

论文分类号 TP273  
密 级 内 部

单 位 代 码 10183  
研 究 生 学 号 2200721

吉 林 大 学  
硕 士 学 位 论 文

基于二分之一车的主动悬架设计

Active Suspension Control

Based On a Half-Car Model

作者姓名： 刘淳

专 业： 控制理论与控制工程

导师姓名

及 职 称： 陈虹 教授

论文起止年月：2001 年 9 月 至 2003 年 2 月

## 摘要

悬架系统是汽车的重要组成部分，关系车辆振动与操控问题，悬架设计是车辆设计的重要部分。悬架系统的设计为控制理论的应用提供了一个广泛的研究领域。本文以二分之一车为对象，利用鲁棒控制理论与 LMI（线性矩阵不等式）理论，进行主动悬架控制系统的分析与设计，使其满足车辆系统的性能要求。

本文首先给出了悬架系统的数学模型，利用鲁棒控制理论，将车辆在行驶中的参数变化描述为系统的结构不确定性。随后给针对悬架系统性能出了三种分析与评价的方法， $\mu$  分析（结构奇异值法）、RMS 增益法和传递函数法。本文以二分之一车模型为基础，考虑车辆的乘坐舒适性、稳定性与物理系统的约束，利用鲁棒控制理论，设计  $H_\infty$  与  $H_2$  主动悬架控制器，并对闭环系统进行分析与评价。最后，针对悬架控制的多目标性，利用 LMI 理论，进行系统性能的分析与状态反馈控制器的综合，对闭环系统进行分析与仿真。

本文的研究工作受教育部科学技术研究项目“约束不确定鲁棒优化控制的 LMI 方法及其滚动时域实现”资助。

**关键字：**悬架系统、主动悬架、鲁棒控制、不确定性、 $H_\infty$  与  $H_2$  控制、 $\mu$  分析、LMI 理论

## 目录

第一章 绪论 .....	1
1.1 汽车悬架的介绍 .....	1
1.2 悬架系统的性能要求 .....	2
1.3 控制理论在悬架设计和分析中的应用 .....	3
1.4 本文的主要研究内容 .....	5
第二章 悬架系统分析与设计的理论基础 .....	7
2.1 悬架系统的模型 .....	7
2.2 路面输入的模型 .....	8
2.3 主动悬架系统的模型及其基本性能要求 .....	11
2.4 悬架系统的不确定性描述及相应的鲁棒性准则 .....	13
2.5 悬架系统的性能要求与评价方法 .....	19
2.5.1 悬架系统的性能要求 .....	19
2.5.2 悬架系统性能的评价方法 .....	21
2.5.3 各种评价方法局限性 .....	21
2.6 本章小结 .....	23
第三章 主动悬架的鲁棒控制 .....	24
3.1 主动悬架系统的描述 .....	24
3.2 控制系统的设计 .....	25
3.2.1 性能要求的频率加权描述及增广系统 .....	25
3.2.2 $H_2$ 主动悬架的设计 .....	30
3.3.3 $H_\infty$ 主动悬架的设计 .....	32
3.4 控制器分析 .....	36
3.5 仿真结果 .....	41
3.5.1 随机路面输入仿真 .....	41

3.5.2 脉冲路面输入仿真 .....	43
3.6 本章小结 .....	44
<b>第四章 基于 LMI 的多目标主动悬架设计 .....</b>	<b>46</b>
4.1 预备知识 .....	46
4.2 基于 LMI 的线性系统分析 .....	47
4.2.1 $H_2$ 性能的 LMI 描述 .....	47
4.2.2 广义 $H_2$ 性能的 LMI 描述 .....	48
4.3 线性系统的 $H_2$ 与广义 $H_2$ 状态反馈 LMIs 实现 .....	48
4.3.1 $H_2$ 状态反馈 LMIs 实现 .....	49
4.3.2 广义 $H_2$ 状态反馈 LMIs 实现 .....	50
4.4 LMI 状态反馈方法设计控制器 .....	50
4.4.1 问题描述 .....	52
4.4.2 状态反馈控制器设计 .....	53
4.5 性能分析 .....	55
4.6 仿真结果 .....	57
4.6.1 随机路面输入仿真 .....	57
4.6.2 脉冲路面输入仿真 .....	59
4.7 本章小节 .....	60
<b>第五章 全文总结 .....</b>	<b>62</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>64</b>
<b>致谢 .....</b>	<b>68</b>

## 第一章 绪论

### 1.1 汽车悬架的介绍

汽车行驶时，由于路面不平等因素激起汽车的振动，使乘员处于振动环境之中。振动影响着人的舒适性、工作效能和身体健康。保持振动环境的舒适性，以保证驾驶员在复杂的行驶和操纵条件下具有良好的心态的准确的反应，它将影响“人—汽车”系统的操纵稳定性，对确保行驶安全是非常重要的。悬架是汽车的重要组成部分，其主要作用如下：

- 1、它把车体与车轴弹性地连接起来，并承受作用在车轮和车体之间的作用力。
- 2、缓冲来自不平路面给车体的冲击载荷，衰减各种动载荷引起车体的振动。
- 3、使非悬挂质量尽量跟随着地面运动，以减小车轮与地面之间附着力的损失，保证良好的轮胎接地性，从而提供良好的行驶安全性。
- 4、减小或抵消由空气动力、载荷、制动力及转向力的变化而引起的车身姿态的变化等。

因此，悬架对汽车的行驶平顺性、乘坐舒适性及操纵稳定性等多种使用性能都有很大影响。上述悬架系统的性能要求之间之是相互制约与矛盾的。因此，协调各个因素使车辆系统的总体性能达到最佳是设计悬架系统的目标。

同时，汽车在不同路面上行驶时所处的振动环境是多变的、不确定的，如汽车工况（加速、制动和转弯等）汽车本身参数变化（如载人或载货的多少引起车身质量的变化、轮胎气压等引起轮胎刚度的变化）外部干扰如风向、风力等。通常，悬架系统的设计是针对额定工况和额定参数进行的，当汽车在一个多变的不确定环境中时，悬架系统的实际性能将变坏。因此，在分析悬架系统时，不仅需要考虑平顺性、乘坐舒适性与操纵稳定性问题，还应考虑的问

题包括当存在不确定因素时，如何保证系统的稳定性、鲁棒性与期望性能。

## 1.2 悬架系统的性能要求

车辆动力学模型是进行性能分析和系统设计的基础，图 1-1 说明了与车辆行驶动力学有关的重要性能特性。在有限的悬架工作空间内，设计者必须为驾驶员和乘客提供良好的乘坐舒适性、可接受的车身姿态、以及对车轮动载荷的合理控制。

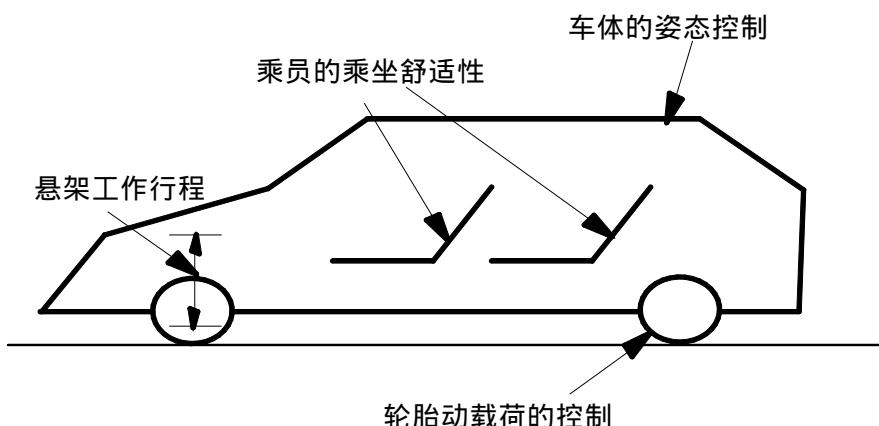


图 1-1 车辆行驶动力学的主要性能指标

综合悬架的基本功能和行使动力学的主要性能指标我们大体可以得出对理想悬架的设计期望是：

- 1、车辆在不同路面（包括不同的车速、路面不平度情况）上直线行驶时能够使车身及车轮的振动减少至最低水平，为乘员提供最好的乘坐舒适性（即所指的平顺性）。
- 2、从行驶安全性和操纵稳定性方面考虑，应该能够最大限度的减小轮胎的动载荷以保证良好的轮胎接地性。
- 3、悬架的动行程要控制在允许的范围内，以尽量保证不发生限位块撞击所引起的对人和货物的冲击。
- 4、从舒适性和稳定性考虑保证良好的车身姿态。

此外，还需考虑再结合其它控制系统的情况下车辆总体性能的要求，如

结合自动防抱死系统 (ABS)、牵引力控制系统 (TCS) 和四轮转向系统 (4WS) 等在不同车辆工况下 (如启动、制动、转弯时), 仍需保证对车身的方向控制和姿态控制, 或根据需要提供各轮胎的载荷分布, 同时提供良好的乘坐舒适性。以上要求在车辆参数变化时也同样需要保证 (如车身载荷或轮胎垂直刚度在一定范围内变化)。但是对这样的理想悬架设计期望似乎过于苛求。而实际上在通常的悬架设计中, 上述各项要求及性能之间存在着冲突与矛盾。比如在一个低刚度的软悬架能获得较好的乘坐舒适性, 但同时需要较大的悬架空间又带来较差的车身姿态控制; 而为了保证较好的操纵稳定性, 使车辆在转弯、起动和刹车时车体的点头、后坐较小, 又要求车辆具有较“硬”的特点。因此, 悬架设计者要对以上变化因素给予充分考虑。多年来, 车辆工程师们正是通过反复不断的探索, 使其设计性能尽量体现对以上各因素合理的折中, 以及对不同性能的要求及侧重, 以实现尽可能的综合。

### 1.3 控制理论在悬架设计和分析中的应用

悬架系统按工作原理, 可分为被动悬架、半主动悬架和主动悬架。被动悬架由普通弹簧和阻尼器组成, 结构简单、价格低廉, 且经过几十年的发展人们对被动悬架的设计已经积累了丰富的经验, 目前仍广泛地应用在汽车上。半主动悬架通过快速切换或连续可调阻尼改变阻尼力达到缓冲隔振的效果, 结构简单、不需要外部供能, 已在轿车上得到广泛的应用。被动悬架只是针对单一工况的最优, 半主动悬架只能做到部分工况的最优, 这两种悬架对于所有工况无法达到全局最优。对于主动悬架来说, 它包含一个由外部供能的主动力发生器, 随着控制理论、电子及传感器技术与计算机的进步, 主动悬架作为一种新的悬架结构开始应用在汽车设计中。近年来, 国内外学者应用控制理论所能提供的方法在汽车悬架控制系统的研究方面作了大量的工作: 古典控制理论的根轨迹法和频率法; 现代控制理论的振型分析与控制、极点配置法、区域极点配置法、速度反馈、最优控制; 自适应、自校正及 Gain-Scheduling 控制; 神经网络和

模糊控制；以及鲁棒控制与非线性控制。

在悬架控制系统的研究中，随机线性最优控制（LQG）的应用占据主导地位。一方面是由于在不平路面上行驶的汽车所处的振动环境是随机的，其路面速度的输入可以看作是高斯白噪声；相互冲突的悬架系统诸性能要求也可以用二次型性能指标描述，其中的加权系数代表各性能要求的重要性与不重要性。另一方面是由于LQG理论（包括Kalman最优滤波与分离原理）不仅为状态反馈也为输出反馈控制系统的设计提供了非常完善的工具。在LQG的框架内是采用全状态反馈的最优控制，还是部分状态反馈的次优控制，或是基于状态观测器的输出最优控制，完全取决于系统状态是否全部可以测量。当然，前提条件是悬架系统状态空间描述 $(A, B)$ 是可稳定的。在选定测量输出后 $(C, A)$ 应该是可测的。另外，在 $(Q^{1/2}, A)$ 可测的前提下，是选择位移和速度作为被控输出体现在性能指标中，还是再加入加速度项完全由物理意义是否明确、是否能更好地反映悬架系统的性能要求来决定。因此，LQG主动悬架系统的不足实际上是LQG理论本身的不足：

- 1、没有明确的理论来指导加权矩阵的选取。定性的说，加权系数是对所选取被控输出的归一化处理，并在此基础上反映诸控制输出的重要性与不重要性。由于诸被控输出量之间的耦合，调整加权系数以获得期望的控制性能并不是一件容易的事，往往需要反复的调试。
- 2、没有考虑模型不确定性，只是在平均的意义上考虑随机白噪声扰动。由此而产生的问题是LQG控制系统的鲁棒性差，尤其是对模型不确定性的鲁棒性。

鉴于实际汽车是以不同速度行驶在不同的路面上，作为系统干扰的路面输入变化范围很大，且车辆系统也存在不确定性因素如车身质量和轮胎刚度等。人们把目光投向了自适应控制，即要求控制系统能自动地调整参数以适应车速、路面情况及车辆系统参数的改变。这其中也包括基于在线参数估计（如最小二乘法和Kalman最优估计）的自校正控制和离线Gain-Scheduling方法。

八十年代发展起来的鲁棒控制为系统地解决不确定系统的鲁棒性分析与

设计问题提供了较完整的理论框架。其在汽车悬架控制系统分析与设计中的应用也得到了广泛的关注。无论是针对简单的四分之一车模型，或是二分之一车模型，还是针对考虑了液压工作器特性的整车模型；无论是针对参数不确定性（如车身质量和轮胎刚度）的理论分析，还是实验车的实验结果，都充分表明了鲁棒控制理论在主动悬架系统设计方面的优越性。

另外，前馈加反馈的控制策略在悬架控制系统中应用也相当普遍，一般称其为预瞄控制，所用的前馈信号是前方的路面状况，而反馈控制策略基本为LQG。无论是采用路面位移传感器，还是将前轮感受到的路面信息传递给后轮，由于控制系统提前获得影响乘坐舒适性和操纵稳定性最主要的干扰信息，预瞄控制悬架系统在提高车辆性能方面的优势是显然的。

## 1.4 本文的主要研究内容

控制理论的应用推动了主动悬架系统理论研究的发展。传感器技术、液电控元件制造技术及计算机微处理器技术的进步，使主动悬架逐渐走向实用。这激励了更多的理论与工程应用者关注主动悬架控制方法的研究，目的在于获得汽车系统的最佳总体性能和在多变的不确定的环境中行驶的鲁棒性。与此同时，控制理论在经历了经典控制理论和现代控制理论的发展后，已进入了鲁棒控制理论的阶段。 $H_\infty$ 理论、 $\mu$ 分析与 LMI 理论为控制系统的鲁棒性分析与综合提供了非常有效的工具。

本论文针对二分之一车单轮辙模型，应用鲁棒控制理论进行主动悬架控制系统的分析与设计，主要内容如下：

第二章针对二分之一车模型介绍了悬架系统设计和分析的理论基础，着重对模型的建立与需要设计和分析的方法加以介绍，介绍了带有不确定性的因素的悬架的数学，另外对相应的系统鲁棒性分析的理论和方法给出了相关的叙述。

第三章针对具体的二分之一车进行了实例分析，采用的方法主要应用鲁

棒控制理论设计主动悬架  $H_\infty$  控制器与  $H_2$  控制器，并进行比较。其中进行闭环分析时，针对车身垂直加速度的特殊要求进行相应频率加权处理。然后又采用了鲁棒控制理论的  $\mu$  分析进行相应的鲁棒性分析。最后进行时域仿真。

第四章针对悬架设计的多目标性与不确定性，以二分之一车为模型，采用 LMI 方法设计主动悬架状态反馈控制器。首先简单介绍 LMI 的相关知识，以及系统  $H_2$  性能与广义  $H_2$  性能的 LMI 描述。随后进行主动悬架状态反馈控制器综合，同时进行时域仿真。

第五章对全文进行了总结，阐述了对悬架设计的一些不足和进一步的工作。

## 第二章 悬架系统分析与设计的理论基础

### 2.1 悬架系统的模型

在控制系统的设计中，对象的模型是不可缺少的，在这里我们将描述关于悬架模型的建立。

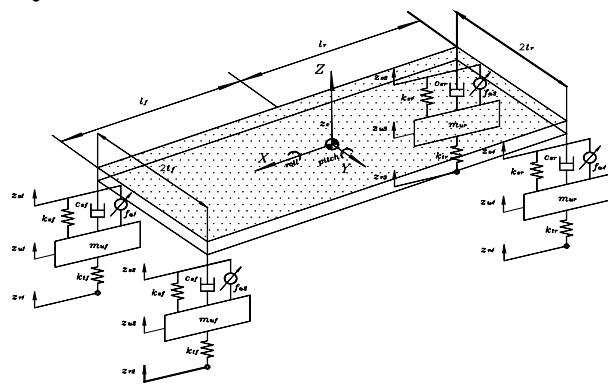


图 2-1 七自由度整车模型

汽车是一个复杂的振动系统，本文根据所分析的问题进行简化，图 2-1 为一个把汽车车身看作为刚体的立体模型。汽车的悬挂质量为  $m_u$ ，它由车身、车架及其上的总成所构成。该质量通过减振器和悬架弹簧与车轴、车轮相连接。车轮、车轴构成的非悬挂质量为  $m_w$ ，车轮在经过具有一定弹性和阻尼的轮胎支撑在不同的路面上。

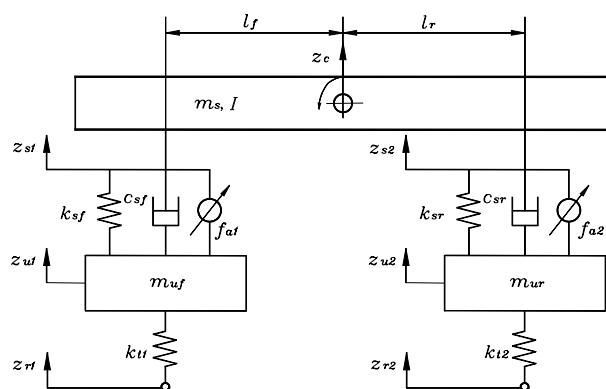


图 2-2 四自由度半车模型

本课题将针对图 2-2 所示的四自由度半车模型进行分析与设计。汽车的悬挂质量为  $m_s$ ，绕  $y$  轴转动惯量为  $I_\phi$ ，具有垂直振动与俯仰振动，前非悬挂质量  $m_{uf}$  与后非悬挂质量  $m_{ur}$ ，只有垂直振动。 $k_{sf}$  为前悬架刚度， $k_{sr}$  为后悬架刚度， $c_{sf}$  为前悬架阻尼系数， $c_{sr}$  为后悬架阻尼系数， $k_{tf}$  为前轮刚度， $k_{tr}$  为后轮刚度， $f_{af}$  为前悬架控制力输入， $f_{ar}$  为后悬架控制力输入。其动力学方程如下：

$$\left. \begin{aligned} M_s \ddot{\phi} &= GC_s(\dot{z}_u - \dot{z}_s) + GK_s(z_u - z_s) + Gf_a \\ M_u \ddot{z}_u &= C_s(\dot{\phi} - \dot{z}_u) + K_s(z_s - z_u) + K_t(z_r - z_u) - f_a \\ \ddot{z}_s &= G\ddot{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中， $q = [z_c \ \phi]^T \in \mathbb{R}^2$ ， $z_u = [z_{u1} \ z_{u2}]^T \in \mathbb{R}^2$ ， $z_s = [z_{s1} \ z_{s2}]^T \in \mathbb{R}^2$ ， $z_r = [z_{r1} \ z_{r2}]^T \in \mathbb{R}^2$ ， $f_a = [f_{a1} \ f_{a2}]^T \in \mathbb{R}^2$ ，

$$\begin{aligned} M_s &= \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & I_\phi \end{bmatrix} & C_s &= \begin{bmatrix} c_{sf} & 0 \\ 0 & c_{sr} \end{bmatrix} & K_s &= \begin{bmatrix} k_{sf} & 0 \\ 0 & k_{sr} \end{bmatrix} \\ M_u &= \begin{bmatrix} m_{uf} & 0 \\ 0 & m_{ur} \end{bmatrix} & K_t &= \begin{bmatrix} k_{tf} & 0 \\ 0 & k_{tr} \end{bmatrix} & G &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -l_f & l_r \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2.2 路面输入的模型

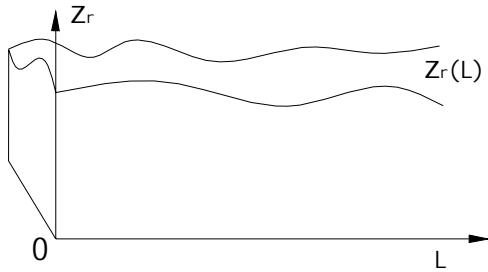


图2-3 路面不平度曲线

分析悬架在时域或频域内的性能，首先要用到地面的随机输入。路面相对基准平面的垂直位移  $z_r$  沿水平距离方向的变化用图2-3表示。在不同的路段测量，很难得到两个完全相同的路面轮廓曲线（或不平度函数）。通常是把测

