

特别说明

此资料来自豆丁网(<http://www.docin.com/>)

您现在所看到的文档是使用**下载器**所生成的文档

此文档的原件位于

<http://www.docin.com/p-56120364.html>

感谢您的支持

抱米花

<http://blog.sina.com.cn/lotusbaob>

大学物理习题解答

湖南大学应用物理系

第一章 质点运动学

P26.

1. 1 一质点沿直线运动, 运动方程为 $x(t) = 6t^2 - 2t^3$. 试求:

- (1) 第 2s 内的位移和平均速度;
- (2) 1s 末及 2s 末的瞬时速度, 第 2s 内的路程;
- (3) 1s 末的瞬时加速度和第 2s 内的平均加速度.

[解答] (1) 质点在第 1s 末的位移大小为

$$x(1) = 6 \times 1^2 - 2 \times 1^3 = 4(\text{m}).$$

在第 2s 末的位移大小为

$$x(2) = 6 \times 2^2 - 2 \times 2^3 = 8(\text{m}).$$

在第 2s 内的位移大小为

$$\Delta x = x(2) - x(1) = 4(\text{m}),$$

经过的时间为 $\Delta t = 1\text{s}$, 所以平均速度大小为

$$\bar{v} = \Delta x / \Delta t = 4(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

(2) 质点的瞬时速度大小为

$$v(t) = dx/dt = 12t - 6t^2,$$

因此 $v(1) = 12 \times 1 - 6 \times 1^2 = 6(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$,

$$v(2) = 12 \times 2 - 6 \times 2^2 = 0,$$

质点在第 2s 内的路程等于其位移的大小, 即 $\Delta s = \Delta x = 4\text{m}$.

(3) 质点的瞬时加速度大小为

$$a(t) = dv/dt = 12 - 12t,$$

因此 1s 末的瞬时加速度为

$$a(1) = 12 - 12 \times 1 = 0,$$

第 2s 内的平均加速度为

$$\bar{a} = [v(2) - v(1)] / \Delta t = [0 - 6] / 1 = -6(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}).$$

[注意] 第几秒内的平均速度和平均加速度的时间间隔都是 1 秒.

1. 2 一质点作匀加速直线运动, 在 $t = 10\text{s}$ 内走过路程 $s = 30\text{m}$, 而其速度增为 $n = 5$

倍. 试证加速度为 $a = \frac{2(n-1)s}{(n+1)t^2}$.

并由上述数据求出量值.

[证明] 依题意得 $v_t = nv_0$,

根据速度公式 $v_t = v_0 + at$, 得

$$a = (n-1)v_0/t, \quad (1)$$

根据速度与位移的关系式 $v_t^2 = v_0^2 + 2as$, 得

$$a = (n^2 - 1)v_0^2/2s, \quad (2)$$

(1) 平方之后除以 (2) 式证得

$$a = \frac{2(n-1)s}{(n+1)t^2}.$$

计算得加速度为

$$a = \frac{2(5-1)30}{(5+1)10^2} = 0.4(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}).$$

1. 3 一人乘摩托车跳越大矿坑, 他以与水平成 22.5° 的夹角的初速度 $65\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 从西边起跳, 准确地落在坑的东边. 已知东边比西边低 70m , 忽略空气阻力, 且取 $g = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. 问:

- (1) 矿坑有多宽?
- 他飞越的时间多长?

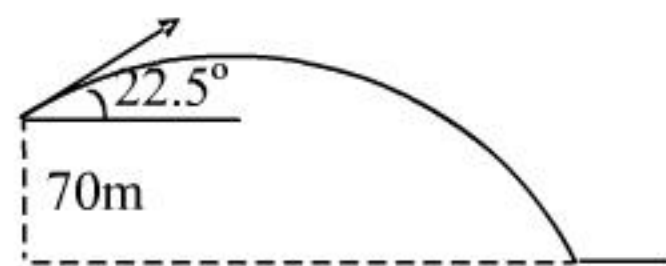


图 1.3

- (2) 他在东边落地时的速度? 速度与水平面的夹角?

[解答] 方法一: 分步法. (1) 夹角用 θ 表示, 人和车 (他) 在竖直方向首先做竖直上抛运动, 初速度的大小为

$$v_{y0} = v_0 \sin \theta = 24.87(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

取向上的方向为正, 根据匀变速直线运动的速度公式

$$v_t - v_0 = at,$$

这里的 v_0 就是 v_{y0} , $a = -g$; 当他达到最高点

时, $v_t = 0$, 所以上升到最高点的时间为

$$t_1 = v_{y0}/g = 2.49(\text{s}).$$

再根据匀变速直线运动的速度和位移的关系式

$$v_t^2 - v_0^2 = 2as,$$

可得上升的最大高度为

$$h_1 = v_{y0}^2/2g = 30.94(\text{m}).$$

他从最高点开始再做自由落体运动, 下落的高度为

$$h_2 = h_1 + h = 100.94(\text{m}).$$

根据自由落体运动公式 $s = gt^2/2$, 得下落的时间为

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 4.49(\text{s}).$$

因此他飞越的时间为

$$t = t_1 + t_2 = 6.98(\text{s}).$$

他飞越的水平速度为

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta = 60.05(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}),$$

所以矿坑的宽度为

$$x = v_{x0}t = 419.19(\text{m}).$$

(2) 根据自由落体速度公式可得他落地的竖直速度大小为

$$v_y = gt = 69.8(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}),$$

落地速度为

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = 92.08(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}),$$

与水平方向的夹角为

$$\varphi = \arctan(v_y/v_x) = 49.30^\circ,$$

方向斜向下.

方法二: 一步法. 取向上的方向为正, 他在竖直方向的位移为 $y = v_{y0}t - gt^2/2$, 移项得时间的一元二次方程

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0 \sin \theta t + y = 0,$$

解得

$$t = (v_0 \sin \theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta - 2gy})/g.$$

这里 $y = -70\text{m}$, 根号项就是他落地时在竖直方向的速度大小, 由于时间应该取正值, 所以公式取正根, 计算时间为

$$t = 6.98(\text{s}).$$

由此可以求解其他问题.

1. 4 一个正在沿直线行驶的汽船, 关

闭发动机后, 由于阻力得到一个与速度反向、大小与船速平方成正比例的加速度, 即 $dv/dt = -kv^2$, k 为常数.

(1) 试证在关闭发动机后, 船在 t 时

刻的速度大小为 $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt$;

(2) 试证在时间 t 内, 船行驶的距离为 $x = \frac{1}{k} \ln(v_0 kt + 1)$.

[证明] (1) 分离变量得 $\frac{dv}{v^2} = -kdt$,

积分 $\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -k \int_0^t dt$,

可得 $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt$.

(2) 公式可化为 $v = \frac{v_0}{1 + v_0 kt}$,

由于 $v = dx/dt$, 所以

$$dx = \frac{v_0}{1 + v_0 kt} dt = \frac{1}{k(1 + v_0 kt)} d(1 + v_0 kt)$$

积分 $\int_0^x dx = \int_0^t \frac{1}{k(1 + v_0 kt)} d(1 + v_0 kt)$.

因此 $x = \frac{1}{k} \ln(v_0 kt + 1)$. 证毕.

[讨论] 当力是速度的函数时, 即 $f = f(v)$, 根据牛顿第二定律得 $f = ma$.

由于 $a = d^2x/dt^2$,

而 $dx/dt = v$,

所以 $a = dv/dt$,

分离变量得方程

$$dt = \frac{mdv}{f(v)},$$

解方程即可求解.

在本题中, k 已经包括了质点的质量. 如果阻力与速度反向、大小与船速的 n 次方成正比, 则

$$dv/dt = -kv^n.$$

(1) 如果 $n=1$, 则得

$$\frac{dv}{v} = -kdt,$$

积分得

$$\ln v = -kt + C.$$

当 $t=0$ 时, $v=v_0$, 所以 $C=\ln v_0$, 因此

$$\ln v/v_0 = -kt,$$

得速度为

$$v = v_0 e^{-kt}.$$

而 $dv = v_0 e^{-kt} dt$, 积分得

$$x = \frac{v_0}{-k} e^{-kt} + C'.$$

当 $t=0$ 时, $x=0$, 所以 $C'=v_0/k$, 因此

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}).$$

(2) 如果 $n \neq 1$, 则得 $\frac{dv}{v^n} = -kdt$, 积分得

$$\frac{v^{1-n}}{1-n} = -kt + C.$$

当 $t=0$ 时, $v=v_0$, 所以 $\frac{v_0^{1-n}}{1-n} = C$, 因此

$$\frac{1}{v^{n-1}} = \frac{1}{v_0^{n-1}} + (n-1)kt.$$

如果 $n=2$, 就是本题的结果.

如果 $n \neq 2$, 可得

$$x = \frac{\{[1 + (n-1)v_0^{n-1}kt]^{(n-2)/(n-1)} - 1\}}{(n-2)v_0^{n-2}k},$$

读者不妨自证.

1.5 一质点沿半径为 0.10m 的圆周运动, 其角位置 (以弧度表示) 可用公式表示: $\theta = 2 + 4t^3$. 求:

(1) $t=2s$ 时, 它的法向加速度和切向加速度;

(2) 当切向加速度恰为总加速度大小的一半时, θ 为何值?

(3) 在哪一时刻, 切向加速度和法向加速度恰有相等的值?

[解答] (1) 角速度为

$$\omega = d\theta/dt = 12t^2 = 48(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}),$$

法向加速度为

$$a_n = r\omega^2 = 230.4(\text{m} \cdot \text{s}^{-2});$$

角加速度为

$$\beta = d\omega/dt = 24t = 48(\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}),$$

切向加速度为

$$a_t = r\beta = 4.8(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}).$$

(2) 总加速度为 $a = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2}$, 当 $a_t = a/2$ 时, 有 $4a_t^2 = a_t^2 + a_n^2$, 即

$$a_n = a_t \sqrt{3}.$$

由此得 $r\omega^2 = r\beta\sqrt{3}$,

$$\text{即 } (12t^2)^2 = 24t\sqrt{3},$$

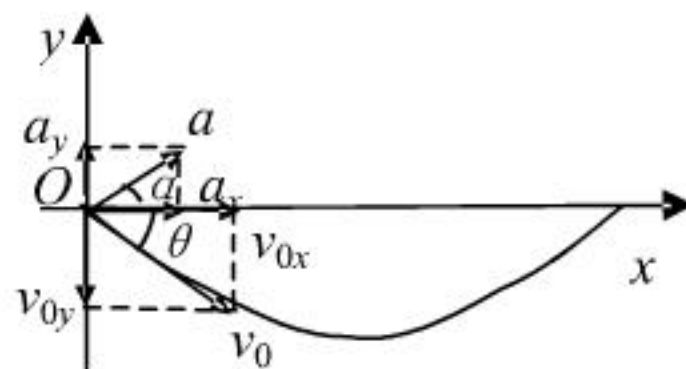
$$\text{解得 } t^3 = \sqrt{3}/6.$$

所以

$$\theta = 2 + 4t^3 = 2(1 + \sqrt{3}/3) = 3.154(\text{rad}).$$

(3) 当 $a_t = a_n$ 时, 可得 $r\beta = r\omega^2$, 即 $24t = (12t^2)^2$, 解得 $t = (1/6)^{1/3} = 0.55(s).$

1.6 一飞机在铅直面内飞行, 某时刻飞机的速度为 $v = 300\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 方向与水平线夹角为 30° 而斜向下, 此后飞机的加速度为 $a = 20\sqrt{3}\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, 方向与水平前进方向夹角为 30° 而斜向上, 问多长时间后, 飞机又回到原来的高度? 在此期间飞机在水平方向飞行的距离为多少?



[解答] 建立水平和垂直坐标系, 飞机的初速度的大小为

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta,$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta.$$

加速度的大小为

$$a_x = a \cos \alpha,$$

$$a_y = a \sin \alpha.$$

运动方程为

$$x = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2,$$

$$y = -v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2.$$

即 $x = v_0 \cos \theta \cdot t + \frac{1}{2}a \cos \alpha \cdot t^2,$

$$y = -v_0 \sin \theta \cdot t + \frac{1}{2}a \sin \alpha \cdot t^2.$$

令 $y = 0$, 解得飞机回到原来高度时的时间为

$$t = 0 \text{ (舍去)}; t = \frac{2v_0 \sin \theta}{a \sin \alpha} = 10\sqrt{3} \text{ (s)}.$$

将 t 代入 x 的方程求得 $x = 9000\text{m}$.

[注意]选择不同的坐标系, 例如 x 方向沿着 a 的方向或者沿着 v_0 的方向, 也能求出相同的结果.

1.7 一个半径为 $R = 1.0\text{m}$ 的轻圆盘, 可以绕一水平轴自由转动. 一根轻绳绕在盘子的边缘, 其自由端拴一物体 A . 在重力作用下, 物体 A 从静止开始匀加速地下降, 在 $\Delta t = 2.0\text{s}$ 内下降的距离 $h = 0.4\text{m}$. 求物体开始下降后 3s 末, 圆盘边缘上任一点的切向加速度与法向加速度.

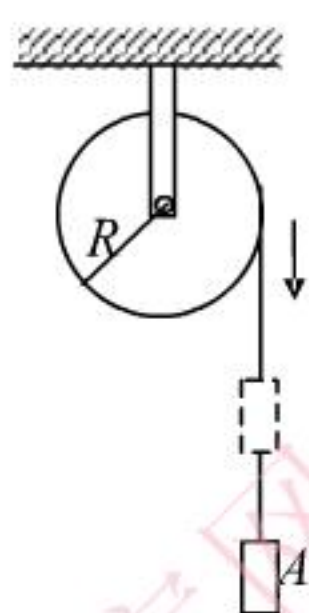


图 1.7

[解答]圆盘边缘的切向加速度大小等于物体 A 下落加速度.

由于 $h = \frac{1}{2}a_t \Delta t^2$, 所以

$$a_t = 2h/\Delta t^2 = 0.2(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}).$$

物体下降 3s 末的速度为

$$v = a_t t = 0.6(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}),$$

这也是边缘的线速度, 因此法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 0.36(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}).$$

1.8 一升降机以加速度 $1.22\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ 上升, 当上升速度为 $2.44\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 有一螺帽自升降机的天花板上松落, 天花板与升降机的底面

相距 2.74m . 计算:

(1) 螺帽从天花板落到底面所需的时间;

(2) 螺帽相对于升降机外固定柱子的下降距离.

[解答]在螺帽从天花板落到底面时, 升降机上升的高度为

$$h_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2;$$

螺帽做竖直上抛运动, 位移为

$$h_2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

由题意得 $h = h_1 - h_2$, 所以

$$h = \frac{1}{2}(a + g)t^2,$$

解得时间为

$$t = \sqrt{2h/(a + g)} = 0.705(\text{s}).$$

算得 $h_2 = -0.716\text{m}$, 即螺帽相对于升降机外固定柱子的下降距离为 0.716m .

[注意]以升降机为参考系, 钉子下落时相对加速度为 $a + g$, 而初速度为零, 可列方程

$$h = (a + g)t^2/2,$$

由此可计算钉子落下的时间, 进而计算下降距离.

1.9 有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处, 然后又向西飞回到 A 处. 已知气流相对于地面的速度为 u , AB 之间的距离为 l , 飞机相对于空气的速率 v 保持不变.

(1) 如果 $u = 0$ (空气静止), 试证来回飞行的时间为 $t_0 = \frac{2l}{v}$;

(2) 如果气流的速度向东, 证明来回飞行的总时间为 $t_1 = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}$;

(3) 如果气流的速度向北, 证明来回飞行的总时间为 $t_2 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$.

[证明] (1) 飞机飞行来回的速率为 v , 路程为 $2l$, 所以飞行时间为 $t_0 = 2l/v$.

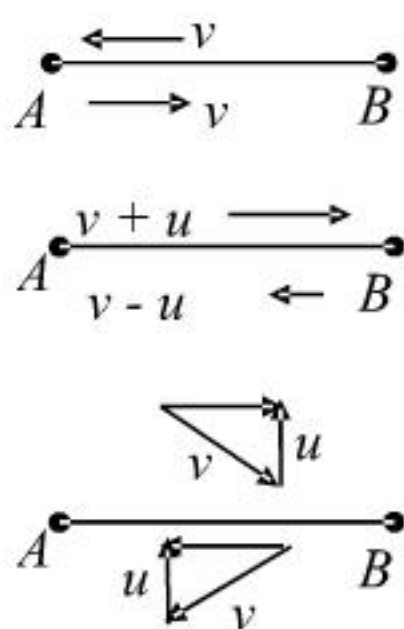
(2) 飞机向东飞行顺风的速率为 $v + u$,

向西飞行逆风的速率为 $v - u$ ，所以飞行时间为

$$t_1 = \frac{l}{v+u} + \frac{l}{v-u} = \frac{2vl}{v^2 - u^2}$$

$$= \frac{2l/v}{1 - u^2/v^2} = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}.$$

(3) 飞机相对地的速度等于相对风的速度加风相对地的速度. 为了使飞机沿着 AB 之间的直线飞行, 就要使其相对地的速度偏向北方, 可作矢量三角形, 其中沿 AB 方向的速度大小为



$V = \sqrt{v^2 - u^2}$, 所以飞行时间为

$$t_2 = \frac{2l}{V} = \frac{2l}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{2l/v}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$

$$= \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}. \quad \text{证毕.}$$

1. 10 如图所示, 一汽车在雨中沿直线行驶, 其速度为 v_1 , 下落雨的速度方向与铅直方向的夹角为 θ , 偏向于汽车前进方向, 速度为 v_2 . 今在车后放一长方形物体, 问车速 v_1 为多大时此物体刚好不会被雨水淋湿?

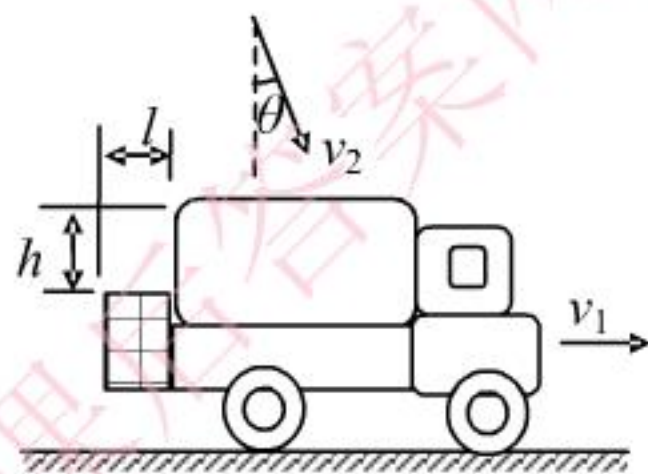
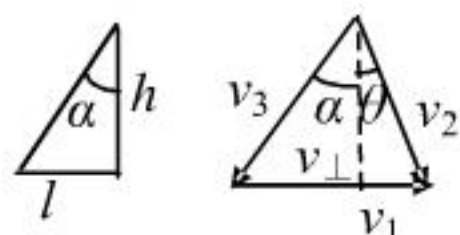


图 1.10

[解答] 雨对地的速度 $\vec{v}_2$ 等于雨对车的

速度 $\vec{v}_3$ 加车对地的

速度 $\vec{v}_1$, 由此可作矢量三角形. 根据题意得 $\tan \alpha = l/h$.



方法一: 利用直角三角形. 根据直角三角形得

$$v_1 = v_2 \sin \theta + v_3 \sin \alpha,$$

其中 $v_3 = v_{\perp} / \cos \alpha$, 而 $v_{\perp} = v_2 \cos \theta$,

因此 $v_1 = v_2 \sin \theta + v_2 \cos \theta \sin \alpha / \cos \alpha$,

即 $v_1 = v_2 (\sin \theta + \frac{l}{h} \cos \theta)$. 证毕.

方法二: 利用正弦定理. 根据正弦定理可得

$$\frac{v_1}{\sin(\theta + \alpha)} = \frac{v_2}{\sin(90^\circ - \alpha)},$$

所以

$$v_1 = v_2 \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$= v_2 \frac{\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= v_2 (\sin \theta + \cos \theta \tan \alpha),$$

即 $v_1 = v_2 (\sin \theta + \frac{l}{h} \cos \theta)$.

方法三: 利用位移关系. 将雨滴的速度分解为竖直和水平两个分量, 在 t 时间内, 雨滴的位移为

$$l = (v_1 - v_2 \sin \theta) t,$$

$$h = v_2 \cos \theta \cdot t.$$

两式消去时间 t 即得所求. 证毕.

第二章 质点力学的基本定律

P46.

2. 1 如图所示, 把一个质量为 m 的木块放在与水平成 θ 角的固定斜面上, 两者间的静摩擦因素 μ_s 较小, 因此若不加支持, 木块将加速下滑.

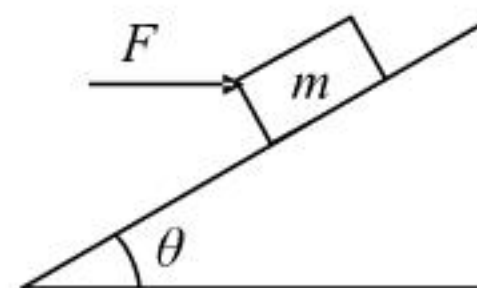


图 2.1

(1) 试证 $\tan \theta \geq \mu_s$;

(2) 须施加多大的水平力 $\vec{F}$, 可使木块恰不下滑? 这时木块对斜面的正压力多大?

(3) 如不断增大 $\vec{F}$ 的大小, 则摩擦力和正压力将有怎样的变化?

(1) [证明] 木块在斜面上时受到重力

$\vec{G} = m\vec{g}$ 和斜面的支持力 $\vec{N}$ 以及静摩擦力

$\vec{f}$, 其中

$$f \leq f_s = \mu_s N,$$

而 $N = G \cos \theta$.

要使木块加速下滑, 重力沿着斜面的分量不得小于

最大静摩擦力 f_s . 根据牛顿第二定律得

$$G \sin \theta - \mu_s G \cos \theta = ma \geq 0,$$

因此 $\tan \theta \geq \mu_s$. 证毕.

(2) [解答]

要使物体恰好不下滑, 则有

$$G \sin \theta - \mu_s N - F \cos \theta = 0, \quad (1)$$

$$N - G \cos \theta - F \sin \theta = 0. \quad (2)$$

(2) $\times \mu_s + (1)$ 得

$$G \sin \theta - \mu_s G \cos \theta - F \cos \theta - \mu_s F \sin \theta = 0,$$

解得

$$F = \frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} mg. \quad (3)$$

上式代入 (2) 得

$$N = \frac{mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}. \quad (4)$$

(3) [解答] 当木块平衡时, 一般情况下, 有

$$G \sin \theta - f - F \cos \theta = 0, \quad N - G \cos \theta - F \sin \theta = 0.$$

解得

$$f = G \sin \theta - F \cos \theta, \quad N = G \cos \theta + F \sin \theta.$$

可知: ①当 $\vec{F}$ 的大小不断增加时, 摩擦力将不断减小; 当 $F = G \tan \theta$ 时, 摩擦力为零; 当 F 再增加时摩擦力将反向; 至于木块是否向上做加速运动, 则要进一步讨论.

②正压力将不断增加.

[讨论] 当 $\tan \theta < 1/\mu_s$ 时, 如果木块恰好不上滑, 则摩擦力恰好等于最大静摩擦力, 方向沿着斜面向下, 用上面的方法列方程, 可得

$$F = \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} mg.$$

将 (3) 式中的 μ_s 改为 $-\mu_s$ 就是这个结果. 可见: 当 $\tan \theta = 1/\mu_s$ 时, F 趋于无穷大, 只有当 $\tan \theta < 1/\mu_s$ 时, 才能增加 F 的大小使木块向上加速滑动.

2.2 如图所示, 设质量 $m = 10\text{kg}$ 的小球挂在倾角 $\alpha = 30^\circ$ 的光滑斜面上, 求:

(1) 当斜面以加速度 $a = g/3$ 沿图中所示的方向运动时, 绳中的张力

及小球对斜面的正压力各是多大?

(2) 当斜面的加速度至少为多大时小球对斜面的正压力为零? ($g = 9.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)

[解答]

(1) 小球受到重力 G , 斜面的支持力 N 和绳子的张力 T . 建立

坐标系, 列方程得

$$N \cos \alpha + T \sin \alpha - mg = 0,$$

$$T \cos \alpha - N \sin \alpha = ma.$$

$$\text{解得 } N = m(g \cos \alpha - a \sin \alpha) = 68.54(\text{N}),$$

$$T = m(g \sin \alpha + a \cos \alpha) = 77.29(\text{N}).$$

(2) 令 $N = 0$, 得加速度为

$$a = g \tan \alpha = 16.97(\text{m}\cdot\text{s}^{-2}).$$

2.3 物体 A 和 B 的质量分别为 $m_A = 8\text{kg}$, $m_B = 16\text{kg}$, 它们之间用绳子联结, 在倾角 $\alpha = 37^\circ$ 的斜面上向下滑动, 如图所示. A 和 B 与斜面的滑动摩擦因素分别为 $\mu_{kA} = 0.2$, $\mu_{kB} = 0.4$, 求:

(1) 物体 A 和 B 的加速度;

(2) 绳子的

张力;

(3) 如果将 A 和 B 互换位置, 则 (1) 和 (2)

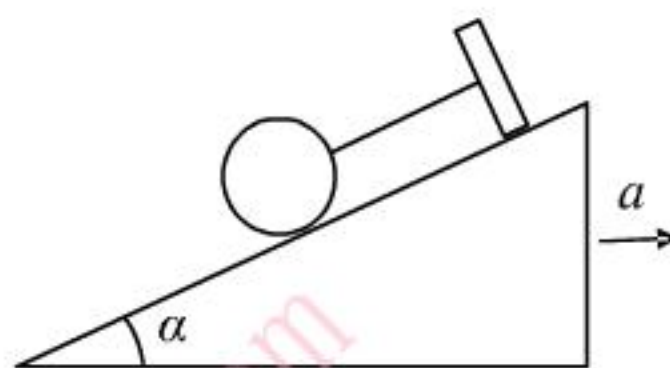


图 2.2

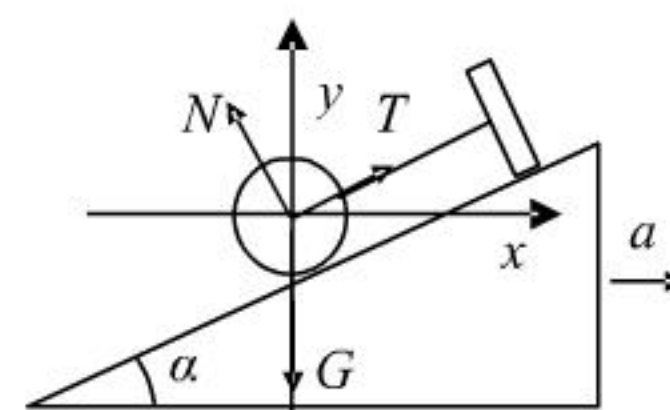


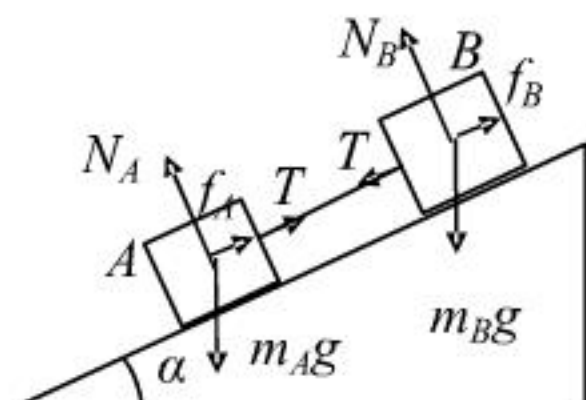
图 2.3

的结果如何?

[解答]根据角度关系可得 $\sin\alpha = 3/5 = 0.6$, $\cos\alpha = 4/5 = 0.8$, $\tan\alpha = 3/4 = 0.75$.

(1) 如果物体 A 和 B 之间没有绳子, 由于 $\tan\theta \cong \mu_s$, 可知: A 和 B 都要沿斜面做加速运动, 而 B 的加速度比较小. 当 A 和 B 之间有绳子时, 它们将以相同的加速度运动.

设绳子的张力为 T , 根据牛顿第二定律分别对 A 和 B 列运动方程:



$$m_A g \sin\alpha - \mu_{kA} m_A g \cos\alpha - T = m_A a,$$

$$T + m_B g \sin\alpha - \mu_{kB} m_B g \cos\alpha = m_B a.$$

两式相加得

$$[(m_A + m_B) \sin\alpha - (\mu_{kA} m_A + \mu_{kB} m_B) \cos\alpha] g = (m_A + m_B) a,$$

所以加速度为

$$a = g \left[\sin\alpha - \frac{\mu_{kA} m_A + \mu_{kB} m_B}{m_A + m_B} \cos\alpha \right] = 3.26(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}).$$

(2) 将加速度 a 的公式代入任一方程都可解得张力为

$$T = \frac{(\mu_{kB} - \mu_{kA}) m_A m_B g \cos\alpha}{m_A + m_B} = 3.86(\text{N}).$$

由此可见: 当两物体的摩擦因素相等时, 张力才为零, 这是因为它们的加速度相等.

(3) 将 A 和 B 互换位置后, 由于 A 的加速度比较大, 所以绳子不会张紧, 其张力为零.

A 的运动方程为

$$m_A g \sin\alpha - \mu_{kA} m_A g \cos\alpha = m_A a_A,$$

$$\text{解得 } a_A = g(\sin\alpha - \mu_{kA} \cos\alpha) = 4.12(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}).$$

$$\text{同理得 } a_B = g(\sin\alpha - \mu_{kB} \cos\alpha) = 2.7(4\text{m} \cdot \text{s}^{-2}).$$

2.4 一个重量为 P 的质点, 在光滑的固定斜面 (倾角为 α) 上以初速度 $\vec{v}_0$ 运动,

$\vec{v}_0$ 的方向与斜面底边的水平约 AB

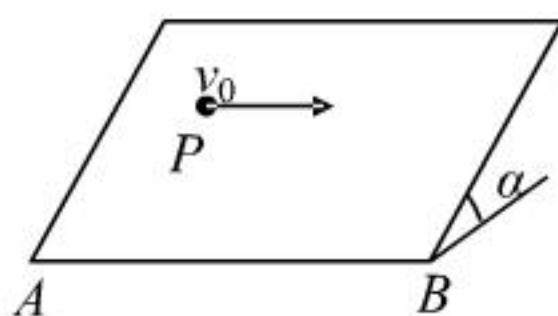


图 2.4

平行, 如图所示, 求这质点的运动轨道.

[解答]质点在斜上运动的加速度为 $a = g \sin\alpha$, 方向与初速度方向垂直. 其运动方程为

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot t^2.$$

将 $t = x/v_0$, 代入后一方程得质点的轨道方程为

$$y = \frac{g \sin\alpha}{v_0^2} x^2,$$

这是抛物线方程.

2.5 桌上有一质量 $M = 1\text{kg}$ 的平板, 板上放一质量 $m = 2\text{kg}$ 的另一物体, 设物体与板、板与桌面之间的滑动摩擦因素均为 $\mu_k = 0.25$, 静摩擦因素为 $\mu_s = 0.30$. 求:

(1) 今以水平力 $\vec{F}$ 拉板, 使两者一起

以 $a = 1\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ 的加速度运动, 试计算物体与板、与桌面间的相互作用力;

(2) 要将板从物体下面抽出, 至少需要多大的力?

[解答] (1) 物体与板之间有正压力和摩擦力的作用.

板对物体的支持大小等于物体的重力

$$N_m = mg = 19.6(\text{N}),$$

这也是板受物体的压力的大小, 但压力方向相反.

物体受板摩擦力做加速运动, 摩擦力的大小为

$$f_m = ma = 2(\text{N}),$$

这也是板受到的摩擦

力的大小, 摩擦力方向也相反.

板受桌子的支持力大小等于其重力

$$N_M = (m + M)g = 29.4(\text{N}),$$

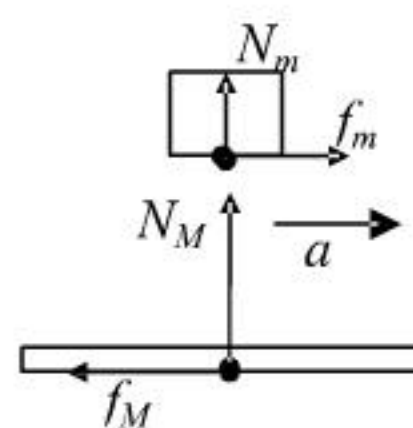
这也是桌子受板的压力的大小, 但方向相反.

板在桌子上滑动, 所受摩擦力的大小为

$$f_M = \mu_k N_M = 7.35(\text{N}).$$

这也是桌子受到的摩擦力的大小, 方向也相反.

(2) 设物体在最大静摩擦力作用下和



板一起做加速度为 a' 的运动, 物体的运动方程为

$$f = \mu_s mg = ma',$$

可得 $a' = \mu_s g$.

板的运动方程为

$$F - f - \mu_k(m + M)g = Ma',$$

$$\text{即 } F = f + Ma' + \mu_k(m + M)g \\ = (\mu_s + \mu_k)(m + M)g,$$

$$\text{算得 } F = 16.17(\text{N}).$$

因此要将板从物体下面抽出, 至少需要 16.17N 的力.

2. 6 如图所示: 已知 $F = 4\text{N}$, $m_1 = 0.3\text{kg}$, $m_2 = 0.2\text{kg}$, 两物体与水平面的摩擦因素均为 0.2. 求质量为 m_2 的物体的加速度及绳子对它的拉力. (绳子和滑轮质量均不计)

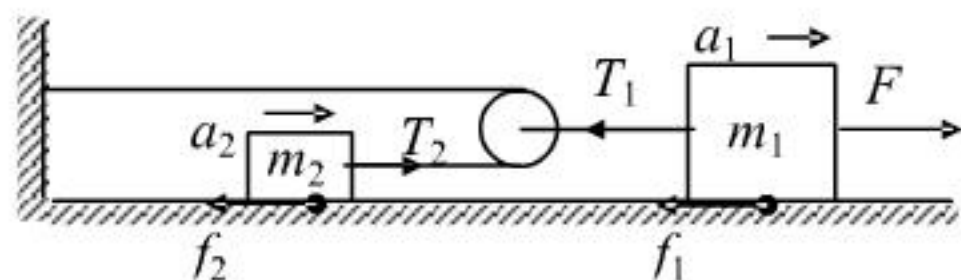


图 2.6

[解答]利用几何关系得两物体的加速度之间的关系为 $a_2 = 2a_1$, 而力的关系为 $T_1 = 2T_2$.

对两物体列运动方程得

$$T_2 - \mu m_2 g = m_2 a_2,$$

$$F - T_1 - \mu m_1 g = m_1 a_1.$$

可以解得 m_2 的加速度为

$$a_2 = \frac{F - \mu(m_1 + 2m_2)g}{m_1/2 + 2m_2} = 4.78(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}),$$

绳对它的拉力为

$$T = \frac{m_2}{m_1/2 + 2m_2} (F - \mu m_1 g / 2) = 1.35(\text{N}).$$

2. 7 两根弹簧的倔强系数分别为 k_1 和 k_2 . 求证:

(1) 它们串联起来时, 总倔强系数 k

与 k_1 和 k_2 . 满足关系式 $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$;

(2) 它们并联起来时, 总倔强系数 $k = k_1 + k_2$.

[解答]当力 F 将弹簧共拉长 x 时, 有 $F = kx$, 其中 k 为总倔强系数.

两个弹簧分别拉长 x_1 和 x_2 , 产生的弹力分别为

$$F_1 = k_1 x_1, \quad F_2 = k_2 x_2.$$

(1) 由于弹簧串联, 所以

$$F = F_1 = F_2, \quad x = x_1 + x_2,$$

因此 $\frac{F}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}$, 即 $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

(2) 由于弹簧并联, 所以

$$F = F_1 + F_2, \quad x = x_1 = x_2,$$

因此 $kx = k_1 x_1 + k_2 x_2$, 即 $k = k_1 + k_2$.

2. 8 如图所示, 质量为 m 的摆悬于架上, 架固定于小车上, 在下述各种情况中, 求摆线的方向 (即摆线与竖直线的夹角 θ) 及线中的张力 T .

(1) 小车沿水平线作匀速运动;

(2) 小车

以加速度 $\vec{a}_1$

沿水平方向运动;

(3) 小车

自由地从倾斜平面上滑下,

斜面与水平面成 φ 角;

(4) 用与斜面平行的加速度 $\vec{b}_1$ 把小车

沿斜面往上推 (设 $b_1 = b$);

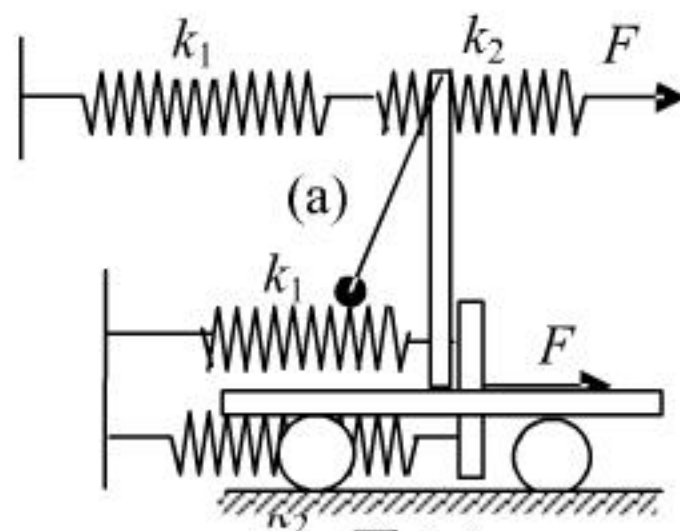
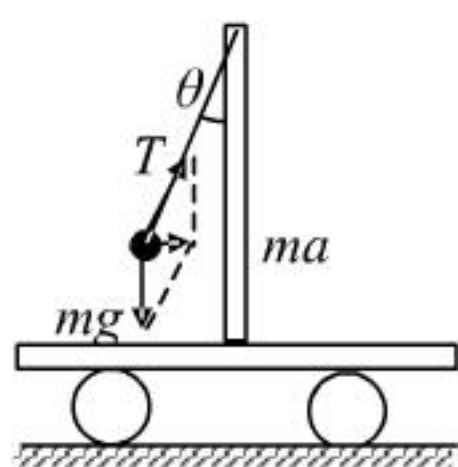


图 2.8

(5) 以同样大小的加速度 $\vec{b}_2$ ($b_2 = b$),

将小车从斜面上推下来.

