浙江理工大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权浙江理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

保密□ ，在 ________ 年解密后使用本版权书。

不保密☑ 。

学位论文作者签名：[illegible]

日期：2010 年 4 月 16 日

指导教师签名：[illegible]

日期：2010 年 4 月 16 日

摘 要

众所周知，Gauss超几何函数$F(a,b;c;x)$、完全椭圆积分$\mathcal{K}(r)$和$\mathcal{E}(r)$、广义椭圆积分$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$、广义Hersch-Pfluger 偏差函数$\varphi_K(a,r)$以及与其相关的一些其它的特殊函数在数论、拟共形理论、几何学等许多数学领域以及其它学科中都有着广泛而重要的作用。而广义椭圆积分作为最重要的特殊函数之一，一方面它是超几何函数的重要特例。另一方面，广义椭圆积分又是完全椭圆积分的推广。广义椭圆积分还与出现在广义模方程中的广义Grötzsch环函数$\mu_a(r)$、广义Hübner上界函数$m_a(r)$、广义Hersch-Pfluger偏差函数$\varphi_K(a,r)$、Agard偏差函数$\eta_K(a,t)$和线性偏差函数$\lambda(a,K)$有着密切的联系。事实上，我们可以通过研究广义椭圆积分的性质来获得$\mu_a(r)$、$m_a(r)$、$\varphi_K(a,r)$、$\eta_K(a,t)$和$\lambda(a,K)$的性质。尤其是函数$\varphi_K(a,r)$的用初等函数给出的界经常依赖于由$\mathcal{K}_a(r)$定义的函数$\mu_a(r)$、$m_a(r)$与某些初等函数组合的分析性质。因此，深入研究广义椭圆积分的性质及其应用具有重要意义。

本文一方面通过深入研究广义椭圆积分$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$与某些初等函数的组合的性质，把完全椭圆积分$\mathcal{K}(r)$和$\mathcal{E}(r)$所具有的某些重要性质推广到$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$，揭示了广义椭圆积分$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$的一些新的分析性质，并得到了一些函数不等式。同时，改进了完全椭圆积分$\mathcal{K}(r)$和$\mathcal{E}(r)$由初等函数给出的界。另一方面，通过研究函数$\mu_a(r)$和$m_a(r)$等与某些初等函数的组合的单调性和凹凸性等性质，获得了一些函数不等式，进而改进了广义Hersch-Pfluger偏差函数$\varphi_K(a,r)$的上下界，推广了Hersch-Pfluger偏差函数$\varphi_K(r)$的性质，加强了显式广义拟共形Schwarz引理和广义Ramanujan模方程解的估计。

本文共分四章:

在第一章中，主要介绍了本文的研究背景，并引入本文所涉及的一些概念、记号和已有结果。

在第二章中，首先给出了一些由函数$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$分别与初等函数组合的一些分析性质，获得了一些函数不等式。然后，研究了由函数$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$所定义的一些函数的单调性和凹凸性，获得了一些函数不等式，并由此推广和改进了$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$的一些界。最后，通过讨论广义椭圆积分对参数a的依赖性，给出了广义椭圆积分的一些新的分析性质。

在第三章中，通过研究广义Grötzsch环函数$\mu_a(r)$和广义Hübner上界函数$m_a(r)$的一些分析性质，获得了函数$\mu_a(r)$与$m_a(r)$的一些由广义椭圆积分表示的函数不

等式。然后，运用第二章的结果及函数$\varphi_K(a,r)$与函数$\mu_a(r)$、$m_a(r)$的特殊关系，得到了函数$\varphi_K(a,r)$的一些用初等函数给出的更好的估计。

在第四章中，主要研究并获得了广义Ramanujan模方程的解$\varphi_K(a,r)$，广义Agard偏差函数$\eta_K(a,t)$和广义线性偏差函数$\lambda(a,K)$的一些分析性质。

关键词：Gauss超几何函数，完全椭圆积分，广义椭圆积分，Grötzsch环函数，Hübner不等式，广义Hersch-Pfluger偏差函数，广义Ramanujan模方程

Abstract

It is well known that the Gaussian hypergeometric function $F(a,b;c;x)$, complete elliptic integrals $\mathcal{K}(r)$ and $\mathcal{E}(r)$, generalized elliptic integrals $\mathcal{K}_a(r)$ and $\mathcal{E}_a(r)$, generalized Hersch-Pfluger distortion function $\varphi_K(a,r)$ and other related special functions play an extensive and important role in number theory, quasiconformal theory, geometry and many other areas of mathematics and other disciplines.