量得到的大量路面不平度随机数据，经数据处理得到路面功率谱密度  $G_{z_r}(n)$ ，一种被普遍接受的路面功率谱密度为：

$$G_{z_r}(n) = G_{z_r}(n_0)(n/n_0)^{-w} \quad (2.2)$$

式中  $n$ ：为空间频率，它是波长的倒数，表示每米长度中包含的波数，单位为  $m^{-1}$ ； $n_0$ ：为参考空间频率，一般取  $n_0 = 0.1m^{-1}$ ； $G_{z_r}(n_0)$ ：为参考空间频率下的路面谱值，称为路面不平度系数，单位为： $m^2/m^{-1}$ ； $w$ ：为频率指数，确定每段功率谱斜线的斜率，取值由路面谱的频率结构确定<sup>[40]</sup>。

根据路面功率谱密度把路面按不平度分为8级<sup>[40]</sup>。各级（在此我们只列出相应的4级）路面不平度系数  $G_{z_r}(n_0)$  的变化范围及其几何平均值，分级路面谱的频率指数  $w=2$ 。

表2-1 路面不平度部分级别分级标准

路面等级	$G_{z_r}(n_0) \times 10^{-6} m^2/m^{-1}$			$\sigma_{z_r} \times 10^{-3} m^2/m^{-1}$			
	$n_0 = 0.1m^{-1}$	下限	几何平均值	上限	下限	几何平均值	上限
A	8	16	32	2.69	3.81	5.38	
B	32	64	128	5.38	7.61	10.77	
C	128	256	512	10.77	15.23	21.53	
D	512	1024	2048	21.53	30.45	43.06	

除了路面的垂直位移功率谱外，还可用路面的垂直速度、加速度来描述路面不平度的统计特性。路面速度功率谱、加速度功率谱和垂直位移功率谱之关系为：

$$G_{\dot{z}}(n) = (2\pi n)^2 G_{z_r}(n) \quad (2.3)$$

$$G_{\ddot{z}}(n) = (2\pi n)^4 G_{z_r}(n) \quad (2.4)$$

当频率指数  $w=2$  时，把式(2.2)代入式(2.3)得：

$$G_{\hat{x}}(n) = (2\pi n_0)^2 G_{z_r}(n_0) \quad (2.5)$$

可以看出，此时路面速度功率谱幅值在整个频率范围内为一常数，即为一白噪声。因速度功率谱幅值大小仅与不平度系数  $G_{z_r}(n_0)$  有关，所以有时用它来计算分析会更为方便。

谱函数  $G_{z_r}(n)$  描述路面的统计特性，仅与路面距离和表面粗造度有关，而与车速和时间无关。故空间谱函数描述路面特性具有唯一性。但在分析来自不平路面的激励在悬架上产生的动态响应时，要用到的路面不平度函数  $z_r(L)$ 。必须考虑汽车的行驶速度 ( $L = vt$ )。为了分析方便，通常把空间谱函数转化为时间频谱函数。设车速为  $v$ ，则二者之间的转换关系为：

$$G_{z_r}(f) = \frac{G_{z_r}(n)}{v} \quad (2.6)$$

这样就可以得到时间频率域内路面不平度垂直速度和加速度的谱密度公式分别为：

$$G_{\hat{x}}(f) = (2\pi f)^2 G_{z_r}(f) = 4\pi^2 G_{z_r}(n_0) n_0^2 v \quad (2.7)$$

$$G_{\ddot{x}}(f) = (2\pi f)^4 G_{x_g}(f) = 16\pi^4 G_{x_g}(n_0) n_0^2 f^2 v \quad (2.8)$$

通过以上分析，一般有两种产生随机路面不平度时间轮廓的方法，即由一白噪声通过积分器产生或由一白噪声通过成形滤波器产生。

随机路面输入  $z_r$  可以用公式(2.9)来描述。

$$\dot{z}_r(t) + 2\pi f_0 z_r(t) = 2\pi \sqrt{G_0 V} w(t) \quad (2.9)$$

其中， $G_0$  是路面不平度系数， $V$  是车辆前进速度。 $w$  是均值为零，强度为1(单位RMS值)的均匀分布白噪声， $f_0$  是滤波器的下限截止频率。路面输入的时间频率是车速与空间频率的乘积。

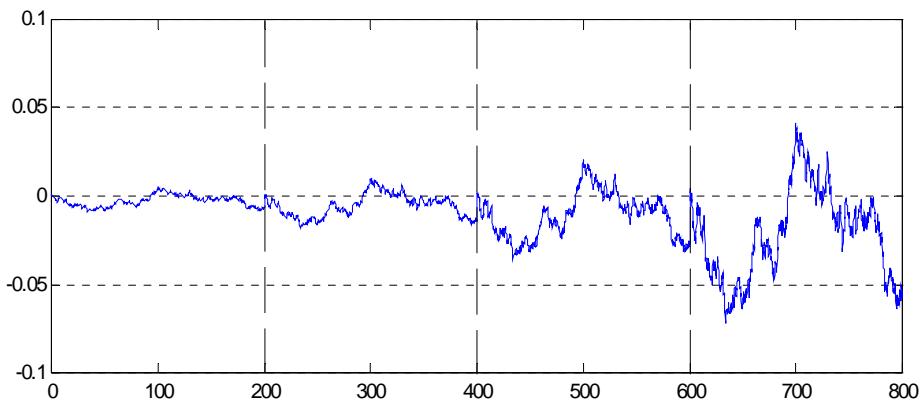


图2-4 积分白噪声随机路面模拟历程

图2-4为四种路面输入情况下的模拟时间历程(横坐标为行车距离,纵坐标为路面的垂直位移,单位均为:m)。采用A级、B级、C级、D级四种路面作为模拟比较。取 $f_0=0$ ,滤波器相当于一个积分环节,四种路面输入模型参数值见表2-2。

表2-2 车辆系统路面的输入具体参数

路面类型	$G_0(\text{m}^2/\text{m}^{-1})$	V (m/s)	模拟路面距离(m)
A级	$1.6 \times 10^{-7}$	20	0 ~ 200
B级	$6.4 \times 10^{-7}$	20	200 ~ 400
C级	$2.56 \times 10^{-6}$	20	400 ~ 600
D级	$1.024 \times 10^{-5}$	20	600 ~ 800

### 2.3 主动悬架系统的模型及其基本性能要求

建立主动悬架模型时,路面垂直位移可以看作是系统的干扰输入,它是由汽车以一定速度驶过不平路面引起的。结合给出的二分之一车模型与生成路面输入的方程,选取状态变量为:

$$x_v = \begin{bmatrix} (z_s - z_u)^T & \ddot{x}_s^T & (z_u - z_r)^T & \ddot{x}_u^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^8;$$

则主动悬架二分之一车模型的状态方程为：

$$\dot{x}_v = A_v x_v + B_v f_a + F_v w \quad (2.10)$$

其中，

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -M_{sG} K_s & -M_{sG} C_s & 0 & M_{sG} C_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_u^{-1} K_s & M_u^{-1} C_s & -M_u^{-1} K_t & -M_u^{-1} C_s \end{bmatrix}, B_v = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{sG} \\ 0 \\ M_u^{-1} \end{bmatrix}, F_v = -2\pi\sqrt{G_0 V} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

设计悬架时首先要考虑车辆乘坐舒适性的要求，而车身垂直加速度  $\ddot{x}_c$  与车身俯仰加速度  $\ddot{\phi}$  是评价舒适性的主要指标。其方程为：

$$\ddot{x}_c = \begin{bmatrix} -M_s^{-1} G K_s & -M_s^{-1} G C_s & 0 & M_s^{-1} G C_s \end{bmatrix} x_v + M_s^{-1} G f_a$$

其中， $q = [z_c \ \ \phi]$ 。

兼顾操纵稳定性的要求，需要考虑轮胎与路面的附着效果。具体要求为当车辆在不平路面上行驶时其轮胎不能离开地面，即轮胎与路面的动载荷必须小于静载荷，即  $k_{ti}(z_{ui} - z_{ri}) < f_{kti}$  ( $i = 1, 2$ )。其中， $k_{ti}(z_{ui} - z_{ri})$  为轮胎动载荷，

$$\begin{cases} f_{kt1} = (l_r m_s g + (l_f + l_r) m_{uf} g) / (l_f + l_r) \\ f_{kt2} = (l_f m_s g + (l_f + l_r) m_{ur} g) / (l_f + l_r) \end{cases}$$

为轮胎静载荷。

同时由于悬架机械结构的行程的限制，还应将悬架的动行程  $z_s - z_u$  限制在一定的范围内，以免撞击限位块破坏乘坐舒适性。

综上所述，系统的输出变量为：

$$z_v = [\ddot{x}_c \ z_s - z_u \ F_k(z_{ui} - z_{ri})]$$

其中， $F_k(z_{ui} - z_{ri}) = [0 \ 0 \ F_k \ 0]^T$ ， $F_k = \text{diag}\{k_{ti} / f_{kti}\}$ , ( $i = 1, 2$ )

系统的输出方程为：

$$z_v = \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ z_s - z_u \\ F_k(z_{ui} - z_{ri}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_s^{-1} G K_s & -M_s^{-1} G C_s & 0 & M_s^{-1} G C_s \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_k & 0 \end{bmatrix} x_v + \begin{bmatrix} M_s^{-1} G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f_a \quad (2.11)$$

$$z_a \in \mathbb{J}^6, i=1,2$$

## 2.4 悬架系统的不确定性描述及相应的鲁棒性准则

在实际中车辆系统存在着诸多不确定性，如由于载人或载货重量的变化，我们可能只知道悬挂质量是在某个范围内取值；又由于轮胎气压的变化，轮胎刚度也是在一定范围内变化的。此外，弹簧、阻尼器等机械元件的特性实际上是非线性的，而我们采用的是线性模型来描述，即系统可能存在未建模动态或非线性不确定性。因此，需分析悬架系统的鲁棒性。具体地说，当存在不确定性时，悬架系统是否还是稳定的及是否还能维持前面提到的性能要求，即路面输入对车身纵向加速度与俯仰加速度的影响是否仍为最小，对悬架动行程及轮胎动静载荷比的影响是否还保持在允许范围内。

为了讨论我们所描述的车辆系统的鲁棒性，首先应给出系统不确定性的定量描述。一般地说，不确定性可分为参数不确定性、未建模动态。从描述不确定性的方法分，有非结构不确定性、结构不确定性。下面讨论各种不确定性的描述方式及其对应的鲁棒性准则。

在实际对象中，往往描述动态特性的方程式具有已知的形式，即模型的结构是已知的，但是方程式中具有不确定的系数，即模型参数的值是不确定的。一般地，包含在模型参数中的各种系数，由于含有测量误差、元器件老化或者动作点变化和线性近似等原因，常常含有不确定性；因而模型参数多少都含有不确定性。这种不确定性由于具有已知的结构，所以称为结构不确定性。另外一种就是非结构不确定性它包括一些未建模动态特性等等。采用一些典型的非结构不确定性来描述不确定性系统，不仅是控制系统设计的需要，而且可以较容易地作出一些精确的结论，其代价当然是这些结论的保守性。下面我们就结合悬架系统来讨论相应的不确定性的表示方法。

如果悬架系统是时不变的，即各系数矩阵是时不变（或变化缓慢可以认为是时不变时），则可采用  $H_\infty$  理论中通用的  $M - \Delta$  结构描述具有不确定性的

二分之一车模型。例如考虑悬挂质量  $m_s$  的变化范围为 $\pm 30\%$ ，转动惯量  $I_\phi$  的变化范围为 $\pm 10\%$ ，即：

$$m_s = \bar{m}_s \pm 0.3\bar{m}_s \quad (2.12)$$

$$I_\phi = \bar{I}_\phi \pm 0.1\bar{I}_\phi \quad (2.13)$$

其中  $\bar{m}_s$  为名义悬挂质量。由于系统模型中这个参数出现在分母中，为此利用下式将其变为上线性分式结构 (*Linear Fractional Transformation*, 缩写 *LFT*)：

$$\frac{1}{m_s} = \frac{1}{\bar{m}_s(1+0.3\delta_{ms})} = \frac{1}{\bar{m}_s} - \frac{0.3}{\bar{m}_s} \delta_{ms} (1+0.3\delta_{ms})^{-1} = F_u(M_{ms}, W_{ms} \delta_{ms}) \quad (2.14)$$

其中， $|\delta_{ms}| < 1$ ， $W_{ms} = 0.3$  及

$$M_{ms} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{\bar{m}_s} & \frac{1}{\bar{m}_s} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{I_\phi} = \frac{1}{\bar{I}_\phi(1+0.1\delta_{I_\phi})} = \frac{1}{\bar{I}_\phi} - \frac{0.1}{\bar{I}_\phi} \delta_{I_\phi} (1+0.1\delta_{I_\phi})^{-1} = F_u(M_{I_\phi}, W_{I_\phi} \delta_{I_\phi}) \quad (2.15)$$

其中  $|\delta_{I_y}| < 1$ ， $W_{I_y} = 0.1$  及

$$M_{I_y} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{\bar{I}_\phi} & \frac{1}{\bar{I}_\phi} \end{bmatrix}$$

由于悬架质量不确定引起的轮胎静载的不确定性描述如下：

$$1/(m_{u_1} + L_2 m_s / (L_1 + L_2)) = F_u(M_{su_1}, W_{su_1} \delta_{su_1}) \quad (2.16)$$

其中， $|\delta_{su}| < 1$ ，

$$W_{su} = \frac{0.3 \frac{L_2 \bar{m}_s}{L_1 + L_2}}{\left( \frac{L_2 \bar{m}_s}{L_1 + L_2} + m_{u_1} \right)}$$

以及

$$M_{su_f} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{(\frac{L_2\bar{m}_s}{L_1+L_2}+m_{u_1})g} & \frac{1}{(\frac{L_2\bar{m}_s}{L_1+L_2}+m_{u_1})g} \end{bmatrix}$$

$$1/(m_{u_2} + L_1 m_s / (L_1 + L_2)) = F_u(M_{su_2}, W_{su_2} \delta_{su_2}) \quad (2.17)$$

其中  $|\delta_{su}| < 1$  ,

$$W_{su} = \frac{0.3 \frac{L_1 \bar{m}_s}{L_1 + L_2}}{\left( \frac{L_1 \bar{m}_s}{L_1 + L_2} + m_{u_2} \right)}$$

以及

$$M_{su_f} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{(\frac{L_1\bar{m}_s}{L_1+L_2}+m_{u_2})g} & \frac{1}{(\frac{L_1\bar{m}_s}{L_1+L_2}+m_{u_2})g} \end{bmatrix}$$

我们考虑悬挂质量  $m_s$  和  $k_t$  的参数不确定性, 图 2-5 表示二分之一车悬架模型控制系统的一般框图。

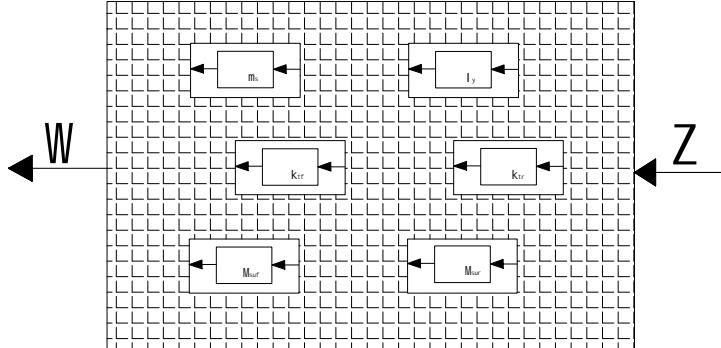


图 2-5 具有多种不确定性的结构图

时不变不确定性是稳定的且满足  $|\delta_{m_s}| < 1$ 、 $|\delta_{I_\phi}| < 1$ 、 $|\delta_{k_{u1}}| < 1$ 、 $|\delta_{k_{u2}}| < 1$ 、 $|\delta_{s_{u1}}| < 1$ 、 $|\delta_{s_{u2}}| < 1$ 。利用鲁棒控制理论的“pulling out the  $\Delta$ s”原理, 可以将图 2-5 转化为图 2-6 的形式, 其中,

$$\Delta(s) = diag\{\delta_{m_s} \quad \delta_{I_\phi} \quad \delta_{k_{u1}} \quad \delta_{k_{u2}} \quad \delta_{s_{u1}} \quad \delta_{s_{u2}}\} \quad (2.18)$$

$P(s)$  代表合成的名义悬架系统。

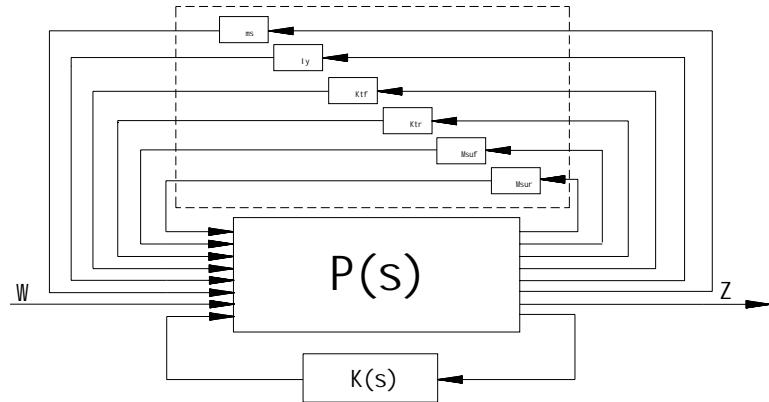


图 2-6 拉出不确定性的结构图

由于控制器  $K(s)$  是确定的，即在后面章节中我们设计的。因此在分析系统鲁棒性时可以将  $K(s)$  并入  $P(s)$  中形成如图 2-7 所示的结构：

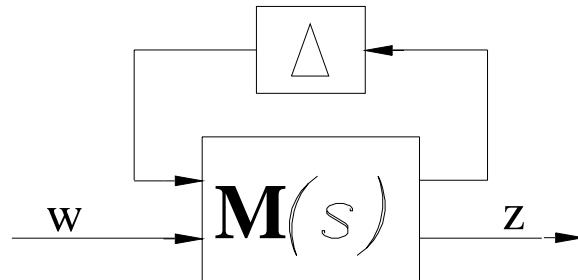


图 2-7 不确定性的  $M - \Delta$  结构

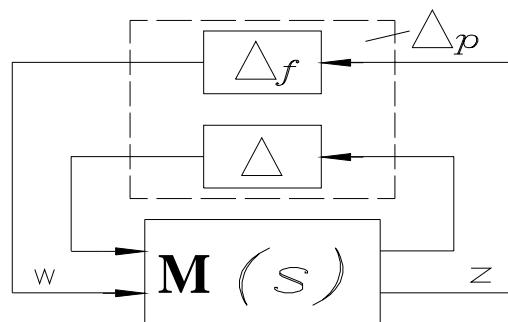


图 2-8 分析鲁棒性能的不确定性结构

图 2-6 的不确定性具有块对角形式，其结构是已知的，称为结构不确定

性。一般情况，时不变结构不确定性  $\Delta(s)$  为：

$$\Delta(s) = \left\{ \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r, \Delta_1(s), \Delta_2(s), \dots, \Delta_F(s)) : |\delta_i| < 1; \|\Delta_j(s)\|_\infty < 1 \right\} \quad (2.19)$$

$$i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, F$$

其中  $\Delta_j(s), j = 1, 2, \dots, F$  是稳定的。这样，可以利用系统的结构奇异值  $\mu$  分析系统的鲁棒性，即有：

**定理 2.1**<sup>[34]</sup>: 如图 2-7 所示的不确定系统，当且仅当  $\sup_{\omega} \mu_{\Delta}(M(j\omega)) \leq 1$  时，对所有结构不确定性 (2.19) 是鲁棒稳定的。

图 2-7 所示系统的输入输出性能一般可由从干扰输入  $w$  到输出  $z$  的 RMS 增益来描述。给定实数  $\gamma > 0$ ，如果

$$\|F_u(M(s), \Delta(s))\|_\infty \leq \gamma \quad (2.20)$$

则称系统从  $w$  到  $z$  的输入输出 RMS 增益不大于  $\gamma$ （也称系统的输入输出性能  $\gamma$ ），其中  $F_u(M(s), \Delta(s))$  为从  $w$  到  $z$  的传递函数。在给定不确定性  $\Delta(s)$  的情况下，满足 (1.18) 的最小的  $\gamma$  称为系统的鲁棒  $H_\infty$  性能，记为  $\gamma^*$ 。根据图 2-7 可将  $M(s)$  分块为

$$M(s) = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix}$$

则，

$$F_u(M(s), \Delta(s)) = M_{22}(s) + M_{21}(s)\Delta(s)(I - M_{11}(s)\Delta(s))^{-1}M_{12}(s) \quad (2.21)$$

于是，条件 (2.19) 归一化后变为  $\|F_u(M_m(s), \Delta(s))\|_\infty \leq 1$ ，其中，

$$M_m(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} P(s)$$

为了分析当存在不确定性  $\Delta(s)$  时能否维持某一期望的输入输出性能  $\gamma$ ，可将图 2-7 重画成图 2-8 的形式，其中  $\Delta_f$  是假想的性能不确定性假设是稳定的且满足  $\|\Delta_f(s)\|_\infty < 1$ 。定义  $\Delta_p = \text{diag}\{\Delta_f, \Delta\}$ ，则可将鲁棒性能的问题转化为鲁棒稳定性的问题。于是，有下面的定理。