[解答] (1) 小车沿水平方向做匀速直线运动时, 摆在水平方向没有受到力的作用, 摆线偏角为零, 线中张力为 $T = mg$.



(2) 小车在水平方向做加速运动时, 重力和拉力的合力就是合外力. 由于

$$\tan\theta = ma/mg,$$

所以 $\theta = \arctan(a/g)$;

绳子张力等于摆所受的拉力

$$T = \sqrt{(ma)^2 + (mg)^2} = m\sqrt{a^2 + g^2}.$$

(3) 小车沿斜面自由滑下时, 摆仍然受到重力和拉力, 合力沿斜面向下, 所以

$$\theta = \varphi;$$

$$T = mg\cos\varphi.$$

(4) 根据题意作力的矢量图, 将竖直虚线延长, 与水平辅助线相交, 可得一直角三角形, θ 角的对边是 $mb\cos\varphi$, 邻边是 $mg + mb\sin\varphi$, 由此可得:

$$\tan\theta = \frac{mb\cos\varphi}{mg + mb\sin\varphi},$$

因此角度为

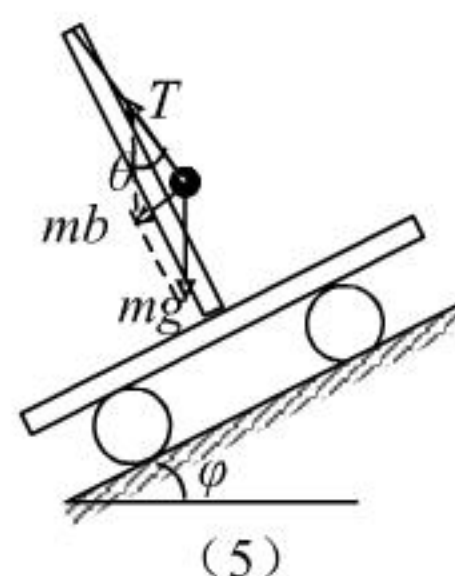
$$\theta = \arctan \frac{b\cos\varphi}{g + b\sin\varphi};$$

而张力为

$$T = \sqrt{(mb)^2 + (mg)^2 - 2(mb)(mg)\cos(\pi/2 + \varphi)}$$

$$= m\sqrt{b^2 + g^2 + 2bg\sin\varphi}.$$

(5) 与上一问相比, 加速度的方向反向, 只要将上一结果中的 b 改为 $-b$ 就行了.



2.9 如图所示: 质量为 $m =$

10kg 的小球, 拴在长度 $l = 5\text{m}$ 的轻绳子的一端, 构成一个摆. 摆动时, 与竖直线最大夹角为 60° . 求:

(1) 小球通过竖直位置时的速度为多少? 此时绳的张力多大?

(2) 在 $\theta < 60^\circ$ 的任一位置时, 求小球速度 v 与 θ 的关系式. 这时小球的加速度为多大? 绳中的张力多大?

(3) 在 $\theta = 60^\circ$ 时, 小球的加速度多大? 绳的张力有多大?

[解答] (1) 小球在运动中受到重力和绳子的拉力, 由于小球沿圆弧运动, 所以合力方向沿着圆弧的切线方向, 即 $F = -mg\sin\theta$, 负号表示角度 θ 增加的方向为正方向.

小球的运动方程为

$$F = ma = m \frac{d^2s}{dt^2},$$

其中 s 表示弧长. 由于 $s = R\theta = l\theta$, 所以速度为

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt},$$

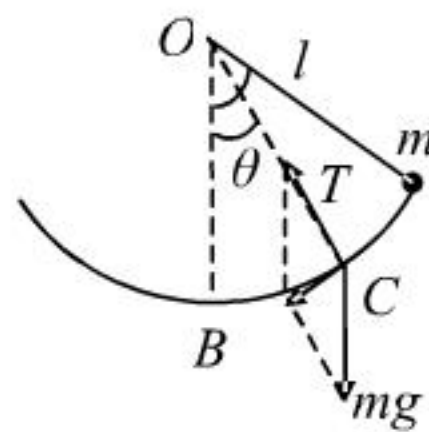
因此

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{m}{l} v \frac{dv}{d\theta},$$

$$\text{即 } vdv = -gl\sin\theta d\theta, \quad (1)$$

$$\text{取积分 } \int_0^{v_B} vdv = -gl \int_{60^\circ}^0 \sin\theta d\theta,$$

$$\text{得 } \frac{1}{2} v_B^2 = gl \cos\theta \Big|_{60^\circ}^0,$$



解得

$$v_B = \sqrt{gl} = 2.21(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

$$\text{由于 } T_B - mg = m \frac{v_B^2}{R} = m \frac{v_B^2}{l} = mg,$$

所以 $T_B = 2mg = 1.96(\text{N})$.

(2) 由 (1) 式积分得

$$\frac{1}{2} v_C^2 = gl \cos \theta + C,$$

当 $\theta = 60^\circ$ 时, $v_C = 0$, 所以 $C = -lg/2$, 因此速度为

$$v_C = \sqrt{gl(2 \cos \theta - 1)}.$$

切向加速度为

$$a_t = g \sin \theta;$$

法向加速度为

$$a_n = \frac{v_C^2}{R} = g(2 \cos \theta - 1).$$

由于 $T_C - mg \cos \theta = ma_n$, 所以张力为

$$T_C = mg \cos \theta + ma_n = mg(3 \cos \theta - 1).$$

(3) 当 $\theta = 60^\circ$ 时, 切向加速度为

$$a_t = \frac{\sqrt{3}}{2} g = 8.49(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}),$$

法向加速度为

$$a_n = 0,$$

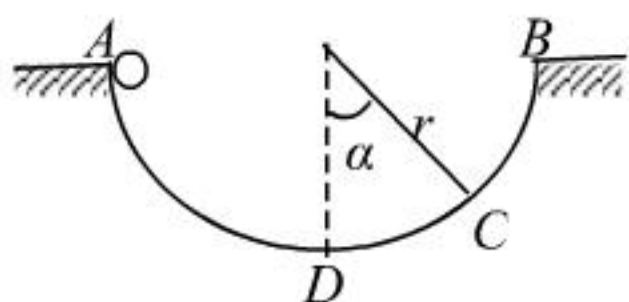
绳子的拉力

$$T = mg/2 = 0.49(\text{N}).$$

[注意]在学过机械能守恒定律之后, 求解速率更方便.

2. 10 一质量为 m 的小球, 最初静止于如图所示的 A 点, 然后沿半径为 r 的光滑圆弧的内表面 $ADCB$ 下滑. 试求小球在 C 点时的角速度和对圆弧表面的作用力.

[解答]此题情形与上一题的数学类型是相同的.



取上题中 $l = r$, 对 (1) 式积分

$$\int_0^{v_C} v dv = -gr \int_{-90^\circ}^{\alpha} \sin \theta d\theta,$$

$$\text{得 } \frac{1}{2} v_C^2 = rg \cos \theta \Big|_{-90^\circ}^{\alpha},$$

解得速度为

$$v_C = \sqrt{2gr \cos \alpha},$$

角速度为

$$\omega = \frac{v_C}{r} = \sqrt{\frac{2g \cos \alpha}{r}}.$$

由于 $N_C - mg \cos \alpha = 2mg \cos \alpha$, 所以

$$N_C = 3mg \cos \theta.$$

2. 11 小石块沿一弯曲光滑轨道上由静止滑下 h 高度时, 它的速率多大? (要求用牛顿第二定律积分求解)

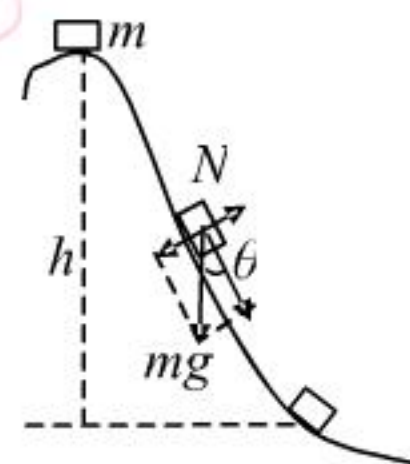


图 2.11

[解答]小石块在运动中受到重力和轨道的支持力, 合力方向沿着曲线方向. 设切线与竖直方向的夹角为 θ , 则

$$F = mg \cos \theta.$$

小球的运动方程为

$$F = ma = m \frac{d^2 s}{dt^2},$$

s 表示弧长.

由于 $v = \frac{ds}{dt}$, 所以

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds},$$

因此 $v dv = g \cos \theta ds = g dh$,

h 表示石下落的高度.

$$\text{积分得 } \frac{1}{2} v^2 = gh + C,$$

当 $h = 0$ 时, $v = 0$, 所以 $C = 0$,

因此速率为 $v = \sqrt{2gh}$.

2.12 质量为 m 的物体, 最初静止于 x_0 , 在力 $f = -\frac{k}{x^2}$ (k 为常数) 作用下沿直线运动. 证明物体在 x 处的速度大小 $v = [2k(1/x - 1/x_0)/m]^{1/2}$.

[证明] 当物体在直线上运动时, 根据牛顿第二定律得方程

$$f = -\frac{k}{x^2} = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

利用 $v = dx/dt$, 可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx},$$

因此方程变为

$$mvdv = -\frac{kdx}{x^2},$$

积分得

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{x} + C.$$

利用初始条件, 当 $x = x_0$ 时, $v = 0$, 所以 $C = -k/x_0$, 因此

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{x} - \frac{k}{x_0},$$

$$\text{即 } v = \sqrt{\frac{2k}{m} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)}. \quad \text{证毕.}$$

[讨论] 此题中, 力是位置的函数: $f = f(x)$, 利用变换可得方程: $mvdv = f(x)dx$, 积分即可求解.

如果 $f(x) = -k/x^n$, 则得

$$\frac{1}{2}mv^2 = -k \int \frac{dx}{x^n}.$$

(1) 当 $n = 1$ 时, 可得

$$\frac{1}{2}mv^2 = -k \ln x + C.$$

利用初始条件 $x = x_0$ 时, $v = 0$, 所以 $C = k \ln x_0$,

$$\text{因此 } \frac{1}{2}mv^2 = k \ln \frac{x_0}{x},$$

$$\text{即 } v = \sqrt{\frac{2k}{m} \ln \frac{x_0}{x}}.$$

(2) 如果 $n \neq 1$, 可得

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{k}{1-n} x^{1-n} + C.$$

利用初始条件 $x = x_0$ 时, $v = 0$, 所以

$$C = -\frac{k}{n-1} x_0^{1-n},$$

$$\text{因此 } \frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{n-1} \left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{x_0^{n-1}} \right),$$

$$\text{即 } v = \sqrt{\frac{2k}{(n-1)m} \left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{x_0^{n-1}} \right)}.$$

当 $n = 2$ 时, 即证明了本题的结果.

2.13 一质量为 m 的小球以速率 v_0 从地面开始竖直向上运动. 在运动过程中, 小球所受空气阻力大小与速率成正比, 比例系数为 k . 求:

(1) 小球速率随时间的变化关系 $v(t)$;

(2) 小球上升到最大高度所花的时间 T .

[解答] (1) 小球竖直上升时受到重力和空气阻力, 两者方向向下, 取向上的方向为下, 根据牛顿第二定律得方程

$$f = -mg - kv = m \frac{dv}{dt},$$

分离变量得

$$dt = -m \frac{dv}{mg + kv} = -\frac{m}{k} \frac{d(mg + kv)}{mg + kv},$$

积分得

$$t = -\frac{m}{k} \ln(mg + kv) + C.$$

当 $t = 0$ 时, $v = v_0$, 所以

$$C = \frac{m}{k} \ln(mg + kv_0),$$

因此

$$t = -\frac{m}{k} \ln \frac{mg + kv}{mg + kv_0} = -\frac{m}{k} \ln \frac{mg/k + v}{mg/k + v_0},$$

小球速率随时间的变化关系为

$$v = \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) \exp\left(-\frac{kt}{m}\right) - \frac{mg}{k}.$$

(2) 当小球运动到最高点时 $v = 0$, 所需要的时间为

$$T = \frac{m}{k} \ln \frac{mg/k + v_0}{mg/k} = \frac{m}{k} \ln(1 + \frac{kv_0}{mg}).$$

[讨论] (1) 如果还要求位置与时间的关系, 可用如下步骤.

由于 $v = dx/dt$, 所以

$$dx = [(v_0 + \frac{mg}{k}) \exp(-\frac{kt}{m}) - \frac{mg}{k}] dt,$$

即

$$dx = -\frac{m(v_0 + mg/k)}{k} d\exp(-\frac{kt}{m}) - \frac{mg}{k} dt,$$

积分得

$$x = -\frac{m(v_0 + mg/k)}{k} \exp(-\frac{kt}{m}) - \frac{mg}{k} t + C,$$

当 $t=0$ 时, $x=0$, 所以

$$C = \frac{m(v_0 + mg/k)}{k},$$

因此

$$x = \frac{m(v_0 + mg/k)}{k} [1 - \exp(-\frac{kt}{m})] - \frac{mg}{k} t.$$

(2) 如果小球以 v_0 的初速度向下做直线运动, 取向下的方向为正, 则微分方程变为

$$f = mg - kv = m \frac{dv}{dt},$$

用同样的步骤可以解得小球速率随时间的变化关系为

$$v = \frac{mg}{k} - (\frac{mg}{k} - v_0) \exp(-\frac{kt}{m}).$$

这个公式可将上面公式中的 g 改为 $-g$ 得出. 由此可见: 不论小球初速度如何, 其最终速率趋于常数 $v_m = mg/k$.

2. 14 如图所示: 光滑的水平桌面上放置一固定的圆环带, 半径为 R . 一物体贴着环带内侧运动, 物体与环带间的滑动摩擦因数为 μ_k . 设物体在某时刻经 A 点时速率为 v_0 , 求此后时刻 t 物体的速率以及从 A 点开始所经过的路程.

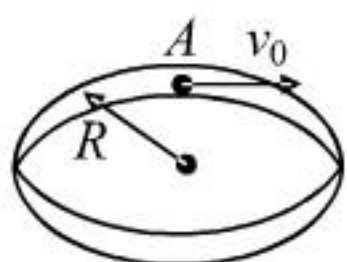


图 2.14

[解答] 物体做圆周运动的向心力是由圆环带对物体的压力, 即

$$N = mv^2/R.$$

物体所受的摩擦力为

$$f = -\mu_k N,$$

负号表示力的方向与速度的方向相反.

根据牛顿第二定律得

$$f = -\mu_k m \frac{v^2}{R} = m \frac{dv}{dt},$$

$$\text{即 } \frac{\mu_k}{R} dt = -\frac{dv}{v^2}.$$

积分得

$$\frac{\mu_k}{R} t = \frac{1}{v} + C.$$

当 $t=0$ 时, $v=v_0$, 所以

$$C = -\frac{1}{v_0},$$

$$\text{因此 } \frac{\mu_k}{R} t = \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}.$$

$$\text{解得 } v = \frac{v_0}{1 + \mu_k v_0 t / R}.$$

由于

$$dx = \frac{v_0 dt}{1 + \mu_k v_0 t / R} = \frac{R}{\mu_k} \frac{d(1 + \mu_k v_0 t / R)}{1 + \mu_k v_0 t / R},$$

积分得

$$x = \frac{R}{\mu_k} \ln(1 + \frac{\mu_k v_0 t}{R}) + C,$$

当 $t=0$ 时, $x=x_0$, 所以 $C=0$, 因此

$$x = \frac{R}{\mu_k} \ln(1 + \frac{\mu_k v_0 t}{R}).$$

*2. 15

2. 16 如图所示, 一半径为 R 的金属光滑圆环可绕其竖直直径转动. 在环上套有一珠子. 今逐渐增大圆环的转动角速度 ω , 试求在不同转动速度下珠子能静止

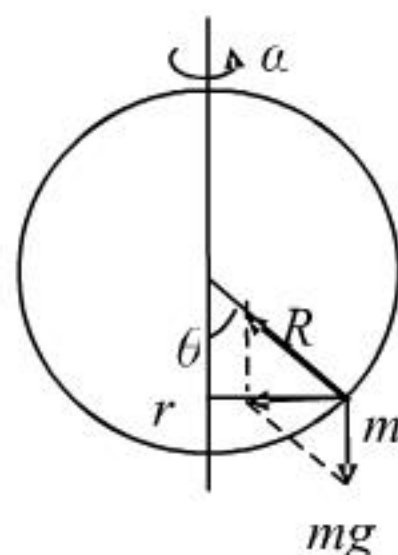


图 2.16

在环上的位置. 以珠子所停处的半径与竖直直径的夹角 θ 表示.

[解答]珠子受到重力和环的压力, 其合力指向竖直直径, 作为珠子做圆周运动的向心力, 其大小为

$$F = mgtg\theta.$$

珠子做圆周运动的半径为

$$r = R\sin\theta.$$

根据向心力公式得

$$F = mgtg\theta = m\omega^2 R\sin\theta,$$

可得

$$\frac{mg}{\cos\theta} = R\omega^2,$$

$$\text{解得 } \theta = \pm \arccos \frac{g}{R\omega^2}.$$

第三章 运动的守恒定律

P84.

3. 1 如图所示, 一小球在弹簧的弹力作用下振动. 弹力 $F = -kx$, 而位移 $x = A\cos\omega t$, 其中 k , A 和 ω 都是常数. 求在 $t=0$ 到 $t = \pi/2\omega$ 的时间间隔内弹

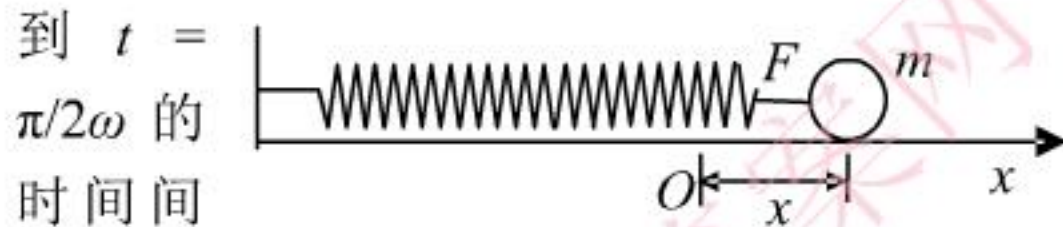


图 3.1

力予小球的冲量.

[解答]方法一: 利用冲量公式. 根据冲量的定义得

$$dI = Fdt = -kA\cos\omega t dt,$$

积分得冲量为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2\omega} (-kA\cos\omega t) dt, \\ &= -\frac{kA}{\omega} \sin\omega t \Big|_0^{\pi/2\omega} = -\frac{kA}{\omega} \end{aligned}$$

方法二: 利用动量定理. 小球的速度为

$$v = dx/dt = -\omega A\sin\omega t,$$

设小球的质量为 m , 其初动量为

$$p_1 = mv_1 = 0,$$

末动量为

$$p_2 = mv_2 = -m\omega A,$$

小球获得的冲量为

$$I = p_2 - p_1 = -m\omega A,$$

可以证明 $k = m\omega^2$, 因此

$$I = -kA/\omega.$$

3. 2 一个质量 $m = 50\text{g}$, 以速率的 $v = 20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 作匀速圆周运动的小球, 在 $1/4$ 周期内向心力给予小球的冲量等于多少?

[解答]小球动量的大小为

$$p = mv,$$

但是末动量与初动量互相垂直, 根据动量的增量的定义

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$\text{得 } \vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p},$$

由此可作矢量三角形, 可得

$$\Delta p = \sqrt{2}p = \sqrt{2}mv.$$

因此向心力给予小球的冲量大小为

$$I = \Delta p = 1.41(\text{N}\cdot\text{s}).$$

[注意]质点向心力大小为 $F = mv^2/R$, 方向是指向圆心的, 其方向在不断地发生改变, 所以不能直接用下式计算冲量

$$I = Ft = m \frac{v^2}{R} \frac{T}{4}$$

$$= mv \frac{2\pi R/T}{R} \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} mv.$$

假设小球被轻绳拉着以角速度 $\omega = v/R$ 运动, 拉力的大小就是向心力

$$F = mv^2/R = m\omega v,$$

其分量大小分别为

$$F_x = F\cos\theta =$$

$$F\cos\omega t,$$

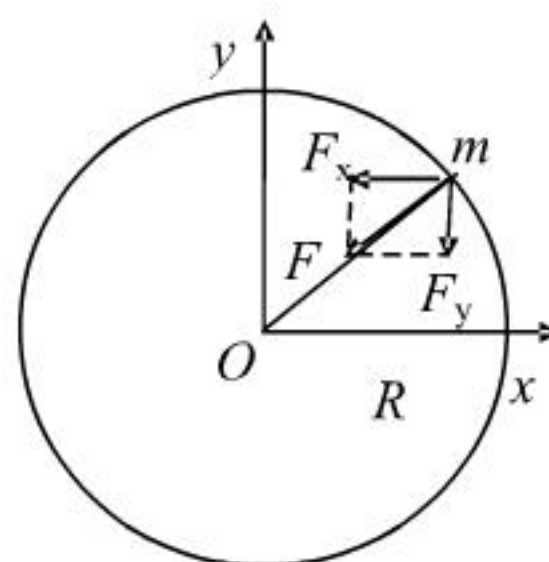
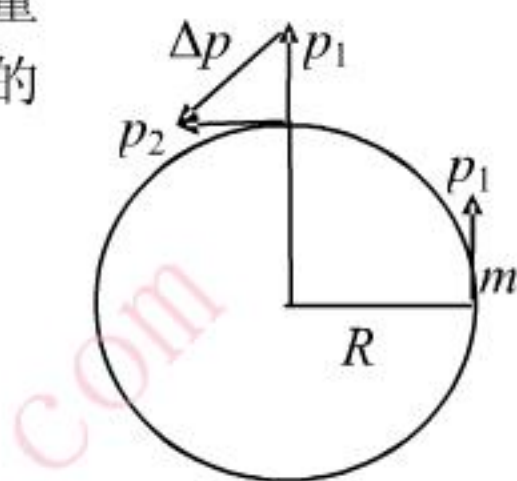
$$F_y = F\sin\theta = F\sin\omega t,$$

给小球的冲量大小为

$$dI_x = F_x dt = F\cos\omega t dt,$$

$$dI_y = F_y dt = F\sin\omega t dt,$$

积分得



$$I_x = \int_0^{T/4} F \cos \omega t dt = \frac{F}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^{T/4}$$

$$= \frac{F}{\omega} = mv,$$

$$I_y = \int_0^{T/4} F \sin \omega t dt = -\frac{F}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{T/4}$$

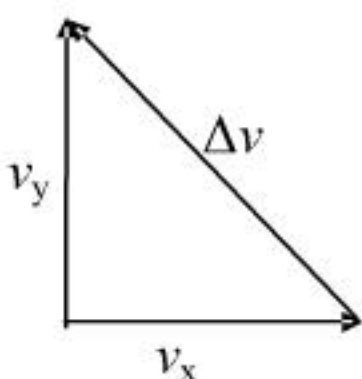
$$= \frac{F}{\omega} = mv,$$

合冲量为

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = \sqrt{2}mv,$$

所前面计算结果相同,但过程要复杂一些.

3.3 用棒打击质量 0.3kg , 速率等于 $20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 的水平飞来的球,球飞到竖直上方 10m 的高度. 求棒给予球的冲量多大? 设球与棒的接触时间为 0.02s , 求球受到的平均冲力?



[解答]球上升初速度为

$$v_y = \sqrt{2gh} = 14(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}),$$

其速度的增量为

$$\Delta v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 24.4(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}).$$

棒给球冲量为

$$I = m\Delta v = 7.3(\text{N}\cdot\text{s}),$$

对球的作用力为(不计重力)

$$F = I/t = 366.2(\text{N}).$$

3.4 如图所示, 3 个物体 A 、 B 、 C , 每个质量都为 M , B 和 C 靠在一起, 放在光滑水平桌面上, 两者连有一段长度为 0.4m 的细绳, 首先放松. B 的另一侧则连有另一细绳跨过桌边的定滑轮而与 A 相连. 已知滑轮轴上的摩擦也可忽略, 绳子长度一定. 问 A 和 B 启动后, 经多长时间 C 也开始运动? C 开始

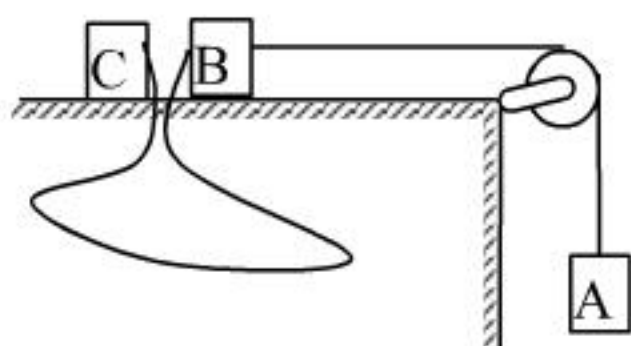


图 3.4

运动时的速度是多少? (取 $g = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)

[解答]物体 A 受到重力和细绳的拉力, 可列方程

$$Mg - T = Ma,$$

物体 B 在没有拉物体 C 之前在拉力 T 作用下做加速运动, 加速度大小为 a , 可列方程

$$T = Ma,$$

联立方程可得

$$a = g/2 = 5(\text{m}\cdot\text{s}^{-2}).$$

根据运动学公式

$$s = v_0 t + at^2/2,$$

可得 B 拉 C 之前的运动时间

$$t = \sqrt{2s/a} = 0.4(\text{s}).$$

此时 B 的速度大小为

$$v = at = 2(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}).$$

物体 A 跨过动滑轮向下运动, 如同以相同的加速度和速度向右运动. A 和 B 拉动 C 运动是一个碰撞过程, 它们的动量守恒, 可得

$$2Mv = 3Mv',$$

因此 C 开始运动的速度为

$$v' = 2v/3 = 1.33(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}).$$

3.5 一个原来静止的原子核, 放射性蜕变时放出一个动量 $p_1 = 9.22 \times 10^{-16} \text{g}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ 的电子, 同时还在垂直于此电子运动的方向上放出一个动量 $p_2 = 5.33 \times 10^{-16} \text{g}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ 的中微子. 求蜕变后原子核的动量的大小和方向.

[解答]原子核蜕变后的总动量大小为

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = 10.65 \times 10^{-16}(\text{g}\cdot\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}).$$

其方向与电子方向的夹角为

$$\theta = \arctan(p_2/p_1) = 30^\circ.$$

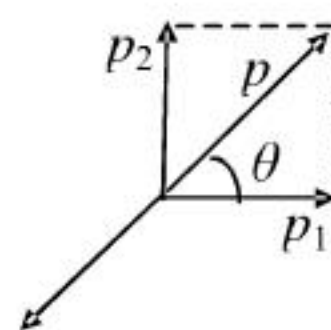
根据动量守恒定律, 三个粒子总动量为零,

$$\vec{p} + \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0,$$

所以原子核的反冲动量为

$$\vec{p}' = -(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = -\vec{p},$$

其大小与电子和中微子的合动量的大小相



等, 方向相反, 与电子速度的夹角为
 $180^\circ - \theta = 150^\circ$.

3.6 一炮弹以速率 v_0 沿仰角 θ 的方向发射出去后, 在轨道的最高点爆炸为质量相等的两块, 一块沿此 45° 仰角上飞, 一块沿 45° 俯角下冲, 求刚爆炸的这两块碎片的速率各为多少?

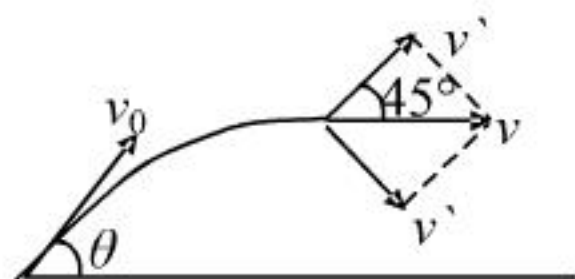
[解答] 炮弹在最高点的速度大小为
 $v = v_0 \cos \theta$,

方向沿水平方向.

根据动量守恒定律, 可知碎片的总动量等于炮弹爆炸前的总动量, 可作矢量三角形, 列方程得

$$mv/2 = \frac{m}{2} v' \cos 45^\circ,$$

所以 $v' = v/\cos 45^\circ = \sqrt{2}v_0 \cos \theta$.



3.7 如图所示, 一匹马拉着雪橇沿着冰雪覆盖的弧形路面极缓慢地匀速移动, 这圆弧路面的半径为 R . 设马对雪橇的拉力总是平行于路面. 雪橇的质量为 m , 它与路面的滑动摩擦因数为 μ_k . 当把雪橇由底端拉上 45° 圆弧时, 马对雪橇做了多少功? 重力和摩擦力各做了多少功?

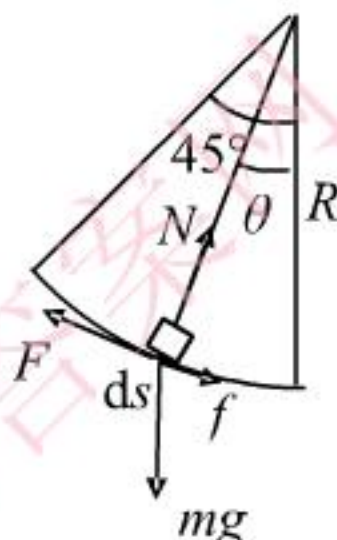


图 3.7

[解答] 取弧长增加的方向为正方向, 弧位移 $d\vec{s}$ 的大小为

$$ds = R d\theta.$$

重力 $\vec{G}$ 的大小为

$$G = mg,$$

方向竖直向下, 与位移元的夹角为 $\pi + \theta$, 所做的功元为

$$\begin{aligned} dW_1 &= \vec{G} \cdot d\vec{s} = G \cos(\theta + \pi/2) ds \\ &= -mgR \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

积分得重力所做的功为

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{45^\circ} (-mgR \sin \theta) d\theta = mgR \cos \theta \Big|_0^{45^\circ} \\ &= -(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) mgR. \end{aligned}$$

摩擦力 $\vec{f}$ 的大小为

$$f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta,$$

方向与弧位移的方向相反, 所做的功元为

$$\begin{aligned} dW_2 &= \vec{f} \cdot d\vec{s} = f \cos \pi ds \\ &= -\mu_k mg \cos \theta R d\theta, \end{aligned}$$

积分得摩擦力所做的功为

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^{45^\circ} (-\mu_k mgR \cos \theta) d\theta \\ &= -\mu_k mgR \sin \theta \Big|_0^{45^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mu_k mgR. \end{aligned}$$

要使雪橇缓慢地匀速移动, 雪橇受的重

力 $\vec{G}$ 、摩擦力 $\vec{f}$ 和马的拉力 $\vec{F}$ 就是平衡力,

$$\text{即 } \vec{F} + \vec{G} + \vec{f} = 0,$$

$$\text{或者 } \vec{F} = -(\vec{G} + \vec{f}).$$

拉力的功元为

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} = -(\vec{G} \cdot d\vec{s} + \vec{f} \cdot d\vec{s}) \\ &= -(dW_1 + dW_2), \end{aligned}$$

拉力所做的功为

$$\begin{aligned} W &= -(W_1 + W_2) \\ &= (1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mu_k) mgR. \end{aligned}$$

由此可见: 重力和摩擦力都做负功, 拉力做正功.

3.8 一质量为 m 的质点拴在细绳的一端, 绳的另一端固定, 此质点在粗糙水平面上作半径为 r 的圆周运动. 设质点最初的速

率是 v_0 , 当它运动 1 周时, 其速率变为 $v_0/2$, 求:

- (1) 摩擦力所做的功;
- (2) 滑动摩擦因数;
- (3) 在静止以前质点运动了多少圈?

[解答] (1) 质点的初动能为

$$E_1 = mv_0^2/2,$$

末动能为

$$E_2 = mv^2/2 = mv_0^2/8,$$

动能的增量为

$$\Delta E_k = E_2 - E_1 = -3mv_0^2/8,$$

这就是摩擦力所做的功 W .

(2) 由于

$$dW = -f ds = -\mu_k N ds = -\mu_k mgr d\theta,$$

积分得

$$W = \int_0^{2\pi} (-\mu_k mgr) d\theta = -2\pi\mu_k mgr.$$

由于 $W = \Delta E$, 可得滑动摩擦因数为

$$\mu_k = \frac{3v_0^2}{16\pi gr}.$$

(3) 在自然坐标中, 质点的切向加速度为

$$a_t = f/m = -\mu_k g,$$

根据公式 $v_t^2 - v_o^2 = 2a_t s$, 可得质点运动的弧长为

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_k g} = \frac{8\pi r}{3},$$

圈数为 $n = s/2\pi r = 4/3$.

[注意] 根据动能定理, 摩擦力所做的功等于质点动能的增量

$$-fs = \Delta E_k,$$

可得 $s = -\Delta E_k/f$,

由此也能计算弧长和圈数。

3.9 如图所示, 物体 A 的质量 $m = 0.5\text{kg}$, 静止于光滑斜面上. 它与固定在斜面底 B 端的弹簧 M 相距 $s = 3\text{m}$. 弹簧的倔强系数 $k = 400\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. 斜面倾角为 45° . 求当物体 A 由静止下滑

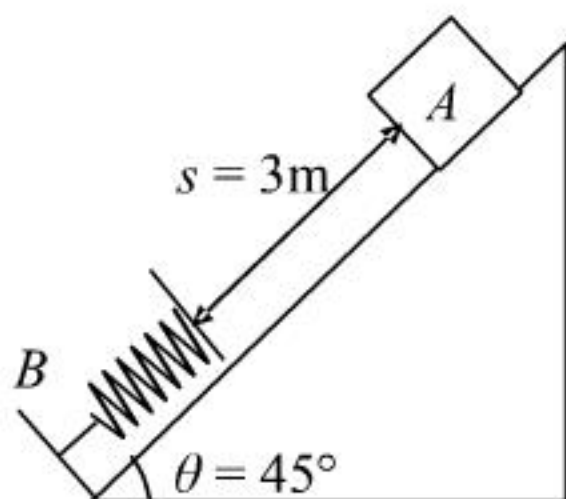


图 3.9

时, 能使弹簧长度产生的最大压缩量是多大?

[解答] 取弹簧自然伸长处为重力势能和弹性势能的零势点, 由于物体 A 和弹簧组成的系统只有保守力做功, 所以机械能守恒, 当弹簧压缩量最大时, 可得方程

$$mgs \sin \theta = -mgx \sin \theta + \frac{1}{2} kx^2,$$

整理和一元二次方程

$$\frac{1}{2} kx^2 - mgx \sin \theta + mgs \sin \theta = 0,$$

解得

$$x = \frac{mg \sin \theta \pm \sqrt{(mg \sin \theta)^2 + 2kmgs \sin \theta}}{k}$$

$= 0.24(\text{m})$ (取正根).

3.10 一个小球与另一质量相等的静止小球发生弹性碰撞. 如果碰撞不是对心的, 试证明: 碰撞后两小球的运动方向彼此垂直.

[证明] 设一个小球碰撞前后的速度大小分别为 v_0 和 v_1 , 另一小球的在碰撞后的速度大小为 v_2 , 根据机械能守恒得

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} mv_2^2,$$

即 $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$;

根据动量守恒得

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2,$$

其中各动量的大小为

$$p_0 = mv_0, p_1 = mv_1 \text{ 和 } p_2 = mv_2,$$

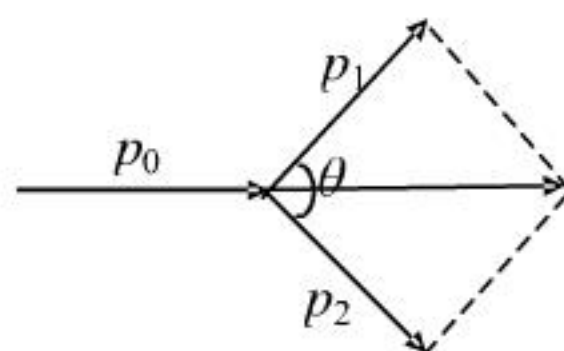
对矢量式两边同时平方并利用

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = mv_1 mv_2 \cos \theta$$

得

$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \theta,$$

即 $m^2 v_0^2 = m^2 v_1^2 + m^2 v_2^2 + 2m^2 v_1 v_2 \cos \theta$



化简得

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \theta,$$

结合机械能守恒公式得

$$2v_1v_2 \cos \theta = 0,$$

由于 v_1 和 v_2 不为零, 所以

$$\theta = \pi/2,$$

即碰撞后两小球的运动方向彼此垂直.

证毕.

3. 11 如图所示, 质量为 1.0kg 的钢球 m_1 系在长为 0.8m 的绳的一端, 绳的另一端 O 固定. 把绳拉到水平位置后, 再把它由静止释放, 球在最低点处与质量为 5.0kg 的钢块 m_2 作完全弹性碰撞, 求碰撞后钢球继续运动能达到的最大高度.