As one kind of the most important special functions, the generalized elliptic integrals are important special cases of hypergeometric functions. On the other hand, they are the generalization of the complete elliptic integrals. Moreover, the generalized Grötzsch ring function $\mu_a(r)$, generalized Hübner upper bound function $m_a(r)$, generalized Hersch-Pfluger distortion Function $\varphi_K(a,r)$, Agard η-distortion function $\eta_K(a,t)$ and linear distortion function $\lambda(a,K)$, which appear in the generalized modular equation, are defined in terms of the generalized elliptic integrals. In fact, one can obtain the properties of $\mu_a(r)$, $m_a(r)$, $\varphi_K(a,r)$, $\eta_K(a,t)$ and $\lambda(a,K)$ by studying the properties of the generalized elliptic integrals. In particular, the estimates of the function $\varphi_K(a,r)$ given by elementary functions often depend on the analytic properties of certain combinations of the functions $\mu_a(r)$, $m_a(r)$ and some elementary functions. Thus, the researches on the properties and applications of the generalized elliptic integrals are significant.

In this thesis, we extend some important properties of the complete elliptic integrals $\mathcal{K}(r)$ and $\mathcal{E}(r)$ to the functions $\mathcal{K}_a(r)$ and $\mathcal{E}_a(r)$, reveal some new analytic properties of $\mathcal{K}_a(r)$ and $\mathcal{E}_a(r)$ by studying the properties of the combination of the generalized elliptic integrals $\mathcal{K}_a(r)$, $\mathcal{E}_a(r)$ and some elementary functions, from which some functional inequalities and better estimate for $\mathcal{K}_a(r)$ and $\mathcal{E}_a(r)$ follow. we shall also derive some inequalities of the functions $\mu_a(r)$ and $m_a(r)$ by studying the monotonicity,convexity and concavity of certain combinations of the functions $\mu_a(r)$, $m_a(r)$ and elementary functions, by which we strengthen the upper and lower bounds of the generalized Hersch-Pfluger distortion $\varphi_K(a,r)$, quasiconformal Schwarz lemma and the solution of generalized Ramanujan's modular equation.

This paper is divided into four chapters as follows:

In the first chapter,we introduce the research background of this thesis and some concepts, notation and some known results used afterwards.

In the second chapter, we present some analytic properties of certain combinations of functions $\mathcal{K}_a(r)$, $\mathcal{E}_a(r)$ and elementary functions, and obtain some functional inequalities. Then, we study the monotonicity, convexity and concavity of some functions defined in terms of the functions $\mathcal{K}_a(r)$ and $\mathcal{E}_a(r)$, get some functional inequalities for them, and improve some known bounds of $\mathcal{K}_a(r)$ and $\mathcal{E}_a(r)$. We shall also obtain some new analytic properties of the generalized elliptic integrals by studying the dependence on parameter a of the generalized elliptic integrals.

In the third chapter, we study some analytic properties of the generalized Grötzsch ring function $\mu_a(r)$, the function $m_a(r)$ and the related generalized elliptic integrals, and obtain some inequalities of the functions $\mu_a(r)$ and $m_a(r)$. Then, we apply some results in the second chapter and the relation between $\varphi_K(a,r)$ and $\mu_a(r)$ and $m_a(r)$, to get some better estimates of the function $\varphi_K(a,r)$, which are given in terms of certain elementary functions.

In the fourth chapter, we show some analytic properties of the solution $\varphi_K(a,r)$ to the generalized Ramanujan's modular equation, the generalized Agard η-distortion function $\eta_K(a,t)$ and generalized linear distortion function $\lambda(a,K)$.

Key words: Gaussian hypergeometric function, complete elliptic integrals, generalized elliptic integrals, Grötzsch ring function, Hübner's inequality, generalized Hersch-Pfluger distortion function, generalized Ramanujan's modular equations

目 录

第一章　绪论

1.1　引言

本节出现的函数概念及记号分别由1.2～1.4节给出。

1656年，Wallis提出了“超几何级数”这一术语[1]。18世纪中期，Eulcr对超几何函数进行了深入研究，发现了超几何函数的积分表示等[2]。1812年，Gauss首次在超几何函数领域做出贡献[3]。之后，在很长一段时期内，超几何函数成为Jacobi、Kümmer、Fuchs、Riemann、Schwarz和Klein[4]等当时的主要数学家们的研究主题。1873年，Schwarz解决了超几何函数的参数值问题[5]，使得超几何微分方程和群论相结合，并发现了广泛的应用。20世纪初，印度数学家S.Ramanujan对Gauss超几何函数和模方程及其解的性质等方面做了广泛深入的研究，得到了很多结果[6–10]，这使得超几何函数的应用更加广泛。超几何函数不但在特殊函数、拓扑几何学[11–13] 等数学分支有广泛的应用，还在物理学[14]、工程技术等其它学科领域中有着广泛而重要的应用。