**定理 2.2<sup>[34]</sup>:** 不确定系统如图 2-7 所示，其中  $\Delta(s)$  具有 (2.19) 的块对角形式。给定实数  $\gamma > 0$ ，当且仅当  $\sup_{\omega} \mu_{\Delta_p}(M_m(j\omega)) \leq 1$ ，系统的输入输出性能  $\gamma$  对所有块对角不确定性 (2.19) 是鲁棒的。再考虑图 2-7 所示的不确定系统，假设  $\Delta(s)$  是稳定的且满足  $\|\Delta(s)\|_{\infty} < 1$ 。从结构上讲，我们不再假设  $\Delta(s)$  具有块对角形式，而允许其为满块的。由于  $\Delta(s)$  的结构是未知的，称为非结构不确定性。对非结构不确定系统，可以用最大奇异值方法来分析系统的鲁棒稳定性，即有

**定理 2.3<sup>[34]</sup>:** 非结构不确定系统如图 2-5 所示。假设  $\Delta(s)$  是稳定的且满足  $\|\Delta(s)\|_{\infty} < 1$ ，当且仅当  $\sup_{\omega} \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega)) \leq 1$ ，则系统是鲁棒稳定的。

定理 2.1 和 2.3 给出了结构不确定系统和非结构不确定系统鲁棒稳定性的充要条件。据此，可以计算使系统保持稳定的最大的不确定性（在  $\Delta(s)$   $H_{\infty}$  范数的意义下）。定义结构不确定系统的稳定裕度为

$$\alpha = \frac{1}{\sup_{\omega} \mu_{\Delta}(M(j\omega))}$$

非结构不确定系统的稳定裕度定义为

$$\alpha = \frac{1}{\sup_{\omega} \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))}$$

则使系统保持稳定的最大的不确定性为  $\alpha\Delta(s)$  满足  $\|\alpha\Delta(s)\|_{\infty} < 1$ 。

定理 2.2 给出了结构不确定系统的输入输出性能鲁棒性的充要条件。据此，可以计算在给定不确定性的情况下系统的鲁棒  $H_{\infty}$  性能  $\gamma^*$ ，即  $\gamma^*$  为满足  $\sup_{\omega} \mu_{\Delta_p}(M_m(j\omega)) \leq 1$  的最小的  $\gamma$ 。必须指出，结构奇异值  $\mu$  方法和最大奇异值方法仅适用于线性时不变系统且不确定性也是线性时不变的。

## 2.5 悬架系统的性能要求与评价方法

### 2.5.1 悬架系统的性能要求

这里我们重点针对二分之一车模型提出具体的要求。由于二分之一车不涉及车辆的侧倾性能，所以我们考虑的是重点是以下三项性能指标：乘坐舒适性、轮胎接地性和悬架动行程。

乘坐舒适性是人的主观感觉。如何定量的衡量这种主观感觉是控制律设计的一个主要问题，因为只有这样才能对控制律的实施效果做定量的评价。人们经过长期的探索，座椅加速度的均方根值可以作为乘坐舒适性客观评价指标。在实际车辆中，座椅是弹簧阻尼系统，它对提高乘坐舒适性起着很大的作用，另外，由于后轮路面激励是滞后的前轮路面激励，所以座椅的位置对乘坐舒适性有着非常大的影响。为了使控制率的设计简单明了，在二分之一车辆系统中，座椅是指车质心垂直上方的硬座椅。仅有座椅加速度均方根值还不够，根据人体对不同频带加速度的敏感程度，ISO2632/1,3 定义了加速度依频率加权函数。这样，就得到了一个新的乘坐舒适性评价指标，加速度加权均方根值。加速度频率加权函数由下式定义：

$$H_{iso}(f) = \begin{cases} 0.5\sqrt{f} & , 1.0 \leq f \leq 4.0 \\ 1.0 & , 4.0 \leq f \leq 8.0 \\ 8.0/f & , 8.0 \leq f \leq 80.0 \end{cases} \quad (2.22)$$

可以看出频率加权函数的定义区间为1: 8 Hz，人体对4: 8 Hz的垂直振动最敏感。这个标准还有一些不足，比如，对低于1Hz的振动对人体的影响没有定义，这实际上是不正确的，因为频带在0.05: 0.5 Hz之间的振动容易引起“晕车”，另外，该标准没有定义转动加速度对人体的影响。

悬架动行程过大的话，会频繁撞击缓冲块，从而破坏乘坐舒适性，另外，由于悬架导向机构的作用，悬架运动会改变前轮定位参数，从而影响操纵稳定

性。尤其是车轮外倾角，在恶劣路面上对操纵稳定性的影响甚至要大于轮胎载荷变化对操纵稳定性的影响。但另一方面，悬架动行程过小的话，就会向车身传递更多的冲击，也会破坏乘坐舒适性。所以应对悬架动行程加以适当的限制。悬架动行程均方根值是表征这一性能很好的指标。假定悬架动行程满足高斯分布，按悬架99.7%的时间不撞击缓冲块（3原则），同时悬架总行程为0.2m，并假定悬架的平衡位置位于悬架的中间位置。这样可以得到悬架动行程均方根值的上限值，

$$RMS(x_s - x_u)_{\max} = \frac{0.2}{6} = 0.0333m \quad (2.23)$$

从上述设计过程，可以看出两点。第一，对被动悬架而言，如果按在好路面上99.7%的时间不撞击缓冲块设计的话，悬架在不好路面上撞击缓冲块的时间就要增多。而如果按在不好路面上99.7%的时间不撞击缓冲块设计，悬架在好路面上就会传递较多的冲击，因为它只利用了悬架有效行程的一部分。第二，悬架的平衡位置并非总位于悬架中间位置。随着车辆负载的改变，悬架的平衡位置也不断的改变，如果按车辆满载时，悬架平衡位置为其中间位置设计的话，车辆空载时，悬架撞击缓冲块的机会就会增多。

轮胎接地性就是要轮胎与地面充分接触，从而保证轮胎向车辆提供足够的侧向力和纵向力。显然，只有轮胎的动载荷小于静载荷，接地性才能得以保证。在相同侧偏角的前提下，轮胎动载荷的变化（着地性）就相当于轮胎侧向力（操纵稳定性）的改变<sup>[26]</sup>。轮胎的动载荷变化尽量小对保证良好的操纵稳定性是有很大意义的。若采用线性轮胎模型的话，轮胎载荷变化可由下式表达，

$P_{dyn} = k_t(z_u - z_r)$ ， $P_{dyn}$  的 RMS 值，即均方根值，可以作为轮胎载荷变化的指标。

这些性能的设计是针对额定工况和额定参数（也即名义系统）进行的，当汽车置身于一个我们前面介绍的多变的不确定系统的环境中时，悬架系统的实际性能将变坏，甚至不稳定。因此，分析悬架系统时，所回答的问题还应包括当存在不确定因素时，悬架系统是否还能稳定（这直接影响汽车的操纵稳定性），是否还能维持期望的性能要求，悬架系统性能变坏的程度如何，可能的最坏性能是什么？这就是我们所提到的分析悬架系统的鲁棒性，即鲁

棒稳定性和鲁棒性能。

### 2.5.2 悬架系统性能的评价方法

对于悬架性能的评价方法其中均方根值( RMS )可以说是一种熟知的方法，另外还可以用鲁棒控制理论中的结构奇异值  $\mu$  法，还有频域中的传递函数法。

由于 RMS 值作为系统的统计特性，强调的是系统在整个频率范围内的总体性能。根据国际标准协会提出的 ISO2631 标准<sup>[34]</sup>，人对垂直加速度最敏感的频率范围为 4 ~ 8 Hz ,即车身垂直加速度在频率段 4 ~ 8 Hz 的特性对汽车平顺性最为重要。因此可选择频率加权处理后的车身垂直加速度作为输出，进而讨论乘坐舒适性的鲁棒性。

结构奇异值是频率的函数。尽管对  $\mu$  定义时考虑的是系统鲁棒稳定性，但它是通过虚构的性能不确定性  $\Delta_f(s)$  转化而来的（见图 2-6）。因此，用输入输出系统的结构奇异值  $\mu$  可以评价结构不确定性悬架系统在整个频率范围内的鲁棒性能。此外，定理 2.1 和定理 2.2 给出的是鲁棒稳定性和鲁棒性能的充要条件，所以用结构奇异值分析到的结果没有保守性。但是结构奇异值的计算不容易。另外，结构奇异值是针对线性时不变系统定义的，且假设不确定性也是线性时不变的，因此不能用来分析线性时变不确定系统或具有非线性不确定性的线性系统的鲁棒性。

频域中的传递函数分析方法是根据路面输入和控制输出的关系求出其响应的传递函数，按照其响应计算出各自的幅频特性进行分析。

### 2.5.3 各种评价方法局限性

首先用均方根值评价悬架的性能具有一定的局限性，概括起来有以下几点：

1、用统计特性作为悬架的指标，强调的是整个频率范围的总体性能，这样就有可能在某一个重要的频率点出现峰值，在时域内导致对某些典型的输

入信号的瞬态响应或稳态严重恶化，是悬架的性能不能满足实际要求。

2、按均方根值统计特性评价悬架，把所有频率内的加速度等同考虑，与人体对振动反应引起疲劳损害健康的生理特点不符。这种评价方法把主要的因素降低为次要的因素，而把次要的因素提到主要的位置，未能体现人体生理特性。为了弥补均方根值评价的不足之处，目前国际标准推荐采用加权均方根值评价。

3、轮胎动载的标准差评价操纵性能的局限性，当频率足够高时虽然轮胎的动载荷周期性的变化，但作用在轮胎上的垂直负荷则可近似等效为动载荷的平均值。如动载荷的频率高于 10Hz，交替出现的动载荷低谷时间仅持续几十毫秒 ( $<50\text{ms}$ )，而操纵过程的最短时间也在秒的量级以上。所以仅就操纵性能来说，动载荷波动值的大小并不能确切的表示此时操纵性能的好坏。轮胎动载的标准差用整个频率范围的统计特性作为指标等效的计入了高频区域，降低了轮胎动载的标准差指标（这里主要指操纵稳定性）的准确性。

传递函数评价方法的局限性：因为轮胎的接地性能和悬架的动挠度都表示两个点相对位置的变化，实际是一个信号相对另一个信号的跟踪。对这种情形仅用传递函数的幅频特性来评价就存在着一定的局限，因为它没有包括相角信息。因为任何动态系统，都不同程度的存在时间滞后。为了定性地说明时间滞后（任何驱动机构都存在时间滞后）导致相角滞后对跟踪性能的影响，下面分析具有理想幅频特性但具相角滞后的动态系统。以车轮的动载荷为例，假定驱动机构的滞后时间为 50ms，要求车轴地位移能准确地复现路面输入，计算得到当输入信号分别为 0.5Hz 和 10Hz 时，其输入与输出之间的动态误差随频率增加而增加，特别是当延迟时间  $\Delta t$  与输入信号频率满足关系  $f = 1/2\Delta t$  时，输入与输出反相，这是尽管传递函数的幅频特性是理想的，但它产生的误差确达到最大值，这是用传递函数的幅频特性评价悬架特性的局限性。

从以上可知，无论是用频率特性，还是用均方根值统计来评价悬架的性能指标，都有一定的局限性，唯一准确给定悬架的评价方法仍是一个有待探

索的问题。可见，无论是采用频率特性，还是采用均方根值统计特性进行悬架的设计都应通过其他的方式进行检验。如在时域内，用典型的输入信号（阶跃、斜坡及谐波）和等效的路面扰动信号（带限白噪声）来检验各项性能指标都应该满足要求。否则，应重新进行设计。

## 2.6 本章小结

本章从讨论模型开始，建立了以 4DOF 二分之一车为对象的动力学模型，以及等效模拟路面输入后的系统模型。因为在实际悬架系统存在不确定因素，因此需要分析悬架系统的鲁棒性。本章讨论了不确定悬架系统的结构不确定性、并给出了用于分析系统鲁棒性的结构奇异值法，对相应的鲁棒性条件。其中，结构奇异值法的提出，弥补了传统用于评价悬架的频率特性法和 RMS 值法的不足。对我们后面设计和分析悬架有了更好的认识。

## 第三章 主动悬架的鲁棒控制

从本章开始，我们着手于控制系统的设计和分析。名义模型是前面介绍的二分之一车为例，采用我们介绍的不确定性描述方法和一定的分析方法讨论主动悬架的鲁棒性。我们采用的名义参数如下表：

表 3-1 二分之一车名义模型的参数

符号	含义	值	单位	不确定性
$m_s$	车身质量	600	$kg$	$\pm 30\%$
$I_\phi$	车身俯仰转动惯量	800	$kg \cdot m^2$	$\pm 10\%$
$m_{usf}$	前非悬挂质量	59	$kg$	
$m_{usr}$	后非悬挂质量	50	$kg$	
$L_f$	质心与前悬距离	1.02	$m$	
$L_r$	质心与后悬距离	1.37	$m$	
$k_{sf}$	前悬架刚度	20000	$kN / m$	
$k_{sr}$	后悬架刚度	20000	$kN / m$	
$c_{sf}$	前悬架阻尼	1400	$kN \cdot s / m$	
$c_{sr}$	后悬架阻尼	1400	$kN \cdot s / m$	
$k_{tr}$	前轮刚度	175000	$kN / m$	$\pm 20\%$
$k_{tf}$	后轮刚度	175000	$kN / m$	$\pm 20\%$

### 3.1 主动悬架系统的描述

上一章中，我们已经导出了该系统的最基本的表达方式。但是在具体设计系统中，主动悬架控制系统除了考虑我们提到的汽车平顺性，轮胎始终不离地和避免悬架撞击限位块要求外，还有本身控制输入的大小，一个控制力不可能输入无穷大。另外在控制器输出时，我们给出坐动器的相应特性。因此，对主动悬架控制系统表达方式的基础上会添加一些环节。对于主动悬架

控制系统的性能要求则可描述为：

**问题 3.1：**寻找合适的控制器使得在既定的不确定条件下，路面输入对车身垂直加速度  $\ddot{z}_c$  与车身俯仰加速度  $\ddot{\phi}$  的影响最小，对悬架行程及轮胎动位移（或轮胎动静载荷比）的影响尽可能地小。

## 3.2 控制系统的设计

### 3.2.1 性能要求的频率加权描述及增广系统

上述控制性能要求是矛盾且相互制约的，如轮胎接地性的改善将引起悬架行程的增加，在高频段还将导致车身纵向加速度幅值的增加而使乘坐舒适性下降；降低车身纵向加速度幅值以提高乘坐舒适性则意味着悬架行程的增加。另外，从汽车操纵稳定性的角度讲，轮胎不能离开地面，但并不希望轮胎动位移过分小。为了协调各冲突因素可根据相对重要性对控制输出量进行加权。另外控制量  $u$  也是我们考虑的一个目标输出，为了使其不产生太大的不能实现的控制动作，也必须采取一定的加权限制。加权的另一功能是对系统进行归一化处理。

经过这样的考虑，系统的输出变为不再是我们前面所描述的那么简单。  
应该是我们取加权后的控制输出：

$$z(s) = [W_1(s) \ddot{z}_c \quad W_2(s)(\ddot{z}_s - \ddot{z}_u) \quad W_3(s)F_k(\ddot{z}_u - \ddot{z}_i) \quad W_4(s)u]^T \quad (3.1)$$

其中：  $q = [z_c \quad \phi]^T$ ,  $z_u = [z_{u1} \quad z_{u2}]^T$ ,  $z_s = [z_{s1} \quad z_{s2}]^T$ ,  $z_r = [z_{r1} \quad z_{r2}]^T$ ,

$$F_k = \text{diag}\{k_{ti} / f_{kti}\}, (i=1,2)$$

$$\begin{cases} f_{kt1} = (l_r m_s g + (l_f + l_r) m_{uf} g) / (l_f + l_r) \\ f_{kt2} = (l_f m_s g + (l_f + l_r) m_{ur} g) / (l_f + l_r) \end{cases}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 \\ 0 & w_{12} \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} w_{21} & 0 \\ 0 & w_{22} \end{bmatrix}, \quad W_3 = \begin{bmatrix} w_{31} & 0 \\ 0 & w_{32} \end{bmatrix}, \quad W_4 = \begin{bmatrix} w_{41} & 0 \\ 0 & w_{42} \end{bmatrix}$$

其中  $W_1(s), W_2(s), W_3(s), W_4(s)$  分别是对汽车输出的加速度、悬架行程、轮胎接地性和控制输入的加权。由于加权函数选取的困难，我们都是在一个指导性的原则下，选取后，经过多次调试才最后根据实验结果的满意程度确定的。下面我们具体介绍车身加速度的选取原则。

车身加速度的加权我们采用的是频率加权。频率加权函数的目的是能够突出控制输出在某频率段的重要性或不重要性。由于汽车加速度是机械振动对人体的影响，既取决于振动频率与强度、振动作用方向和暴露时间，也取决于人的心理与生理状态。国际标准化组织(ISO)在综合大量有关人体振动的研究工作和文献的基础上，定出了国际标准 ISO2631<sup>[34]</sup>“人承受全身振动的评价指南”。它用加速度的均方根值(RMS)给出了在1~80Hz 振动频率范围内人体对振动反应的三个不同界限：

- 1、暴露极限 当人体承受的震动强度在这个极限之内，将保持健康或安全。通常把此极限作为可以承受振动量的上限。
- 2、疲劳-工效降低界限 这个界限与保持工作效能有关。当驾驶员承受的振动强度在此界限之内时能准确灵敏地反应正常地进行驾驶。
- 3、舒适降低界限 此界限与保持舒适有关，在这个界限之内，人体对所暴露的振动环境感觉良好，能顺利完成吃、读、写等动作。

下面图给出了在垂直方向不同暴露时间下的“疲劳功效—降低界限”：

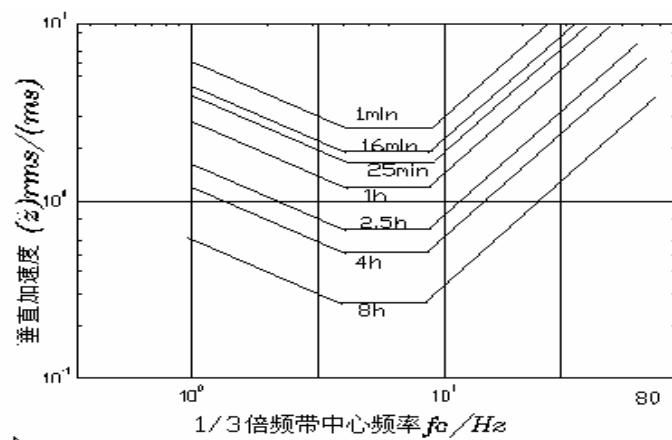


图 3-1 ISO2631 人体对振动反应的“疲劳-工效降低界限”

根据国际标准协会提出的 ISO2631 标准，人对垂直加速度最敏感的频率范围为 4~8 Hz，即车身纵向加速度在频率段 4~8 Hz 的特性对汽车平顺性尤为重要。因此车身垂直加速度的加权函数可由 ISO2631<sup>[34]</sup> 标准给出的人体所承受的“疲劳—工效降低界限”曲线选取；显然，如果期望车身垂直加速度的频率特性接近“疲劳—工效降低界限”曲线，则加权函数  $w_{11}(s)$  的倒数的幅频特性应与“疲劳—工效降低界限”曲线相似。假设暴露时间为一小时，则采用如下形式的函数进行拟合：

$$F_i(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + es + d} \quad (3.2)$$

其中  $a, b, c, d, e$  为待定参数。用最小二乘法拟合，得到的参数如下：

$$a = 0, b = 48, c = 1200, d = 3000, e = 60$$

函数的具体形式为：

$$w_{11}(s) = \frac{k * 48 * (s + 25)}{s^2 + 60s + 3000}$$

其中  $k$  为归一化和相对权重系数。这里取  $k = 0.3$ 。下图为其倒数的幅频特性：

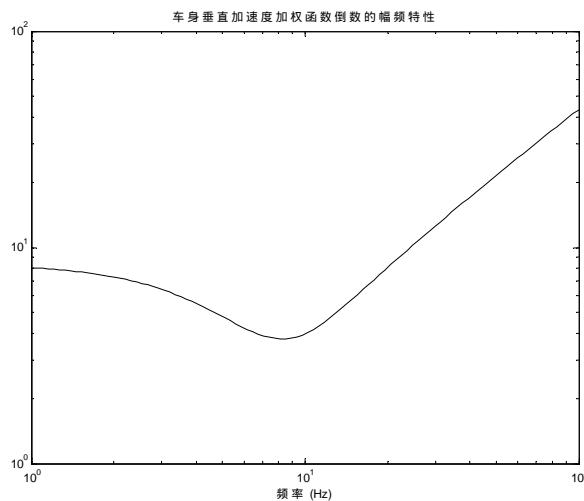


图 3-2 车身垂直加速度频率加权函数倒数的幅频特性

车身俯仰加速度的加权函数为：

$$w_{12} = \frac{987}{s^2 + 19s + 987}$$

其倒数的幅频特性：

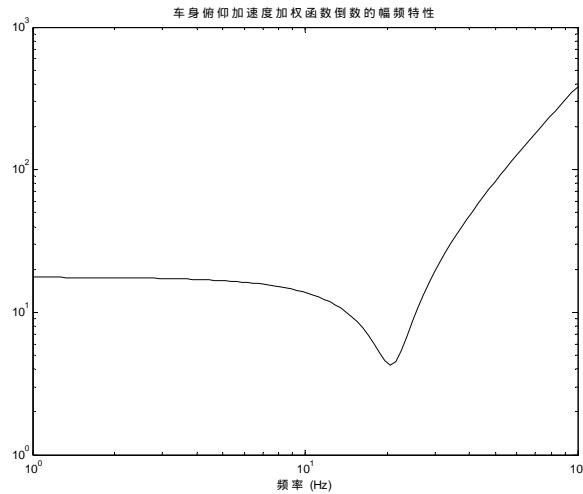


图 3-3 车身俯仰加速度频率加权函数倒数的幅频特性

其他的加权系数主要取决于归一化和各控制输出的相对权重，具体选取如：

$$W_2(s) = \begin{bmatrix} 0.825 & 0 \\ 0 & 0.825 \end{bmatrix}, \quad W_3(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad W_4(s) = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