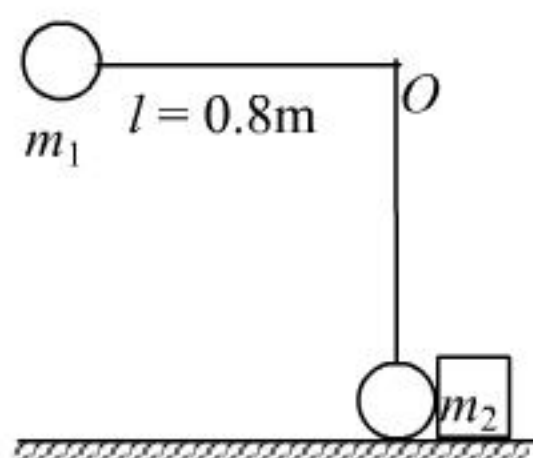


图 3.11

[解答] 钢球下落后、碰撞前的速率为

$$v_1 = \sqrt{2gl}.$$

钢球与钢块碰撞之后的速率分别为 v_1' 和 v_2' , 根据机械能守恒和动量守恒得方程

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2,$$

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'.$$

整理得 $m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2v_2'^2$

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2v_2'.$$

将上式除以下式得

$$v_1 + v_1' = v_2',$$

代入整理的下式得

$$m_1v_1 - m_1v_1' = m_2v_1 + m_2v_1',$$

$$\text{解得 } v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}.$$

碰撞后钢球继续运动能达到的最大高度为

$$h = \frac{v_1'^2}{2g} = \frac{1}{2g} \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 v_1^2$$

$$= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 l = 0.36(\text{m}).$$

[讨论] 如果两个物体的初速率都不为零, 发生对心弹性碰撞时, 同样可列出机械能和动量守恒方程

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2,$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'.$$

同理可得

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2'.$$

从而解得

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

或者

$$v_1' = \frac{2(m_1v_1 + m_2v_2)}{m_1 + m_2} - v_1;$$

将下标 1 和 2 对调得

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2},$$

$$\text{或者 } v_2' = \frac{2(m_1v_1 + m_2v_2)}{m_1 + m_2} - v_2.$$

后一公式很好记忆, 其中 $\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$ 代表

质心速度.

3. 12 一质量为 m 的物体, 从质量为 M 的圆弧形槽顶端由静止滑下, 设圆弧形槽的半径为 R , 张角为 $\pi/2$, 如图所示, 所有摩擦都忽略, 求:

(1) 物体刚离开槽底端时, 物体和槽的速度各是多少?

(2) 在物体从 A 滑到 B 的过程中, 物体对

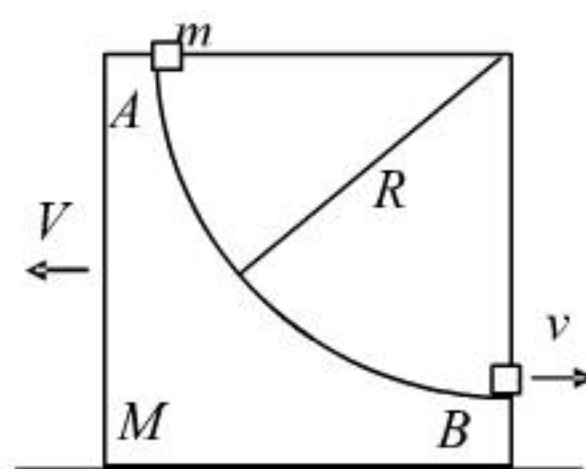


图 3.12

槽所做的功 W ;

(3) 物体到达 B 时对槽的压力.

[解答] (1) 物体运动到槽底时, 根据机械能定律守恒得

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2,$$

根据动量守恒定律得

$$0 = mv + MV.$$

因此

$$\begin{aligned} mgR &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2M}(MV)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2M}(mv)^2, \end{aligned}$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}},$$

从而解得

$$V = -m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}.$$

(2) 物体对槽所做的功等于槽的动能的增量

$$W = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{m^2gR}{M+m}.$$

(3) 物体在槽底相对于槽的速度为

$$\begin{aligned} v' &= v - V = \left(1 + \frac{m}{M}\right)v = \frac{M+m}{M}v \\ &= \sqrt{\frac{2(M+m)gR}{M}}, \end{aligned}$$

物体受槽的支持力为 N , 则

$$N - mg = m\frac{v'^2}{R},$$

因此物体对槽的压力为

$$N' = mg + m\frac{v'^2}{R} = \left(3 + \frac{2m}{M}\right)mg.$$

3.13 在实验室内观察到相距很远的一个质子(质量为 m_p) 和一个氦核(质量为

$4m_p$) 沿一直线相向运动; 速率都是 v_0 , 求两者能达到的最近距离.

[解答] 当两个粒子相距最近时, 速度相等, 根据动量守恒定律得

$$4m_pv_0 - m_pv_0 = (4m_p + m_p)v,$$

因此 $v = 3v_0/5$.

质子和氦核都带正电, 带电量分别为 e 和 $2e$, 它们之间的库仑力是保守力. 根据能量守恒定律得

$$\frac{1}{2}m_pv_0^2 + \frac{1}{2}(4m_p)v_0^2 = \frac{1}{2}(5m_p)v^2 + k\frac{2e^2}{r_m},$$

因此

$$k\frac{2e^2}{r_m} = \frac{5}{2}m_p(v_0^2 - v^2) = \frac{8}{5}m_pv_0^2,$$

所以最近距离为

$$r_m = \frac{5ke^2}{4m_pv_0^2}.$$

3.14 如图所示, 有一个在竖直平面上摆动的单摆. 问:

(1) 摆球对悬挂点的角动量守恒吗?

(2) 求出 t 时刻小球对悬挂点的角动量的方向, 对于不同的时刻, 角动量的方向会改变吗?

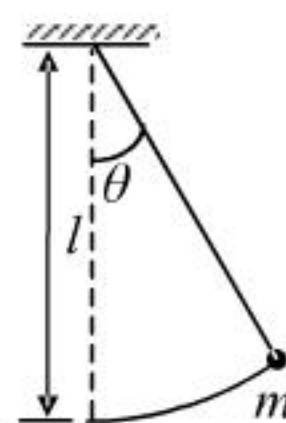


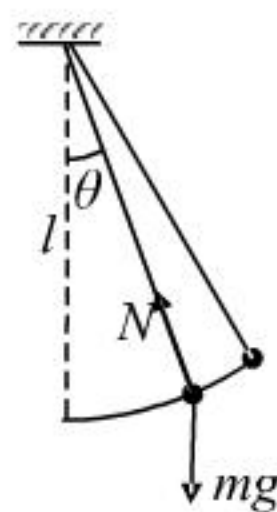
图 3.14

(3) 计算摆球在 θ 角时对悬挂点角动量的变化率.

[解答] (1) 由于单摆速度的大小在不断发生改变, 而方向与弧相切, 因此动量矩 l 不变; 由于角动量 $L = mvl$, 所以角动量不守恒.

(2) 当单摆逆时针运动时, 角动量的方向垂直纸面向外; 当单摆顺时针运动时, 角动量的方向垂直纸面向里, 因此, 在不同的时刻, 角动量的方向会改变.

(3) 质点对固定点的角动量的变化率等于质点所受合外力对同一点的力矩, 因此角动量的变化率为



$$\frac{dL}{dt} = M = F_{\tau} l = mgl \sin \theta.$$

3. 15 证明行星在轨道上运动的总能量为 $E = -\frac{GMm}{r_1 + r_2}$. 式中 M 和 m 分别为太阳

和行星的质量, r_1 和 r_2 分别为太阳和行星轨道的近日点和远日点的距离.

[证明] 设行星在近日点和远日点的速度分别为 v_1 和 v_2 , 由于只有保守力做功, 所以机械能守恒, 总能量为

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} \quad (1)$$

和
$$E = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}. \quad (2)$$

它们所组成的系统不受外力矩作用, 所以行星的角动量守恒. 行星在两点的位矢方向与速度方向垂直, 可得角动量守恒方程

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2,$$

即
$$v_1 r_1 = v_2 r_2. \quad (3)$$

将 (1) 式各项同乘以 r_1^2 得

$$Er_1^2 = m(v_1 r_1)^2 / 2 - GMmr_1, \quad (4)$$

将 (2) 式各项同乘以 r_2^2 得

$$Er_2^2 = m(v_2 r_2)^2 / 2 - GMmr_2, \quad (5)$$

将 (5) 式减 (4) 式, 利用 (3) 式, 可得

$$E(r_2^2 - r_1^2) = -GMm(r_2 - r_1), \quad (6)$$

由于 r_1 不等于 r_2 , 所以

$$(r_2 + r_1)E = -GMm,$$

故
$$E = -\frac{GMm}{r_1 + r_2}. \quad \text{证毕.}$$

3. 16 我国第一颗人造地球卫星的质量为 173kg, 其近地点高度为 439km, 远地点高度为 2384km, 求它的轨道总能量.

[解答] 地球半径 $R_0 = 6371\text{km}$, 因此

$$r_1 = R_0 + h_1, \quad r_2 = R_0 + h_2.$$

根据万有引力定律, 在地球表面有

$$\frac{GMm}{R_0^2} = mg,$$

因此

$$GM = gR_0^2,$$

根据上题的结果可得卫星的轨道总能量为

$$E = -\frac{mgR_0^2}{2R_0 + h_1 + h_2} = -4.42 \times 10^9 (\text{J}).$$

*3. 17

第四章 刚体定轴转动

P109.

4. 1 质量为 M 的空心圆柱体, 质量均匀分布, 其内外半径为 R_1 和 R_2 , 求对通过其中心轴的转动惯量.

[解答] 设圆柱体的高为 H , 其体积为

$$V = \pi(R_2^2 - R_1^2)h,$$

体密度为

$$\rho = M/V.$$

在圆柱体中取一面积为 $S = 2\pi rH$, 厚度为 dr 的薄圆壳, 体积元为

$$dV = Sdr = 2\pi rHdr,$$

其质量为

$$dm = \rho dV,$$

绕中心轴的转动惯量为

$$dI = r^2 dm = 2\pi \rho H r^3 dr,$$

总转动惯量为

$$I = 2\pi \rho H \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho H (R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2).$$

4. 2 一矩形均匀薄板, 边长为 a 和 b ,

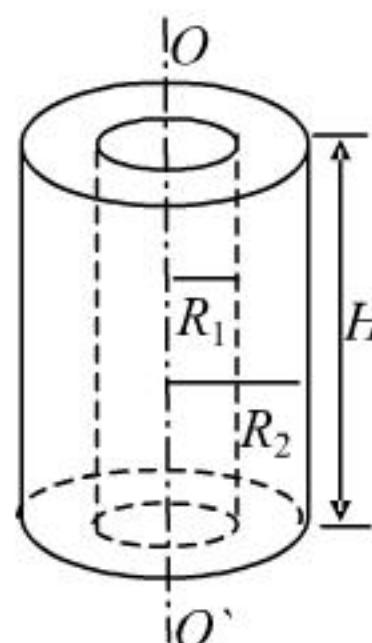
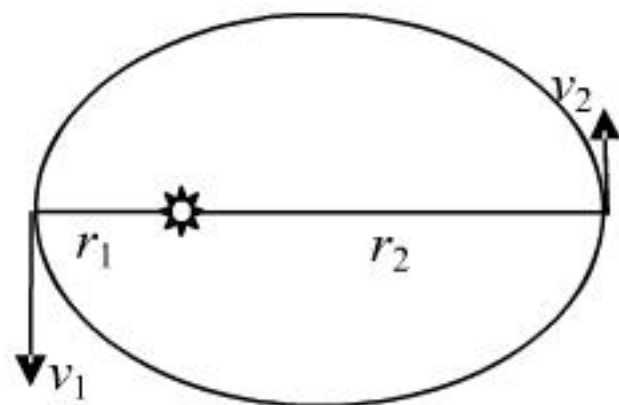


图 4.1

质量为 M , 中心 O 取为原点, 坐标系 $OXYZ$ 如图所示. 试证明:

(1) 薄板对 OX 轴的转动惯量为

$$I_{OX} = \frac{1}{12} Mb^2;$$

(2) 薄板对 OZ 轴的转动惯量为

$$I_{OZ} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2).$$

[证明] 薄板的面积为

$$S = ab,$$

质量面密度为

$$\sigma = M/S.$$

(1) 在板上取一长为 a , 宽为 dy 的矩形元, 其面积为

$$dS = a dy,$$

其质量为

$$dm = \sigma dS,$$

绕 X 轴的转动惯量为

$$dI_{OX} = y^2 dm = \sigma a y^2 dy,$$

积分得薄板对 OX 轴的转动惯量为

$$I_{OX} = \sigma a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \sigma a \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-b/2}^{b/2}$$

$$= \frac{1}{12} \sigma a b^3 = \frac{1}{12} M b^2.$$

同理可得薄板对 OY 轴的转动惯量为

$$I_{OY} = \frac{1}{12} M a^2.$$

(2) 方

法一: 平行轴定理. 在板上取一长为 b , 宽为 dx 的矩形元, 其面积为

$$dS = b dx,$$

质量为

$$dm = \sigma dS,$$

绕过质心的 $O'Z'$ 轴的转动惯量等于绕 OX 轴的转动惯量

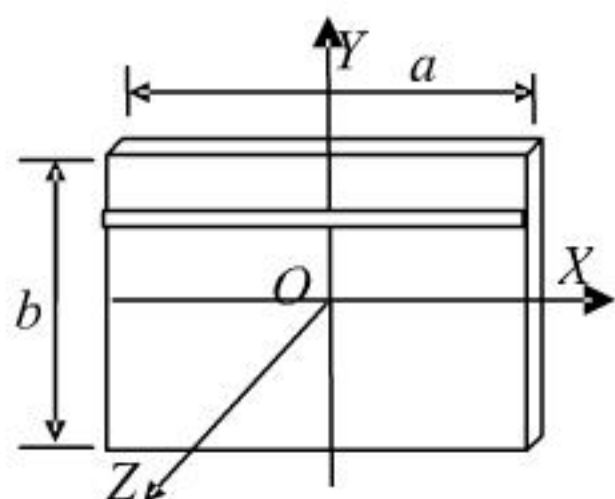
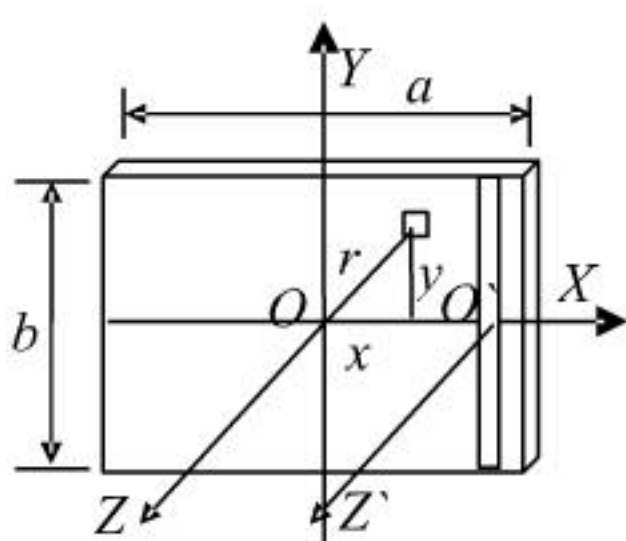


图 4.2



$$dI_{O'Z'} = b^2 dm / 12.$$

根据平行轴定理, 矩形元对 OZ 轴的转动惯量为

$$dI_{OZ} = x^2 dm + dI_{O'Z'} \\ = \sigma b x^2 dx + b^2 dm / 12,$$

积分得薄板对 OZ 轴的转动惯量为

$$I_{OZ} = \sigma b \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx + \frac{1}{12} b^2 \int_0^M dm$$

$$= \sigma b \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-a/2}^{a/2} + \frac{1}{12} b^2 M$$

$$= \frac{1}{12} M(a^2 + b^2).$$

方法二: 垂直轴定理. 在板上取一质量元 dm , 绕 OZ 轴的转动惯量为

$$dI_{OZ} = r^2 dm.$$

由于 $r^2 = x^2 + y^2$, 所以

$$dI_{OZ} = (x^2 + y^2) dm = dI_{OY} + dI_{OX},$$

因此板绕 OZ 轴的转动惯量为

$$I_{OZ} = I_{OY} + I_{OX} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2).$$

4.3 一半圆形细杆, 半径为 R , 质量为 M , 求对过细杆二端 AA' 轴的转动惯量.

[解答] 半圆的长度为

$$C = \pi R,$$

质量的线密度为

$$\lambda = M/C.$$

在半圆上取一弧元

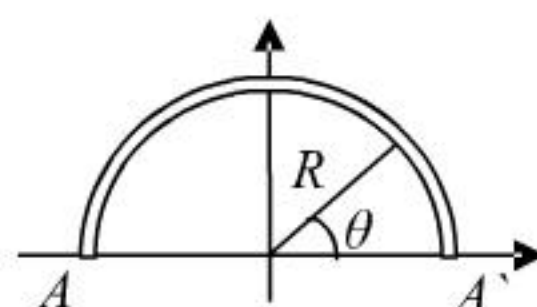


图 4.3

$$ds = R d\theta,$$

其质量为

$$dm = \lambda ds,$$

到 AA' 轴的距离为

$$r = R \sin \theta,$$

绕此轴的转动惯量为

$$dI = r^2 dm = \lambda R^3 \sin^2 \theta d\theta,$$

半圆绕 AA' 轴的转动惯量为

$$I = \lambda R^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \lambda R^3 \int_0^\pi \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \lambda R^3 = \frac{1}{2} MR^2$$

4.4 如图所示, 在质量为 M , 半径为 R 的匀质圆盘上挖出半径为 r 的两个圆孔. 圆孔中心在圆盘半径的中点. 求剩余部分对大圆盘中心且与盘面垂直的轴线的转动惯量.

[解答] 大圆的面积为

$$S = \pi R^2,$$

质量的面密度为

$$\sigma = M/S.$$

大圆绕过圆心且与盘面垂直的轴线的转动惯量为

$$I_M = MR^2/2.$$

小圆的面积为

$$s = \pi r^2,$$

质量为

$$m = \sigma s,$$

绕过自己圆心且垂直圆面的轴的转动惯量为

$$I_C = mr^2/2,$$

根据平行轴定理, 绕大圆轴的转动惯量为

$$I_m = I_C + m(R/2)^2.$$

$$I_m = I_C + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m(2r^2 + R^2)$$

$$= \frac{1}{4} \sigma \pi r^2 (2r^2 + R^2)$$

$$= \frac{1}{4} M \frac{r^2}{R^2} (2r^2 + R^2),$$

剩余部分的转动惯量为

$$I = I_M - 2I_m = \frac{1}{2} M(R^2 - r^2 - \frac{2r^4}{R^2}).$$

4.5 飞轮质量 $m = 60\text{kg}$, 半径 $R = 0.25\text{m}$, 绕水平中心轴 O 转动, 转速为 $900\text{r}\cdot\text{min}^{-1}$. 现利用一制动用的轻质闸瓦, 在剖杆一端加竖直方向的制动力 $\vec{F}$, 可使飞轮减速. 闸杆尺寸如图所示, 闸瓦与飞

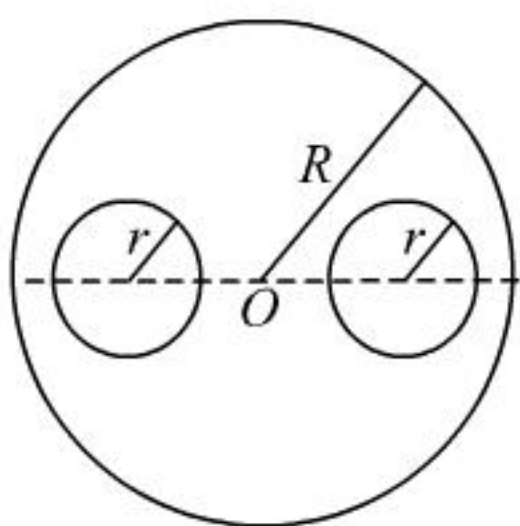


图 4.4

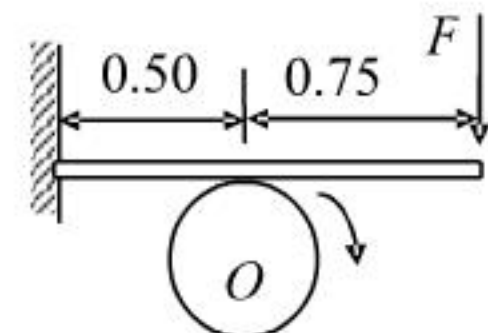


图 4.5

轮之间的摩擦因数 $\mu = 0.4$, 飞轮的转动惯量可按匀质圆盘计算.

(1) 设 $F = 100\text{N}$, 问可使飞轮在多长时间停止转动? 这段时间飞轮转了多少转?

(2) 若要在 2s 内使飞轮转速减为一半, 需加多大的制动力 F ?

[解答] 设飞轮对闸瓦的支持力为 N' , 以左端为转动轴, 在力矩平衡时有

$$0.5N' - 1.25F = 0,$$

所以

$$N' = 2.5F = 250(\text{N}).$$

闸瓦对飞轮的压力为

$$N = N' = 250(\text{N}),$$

与飞轮之间摩擦力为

$$f = \mu N = 100(\text{N}),$$

摩擦力产生的力矩为

$$M = fR.$$

飞轮的转动惯量为

$$I = mR^2/2,$$

角加速度大小为

$$\beta = -M/I = -2f/mR = -40/3(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}),$$

负号表示其方向与角速度的方向相反.

飞轮的初角速度为

$$\omega_0 = 30\pi(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}).$$

根据公式 $\omega = \omega_0 + \beta t$, 当 $\omega = 0$ 时,

$$t = -\omega_0/\beta = 7.07(\text{s}).$$

再根据公式 $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta\theta$, 可得飞轮转过的角度为

$$\theta = -\omega_0^2/2\beta = 333(\text{rad}),$$

转过的圈数为

$$n = \theta/2\pi = 53\text{r}.$$

[注意] 圈数等于角度的弧度数除以 2π .

(2) 当 $t = 2\text{s}$, $\omega = \omega_0/2$ 时, 角加速度为

$$\beta = -\omega_0/2t = -7.5\pi.$$

力矩为

$$M = -I\beta,$$

摩擦力为

$$f = M/R = -mR\beta/2 = (7.5)^2\pi.$$

闸瓦对飞轮的压力为

$$N = f/\mu,$$

需要的制动力为

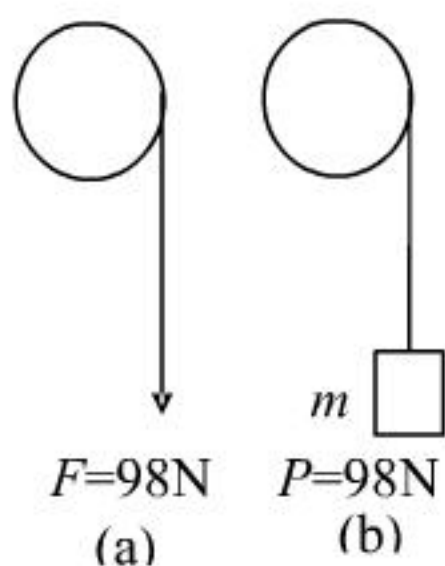
$$F = N/2.5 = (7.5)^2\pi = 176.7(\text{N}).$$

4.6 一轻绳绕于 $r = 0.2\text{m}$ 的飞轮边缘, 以恒力 $F = 98\text{N}$ 拉绳, 如图 (a) 所示. 已知飞轮的转动惯量 $I = 0.5\text{kg}\cdot\text{m}^2$, 轴承无摩擦. 求

(1) 飞轮的角加速度.

(2) 绳子拉下 5m 时, 飞轮的角速度和动能.

(3) 将重力 $P = 98\text{N}$ 的物体挂在绳端, 如图 (b) 所示, 再求上面的结果.



(图 4.6)

[解答] (1) 恒力的力矩为 $M = Fr = 19.6(\text{N}\cdot\text{m})$, 对飞轮产生角加速度为

$$\beta = M/I = 39.2(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}).$$

(2) 方法一: 用运动学公式. 飞轮转过的角度为

$$\theta = s/r = 25(\text{rad}),$$

由于飞轮开始静止, 根据公式 $\omega^2 = 2\beta\theta$, 可得角速度为

$$\omega = \sqrt{2\beta\theta} = 44.27(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1});$$

飞轮的转动动能为

$$E_k = I\omega^2/2 = 490(\text{J}).$$

方法二: 用动力学定理. 拉力的功为

$$W = Fs = 490(\text{J}),$$

根据动能定理, 这就是飞轮的转动动能 E_k .

根据公式 $E_k = I\omega^2/2$, 得角速度为

$$\omega = \sqrt{2E_k/I} = 44.27(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}).$$

(3) 物体的质量为

$$m = P/g = 10(\text{kg}).$$

设绳子的张力为 T , 则

$$P - T = ma, \quad Tr = I\beta.$$

由于 $a = \beta r$, 可得

$$Pr = mr^2\beta + I\beta,$$

解得角加速度为

$$\beta = \frac{Pr}{mr^2 + I} = 21.8(\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}).$$

绳子的张力为

$$T = \frac{I\beta}{r} = \frac{IP}{mr^2 + I} = 54.4(\text{N}).$$

张力所做的功为

$$W = Ts = 272.2(\text{J}),$$

这就是飞轮此时的转动动能 E_k .

飞轮的角速度为

$$\omega = \sqrt{2E_k/I} = 33(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}).$$

4.7 质量为 m , 半径为 R 的均匀圆盘在水平面上绕中心轴转动, 如图所示. 盘与水平面的摩擦因数为 μ , 圆盘从初角速度为 ω_0 到停止转动, 共转了多少圈?

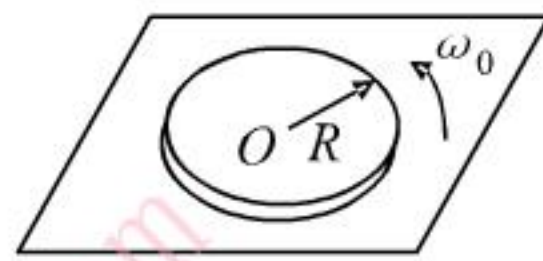


图 4.7

[解答] 圆盘对水平面的压力为

$$N = mg,$$

压在水平面上的面积为

$$S = \pi R^2,$$

压强为

$$p = N/S = mg/\pi R^2.$$

当圆盘滑动时, 在盘上取一半径为 r , 对应角为 $d\theta$ 面积元, 其面积为

$$dS = rd\theta dr,$$

对水平面的压力为

$$dN = pdS = prdrd\theta,$$

所受的摩擦力为

$$df = \mu dN = \mu prdrd\theta,$$

其方向与半径垂直, 摩擦力产生的力矩为

$$dM = rdf = \mu pr^2drd\theta,$$

总力矩为

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mu pr^2drd\theta = 2\pi \mu p \frac{1}{3} R^3$$

$$= \frac{2}{3} \mu mgR.$$

圆盘的转动惯量为

$$I = mR^2/2,$$

角加速度大小为

$$\beta = -\frac{M}{I} = -\frac{4\mu g}{3R},$$

负号表示其方向与角速度的方向相反.

根据转动公式 $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta\theta$, 当圆盘停

止下来时 $\omega = 0$, 所以圆盘转过的角度为

$$\theta = -\frac{\omega_0^2}{2\beta} = \frac{3\omega_0^2 R}{8\mu g},$$

转过的圈数为

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{3\omega_0^2 R}{16\pi\mu g}.$$

[注意]在圆盘上取一个细圆环, 其面积为 $ds = 2\pi r dr$, 这样计算力矩等更简单。

4. 8 一个轻质弹簧的倔强系数为 $k = 2.0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. 它的一端固定, 另一端通过一条细线绕过定滑轮和一个质量为 $m_1 = 80 \text{ g}$ 的物体相连, 如图 4.8 所示. 定滑轮可看作均匀圆盘, 它的半径为 $r = 0.05 \text{ m}$, 质量为 $m = 100 \text{ g}$. 先用手托住物体 m_1 , 使弹簧处于其自然长度, 然后松手. 求物体 m_1 下降 $h = 0.5 \text{ m}$ 时的速度多大? 忽略滑轮轴上的摩擦, 并认为绳在滑轮边上不打滑.

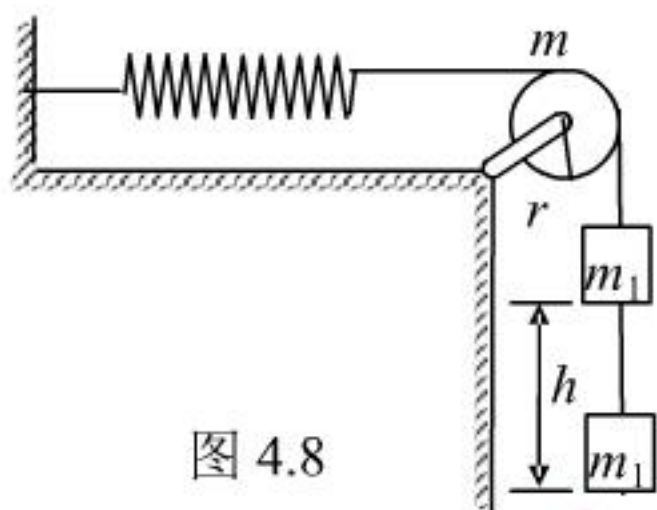


图 4.8

[解答]根据机械能守恒定律可列方程

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} k h^2,$$

其中 $I = mr^2/2$, $\omega = v/r$, 可得

$$2m_1 gh - kh^2 = m_1 v^2 + mv^2/2,$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{2m_1 gh - kh^2}{m_1 + m/2}} = 1.48 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

4. 9 均质圆轮 A 的质量为 M_1 , 半径为 R_1 , 以角速度 ω 绕 OA 杆的 A 端转动, 此时, 将其放置在另一质量为 M_2 的均质圆轮 B 上, B 轮的半径为 R_2 . B 轮原来静止, 但可绕其几何中心轴自由转动. 放置后, A 轮的重量由 B 轮支持. 略去轴承的摩擦与杆 OA 的重量, 并设两轮间的摩擦因素为 μ , 问自 A 轮放在 B 轮上到两轮间没有相对滑动为止, 需要经过多长时间?

[解答]圆轮 A 对 B 的压力为

$$N = M_1 g,$$

两轮之间的摩擦力大小为

$$f = \mu N = \mu M_1 g,$$

摩擦力对 A 的力矩大小为

$$M_A = f R_1 = \mu M_1 g R_1,$$

摩擦力对 B 的力矩大小为

$$M_B = f R_2 = \mu M_1 g R_2,$$

设 A 和 B 的角加速度大小分别为 β_A 和 β_B , 转动惯量分别为 I_A 和 I_B , 根据转动定理得方程

$$M_A = I_A \beta_A,$$

即 $\beta_A = M_A / I_A$.

同理可得

$$\beta_B = M_B / I_B.$$

当两轮没有相对滑动时, 它们就具有相同的线速度 v , A 的角速度为

$$\omega_A = v / R_1,$$

B 的角速度为

$$\omega_B = v / R_2.$$

根据转动运动学的公式得

$$\omega_A - \omega = -\beta_A t, \quad \omega_B = \beta_B t,$$

即 $v / R_1 - \omega = -\beta_A t, \quad v / R_2 = \beta_B t,$

化得

$$v - \omega R_1 = -\beta_A R_1 t, \quad v = \beta_B R_2 t,$$

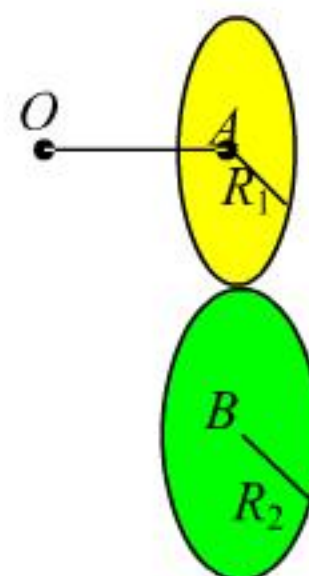
将后式减前式得

$$\omega R_1 = (R_1 \beta_A + R_2 \beta_B) t,$$

解得

$$\begin{aligned} t &= \frac{\omega R_1}{R_1 \beta_A + R_2 \beta_B} \\ &= \frac{\omega R_1}{R_1 M_A / I_A + R_2 M_B / I_B} \\ &= \frac{\omega R_1}{\frac{R_1 \mu M_1 g R_1}{\frac{1}{2} M_1 R_1^2} + \frac{R_2 \mu M_1 g R_2}{\frac{1}{2} M_2 R_2^2}} \\ &= \frac{\omega R_1}{2\mu g + 2\mu g M_1 / M_2} \end{aligned}$$

经过的时间为



$$t = \frac{\omega M_2 R_1}{2\mu g(M_1 + M_2)}.$$

[注意]在此题中, 由于 A 、 B 两轮不是绕着同一轴转动的, 所以不能用角动量守恒定律.

如果 A 轮的轮面放在 B 轮的轮面之上, 且两轮共轴, 在求解同样的问题时, 既可以用转动定律求解, 也可以结合角动量守恒定律求解.

当它们之间没有滑动时, 角动量为 ω' , 根据角动量守恒定律得

$$I_A \omega = (I_A + I_B) \omega',$$

因此得

$$\omega' = I_A \omega / (I_A + I_B).$$

(1) 设 $R_1 \leq R_2$, 那么 A 轮压在 B 轮上的面积为

$$S = \pi R_1^2,$$

压强为

$$p = M_1 g / S = M_1 g / \pi R_1^2.$$

当 A 轮在 B 轮上产生滑动时, 在 A 轮上取一半径为 r 、对应角为 $d\theta$ 面积元, 其面积为

$$dS = r d\theta dr,$$

对 B 轮的压力为

$$dN = p dS = p r dr d\theta,$$

所受的摩擦力为

$$df = \mu dN = \mu p r dr d\theta,$$

其方向与半径垂直, 摩擦力产生的力矩为

$$dM = r df = \mu p r^2 dr d\theta,$$

总力矩为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \mu p r^2 dr d\theta \\ &= 2\pi \mu p \frac{1}{3} R_1^3 = \frac{2}{3} \mu M_1 g R_1. \end{aligned}$$

这是 A 轮所受的力矩, 也是 B 轮所受的力矩. 根据转动定理得 B 轮的角加速度为

$$\beta_B = M / I_B.$$

根据转动公式 $\omega' = \beta_B t$, 得时间为

$$t = \frac{\omega'}{\beta_B} = \frac{I_A \omega}{I_A + I_B} \cdot \frac{I_B}{M}$$

$$= \frac{\omega M_1 R_1^2 / 2}{M_1 R_1^2 / 2 + M_2 R_2^2 / 2} \cdot \frac{M_2 R_2^2 / 2}{2\mu M_1 g R_1 / 3},$$

$$\text{即 } t = \frac{3M_2 R_2^2 R_1 \omega}{4\mu g (M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2)}.$$

(2) 如果 $R_1 \geq R_2$, 那么 A 轮压在 B 轮上的面积为

$$S = \pi R_2^2,$$

压强为

$$p = M_1 g / S = M_1 g / \pi R_2^2.$$

同样在 A 轮上取一面积元, 力矩的积分上限就是 R_2 . 总力矩为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{R_2} \mu p r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \mu p \frac{1}{3} R_2^3 = \frac{2}{3} \mu M_1 g R_2, \end{aligned}$$

由此求得时间就变为

$$t = \frac{3M_2 R_1^2 R_2 \omega}{4\mu g (M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2)}.$$

只有当 $R_1 = R_2$ 时, 两个时间才是相同的:

$$t = \frac{3M_2 R_1 \omega}{4\mu g (M_1 + M_2)} = \frac{3M_2 R_2 \omega}{4\mu g (M_1 + M_2)}.$$

4. 10 均质矩形薄板绕竖直边转动, 初始角速度为 ω_0 , 转动时受到空气的阻力. 阻力垂直于板面, 每一小面积所受阻力的大小与其面积及速度的平方的乘积成正比, 比例常数为 k . 试计算经过多少时间, 薄板角速度减为原来的一半. 设薄板竖直边长为 b , 宽为 a , 薄板质量为 m .

[解答]在板上距离转轴为 r 处取一长度为 b , 宽度为 dr 的面积元, 其面积为

$$dS = b dr.$$

当板的角速度 ω 时, 面积元的速率为

$$v = \omega r,$$

所受的阻力为

$$df = k v^2 dS = k \omega^2 r^2 b dr,$$

阻力产生的力矩为

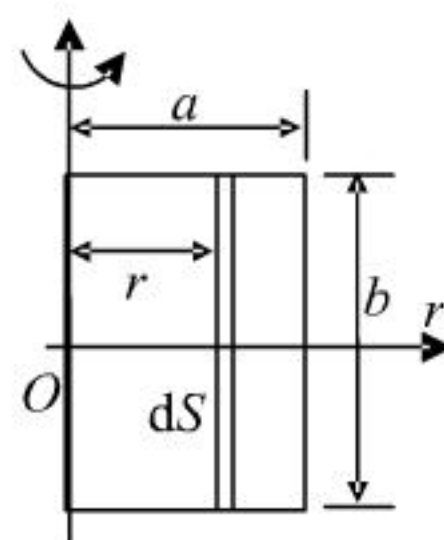


图 4.10

$$dM = r df = k\omega^2 r^3 b dr,$$

因此合力矩为

$$M = \int_0^a k\omega^2 br^3 dr = \frac{1}{4}k\omega^2 ba^4.$$

板绕转轴的转动惯量为 $I = ma^2/3$, 其角加速度为

$$\beta = -\frac{M}{I} = -\frac{3k\omega^2 ba^2}{4m},$$

负号表示角加速度的方向与角速度的方向相反.

由于 $\beta = d\omega/dt$, 可得转动的微分方程

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3k\omega^2 ba^2}{4m},$$

分离变量得

$$\frac{3kba^2}{4m} dt = -\frac{d\omega}{\omega^2},$$

积分得

$$\frac{3kba^2}{4m} t = \frac{1}{\omega} + C.$$

当 $t = 0$ 时, $\omega = \omega_0$, 所以 $C = -1/\omega_0$, 因此转动方程为

$$\frac{3kba^2}{4m} t = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0}.$$

当 $\omega = \omega_0/2$ 时, 解得时间为

$$t = \frac{4m}{3kba^2\omega_0}.$$

4.11 一个质量为 M , 半径为 R 并以角速度 ω 旋转的飞轮 (可看作匀质圆盘), 在某一瞬间突然有一片质量为 m 的碎片从轮的边缘上飞出, 如图所示. 假定碎片脱离飞轮的瞬时速度方向正好竖直向上.

