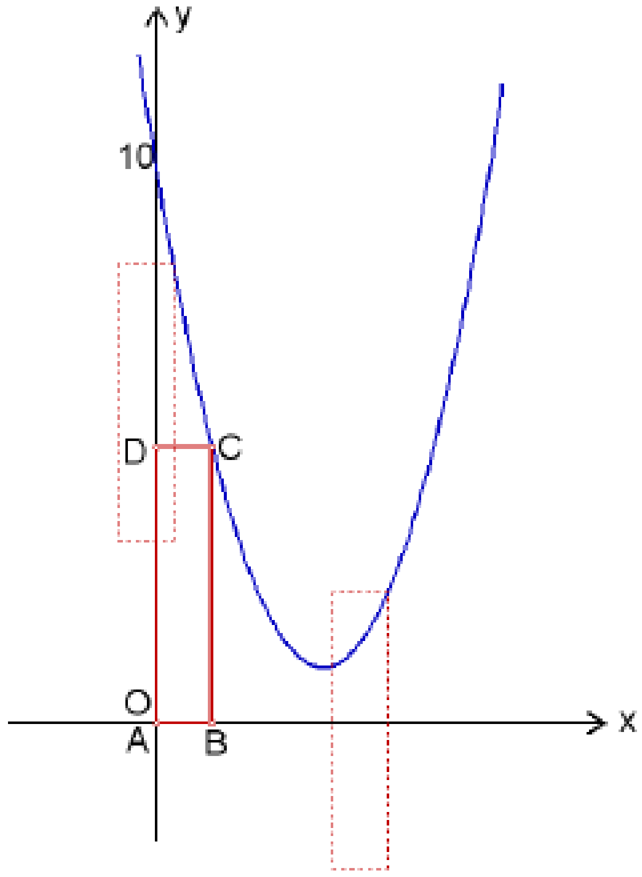


图 1

动感体验

请打开几何画板文件名“08 长春 25”，拖动点 C 在抛物线上运动，可以体验到，矩形 $ABCD$ 随之平移，双击按钮“上∶下＝4∶1”，可以体验到，符合条件的点 C 有两个；双击按钮“上∶下＝1∶4”，可以体验到，符合条件的点 C 有一个，就是抛物线的顶点.

思路点拨

1．用待定系数法求抛物线的解析式.

2．数形结合，把 x＝1 代入抛物线的解析式，求得的 y 的值就是边 BC 的长.

3．分类讨论两部分的面积比为 1:4，分为上下之比为 1:4 和 4:1 两种情况.

4．矩形在移动过程中形状不变，把面积比转化为高度比，由于 BC＝5，因此点 C 的纵坐标为 1 或 4，进而解方程求得点 C 的横坐标.

满分解答

（1）因为抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过点（0，10）和点（4，2），所以 $\begin{cases} c=10, \\ 16+4b+c=2. \end{cases}$
解得 $b=-6$，$c=10$．因此抛物线的解析式为 $y=x^2-6x+10$.

（2）①因为 CD＝1，点 D 在 y 轴上，所以点 C 的横坐标为 1．在 $y=x^2-6x+10$ 中，当 x＝1 时，y＝5．所以边 BC 的长为 5.

②因为矩形边长一定，所以 BC＝5．如图 2，当矩形 $ABCD$ 在 x 轴上方部分的面积与这个矩形面积的比为 1:5 时，点 C 的纵坐标为 1．解方程 $x^2-6x+10=1$，得 $x_1=x_2=3$．此

时点 C 的坐标为(3，1).

如图 3，当矩形 $ABCD$ 在 x 轴上方部分的面积与这个矩形面积的比为 5:1 时，点 C 的纵坐标为 4. 解方程 $x2-6x+10=4$，得 $x_1=3+\sqrt{3}$，$x_2=3-\sqrt{3}$. 此时点 C 的坐标为$(3+\sqrt{3}$，4)或$(3-\sqrt{3}$，4).

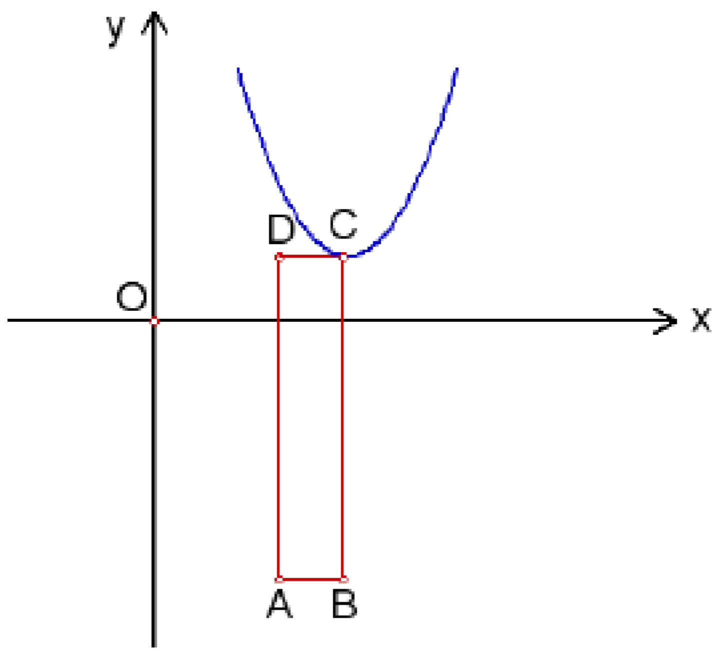


图 2

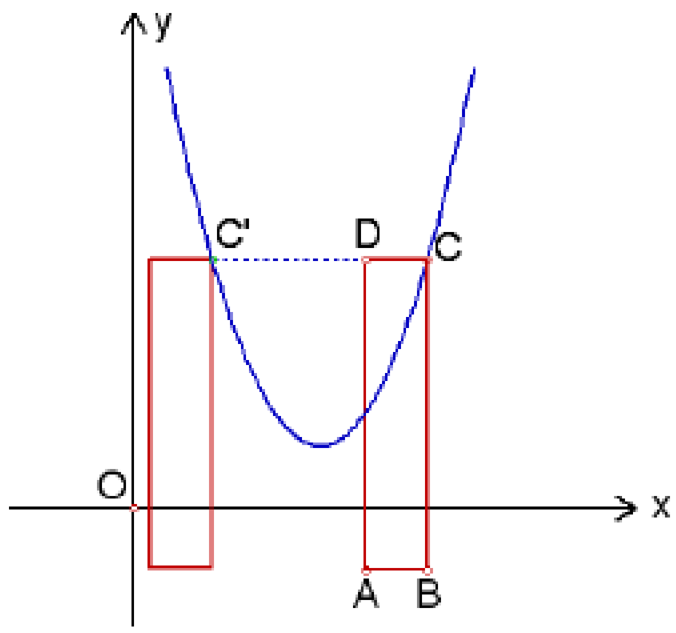


图 3

考点伸展

在本题情景下，以 CD 为半径的⊙C 如果与坐标轴相切，那么符合条件的点 C 有哪些？

解：由于 $CD=1$，抛物线的顶点为（3，1），因此与坐标轴相切的⊙C 有三个，点 C 的坐标分别为（1，5），（－1，17），（3，1）.

在本题情景下，以 CB 为半径的⊙C 如果与坐标轴相切，那么符合条件的点 C 有哪些？

解：由于点（5，5）恰好在抛物线上，因此与坐标轴相切的⊙C 有两个，点 C 的坐标分别为（5，5），（－5，65）.