由于设计的控制器是针对加权处理后的增广系统进行的，所以这里介绍以下增广系统。我们采用的是输出反馈的方式，一般地说，车辆的悬架动行程  $z_{s1} - z_{u1}$  与  $z_{s2} - z_{u2}$  最易测量，车身的悬架支点垂直加速度  $\ddot{z}_{u1}$  与  $\ddot{z}_{u2}$  也比较容易获得。因此，我们选择动位移  $z_{s1} - z_{u1}$ 、 $z_{s2} - z_{u2}$  与车身的悬架支点纵向加速度  $\ddot{z}_{u1}$ 、 $\ddot{z}_{u2}$  的测量输出做反馈量。此外还考虑了测量噪声的影响，假设悬架动行程和车身垂直加速度的测量噪声是相互独立的且具有单位均方根值，则取其加权为 1。对于路面输入，因为其路面垂直速度的功率谱为  $G_{\dot{z}}(f) = 4\pi^2 G_0 V$  与频率  $f$  无关，所以取路面速度为输入，加权函数选为：

$$W_{\dot{z}}(s) = \begin{bmatrix} 2\pi\sqrt{G_0 V} & 0 \\ 0 & 2\pi\sqrt{G_0 V} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

还有就是力发生器一般为液压伺服机构，其动态特性也是很难忽略的，其表示形式为一个惯性环节：

$$W_a(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.04s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.04s+1} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

下图就是我们所形成的增广模型：

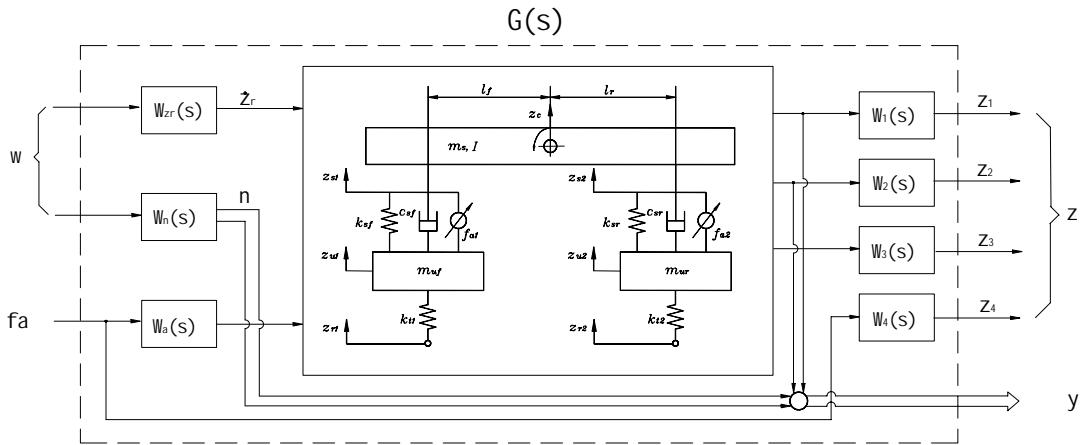


图 3-4 二分之一车的增广系统框图

选取适当的状态变量，图 3-4 所示的主动悬架二分之一车的增广模型可有下面的状态空间实现为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{cases} \quad (3.5)$$

其中： $A \in \Re^{14 \times 14}$ ,  $B_1 \in \Re^{14 \times 6}$ ,  $B_2 \in \Re^{14 \times 2}$ ,  $C_1 \in \Re^{8 \times 14}$ ,  $D_{11} \in \Re^{8 \times 6}$ ,  $D_{12} \in \Re^{8 \times 2}$ ,  $C_2 \in \Re^{4 \times 14}$ ,  $D_{21} \in \Re^{4 \times 6}$  和  $D_{22} \in \Re^{4 \times 2}$ ，且  $D_{11} = 0$  和  $D_{22} = 0$ 。

上面的增广二分之一车系统可以用下线性分式结构来描述，如图 3-5

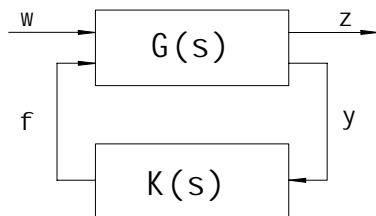


图 3-5 控制系统的下线性分式结构

其中  $G(s)$  是图 3-4 所示增广系统的传递函数， $K(s)$  是待设计的控制器的传递函数。我们把式 (3.5) 记为：

$$G = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (3.6)$$

对照式 (3.5) 与式 (3.6) 可以得到：

$$G_{ij} = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.7)$$

记从干扰输入  $w$  到控制输出  $z$  的传递函数矩阵为  $F_l(G, K)$ 。很显然，由输入  $w$  到控制输出  $z$  的闭环传递函数矩阵为：

$$T_{zw}(s) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} = F_l(G, K) \quad (3.8)$$

可以利用现代鲁棒控制理论设计  $H_\infty$  控制器（称为  $H_\infty$  主动悬架）使闭环系统内部稳定且  $\|F_l(G, K)\|_\infty$  最小；也可设计  $H_2$  控制器（称为  $H_2$  主动悬架）使闭环系统内部稳定且  $\|F_l(G, K)\|_2^2$  最小。

### 3.2.2 $H_2$ 主动悬架的设计

$H_2$  最优控制在本质上与随机最优输出反馈即 LQG 是相同的。假设系统的干扰输入  $w(t)$  为单位协方差矩阵的随机脉冲向量，则由传递函数的  $H_2$  范数定义可得

$$E\left\{\|z\|_2^2\right\} = E\left\{\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt\right\} = \|F_l(G, K)\|_2^2 \quad (3.9)$$

即使  $F_l(G, K)$  的  $H_2$  范数最小 ( $H_2$  性能指标最小) 实际上就是使控制输出  $z(t)$  的功率期望最小。因此，在  $H_2$  控制框架内，4DOF 二分之一车的主动悬架控制问题 3.1 可描述为

**问题 3.2 ( $H_2$  控制问题) :** 选取加权的车身垂直与俯仰加速度、悬架动行程、轮胎动静载荷比为主动悬架的控制输出，寻找一个有理控制器  $K$  使得闭环系统内稳定，且控制输出的功率期望值即  $\|F_l(G, K)\|_2^2$  最小。

主动悬架 4DOF 二分之一车系统的  $H_2$  控制问题可以由两个 Riccati 方程解决。

**定理 3.1<sup>[55]</sup>**：假设广义控制对象满足下述条件：

1、 $(A, B_2)$  是稳定的， $(C_2, A)$  是可检测的。

2、 $D_{12}$  是列满秩的， $D_{21}$  是行满秩的

3、对于所有  $w$ ， $\begin{bmatrix} A - jwI & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$  列满秩。

4、对于所有  $w$ ， $\begin{bmatrix} A - jwI & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$  行满秩。

则存在唯一的  $H_2$  最优控制器

$$K_2(s) = -F_2(sI - A_2)^{-1}L_2 \quad (3.10)$$

其中

$$A_2 := A + B_2 F_2 + L_2 C_2$$

$$F_2 := -(B_2^T X_2 + D_{12}^T C_1)$$

$$L_2 := -(Y_2 C_2^T + B_1 D_{21}^T)$$

$X_2$  和  $Y_2$  分别是下面两个 Riccati 方程的对称半正定稳定化解：

$$(A - B_2 D_{12}^T C_1)^T + X_2 (A - B_2 D_{12}^T C_1) - X_2 B_2 B_2^T X_2 + C_1^T (I - D_{12} D_{12}^T) C_1 = 0$$

$$(A - B_1 D_{21}^T C_1) + Y_2 (A - B_1 D_{21}^T C_1)^T - Y_2 C_2^T C_2 Y_2 + B_1 (I - D_{12} D_{12}^T) B_1^T = 0$$

且最小的  $\|F_l(G, K)\|_2^2$  为

$$\min \|F_l(G, K)\|_2^2 = \|G_c B_1\|_2^2 + \|F_2 G_f\|_2^2 = \|G_c L_2\|_2^2 + \|C_1 G_f\|_2^2$$

其中，

$$G_c(s) = (C_1 + D_{12}F_2)(sI - A - B_2F_2)^{-1}$$

$$G_f = (sI - A - L_2C_2)^{-1}(B_1 + L_2D_{21})$$

针对二分之一车，设计的  $H_2$  控制器的幅频域相频特性曲线如下：

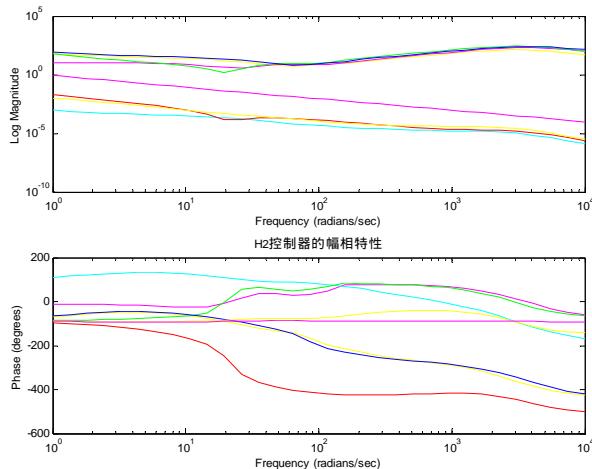


图 3-6 悬架系统设计的  $H_2$  控制器幅频特性

### 3.3.3 $H_\infty$ 主动悬架的设计

针对于汽车各种工况、不确定性利用鲁棒控制理论来设计相应的控制器，具有一定的意义。鲁棒控制理论发展最突出的就是  $H_\infty$  控制，这种方法正是我们本章设计的重点。

$H_\infty$  控制思想，以从扰动输入到系统输出的传递函数的  $H_\infty$  范数作为目标函数对系统进行优化设计，可以直接限制回路的最高增益，从而使扰动对系统输出的影响最小：

$$\sup_{\|w\|_2 \leq 1} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \|F_l(G, K)\|_\infty \quad (3.11)$$

传递函数的  $H_\infty$  范数描述了有限输入能量到输出能力的最大增益，因而将其作为控制器优化指标能使具有有限功率谱的干扰对系统的期望输出影响最小。

在求解  $H_\infty$  控制问题时，一般假设广义控制对象满足下述条件：

(1)  $(A, B_1)$  是可稳定的， $(A, B_2)$  是可稳定的；

(2) 矩阵  $D_{12}$  是列满秩的；

(3)  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2, \quad \forall \omega \in R$ ；其中  $A \in R^{n \times n}$ ,  $D_{12} \in R^{x \times m_2}$  的；

(4)  $(C_1, A)$  是可检测的， $(C_2, A)$  是可检测的；

(5) 矩阵  $D_{21}$  是行满秩的；

(6)  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2, \quad \forall \omega \in R$ ；其中  $A \in R^{n \times n}$ ,  $D_{21} \in R^{p_2 \times x}$  的。

一般地，条件(1)~(3)是求解  $H_\infty$  状态反馈控制问题所必需的，而条件(1)~(6)则是求解  $H_\infty$  输出反馈控制问题和基于状态观测器的  $H_\infty$  状态反馈控制问题所必需的。应该指出。条件(1)和(4)中， $(A, B_2)$  是可稳定的和  $(C_2, A)$  是可检测的这两个条件为保证闭环控制系统内部稳定的充要条件，即保证控制器  $K$  稳定化广义控制对象  $G$ ，因此为求解  $H_\infty$  控制问题必不可少的条件。条件(2)和(3)以及条件(5)和(6)则是为了保证存在最优的  $H_\infty$  控制器  $K$ ，使得由扰动输入到系统输出的传递函数的  $H_\infty$  范数最小化。对于次优的  $H_\infty$  控制问题，条件(2)和(3)以及条件(5)和(6)未必是必要的。在(3.11)性能指标下，问题 3.1 可描述为：

**问题 3.3( $H_\infty$  最优控制问题)：**以如图 3-4 所示的二分之一车增广系统的输出  $z(t)$  为控制输出，寻找一个控制器  $K(s)$  使得闭环系统内部稳定，且输入输出回路最高增益  $\|F_l(G, K)\|_\infty$  最小。

对多输入多输出系统来说，问题 3.3 的解一般不是唯一的，而且寻找  $H_\infty$  最优控制器无论在理论上还是数值计算上都是相当困难的。因此我们借助于

求解  $H_\infty$  次优问题来获得某种程度上的  $H_\infty$  最优控制。

**问题 3.4 ( $H_\infty$  次优控制问题)：**以如图 3-4 所示的二分之一车增广系统的输出  $z(t)$  为控制输出，寻找一个控制器  $K(s)$  使得闭环系统内部稳定，且输入输出回路最高增益  $\|F_l(G, K)\|_\infty$  小于给定的正数  $\gamma$ 。正数  $\gamma$  即所谓的  $H_\infty$  性能。问题 3.4 也可以通过两个 Riccati 方程求解：

**定理 3.2<sup>[55]</sup>**：给定正数  $\gamma > 0$ 。假设增广系统  $G(s)$  满足以上假设的条件，则存在一个真的有理的控制器  $K(s)$  使得闭环系统内部稳定且  $\|F_l(G, K)\|_\infty < \gamma$  的充分必要条件是：

(i) Riccati 方程

$$\begin{aligned} & \left( A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^T C_1 \right)^T X_\infty + X_\infty \left( A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^T C_1 \right) \\ & + X_\infty \left( \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 R_1^{-1} B_2^T \right) X_\infty + C_1^T (I - D_{12} R_1^{-1} D_{12}^T) C_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

有对称半正定稳定化解  $X_\infty$ ，其中  $R_1 = D_{12}^T D_{12}$ ；

(ii) Riccati 方程

$$\begin{aligned} & \left( A - B_1 D_{21}^T R_2^{-1} C_2 \right) Y_\infty + Y_\infty \left( A - B_1 D_{21}^T R_2^{-1} C_2 \right)^T \\ & + Y_\infty \left( \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T R_2^{-1} C_2 \right) Y_\infty + B_1 (I - D_{21}^T R_2^{-1} D_{21}) B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

有对称半正定稳定化解  $Y_\infty$ ，其中  $R_2 = D_{21} D_{21}^T$ ；

(iii)  $X_\infty$  和  $Y_\infty$  满足  $I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty > 0$ 。

且次优  $H_\infty$  中心控制器为

$$K_\infty(s) = -F_\infty (sI - A_\infty)^{-1} Z_\infty L_\infty \quad (3.14)$$

其中

$$\begin{aligned} A_\infty @& A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty) , \\ F_\infty @& -R_1^{-1} (D_{12}^T C_1 + B_2^T X_\infty) \\ L_\infty @& - (B_1 D_{21}^T + Y_\infty C_2^T) R_2^{-1} \end{aligned}$$

$$Z_\infty @ \left( I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty \right)^{-1}$$

经过推导，控制器(3.14)可以写成如下的观测器形式：

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B_1\bar{w}^* + B_2u + Z_\infty L_\infty (C_2\bar{x} + D_{21}\bar{w}^* - y) \\ u = F_\infty \bar{x} \end{cases} \quad (3.15)$$

其中  $\bar{w}^* = \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \bar{x}$  是对最坏干扰输入  $w^* = \gamma^{-2} B_1^T X_\infty x$  的估计。显然， $Z_\infty L_\infty$  是状态观测器增益， $F_\infty$  是全信息  $H_\infty$  次优状态反馈阵。定理 3.2 给出了  $H_\infty$  次优控制器存在的充分必要条件。给定  $\gamma > 0$ ，如果 Riccati 方程(3.12)和(3.13)由半正定稳定化解且满足条件 3，可由(3.14)构造的次优  $H_\infty$  中心控制器是闭环系统内部稳定且  $\|F_l(G, K)\|_\infty < \gamma$ 。因此可以用迭代方法数值求解最小的使  $H_\infty$  控制器存在的  $\gamma$ ，从而实现某种程度上的  $H_\infty$  最优控制。具体步骤如下：

- 1、选择一个初始的参数  $\gamma > 0$ ；
- 2、针对广义控制对象  $G(s)$ ，验证  $H_\infty$  控制器存在的条件；
- 3、若控制器不存在，则增加  $\gamma$ ，否则，减小  $\gamma$ ，然后返回到第(2)步；

通过不断的重复上述第(2)步和第(3)步，直到找到最小的使  $H_\infty$  控制器存在的  $\gamma$  为止。

针对二分之一车设计的  $H_\infty$  控制器的幅频域相频特性曲线如下：

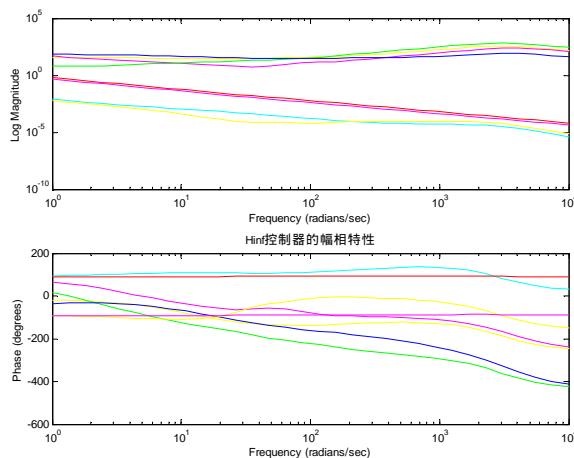


图 3-7 悬架系统设计的  $H_\infty$  控制器幅相特性

### 3.4 控制器分析

由于主动悬架系统的  $H_2$  和  $H_\infty$  控制器都是基于没有模型误差的确定性模型即名义模型设计的，而实际车辆正如我们前面介绍的一样存在着不确定性。这样当存在着这些不确定性时，基于名义模型设计的  $H_2$  和  $H_\infty$  主动悬架用于实际车辆系统时，系统的稳定性和性能可能会变坏。因此，需要分析设计的主动悬架系统的鲁棒性。采用第二章关于不确定性的处理，考虑悬挂质量  $m_s$ 、车身转动惯量  $I_\phi$  与轮胎刚度  $k_{t1}$  与  $k_{t2}$  的参数不确定性，并假设不确定性是时不变的。系统的描述框图如图 3-8 所示。

然后利用我们描述的抽出  $\Delta$  方法化为图 2-6 的形式，进而转化为图 2-8 和图 2-9 的形式，来分析形成闭环系统的鲁棒稳定性和鲁棒性能。下面就存在的不确定性因素用结构奇异值进行分析。

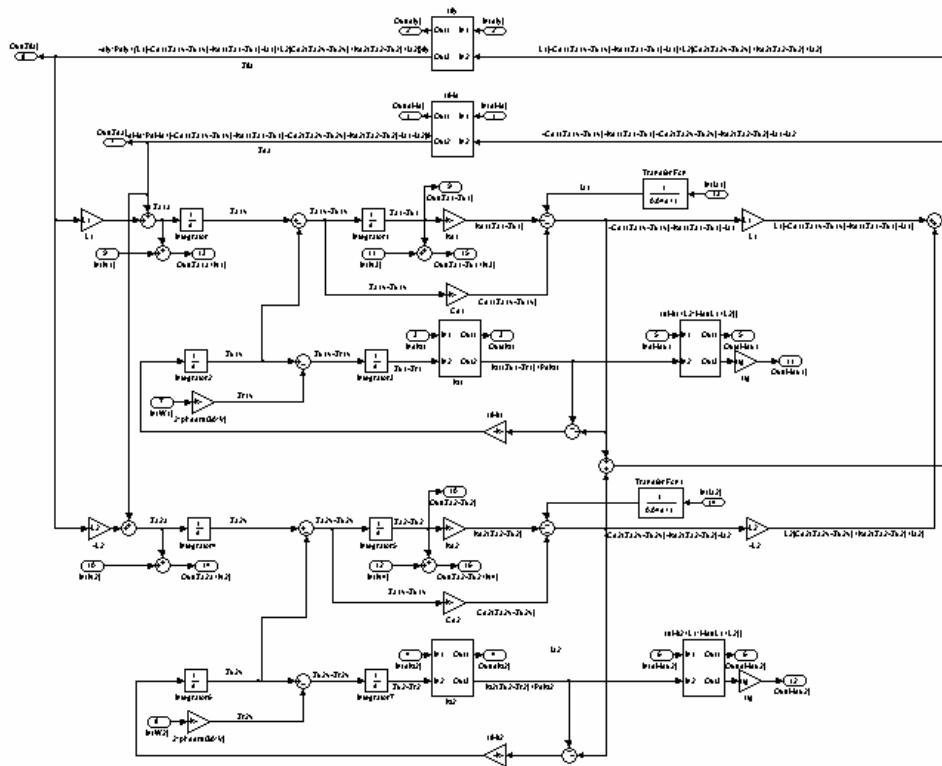


图 3-8 二分之一车带有不确定性描述框图

其中车辆模型的参数和相应的不确定大小如前面所述，路面不平度选取为B级路面的参数，车速选为 $40\text{ m/s}$ 。由于采用结构奇异值分析，计算结构奇异值时相当的复杂并且会由于矩阵的奇异会导致结果的不正确。所以我们分析时只考虑了 $\pm 30\%$ 悬挂质量、 $\pm 10\%$ 俯仰转动惯量和 $\pm 20\%$ 轮胎刚度的参数不确定性。