(1) 问它能上升多高?

(2) 求余下部分的角速度、角动量和转动动能.

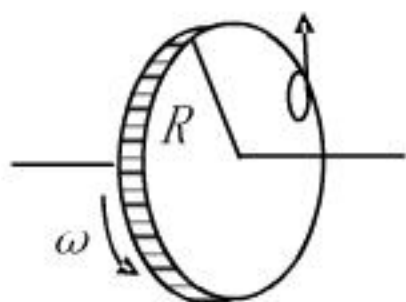


图 4.11

[解答] (1) 碎片上抛的初速度为

$$v_0 = \omega R,$$

根据匀变速直线运动公式 $v^2 - v_0^2 = -2gh$, 可得碎片上升的高度为

$$h = v_0^2/2g = \omega^2 R^2/2g.$$

(2) 余下部分的角速度仍为 ω , 但是转动惯量只有

$$I = \frac{1}{2}MR^2 - mR^2,$$

所以角动量为

$$L = I\omega = R^2(M/2 - m)\omega.$$

转动动能为

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} - m\right)\omega^2 R^2.$$

4.12 两滑冰运动员, 在相距 1.5m 的两平行线上相向而行, 两人质量分别为 $m_A = 60\text{kg}$, $m_B = 70\text{kg}$, 它们速率分别为 $v_A = 7\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_B = 6\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 当两者最接近时, 便互相拉起手来, 开始绕质心作圆周运动, 并保持二者的距离为 1.5m. 求该瞬时:

(1) 系统对通过质心的竖直轴的总角动量;

(2) 系统的角速度;

(3) 两人拉手前、后的总动能. 这一过程中能量是否守恒?

[解答] (1) 设质心距 A 的平行线为 r_A , 距 B 的平行线为

r_B , 则有

$$r_A + r_B = r,$$

根据质心的概念可得

$$m_A r_A = m_B r_B,$$

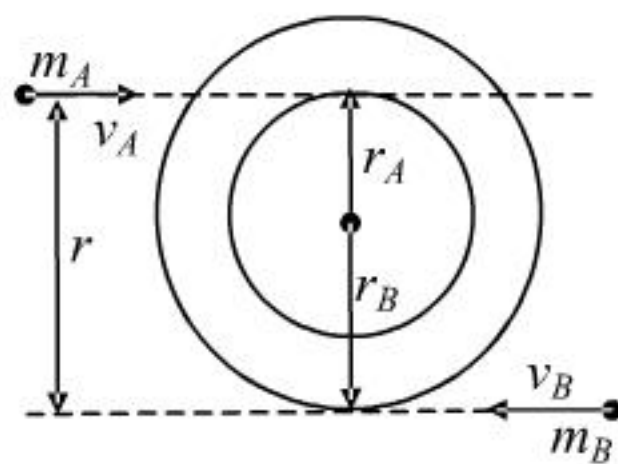
解方程组得

$$r_A = \frac{m_B}{m_A + m_B} r, \quad r_B = \frac{m_A}{m_A + m_B} r.$$

两运动员绕质心的角动量的方向相同, 他们的总角动量为

$$\begin{aligned} L &= m_A v_A r_A + m_B v_B r_B \\ &= \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} r (v_A + v_B) = 630(\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}). \end{aligned}$$

(2) 根据角动量守恒定律得



$$L = (I_A + I_B)\omega,$$

其中 I_A 和 I_B 分别是两绕质心的转动惯量

$$I_A = m_A r_A^2 \text{ 和 } I_B = m_B r_B^2.$$

角速度为

$$\omega = L/(I_A + I_B) = 8.67(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}).$$

(3) 两人拉手前的总动能就是平动动能

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = 2730(\text{J});$$

拉手后的总动能是绕质心的转动动能:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} I_A \omega^2 + \frac{1}{2} I_B \omega^2 = 2730(\text{J}),$$

可见: 这一过程能量是守恒的.

[讨论] (1) 角动量. 根据上面的推导过程可得两人绕质心的总转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= m_A r_A^2 + m_B r_B^2 = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} r(r_A + r_B) \\ &= \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} r^2, \end{aligned}$$

角速度为

$$\omega = \frac{L}{I} = \frac{v_A + v_B}{r}$$

可见: 角速度与两人的质量无关, 只与它们的相对速度和平行线的距离有关.

(2) 损失的能量. 两人的转动动能为

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2} (I_A + I_B) \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (v_A + v_B)^2, \end{aligned}$$

因此动能的变化量为

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{k2} - E_{k1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (v_A + v_B)^2 - \left(\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \right) \end{aligned}$$

简化得

$$\Delta E = -\frac{(m_A v_A - m_B v_B)^2}{2(m_A + m_B)},$$

负号表示能量减少. 可见: 如果 $m_A v_A \neq m_B v_B$, 则 $\Delta E \neq 0$, 即能量不守恒. 在本题中, 由于

$m_A v_A = m_B v_B$, 所以能量是守恒的.

4. 13. 一均匀细棒长为 l , 质量为 m , 以与棒长方向相垂直的速度 v_0 , 在光滑水平面内平动时, 与前方一固定的光滑支点 O 发生完全非弹性碰撞, 碰撞点位于离棒中心一方 $l/4$ 处, 如图所示, 求棒在碰撞后的瞬时绕过 O 点垂直于棒所在平面的轴转动的角速度 ω_0 .

[解答] 以 O 点为转动轴, 棒的质心到轴的距离为 $l/4$, 在碰撞之前, 棒对转轴的角动量为 $mv_0 l/4$. 在碰撞之后瞬间, 棒绕轴的角动量为 $I\omega_0$.

棒绕质心的转动惯量为

$$I_c = ml^2/12,$$

根据平行轴定理, 棒绕 O 点为转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= I_c + md^2 \\ &= \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{1}{4}l\right)^2 = \frac{7}{48} ml^2. \end{aligned}$$

根据角动量守恒定律得

$$mv_0 l/4 = I\omega_0,$$

所以角速度为

$$\omega_0 = \frac{1}{4} mv_0 l / I = \frac{12v_0}{7l}.$$

第五章 狭义相对论

P140.

5. 1 地球虽有自转, 但仍可看成一较好的惯性参考系, 设在地球赤道和地球某一极 (例如南极) 上分别放置两个性质完全相同的钟, 且这两只钟从地球诞生的那一天便存在. 如果地球从形成到现在是 50 亿年, 请问那两只钟指示的时间差是多少?

[解答] 地球的半径约为

$$R = 6400 \text{ 千米} = 6.4 \times 10^6(\text{m}),$$

自转一圈的时间是

$$T = 24 \times 60 \times 60(\text{s}) = 8.64 \times 10^4(\text{s}),$$

赤道上钟的线速度为

$$v = 2\pi R/T = 4.652 \times 10^2(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

将地球看成一个良好的参考系, 在南极

上看赤道上的钟做匀速直线运动, 在赤道上
看南极的钟做反向的匀速直线运动.

南极和赤道上的钟分别用 A 和 B 表示,
南极参考系取为 S , 赤道参考系取为 S' . A
钟指示 S 系中的本征时, 同时指示了 B 钟的
运动时间, 因此又指示 S' 系的运动时. 同理,
 B 钟指示 S' 系中的本征时, 同时指示了 A 钟
的反向运动时间, 因此又指示 S 系的运动时.

方法一: 以 S 系为准. 在 S 系中, A 钟
指示 B 钟的运动时间, 即运动时

$\Delta t = 50 \times 10^8 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 1.5768 \times 10^{16}(\text{s})$.
 B 钟在 S' 中的位置不变的, 指示着本征时
 $\Delta t'$. A 钟的运动时 Δt 和 B 钟的本征时 $\Delta t'$ 之
间的关系为

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

可求得 B 钟的本征时为

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1-(v/c)^2} \approx [1 - \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2] \Delta t,$$

因此时间差为

$$\Delta t - \Delta t' \approx \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2 \Delta t = 1.898 \times 10^5(\text{s}).$$

在南极上看, 赤道上的钟变慢了.

方法二: 以 S' 系为准. 在 S' 系中, B 钟
指示 A 钟的反向运动时间, 即运动时
 $\Delta t' = 50 \times 10^8 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 1.5768 \times 10^{16}(\text{s})$.
 A 钟在 S 中的位置不变的, 指示着本征时
 Δt . B 钟的运动时 $\Delta t'$ 和 A 钟的本征时 Δt 之
间的关系为

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

可求得 A 钟的本征时为

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1-(v/c)^2} \approx [1 - \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2] \Delta t',$$

因此时间差为

$$\Delta t' - \Delta t \approx \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2 \Delta t' = 1.898 \times 10^5(\text{s}).$$

在赤道上, 南极上的钟变慢了.

[注意]解此题时, 先要确定参考系, 还
要确定运动时和本征时, 才能正确引用公

式.

有人直接应用公式计算时间差

$$\begin{aligned} \Delta t - \Delta t' &= \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \Delta t' \\ &\approx [1 + \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2] \Delta t' - \Delta t' = \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2 \Delta t', \end{aligned}$$

由于地球速度远小于光速, 所以计算结果差
不多, 但是关系没有搞清. 从公式可知: 此
人以 S 系为准来对比两钟的时间, $\Delta t'$ 是 B
钟的本征时, Δt 是 A 钟的运动时, 而题中
的本征时是未知的.

也有人用下面公式计算时间差, 也是同
样的问题.

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \Delta t$$

$$\approx [1 + \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2] \Delta t - \Delta t = \frac{1}{2}(\frac{v}{c})^2 \Delta t$$

5.2 一个“光钟”由两个相距为 L_0 的
平面镜 A 和 B 构成, 对于这个光钟为静止的
参考系来说, 一个“滴答”的时间是光从镜
面 A 到镜面 B 再回到原处的时间, 其值为
 $\tau_0 = \frac{2L_0}{c}$. 若将这个光钟横放在一个以速
度 $\vec{v}$ 行驶的火车上, 使两镜面都与 $\vec{v}$ 垂直,
两镜面中心的连线与 $\vec{v}$ 平行, 在铁轨参考系
中观察, 火车上钟的一个“滴答” τ 与 τ_0 的关
系怎样?

[解答]不论两个“光钟”放在什么地方,
 τ_0 都是在相对静止的参考系中所计的时间,
称为本征时. 在铁轨参考系中观察, 火车上
钟的一个“滴答”的时间 τ 是运动时, 所以
它们的关系为

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

5.3 在惯性系 S 中同一地点发生的两
事件 A 和 B , B 晚于 A 4s; 在另一惯性系 S'
中观察, B 晚于 A 5s 发生, 求 S' 系中 A 和 B
两事件的空间距离?

[解答]在 S 系中的两事件 A 和 B 在同一地点发生, 时间差 $\Delta t = 4\text{s}$ 是本征时, 而 S' 系中观察 A 和 B 两事件肯定不在同一地点, $\Delta t' = 5\text{s}$ 是运动时, 根据时间膨胀公式

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

即
$$5 = \frac{4}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

可以求两系统的相对速度为

$$v = 3c/5.$$

在 S' 系中 A 和 B 两事件的空间距离为

$$\Delta l = v\Delta t' = 3c = 9 \times 10^8(\text{m}).$$

5. 4 一根直杆在 S 系中观察, 其静止长度为 l , 与 x 轴的夹角为 θ , S' 系沿 S 系的 x 轴正向以速度 v 运动, 问 S' 系中观察到杆子与 x' 轴的夹角若何?

[解答]直杆在 S 系中的长度是本征长度, 两个方向上的长度分别为

$$l_x = l \cos \theta \text{ 和 } l_y = l \sin \theta.$$

在 S' 系中观察直杆在 y 方向上的长度不变, 即 $l'_y = l_y$; 在 x 方向上的长度是运动长度, 根据尺缩效应得

$$l'_x = l_x \sqrt{1-(v/c)^2},$$

因此

$$\tan \theta' = \frac{l'_y}{l'_x} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

可得夹角为

$$\theta' = \arctan \{ [1-(v/c)^2]^{-1/2} \tan \theta \}.$$

5. 5 S 系中观察到两事件同时发生在 x 轴上, 其间距为 1m , S' 系中观察到这两个事件间距离是 2m , 求在 S' 系中这两个事件的时间间隔.

[解答]根据洛伦兹变换, 得两个事件的空间和时间间隔公式

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \Delta x v / c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \quad (1)$$

由题意得: $\Delta t = 0$, $\Delta x = 1\text{m}$, $\Delta x' = 2\text{m}$. 因此

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

$$\Delta t' = \frac{-\Delta x v / c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \quad (2)$$

由 (2) 之上式得它们的相对速度为

$$v = c \sqrt{1-(\Delta x' / \Delta x)^2}. \quad (3)$$

将 (2) 之下式除以 (2) 之上式得

$$\frac{\Delta t'}{\Delta x'} = -\frac{v}{c^2},$$

所以

$$\begin{aligned} \Delta t' &= -\frac{\Delta x'}{c} \sqrt{1-(\frac{\Delta x}{\Delta x'})^2} \\ &= -\frac{1}{c} \sqrt{(\Delta x')^2 - (\Delta x)^2} = -0.577 \times 10^{-8}(\text{s}). \end{aligned}$$

[注意]在 S' 系中观察到两事件不是同时发生的, 所以间隔 $\Delta x' = 2\text{m}$ 可以大于间隔 $\Delta x = 1\text{m}$. 如果在 S' 系中观察到两事件也是同时发生的, 那么 $\Delta x'$ 就表示运动长度, 就不可能大于本征长度 Δx , 这时可以用长度收缩公式 $\Delta x' = \Delta x \sqrt{1-(v/c)^2}$, 计算它们的相对速度.

5. 6 一短跑运动员, 在地球上以 10s 的时间跑完了 100m 的距离, 在对地飞行速度为 $0.8c$ 的飞船上观察, 结果如何?

[解答]以地球为 S 系, 则 $\Delta t = 10\text{s}$, $\Delta x = 100\text{m}$. 根据洛伦兹坐标和时间变换公式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \text{ 和 } t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

飞船上观察运动员的运动距离为

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$= \frac{100 - 0.8c \times 10}{\sqrt{1 - 0.8^2}} \approx -4 \times 10^9 (\text{m}).$$

运动员运动的时间为

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= \frac{10 - 0.8 \times 100/c}{0.6} \approx 16.67 (\text{s}). \end{aligned}$$

在飞船上看, 地球以 $0.8c$ 的速度后退, 后退时间约为 16.67s ; 运动员的速度远小于地球后退的速度, 所以运动员跑步的距离约为地球后退的距离, 即 $4 \times 10^9 \text{m}$.

5. 7 已知 S' 系以 $0.8c$ 的速度沿 S 系 x 轴正向运动, 在 S 系中测得两事件的时空坐标为 $x_1 = 20\text{m}$, $x_2 = 40\text{m}$, $t_1 = 4\text{s}$, $t_2 = 8\text{s}$. 求 S' 系中测得的这两件事的时间和空间间隔.

[解答] 根据洛伦兹变换可得 S' 系的时间间隔为

$$\begin{aligned} t_2' - t_1' &= \frac{t_2 - t_1 - v(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= \frac{8 - 4 - 0.8(40 - 20)/c}{0.6} \approx 6.67 (\text{s}). \end{aligned}$$

空间间隔为

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= \frac{40 - 20 - 0.8c \times (8 - 4)}{0.6} \approx -1.6 \times 10^9 (\text{m}). \end{aligned}$$

5. 8 S 系中有一直杆沿 x 轴方向装置且以 $0.98c$ 的速度沿 x 轴正方向运动, S 系中的观察者测得杆长 10m , 另有一观察以 $0.8c$ 的速度沿 S 系 x 轴负向运动, 问该观察者测得的杆长若何?

[解答] 在 S 系中的观测的杆长 $\Delta l = 10\text{m}$ 是运动长度, 相对杆静止的参考系为 S' , 其长度是本征长度, 根据尺缩效应 $\Delta l = \Delta l' \sqrt{1 - (v_{10}/c)^2}$, 可得杆的本征长度

为

$$\begin{aligned} \Delta l' &= \frac{\Delta l}{\sqrt{1 - (v_{10}/c)^2}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{1 - 0.98^2}} = 50.25 (\text{m}). \end{aligned}$$

另一参考系设为 S'' 系, 相对 S 系的速度为 $v_{20} = -0.8c$. 在 S'' 系观察 S' 系的速度为

$$\begin{aligned} v_{12} &= \frac{v_{10} - v_{20}}{1 - v_{10}v_{20}/c^2} \\ &= \frac{0.98c - (-0.8c)}{1 - 0.98(-0.8)} = 0.99796c. \end{aligned}$$

在 S'' 系观察 S' 系中的杆的长度是另一运动长度

$$\Delta l'' = \Delta l' \sqrt{1 - (v_{12}/c)^2} = 3.363 (\text{m}).$$

[注意] 在涉及多个参考系和多个速度的时候, 用双下标能够比较容易地区别不同的速度, 例如用 v_{10} 表示 S' 相对 S 系的速度, 用 v_{12} 表示 S' 系相对 S'' 系的速度, 因此, 尺缩的公式也要做相应的改变, 计算就不会混淆.

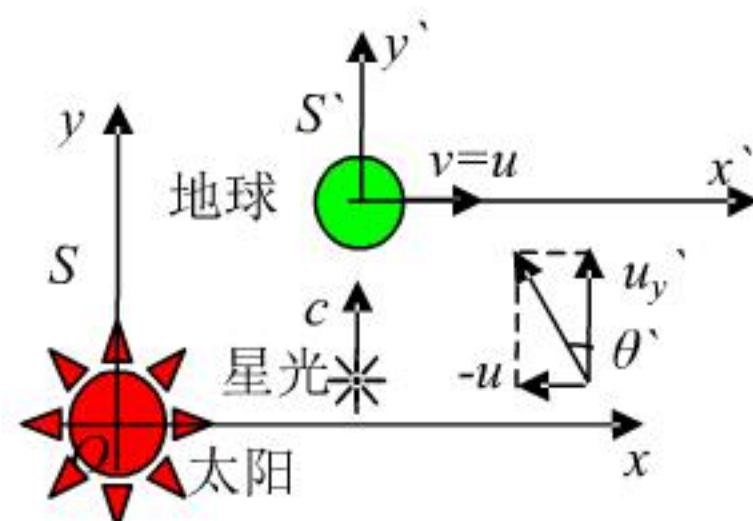
5. 9 一飞船和慧星相对于地面分别以 $0.6c$ 和 $0.8c$ 速度相向运动, 在地面上观察, 5s 后两者将相撞, 问在飞船上观察, 二者将经历多长时间间隔后相撞?

[解答] 两者相撞的时间间隔 $\Delta t = 5\text{s}$ 是运动着的对象—飞船和慧星—发生碰撞的时间间隔, 因此是运动时. 在飞船上观察的碰撞时间间隔 $\Delta t'$ 是以速度 $v = 0.6c$ 运动的系统的本征时, 根据时间膨胀公式

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \text{ 可得时间间隔为}$$

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - (v/c)^2} = 4 (\text{s}).$$

5. 10
在太阳参考系中观



察,一束星光垂直射向地面,速率为 c ,而地球以速率 u 垂直于光线运动.求在地面上测量,这束星光的大小与方向如何.

[解答]方法一:用速度变换.取太阳系为 S 系,地球为 S' 系.在 S 系中看地球以 $v = u$ 运动,看星光的速度为

$$u_x = 0, u_y = c.$$

星光在 S' 系中的速度分量为

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} = -u$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - u_x v / c^2}$$

$$= c \sqrt{1 - u^2 / c^2} = \sqrt{c^2 - u^2}$$

星光在 S' 系中的速度为

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = c,$$

即光速是不变的.

星光在 S' 系中与 y' 轴的夹角,即垂直地面的夹角为

$$\theta' = \arctan \frac{u'_x}{u'_y} = \arctan \frac{u}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

方法二:用基本原理.根据光速不变原理,在地球的 S' 系中,光速也为 c ,当地球以速度 $v = u$ 沿 x 轴运动时,根据速度变换公式可得星光的速度沿 x' 轴的分量为 $u'_x = -u$,所以星光速度沿 y' 轴的分量为

$$u'_y = \sqrt{c^2 - u'^2_x} = \sqrt{c^2 - u^2},$$

从而可求出星光速度垂直地面的夹角为

$$\theta' = \arctan \frac{u'_x}{u'_y} = \arctan \frac{u}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

[注意]解题时,要确定不同的参考系,通常将已知两个物体速度的系统作为 S 系,另外一个相对静止的系统作为 S' 系,而所讨论的对象在不同的参考系中的速度是不同的.

此题与书中的例题 5.4 类似,这里的太阳相当于 5.4 题中的地球,这里的地求相当于 5.4 题的乙飞船,这里的星光相当于 5.4

题中的甲飞船.

5.11 一粒子动能等于其非相对论动能二倍时,其速度为多少?其动量是按非相对论算得的二倍时,其速度是多少?

[解答](1)粒子的非相对论动能为

$$E_k = m_0 v^2 / 2,$$

相对论动能为

$$E'_k = mc^2 - m_0 c^2,$$

其中 m 为运动质量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

根据题意得

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - m_0 c^2 = m_0 v^2,$$

设 $x = (v/c)^2$,方程可简化为

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+x,$$

$$\text{或 } 1 = (1+x)\sqrt{1-x},$$

平方得

$$1 = (1-x^2)(1-x),$$

化简得

$$x(x^2 - x - 1) = 0.$$

由于 x 不等于0,所以

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

解得

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

取正根得速率为

$$v = c \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = 0.786c.$$

(2)粒子的非相对论动量为

$$p = m_0 v,$$

相对论动量为

$$p' = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

根据题意得方程

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 2m_0 v.$$

很容易解得速率为

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0.866c.$$

5. 12. 某快速运动的粒子, 其动能为 $4.8 \times 10^{-16} \text{J}$, 该粒子静止时的总能量为 $1.6 \times 10^{-17} \text{J}$, 若该粒子的固有寿命为 $2.6 \times 10^{-6} \text{s}$, 求其能通过的距離.

[解答]在相对论能量关系中

$$E = E_0 + E_k,$$

静止能量 E_0 已知, 且 $E_0 = m_0 c^2$, 总能量为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{E_0 + E_k}{E_0},$$

由此得粒子的运动时为

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \Delta t' \frac{E_0 + E_k}{E_0}.$$

还可得

$$\sqrt{1-(v/c)^2} = \frac{E_0}{E_0 + E_k},$$

解得速率为

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_0 + E_k}\right)^2}.$$

粒子能够通过的距离为

$$\begin{aligned} \Delta l &= v \Delta t = c \Delta t' \sqrt{\left(\frac{E_0 + E_k}{E_0}\right)^2 - 1} \\ &= 3 \times 10^8 \times 2.6 \times 10^{-6} \sqrt{(1+30)^2 - 1} = 24167.4(\text{m}). \end{aligned}$$

5. 13 试证相对论能量和速度满足如此

$$\text{关系式: } \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E^2}}.$$

[证明]根据上题的过程已得

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_0 + E_k}\right)^2},$$

将 $E = E_0 + E_k$ 代入公式立可得证.

5. 14 静止质子和中子的质量分别为 $m_p = 1.67285 \times 10^{-27} \text{kg}$, $m_n = 1.67495 \times 10^{-27} \text{kg}$, 质子和中子结合变成氦核, 其静止质量为 $m_0 = 3.34365 \times 10^{-27} \text{kg}$, 求结合过程中所释放出的能量.

[解答]在结合过程中, 质量亏损为

$$\Delta m = m_p + m_n - m_0 = 3.94988 \times 10^{-30}(\text{kg}),$$

取 $c = 3 \times 10^8 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$, 可得释放出的能量为

$$\Delta E = \Delta m c^2 = 3.554893 \times 10^{-13}(\text{J}).$$

如果取 $c = 2.997925 \times 10^8 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$, 可得释放出的能量为

$$\Delta E = 3.549977 \times 10^{-13}(\text{J}).$$

第六章 振动

P176.

6. 1 一物体沿 x 轴做简谐振动, 振幅 $A = 0.12 \text{m}$, 周期 $T = 2 \text{s}$. 当 $t = 0$ 时, 物体的位移 $x = 0.06 \text{m}$, 且向 x 轴正向运动. 求:

(1) 此简谐振动的表达式;

(2) $t = T/4$ 时物体的位置、速度和加速度;

(3) 物体从 $x = -0.06 \text{m}$, 向 x 轴负方向运动第一次回到平衡位置所需的时间.

[解答] (1) 设物体的简谐振动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

其中 $A = 0.12 \text{m}$, 角频率 $\omega = 2\pi/T = \pi$.

当 $t = 0$ 时, $x = 0.06 \text{m}$, 所以

$$\cos \varphi = 0.5,$$

因此

$$\varphi = \pm \pi/3.$$

物体的速度为

$$v = dx/dt = -\omega A \sin(\omega t + \varphi).$$

当 $t = 0$ 时,

$$v = -\omega A \sin \varphi,$$

由于 $v > 0$, 所以 $\sin \varphi < 0$, 因此

$$\varphi = -\pi/3.$$

简谐振动的表达式为

$$x = 0.12\cos(\pi t - \pi/3).$$

(2) 当 $t = T/4$ 时物体的位置为

$$\begin{aligned} x &= 0.12\cos(\pi/2 - \pi/3) \\ &= 0.12\cos\pi/6 = 0.104(\text{m}). \end{aligned}$$

速度为

$$\begin{aligned} v &= -\pi A \sin(\pi/2 - \pi/3) \\ &= -0.12\pi \sin\pi/6 = -0.188(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}). \end{aligned}$$

加速度为

$$\begin{aligned} a &= \text{d}v/\text{d}t = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \\ &= -\pi^2 A \cos(\pi t - \pi/3) \\ &= -0.12\pi^2 \cos\pi/6 = -1.03(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}). \end{aligned}$$

(3) 方法一: 求时间差. 当 $x = -0.06\text{m}$ 时, 可得

$$\cos(\pi t_1 - \pi/3) = -0.5,$$

因此

$$\pi t_1 - \pi/3 = \pm 2\pi/3.$$

由于物体向 x 轴负方向运动, 即 $v < 0$, 所以 $\sin(\pi t_1 - \pi/3) > 0$, 因此

$$\pi t_1 - \pi/3 = 2\pi/3,$$

得 $t_1 = 1\text{s}$.

当物体从 $x = -0.06\text{m}$ 处第一次回到平衡位置时, $x = 0$, $v > 0$, 因此

$$\cos(\pi t_2 - \pi/3) = 0,$$

可得 $\pi t_2 - \pi/3 = -\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 等.

由于 $t_2 > 0$, 所以

$$\pi t_2 - \pi/3 = 3\pi/2,$$

可得 $t_2 = 11/6 = 1.83(\text{s})$.

所需要的时间为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.83(\text{s}).$$

方法二: 反向运动. 物体从 $x = -0.06\text{m}$, 向 x 轴负方向运动第一次回到平衡位置所需的时间就是它从 $x = 0.06\text{m}$, 即从起点向 x 轴正方向运动第一次回到平衡位置所需的时间. 在平衡位置时, $x = 0$, $v < 0$, 因此

$$\cos(\pi t - \pi/3) = 0,$$

可得 $\pi t - \pi/3 = \pi/2$,

解得 $t = 5/6 = 0.83(\text{s})$.

[注意]根据振动方程

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

当 $t = 0$ 时, 可得

$$\varphi = \pm \arccos(x_0/A), \quad (-\pi < \varphi \leq \pi),$$

初位相的取值由速度决定.

由于

$$v = \text{d}x/\text{d}t = -\omega A \sin(\omega t + \varphi),$$

当 $t = 0$ 时,

$$v = -\omega A \sin\varphi,$$

当 $v > 0$ 时, $\sin\varphi < 0$, 因此

$$\varphi = -\arccos(x_0/A);$$

当 $v < 0$ 时, $\sin\varphi > 0$, 因此

$$\varphi = \arccos(x_0/A)\pi/3.$$

可见: 当速度大于零时, 初位相取负值; 当速度小于零时, 初位相取正值. 如果速度等于零, 当初位置 $x_0 = A$ 时, $\varphi = 0$; 当初位置 $x_0 = -A$ 时, $\varphi = \pi$.

6.2 已知一简谐振子的振动曲线如图所示, 试由图求:

(1) a ,

b, c, d, e

各点的位

相, 及到达

这些状态

的时刻 t 各是

多少? 已知

周期为 T ;

(2) 振动表达式;

(3) 画出旋转矢量图.

[解答]方法一: 由位相求时间.

(1) 设曲线方程为

$$x = A\cos\Phi,$$

其中 A 表示振幅, $\Phi = \omega t + \varphi$ 表示相位.

由于 $x_a = A$, 所以

$$\cos\Phi_a = 1,$$

因此 $\Phi_a = 0$.

由于 $x_b = A/2$, 所以

$$\cos\Phi_b = 0.5,$$

因此 $\Phi_b = \pm\pi/3$;

由于位相 Φ 随时间 t 增加, b 点位相就应该大于 a 点的位相, 因此

$$\Phi_b = \pi/3.$$

由于 $x_c = 0$, 所以

$$\cos\Phi_c = 0,$$

又由于 c 点位相大于 b 位相, 因此

$$\Phi_c = \pi/2.$$

同理可得其他两点位相为

$$\Phi_d = 2\pi/3, \quad \Phi_e = \pi.$$

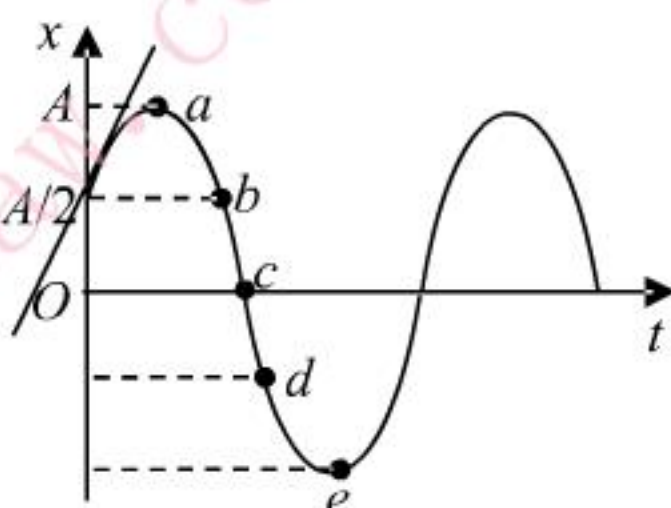


图 6.2

c 点和 a 点的相位之差为 $\pi/2$, 时间之差为 $T/4$, 而 b 点和 a 点的相位之差为 $\pi/3$, 时间之差应该为 $T/6$. 因为 b 点的位移值与 O 时刻的位移值相同, 所以到达 a 点的时刻为

$$t_a = T/6.$$

到达 b 点的时刻为

$$t_b = 2t_a = T/3.$$

到达 c 点的时刻为

$$t_c = t_a + T/4 = 5T/12.$$

到达 d 点的时刻为

$$t_d = t_c + T/12 = T/2.$$

到达 e 点的时刻为

$$t_e = t_a + T/2 = 2T/3.$$

(2) 设振动表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

当 $t = 0$ 时, $x = A/2$ 时, 所以

$$\cos\varphi = 0.5,$$

因此

$$\varphi = \pm\pi/3;$$

由于零时刻的位相小于 a 点的位相, 所以

$$\varphi = -\pi/3,$$

因此振动表达式为

$$x = A\cos(2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{3}).$$

另外, 在 O 时刻的曲线上作一切线, 由于速度是位置对时间的变化率, 所以切线代表速度的方向; 由于其斜率大于零, 所以速度大于零, 因此初位相取负值, 从而可得运动方程.

(3) 如图旋转矢量图所示.

方法

二: 由时间求位相. 将曲线反方向延长与 t 轴相交于 f 点, 由于 $x_f = 0$, 根据

运动方程, 可得

$$\cos(2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{3}) = 0$$

所以

$$2\pi\frac{t_f}{T} - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{2}.$$

显然 f 点的速度大于零, 所以取负值, 解得

$$t_f = -T/12.$$

从 f 点到达 a 点经过的时间为 $T/4$, 所以到达 a 点的时刻为

$$t_a = T/4 + t_f = T/6,$$

其位相为

$$\Phi_a = 2\pi\frac{t_a}{T} - \frac{\pi}{3} = 0.$$

由图可以确定其他点的时刻, 同理可得各点的位相.

6. 3 有一弹簧, 当其下端挂一质量为 M 的物体时, 伸长量为 $9.8 \times 10^{-2} \text{m}$. 若使物体上下振动, 且规定向下为正方向.

(1) $t = 0$ 时, 物体在平衡位置上方 $8.0 \times 10^{-2} \text{m}$ 处, 由静止开始向下运动, 求运动方程;

(2) $t = 0$ 时, 物体在平衡位置并以 $0.60 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 速度向上运动, 求运动方程.

[解答] 当物体平衡时, 有

$$Mg - kx_0 = 0,$$

所以弹簧的倔强系数为

$$k = Mg/x_0,$$

物体振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{k/M} = \sqrt{g/x_0} = 10(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}).$$

设物体的运动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi).$$

(1) 当 $t = 0$ 时, $x_0 = -8.0 \times 10^{-2} \text{m}$, $v_0 = 0$, 因此振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = |x_0| = 8.0 \times 10^{-2}(\text{m});$$

由于初位移为 $x_0 = -A$, 所以 $\cos\varphi = -1$, 初位相为

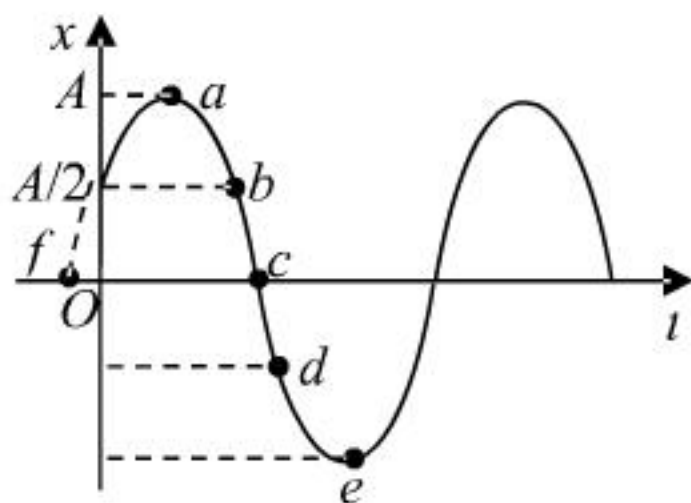
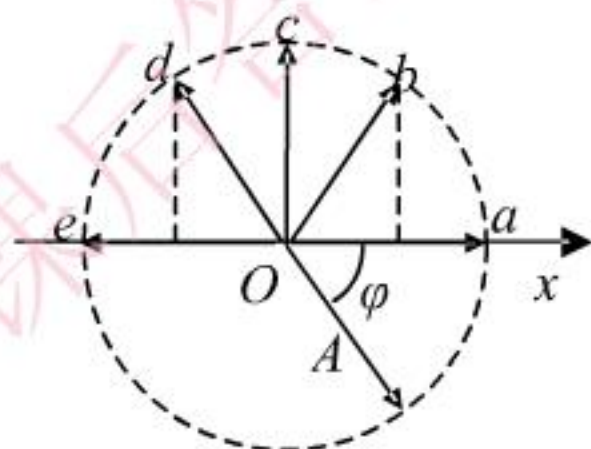
$$\varphi = \pi.$$

运动方程为

$$x = 8.0 \times 10^{-2} \cos(10t + \pi).$$

(2) 当 $t = 0$ 时, $x_0 = 0$, $v_0 = -0.60(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$, 因此振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = |v_0/\omega| = 6.0 \times 10^{-2}(\text{m});$$



由于 $\cos\varphi = 0$, 所以 $\varphi = \pi/2$; 运动方程为

$$x = 6.0 \times 10^{-2} \cos(10t + \pi/2).$$

6.4 质量为 $10 \times 10^{-3} \text{kg}$ 的小球与轻弹簧组成的系统, 按 $x = 0.1 \cos(8\pi t + \frac{2\pi}{3})$ 的规律作振动, 式中 t 以秒(s)计, x 以米(m)计. 求:

(1) 振动的圆频率、周期、振幅、初位相;

(2) 振动的速度、加速度的最大值;

(3) 最大回复力、振动能量、平均动能和平均势能;

(4) 画出这振动的旋转矢量图, 并在图上指明 t 为 1, 2, 10s 等各时刻的矢量位置.

[解答] (1) 比较简谐振动的标准方程

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

可知: 圆频率为

$$\omega = 8\pi,$$

周期

$$T = 2\pi/\omega = 1/4 = 0.25(\text{s}),$$

振幅为

$$A = 0.1(\text{m}),$$

初位相为

$$\varphi = 2\pi/3.$$

(2) 速度的最大值为

$$v_m = \omega A = 0.8\pi = 2.51(\text{m} \cdot \text{s}^{-1});$$

加速度的最大值为

$$a_m = \omega^2 A = 6.4\pi^2 = 63.2(\text{m} \cdot \text{s}^{-2}).$$

(3) 弹簧的倔强系数为

$$k = m\omega^2,$$

最大回复力为

$$f = kA = m\omega^2 A = 0.632(\text{N});$$

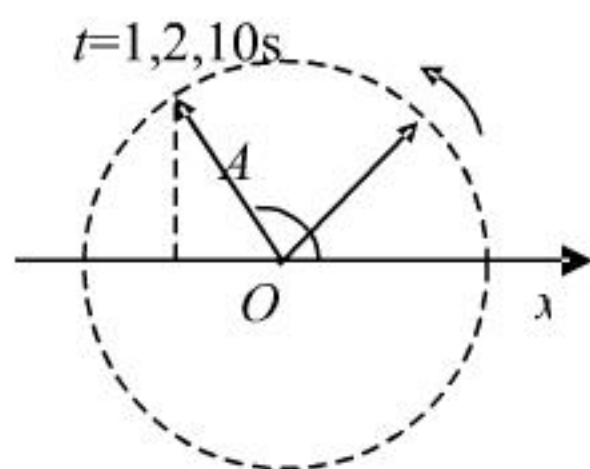
振动能量为

$$E = kA^2/2 = m\omega^2 A^2/2 = 3.16 \times 10^{-2}(\text{J}),$$

平均动能和平均势能为

$$\bar{E}_k = \bar{E}_p = kA^2/4 = m\omega^2 A^2/4 = 1.58 \times 10^{-2}(\text{J}).$$

(4) 如图所示, 当 t 为 1, 2, 10s 等时刻时, 旋转矢量的位置是相同的.