结构奇异值曲线如下：

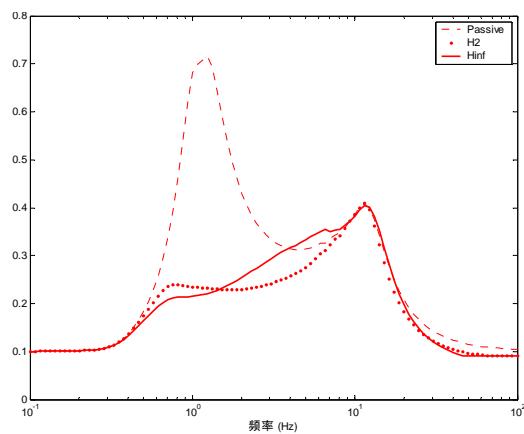


图 3-9 车身垂直加速度的奇异值分析曲线

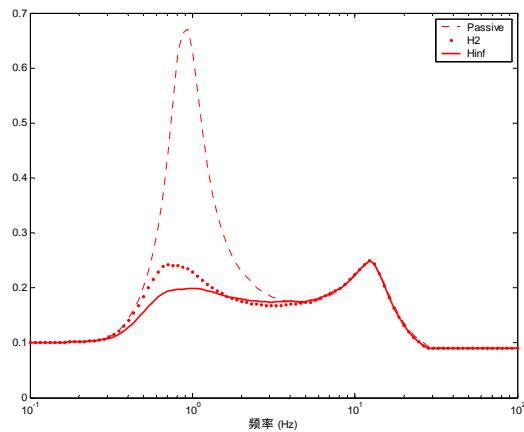


图 3-10 车身俯仰加速度的奇异值分析曲线

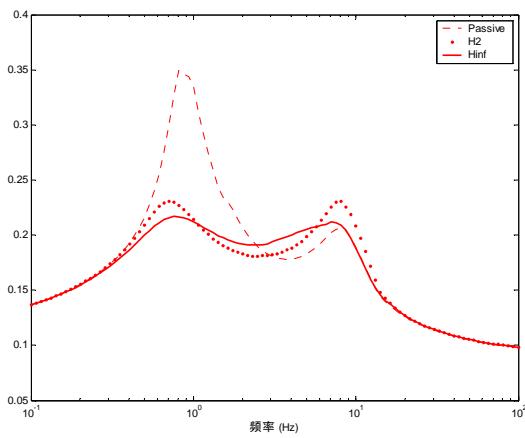


图 3-11 前轮动静载荷比的奇异值分析曲线

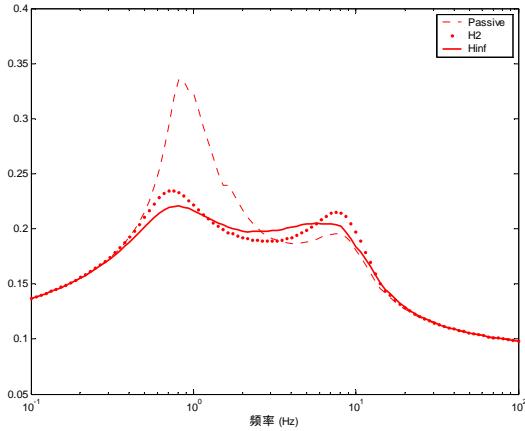


图 3-12 后轮动静载荷比的奇异值分析曲线

上面图 3-9 至 3-12 是汽车悬架性能输出的奇异值曲线图，其中考虑到分析汽车垂直加速度的特殊性，即人体对垂直振动十分敏感的频率段是 4：8 Hz，汽车垂直加速度与俯仰加速度的性能是进行频率加权后的输出结果，这样更符合实际常理。 $H_\infty$  主动悬架的稳定裕度略大于  $H_2$  主动悬架，被动悬架的稳定裕度明显小于俩主动悬架。说明主动悬架具有良好的鲁棒性。

考虑车身质量 ( kg ) 与转动惯量 (  $kg \cdot m^2$  )( 420/720、600/800、780/880 ) 三种工况，两个输入 ( 前轮与后轮 )，两个输出 ( 车身垂直加速度与车身俯仰加速度 )，绘制  $H_\infty$  主动悬架、 $H_2$  主动悬架与被动悬架的频率特性用于系统性能分析。

闭环系统的幅频特性如下：

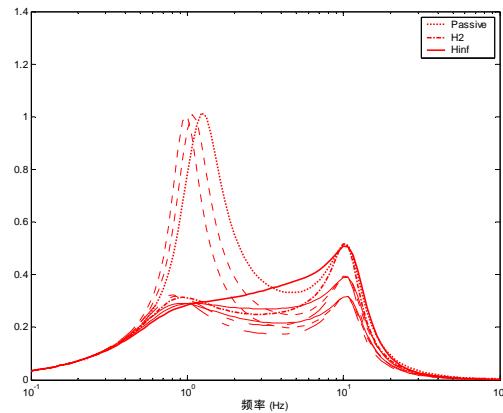


图 3-13 车身质心垂直加速度对前轮幅频特性

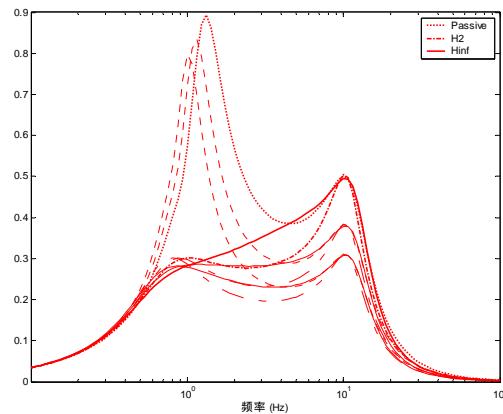


图 3-14 车身质心垂直加速度对后轮的幅频特性

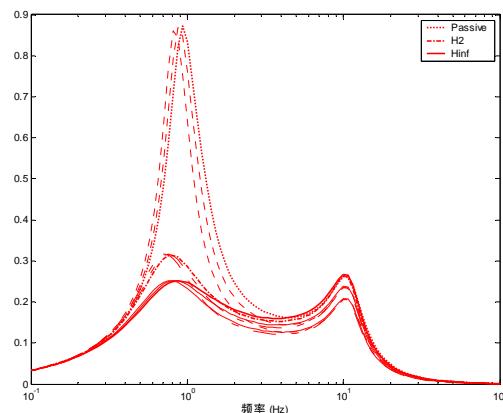


图 3-15 车身质心俯仰加速度对前轮与后轮的幅频特性

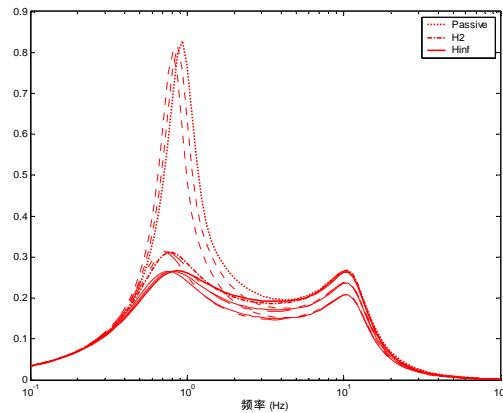


图 3-16 车身质心俯仰加速度对前轮与后轮的幅频特性

三种工况下从幅频特性可以看出  $H_2$  主动悬架与  $H_\infty$  主动悬架性能相近，但均明显优于被动悬架。

下面我们用 RMS 值来分析所设计悬架系统的性能，为了比较  $H_\infty$  主动悬架、 $H_2$  主动悬架与被动悬架，考虑如下两表工况。

1、当车辆以一定的速度行驶在不同路面上时的鲁棒性。表 3-2 给出了汽车以 20 米每秒的车速分别在 A、B、C、D 级路面上的 RMS 值。

2、当汽车以不同的速度行驶在相同路面上时。表 3-2 给出了在  $1.28 \times 10^{-6} m^2 / m^{-1}$  路面不平度下，分别以 10、20、30 米每秒车速行驶的 RMS 值。

表 3-2 以 20 米/秒在不同路面上行驶时的 RMS 值

	RMS 值					
	$1.6 \times 10^{-7}$			$6.4 \times 10^{-7}$		
	$H$ 控制	$H_2$ 控制	被动悬架	$H$ 控制	$H_2$ 控制	被动悬架
车身垂直加速度	0.2546	0.2335	0.2907	0.5092	0.4669	0.5819
车身俯仰加速度	0.1561	0.1570	0.1909	0.3122	0.3139	0.3817
前悬架行程	0.0040	0.0042	0.0049	0.0079	0.0084	0.0099
后悬架行程	0.0039	0.0040	0.0046	0.0077	0.0080	0.0092
前轮动静载荷比	0.0636	0.0667	0.0657	0.1272	0.1333	0.1315
后轮动静载荷比	0.0623	0.0637	0.0632	0.01246	0.1275	0.1263
	$2.56 \times 10^{-6}$			$1.204 \times 10^{-5}$		
	$H$ 控制	$H_2$ 控制	被动悬架	$H$ 控制	$H_2$ 控制	被动悬架
车身垂直加速度	0.10184	0.9338	1.1630	2.0368	1.8676	2.3259

车身俯仰加速度	0.6245	0.6278	0.7635	1.2490	1.2556	1.5269
前悬架行程	0.0159	0.0168	0.0184	0.0310	0.0332	0.0368
后悬架行程	0.0155	0.0161	0.0184	0.0310	0.0332	0.0368
前轮动静载荷比	0.2543	0.2666	0.2630	0.5086	0.5333	0.5259
后轮动静载荷比	0.2492	0.2549	0.2527	0.4984	0.5098	0.5054

表 3-3 在路面不平度为  $1.28 \times 10^{-6} m^2 / m^{-1}$  以不同速度行驶时的 RMS 值

	RMS 值								
	10			20			30		
	$H$ 控制	$H_2$ 控制	被动	$H$ 控制	$H_2$ 控制	被动	$H$ 控制	$H_2$ 控制	被动
车身垂直加速度	0.5092	0.4669	0.5815	0.7201	0.6603	0.8223	0.8820	0.8087	1.0071
车身俯仰加速度	0.3122	0.3139	0.3817	0.4416	0.4439	0.5398	0.5408	0.537	0.6612
前悬架行程	0.0079	0.0084	0.0099	0.0112	0.0119	0.0140	0.0137	0.0145	0.0171
后悬架行程	0.0077	0.0080	0.0092	0.0109	0.0114	0.0130	0.0134	0.0139	0.0159
前轮动静载荷比	0.1272	0.1333	0.1315	0.1798	0.1885	0.1859	0.2202	0.2309	0.2277
后轮动静载荷比	0.1246	0.1275	0.1263	0.1762	0.1803	0.1787	0.2158	0.2208	0.2188

从表 3-2 与表 3-3 的 RMS 值中可以看出，在车身垂直加速度性能方面， $H_2$  主动悬架略优于  $H_\infty$  主动悬架，二者均明显优于被动悬架。在车身俯仰加速度性能方面， $H_\infty$  主动悬架略优于  $H_2$  主动悬架，也均明显优于被动悬架。而悬架系统的动行程与轮胎的动静载荷比始终保持在约束范围内。这个结果与前面给出的幅频特性曲线和下面给出随机路面输入仿真结果相吻合。

## 3.5 仿真结果

### 3.5.1 随机路面输入仿真

针对二分之一车，在 D 级路面，车速为 30 米每秒的情况下，选取车身垂直与俯仰加速度、前悬架与后悬架行程，前轮与后轮动静载荷比六个输出，对  $H_\infty$  主动悬架、 $H_2$  主动悬架与被动悬架进行时域仿真。

随机路面输入的仿真结果如下：

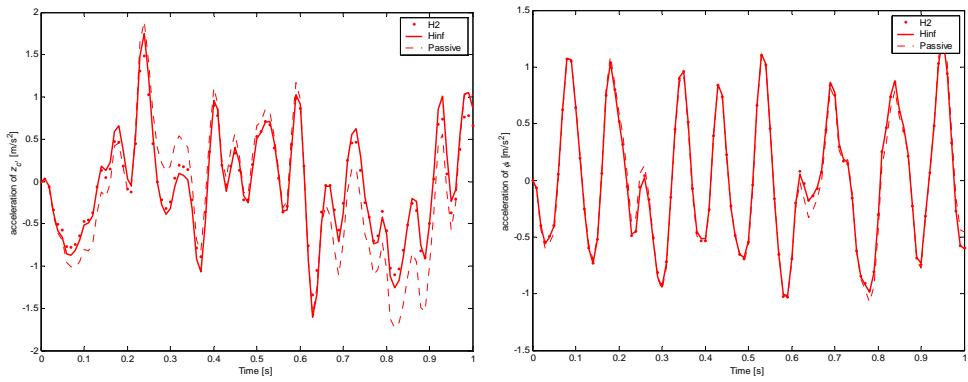


图 3-17 车身垂直与俯仰加速度仿真结果

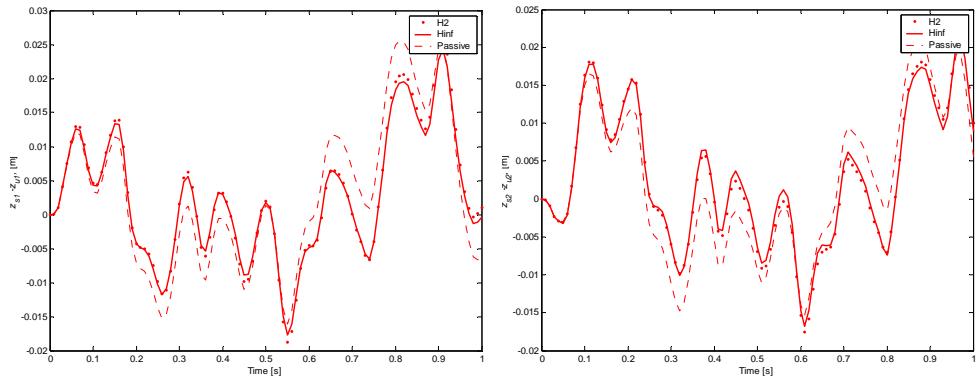


图 3-18 前悬架与后悬架动行程仿真结果

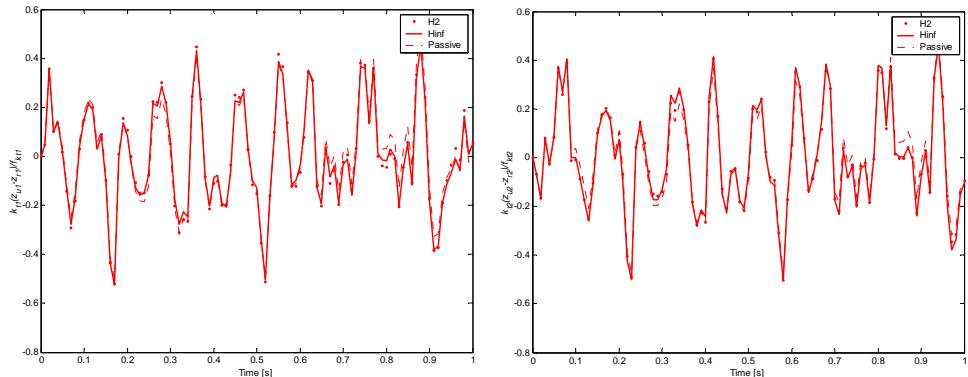


图 3-19 前轮与后轮动静载荷比仿真结果

从仿真结果可以看出，对于车身垂直加速度与车身俯仰加速度， $H_\infty$  主动悬架与  $H_2$  主动悬架的性能相近，优于被动悬架。 $H_\infty$  主动悬架与  $H_2$  主动悬架的动行程小于悬架系统的最大行程，没有撞击限位块影响乘坐舒适性。 $H_\infty$  主动悬架与  $H_2$  主动悬架的轮胎动静载荷比小于 1，保证了轮胎的接地性，满足

操纵稳定性的要求。

### 3.5.2 脉冲路面输入仿真

针对 4DOF 二分之一车，考虑车身质量 ( $kg$ ) 与转动惯量 ( $kg \cdot m^2$ ) (420/720、600/800、780/880) 三组车身参数，车速均取 30 米每秒。选取车身垂直与俯仰加速度、前悬架与后悬架动行程，前轮与后轮动静载荷比六个输出，对  $H_\infty$  主动悬架、 $H_2$  主动悬架与被动悬架进行时域仿真。图 3-20 中的  $road-new$  为路面的位移输入， $w-new$  为相应路面输入速度，即位移输入的导数。

脉冲输入的仿真结果如下：

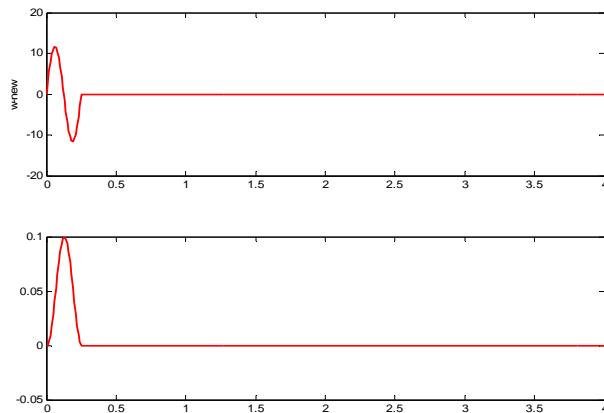


图 3-20 脉冲路面输入

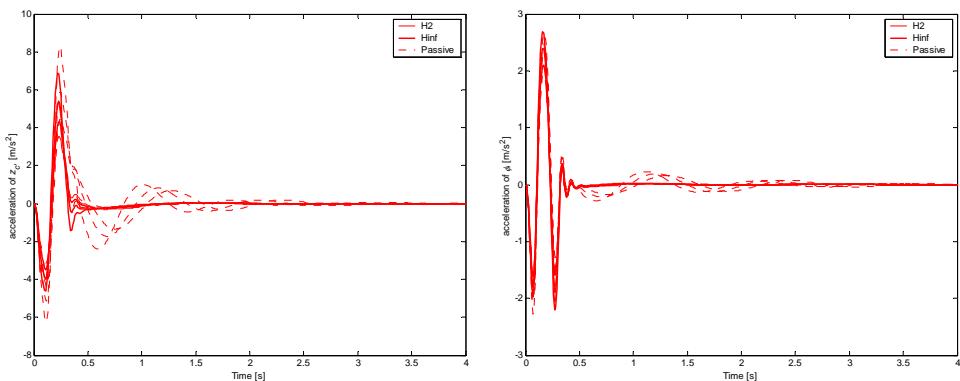


图 3-21 车身垂直与俯仰加速度仿真结果

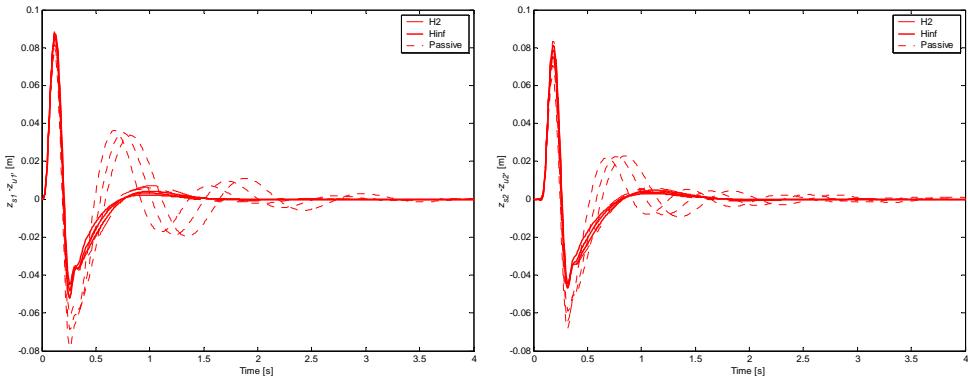


图 3-22 前悬架与后悬架动行程仿真结果

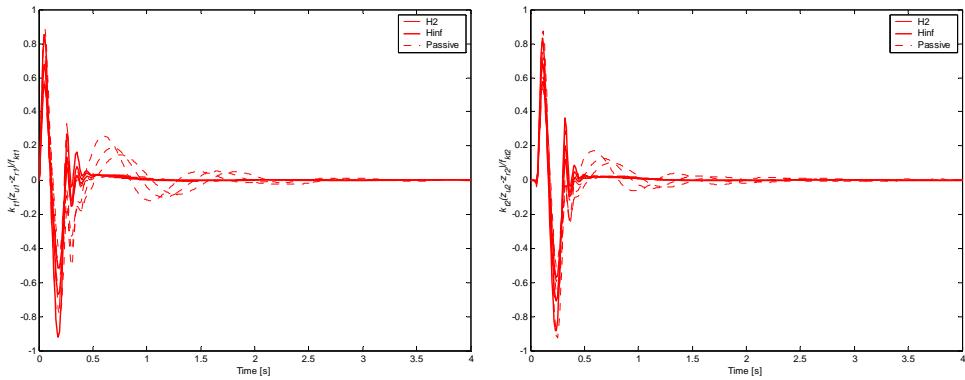


图 3-23 前轮与后轮动静载荷比仿真结果

从仿真结果可以看出，对于脉冲路面输入， $H_\infty$  主动悬架、 $H_2$  主动悬架性能相近，幅值小于被动悬架，收敛时间小于被动悬架。 $H_\infty$  主动悬架与  $H_2$  主动悬架的动行程小于悬架系统的最大行程，没有撞击限位块影响乘坐舒适性。 $H_\infty$  主动悬架与  $H_2$  主动悬架的轮胎动静载荷比小于 1，保证了轮胎的接地性，满足操纵稳定性的要求。

### 3.6 本章小结

本章首先给出主动悬架 4DOF 二分之一车系统控制问题及性能要求的描述。为了协调相互冲突的各性能要求对各输出性能进行了加权处理，同时为了强调人体对振动频率的敏感性，对加速度向进行了频率加权，并以此构成主动悬架增广系统。在此基础上着重对  $H_2$  主动悬架与  $H_\infty$  主动悬架给出了设

计，并针对存在各种不确定情况时，分析了闭环系统的幅频特性与结构奇异值，分析了主动悬架汽车以不同速度行驶于不同路面时的鲁棒性。随后又进行了系统的时域仿真，结果证明  $H_2$  与  $H_\infty$  主动悬架在确保操纵稳定性的前提下，输出性能同时满足了系统的硬约束，并明显改善了乘坐舒适性。

## 第四章 基于 LMI 的多目标主动悬架设计

针对多种线性系统的控制问题，LMI（线性矩阵不等式）的出现，为控制工程、系统辨识与结构设计等提供了一个强有力的工具。有三个方面使 LMI 值得关注：

- 1、各种各样的设计性能指标与约束可以用 LMI 的形势来描述。
- 2、采用 LMI 来描述问题后，求解 LMI 是一个凸优化问题。
- 3、由于多数多目标的控制与约束问题无法直接求得解析解，采用 LMI 描述为进行数值求解提供了有效的方法。使得基于 LMI 方法的设计成为经典解析法的有效补充。

### 4.1 预备知识

1、LMI 的一般形式：

$$F(x) \stackrel{\Delta}{=} F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$$

在这里  $x \in R^m$  是变量，对称矩阵  $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$ ， $i = 0, 1, \dots, m$  给定。不等式  $> 0$  表示矩阵  $F(x)$  是正定的，即对于  $u \in R^n$ ， $u \neq 0$ ，有  $u^T F(x) u > 0$ ，也就是说， $F(x)$  的最小奇异值是正的。

2、线性矩阵不等式系统

线性矩阵不等式系统是线性矩阵不等式

$$F_1(x) > 0, \Lambda, F_k(x) > 0$$

的有限集。

它有一个简单而基本的性质，即每一个 LMI 系统能被精确写成一个简单的线性矩阵不等式。当且仅当

$$F(x) := \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & F_2(x) & \Lambda & 0 \\ M & & O & M \\ 0 & 0 & \Lambda & F_k(x) \end{bmatrix} > 0$$

$F_1(x) > 0, \Lambda, F_k(x) > 0$  成立。

### 3、Schur complements

如果  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $R(x) = R(x)^T$  和  $S(x)$  是  $x$  的映射, 对于 LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

则上式 LMI 等效于

$$R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0。$$

## 4.2 基于 LMI 的线性系统分析

本节针对线性时不变系统多种重要性能特点的分析, 给出采用 LMI 描述的形式。考虑如下线性时不变系统, 状态变量  $x \in R^n$ , 输入  $w \in R^m$ , 输出  $z = R^p$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ z = Cx + D_w w + D_u u \end{cases} \quad (4.1)$$

系统的传递函数为,  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 。

### 4.2.1 $H_2$ 性能的 LMI 描述

假设  $A$  是稳定的,  $D_w = 0$ 。  $G$  的  $H_2$  范数定义如下:

$$\|G\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(G^*(iw)G(iw))dw \quad (4.2)$$

当系统的输入  $w$  为白噪声时,  $H_2$  范数输出  $z$  的渐进变化。

**定理 4.1<sup>[58]</sup>**: 假设系统(4.1)是渐近稳定的, 则有:

1. 当且仅当  $D_w = 0$  时,  $\|G\|_2 < \infty$

2. 下面的描述是等价的

$$1、\|G\|_2 < \gamma$$

2、存在  $P = P^T > 0$  和  $S$  使

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA & PB_w \\ B_w^T P & -I \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} P & C^T \\ C & S \end{pmatrix} > 0$$

$$\text{trace}(S) < \gamma$$

#### 4.2.2 广义 $H_2$ 性能的 LMI 描述

上面提到的  $H_2$  范数给出了用能量衡量输入输出增益。为了限制输出的能量，保持输出  $z$  的峰值增益在一定范围之内，防止作动器的饱和，对于输入信号依然用能量来衡量，导出广义  $H_2$  性能，定义如下：

$$\|G\|_g := \sup\{\|z\| : x(0) = 0, T \geq 0, \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \leq 1\} \quad (4.3)$$

广义  $H_2$  性能表示对于所有单位能量输入  $w$ ，输出  $z$  的最大峰值。

**定理 4.2<sup>[58]</sup>**：假设系统是渐近稳定的，且  $D_w = 0$ 。当且仅当存在 LMI 的一个解  $P = P^T > 0$  时，广义  $H_2$  范数应小于  $\gamma_g$ 。

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA^T & PB_w \\ B_w^T P & -I \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} P & C^T \\ C & \gamma_g I \end{pmatrix} > 0$$

### 4.3 线性系统的 $H_2$ 与广义 $H_2$ 状态反馈 LMI 实现

本节我们将给出一个用来综合状态反馈控制器的 LMI 运算法则，使闭环

系统满足前面提到的  $H_2$  与广义  $H_2$  性能。

考虑状态反馈  $u = Kx$ ，则闭环系统的状态方程与输出方程为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{cl}x(t) + B_w w(t) + B_u(t)u(t) \\ z(t) = C_{cl}x(t) + D_w w(t) + D_u u(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

其中， $A_{cl} = A + B_u K$ ， $C_{cl} = C + D_u K$ 。

### 4.3.1 $H_2$ 状态反馈 LMI 实现

1、对于描述  $H_2$  性能的 LMI

$$\begin{pmatrix} A_{cl}^T P + PA_{cl} & PB_w \\ B_w^T P & -I \end{pmatrix} < 0$$

取  $P = Q^{-1}$ ， $Y = KQ$ ， $P > 0$ 。

两侧同乘以  $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$  得：

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A + B_u K)^T P + P(A + B_u K) & PB_w \\ B_w^T P & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} Q(A + B_u K)^T P + (A + B_u K) & B_w \\ B_w^T P & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} AQ + QK^T B_u^T + AQ + B_u KQ & B_w \\ B_w^T & -I \end{pmatrix} < 0 \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} AQ + QA^T + B_u Y + Y^T B_u^T & B_w \\ B_w^T & -I \end{pmatrix} < 0 \end{aligned}$$

2、对于描述  $H_2$  性能的 LMI

$$\begin{pmatrix} P & C_{cl}^T \\ C_{cl} & S \end{pmatrix} > 0$$

两侧同乘以  $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$  得：

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & (C + D_u K)^T \\ C + D_u K & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} I & Q(C + D_u K)^T \\ C + D_u K Q & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} Q & Q(C^T + QK^T D_u^T) \\ CQ + D_u K Q & S \end{pmatrix} > 0 \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} Q & QC^T + Y^T D_u^T \\ CQ + D_u Y & S \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

### 4.3.2 广义 $H_2$ 状态反馈 LMI s 实现

推导过程与  $H_2$  性能综合相似得到如下 LMI s :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} AQ + QA^T + B_u Y + Y^T B_u^T & B_w \\ B_w^T & -I \end{pmatrix} < 0 \\ & \begin{pmatrix} Q & QC^T + Y^T D_u^T \\ CQ + D_u Y & \gamma_g I \end{pmatrix} > 0 \end{aligned}$$

## 4.4 LMI 状态反馈方法设计控制器

本章将以半车四自由度模型(图 2-2)为对象,  $f_{a1}, f_{a2}$  为前后主动悬架产生的主动力, 同前后被动悬架并联,  $k_{t1}, k_{t2}$  为轮胎刚度,  $m_s, I_\phi$  为悬挂质量与车身转动惯量,  $m_{uf}, m_{ur}$  为前后非悬挂质量。 $z_{s1} - z_{u1}, z_{s2} - z_{u2}$  为悬架的动行程,  $k_{t1}(z_{u1} - z_{r1}), k_{t2}(z_{u2} - z_{r2})$  为轮胎的动载荷,  $z_{r1}, z_{r2}$  为垂直路面位移输入。

系统的状态方程与输出方程如下：

$$\begin{aligned} & \ddot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w + B_2 f_a \\ & z(t) = C_1 x(t) + D_{12} f_a \end{aligned}$$

其中 ,

$$X = [\dot{x}_{a_1}, z_{a_1} - z_{u_1}, \dot{x}_{a_2}, z_{a_2} - z_{u_2}, \dot{x}_{u_1}, z_{u_1} - z_{r_1}, \dot{x}_{u_2}, z_{u_2} - z_{r_2}]^T \quad (4.5)$$

$$Z = [\dot{x}_s, \dot{x}_\phi, z_{a_1} - z_{u_1}, z_{a_2} - z_{u_2}, \frac{K_{r1}(z_{u_1} - z_{r_1})}{(m_{uf} + \frac{l_f m_s}{l_f + l_r})g}, \frac{K_{r2}(z_{u_2} - z_{r_2})}{(m_{ur} + \frac{l_f m_s}{l_f + l_r})g}] \quad (4.6)$$

$$A = \begin{bmatrix} -C_{s1}(\frac{1}{m_s} + \frac{l_f^2}{l_\phi}) & -K_{s1}(\frac{1}{m_s} + \frac{l_f^2}{l_\phi}) & -C_{s2}(\frac{1}{m_s} - \frac{l_f l_r}{l_\phi}) & -K_{s2}(\frac{1}{m_s} - \frac{l_f l_r}{l_\phi}) & C_{s1}(\frac{1}{m_s} + \frac{l_f^2}{l_\phi}) & 0 & C_{s2}(\frac{1}{m_s} - \frac{l_f l_r}{l_\phi}) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{s1}(\frac{1}{m_s} - \frac{l_f l_r}{l_\phi}) & -K_{s1}(\frac{1}{m_s} - \frac{l_f l_r}{l_\phi}) & -C_{s2}(\frac{1}{m_s} + \frac{l_r^2}{l_\phi}) & -K_{s2}(\frac{1}{m_s} + \frac{l_r^2}{l_\phi}) & C_{s1}(\frac{1}{m_s} - \frac{l_f l_r}{l_\phi}) & 0 & C_{s2}(\frac{1}{m_s} + \frac{l_r^2}{l_\phi}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{C_{s1}}{m_{uf}} & \frac{K_{s1}}{m_{uf}} & 0 & 0 & -\frac{C_{s1}}{m_{uf}} & -\frac{K_{s1}}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{s2}}{m_{ur}} & \frac{K_{s2}}{m_{ur}} & 0 & 0 & -\frac{C_{s2}}{m_{ur}} & -\frac{K_{s2}}{m_{ur}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{C_{s1}}{m_s} & -\frac{K_{s1}}{m_s} & -\frac{C_{s2}}{m_s} & -\frac{K_{s2}}{m_s} & \frac{C_{s1}}{m_s} & 0 & \frac{C_{s2}}{m_s} & 0 \\ -\frac{C_{s1}l_f}{l_\phi} & -\frac{K_{s1}l_f}{l_\phi} & \frac{C_{s2}l_r}{l_\phi} & \frac{K_{s2}l_r}{l_\phi} & \frac{C_{s1}l_f}{l_\phi} & 0 & -\frac{C_{s2}l_r}{l_\phi} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{r1}}{(m_{uf} + \frac{l_f m_s}{l_f + l_r})g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_{r2}}{(m_{ur} + \frac{l_f m_s}{l_f + l_r})g} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2\pi\sqrt{G_0V} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2\pi\sqrt{G_0V} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{m_s} + \frac{l_f^2}{l_\phi}) & -(\frac{1}{m_s} - \frac{l_f l_r}{l_\phi}) \\ 0 & 0 \\ -(\frac{1}{m_s} - \frac{l_f l_r}{l_\phi}) & -(\frac{1}{m_s} + \frac{l_r^2}{l_\phi}) \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_{ur}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_s} & -\frac{1}{m_s} \\ -\frac{l_f}{l_\phi} & \frac{l_r}{l_\phi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主动悬架设计的要求为 , 降低由路面不平引起的车身垂直于俯仰振动 , 提高乘坐舒适性 , 限制轮胎的动静载荷比 , 以满足操纵稳定性的要求。为保证在车辆行驶的过程中轮胎与地面的作用力 , 要求轮胎的动载荷必须小于轮

胎的静载荷。

$$\begin{cases} K_{t1}(z_{u1} - z_{r1}) < (m_{uf} + \frac{l_r m_s}{l_f + l_r})g \\ K_{t2}(z_{u2} - z_{r2}) < (m_{ur} + \frac{l_f m_s}{l_f + l_r})g \end{cases} \quad (4.7)$$

同时，由于悬架部件存在机械行程的限制，为防止机械部件达到最大行程撞击限位块而影响乘坐舒适性与机械系统的可靠性，需要限制悬架系统的动行程。

$$\begin{cases} -z_{\max 1} \leq z_{s1} - z_{u1} \leq z_{\max 1} \\ -z_{\max 2} \leq z_{s2} - z_{u2} \leq z_{\max 2} \end{cases} \quad (4.8)$$

以上为硬约束，同时车辆系统在行驶中还存在许多变化的特性，如高频的柔性动力学，轮胎气压的不平衡，非线性，以及一些未知、未建模与忽略的车辆参数，对于上述情况，须进行鲁棒性分析。综上所述，主动悬架控制器设计的目标为，良好的乘坐舒适性、鲁棒性与机械系统的硬约束。

#### 4.4.1 问题描述

针对以上描述的问题，状态变量的选取如(4.5)与输出变量变量的选取如(4.6)：则系统的状态方程与输出方程如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w + B_2 f_a \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{12} f_a \end{cases} \quad (4.9)$$

其中， $w = (w_f \quad w_r)^T$  为路面的扰动输入， $f_a = (f_{a1} \quad f_{a2})^T$  前后主动悬架产生的主动力。

将系统(4.9)用参数依赖模型描述如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B_j(\theta)w_j(t) + B_u(t)u(t) \\ z_j(t) = C_j(\theta)x(t) + D_{ju}(\theta)u(t) \end{cases} \quad (4.10)$$

其中， $w_j = w$  ( $j=1,2$ )。 $w_j$  与  $z_j$  用于将多目标控制简化为独立的性能通道  $w_j \rightarrow z_j$ 。 $\theta$  为不确定向量，有如下假设：

- a)  $\theta$  在多面体  $\Theta$  内变化， $\theta \in \Theta := Co\{\theta_1, \theta_2, L, \theta_r\}$ 。
- b) 系统依赖的参数是仿射的，即状态矩阵  $A(\theta)$ ,  $B_j(\theta)$ ,  $B_u(\theta)$ ,  $C_j(\theta)$  与  $D_{ju}(\theta)$  仿射依赖于  $\theta$ 。

系统矩阵在一个矩阵多面体内变化，其顶点以  $\theta_1, \theta_2, L, \theta_r$  为参变量，即

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A(\theta) & B_j(\theta) & B_u(\theta) \\ C_j(\theta) & 0 & D_{ju}(\theta) \end{pmatrix} \in Co \left\{ \begin{pmatrix} A_i & B_{j,i} & B_{u,i} \\ C_{j,i} & 0 & D_{ju,i} \end{pmatrix} \right. \\ & \left. := \begin{pmatrix} A(\theta_i) & B_j(\theta_i) & B_u(\theta_i) \\ C_j(\theta_i) & 0 & D_{ju}(\theta_i) \end{pmatrix}, i = 1, 2, L, r \right\} \end{aligned}$$

如上面所描述的，扰动  $w = (w_f \quad w_r)^T$  为白噪声，因此选择  $w_j \rightarrow z_j$ ,  $j = 1$  通道用  $H_2$  性能综合，有利于乘坐舒适性，选择  $w_j \rightarrow z_j$ ,  $j = 2$  通道用广义  $H_2$  性能综合，有利于操纵稳定性与限制悬架的冲击。这样，乘坐舒适性用车身加速度的渐进变换来衡量，操纵稳定性与悬架的冲击直接用硬约束来限制。

**问题(4.1)：4DOF 主动悬架控制问题：**

寻找一个状态反馈控制器，针对所有的不确定性，使  $w_1 \rightarrow z_1$  的  $H_2$  范数  $\|T_1\|_2$  最小，同时满足  $w_2 \rightarrow z_2$  的广义  $H_2$  范数  $\|T_2\|_g < \gamma_2$ （将输出方程进行归一化处理）。

#### 4.4.2 状态反馈控制器设计

本节将针对二分之一车主动悬架控制问题，采用 LMI 方法<sup>[58]</sup>设计状态反馈控制器，考虑状态反馈  $u = Kx$ ，则闭环系统的状态方程与输出方程为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{cl}(\theta)x(t) + B_j(\theta)\omega_j(t) + B_u(t)u(t) \\ z_j(t) = C_{j,cl}(\theta)x(t) + D_{ju}(\theta)u(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

其中， $A_{cl}(\theta) = A(\theta) + B_u(\theta)K$ ,  $C_{j,cl} = C_j(\theta) + D_{ju}K$ 。

$A_{cl}(\theta)$  是稳定的， $\|T_1\|_2^2 < \gamma_1$  的充要条件为存在  $P = P^T > 0$  与  $S > 0$ ，满足

$$\begin{pmatrix} A_{cl}(\theta)^T P + PA_{cl}(\theta) & PB_j(\theta) \\ B_j(\theta)^T P & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.12a)$$

$$\begin{pmatrix} P & C_{j,cl}(\theta)^T \\ C_{j,cl}(\theta) & S \end{pmatrix} > 0 \quad (4.12b)$$

$$Tr(S) < \gamma_1, \quad j=1 \quad (4.12c)$$

$A_{cl}(\theta)$  是稳定的 ,  $\|T_2\|_g^2 < \gamma_2$  的充要条件为存在  $P = P^T > 0$  , 满足

$$\begin{pmatrix} A_{cl}(\theta)^T P + PA_{cl}(\theta) & PB_j(\theta) \\ B_j(\theta)^T P & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.13a)$$

$$\begin{pmatrix} P & C_{j,cl}(\theta)^T \\ C_{j,cl}(\theta) & \gamma_2 \end{pmatrix} > 0, \quad j=2 \quad (4.13b)$$

考虑仿射依赖于  $\theta$  的系统 , LMIs (4.12) 与 (4.13) 可以转化为如下 LMIs :

$$\begin{pmatrix} A_i Q + QA_i^T + B_{u,i}Y + Y^T B_{u,i}^T & B_{j,i} \\ B_{j,i}^T & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.14a)$$

$$\begin{pmatrix} Q & QC_{j,i}^T + Y^T D_{ju,i}^T \\ C_{j,i}Q + D_{ju,i}Y & S \end{pmatrix} > 0 \quad (4.14b)$$

$$Tr(S) < \gamma_j, \quad j=1, i=1,2,\dots, r \quad (4.14c)$$

与

$$\begin{pmatrix} A_i Q + QA_i^T + B_{u,i}Y + Y^T B_{u,i}^T & B_{j,i} \\ B_{j,i}^T & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.15a)$$

$$\begin{pmatrix} Q & QC_{j,i}^T + Y^T D_{ju,i}^T \\ C_{j,i}Q + D_{ju,i}Y & \gamma_j I \end{pmatrix} > 0, \quad j=2, i=1,2,\dots, r \quad (4.15b)$$

在这里  $\gamma_2 = 1$ 。

此外 , 为了保证闭环系统的某些动态特性 , 可将闭环系统的极点配置在一定的区域内。可以利用 LMI 区域的概念将极点配置问题用 LMI 进行描述 ,  $D$  为一幅平面的凸子集 , 定义如下 :

$$D = \{s \in C : L + Ms + M^T \bar{s} < 0\} \quad (4.16)$$

其中 ,  $L = L^T = [\lambda_{jk}]_{1 \leq j,k \leq m}$  与  $M = [\mu_{jk}]_{1 \leq j,k \leq m}$  。因此 , 闭环极点位于 LMI 区域之