6.5 两个质点平行于同一直线并排作同频率、同振幅的简谐振动. 在振动过程中, 每当它们经过振幅一半的地方时相遇, 而运动方向相反. 求它们的位相差, 并作旋转矢量图表示.

[解答] 设它们的振动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

当 $x = A/2$ 时, 可得位相为

$$\omega t + \varphi = \pm\pi/3.$$

由于它们在相遇时反相, 可取

$$\Phi_1 = (\omega t + \varphi)_1 = -\pi/3,$$

$$\Phi_2 = (\omega t + \varphi)_2 = \pi/3,$$

它们的相差为

$$\Delta\Phi = \Phi_2$$

$$-\Phi_1 = 2\pi/3,$$

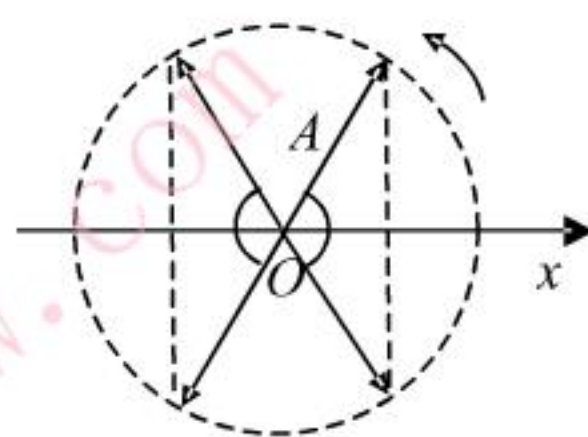
或者

$$\Delta\Phi' = 2\pi$$

$$-\Delta\Phi = 4\pi/3.$$

矢量图如

图所示.



6.6 一氢原子在分子中的振动可视为简谐振动. 已知氢原子质量 $m = 1.68 \times 10^{-27} \text{kg}$, 振动频率 $\nu = 1.0 \times 10^{14} \text{Hz}$, 振幅 $A = 1.0 \times 10^{-11} \text{m}$. 试计算:

(1) 此氢原子的最大速度;

(2) 与此振动相联系的能量.

[解答] (1) 氢原子的圆频率为

$$\omega = 2\pi\nu = 6.28 \times 10^{14}(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}),$$

最大速度为

$$v_m = \omega A = 6.28 \times 10^3(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

(2) 氢原子的能量为

$$E = \frac{1}{2} m v_m^2 = 3.32 \times 10^{-20}(\text{J}).$$

6.7 如图所示, 在一平板下装有弹簧, 平板上放一质量为 1.0kg 的重物, 若使平板在竖直方向上作上下简谐振动, 周期为 0.50s , 振幅为 $2.0 \times 10^{-2} \text{m}$, 求:

(1) 平板到最低点时, 重物对平板的作用力;

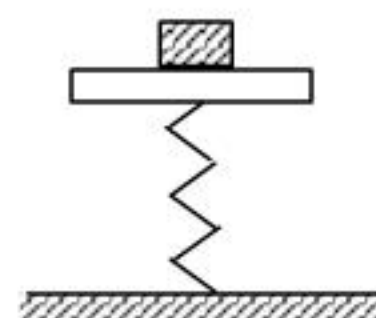


图 6.7

(2) 若频率不变, 则平板以多大的振幅振动时, 重物跳离平板?

(3) 若振幅不变, 则平板以多大的频率振动时, 重物跳离平板?

[解答] (1) 重物的圆频率为

$$\omega = 2\pi/T = 4\pi,$$

其最大加速度为

$$a_m = \omega^2 A,$$

合力为

$$F = ma_m,$$

方向向上.

重物受到板的向上支持力 N 和向下的重力 G , 所以

$$F = N - G.$$

重物对平板的作用力方向向下, 大小等于板的支持力

$$\begin{aligned} N &= G + F = m(g + a_m) \\ &= m(g + \omega^2 A) = 12.96(\text{N}). \end{aligned}$$

(2) 当物体的最大加速度向下时, 板的支持为

$$N = m(g - \omega^2 A).$$

当重物跳离平板时, $N = 0$, 频率不变时, 振幅为

$$A = g/\omega^2 = 3.2 \times 10^{-2}(\text{m}).$$

(3) 振幅不变时, 频率为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = 3.52(\text{Hz}).$$

6.8 两轻弹簧与小球串连在一直线上, 将两弹簧拉长后系在固定点 A 和 B 之间, 整个系统放在光滑水平面上. 设两弹簧的原长分别为 l_1 和 l_2 , 倔强系统分别为 k_1 和 k_2 , A 和 B 间距为 L , 小球的质量为 m .

(1) 试确定小球的平衡位置;

(2) 使小球沿弹簧长度方向作一微小位移后放手, 小球将作振动, 这一振动是否为简谐振动? 振动周期为多少?

[解答] (1) 这里不计小球的大小, 不妨设 $L > l_1 + l_2$, 当小球平衡时, 两弹簧分别拉

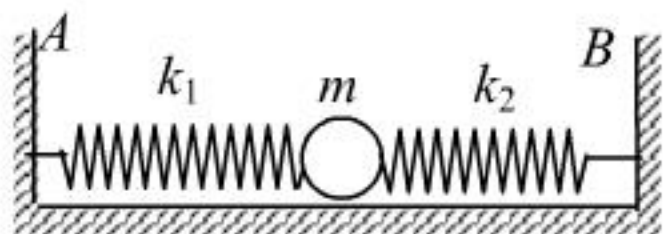


图 6.8

长 x_1 和 x_2 , 因此得方程

$$L = l_1 + x_1 + l_2 + x_2;$$

小球受左右两边的弹簧的弹力分别向左和向右, 大小相等, 即

$$k_1 x_1 = k_2 x_2.$$

将 $x_2 = x_1 k_1 / k_2$ 代入第一个公式解得

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} (L - l_1 - l_2).$$

小球离 A 点的距离为

$$L_1 = l_1 + x_1 = l_1 + \frac{k_2}{k_1 + k_2} (L - l_1 - l_2).$$

(2) 以平衡位置为原点, 取向右的方向为 x 轴正方向, 当小球向右移动一个微小距离 x 时, 左边弹簧拉长为 $x_1 + x$, 弹力大小为

$$f_1 = k_1(x_1 + x),$$

方向向左; 右边弹簧拉长为 $x_1 - x$, 弹力大小为

$$f_2 = k_2(x_2 - x),$$

方向向右. 根据牛顿第二定律得

$$k_2(x_2 - x) - k_1(x_1 + x) = ma,$$

利用平衡条件得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x = 0,$$

可见: 小球做简谐振动.

小球振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}},$$

其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

6.9 如图所示, 质量为 10g 的子弹以速度 $v = 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 水平射入木块, 并陷入木块中, 使弹簧压缩而作简谐振动. 设弹簧的倔强系数 k

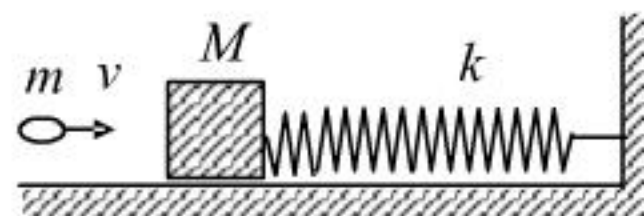


图 6.9

$= 8 \times 10^3 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, 木块的质量为 4.99kg , 不计

桌面摩擦, 试求:

(1) 振动的振幅;

(2) 振动方程.

[解答] (1) 子弹射入木块时, 由于时间很短, 木块还来不及运动, 弹簧没有被压缩, 它们的动量守恒, 即

$$mv = (m + M)v_0.$$

解得子弹射入后的速度为

$$v_0 = mv/(m + M) = 2(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}),$$

这也是它们振动的初速度.

子弹和木块压缩弹簧的过程机械能守恒, 可得

$$(m + M)v_0^2/2 = kA^2/2,$$

所以振幅为

$$A = v_0 \sqrt{\frac{m + M}{k}} = 5 \times 10^{-2}(\text{m}).$$

(2) 振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}} = 40(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}).$$

取木块静止的位置为原点、向右的方向为位移 x 的正方向, 振动方程可设为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

当 $t = 0$ 时, $x = 0$, 可得

$$\varphi = \pm \pi/2;$$

由于速度为正, 所以取负的初位相, 因此振动方程为

$$x = 5 \times 10^{-2} \cos(40t - \pi/2).$$

6. 10 如图所示, 在倔强系数为 k 的弹簧下, 挂一质量为 M 的托盘. 质量为 m 的物体由距盘底高 h 处自由下落与盘发生完全非弹性碰撞, 而使其作简谐振动, 设两物体碰撞后瞬时为 $t = 0$ 时刻, 求振动方程.

[解答] 物体落下后、碰撞前的速度为

$$v = \sqrt{2gh},$$

物体与托盘做完全非弹性碰撞后, 根据动量守恒定律可得它们的共同速度为

$$v_0 = \frac{m}{m + M} v = \frac{m}{m + M} \sqrt{2gh},$$

这也是它们振动的初速度.

设振动方程为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

其中圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}}.$$

物体没有落下之前, 托盘平衡时弹簧伸长为 x_1 , 则

$$x_1 = Mg/k.$$

物体与托盘碰撞之后, 在新的平衡位置, 弹簧伸长为 x_2 , 则

$$x_2 = (M + m)g/k.$$

取新的平衡位置为原点, 取向下的方向为正, 则它们振动的初位移为

$$x_0 = x_1 - x_2 = -mg/k.$$

因此振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2ghm^2}{k(m + M)}}$$

$$= \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m + M)g}};$$

初位相为

$$\varphi = \arctan \frac{-v_0}{\omega x_0} = \sqrt{\frac{2kh}{(m + M)g}}.$$

6. 11 装置如图所示, 轻弹簧一端固定, 另一端与物体 m 间用细绳相连, 细绳跨于桌边定滑轮 M 上, m 悬于细绳下端. 已知弹簧的倔强系数为 $k = 50 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, 滑轮的转动惯量 $J = 0.02 \text{kg} \cdot \text{m}^2$, 半径 $R = 0.2 \text{m}$, 物体质量为

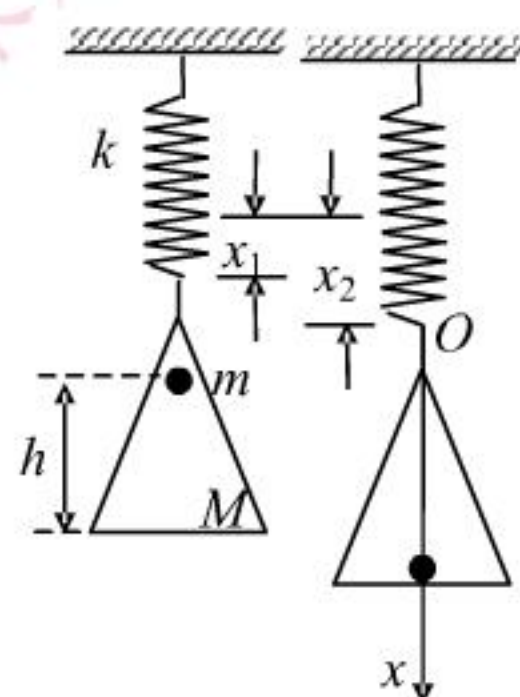


图 6.10

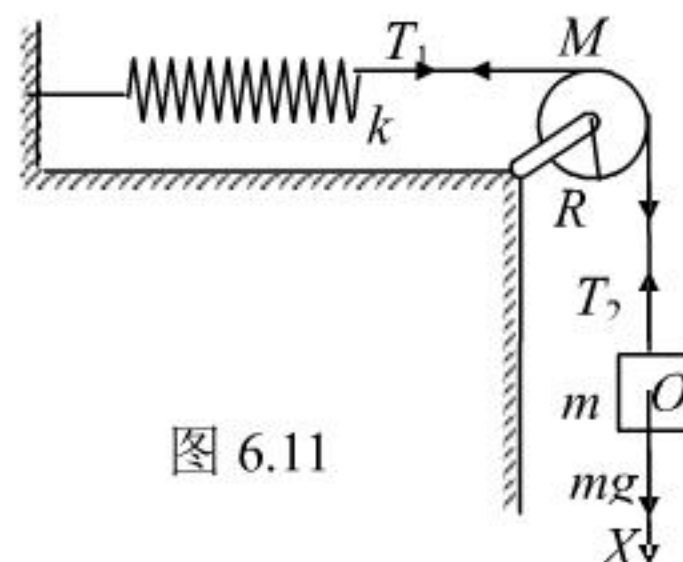


图 6.11

$m = 1.5\text{kg}$, 取 $g = 10\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

(1) 试求这一系统静止时弹簧的伸长量和绳的张力;

(2) 将物体 m 用手托起 0.15m , 再突然放手, 任物体 m 下落而整个系统进入振动状态. 设绳子长度一定, 绳子与滑轮间不打滑, 滑轮轴承无摩擦, 试证物体 m 是做简谐振动;

(3) 确定物体 m 的振动周期;

(4) 取物体 m 的平衡位置为原点, OX 轴竖直向下, 设振物体 m 相对于平衡位置的位移为 x , 写出振动方程.

[解答] (1) 在平衡时, 绳子的张力等于物体的重力

$$T = G = mg = 15(\text{N}).$$

这也是对弹簧的拉力, 所以弹簧的伸长为

$$x_0 = mg/k = 0.3(\text{m}).$$

(2) 以物体平衡位置为原点, 取向下的方向为正, 当物体下落 x 时, 弹簧拉长为 $x_0 + x$, 因此水平绳子的张力为

$$T_1 = k(x_0 + x).$$

设竖直绳子的张力为 T_2 , 对定滑轮可列转动方程

$$T_2 R - T_1 R = J\beta,$$

其中 β 是角加速度, 与线加速度的关系是

$$\beta = a/R.$$

对于物体也可列方程

$$mg - T_2 = ma.$$

转动方程化为

$$T_2 - k(x_0 + x) = aJ/R^2,$$

与物体平动方程相加并利用平衡条件得

$$a(m + J/R^2) = -kx,$$

可得微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m + J/R^2} x = 0,$$

可知: 物体做简谐振动.

(3) 简谐振动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + J/R^2}} = 5(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}).$$

周期为

$$T_2 = 2\pi/\omega = 1.26(\text{s}).$$

(4) 设物体振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

其中振幅为

$$A = 0.15(\text{m}).$$

当 $t = 0$ 时, $x = -0.15\text{m}$, $v_0 = 0$, 可得

$$\cos\varphi = -1,$$

因此

$$\varphi = \pi \text{ 或 } -\pi,$$

所以振动方程为

$$x = 0.15\cos(5t + \pi),$$

或 $x = 0.15\cos(5t - \pi).$

6. 12 一匀质细圆环质量为 m , 半径为 R , 绕通过环上一点而与环平面垂直的水平光滑轴在铅垂面内作小幅度摆动, 求摆动的周期.

[解答] 通过质心垂直环面有一个轴, 环绕此轴的转动惯量为

$$I_c = mR^2.$$

根据平行轴定理, 环绕过 O 点的平行轴的转动惯量为

$$I = I_c + mR^2 = 2mR^2.$$

当环偏离平衡位置时, 重力的力矩为

$$M = mgR\sin\theta,$$

方向与角度 θ 增加的方向相反.

根据转动定理得

$$I\beta = -M,$$

$$\text{即 } I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgR\sin\theta = 0,$$

由于环做小幅度摆动, 所以 $\sin\theta \approx \theta$, 可得微分方程

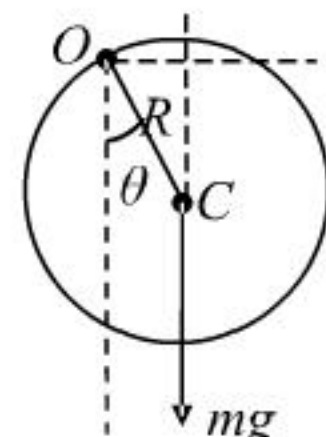
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgR}{I}\theta = 0.$$

摆动的圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}},$$

周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$



6.13 重量为 P 的物体用两根弹簧竖直悬挂, 如图所示, 各弹簧的倔强系数标明在图上. 试求在图示两种情况下, 系统沿竖直方向振动的固有频率.

[解答] (1) 前面已经证明: 当两根弹簧串联时, 总倔强系数为 $k = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$, 因此固有频率为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2 g}{(k_1 + k_2) P}}.$$

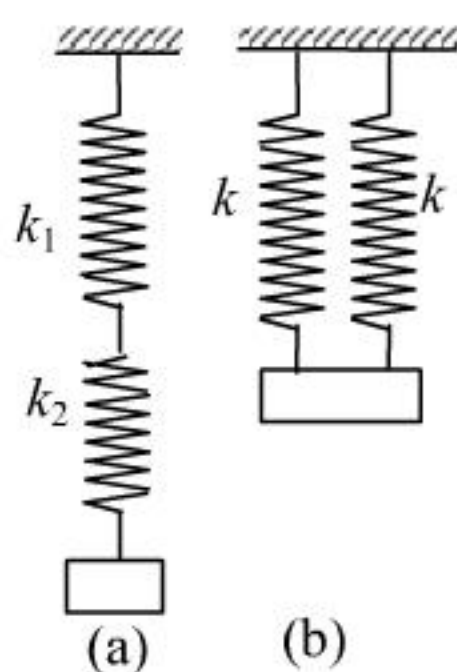


图 6.13

(2) 前面还证明: 当两根弹簧并联时, 总倔强系数等于两个弹簧的倔强系数之和, 因此固有频率为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2kg}{P}}.$$

6.14 质量为 0.25kg 的物体, 在弹性力作用下作简谐振动, 倔强系数 $k = 25\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$, 如果开始振动时具有势能 0.6J , 和动能 0.2J , 求:

- (1) 振幅;
- (2) 位移多大时, 动能恰等于势能?
- (3) 经过平衡位置时的速度.

[解答] 物体的总能量为

$$E = E_k + E_p = 0.8(\text{J}).$$

- (1) 根据能量公式

$$E = kA^2/2,$$

得振幅为

$$A = \sqrt{2E/k} = 0.253(\text{m}).$$

(2) 当动能等于势能时, 即 $E_k = E_p$, 由于

$$E = E_k + E_p,$$

可得

$$E = 2E_p,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}kA^2 = 2 \times \frac{1}{2}kx^2,$$

解得

$$x = \pm \sqrt{2}A/2 = \pm 0.179(\text{m}).$$

- (3) 再根据能量公式

$$E = mv_m^2/2,$$

得物体经过平衡位置的速度为

$$v_m = \pm \sqrt{2E/m} = \pm 2.53(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}).$$

6.15 两个频率和振幅都相同的简谐振动的 $x-t$ 曲线如图所示, 求:

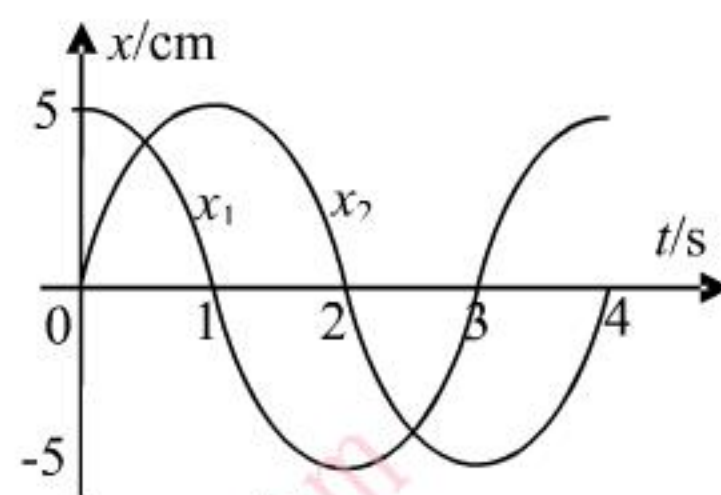


图 6.15

- (1)

两个简谐振动的位相差:

(2) 两个简谐振动的合成振动的振动方程.

[解答] (1) 两个简谐振动的振幅为

$$A = 5(\text{cm}),$$

周期为

$$T = 4(\text{s}),$$

圆频率为

$$\omega = 2\pi/T = \pi/2,$$

它们的振动方程分别为

$$x_1 = A \cos \omega t = 5 \cos \pi t / 2,$$

$$x_2 = A \sin \omega t = 5 \sin \pi t / 2 = 5 \cos(\pi/2 - \pi t / 2)$$

即 $x_2 = 5 \cos(\pi t / 2 - \pi/2)$.

位相差为

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2.$$

- (2) 由于

$$x = x_1 + x_2 = 5 \cos \pi t / 2 + 5 \sin \pi t / 2$$

$$= 5(\cos \pi t / 2 \cdot \cos \pi / 4 + 5 \sin \pi t / 2 \cdot \sin \pi / 4) / \sin \pi / 4$$

合振动方程为

$$x = 5\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right) (\text{cm}).$$

6.16 已知两个同方向简谐振动如下:

$$x_1 = 0.05 \cos\left(10t + \frac{3}{5}\pi\right),$$

$$x_2 = 0.06 \cos\left(10t + \frac{1}{5}\pi\right).$$

- (1) 求它们的合成振动的振幅和初位

相;

(2) 另有一同方向简谐振动 $x_3 = 0.07\cos(10t + \varphi)$, 问 φ 为何值时, $x_1 + x_3$ 的振幅为最大? φ 为何值时, $x_2 + x_3$ 的振幅为最小?

(3) 用旋转矢量图示法表示 (1) 和 (2) 两种情况下的结果. x 以米计, t 以秒计.

[解答] (1) 根据公式, 合振动的振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$= 8.92 \times 10^{-2}(\text{m}).$$

初位相为

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = 68.22^\circ.$$

(2) 要使 $x_1 + x_3$ 的振幅最大, 则

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = 1,$$

因此

$$\varphi - \varphi_1 = 0,$$

所以

$$\varphi = \varphi_1 = 0.6\pi.$$

要使 $x_2 + x_3$ 的振幅最小, 则

$$\cos(\varphi - \varphi_2) = -1,$$

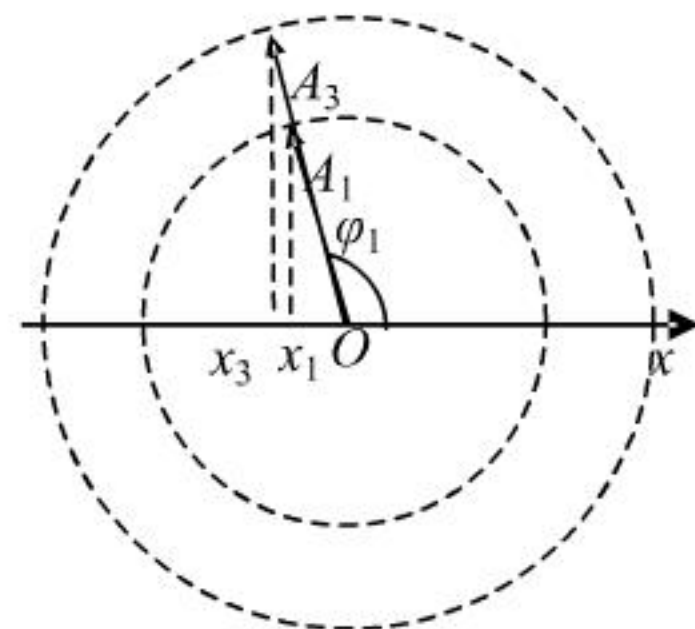
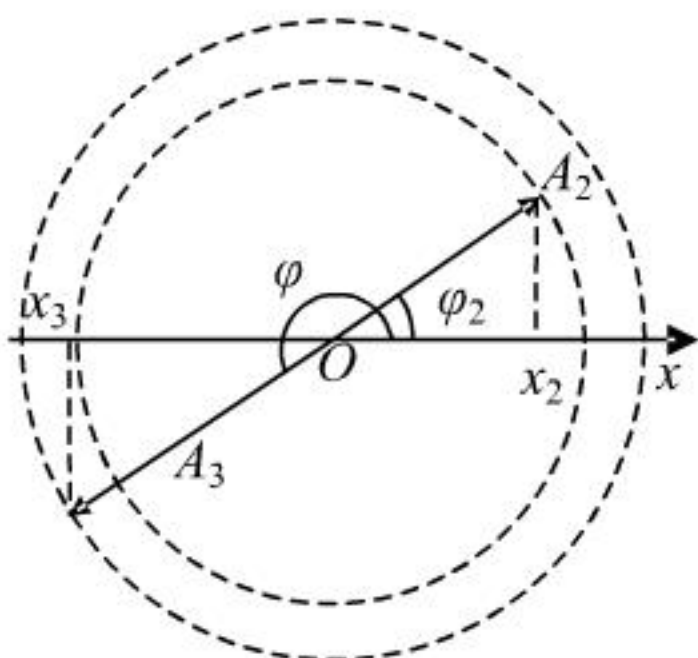
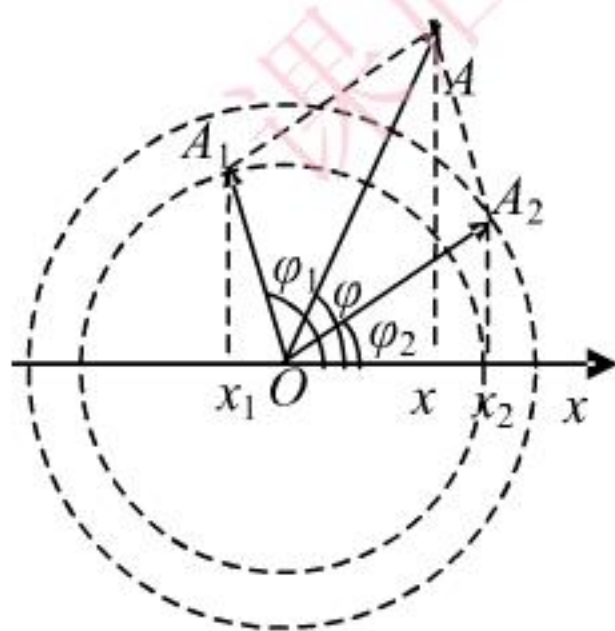
因此

$$\varphi - \varphi_2 = \pi,$$

所以

$$\varphi = \pi + \varphi_2 = 1.2\pi.$$

(3) 如图所示.



6. 17 质量为 0.4kg 的质点同时参与互相垂直的两个振动:

$$x = 0.08 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$y = 0.06 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right).$$

式中 x 和 y 以米(m)计, t 以秒(s)计.

(1) 求运动的轨道方程;

(2) 画出合成振动的轨迹;

(3) 求质点在任一位置所受的力.

[解答] (1) 根据公式

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi,$$

其中位相差为

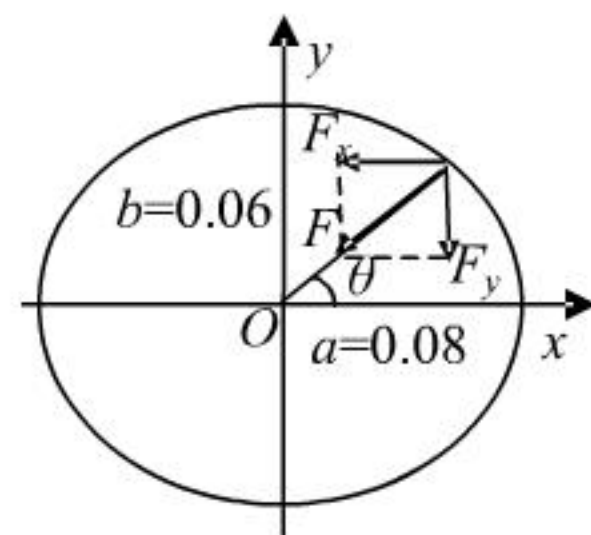
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2,$$

所以质点运动的轨道方程为

$$\frac{x^2}{0.08^2} + \frac{y^2}{0.06^2} = 1.$$

(2) 合振动的轨迹是椭圆.

(3) 两个振动的圆频率是相同的 $\omega = \pi/3$, 质点在 x 方向所受的力为



$$F_x = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$= -m\omega^2 0.08 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right),$$

即 $F_x = 0.035 \cos(\pi t/3 + \pi/6) (\text{N})$.

在 y 方向所受的力为

$$F_y = ma_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$= -m\omega^2 0.06 \cos(\omega t - \frac{\pi}{3}),$$

即 $F_y = 0.026 \cos(\pi t/3 - \pi/3) (\text{N})$.

用矢量表示就是 $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$, 其大小

为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2},$$

与 x 轴的夹角为

$$\theta = \arctan(F_y/F_x).$$

6.18 将频率为 384Hz 的标准音叉振动和一待测频率的音叉振动合成, 测得拍频为 3.0Hz, 在待测音叉的一端加上一小块物体, 则拍频将减小, 求待测音叉的固有频率.

[解答] 标准音叉的频率为

$$\nu_0 = 384 (\text{Hz}),$$

拍频为

$$\Delta \nu = 3.0 (\text{Hz}),$$

待测音叉的固有频率可能是

$$\nu_1 = \nu_0 - \Delta \nu = 381 (\text{Hz}),$$

也可能是

$$\nu_2 = \nu_0 + \Delta \nu = 387 (\text{Hz}).$$

在待测音叉上加一小块物体时, 相当于弹簧振子增加了质量, 由于 $\omega^2 = k/m$, 可知其频率将减小. 如果待测音叉的固有频率 ν_1 , 加一小块物体后, 其频率 ν'_1 将更低, 与标准音叉的拍频将增加; 实际上拍频是减小的, 所以待测音叉的固有频率 ν_2 , 即 387Hz.

6.19 示波器的电子束受到两个互相垂直的电场作用. 电子在两个方向上的位移分别为 $x = A \cos \omega t$ 和 $y = A \cos(\omega t + \varphi)$. 求在 $\varphi = 0$, $\varphi = 30^\circ$, 及 $\varphi = 90^\circ$ 这三种情况下, 电子在荧光屏上的轨迹方程.

[解答] 根据公式

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta \varphi = \sin^2 \Delta \varphi,$$

其中 $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$, 而 $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$.

(1) 当 $\Delta \varphi = \varphi = 0$ 时, 可得

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} - \frac{2xy}{A^2} = 0,$$

质点运动的轨道方程为

$$y = x,$$

轨迹是一条直线.

(2) 当 $\Delta \varphi = \varphi = 30^\circ$

时, 可得质点的轨道方程

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} - \frac{2xy}{A^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}$$

,

$$\text{即 } x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = A^2/4,$$

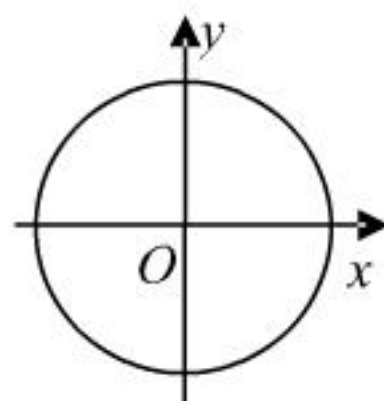
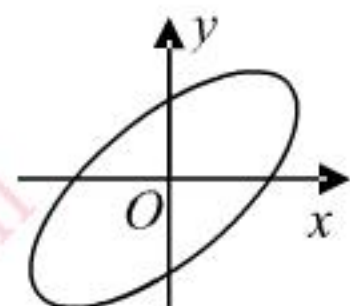
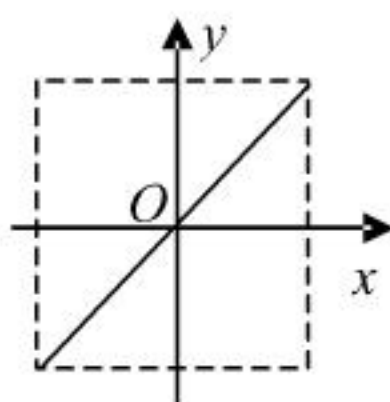
轨迹是倾斜的椭圆.

(3) 当 $\Delta \varphi = \varphi = 90^\circ$ 时, 可得

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 = A^2,$$

质点运动的轨迹为圆.



6.20 三个同方向、同频率的简谐振动为

$$x_1 = 0.08 \cos(314t + \frac{\pi}{6}),$$

$$x_2 = 0.08 \cos(314t + \frac{\pi}{2}),$$

$$x_3 = 0.08 \cos(314t + \frac{5\pi}{6}).$$

求: (1) 合振动的圆频率、振幅、初相及振动表达式;

(2) 合振动由初始位置运动到

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} A \text{ 所需最短时间 (A 为合振动振$$

幅).

[解答] 合振动的圆频率为

$$\omega = 314 = 100\pi (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}).$$

设 $A_0 = 0.08$, 根据公式得

$$A_x = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 + A_3 \cos \varphi_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} A_y &= A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 + A_3 \sin \varphi_3 \\ &= 2A_0 = 0.16(\text{m}), \end{aligned}$$

振幅为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 0.16(\text{m}),$$

初位相为

$$\varphi = \arctan(A_y/A_x) = \pi/2.$$

合振动的方程为

$$x = 0.16 \cos(100\pi t + \pi/2).$$

(2) 当 $x = \sqrt{2}A/2$ 时, 可得

$$\cos(100\pi t + \pi/2) = \sqrt{2}/2,$$

解得

$$100\pi t + \pi/2 = \pi/4 \text{ 或 } 7\pi/4.$$

由于 $t > 0$, 所以只能取第二个解, 可得所需最短时间为 $t = 0.0125\text{s}$.

第七章 波动

P207.

7. 1 已知一波的波动方程为

$$y = 5 \times 10^{-2} \sin(10\pi t - 0.6x) (\text{m}).$$

(1) 求波长、频率、波速及传播方向;

(2) 说明 $x = 0$ 时波动方程的意义, 并作图表示.

[解答] (1) 与标准波动方程比较:

$$y = A \cos(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}),$$

得 $2\pi/\lambda = 0.6$,

因此波长为

$$\lambda = 10.47(\text{m});$$

圆频率为

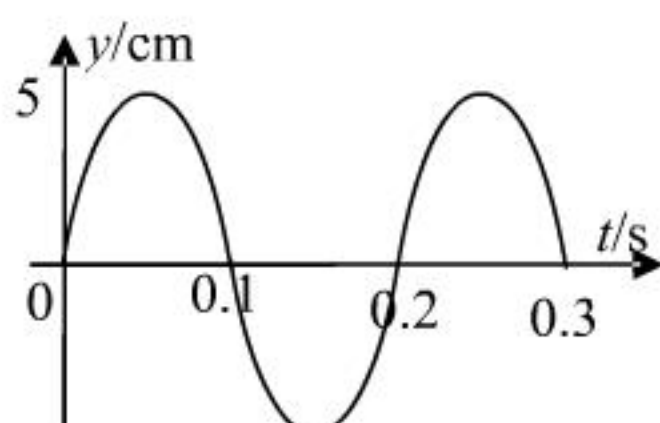
$$\omega = 10\pi,$$

频率为

$$\nu = \omega/2\pi = 5(\text{Hz});$$

波速为

$$u = \lambda/T = \lambda\nu = 52.36(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$



传播方向沿着 x 轴正方向.

(2) 当 $x = 0$ 时波动方程就成为该处质点的振动方程

$$y = 5 \times 10^{-2} \sin 10\pi t = 5 \times 10^{-2} \cos(10\pi t - \pi/2),$$

振动曲线如图.

7. 2 一平面简谐波在媒质中以速度为 $u = 0.2 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 沿 x 轴正向传播, 已知波线上 A 点 ($x_A = 0.05 \text{m}$) 的振动方程为

$$y_A = 0.03 \cos(4\pi t - \frac{\pi}{2}) (\text{m}). \text{ 试求:}$$

(1) 简谐波的波动方程;

(2) $x = -0.05 \text{m}$ 处质点 P 处的振动方程.

[解答] (1) 简谐波的波动方程为

$$y = A \cos[\omega(t - \frac{x - x_A}{u}) + \varphi];$$

$$\begin{aligned} \text{即 } y &= 0.03 \cos[4\pi(t - \frac{x - 0.05}{0.2}) - \frac{\pi}{2}] \\ &= 0.03 \cos[4\pi(t - 5x) + \pi/2]. \end{aligned}$$

(2) 在 $x = -0.05 \text{m}$ 处质点 P 点的振动方程为

$$\begin{aligned} y &= 0.03 \cos[4\pi t + \pi + \pi/2] \\ &= 0.03 \cos(4\pi t - \pi/2). \end{aligned}$$

7. 3 已知平面波波源的振动表达式为

$$y_0 = 6.0 \times 10^{-2} \sin \frac{\pi}{2} t (\text{m}). \text{ 求距波源 } 5 \text{m} \text{ 处质点的振动方程和该质点与波源的位相差. 设波速为 } 2 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

[解答] 振动方程为

$$\begin{aligned} y &= 6.0 \times 10^{-2} \sin \frac{\pi}{2} (t - \frac{x}{u}) \\ &= 0.06 \sin(\frac{\pi}{2} t - \frac{5\pi}{4}), \end{aligned}$$

位相差为

$$\Delta\varphi = 5\pi/4(\text{rad}).$$

7. 4 有一沿 x 轴正向传播的平面波, 其波速为 $u = 1 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 波长 $\lambda = 0.04 \text{m}$, 振幅 $A = 0.03 \text{m}$. 若以坐标原点恰在平衡位置而向负方向运动时作为开始时刻, 试求:

(1) 此平面波的波动方程;

(2) 与波源相距 $x = 0.01 \text{m}$ 处质点的振

动方程, 该点初相是多少?