内的充要条件为，存在  $Q > 0$  于  $Y$  满足下列 LMI：

$$[\lambda_{jk}Q + \mu_{jk}(A_iQ + B_{u,i}Y) + \mu_{kj}(QA_i^T + Y^TB_{u,i}^T)]_{1 \leq j, k \leq m} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4.17)$$

到此，将主动悬架控制问题重新描述为如下的 LMI 优化问题：

$$\min_{\gamma_1, Q, Y, S} \gamma_1, \text{ 满足(4.14), (4.15)与(4.17)} \quad (4.18)$$

不难看出，如果对于(4.18)存在一个优化解  $(\gamma_1^*, Q^*, Y^*, S^*)$ ，则对于所有的不确定性

- 1、得到一个最优的状态反馈矩阵  $K^*$ ， $K^* = Y^*Q^{*-1}$ 。
- 2、多目标主动悬架系统是稳定的，闭环极点存在于给定的 LMI 范围内。
- 3、在乘坐舒适性方面，对于所有的白噪声路面扰动，主动悬架系统满足最小的输出变化。
- 4、对所有的单位能量路面扰动满足硬约束(4.7)与(4.8)。

## 4.5 性能分析

本节将利用求解出的控制器与二分之一车模型进行分析与仿真，模型的参数如表 4-1。

表 4-1 二分之一车名义模型的参数

符号	含义	值	单位	不确定性
$m_s$	车身质量	600	kg	$\pm 30\%$
$I_\phi$	车身俯仰转动惯量	800	$kg \cdot m^2$	$\pm 10\%$
$m_{usf}$	前非悬挂质量	59	kg	
$m_{usr}$	后非悬挂质量	50	kg	
$L_f$	质心与前悬距离	1.02	m	
$L_r$	质心与后悬距离	1.37	m	
$k_{sf}$	前悬架刚度	20000	$kN/m$	
$k_{sr}$	后悬架刚度	20000	$kN/m$	
$c_{sf}$	前悬架阻尼	1400	$kN \cdot s/m$	

$c_{sr}$	后悬架阻尼	1400	$kN \cdot s / m$	
$k_{tf}$	前轮刚度	175000	$kN / m$	
$k_{tr}$	后轮刚度	175000	$kN / m$	
$G_0$	路面不平度系数	$10^{-5}$	$m^2 / m^{-1}$	
$V$	车速	30	$m / s$	
$z_{\max 1}$	前悬架动行程	0.1	$m$	
$z_{\max 2}$	后悬架动行程	0.1	$m$	

考虑的不确定参数为：

$$\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_s} & \frac{1}{I_\phi} & \frac{k_{t1}}{f_{kt1}} & \frac{k_{t2}}{f_{kt2}} \end{pmatrix}^T$$

其中，

$$\begin{cases} f_{kt1} = (l_r m_s g + (l_f + l_r) m_{uf} g) / (l_f + l_r) \\ f_{kt2} = (l_f m_s g + (l_f + l_r) m_{ur} g) / (l_f + l_r) \end{cases}$$

包含时不变不确定性的二分之一车模型，在满足假设 a) 与 b) 情况下，采用仿射参数依赖模型(4.10)描述，同时要求闭环系统的极点位于右半  $s > -34$  的区域内。通过求解(4.18)得到最优状态反馈矩阵如下：

$$K = \begin{pmatrix} -59.637 & -18008 & -108.87 & -93.894 & 322.13 & -495 & -62.514 & 9626.2 \\ 4.7575 & 365.03 & -209.51 & -14711 & 206.52 & -8027.2 & 672.01 & -18472 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

由于在控制器设计时已考虑稳定性问题与不确定条件下系统的鲁棒性问题，因此不需要对其再进行分析，在这里只给出主动悬架与被动悬架的幅频特性，用于性能的对比分析。考虑车身质量(420、600、780)与转动惯量(720、800、880)九种工况，两个输入(前轮与后轮)，两个输出(车身垂直加速度与车身俯仰加速度)，绘制主动悬架与被动悬架的频率特性用于系统性能分析。

闭环系统的幅频特性如下：

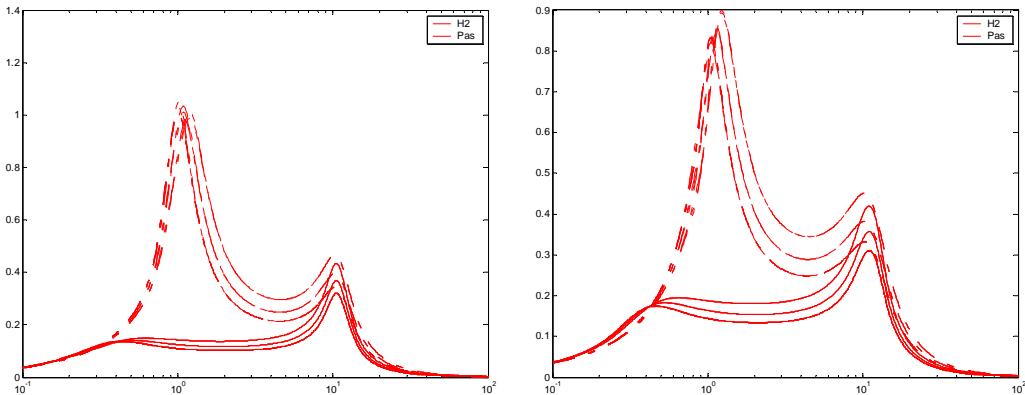


图 4-1 车身质心垂直加速度对前轮与后轮幅频特性

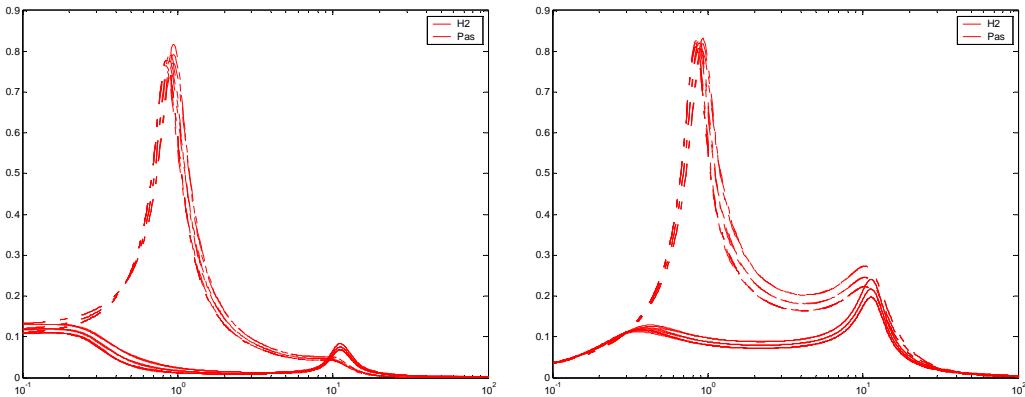


图 4-2 车身俯仰加速度对前轮与后轮幅频特性

从幅频特性曲线可以看出，在九种工况下主动悬架性能明显优于被动悬架。

## 4.6 仿真结果

### 4.6.1 随机路面输入仿真

我们选取为 D 级路面，车速 30 米每秒。考虑车身质量 ( $kg$ ) (420、600、780) 与转动惯量 ( $kg \cdot m^2$ ) (720、800、880) 九种工况，对主动悬架与被动悬架进行时域随机路面输入仿真。随机路面输入仿真曲线如下：

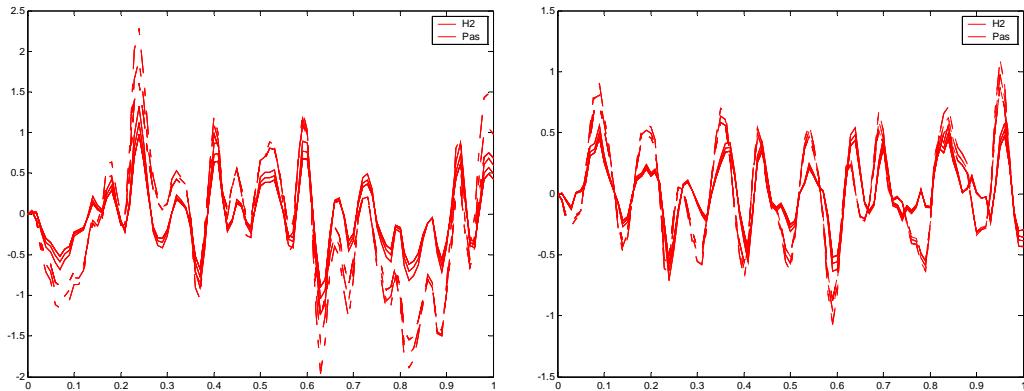


图 4-3 车身垂直与俯仰加速度仿真结果

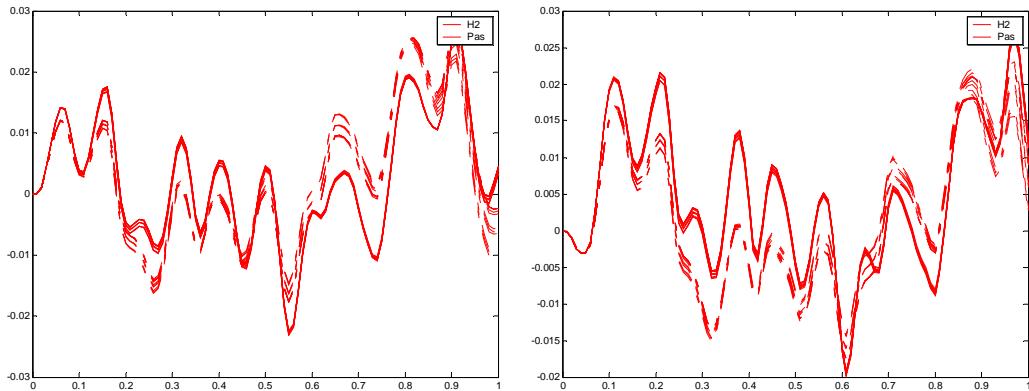


图 4-4 前悬架与后悬架动行程仿真结果

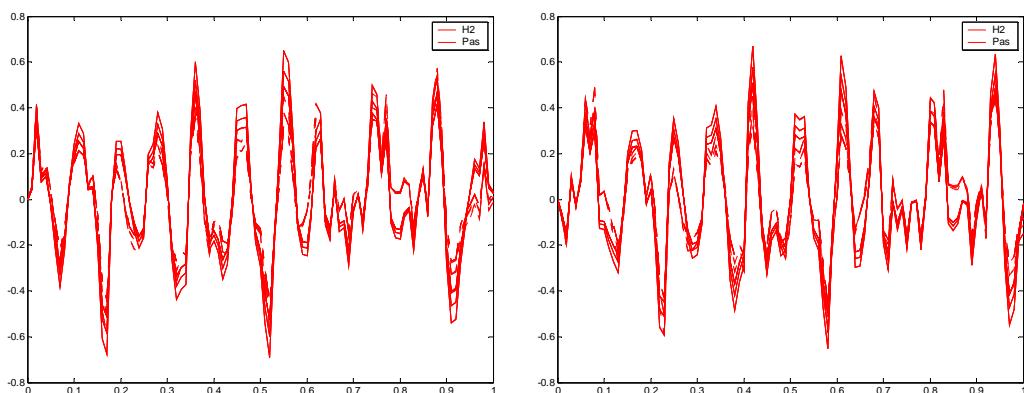


图 4-5 前轮与后轮胎动静载荷比

从仿真结果可以看出，对于车身垂直加速度与车身俯仰加速度，主动悬

架的性优于被动悬架。主动悬架的动行程小于悬架系统的最大行程，没有撞击限位块影响乘坐舒适性。主动悬架的轮胎动静载荷比小于 1，保证了轮胎的接地性，满足操纵稳定性的要求。

#### 4.6.2 脉冲路面输入仿真

我们选取车速 30 米每秒。考虑车身质量 ( $kg$ ) (420、600、780) 与转动惯量 ( $kg \cdot m^2$ ) (720、800、880) 九种工况，对主动悬架与被动悬架进行时域脉冲路面输入仿真。脉冲路面输入仿真结果如下：

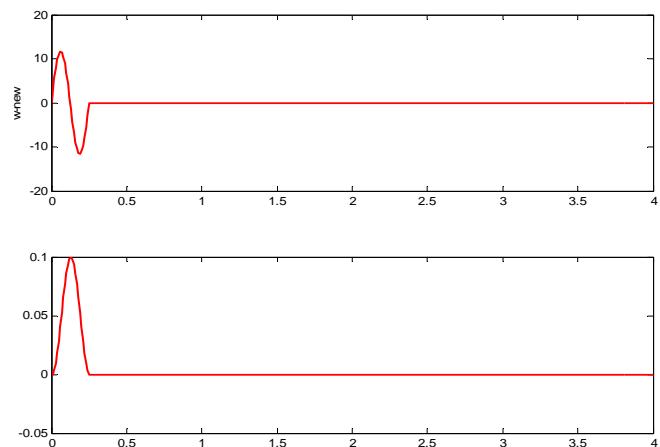


图 4-6 脉冲路面输入

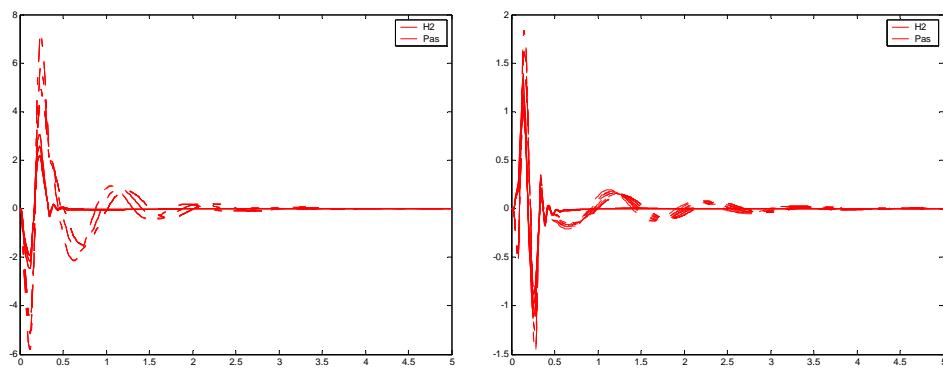


图 4-7 车身垂直与俯仰加速度仿真结果

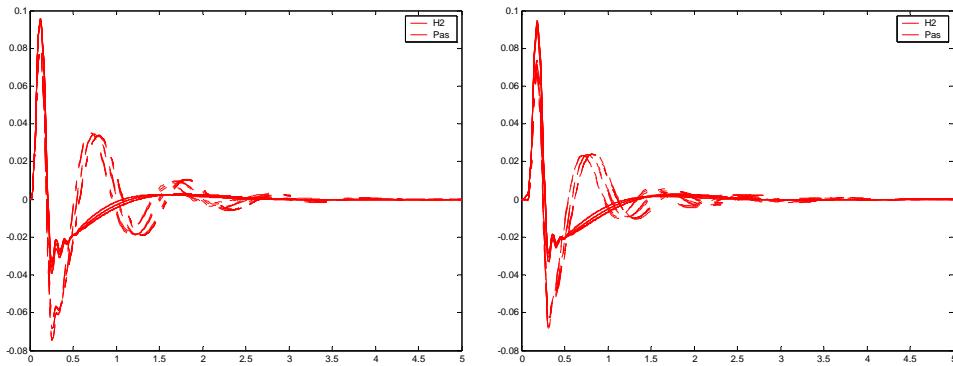


图 4-8 前悬架与后悬架动行程仿真结果

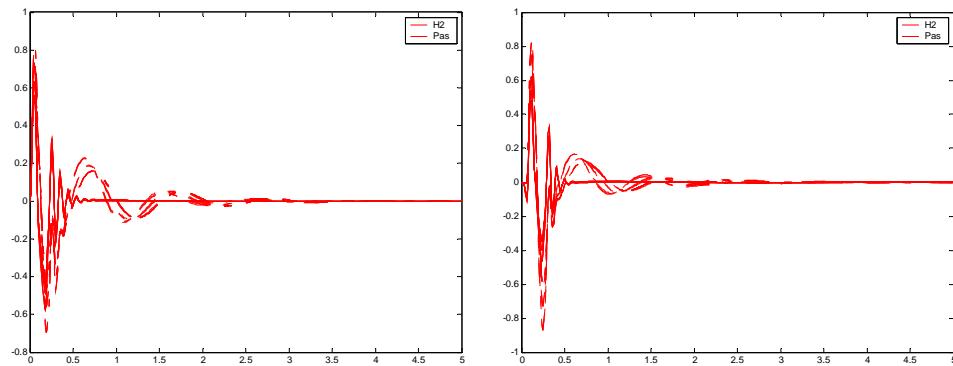


图 4-9 前轮与后轮胎动静载荷比

从仿真结果可以看出，对于脉冲路面输入，主动悬架幅值小于被动悬架，收敛时间小于被动悬架。主动悬架的动行程小于悬架系统的最大行程，没有撞击限位块影响乘坐舒适性。主动悬架的轮胎动静载荷比小于 1，保证了轮胎的接地性，满足操纵稳定性的要求。

## 4.7 本章小节

本章首先给出 LMI（线性矩阵不等式）理论的简单介绍，以及利用 LMI 进行系统性能的分析与控制器的综合问题。随后针对二分之一车主动悬架控制问题，考虑乘坐舒适性、机械系统的运动约束与操纵稳定性，利用 LMI 理论，进行悬架系统性能的分析与状态反馈控制器的多目标综合。在系统性能的分析中，将不同的目标分别采用用  $H_2$  与广义  $H_2$  性能的 LMI 描述形式，在

分析的基础之上，利用 LMI 理论综合了多个不同性能进行状态反馈控制器的设计，解决主动悬架控制器设计中存在的多目标问题。最后针对主动悬架与被动悬架闭环系统，进行分析与时域仿真，结果较令人满意。

## 第五章 全文总结

本文以二分之一 4DOF 车为模型，考虑了车辆的平顺性、操纵稳定性与物理系统的实际约束，针对具有诸多不确定性的悬架系统，利用鲁棒控制理论 ( $H_2$  理论与  $H_\infty$  理论、 $\mu$  分析及 LMI 理论)，较系统的讨论了汽车悬架系统的鲁棒性分析，鲁棒主动悬架设计和基于 LMI 的主动悬架多目标设计等问题。

本文系统的给出了汽车悬架系统鲁棒分析的理论基础，在传统的用于评价悬架系统基本性能的频率特性法和 RMS 值法的基础上，针对车辆悬架系统在实际中存在的不确定性问题，提出了评价悬架系统鲁棒性能的结构奇异值方法。文中针对二分之一车悬架系统作了详细的分析，从鲁棒性的角度分析了悬架系统，当存在诸多不确定因素时，其悬架系统性能的鲁棒性。在此，我们讨论了输出反馈  $H_\infty$  和  $H_2$  主动悬架控制系统设计的 Riccati 方法，利用闭环系统的幅频特性与 RMS 值法进行系统性能的对比分析，并利用  $\mu$  分析方法比较了这两种主动悬架系统的鲁棒性。分析结果充分显示了采用  $H_\infty$  和  $H_2$  主动悬架对改善汽车系统总体鲁棒性能的作用，同时也明确了当存在诸多不确定因素时  $H_\infty$  主动悬架在提高汽车系统鲁棒性方面的优劣性。

另外，在主动悬架设计中，需要考虑乘坐舒适性、机械系统的运动约束与操纵稳定性相互冲突加权不易，利用 LMI (线性矩阵不等式) 理论，进行悬架系统性能的分析与状态反馈控制器的多目标综合。在系统性能的分析中，将不同的目标分别采用用  $H_2$  与广义  $H_2$  性能的 LMI 描述形式，在分析的基础之上，利用 LMI 理论综合了多个不同性能进行状态反馈控制器的设计，解决主动悬架控制器设计中存在的多目标问题。

由于悬架的特殊性，以及文中介绍的悬架模型特性所限，例如悬架性能有三个不变点，既无论采取什么控制方法都无法改变既有的悬架性能。从文中也可以看出无论我们在加权还是别的措施中，悬架在 10Hz 附近（非悬挂质量的固有频率）与悬架在 1Hz 附近（悬挂质量的固有频率）的地方加速度的

值很难改变。另外本文采在进行不确定分析时，由于计算奇异值的困难性，未考虑悬架系统的未建模动态，用结构奇异值曲线分析时，只考虑了四个参数的不确定性。汽车模型仍然是建立在二分之一车模型基础上，所以还有很多因素如侧倾与水平运动等汽车的性能还没有加以考虑。这些都是我们后续所要作的工作。

## 参考文献

- [1] Croll D A, firth G, Horton D. An introduction to dynamics.
- [2] Elbeheiry EL M, et al. Advanced ground vehicle suspension systems aclassigied bibliography. VSD, 1995,24:231-256
- [3] Goodall, R M and Kortam, W. active controls in ground transportation a review of the state-of-the-art and future potential. VSD , 1983 , 12 : 225-257
- [4] HaC A Suspension Optimization Of A 2-D of Vehicle Model Using A Sto-chastic Optimal Control Technique . Journal Of Sound And Vibration , 100(3) : 57-74
- [5] Toizuka M . Advanced control methods for automotive applications . VSD , 1995 , 24 : 44946
- [6] Kawakami H, et al. Development of integrated system between active control suspension , active 4WS , TRC And ABS . SAE Paper No . 920271
- [7] Schonfield K. Geiger H and Hesse K. Electronically controlled air suspensions(ECAS) for commercial vehicles. SAE Paper No.912671
- [8] Hawag Y R and tomizuka M . fuzzy smoothing algorithms for variable structure system .IEEE,2(4): 277-284
- [9] Karnopp D C and Margolis D ,Adaptive suspension concepts for road vehicle , VSD, 1984 , 13:145-160
- [10] Margolis D L and Goshtasbpour M . The chatter of semi-active on-off suspensions and its cue , VSD , T984 , 13 : 129-144
- [11] Thompson A G . An active suspension with optimal linear state feedback . VSD , 1976 , 5 : 187-203
- [12] Thompson A G ,Davis B R .Optimal linear active suspension with derivation absorbers and integral output feedback control . VSD,1989, 18:321-344
- [13] Thompson A G , Davis B R . Optimal active suspension design using a frequency-shaping PID filter , VSD , 1992 , 21 : 19-37
- [14] Crolla D A ,Pitcher R H and Lines J A .Active Suspension control for an off road vehicle. Proc . inst . Mech . Engrs . , 1987(D), 201(Dl) : 1-10
- [15] Crolla D A , Aboul Nour A M A Theoretical comparisons of various active suspension . Meck . Bng Publ . 1988:1-9
- [16] Crolla D A , Abdel Hady M B A Active suspension control : performancecomparision using control laws applied to a vehicle mode . VSD , 1991 , 20 : 107-120
- [17] Wilson D A , Sharp R S and Hassan S A .The application of linear optimal

- control theory to the design of active automotive Suspensions . VSD , 1986 , 15 : 105-118
- [18] Hac A . Adaptive control of vehicle suspension . VSD , 1987 , 16 : 57-74
- [19] Sharp K , Hassan S A On the performance capabilities of active automobile suspension systems of limited bandwidth . VSD , 1987 , 16 : 213-225
- [20] Soliman A M A , , crolla D A and E1-sayed F M . A comparison of control strategies for the switch-able damper suspension system . Int . J Of Vehicle Design , 1993 , 14 : 308424
- [21] Palovics L , Bokor J and Venhovens P . Design problems of the semi-active wheel suspension system and a possible way of their elimination . FISITA , 1994 , N0945065
- [22] Paul JTH Venhovens, Optimal Control of vehicle suspensions . ph .D .Thesis Department of Mechanical Engineering, Delft University Of Technology 1994
- [23] 庄继德 , 陈善华 , 张宝生等 , 《实际两级可控式减振器参数对控制效果的影响》 , 吉林工业大学学报 , 1997 , 27 : 1-5
- [24] 庄继德 , 《汽车轮胎学》 , 北京理工大学出版社 1996
- [25] 高为炳 , 《变结构控制理论基础》 , 北京 : 中国科学技术出版社 , 1990
- [26] 陈善华 , 《可切换半主动悬架控制策略的研究》 , 吉林工业大学博士学位论文 , 1998.6
- [27] Thompson A G, Davis B R and Pearce C E M. An optimal linear active suspension with finite road preview. SAE Paper No.800520
- [28] Thompson A G, Optional and sub-optimal linear active suspension for road vehicles. VSD,1984,13:61-72
- [29] Chen H F and Guenther D A. Self-tuning optimal control of an active suspension, SAE Paper, 1989, No.892485
- [30] Yu F and Crolla D A. An optional self-tuning controller for an active suspension. Int. J. Vehicle System Dynamics,1998,29(1):51-65
- [31] Yedavalli R K and Liu Y. Active suspension control design for optimal road roughness isolation and rode comfort. Proc. American Control Conference, 1994, Baltimore, Maryland, 1994, 1212-1213
- [32] LMI Control Toolbox For Use with Matlab, the MATHWORKS Inc.
- [33] 周云山 , 于秀敏 , 《汽车电控系统理论与设计》 , 北京理工大学出版社 , 1999
- [34] 余志生 , 《汽车理论》 , 机械工业出版社 , 1999
- [35] Hrovat D . Applications of optimal to advanced automotive suspension design . ASME I Dynamic Systems , Measurement and Control , 1993, 115:328-342

---

---

## 参考文献

---

- [36] Ulsoy A G and Hrovat D . Stability robustness of LQG active suspensions . Proc . American Control conference , 1990 , San Diego , CA , 1347-1356
- [37] Ray L R . Robust linear - optimal control laws for active suspension systems . Advanced Automotive Technologies , ASME , 1991 , DE-40 : 291-302
- [38] Uisoy A G , Hrovat D and Tseng T .Stability robustness of LQ and LQG activesusensions. ASME J. Dynamic Systems , Measurement and Control , 1994, 116(1) : 123-131
- [39] Kim W and Won s . Parameter adaptive gain scheduling control of an active suspension system . SAE Paper , 1998 , N0.9836338
- [40] Kidczi S and Kashani R. Robust control of active car suspension with parameter uncertainty and non - white road unevenness disturbance input . SAE Paper , 1990 , No.902283
- [41] Kiriczi S and Kashani R .Robust control of active car suspension with model uncertainty using H methods . Advanced Automotive Technologies , ASME , 1991 , DE-40 : 375-390
- [42] Yamashita M ,Fujimori K ,Uhlik C ,Kawatani R and Kimura H .H control of an automotive active suspension .Proc .IEEE Conference on Decision and Control . 1990 , 2244-2250
- [43] Moran A. and Nagai M . Analysis and design of active suspensions by H robust control theory . ASME Int. J. III , 1992 , 35 : 427-437
- [44] Dai H Y, Zhang H Q and Zhang W H .Robust performance analysis of active suspension with model uncertainty using structured singular value ,  $\mu$  approach . Vehicle System Dynamics Supplement , 1998 , 28 : 635-647
- [45] Yamashipa M, Fujimori K, Hayakawa K and Kimura H. Application of H control to active suspension system .Automatica ,1994 ,30(11) :1717-1729
- [46] Park J H and Kim Y S . An H controller for active suspensions and hits robustness based on a full -car model . Proc. 14<sup>th</sup> IFAC World Congress ,1999,Beijing, CDLM, P-8b-02-3
- [47] Thompson A G. Davis B R and Pearce C E. An optimal linear active suspension with finite road preview. 1980, SAE Paper, No. 800520
- [48] Hac A. Optimal linear preview control of active vehicle suspension. Vehicle System Dynamics, 1992,21: 167-195
- [49] Louam N, Wilson D A and Sharp R S. Optimisation and performance enhancement of active suspensions for automobiles under preview of the road. Vehicle System Dynamics, 1992, 21: 39-63
- [50] Yu F and Crolla D A. Wheelbase preview optimal control for active vehicle

- suspensions. *机械工程*, 1998, 11(2): 122-129
- [51] Muijderman J H E, Kok J J , Huisman R G M, Veldpaus F E and Van J G. Preview-based control of suspension systems for commercial vehicle . *Vehicle System Dynamics Supplement*, 1999, 32: 237-247
- [52] Zames G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate invers . *IEEE Trans. Automatic Control*. 1981, AC-26: 301-320
- [53] Doyle J C and Stein G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1981, AC-26:4-16
- [54] Francis B A. *A Course in H<sub><</sub> Control Theory* . Lecture Notes in Control and Information Sciences , Vol. 88 , 1987
- [55] Zhou K , Doyle J C and Glover K . *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall , New Jersey , 1996
- [56] 吴敏 , 桂卫华 , 《现代鲁棒控制》 , 中南工业大学出版社 . 1998
- [57] Doyle J C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings ,Part D*, 1982,133:45-56
- [58] Boyd S ,Ghaoui L E ,Geron E and Balakrishnan V *Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory* . SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia , 1994
- [59] 喻凡 , 《车辆悬架控制系统的研究》 , 吉林大学机械工程博士后研究报告 , 1999
- [60] 邬惠乐 , 邱毓强 , 《汽车拖拉机试验学》 , 机械工业出版社 , 1994
- [61] 郭孔辉 , 《汽车操纵动力学》 , 吉林科学技术出版社 , 1991
- [62] Chilali M and Gahinet P. H<sub><</sub> design with pole placement constraints : an LMI approach. *Proc . Conference on Decision and Control* , 1994 , 553-558
- [63] 陈虹 , 汽车悬架系统的鲁棒性分析与综合 , 吉林大学机械工程博士后流动站 , 2000
- [64] M.米奇克 , 《汽车动力学 B卷》 , 人民交通出版社 , 1994
- [65] H. Chen and K. Guo. An LMI approach to separate RMS gains control for active suspensions. In *Proc Amer. Contr. Conf.*, pages 2646-2651, Arlington, VA, 2001.

## 致谢

本论文的完成首先感谢导师陈虹教授。在论文的工作中，陈虹教授给予了全力指导，其严谨的治学态度和渊博的学识使我深受感染并受益匪浅，其乐观真诚的生活态度，脚踏实地的刻苦精神都给了我很大的启迪，受益终生。

在课题研究的过程中，师兄孙鹏远、赵桂军及全体课题组的同学给予了我很多的指导和建议，并为我提供了良好的工作环境和完善的实验条件，使我能克服诸多困难，最后得以顺利完成论文，在此向课题组的诸位同学表示深深地感谢！

感谢汽车动态模拟国家重点实验室的管欣教授、李杰教授、宗长富教授帮助解答汽车专业的相关知识。感谢同寝室的张涛和高兴泉同学在论文的成稿过程中给予的帮助。

最后，我要把这本论文送给含辛茹苦培养我的父母，感谢他们在这二十多年人生历程中对我深深地爱和毫无保留地支持！由衷的祝他们身体健康，心情愉快！

## 摘要

悬架系统是汽车的重要组成部分，它位于车身与车轮之间，通常由弹性元件和阻尼元件组成。它把车体与车轴弹性地连接起来，并承受作用在车轮和车体之间的力；缓冲来自不平路面给车体的冲击载荷，衰减各种动载荷引起车体的振动；使非悬挂质量尽量跟随着地面运动，以减小车轮与地面之间附着力的损失，保证良好的轮胎接地性，从而提供良好的行驶安全性。悬架对汽车的行驶平顺性、乘坐舒适性及操纵稳定性等多种使用性能都有很大影响。上述对悬架系统的性能要求之间是相互制约与矛盾的。因此，协调各个因素使车辆系统的总体性能达到最佳是悬架系统设计的目标。

悬架系统按其工作原理可以分为被动悬架、半主动悬架与主动悬架，前两种悬架系统发展相当长的时间，并在实际的车辆中得到广泛的应用，被动悬架只能满足单一工况的最优，半主动悬架也只能满足少数工况的最优，但无法使车辆系统的性能在所有路况下达到全局最优。对于主动悬架，通过控制器的设计可以使车辆系统的性能在所有工况下达到全局最优。因此，主动悬架的研究为控制方法的选择提供了一个广泛的研究领域，本文正是基于此背景展开工作。

平顺性与操纵稳定性是汽车设计的两个重要部分，而悬架是协调平顺性与操纵稳定性的重要部件。汽车悬架应具有三个主要的性能要求：尽量使乘客不受路面不平的影响（乘坐舒适性）；抑制轮胎的振动以维持轮胎与路面的接触及轮胎的动静载荷比（操纵稳定性）；保持悬架动行程在允许的范围内以免撞击限位块破坏乘坐舒适性（机械约束）。在车辆设计中采用的模型很多，其中最简单描述整车振动动力学的为七自由度整车振动模型，但考虑到汽车悬架动力学的主要因素为双自由度垂直振动的四分之一车单轮模型，同时考虑多个输入的耦合，兼顾车辆的俯仰振动，本文以四自由度二分之一车单轮辙（前后双轴）模型为对象，在此基础上针对上述三个目标展开研究工作。

前面提出的汽车悬架系统设计中所要求的三个主要性能存在着相互之间的冲突与矛盾。例如降低悬架系统的刚度与阻尼会得到较好的乘坐舒适性，这需要加大悬架的动行程，将带来较大的车身姿态变化，不利于车辆的操纵稳定性。相反为了提高车辆的操控性能，需要悬架系统具有较大的刚度，这样会影响乘坐舒适性。另外，在实际的形式中车辆处在一个多变的环境中，这包括路面输入、车辆工况与车辆参数的变化。针对上述问题，本文采用相关的鲁棒控制理论（ $H_\infty$  理论、 $H_2$  理论、 $\mu$  分析以及 LMI 理论）的原理进行主动悬架控制器的设计与分析。

首先，针对二分之一车的动力学方程与控制目标建立系统的状态方程与输出方程，同时考虑车辆工况的多变性，给出系统相应参数的变化范围，其主要包括：由于载人或载货重量的变化，悬挂质量与车身转动惯量在某个范围内变化；又由于轮胎气压的变化，轮胎刚度在一定范围内变化。这样，针对设计的悬架系统需要应用鲁棒控制理论进行系统的鲁棒性分析。具体地说，当存在不确定时，悬架系统是否稳定以及是否还能维持期望的性能要求，本文对上述变化采用结构不确定性进行描述。对于悬架系统的分析方法，本文给出了用于分析悬架鲁棒性的结构奇异值  $\mu$  方法，用于分析悬架性能的幅频特性方法与 RMS 值方法。结构奇异值  $\mu$  方法用于分析在不确定性条件下悬架系统的鲁棒稳定性与鲁棒性能。RMS 值与幅频特性法用于分析系统的乘坐舒适性、悬架动行程与轮胎动静载荷比。

其次，我们进行主动悬架系统的设计，首先给出了主动悬架二分之一车控制问题及性能要求的描述。为了协调相互冲突的各项性能要求，同时为强调人体对 4 : 8 Hz 振动频率的敏感性、机械系统的运动约束与操纵稳定性的要求，采用加权输出作为系统控制输出，并以此构成主动悬架增广系统。在此基础之上，着重讨论了  $H_2$  与  $H_\infty$  主动悬架设计的理论问题，并给出了输出反馈控制器的构造方法。然后给出了  $H_2$  与  $H_\infty$  主动悬架设计的实例，并进行比较分析，当这两个系统存在各种不确定情况时的  $H_2$  与  $H_\infty$  主动悬架汽车以不同速度行驶于不同路面时的鲁棒性。由于  $H_\infty$  性能是以限制系统输入输出最高增益为目

的 , 所以从比较结果中可以看出 , 在不确定较多的情况下  $H_{\infty}$  主动悬架比  $H_2$  主动悬架具有良好的鲁棒性。针对不同的随机路面输入 ( 输入为白噪声 ) , 分析三种悬架系统的 RMS 值 ,  $H_2$  主动悬架具有最好的乘坐舒适性。这与仿真结果相吻合。

最后 , 针对汽车悬架系统设计中存在的多目标问题与结构的不确定性问题 , 利用 LMI ( 线性矩阵不等式 ) 理论 , 进行多目标主动悬架控制器设计。首先将系统的多个设计目标分别转化为 LMI 的描述形式进行分析 , 乘坐舒适性以  $H_2$  性能描述 , 轮胎动静载荷比与悬架的动行程采用广义  $H_2$  性能描述 , 同时给出不同性能控制器的 LMI 描述形式。在此基础上 , 考虑系统的不确定性 , 采用参数依赖模型描述系统 , 使系统仿射依赖于不确定参数 , 针对设计目标中的不同性能 , 利用 LMI 求解状态反馈控制器。最后 , 针对主动悬架与被动悬架 , 进行随机路面输入与脉冲路面输入时域仿真 , 结果表明主动悬架的性能令人满意。

## Abstract

Suspension is the main part of the vehicle, it is lie between body and wheels. Usually, the suspension is composed of the spring and damper elements. It connects flexibly body with axle, affords force between wheel and body, retards impulsion load from uneven road to body, and attenuates vehicle vibration arisen by all kinds of shift load. Suspension suppresses vibration of the wheels so as to maintain firm and uninterrupted contact between the wheels and the road, improve the handling stability. The suspension has influence of much performance such as ride comfort and handling stability. So, to provide a trade off approach between these performances is the purpose for suspension design.

Suspension is divided into three types as its work principle, such as passive suspension, half-active suspension and active suspension. The passive and half-active suspension have been developed for long time and applied in the actual vehicle. For condition the passive suspension can obtain optimization. For some condition the half-active suspension can obtain optimization. Studies have shown the limitations of passive suspensions that it can work well only in some special conditions. Semi-active suspensions offer a limited improvement in performance over conventional passive suspensions, but they can not ensure global optimization over the whole range of road conditions. In order to realize the full potential of active suspensions the controller should have the capability of adapting to all changing road environments. So the study of active suspension supplies an extensive research area for choosing the control rule, we can use control theory and technology. This paper is having some

studies based on this background.

Ride comfort and handling stability are two important elements in the vehicle dynamic research and suspension is the important part of harmonizing these important elements. In general, the suspension has three main performance requirements, that is to be as possible as be able to isolate passenger from vibrations arising from road roughness (ride comfort), to suppress vibration of the wheels so as to maintain firm, uninterrupted contact between the wheels and (good handling) and to keep suspension strokes within an allowable maximum. During the vehicle suspension designation, there are many models, among these models, one is 7 DOF simple whole vehicle system mathematic model. For existing all kinds of subtle dynamic factors affluence and relations within parts each other, the basic factor in the leading suspension design can embody using a 2DOF single wheel vehicle. Considering the coupling multi-input and the pitching vibration of the vehicle as well, this paper is having some studies based on single wheel vehicle model and above mentioned those three main performance requirements.

Actually during the vehicle design, above the three main performance requirement is conflicted, for example, one low angular rigidity soft suspension can achieve good ride comfort, but in the both time, it need great suspension space to bring about worse vehicle-body pose control (that is handling stability). In reverse, in order to guarantee good handling, it is necessary to guarantee that suspension has higher angular rigidity, but this suspension is bad to ride comfort. In addition, the actual vehicle moves forward a variable environment including different road surface input, different vehicle velocity and the parameter of the vehicle maybe varies. For above these factors, this paper designs control rules to form related active

suspensions using robust control theory ( $H_\infty$  theoretic,  $\mu$  analysis, LMI theory).

Firstly, build the half-vehicle's state equation and output equation using the dynamic model. Considering the variable conditions, we give the changing rang of parameter, including: the body mass alters in a bounded range when the carload quantity or the number of passengers varies, so does the tire stiffness when air pressure changes. So it is essential to analyses robustness of a vehicle suspension. In other words, we need know whether the vehicle suspension is stability and whether can remain stable performance expected for uncertainties. In this paper, we give the related described approaches by using the structured uncertain systems. For the analysis of the suspension, we discussed approaches of analysis to the robust suspension system by using the structured singular value  $\mu$ , to the suspension performances by using RMS value and frequency response. The structure singular value  $\mu$  is the sufficient and essential condition of robustness, and this method can discuss the suspension system robust performance of concerned frequency range. By using RMS value and frequency response, we analyse the performances of suspension, such as ride comfort, good handling.

Secondly, begin to have some work to design robust active suspension. First of all, we give the problem of active suspension 4DOF 1/2 vehicle system control and description of performance requirements. In order to harmonize conflict performance requirement and emphasize sensitivity of vertical vibrations between 4 and 8 Hz for human being, we adopt weighted output as system control output, and form the suspension augmented system. Based on this system, we discussed emphatically theory problem of  $H_2$  and  $H_\infty$  active suspension designation, and present of output

feedback  $H_2$  and  $H_\infty$  controller form methods. We give an example of  $H_2$  and  $H_\infty$  active suspension design. We compare the robustness of these two system when the vehicle's moving forward on different roads and with different velocity and existing different uncertainty, Because  $H_\infty$  performance objective is limited system highest value from input to output, from the compared results, it indicated that the  $H_\infty$  active suspension system has advantages of improving performance robustness in the presence of various uncertainties. Considering the random road input(white noise), we analyse the RMS value of these suspensions, the  $H_2$  active suspension have the best ride comfort.

Finally, concerning the design problems of suspension, which are multi-object and robust performance for uncertainty, we use the LMI(linear matrix inequation) theory to design the multi-object active suspension controller. First, we formulate the performances with LMI, such as the ride comfort is formulated by  $H_2$  performance, wheel vibration and suspension stroke are formulated by generalized  $H_2$  performance. Then, we formulate the controller with LMI. Based on such consideration, for all uncertain factors taken into account, parameter affine dependent model is adopted to describing the vehicle system. A multi-objective state-feedback approach is then promoted for the conflicting requirements. A controller is given via the LMI solver and simulations for both normal random road input and pulse road input is discussed in the time domain, respectively. Comparisons between the active and passive suspensions show that ride comfort performances are optimized as well as stable and other performance guaranteed in the active vehicle system.

**keywords:** suspension system   active suspension   robust control    $H_\infty$  and  $H_2$   
control  $\mu$  analysis   LMI theory uncertainty