[解答] (1) 设原点的振动方程为

$$y_0 = A \cos(\omega t + \varphi),$$

其中 $A = 0.03\text{m}$.

由于 $u = \lambda/T$, 所以质点振动的周期为

$$T = \lambda/u = 0.04(\text{s}),$$

圆频率为

$$\omega = 2\pi/T = 50\pi.$$

当 $t = 0$ 时, $y_0 = 0$, 因此

$$\cos\varphi = 0;$$

由于质点速度小于零, 所以

$$\varphi = \pi/2.$$

原点的振动方程为

$$y_0 = 0.03 \cos(50\pi t + \pi/2),$$

平面波的波动方程为

$$\begin{aligned} y &= 0.03 \cos[50\pi(t - \frac{x}{u}) + \frac{\pi}{2}] \\ &= 0.03 \cos[50\pi(t - x) + \pi/2]. \end{aligned}$$

(2) 与波源相距 $x = 0.01\text{m}$ 处质点的振动方程为

$$y = 0.03 \cos 50\pi t.$$

该点初相是

$$\varphi = 0.$$

7.5 一列简谐波沿 x 轴正向传播, 在 $t_1 = 0\text{s}$, $t_2 = 0.25\text{s}$ 时刻的波形如图所示. 试求:

(1) P 点的振动表达式;

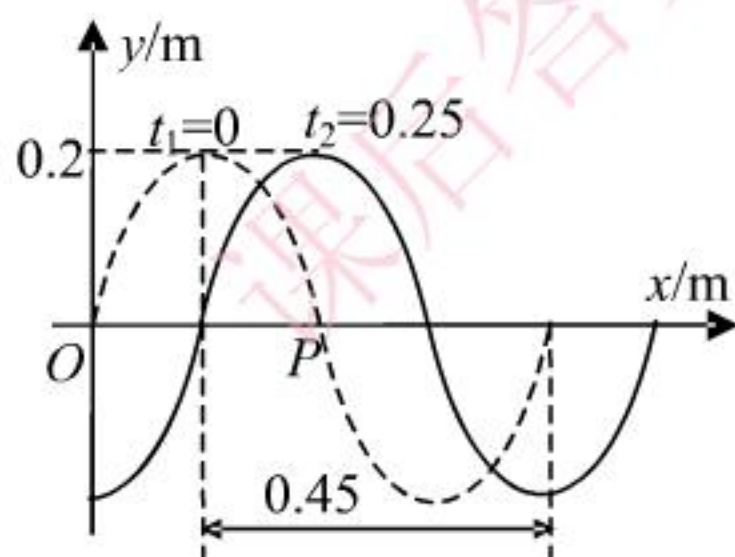


图 7.5

(2) 波动方程;

(3) 画出 O 点的振动曲线.

[解答] (1) 设 P 点的振动方程为

$$y_P = A \cos(\omega t + \varphi),$$

其中 $A = 0.2\text{m}$.

在 $\Delta t = 0.25\text{s}$ 内, 波向右传播了

$$\Delta x = 0.45/3 = 0.15(\text{m}),$$

所以波速为

$$u = \Delta x/\Delta t = 0.6(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}).$$

波长为

$$\lambda = 4\Delta x = 0.6(\text{m}),$$

周期为

$$T = \lambda/u = 1(\text{s}),$$

圆频率为

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi.$$

当 $t = 0$ 时, $y_P = 0$, 因此

$$\cos\varphi = 0;$$

由于波沿 x 轴正向传播, 所以 P 点在此时向上运动, 速度大于零, 所以

$$\varphi = -\pi/2.$$

P 点的振动表达式为

$$y_P = 0.2 \cos(2\pi t - \pi/2).$$

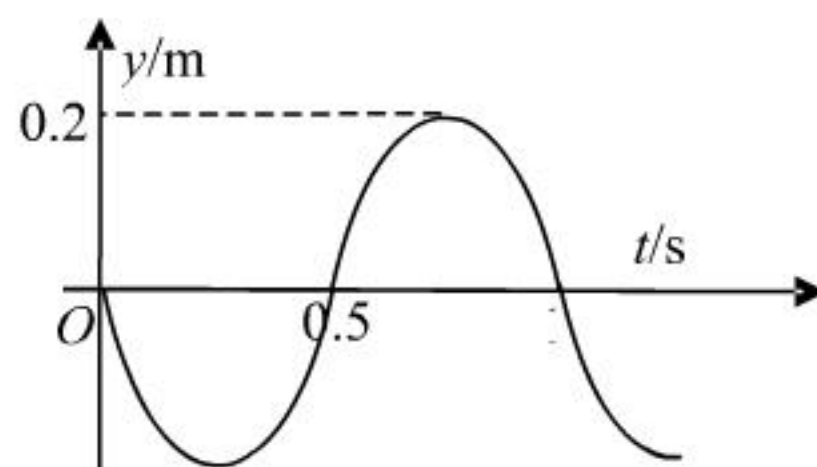
(2) P 点的位置是 $x_P = 0.3\text{m}$, 所以波动方程为

$$\begin{aligned} y &= 0.2 \cos[2\pi(t - \frac{x - x_P}{u}) - \frac{\pi}{2}] \\ &= 0.2 \cos(2\pi t - \frac{10\pi}{3}x + \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

(3) 在 $x = 0$ 处的振动方程为

$$y_0 = 0.2 \cos(2\pi t + \pi/2),$$

曲线如图所示.



7.6 如图所示为一列沿 x 负向传播的平面谐波在 $t = T/4$ 时的波形图, 振幅 A 、波长 λ 以及周期 T 均已知.

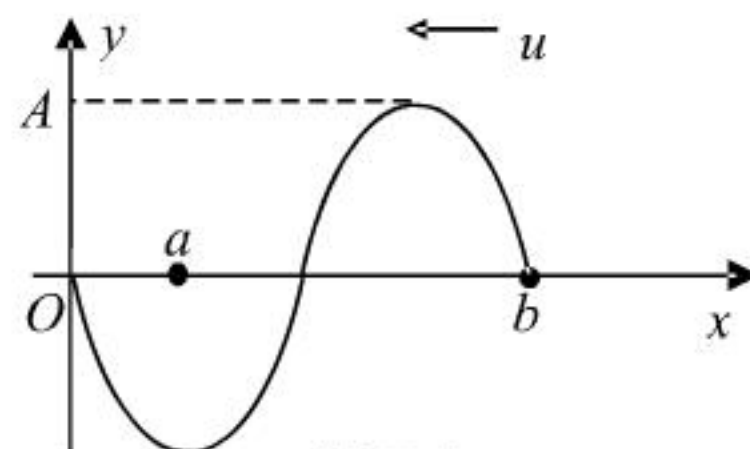


图 7.6

(1) 写出该波的波动方程;

(2) 画出 $x = \lambda/2$ 处质点的振动曲线;

(3) 图中波线上 a 和 b 两点的位相差 $\varphi_a - \varphi_b$ 为多少?

[解答] (1) 设此波的波动方程为

$$y = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \varphi],$$

当 $t = T/4$ 时的波形方程为

$$\begin{aligned} y &= A \cos(2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi + \frac{\pi}{2}) \\ &= -A \sin(2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi). \end{aligned}$$

在 $x = 0$ 处 $y = 0$, 因此得

$$\sin \varphi = 0,$$

解得

$$\varphi = 0, \pi.$$

而在 $x = \lambda/2$ 处 $y = -A$, 所以

$$\varphi = 0.$$

因此波动方程为

$$y = A \cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}).$$

(2) 在 $x = \lambda/2$ 处质点的振动方程为

$$y = A \cos(2\pi \frac{t}{T} + \pi) = -A \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

曲线如图所示.

(3) $x_a = \lambda/4$ 处的质点的振动方程为

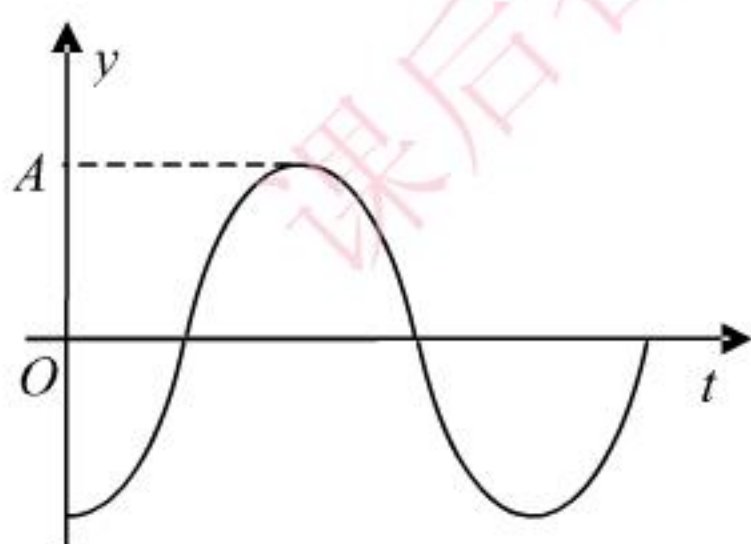
$$y_a = A \cos(2\pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{2});$$

$x_b = \lambda$ 处的质点的振动方程为

$$y_b = A \cos(2\pi \frac{t}{T} + 2\pi).$$

波线上 a 和 b 两点的位相差

$$\varphi_a - \varphi_b = -3\pi/2.$$



7.7 已知波的波动方程为

$$y = A \cos \pi(4t - 2x) \text{ (SI)}.$$

(1) 写出 $t = 4.2\text{s}$ 时各波峰位置的坐标表示式, 并计算此时离原点最近的波峰的位置, 该波峰何时通过原点?

(2) 画出 $t = 4.2\text{s}$ 时的波形曲线.

[解答] 波的波动方程可化为

$$y = A \cos 2\pi(2t - x),$$

与标准方程比较

$$y = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi],$$

可知: 周期为 $T = 0.5\text{s}$, 波长 $\lambda = 1\text{m}$. 波速为 $u = \lambda/T = 2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

(1) 当 $t = 4.2\text{s}$ 时的波形方程为

$$\begin{aligned} y &= A \cos(2\pi x - 16.8\pi) \\ &= A \cos(2\pi x - 0.8\pi). \end{aligned}$$

令 $y = A$, 则

$$\cos(2\pi x - 0.8\pi) = 1,$$

因此 $2\pi x - 0.8\pi = 2k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 各波峰的位置为

$$x = k + 0.4, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $k = 0$ 时的波峰离原点最近, 最近为

$$x = 0.4(\text{m}).$$

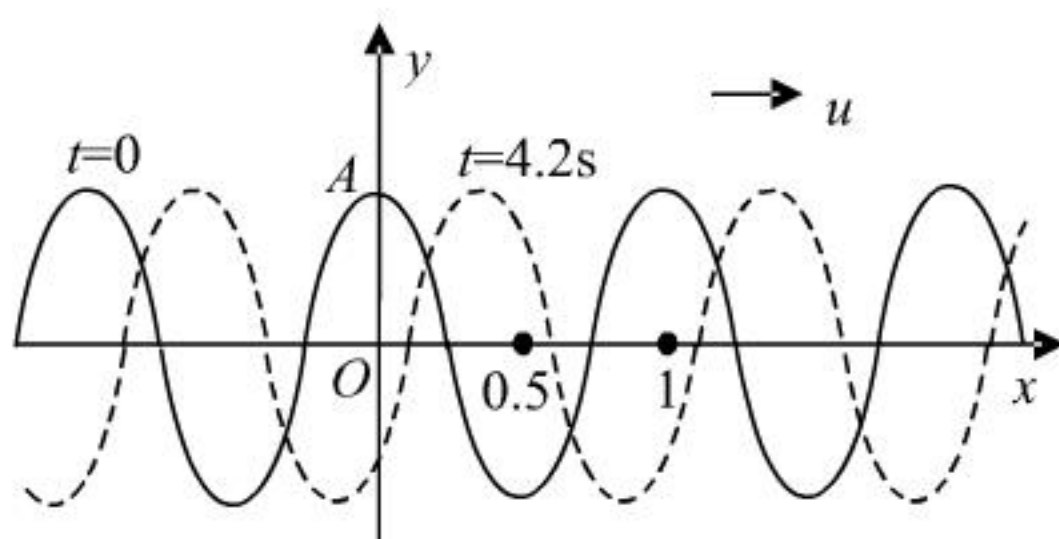
通过原点时经过的时间为

$$\Delta t = \Delta x/u = (0 - x)/u = -0.2(\text{s}),$$

即: 该波峰 0.2s 之前通过了原点.

(2) $t = 0$ 时刻的波形曲线如实线所示. 经过 $t = 4\text{s}$ 时, 也就是经过 8 个周期, 波形曲线是重合的; 再经 $\Delta t = 0.2\text{s}$, 波形向右移动 $\Delta x = u\Delta t = 0.4\text{m}$, 因此 $t = 4.2\text{s}$ 时的波形曲线如虚线所示.

[注意] 各波峰的位置也可以由



$$\cos(2\pi x - 16.8\pi) = 1$$

解得, 结果为

$$x = k + 8.4, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

取同一整数 k 值, 波峰的位置不同. 当 $k = -8$ 时的波峰离原点最近, 最近为 $x = 0.4\text{m}$.

7.8 一简谐波沿 x 轴正向传播, 波长 $\lambda = 4\text{m}$, 周期 $T = 4\text{s}$, 已知 $x = 0$ 处的质点的振动曲线如图所示.

(1) 写出 $x = 0$ 处质点的振动方程;

(2) 写出波的表达式;

(3) 画出 $t = 1\text{s}$ 时刻的波形曲线.

[解答] 波速为 $u = \lambda/T = 1(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$.

(1) 设 $x=0$ 处的质点的振动方程为

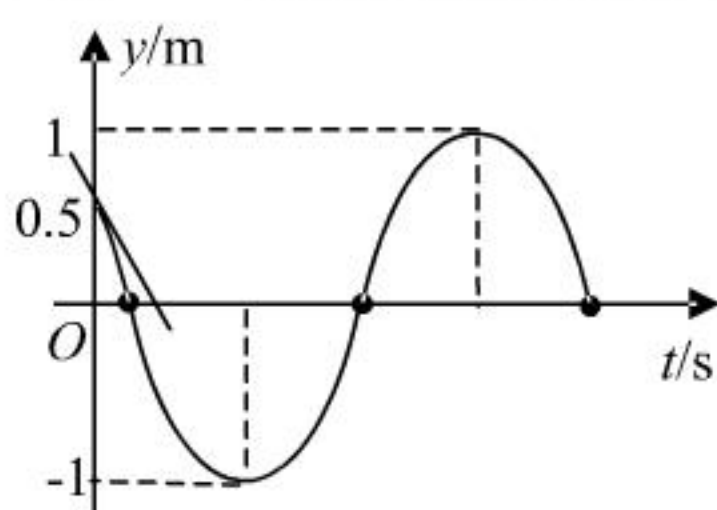


图 7.8

$$y = A \cos(\omega t + \varphi),$$

其中 $A = 1\text{m}$, $\omega = 2\pi/T = \pi/2$.

当 $t=0$ 时, $y=0.5$, 因此

$$\cos\varphi = 0.5,$$

$$\varphi = \pm\pi/3.$$

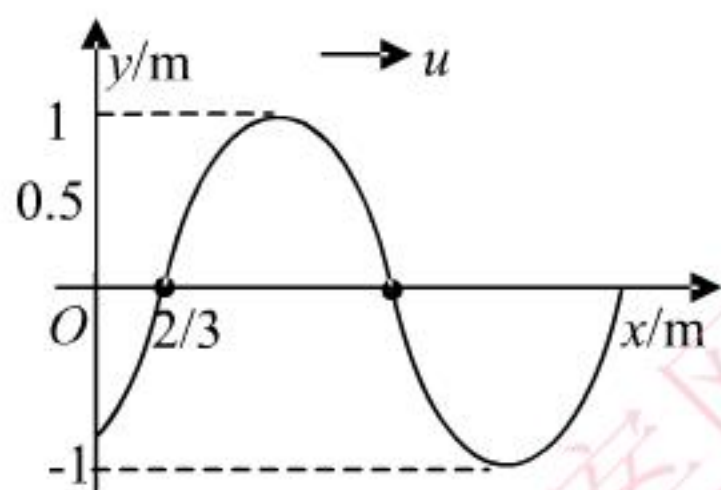
在 0 时刻的曲线上作一切线, 可知该时刻的速度小于零, 因此

$$\varphi = \pi/3.$$

振动方程为

$$y = \cos(\pi t/2 + \pi/3).$$

(2) 波的表达式为



$$\begin{aligned} y &= A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi] \\ &= \cos[\frac{\pi}{2}(t - x) + \frac{\pi}{3}]. \end{aligned}$$

(3) $t=1\text{s}$ 时刻的波形方程为

$$y = \cos(\frac{\pi}{2}x - \frac{5\pi}{6}),$$

波形曲线如图所示.

7.9 在波的传播路程上有 A 和 B 两点, 都做简谐振动, B 点的位相比 A 点落后 $\pi/6$, 已知 A 和 B 之间的距离为 2.0cm , 振动周期为 2.0s . 求波速 u 和波长 λ .

[解答] 设波动方程为

$$y = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi],$$

那么 A 和 B 两点的振动方程分别为

$$y_A = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}) + \varphi],$$

$$y_B = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}) + \varphi].$$

两点之间的位相差为

$$-2\pi\frac{x_B}{\lambda} - (-2\pi\frac{x_A}{\lambda}) = -\frac{\pi}{6},$$

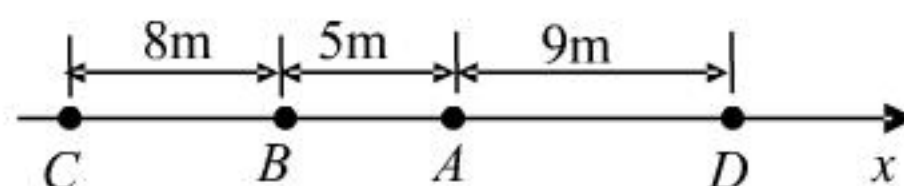


图 7.10

由于 $x_B - x_A = 0.02\text{m}$, 所以波长为

$$\lambda = 0.24(\text{m}).$$

波速为

$$u = \lambda/T = 0.12(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}).$$

7.10 一平面波在介质中以速度 $u = 20\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 沿 x 轴负方向传播. 已知在传播路径上的某点 A 的振动方程为 $y = 3\cos 4\pi t$.

(1) 如以 A 点为坐标原点, 写出波动方程;

(2) 如以距 A 点 5m 处的 B 点为坐标原点, 写出波动方程;

(3) 写出传播方向上 B, C, D 点的振动方程.

[解答] (1) 以 A 点为坐标原点, 波动方程为

$$y = 3 \cos 4\pi(t + \frac{x}{u}) = 3 \cos(4\pi t + \frac{\pi x}{5}).$$

(2) 以 B 点为坐标原点, 波动方程为

$$\begin{aligned} y &= 3 \cos 4\pi(t + \frac{x - x_A}{u}) \\ &= 3 \cos(4\pi t + \frac{\pi x}{5} - \pi). \end{aligned}$$

(3) 以 A 点为坐标原点, 则 $x_B = -5\text{m}$, $x_C = -13\text{m}$, $x_D = 9\text{m}$, 各点的振动方程为

$$y_B = 3 \cos 4\pi(t + \frac{x_B}{u}) = 3 \cos(4\pi t - \pi),$$

$$y_C = 3 \cos 4\pi(t + \frac{x_C}{u}) = 3 \cos(4\pi t - \frac{3\pi}{5}),$$

$$y_D = 3 \cos 4\pi(t + \frac{x_D}{u}) = 3 \cos(4\pi t + \frac{9\pi}{5}).$$

[注意] 以 B 点为坐标原点, 求出各点坐标, 也能求出各点的振动方程.

7. 11 一弹性波在媒质中传播的速度 $u = 1 \times 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 振幅 $A = 1.0 \times 10^{-4} \text{m}$, 频率 $\nu = 10^3 \text{Hz}$. 若该媒质的密度为 $800 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 求:

(1) 该波的平均能流密度;

(2) 1 分钟内垂直通过面积 $S = 4 \times 10^{-4} \text{m}^2$ 的总能量.

[解答] (1) 质点的圆频率为

$$\omega = 2\pi\nu = 6.283 \times 10^3 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}),$$

波的平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 = 158 (\text{J} \cdot \text{m}^{-3}),$$

平均能流密度为

$$I = \bar{w}u = 1.58 \times 10^5 (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}).$$

(2) 1 分钟内垂直通过面积 $S = 4 \times 10^{-4} \text{m}^2$ 的总能量为

$$E = ItS = 3.79 \times 10^3 (\text{J}).$$

7. 12 一平面简谐声波在空气中传播, 波速 $u = 340 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 频率为 500Hz . 到达人耳时, 振幅 $A = 1 \times 10^{-4} \text{cm}$, 试求人耳接收到声波的平均能量密度和声强? 此时声强相当于多少分贝? 已知空气密度 $\rho = 1.29 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

[解答] 质点的圆频率为

$$\omega = 2\pi\nu = 3.142 \times 10^3 (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}),$$

声波的平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 = 6.37 \times 10^{-6} (\text{J} \cdot \text{m}^{-3}),$$

平均能流密度为

$$I = \bar{w}u = 2.16 \times 10^{-3} (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}),$$

标准声强为

$$I_0 = 1 \times 10^{-12} (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}),$$

此声强的分贝数为

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 93.4 (\text{dB}).$$

7. 13 设空气中声速为 $330 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. 一列火车以 $30 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度行驶, 机车上汽笛的频率为 600Hz . 一静止的观察者在机车的正前方和机车驶过其身后所听到的频率分别是多少? 如果观察者以速度 $10 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 与这列火车相向运动, 在上述两个位置, 他听到的

声音频率分别是多少?

[解答] 取声速的方向为正, 多普勒频率公式可统一表示为

$$\nu_B = \frac{u - u_B}{u - u_S} \nu_S,$$

其中 ν_S 表示声源的频率, u 表示声速, u_B 表示观察者的速度, u_S 表示声源的速度, ν_B 表示观察者接收的频率.

(1) 当观察者静止时, $u_B = 0$, 火车驶来时其速度方向与声速方向相同, $u_S = 30 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 观察者听到的频率为

$$\nu_B = \frac{u}{u - u_S} \nu_S = \frac{330}{330 - 30} 600 = 660 (\text{Hz}).$$

火车驶去时其速度方向与声速方向相反, $u_S = -30 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 观察者听到的频率为

$$\nu_B = \frac{u}{u - u_S} \nu_S = \frac{330}{330 + 30} 600 = 550 (\text{Hz}).$$

(2) 当观察者与火车靠近时, 观察者的速度方向与声速相反, $u_B = -10 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; 火车速度方向与声速方向相同, $u_S = 30 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 观察者听到的频率为

$$\nu_B = \frac{u - u_B}{u - u_S} \nu_S = \frac{330 + 10}{330 - 30} 600 = 680 (\text{Hz}).$$

当观察者与火车远离时, 观察者的速度方向与声速相同, $u_B = 10 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; 火车速度方向与声速方向相反, $u_S = -30 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, 观察者听到的频率为

$$\nu_B = \frac{u - u_B}{u - u_S} \nu_S = \frac{330 - 10}{330 + 30} 600 = 533 (\text{Hz}).$$

[注意] 这类题目涉及声速、声源的速度和观察者的速度, 规定方向之后将公式统一起来, 很容易判别速度方向, 给计算带来了方便.

7. 14. 一声源的频率为 1080Hz , 相对地面以 $30 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 速率向右运动. 在其右方有一反射面相对地面以 $65 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率向左运动. 设空气中声速为 $331 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. 求:

(1) 声源在空气中发出的声音的波长;

(2) 反射回的声音的频率和波长.

[解答] (1) 声音在声源垂直方向的波长为

$$\lambda_0 = uT_0 = u/v_0 = 331/1080 = 0.306(\text{m});$$

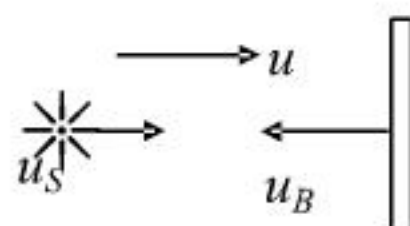
在声源前方的波长为

$$\lambda_1 = \lambda_0 - u_s T_0 = uT_0 - u_s T_0 = (u - u_s)/v_0 = (331-30)/1080 = 0.2787(\text{m});$$

在声源后方的波长为

$$\lambda_2 = \lambda_0 + u_s T_0 = uT_0 + u_s T_0 = (u + u_s)/v_0 = (331+30)/1080 = 0.3343(\text{m}).$$

(2) 反射面接收到



的频率为

$$\nu_1 = \frac{u + u_B}{u - u_s} \nu_0 = \frac{331 + 65}{331 - 30} \times 1080$$

$$= 1421(\text{Hz}).$$

将反射面作为波源, 其频率为 ν_1 , 反射声音的频率为

$$\nu_1' = \frac{u}{u - u_B} \nu_1 = \frac{331}{331 - 65} \times 1421$$

$$= 1768(\text{Hz}).$$

反射声音的波长为

$$\lambda_1' = \frac{u}{\nu_1'} - \frac{u_B}{\nu_1} = \frac{u - u_B}{\nu_1} = \frac{331 - 65}{1421}$$

$$= 0.1872(\text{m}).$$

或者 $\lambda_1' = \frac{u}{\nu_1'} = \frac{331}{1768} = 0.1872(\text{m}).$

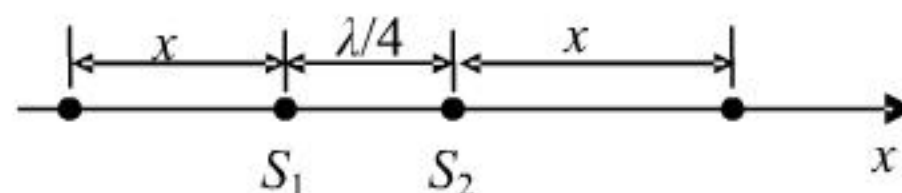
[注意]如果用下式计算波长

$$\lambda_1' = \lambda_1 - \frac{u_B}{\nu_1} = 0.2787 - \frac{65}{1768} = 0.2330(\text{m}),$$

结果就是错误的. 当反射面不动时, 作为波源发出的波长为 $u/\nu_1 = 0.2330\text{m}$, 而不是入射的波长 λ_1 .

P243.

8. 1 S_1 与 S_2 为两相干波源, 相距 $1/4$ 个波长, S_1 比 S_2 的位相超前 $\pi/2$. 问 S_1 、 S_2 连线上在 S_1 外侧各点的合成波的振幅如何? 在 S_2 外侧各点的振幅如何?



[解答]如图所示, 设 S_1 在其左侧产生的波的波动方程为

$$y_1 = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \varphi],$$

那么 S_2 在 S_1 左侧产生的波的波动方程为

$$y_2 = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x - \lambda/4}{\lambda}) + \varphi - \frac{\pi}{2}]$$

$$= A \cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \varphi - \pi],$$

由于两波源在任意点 x 产生振动反相, 所以合振幅为零.

S_1 在 S_2 右侧产生的波的波动方程为

$$y_1 = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi],$$

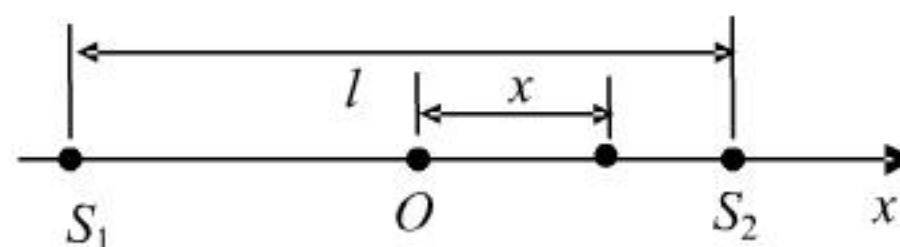
那么 S_2 在其右侧产生的波的波动方程为

$$y_2 = A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x - \lambda/4}{\lambda}) + \varphi - \frac{\pi}{2}]$$

$$= A \cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi],$$

由于两波源在任意点 x 产生振动同相, 所以合振幅为单一振动的两倍.

8. 2 两相干波源 S_1 与 S_2 相距 5m , 其振幅相等, 频率都是 100Hz , 位相差为 π ; 波在媒质中的传播速度为 $400\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, 试以 S_1S_2 连线为坐标轴 x , 以 S_1S_2 连线中点为原点, 求 S_1S_2 间因干涉而静止的各点的坐标.



[解答]如图所示, 设 S_1 在其右侧产生的波的波动方程为

$$y_1 = A \cos[2\pi\nu(t - \frac{x + l/2}{u}) + \varphi]$$

第八章 波的干涉

$$= A \cos(2\pi vt - \frac{\pi}{2}x + \varphi - \frac{5\pi}{4}),$$

那么 S_2 在其左侧产生的波的波动方程为

$$y_2 = A \cos[2\pi v(t + \frac{x-l/2}{u}) + \varphi + \pi]$$

$$= A \cos(2\pi vt + \frac{\pi}{2}x + \varphi - \frac{\pi}{4}).$$

两个振动的相差为

$$\Delta\varphi = \pi x + \pi,$$

当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ 时, 质点由于两波干涉而静止, 静止点为

$$x = 2k,$$

k 为整数, 但必须使 x 的值在 $-l/2$ 到 $l/2$ 之间, 即 -2.5 到 2.5 之间.

当 $k = -1, 0$ 和 1 时, 可得静止点的坐标为

$$x = -2, 0 \text{ 和 } 2(\text{m}).$$

8.3 设入射波的表达式为

$$y_1 = A \cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}),$$

在 $x=0$ 处发生反射, 反射点为一自由端, 求:

(1) 反射波的表达式;

(2) 合成驻波的表达式.

[解答] (1) 由于反射点为自由端, 所以没有半波损失, 反射波的波动方程为

$$y_2 = A \cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}).$$

(2) 合成波为 $y = y_1 + y_2$, 将三角函数展开得

$$y = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

这是驻波的方程.

8.4 两波在一很长的弦线上传播, 设其表达式为:

$$y_1 = 6.0 \cos \frac{\pi}{2} (0.02x - 8.0t),$$

$$y_2 = 6.0 \cos \frac{\pi}{2} (0.02x + 8.0t),$$

用厘米、克、秒 (cm, g, s) 制单位, 求:

(1) 各波的频率, 波长、波速;

(2) 节点的位置;

(3) 在哪些位置上, 振幅最大?

[解答] (1) 两波可表示为

$$y_1 = 6.0 \cos 2\pi(\frac{t}{0.5} - \frac{x}{200}),$$

$$y_2 = 6.0 \cos 2\pi(\frac{t}{0.5} + \frac{x}{200}),$$

可知它们的周期都为

$$T = 0.5(\text{s}),$$

频率为

$$\nu = 1/T = 2(\text{Hz});$$

波长为

$$\lambda = 200(\text{cm});$$

波速为

$$u = \lambda/T = 400(\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}).$$

(2) 位相差

$$\Delta\varphi = \pi x/50,$$

当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ 时, 可得节点的位置

$$x = 50(2k+1)(\text{cm}), (k=0, 1, 2, \dots).$$

(3) 当 $\Delta\varphi = 2k\pi$ 时, 可得波腹的位置

$$x = 100k(\text{cm}), (k=0, 1, 2, \dots).$$

8.5 在空气中做杨氏双缝干涉实验, 缝间距为 $d = 0.6\text{mm}$, 观察屏至双缝间距为 $D = 2.5\text{m}$, 今测得第 3 级明纹与零级明纹对双缝中心的张角为 $2.724 \times 10^{-3}\text{rad}$, 求入射光波长及相邻明纹间距.

[解答] 根据双缝干涉公式 $\sin\theta = \delta/d$, 其中 $\sin\theta \approx \theta$, $d = k\lambda = 3\lambda$, 可得波长为

$$\lambda = d\sin\theta/k = 5.448 \times 10^{-4}(\text{mm}) = 544.8(\text{nm}).$$

再用公式 $\sin\theta = \lambda/d = \Delta x/D$, 得相邻明纹的间距为

$$\Delta x = \lambda D/d = 2.27(\text{mm}).$$

[注意] 当 θ 是第一级明纹的张角时, 结合干涉图形, 用公式 $\sin\theta = \lambda/d = \Delta x/D$ 很容易记忆和推导条纹间隔公式.

8.6 如图所示, 平行单色光垂直照射到某薄膜上, 经上下两表面反射的两束光发生干涉, 设薄膜厚度为 e , $n_1 > n_2$, $n_2 < n_3$, 入射光在折射率为 n_1 的媒质中波长为 λ , 试计算两反射光在上表面相遇时的位相差.

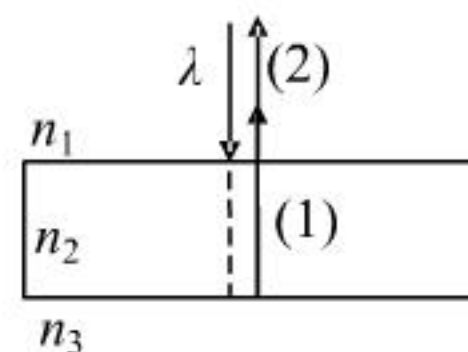


图 8.6

[解答]光在真空中的波长为

$$\lambda_0 = n_1 \lambda.$$

由于 $n_1 > n_2$, 所以光从薄膜上表面反射时没有半波损失; 由于 $n_1 > n_2$, 所以光从薄膜下表面反射时会产生半波损失, 所以两束光的光程差为

$$\delta = 2n_2 e + \lambda_0 / 2,$$

位相差为

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0} = 2\pi \frac{2n_2 e + n_1 \lambda / 2}{n_1 \lambda}.$$

8. 7 用某透明介质盖在双缝干涉装置中的一条缝, 此时, 屏上零级明纹移至原来的第 5 条明纹处, 若入射光波长为 589.3nm, 介质折射率 $n = 1.58$, 求此透明介质膜的厚度.

[解答]加上介质膜之后, 就有附加的光程差

$$\delta = (n - 1)e,$$

当 $\delta = 5\lambda$ 时, 膜的厚度为

$$e = 5\lambda / (n - 1) = 5080(\text{nm}) = 5.08(\mu\text{m}).$$

8. 8 为测量在硅表面的保护层 SiO_2 的厚度, 可将 SiO_2 的表面磨成劈尖状, 如图所示, 现用波长 $\lambda = 644.0\text{nm}$ 的镉灯垂直照射, 一共观察到 8 根明纹, 求 SiO_2 的厚度.

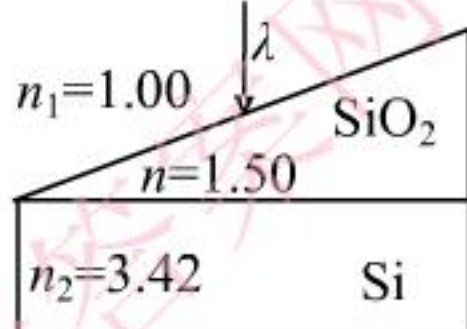


图 8.8

[解答]由于 SiO_2 的折射率比空气的大, 比 Si 的小, 所以半波损失抵消了, 光程差为

$$\delta = 2ne.$$

第一条明纹在劈尖的棱上, 8 根明纹只有 7 个间隔, 所以光程差为

$$\delta = 7\lambda.$$

SiO_2 的厚度为

$$e = 7\lambda / 2n = 1503(\text{nm}) = 1.503(\mu\text{m}).$$

8. 9 折射率为 1.50 的两块标准平板玻璃间形成一个劈尖, 用波长 $\lambda = 5004\text{nm}$ 的单色光垂直入射, 产生等厚干涉条纹. 当劈尖

内充满 $n = 1.40$ 的液体时, 相邻明纹间距比劈尖内是空气时的间距缩小 $\Delta l = 0.1\text{mm}$, 求劈尖角 θ 应是多少?

[解答]空气的折射率用 n_0 表示, 相邻明纹之间的空气的厚度差为

$$\Delta e_0 = \lambda / 2n_0;$$

明纹之间的距离用 ΔL_0 表示, 则

$$\Delta e_0 = \theta \Delta L_0,$$

因此

$$\lambda / 2n_0 = \theta \Delta L_0.$$

当劈尖内充满液体时, 相邻明纹之间的液体的厚度差为

$$\Delta e = \lambda / 2n;$$

明纹之间的距离用 ΔL 表示, 则

$$\Delta e = \theta \Delta L,$$

因此

$$\lambda / 2n = \theta \Delta L.$$

由题意得 $\Delta l = \Delta L_0 - \Delta L$, 所以劈尖角为

$$\theta = \frac{\lambda}{2\Delta l} \left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n} \right) = \frac{\lambda(n - n_0)}{2\Delta l n n_0}$$

$$= 7.14 \times 10^{-4}(\text{rad}).$$

8. 10 某平凹柱面镜和平面镜之间构成一空气隙, 用单色光垂直照射, 可得何种形状的干涉条纹, 条纹级次高低的大致分布如何?

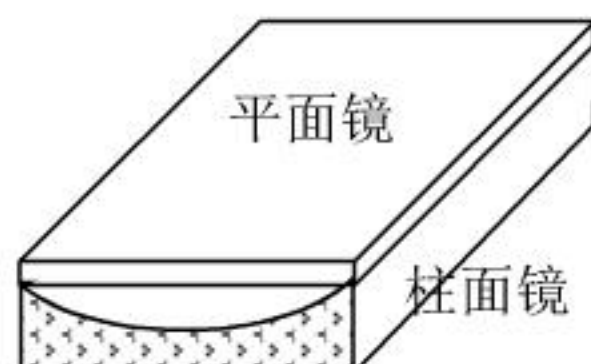


图 8.10

[解答]这种情况可得平行的干涉条纹, 两边条纹级次低, 越往中间条纹级次越高, 空气厚度增加越慢, 条纹越来越稀.

8. 11 设牛顿环实验中平凸透镜和平板玻璃间有一小间隙 e_0 , 充以折射率 n 为 1.33 的某种透明液体, 设平凸透镜曲率半径为 R , 用波长为 λ_0 的单色光垂直照射, 求第 k 级明纹的半径.

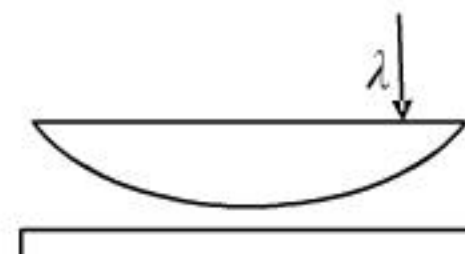
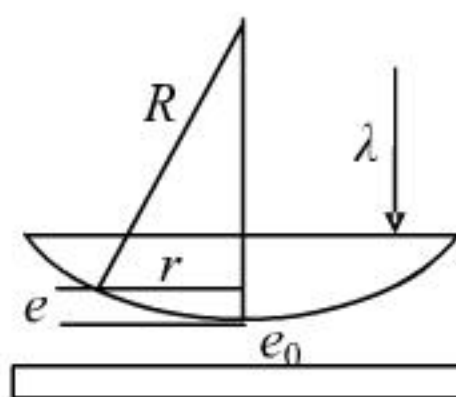


图 8.11

[解答]第 k 级明纹的半径用 r_k 表示, 则

$$r_k^2 = R^2 - (R - e)^2 = 2eR.$$



光程差为

$$\delta = 2n(e + e_0) + \lambda_0/2 \\ = k\lambda_0,$$

解得

$$2e = (k - \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0}{n} - 2e_0,$$

半径为

$$r_k = \sqrt{[(k - \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0}{n} - 2e_0]R}.$$

8.12 白光照射到折射率为 1.33 的肥皂上（肥皂膜置于空气中，若从正面垂直方向观察，皂膜呈黄色（波长 $\lambda = 590.5\text{nm}$ ），问膜的最小厚度是多少？

[解答]等倾干涉光程差为

$$\delta = 2nd\cos\gamma + \delta',$$

从下面垂直方向观察时，入射角和折射角都为零，即 $\gamma = 0$ ；由于肥皂膜上下两面都是空气，所以附加光程差

$$\delta' = \lambda/2.$$

对于黄色的明条纹，有

$$\delta = k\lambda,$$

所以膜的厚度为

$$d = \frac{(k - 1/2)\lambda}{2n}.$$

当 $k = 1$ 时得最小厚度

$$d = 111(\text{nm}).$$

8.13 光源发出波长可继续变化的单色光，垂直射入玻璃板的油膜上（油膜 $n = 1.30$ ），观察到 $\lambda_1 = 400\text{nm}$ 和 $\lambda_2 = 560\text{nm}$ 的光在反射中消失，中间无其他波长的光消失，求油膜的厚度。

[解答]等倾干涉光程差为

$$\delta = 2nd\cos\gamma + \delta',$$

其中 $\gamma = 0$ ，由于油膜的折射率比空气的大、比玻璃的小，所以附加光程差 $\delta' = 0$ 。

对于暗条纹，有

$$\delta = (2k + 1)\lambda/2,$$

即 $2nd = (2k_1 + 1)\lambda_1/2 = (2k_2 + 1)\lambda_2/2$ 。

由于 $\lambda_2 > \lambda_1$ ，所以 $k_2 < k_1$ ，又因为两暗纹中间没有其他波长的光消失，因此

$$k_2 = k_1 - 1.$$

光程差方程化为两个

$$2nd/\lambda_1 = k_1 + 1/2, \quad 2nd/\lambda_2 = k_2 + 1/2,$$

左式减右式得

$$2nd/\lambda_1 - 2nd/\lambda_2 = 1,$$

解得

$$d = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2n(\lambda_2 - \lambda_1)} = 535.8(\text{nm}).$$

8.14 牛顿环实验装置和各部分折射率如图所示，试大致画出反射光干涉条纹的分布。

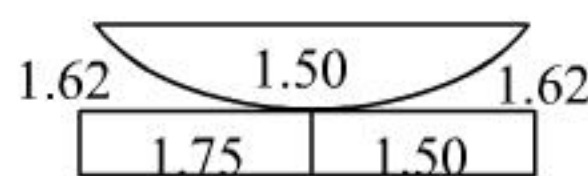


图 8.14

[解答]右边介质的折射率比上下两种介质的折射率大，垂直入射的光会有半波损失，中间出现暗环；左边介质的折射率介于上下两种介质的折射率之间，没有半波损失，中间出现明环。因此左右两边的明环和暗是交错的，越往外，条纹级数越高，条纹也越密。



8.15 用迈克尔逊干涉仪可测量长度的微小变化，设入射光波长为 534.9nm ，等倾干涉条纹中心冒出了 1204 条条纹，求反射镜移动的微小距离。

[解答]反射镜移动的距离为

$$\Delta d = m\lambda/2 = 3.22 \times 10^5 \text{nm} = 0.322(\text{mm}).$$

8.16 在迈克尔逊干涉仪一支光路中，放入一折射率为 n 的透明膜片，今测得两束光光程差改变为一个波长 λ ，求介质膜的厚度。

[解答]因为 $\delta = 2(n - 1)d = \lambda$ ，所以

$$d = \lambda/2(n - 1).$$

第九章 波的衍射

P283.

9.1 在某个单缝衍射实验中,光源发出的光含有两种波长 λ_1 和 λ_2 ,并垂直入射于单缝上.假如 λ_1 的第一级衍射极小与 λ_2 的第三级衍射极小相重合,试问:

(1) 这两种波长之间有什么关系;

(2) 在这两种波长的光所形成的衍射图样中,是否还有其他极小相重合?

[解答] (1) 单缝衍射的暗条纹形成条件是

$$\delta = a \sin \theta = \pm k' \lambda, (k' = 1, 2, 3, \dots),$$

当条纹重合时,它们对应同一衍射角,因此

$$\lambda_1 = 3\lambda_2.$$

(2) 当其他极小重合时,必有

$$k_1' \lambda_1 = k_2' \lambda_2,$$

所以 $k_2' = 3k_1'$.

9.2 单缝的宽度 $a = 0.40\text{mm}$,以波长 $\lambda = 589\text{nm}$ 的单色光垂直照射,设透镜的焦距 $f = 1.0\text{m}$. 求:

(1) 第一暗纹距中心的距离;

(2) 第二明纹的宽度;

(3) 如单色光以入射角 $i = 30^\circ$ 斜射到单缝上,则上述结果有何变动?

[解答] (1) 单缝衍射的暗条纹分布规律是

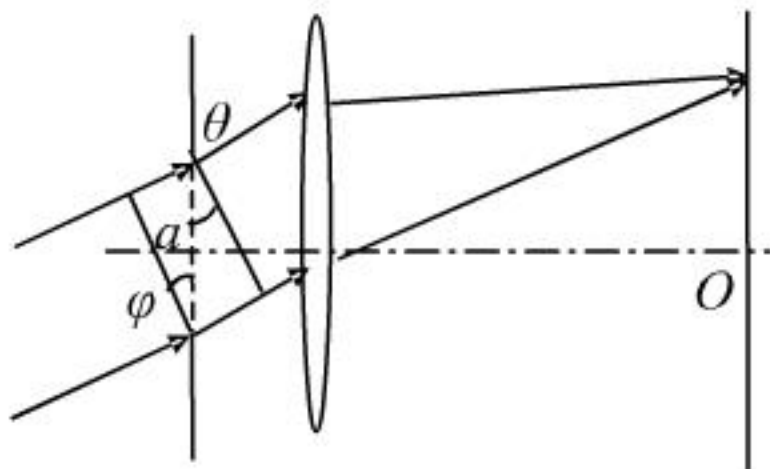
$$y = \pm \frac{f}{a} k' \lambda, (k' = 1, 2, 3, \dots),$$

当 $k' = 1$ 时,

$$y_1 = f\lambda/a = 1.4725(\text{mm}).$$

(2) 除中央明纹外,第二级明纹和其他明纹的宽度为

$$\Delta y = y_{k'-1} - y_{k'} = f\lambda/a = 1.4725(\text{mm}).$$



(3) 当入射光斜射时,光程差为 $\delta = a \sin \theta - a \sin \phi = \pm k' \lambda, (k' = 1, 2, 3, \dots)$.

当 $k' = 1$ 时,可得

$$\sin \theta_1 = \sin \phi \pm \lambda/a = 0.5015 \text{ 和 } 0.4985,$$

$$\cos \theta_1 = (1 - \sin^2 \theta_1)^{1/2}$$

$$= 0.8652 \text{ 和 } 0.8669.$$

两条一级暗纹到中心的距离分别为

$$y_1 = f \tan \theta_1 = 579.6(\text{mm}) \text{ 和 } 575.1(\text{mm}).$$

当 $k' = 2$ 时,可得

$$\sin \theta_2 = a \sin \phi \pm 2\lambda/a = 0.5029 \text{ 和 } 0.4971,$$

$$\cos \theta_2 = (1 - \sin^2 \theta_2)^{1/2}$$

$$= 0.8642 \text{ 和 } 0.8677.$$

两条二级暗纹距中心的距离分别为

$$y_2 = f \tan \theta_2 = 581.9(\text{mm}) \text{ 和 } 572.8(\text{mm}).$$

第二明纹的宽度都为

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 2.3(\text{mm}),$$

比原来的条纹加宽了.

9.3 一单色平行光垂直入射于一单缝,若其第三级衍射明纹位置正好和波长为 600nm 的单色光垂直入射该缝时的第二级衍射明纹位置一样,求该单色光的波长.

[解答]除了中央明纹之外,单缝衍射的条纹形成的条件是

$$\delta = a \sin \theta = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{2}, (k = 1, 2, 3, \dots).$$

当条纹重合时,它们对应同一衍射角,因此

$$(2k_1+1)\lambda_1 = (2k_2+1)\lambda_2,$$

解得此单色光的波长为

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{2k_1+1}{2k_2+1} = 428.6(\text{nm}).$$

9.4 以某放电管发出的光垂直照射到一个光栅上,测得波长 $\lambda_1 = 669\text{nm}$ 的谱线的衍射角 $\theta = 30^\circ$. 如果在同样的 θ 角处出现波长 $\lambda_2 = 446\text{nm}$ 的更高级次的谱线,那么光栅常数最小为多少?

[解答]根据光栅方程得

$$(a+b) \sin \theta = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2,$$

方程可化为两个

$$(a+b) \sin \theta / \lambda_1 = k_1$$

$$\text{和 } (a+b) \sin \theta / \lambda_2 = k_2,$$

解得光栅常数为

$$a+b = \frac{(k_2 - k_1) \lambda_2 \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta}.$$

由于

$k_2/k_1 = \lambda_1/\lambda_2 = 3/2$,
 所以当 $k_1 = 2$ 时, $k_2 = 3$, 因此光栅常数最小值为

$$a + b = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta} = 2676(\text{nm}).$$

9. 5 一衍射光栅, 每厘米有 400 条刻痕, 刻痕宽为 $1.5 \times 10^{-5} \text{m}$, 光栅后放一焦距为 1m 的凸透镜, 现以 $\lambda = 500 \text{nm}$ 的单色光垂直照射光栅, 求:

(1) 透光缝宽为多少? 透光缝的单缝衍射中央明纹宽度为多少?

(2) 在该宽度内, 有几条光栅衍射主极大明纹?

[解答] (1) 光栅常数为

$a + b = 0.01/400 = 2.5 \times 10^{-5}(\text{m})$,
 由于刻痕宽为 $b = 1.5 \times 10^{-5} \text{m}$, 所以透光缝宽为

$$a = (a + b) - b = 1.0 \times 10^{-5}(\text{m}).$$

根据单缝衍射公式可得中央明纹的宽度为

$$\Delta y_0 = 2f\lambda/a = 100(\text{mm}).$$

(2) 由于

$$(a + b)/a = 2.5 = 5/2,$$

因此, 光栅干涉的第 5 级明纹出现在单缝衍射的第 2 级暗纹处, 因而缺级; 其他 4 根条纹各有两根在单缝衍射的中央明纹和一级明纹中, 因此单缝衍射的中央明纹宽度内有 5 条衍射主极大明纹, 其中一条是中央衍射明纹.

9. 6 波长为 600 nm 的单色光垂直入射在一光栅上, 第二、第三级主极大明纹分别出现在 $\sin \theta = 0.2$ 及 $\sin \theta = 0.3$ 处, 第四级缺级, 求:

(1) 光栅常数;

(2) 光栅上狭缝的宽度;

(3) 屏上一共能观察到多少根主极大明纹?

[解答] (1) (2) 根据光栅方程得

$$(a + b) \sin \theta_2 = 2\lambda;$$

由缺级条件得 $(a + b)/a = k/k'$, 其中 $k' = 1, k = 4$.

解缺级条件得 $b = 3a$, 代入光栅方程得狭缝的宽度为

$$a = \lambda/2 \sin \theta_2 = 1500(\text{nm}).$$

刻痕的宽度为

$$b = 3a = 4500(\text{nm}),$$

光栅常数为

$$a + b = 6000(\text{nm}).$$

(3) 在光栅方程中

$$(a + b) \sin \theta = k\lambda,$$

令 $\sin \theta = 1$, 得

$$k = (a + b)/\lambda = 10.$$

由于 $\theta = 90^\circ$ 的条纹是观察不到的, 所以明条纹的最高级数为 9. 又由于缺了 4 和 8 级明条纹, 所以在屏上能够观察到 $2 \times 7 + 1 = 15$ 条明纹.

9. 7 以氢放电管发出的光垂直照射在某光栅上, 在衍射角 $\theta = 41^\circ$ 的方向上看到 $\lambda_1 = 656.2 \text{nm}$ 和 $\lambda_2 = 410.1 \text{nm}$ 的谱线重合, 求光栅常数的最小值是多少?

[解答] 根据光栅方程得

$$(a + b) \sin \theta = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2,$$

方程可化为两个

$$(a + b) \sin \theta / \lambda_1 = k_1$$

和

$$(a + b) \sin \theta / \lambda_2 = k_2,$$

解得光栅常数为

$$a + b = \frac{(k_2 - k_1) \lambda_2 \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta}.$$

由于

$$k_2/k_1 = \lambda_1/\lambda_2 = 1.6 = 16/10 = 8/5,$$

所以当 $k_1 = 5$ 时, $k_2 = 8$, 因此光栅常数最小值为

$$a + b = \frac{3 \lambda_2 \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta} = 5000(\text{nm}).$$

其他可能值都是这个值的倍数.

9. 8 白光中包含了波长从 400nm 到 760nm 之间的所有可见光谱, 用白光垂直照射一光栅, 每一级衍射光谱是否仍只有一条谱线? 第一级衍射光谱和第二级衍射光谱是否有重叠? 第二级和第三级情况如何?

[解答] 方法一: 计算法. 根据光栅方程 $(a$

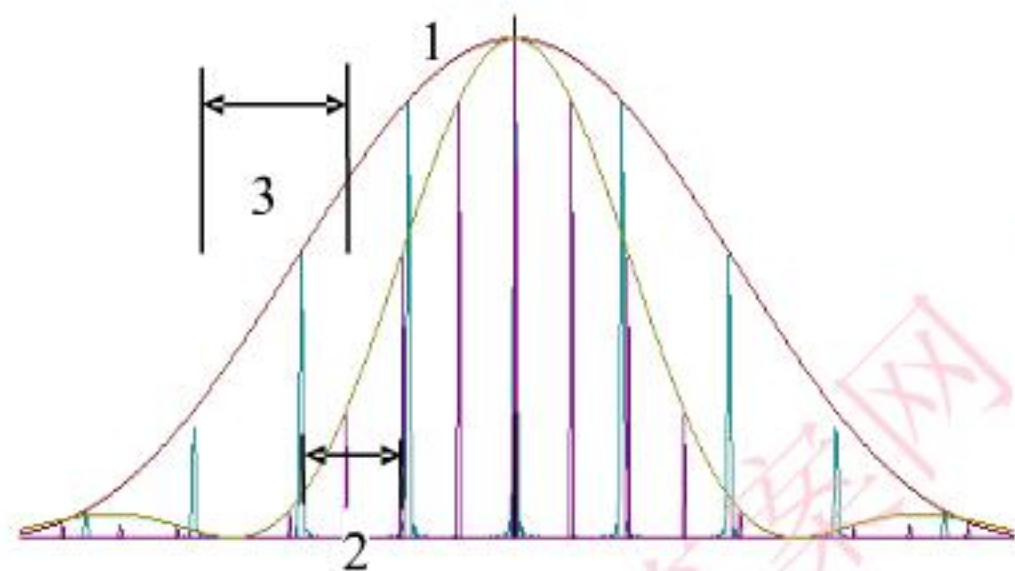
$+b)\sin\theta = k\lambda$, 对于最短波长 $\lambda_1 = 400\text{nm}$ 和最长波长 $\lambda_2 = 760\text{nm}$ 的可见光, 其衍射角的正弦为 $\sin\theta_1 = k\lambda_1/(a+b)$ 和 $\sin\theta_2 = k\lambda_2/(a+b)$, 数值如下表所示.

级数 k	1	2	3	4
$\sin\theta_1(\text{nm}/(a+b))$	400	800	1200	1600
$\sin\theta_2(\text{nm}/(a+b))$	760	1520	2280	3040

可见第一级衍射光谱与第二级衍射光谱没有重叠, 第二级衍射光谱与第三级衍射光谱从量值 1200 到 1520 是重叠的, 第三级衍射光谱与第四级衍射光谱从量值 1600 到 2280 是重叠的.

方法二: 曲线法. 由于白光是连续光谱, 经过光栅衍射之后仍然是连续光谱, 而不是一条谱线.

波长最长的单色光与波长最短的单色光相比, 中央衍射明条纹的宽度增加了, 由于最长波长不到最短波长的 2 倍, 第一级衍射光谱和第二级衍射光谱不重叠, 第二级衍射光谱和第三级衍射光谱重叠.



谱和第三级衍射光谱重叠.

9. 9 迎面开来的汽车, 其两车灯相距为 1m, 汽车离人多远时, 两灯刚能为人眼所分辨? (假定人眼瞳孔直径 d 为 3 mm, 光在空气中的有效波长为 $\lambda = 500\text{nm}$)

[解答]人眼的最小分辨角为

$$\theta_0 = 1.22\lambda/D = 2.033 \times 10^{-4}(\text{rad}),$$

当车很远时 $\theta_0 = w/l$, 所以距离为

$$l = w/\theta_0 = 4918(\text{m}).$$

9. 10 在 X 射线衍射实验中, 用波长从 0.095nm 到 0.130nm 连续的 X 射线以 30° 角入射到晶体表面. 若晶体的晶格常数 $d = 0.275\text{nm}$, 则在反射方向上有哪些波长的 X 射线形成衍射极大?

[解答] 30° 是入射角, 因此掠射角为

$$\theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

根据布喇格公式 $2d\sin\theta = k\lambda$, 得 X 射线形成衍射极大的波长为

$$\lambda = 2d\sin\theta/k, (k = 1, 2, 3, \dots).$$

级数 k	1	2	3	4	5	6
波长 $\lambda(\text{nm})$	0.476	0.238	0.159	0.119	0.095	0.079
是否所求	No	No	No	Yes	Yes	No

数值和结果如下表所示.

第十章 波的偏振

P305

10. 1 两偏振片组装成起偏和检偏器, 当两偏振片的偏振化方向夹角成 30° 时观察一普通光源, 夹角成 60° 时观察另一普通光源, 两次观察所得的光强相等, 求两光源光强之比.

[解答]第一个普通光源的光强用 I_1 表示, 通过第一个偏振片之后, 光强为

$$I_0 = I_1/2.$$

当偏振光通过第二个偏振片后, 根据马吕斯定律, 光强为

$$I = I_0\cos^2\theta_1 = I_1\cos^2\theta_1/2.$$

同理, 对于第二个普通光源可得光强为

$$I = I_2\cos^2\theta_2/2.$$

因此光源的光强之比

$$I_2/I_1 = \cos^2\theta_1/\cos^2\theta_2 = \cos^2 30^\circ/\cos^2 60^\circ = 1/3.$$

10. 2 一束线偏振光和自然光的混合光, 当它通过一偏振片后, 发现随偏振片的取向不同, 透射光的强度可变化四倍, 求入射光束中两种光的强度各占入射光强度的百分之几?

[解答]设自然光强为 I_1 , 线偏振光强为 I_2 , 则总光强为

$$I_0 = I_1 + I_2.$$

当光线通过偏振片时, 最小光强为自然光强的一半, 即

$$I_{\min} = I_1/2;$$

最大光强是线偏振光强与自然光强的一半之和, 即

$$I_{\max} = I_2 + I_1/2.$$

由题意得 $I_{\max}/I_{\min} = 4$, 因此

$$2I_2/I_1 + 1 = 4,$$

解得

$$I_2 = 3I_1/2.$$

此式代入总光强公式得

$$I_0 = I_1 + 3I_1/2.$$

因此入射光中自然光强的比例为

$$I_1/I_0 = 2/5 = 40\%.$$

由此可得线偏振光的光强的比例为

$$I_2/I_0 = 3/5 = 60\%.$$

[讨论]如果 $I_{\max}/I_{\min} = n$, 根据上面的步骤可得

$$I_1/I_0 = 2/(n+1),$$

$$I_2/I_0 = (n-1)/(n+1),$$

可见: n 的值越大, 入射光中自然光强的比例越小, 线偏振光的光强的比例越大.

10.3 水的折射率为 1.33, 玻璃的折射率为 1.50, 当光由水射向玻璃时, 起偏角为多少? 若光由玻璃射向水时, 起偏角又是多少? 这两个角度数值上的关系如何?

[解答]当光由水射向玻璃时, 水的折射率为 n_1 , 玻璃的折射率为 n_2 , 根据布儒斯特定律

$$\tan i_0 = n_2/n_1 = 1.1278,$$

得起偏角为

$$i_0 = 48.44^\circ.$$

当光由玻璃射向水时, 玻璃的折射率为 n_1 , 水的折射率为 n_2 , 根据布儒斯特定律

$$\tan i_0 = n_2/n_1 = 0.8867,$$

得起偏角为

$$i_0 = 41.56^\circ.$$

可见: 两个角度互为余角.

10.4 根据布儒斯特定律可测量不透明介质的折射率, 今测得某釉质的起偏角为 58° , 则该釉质的折射率为多少?

[解答]空气的折射率取为 1, 根据布儒斯特定律可得釉质的折射率为

$$n = \tan i_0 = 1.6003.$$

10.5 三个偏振片堆叠在一起, 第一块与第三块偏振化方向互相垂直, 第二块与第一块的偏振化方向互相平行, 现令第二块偏振片以恒定的角速度 ω_0 绕光传播方向旋转, 如图所示. 设入射自然光的光强为 I_0 , 试证

明: 此自然光通过这一系统后出射光强度为 $I = I_0(1 - \cos 4\omega t)/16$.

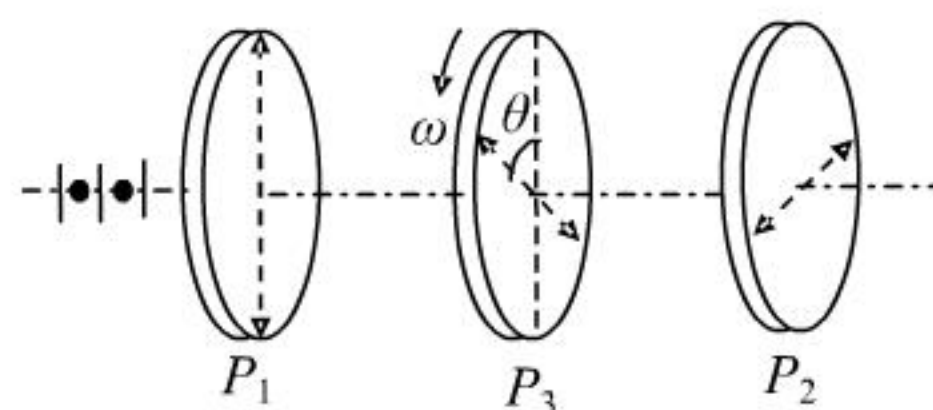


图 9.5

[证明]自然光通过偏振片 P_1 之后, 形成偏振光, 光强为

$$I_1 = I_0/2.$$

经过时间 t , P_3 的偏振化方向转过的角度为

$$\theta = \omega t,$$

根据马吕斯定律, 通过 P_3 的光强为

$$I_3 = I_1 \cos^2 \theta.$$

由于 P_1 与 P_2 的偏振化方向垂直, 所以 P_2 与 P_3 的偏振化方向的夹角为

$$\varphi = \pi/2 - \theta,$$

再根据马吕斯定律, 通过 P_2 的光强为

$$\begin{aligned} I &= I_3 \cos^2 \varphi = I_3 \sin^2 \theta \\ &= I_0 (\cos^2 \theta \sin^2 \theta) / 2 = I_0 (\sin^2 2\theta) / 8 \\ &= I_0 (1 - \cos 4\theta) / 16, \end{aligned}$$

即 $I = I_0 (1 - \cos 4\omega t) / 16$. 证毕.

*10.6

*10.7

10.8 如图所示, 自然光以起偏角 i_0

从空气射向水面, 水中有一块玻璃板, 若以玻璃反射之光亦为线偏振光, 求水面和玻璃平面的夹角 ($n_{\text{玻}} = 1.50$, $n_{\text{水}} = 1.33$).

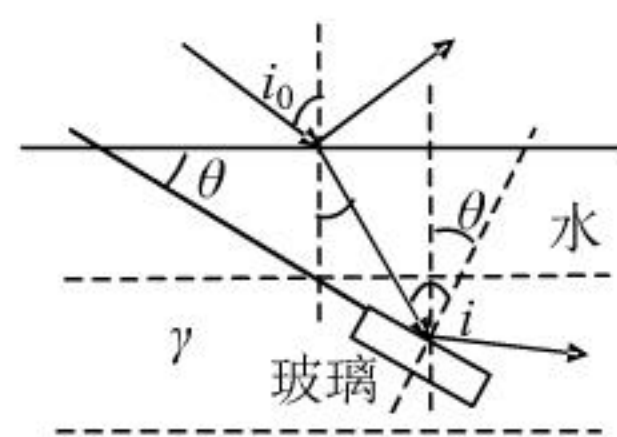


图 9.8

1.50, $n_{\text{水}} = 1.33$).

[解答]根据布儒斯特定律:

$$\tan i_0 = n_{\text{水}},$$

可得空气的起偏角为

$$i_0 = \arctan n_{\text{水}} = 53.06^\circ.$$

折射角为

$$\gamma = 90^\circ - i_0 = 36.94^\circ.$$

再根据布儒斯特定律:

$$\tan i = n_{\text{玻}}/n_{\text{水}} = 1.128,$$

可得玻璃的起偏角为

$$i = 48.44^\circ.$$

水面和玻璃平面的夹角为

$$\theta = i - \gamma = 11.5^\circ.$$

[讨论]为了简便起见, 设

$$n_1 = n_{\text{水}}, \quad n_2 = n_{\text{玻}},$$

那么

$$\tan i_0 = n_1, \quad \tan i = n_2/n_1,$$

水面与玻璃平面的夹角为

$$\theta = i - \gamma = (i + i_0) - 90^\circ,$$

因此

$$\tan \theta = -\cot(i + i_0) = -\frac{1}{\tan(i + i_0)}$$

$$= -\frac{1 - \tan i \tan i_0}{\tan i + \tan i_0}$$

$$= \frac{n_2 - 1}{n_2/n_1 + n_1} = \frac{n_1(n_2 - 1)}{n_2 + n_1^2}.$$

这是最终公式, 代入数值得

$$\tan \theta = 0.2034,$$

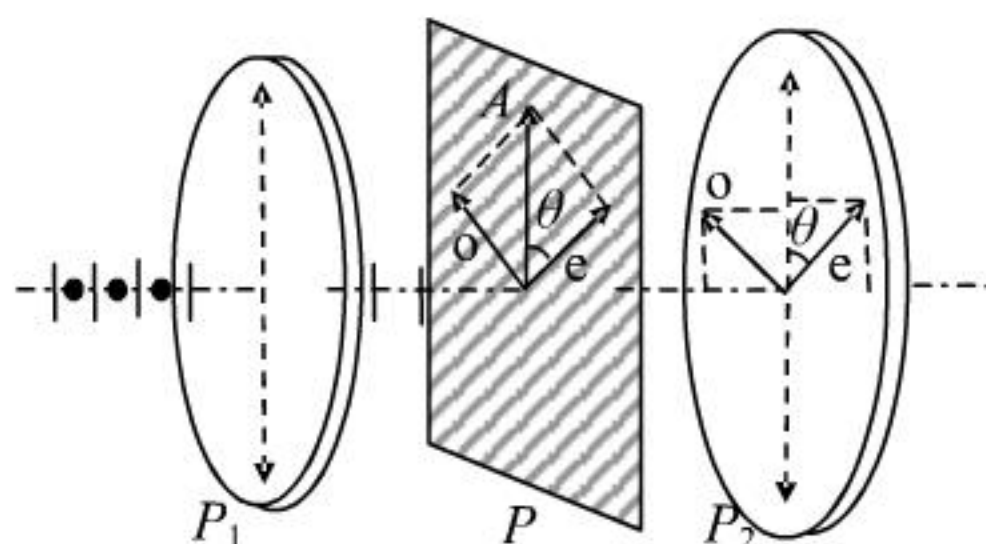
夹角为

$$\theta = 11.5^\circ.$$

10.9 一方解石晶体置于两平行的且偏振化方向相同的偏振片之间, 晶体的主截面与偏振片的偏振化方向成 30° , 入射光在晶体的主截面内, 求以下两种情况下的 o 光和 e 光强度之比.

(1) 从晶体出射时;

(2) 从检偏器出射时.



[解答] (1) 从偏振片入射到晶体的光分成 o 光和 e 光, o 光垂直于主截面, e 光平

行于主截面. 设入射偏振光的振幅为 A , 则

$$A_o = A \sin \theta, \quad A_e = A \cos \theta,$$

当光从晶体出射时, o 光和 e 光强度之比为

$$\frac{I_o}{I_e} = \frac{A_o^2}{A_e^2} = \tan^2 \theta = \tan^2 30^\circ = \frac{1}{3}.$$

(2) 从晶体出射的 o 光和 e 光入射到第二块偏振片时, 只有沿偏振化方向的光能够通过, o 光和 e 光的振幅为

$$A'_o = A_o \sin \theta, \quad A'_e = A_e \cos \theta,$$

当光从偏振片出射时, o 光和 e 光强度之比为

$$\begin{aligned} \frac{I'_o}{I'_e} &= \frac{A'^2_o}{A'^2_e} = \frac{A_o^2}{A_e^2} \tan^2 \theta = \tan^4 \theta \\ &= \tan^4 30^\circ = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

*10. 10

10.11 某晶体对波长为 632.8nm 的光的主折射率为 $n_o = 1.66$, $n_e = 1.49$. 用其制成适应于该波长光的 $1/4$ 波片, 晶片至少要多厚? 该波片的光轴方向如何?

[解答] 对于 $1/4$ 波片, o 光和 e 光的位相差为

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e) l = (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

当 $k = 0$ 时晶片厚度最小

$$l = \lambda_0 / 4(n_o - n_e) = 930.6(\text{nm}).$$

要形成圆偏振光, 波片的光轴方向要与光的偏振化方向成 45 度角.

第十一章 气体分子运动论

P339

11.1 已知温度为 27°C 的气体作用于器壁上的压强为 10^5Pa , 求此气体单位体积里的分子数.

[解答] 根据气体压强公式

$$p = nkT,$$

其中 $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ 称为玻尔兹曼常数.

当 $T = 300 \text{K}$ 时, 气体单位体积内的分子数为

$$n = p/kT = 2.415 \times 10^{25} (\text{m}^{-3}).$$

11. 2 一个温度为 17°C 、容积 $11.2 \times 10^{-3} \text{m}^3$ 的真空系统已抽到其真空度为 $1.33 \times 10^{-3} \text{Pa}$. 为了提高其真空度, 将它放在 300°C 的烘箱内烘烤, 使吸附于器壁的气体分子也释放出来. 烘烤后容器内压强为 1.33Pa , 问器壁原来吸附了多少个分子?

[解答] 烘烤前容器内单位体积内的分子为

$$n_1 = p_1/kT_1 = 3.32 \times 10^{17} (\text{m}^{-3}),$$

烘烤后容器内单位体积内的分子为

$$n_2 = p_2/kT_2 = 1.68 \times 10^{20} (\text{m}^{-3}).$$

器壁原来吸附的分子数为

$$N = (n_2 - n_1)V = 1.88 \times 10^{18}.$$

11. 3 在 0°C 下一容器的真空度为 $1.33 \times 10^{-12} \text{Pa}$, 此时每立方厘米内有多少个气体分子?

[解答] 单位体积内的分子为

$$n = p/kT = 3.53 \times 10^8 (\text{m}^{-3}) = 3.53 \times 10^2 (\text{cm}^{-3}).$$

11. 4 已知 275K 和 $1.00 \times 10^3 \text{Pa}$ 条件下气体的密度 $\rho = 1.24 \times 10^{-5} \text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, 求:

(1) 气体的方均根速率 $\sqrt{v^2}$;

(2) 气体的摩尔质量 μ , 并指出是什么气体.

[解答] (1) 气体的密度为

$$\rho = 1.24 \times 10^{-2} (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}),$$

根据气体压强和能量的公式 $p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$, 得气体的方均根速度为

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{3p/\rho} = 491.87 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

(2) 根据理想气体状态方程

$$pV = \frac{M}{\mu} RT,$$

由于气体密度为 $\rho = M/V$, 所以方程可变为

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT,$$

气体的摩尔质量为

$$\mu = \rho RT/p = 0.0283 (\text{kg}).$$

这种气体是氮气 N_2 .

11. 5 当温度为 0°C 时, 求:

(1) N_2 分子的平均平动动能和平均转动动能;

(2) $7 \text{g} \text{N}_2$ 气体的内能.

[解答] (1) N_2 分子有 $t = 3$ 个平动自由度, 其平均平动动能为

$$\bar{w}_t = \frac{t}{2} kT = 5.65 \times 10^{-21} (\text{J}).$$

将 N_2 分子当作刚体, 它就还有 $r = 2$ 个转动自由度, 其平均转动动能为

$$\bar{w}_r = \frac{r}{2} kT = 3.77 \times 10^{-21} (\text{J}).$$

(2) N_2 分子的摩尔质量为 $\mu = 0.028 \text{kg}$, 质量 $M = 0.007 \text{kg}$ 的 N_2 分子的摩尔数为

$$n_0 = M/\mu = 0.25,$$

分子总数为

$$N = n_0 N_A,$$

其中 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ 为阿佛伽德罗常数, 而气体普适量

$$R = kN_A = 8.31 (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}).$$

N_2 分子的自由度为 $i = t + r = 5$,

气体的内能为

$$\begin{aligned} E &= \frac{i}{2} NkT = \frac{i}{2} n_0 N_A kT = \frac{i}{2} n_0 RT \\ &= 1.417 \times 10^3 (\text{J}). \end{aligned}$$

11. 6 一个能量为 $1.6 \times 10^{-7} \text{J}$ 的宇宙射线粒子射入氖管中, 氖管中含有氖气 0.01mol , 如射线粒子能量全部转变成氖气的内能, 氖气温度升高多少?

[解答] 氖气是单性气体, 分子式是 Ne , 只能平动动能, 自由度为

$$i = t = 3.$$

当射线粒子能量全部转变成氖气的内能时, 由公式 $E = \frac{i}{2} n_0 RT$ 可得气体升高的温度为

$$T = \frac{2E}{in_0R} = 1.28 \times 10^{-6}(\text{K}).$$

11. 7 某些恒星的温度达到 10^8K 的数量级, 此时原子已不存在, 只有质子存在, 求:

(1) 质子的平均动能是多少?

(2) 质子的方均根速率多大?

[解答] (1) 质子的平均自由度为 $t=3$, 平均平动动能为

$$\bar{w}_t = \frac{t}{2}kT = 2.07 \times 10^{-15}(\text{J}).$$

(2) 质子的质量为

$$m_p = 1.67261 \times 10^{-27}(\text{kg}),$$

由于 $\bar{w}_t = \frac{t}{2}kT = \frac{1}{2}m_p \bar{v}^2$, 所以质子的方均根速率为

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{tkT}{m_p}} = 1.573 \times 10^6(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

11. 8 一容器被中间隔板分成体积相等的两半, 一半装有氦气, 温度为 250K ; 另一半装有氧气, 温度为 310K . 两种气体的压强均为 p_0 . 求抽去隔板后的混合气体温度和压强为多少?

[解答] 设氦气和氧气分子各有 N_1 和 N_2 个, 氦气是单原子分子, 自由度为 $i_1=3$; 氧气是双原子分子, 自由度为 $i_2=5$.

隔板抽去前, 氦气和氧气分子的总能量为

$$E_1 = \frac{i_1}{2}N_1kT_1, \quad E_2 = \frac{i_2}{2}N_2kT_2.$$

隔板抽去后, 氦气和氧气分子的总能量为

$$E = \frac{i_1}{2}N_1kT + \frac{i_2}{2}N_2kT.$$

这个过程能量守恒, 即, $E = E_1 + E_2$, 所以有

$$i_1N_1T_1 + i_2N_2T_2 = (i_1N_1 + i_2N_2)T.$$

由于压强

$$p_0 = n_1kT_1 = \frac{2N_1}{V}kT_1,$$

所以

$$N_1 = \frac{p_0V}{2kT_1};$$

同理可得

$$N_2 = \frac{p_0V}{2kT_2}.$$

将 N_1 和 N_2 的公式代入上面公式可得

$$\frac{i_1p_0V}{2k} + \frac{i_2p_0V}{2k} = \left(\frac{i_1p_0V}{2kT_1} + \frac{i_2p_0V}{2kT_2}\right)T,$$

约去公因子, 可得混合气体的温度为

$$T = \frac{(i_1 + i_2)T_1T_2}{i_1T_2 + i_2T_1} = 284.4(\text{K}).$$

混合气体的压强为

$$\begin{aligned} p &= nkT = \frac{(N_1 + N_2)}{V}kT \\ &= \frac{1}{V} \left(\frac{p_0V}{2kT_1} + \frac{p_0V}{2kT_2} \right) kT \\ &= \frac{(i_1 + i_2)(T_1 + T_2)}{2(i_1T_2 + i_2T_1)} p_0 = 1.0275 p_0. \end{aligned}$$

11. 9 试证明: N 个分子, 不论分子速度的分布服从什么规律, 总有 $\sqrt{\bar{v}^2} \geq \bar{v}$.

[证明] 设第 i 个分子的速率为 v_i , 则分子的平均速率为

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \sum_i v_i,$$

速率平方的平均值为

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{N} \sum_i v_i^2.$$

显然, $\delta = \frac{1}{N} \sum_i (v_i - \bar{v})^2 \geq 0$, 因此

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{N} \sum_i (v_i^2 - 2v_i\bar{v} + \bar{v}^2) \\ &= \frac{1}{N} \sum_i v_i^2 - 2\bar{v} \frac{1}{N} \sum_i v_i + \bar{v}^2 \frac{1}{N} \sum_i 1 \end{aligned}$$

$$= \overline{v^2} - 2\overline{v} \cdot \overline{v} + \overline{v^2} = \overline{v^2} - \overline{v}^2,$$

由于 $\delta \geq 0$, 所以 $\overline{v^2} \geq \overline{v}^2$, 因此不论分子的

速度的分布服从什么规律, 都有 $\sqrt{\overline{v^2}} \geq \overline{v}$.

另外也可直接用平均值运算.

由于 $(v_i - \overline{v})^2 \geq 0$, 展开得

$$v_i^2 - 2v_i\overline{v} + \overline{v}^2 \geq 0,$$

取平均值时得

$$\overline{v_i^2} - 2\overline{v_i}\overline{v} + \overline{v}^2 \geq 0.$$

因为 $\overline{v_i} = \overline{v}$ 、 $\overline{v} = \overline{v}$ 并且 $\overline{v^2} = \overline{v^2}$, 所以

$\overline{v_i^2} - \overline{v}^2 \geq 0$, 即 $\sqrt{\overline{v^2}} \geq \overline{v}$. 证毕.

11. 10 将 (11.19) 式表示成以理想气体最可几速率 v_p 为单位表示的形式, 即令 x

$= v/v_p$, 若已知 $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.7468$, 试计算:

(1) 分子速率小于最可几速率的分子占分子总数的百分比为多少?

(2) 分子速率大于最可几速率的分子占分子总数的百分比为多少?

(3) 参照表 11.1, 写出同一温度下氢气分子对应同一分子数百分比的速率区间.

[解答] 理想气体分子数占分子总数的比率为

$$dN/N = f(v)dv,$$

其中 $f(v)$ 是麦克斯韦速率分布函数:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2k\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2.$$

设 $x = v/v_p$, 其中 $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, 则

$$dv = v_p dx,$$

因此速率分为

$$dN/N = g(x)dx,$$

其中 $g(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2}$.

(1) 分子速率小于最可几速率的分子占分子总数的百分比为

$$\frac{N_1}{N} = \int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx,$$

设 $I = \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx$, 则

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 x e^{-x^2} dx^2 = -\frac{1}{2} \int_0^1 x dx e^{-x^2}$$

$$= -\frac{1}{2} (x e^{-x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x^2} dx)$$

$$\text{即 } I = \frac{1}{2} (0.7648 - e^{-1}),$$

所以

$$\frac{N_1}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (0.3648 - e^{-1})$$

$$= 0.4276 = 42.76\%.$$

(2) 分子速率大于最可几速率的分子占分子总数的百分比为

$$\frac{N_2}{N} = 1 - \frac{N_1}{N} = 0.5724 = 57.24\%.$$

(3) 对于氧气分子, 速率在 $v_1 \sim v_2$ 之间的分子数占分子总数的比率为

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} 4\pi \left(\frac{m}{2k\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv,$$

其中 m 表示氧分子的质量. 用 m' 表示氢分子的质量, 则 $m = 16m'$, 对于氢分子的同一比率则有

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} 4\pi \left(\frac{16m'}{2k\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{16m'v^2}{2kT}\right) v^2 dv,$$

取 $v' = 4v$, 可得

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{4v_1}^{4v_2} 4\pi \left(\frac{m'}{2k\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m'v'^2}{2kT}\right) v'^2 dv',$$

可见: 氧气分子速率从 v_1 到 v_2 之间的分子

数的比率与氢气分子速率从 $4v_1$ 到 $4v_2$ 之间的分子数的比率相同。

从这个思路可以证明：当一种气体的分子的质量是另一种气体的质量的 α^2 倍时，这种气体分子速率从 v_1 到 v_2 之间的分子数的比率与另一种气体分子速率从 αv_1 到 αv_2 之间的分子数的比率相同。

11. 11. 由 11. 10 题结果，求速率在 $0.99v_p$ 到 $1.01v_p$ 之间的分子数占分子总数的百分比。

[解答] 分子数比率为

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{0.99}^{1.01} g(x) dx,$$

$$\text{其中 } g(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2}.$$

利用中值定理得

$$\begin{aligned} \frac{\Delta N}{N} &= g(1)(1.01 - 0.99) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \times 0.02 \\ &= 0.0166 = 1.66\%. \end{aligned}$$

11. 12 求上升到什么高度时大气压强减到地面大气压强的 75%。设空气温度为 0°C ，空气的平均摩尔质量为 $0.0289 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ 。

[解答] 根据玻尔兹曼分布可得压强随高度变化关系

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right).$$

其中 m 是一个分子的质量。

用 N_A 表示阿氏常数，则气体的摩尔质量为 $\mu = N_A m$ ，气体的普适常数为 $R = k N_A$ 。压强公式可表示为

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gz}{RT}\right).$$

高度为

$$z = \frac{RT}{\mu g} \ln \frac{p_0}{p} = 2304(\text{m}).$$

11. 13 已知 $f(v)$ 是麦克斯韦分子速率分布函数，说明以下各式物理意义。

(1) $f(v)dv$;

(2) $n f(v)dv$, n 为分子数密度;

(3) $\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv$;

(4) $\int_0^{v_p} f(v) dv$, v_p 为最可几速率;

(5) $\int_{v_p}^{\infty} v^2 f(v) dv$.

[解答] (1) 由公式 $dN/N = f(v)dv$ 可知： $f(v)dv$ 表示分子数在速率区间 $v \sim v+dv$ 之中分子数的比率 dN/N 。

(2) 由于 $n = N/V$ ，可得 $n dN/N = dN/V$ ，因此 $n f(v)dv$ 表示分子数在速率区间 $v \sim v+dv$ 之中分子数密度。

(3) $\int_{v_1}^{v_2} v f(v) dv$ 表示分子在速率区间 v_1 到 v_2 之间的平均速率。

(4) $\int_0^{v_p} f(v) dv$ 表示分子速率小于最可几速率的分子占分子总数的比率。

(5) $\int_{v_p}^{\infty} v^2 f(v) dv$ 表示分子速率大于最可几速率的速率平方的平均值。

11. 14 质量为 $6.2 \times 10^{-14} \text{ g}$ 的微粒悬浮于 27°C 的液体中，观察到它的方均根速率为 $1.4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ 。由这些结果计算阿佛加德罗常数 N_A 。

[解答] 当粒子平动时，其平均平动动能为

$$\bar{w} = \frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} m \overline{v^2},$$

由此得阿氏常数为

$$N_A = \frac{R}{k} = \frac{3RT}{m \overline{v^2}} = 6.1545 \times 10^{23} (\text{mol}^{-1}).$$

11. 15 氮分子的有效直径为 $3.8 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，求它在标准状态下的平均自由程和连续碰撞的平均时间间隔。

[解答] 在标准状态下， $T = 273 \text{ K}$ ， $p = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ，氮分子的平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = 5.80 \times 10^{-8}(\text{m}).$$

氮分子的摩尔质量为 $\mu = 0.028 \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, 平均速率为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 454.2(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

连续碰撞的时间间隔为

$$t = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} = 1.276 \times 10^{-10}(\text{s}).$$

11. 16 在标准状态下 CO_2 气体分子的平均自由程 $\bar{\lambda} = 6.29 \times 10^{-8} \text{m}$, 求两次碰撞之间的平均时间和 CO_2 气体分子的有效直径.

[解答] C 的原子量是 12, O 的原子量是 16, CO_2 的分子量是 44, 摩尔质量为 $\mu = 0.044 \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, 其平均速率为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 362.3(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

两次碰撞之间的平均时间为

$$t = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} = 1.736 \times 10^{-10}(\text{s}).$$

根据公式 $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$, 可得 CO_2 气

体分子的有效直径为

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2}\pi \bar{\lambda} p}} = 3.648 \times 10^{-10}(\text{m}).$$

*11. 17

*11. 18

11. 19 容器贮有 O_2 气, 其压强为 $1.013 \times 10^5 \text{Pa}$, 温度为 27°C , 有效直径为 $d = 2.9 \times 10^{-10} \text{m}$, 求:

- (1) 单位体积中的分子数 n ;
- (2) 氧分子质量 m ;

- (3) 气体密度 ρ ;
- (4) 分子间平均距离 l ;
- (5) 最可几速率 v_p ;
- (6) 平均速率 $\bar{v}$;

(7) 方均根速率 $\sqrt{v^2}$;

(8) 分子的平均总动能 $\bar{\epsilon}$;

(9) 分子平均碰撞频率 $\bar{z}$;

(10) 分子平均自由程 $\bar{\lambda}$.

[解答] (1) 由 $p = nkT$ 得单位体积中的分子数为

$$n = p/kT = 2.45 \times 10^{25}(\text{m}^{-3}).$$

(2) 氧分子的原子质量单位是 32, 一质量单位是 $u = 1.66055 \times 10^{-27} \text{kg}$, 分子的质量为

$$m = 32u = 5.31 \times 10^{-26}(\text{kg}).$$

(3) 根据理想气体状态方程

$$pV = \frac{M}{\mu} RT, \text{ 氧的摩尔质量 } \mu = 0.032$$

$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, 其密度为

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{p\mu}{RT} = 1.30(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}).$$

(4) 一个分子占有体积为 $v = 1/n$, 设想分子整齐排列, 则分子间的平均距离为

$$l = (1/n)^{1/3} = 3.445 \times 10^{-9}(\text{m}).$$

(5) 最可几速率为

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 394.7(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

(6) 平均速率为

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = 445.4(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

(7) 方均根速率为

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 483.5(\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

(8) 分子的自由度为 $i = 5$, 平均总动能为

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT = 1.035 \times 10^{-20}(\text{J}).$$

(9) 分子平均碰撞频率为

$$\bar{z} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{v} = 4.07 \times 10^9 (\text{s}^{-1}).$$

(10) 分子平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = 1.09 \times 10^{-7} (\text{m}).$$

11. 20 设氢的范德瓦耳斯常量 b 值为 1mol 气体体积总和的 4 倍. 将气体分子看作刚球, 试计算 H_2 分子的直径. (对于 H_2 , $b = 2.66 \times 10^{-5} \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$).

[解答] 1mol 气体有 $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ 个分子, 设分子直径为 d , 将分子当作刚性球体,

则有 $b = 4N_A \frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3$, 可解得分子直径为

$$d = 2(\frac{3b}{16\pi N_A})^{1/3} = 2.76 \times 10^{-10} (\text{m}).$$

11. 21 1mol 气体在 0°C 时的体积为 0.55L , 试用范德瓦耳斯方程计算它的压强. 再将它看作理想气体, 压强又为多少?

($a = 0.364 \text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-1}$, $b = 4.27 \times 10^{-5} \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$)

[解答] 气体体积为 $v = 0.55 \times 10^{-3} \text{m}^3$. 根据范氏方程

$$(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = RT,$$

可得压强为

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} = 3.67 \times 10^6 (\text{Pa}).$$

而理想气体的压强为

$$p = \frac{RT}{v} = 4.12 \times 10^6 (\text{Pa}).$$

第十二章 热力学基本原理

P368

12. 1 一系统由如图所示的状态 a 沿 abc 到达 c , 有 350J 热量传入系统, 而系统对外做功 126J .

(1) 经 adc , 系统对外做功 42J , 问系

统吸热多少?

(2) 当系统由状态 c 沿曲线 ac 回到状态 a 时, 外界对系统做功为 84J , 问系统是吸热还是放热, 在这一过程中系统与外界之间的传递的热量是多少?

[解答] (1)

当系统由状态 a 沿 abc 到达 c 时, 根据热力学第一定律, 吸收的热量 Q 和对外所做的功 A 的关系是

$$Q = \Delta E + A,$$

其中 ΔE 是内能的增量. Q 和 A 是过程量, 也就是与系统经历的过程有关, 而 ΔE 是状态量, 与系统经历的过程无关.

当系统沿 adc 路径变化时, 可得

$$Q_1 = \Delta E_1 + A_1,$$

这两个过程的内能的变化是相同的, 即

$$\Delta E_1 = \Delta E,$$

将两个热量公式相减可得系统吸收的热量为

$$Q_1 = Q + A_1 - A = 266 (\text{J}).$$

(2) 当系统由状态 c 沿曲线 ac 回到状态 a 时, 可得

$$Q_2 = \Delta E_2 + A_2,$$

其中, $\Delta E_2 = -\Delta E$, $A_2 = -84 (\text{J})$, 可得

$$Q_2 = -(Q - A) + A_2 = -308 (\text{J}),$$

可见: 系统放射热量, 传递热量的大小为 308J .

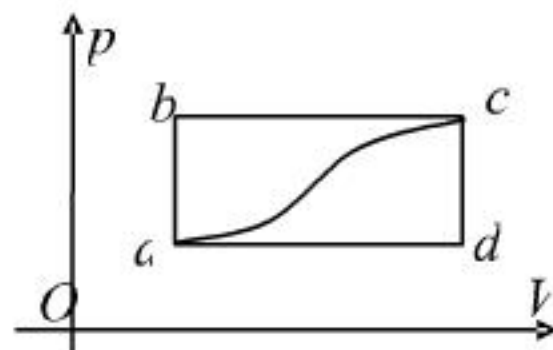


图 12.1

12.2 1mol 氧气由状态 1 变化到状态 2, 所经历的过程如图, 一次沿 $1 \rightarrow m \rightarrow 2$ 路径,

另一次沿

$1 \rightarrow 2$ 直线路径.

试分别

求出这两个

过程中系统

吸收热量

Q 、对外界

所做的功 A 以及内能的变化 $E_2 - E_1$.

[解答] 根据理想气体状态方程 $pV = RT$, 可得气体在状态 1 和 2 的温度分别为

$$T_1 = p_1 V_1 / R \text{ 和 } T_2 = p_2 V_2.$$

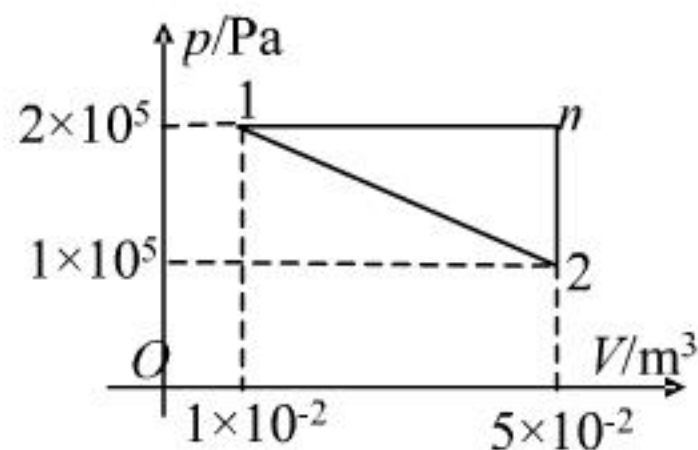


图 12.2

氧气是双原子气体, 自由度 $i=5$, 由于内能是状态量, 所以其状态从 1 到 2 不论从经过什么路径, 内能的变化都是

$$\Delta E = \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = 7.5 \times 10^3 (\text{J}).$$

系统状态从 $1 \rightarrow m$ 的变化是等压变化, 对外所做的功为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = 8.0 \times 10^3 (\text{J}).$$

系统状态从 $m \rightarrow 2$ 的变化是等容变化, 对外不做功. 因此系统状态沿 $1 \rightarrow m \rightarrow 2$ 路径变化时, 对外做功为 $8.0 \times 10^3 \text{J}$; 吸收的热量为

$$Q = \Delta E + A = 1.55 \times 10^4 (\text{J}).$$

系统状态直接从 $1 \rightarrow 2$ 的变化时所做的功就是直线下的面积, 即

$$A = \frac{1}{2} (p_2 + p_1) (V_2 - V_1) = 6.0 \times 10^3 (\text{J}).$$

吸收的热量为

$$Q = \Delta E + A = 1.35 \times 10^4 (\text{J}).$$

12. 3 1mol 范氏气体, 通过准静态等温过程, 体积由 V_1 膨胀至 V_2 , 求气体在此过程中所做的功?

[解答] 1mol 范氏气体的方程为

$$(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = RT,$$

通过准静态等温过程, 体积由 V_1 膨胀至 V_2 时气体所做的功为

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dv = \int_{V_1}^{V_2} (\frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}) dv \\ &= RT \ln(v-b) + \frac{a}{v} \Big|_{V_1}^{V_2} \\ &= RT \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} + a(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}). \end{aligned}$$

12. 4 1mol 氢在压强为 $1.013 \times 10^5 \text{Pa}$, 温度为 20°C 时的体积为 V_0 , 今使其经以下两种过程达同一状态:

(1) 先保持体积不变, 加热使其温度升高到 80°C , 然后令其作等温膨胀, 体积变为原体积的 2 倍;

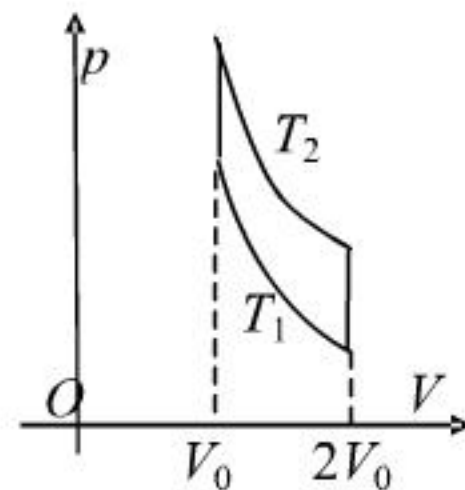
(2) 先使其作等温膨胀至原体积的 2

倍, 然后保持体积不变, 升温至 80°C .

试分别计算以上两过程中吸收的热量, 气体所做的功和内能增量. 将上述两过程画在同一 $p-V$ 图上并说明所得结果.

[解答] 氢气是双原子气体, 自由度 $i=5$, 由于内能是状态量, 所以不论从经过什么路径从初态到终态, 内能的增量都是

$$\Delta E = \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) = 1.2465 \times 10^3 (\text{J}).$$



(1) 气体先做等容变化时, 对外不做功, 而做等温变化时, 对外所做的功为

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \\ &= RT_2 \ln 2 = 2.0333 \times 10^3 (\text{J}), \end{aligned}$$

所吸收的热量为

$$Q_2 = \Delta E + A_2 = 3.2798 \times 10^3 (\text{J}).$$

(2) 气体先做等温变化时, 对外所做的功为

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \\ &= RT_1 \ln 2 = 1.6877 \times 10^3 (\text{J}), \end{aligned}$$

所吸收的热量为

$$Q_1 = \Delta E + A_1 = 2.9242 \times 10^3 (\text{J}).$$

如图所示, 气体在高温下做等温膨胀时, 吸收的热量多些, 曲线下的面积也大些.

12. 5 为了测定气体的 γ ($\gamma = C_p/C_v$), 可用下列方法: 一定量气体, 它的初始温度、体积和压强分别为 T_0 , V_0 和 p_0 . 用一根通电铂丝对它加热, 设两次加热电流和时间相同, 使气体吸收热量保持一样. 第一次保持气体体积 V_0 不变, 而温度和压强变为 T_1 , p_1 ; 第二次保持压强 p_0 不变, 而温度和体积则变为 T_2 , V_2 , 证明:

$$\gamma = \frac{(p_1 - p_0)V_0}{(V_2 - V_0)p_0}.$$

[证明] 定容摩尔热容为

$$C_V = \frac{(dQ)_V}{dT},$$

在本题中为

$$C_V = \Delta Q / (T_1 - T_0);$$

定压摩尔热容为

$$C_p = \frac{(dQ)_p}{dT},$$

在本题中为

$$C_p = \Delta Q / (T_2 - T_0).$$

对于等容过程有

$$p_1/T_1 = p_0/T_0,$$

所以

$$T_1 = T_0 p_1 / p_0;$$

对于等压过程有

$$V_2/T_2 = V_0/T_0,$$

所以

$$T_2 = T_0 V_2 / V_0.$$

因此

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{C_p}{C_V} = \frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} = \frac{T_0 p_1 / p_0 - T_0}{T_0 V_2 / V_0 - T_0} \\ &= \frac{(p_1 - p_0)V_0}{(V_2 - V_0)p_0}. \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

12.6 理想气体的既非等温也非绝热的过程可表示为 $pV^n = \text{常数}$, 这样的过程叫多方过程, n 叫多方指数.

(1) 说明 $n=0, 1, \gamma$ 和 ∞ 各是什么过程.

(2) 证明: 多方过程中理想气体对外做功: $A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}$.

(3) 证明: 多方过程中理想气体的摩尔热容量为: $C = C_V \left(\frac{\gamma - n}{1 - n} \right)$,

并就此说明 (1) 中各过程的值.

(1) [说明] 当 $n=0$ 时, p 为常数, 因此是等压过程;

当 $n=1$ 时, 根据理想气体状态方程 $pV = RT$, 温度 T 为常数, 因此是等温过程;

当 $n=\gamma$ 时表示绝热过程;

当 $n=\infty$ 时, 则有 $p^{1/n}V = \text{常数}$, 表示等容过程.

(2) [证明] 对于多方过程有

$$pV^n = p_1 V_1^n = p_2 V_2^n = C (\text{常数}),$$

理想气体对外所做的功为

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} C V^{-n} dV \\ &= \frac{C}{1-n} (V_2^{1-n} - V_1^{1-n}) = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}. \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

(3) [证明] 对于一摩尔理想气体有

$$pV = RT,$$

因此气体对外所做的功可表示为

$$A = \frac{RT_1 - RT_2}{n-1},$$

气体吸收的热量为

$$\begin{aligned} Q &= \Delta E + A \\ &= \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) + \frac{1}{1-n} R(T_2 - T_1), \end{aligned}$$

摩尔热容量为

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{T_2 - T_1} = \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{1-n} \right) R = \frac{i+2-in}{2(1-n)} R \\ &= \frac{(i+2)/i-n}{1-n} \cdot \frac{i}{2} R = C_V \frac{\gamma-n}{1-n}. \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

12.7 一气缸内贮有 10mol 的单原子理想气体, 在压缩过程中, 外力做功 209J, 气体温度升高 1°C . 试计算气体内能增量和所吸收的热量, 在此过程中气体的摩尔热容是多少?

[解答] 单原子分子的自由度为 $i=3$, 一摩尔理想气体内能的增量为

$$\Delta E = \frac{i}{2} R \Delta T = 12.465(\text{J}),$$

10mol 气体内能的增量为 124.65J.

气体对外所做的功为 $A = -209\text{J}$, 所以气体吸收的热量为

$$Q = \Delta E + A = -84.35(\text{J}).$$

1 摩尔气体所吸收的热量为热容为 -8.435J, 所以摩尔热容为

$$C = -8.435(\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}).$$

12.8 一定量的单原子分子理想气体, 从初态 A 出发, 沿图示直线过程变到另一状态 B, 又经过等容、等压过程回到状态 A.

(1) $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow A$, 各过程中系统对外所做的功 A , 内能的增量 ΔE 以及所吸收的热量 Q .

(2) 整个循环过程中系统对外所做的总功以及从外界吸收的总热量(各过程吸热的代数和).

[解答] 单原子分子的自由度 $i = 3$.

(1) 在 $A \rightarrow B$ 的过程中, 系统对外所做的功为 AB 直线下的面积, 即

$A_{AB} = (p_A + p_B)(V_B - V_A)/2 = 200(\text{J})$,
内能的增量为

$$\begin{aligned}\Delta E_{AB} &= \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R(T_B - T_A) \\ &= \frac{i}{2} (p_B V_B - p_A V_A) = 750(\text{J}).\end{aligned}$$

吸收的热量为

$$Q_{AB} = \Delta E_{AB} + A_{AB} = 950(\text{J}).$$

$B \rightarrow C$ 是等容过程, 系统对外不做功. 内能的增量为

$$\begin{aligned}\Delta E_{BC} &= \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R(T_C - T_B) \\ &= \frac{i}{2} (p_C V_C - p_B V_B) = -600(\text{J}).\end{aligned}$$

吸收的热量为

$Q_{BC} = \Delta E_{BC} + A_{BC} = -600(\text{J})$,
就是放出 600J 的热量.

$C \rightarrow A$ 是等压过程, 系统对外做的功为

$$A_{CA} = p_A(V_A - V_C) = -100(\text{J}).$$

内能的增量为

$$\begin{aligned}\Delta E_{CA} &= \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R(T_A - T_C) \\ &= \frac{i}{2} (p_A V_A - p_C V_C) = -150(\text{J}).\end{aligned}$$

吸收的热量为

$Q_{CA} = \Delta E_{CA} + A_{CA} = -250(\text{J})$,
也就是放出 250J 的热量.

(2) 对外做的总功为

$$A = A_{AB} + A_{BC} + A_{CA} = 100(\text{J}).$$

吸收的总热量为

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 100(\text{J}).$$

由此可见: 当系统循环一周时, 内能不变化, 从外界所吸收的热量全部转化为对外所做的功.

12.9 1mol 单原子分子的理想气体, 经历如图所示的可逆循环, 连接 ac 两点的曲线 III 的方程为 $p = p_0 V^2/V_0^2$, a 点的温度为 T_0 .

(1) 以 T_0 , R 表示 I, II, III 过程中气体吸收的热量.

(2) 求此循环的效率.

[解答] 由题可知: $p_0 V_0 = RT_0$.

(1) I 是等容过程, 系统不对外做功, 内能的变化为

$$\begin{aligned}\Delta E_I &= \frac{i}{2} R(T_b - T_a) = \frac{i}{2} (p_b V_0 - RT_0) \\ &= \frac{i}{2} (9p_0 V_0 - RT_0) = 12RT_0.\end{aligned}$$

吸收的热量为

$$Q_I = \Delta E_I = 12RT_0.$$

II 是等容过程, 根据 III 的方程, 当 $p_c = 9p_0$ 时, $V_c = 3V_0$. 系统对外所做的功为

$$A_{II} = p_b(V_c - V_b) = 9p_0 2V_0 = 18RT_0.$$

内能的变化为

$$\begin{aligned}\Delta E_{II} &= \frac{i}{2} R(T_c - T_b) = \frac{i}{2} (p_c V_c - p_b V_b) \\ &= \frac{i}{2} 9p_0 2V_0 = 27RT_0.\end{aligned}$$

吸收的热量为

$$Q_{II} = \Delta E_{II} + A_{II} = 45RT_0.$$

在过程 III 中, 系统对外所做的功为

$$A_{III} = \int_{V_c}^{V_a} p dV = \frac{p_0}{V_0^2} \int_{V_c}^{V_a} V^2 dV$$

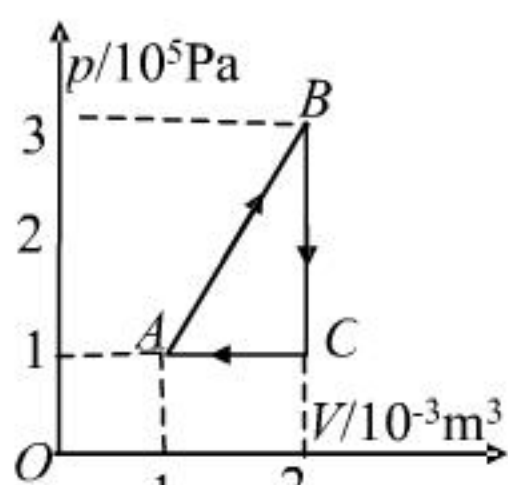


图 12.8

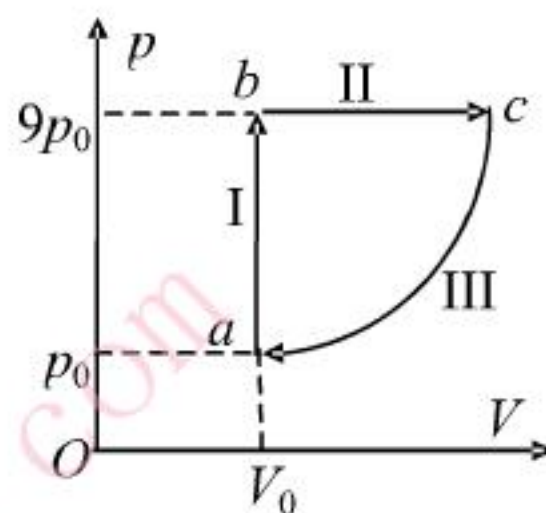


图 12.9

$$= \frac{p_0}{3V_0^2}(V_a^3 - V_c^3) = -\frac{26}{3}RT_0.$$

内能的变化为

$$\Delta E_{\text{III}} = \frac{i}{2}R(T_a - T_c) = \frac{i}{2}(RT_0 - p_c V_c)$$

$$= \frac{i}{2}(RT_0 - 9p_0 3V_0) = -39RT_0.$$

吸收的热量为

$$Q_{\text{III}} = \Delta E_{\text{III}} + A_{\text{III}} = -143RT_0/3.$$

(2) 系统对外做的总功为

$$A = A_I + A_{\text{II}} + A_{\text{III}} = 28RT_0/3,$$

系统从高温热源吸收的热量为

$$Q_1 = Q_I + Q_{\text{II}} = 57RT_0,$$

循环效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 16.37\%.$$

12. 10 1mol 理想气体在 400K 和 300K 之间完成卡诺循环. 在 400K 等温线上, 初始体积为 $1 \times 10^{-3} \text{m}^3$, 最后体积为 $5 \times 10^{-3} \text{m}^3$. 试计算气体在此循环中所做的功及从高温热源所吸收的热量和向低温热源放出的热量.

[解答] 卡诺循环由气体的四个变化过程组成, 等温膨胀过程, 绝热膨胀过程, 等温压缩过程, 绝热压缩过程.

气体在等温膨胀过程内能不改变, 所吸收的热量全部转化为对外所做的功, 即

$$\begin{aligned} Q_1 = A_1 &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV \\ &= RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 5.35 \times 10^3 \text{J}. \end{aligned}$$

气体在等温压缩过程内能也不改变, 所放出的热量是由外界对系统做功转化来的, 即

$$\begin{aligned} Q_2 = A_2 &= \int_{V_3}^{V_4} p dV = RT_2 \int_{V_3}^{V_4} \frac{1}{V} dV \\ &= RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}, \end{aligned}$$

利用两个绝热过程, 可以证明

$$V_4/V_3 = V_2/V_1,$$

可得

$$Q_2 = 4.01 \times 10^3 \text{J}.$$

气体在整个循环过程中所做的功为

$$A = Q_1 - Q_2 = 1.34 \times 10^3 \text{J}.$$

12. 11 一热机在 1000K 和 300K 的两热源之间工作, 如果

(1) 高温热源提高 100K,

(2) 低温热源降低 100K,

从理论上说, 哪一种方案提高的热效率高一些? 为什么?

[解答] (1) 热机效率为

$$\eta = 1 - T_2/T_1,$$

提高高温热源时, 效率为

$$\eta_1 = 1 - T_2/(T_1 + \Delta T),$$

提高的效率为

$$\begin{aligned} \Delta \eta_1 &= \eta_1 - \eta = \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2}{T_1 + \Delta T} \\ &= \frac{T_2 \Delta T}{T_1(T_1 + \Delta T)} = \frac{3}{110} = 2.73\%. \end{aligned}$$

(2) 降低低温热源时, 效率为

$$\eta_2 = 1 - (T_2 - \Delta T)/T_1,$$

提高的效率为

$$\begin{aligned} \Delta \eta_2 &= \eta_2 - \eta = \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2 - \Delta T}{T_1} \\ &= \Delta T/T = 10\%. \end{aligned}$$

可见: 降低低温热源更能提高热机效率. 对于温度之比 T_2/T_1 , 由于 $T_2 < T_1$, 显然, 分子减少一个量比分母增加同一量要使比值降得更大, 因而效率提得更高.

12. 12 使用一制冷机将 1mol, 10^5Pa 的空气从 20°C 等压冷却至 18°C , 对制冷机必须提供的最小机械功是多少? 设该机向 40°C 的环境放热, 将空气看作主要由双原子分子组成.

[解答] 空气对外所做的功为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV$$

$$= p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1),$$

其中 $T_2 = 291\text{K}$, $T_1 = 293\text{K}$. 空气内能的增量为

$$\Delta E = \frac{i}{2} R(T_2 - T_1),$$

其中 i 表示双原子分子的自由度: $i = 5$. 空气吸收的热量为

$$Q = \Delta E + A = \frac{i+2}{2} R(T_2 - T_1) = -58.17(\text{J}).$$

负号表示空气放出热量. 因此, 制冷机从空气中吸收的热量为

$$Q_2 = -Q = 58.17(\text{J}).$$

空气是低温热源, 为了简化计算, 取平均温度为

$$T'_2 = (T_2 + T_1)/2 = 292(\text{K});$$

环境是高温热源, 温度为

$$T'_1 = 313(\text{K}).$$

欲求制冷机提供的最小机械功, 就要将制冷机当作可逆卡诺机, 根据卡诺循环中的公式

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T'_1}{T'_2},$$

可得该机向高温热源放出的热量为

$$Q_1 = \frac{T'_1}{T'_2} Q_2 = 62.35(\text{J}),$$

因此制冷机提供的最小机械功为

$$W = Q_1 - Q_2 = 4.18(\text{J}).$$

[注意]由于低温热源的温度在变化, 所以向高温热源放出的热量的微元为

$$dQ_1 = \frac{T'_1}{T'_2} dQ_2,$$

其中 $dQ_2 = -dQ = -\frac{i+2}{2} R dT'_2$, 因此

$$dQ_1 = -\frac{i+2}{2} R T'_1 \frac{dT'_2}{T'_2},$$

积分得制冷机向高温热源放出的热量为

$$Q_1 = -\frac{i+2}{2} R T'_1 \ln \frac{T'_2}{T'_1} = 62.35(\text{J}),$$

与低温热源取温度的平均值的计算结果相同 (不计小数点后面 2 位以后的数字).

2003-5-17 拟

2003-5-29 改

第一章 质点运动学

题目: [1.1](#), [1.2](#), [1.3](#), [1.4](#), [1.5](#), [1.6](#), [1.7](#), [1.8](#), [1.9](#), [1.10](#)

第二章 质点力学的基本规律

题目: [2.1](#), [2.2](#), [2.3](#), [2.4](#), [2.5](#), [2.6](#), [2.7](#), [2.8](#), [2.9](#), [2.10](#),
[2.11](#), [2.12](#), [2.13](#), [2.14](#), *2.15, [2.16](#)

第三章 运动的守恒定律

题目: [3.1](#), [3.2](#), [3.3](#), [3.4](#), [3.5](#), [3.6](#), [3.7](#), [3.8](#), [3.9](#), [3.10](#),
[3.11](#), [3.12](#), [3.13](#), [3.14](#), [3.15](#), [3.16](#), *3.17

第四章 刚体定轴转动

题目: [4.1](#), [4.2](#), [4.3](#), [4.4](#), [4.5](#), [4.6](#), [4.7](#), [4.8](#), [4.9](#), [4.10](#),
[4.11](#), [4.12](#), [4.13](#)

第五章 狭义相对论

题目: [5.1](#), [5.2](#), [5.3](#), [5.4](#), [5.5](#), [5.6](#), [5.7](#), [5.8](#), [5.9](#), [5.10](#),
[5.11](#), [5.12](#), [5.13](#), [5.14](#)

第六章 振动

题目: [6.1](#), [6.2](#), [6.3](#), [6.4](#), [6.5](#), [6.6](#), [6.7](#), [6.8](#), [6.9](#), [6.10](#),
[6.11](#), [6.12](#), [6.13](#), [6.14](#), [6.15](#), [6.16](#), [6.17](#), [6.18](#), [6.19](#), [6.20](#)

第七章 波动

题目: [7.1](#), [7.2](#), [7.3](#), [7.4](#), [7.5](#), [7.6](#), [7.7](#), [7.8](#), [7.9](#), [7.10](#),
[7.11](#), [7.12](#), [7.13](#), [7.14](#)

第八章 光的干涉

题目: [8.1](#), [8.2](#), [8.3](#), [8.4](#), [8.5](#), [8.6](#), [8.7](#), [8.8](#), [8.9](#), [8.10](#),
[8.11](#), [8.12](#), [8.13](#), [8.14](#), [8.15](#), [8.16](#)

第九章 波的衍射

题目: [9.1](#), [9.2](#), [9.3](#), [9.4](#), [9.5](#), [9.6](#), [9.7](#), [9.8](#), [9.9](#), [9.10](#)

第十章 波的偏振

题目: [10.1](#), [10.2](#), [10.3](#), [10.4](#), [10.5](#), *10.6, *10.7, [10.8](#), [10.9](#), *10.10, [10.11](#)

第十一章 气体分子运动论

题目: [11.1](#), [11.2](#), [11.3](#), [11.4](#), [11.5](#), [11.6](#), [11.7](#), [11.8](#), [11.9](#), [11.10](#),
[11.11](#), [11.12](#), [11.13](#), [11.14](#), [11.15](#), [11.16](#), *11.17, *11.18, [11.19](#), [11.20](#), [11.21](#)

第十二章 热力学基本原理

题目: [12.1](#), [12.2](#), [12.3](#), [12.4](#), [12.5](#), [12.6](#), [12.7](#), [12.8](#), [12.9](#), [12.10](#), [12.11](#), [12.12](#)