1718年，椭圆积分理论随着Fagnano对双纽线的弧长的研究[15,16]而诞生，之后由18世纪数学家Eulcr、Lagrange和Landen发展起来。19世纪，Gauss、Abel和Jacobi又对椭圆积分和椭圆函数有了重大发现，Legendre、Ricmann、Klein和Weierstrass也分别对完全椭圆积分做出了巨大贡献[17,18]。20世纪八十年代后期以来，G.D.Anderson、M.K.Vamanamurthy和M.Vuorinen教授从研究拟共形映射的需要出发，开展了对完全椭圆积分的一系列研究，给出了一些关于完全椭圆积分和超几何函数的新性质(包括不等式)[19–20]。1994年，B.C.Carlson和J.L.Gustafson给出了完全椭圆积分新的渐近性质[21]。20世纪九十年代，G.D.Andcrson、M.K.Vamanamurthy、M.Vuorinen和裘松良教授又系统深入地研究了完全椭圆积分的性质，并揭示了其在均值理论中的应用[22–23]。

在几何函数论中，广义椭圆积分$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$与将上半平面变换到平行四边形的Schwarz-Christoffel变换有关[24]。广义椭圆积分作为完全椭圆积分的推广，当$a=1/2$时，$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$依次退化为$\mathcal{K}(r)$和$\mathcal{E}(r)$; 另一方面，广义椭圆积分也是Gauss超几何函数的特殊情况。因此，对广义椭圆积分的深入研究有助于促进数论、几何学、几何函数论、拟共形理论等数学领域、工程技术和天体力学等领域的发展。因此，能否将完全椭圆积分$\mathcal{K}(r)$和$\mathcal{E}(r)$的一些重要结果推广到广义椭圆积分$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$？这一问题在上个世纪九十年代中期引起了国内外很多学者的关注。裘松良教授与其合作者深入研究了$\mathcal{K}(r)$和$\mathcal{E}(r)$的Landen变

换性质，并相应地推广到了$\mathcal{K}_a(r)$、$\mathcal{E}_a(r)$以及Gauss超几何函数$F(a,b;c;x)$[25]，获得了广义Landen不等式和广义Legendre关系[26-28]，而且对$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$与其它初等函数的组合或复合的诸如单调性、凹凸性等分析性质进行了深入研究，获得了$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$在$r\to 1$时的渐近性质，并获得了一系列精确初等逼近[29-32]。

另外，20世纪三十到五十年代，Ahlfors对拟共形理论做了很多研究，得到了平面Grötzsch环的模$\mu(r)$的一些初步性质，用完全椭圆积分表示了$\mu(r)$，从而推动了对函数$\mu(r)$的研究[33]。1952年，Hersch和Pfluger把复分析中经典的Schwarz引理推广到拟共形理论，建立了著名的拟共形Schwarz引理[34]，给出了单位圆盘到自身且保持原点不动的$K-$拟共形映射f(所有这些函数组成族$QC_K(B^2)$)的由从$[0,1]$到$[0,1]$上严格单调上升的函数$\varphi_K(r)$表示的精确界。即，对任意的$f\in QC_K(B^2)$和$z\in B^2$,有

$$\varphi_{1/K}(|z|)\le|f(z)|\le\varphi_K(|z|). \tag{1.1}$$

此后，在拟共形理论中发挥着重要作用的函数$\varphi_K(r)$和平面Grötzsch环的模$\mu(r)$的显式估计问题受到国内外广泛关注。1960年，王传芳证明了[35]：

$$\varphi_K(r)\le 4^{(1-1/K)}r^{1/K}, \tag{1.2}$$

其中$K\ge 1$, $0<r<1$。1970年，O.Hübner又对函数$\varphi_K(r)$的显式估计作了重大改进，并且揭示出$\varphi_K(r)$对函数$m(r)+\log r$的依赖关系[36]，即：当$K\ge 1$, $0\le r\le 1$时，

$$\varphi_K(r)\le r^{1/K}\exp\{(1-1/K)[m(r)+\log r]\}\le 4^{(1-1/K)}r^{1/K}. \tag{1.3}$$

1999年，裘松良、M.K.Vamanamurthy与M.Vuorinen在继O.Hübner之后又有了新的发现，证明了[37]：

$$\varphi_K(r)<r^{1/K}\exp\{(1-1/K)a(r)\} \tag{1.4}$$

当且仅当$m(r)+\log r\le a(r)$;

$$\varphi_{1/K}(r)<r^K\exp\{(1-K)b(r)\} \tag{1.5}$$

当且仅当$m(r)+\log r\ge b(r)$;

$$\varphi_{1/K}(r)>r^K\exp\{(1-K)c(r)\} \tag{1.6}$$

当且仅当$\mu(r)+\log r\le c(r)$, 其中$a(r)$、$b(r)$和$c(r)$为$(0,1)$上的实函数，$r\in(0,1)$, $K\in(1,\infty)$。揭示了函数$\varphi_K(r)$对函数$\mu(r)+\log r$的依赖关系，并获得了不等式

$$\varphi_K(r)<r^{1/K}\exp\{(1-1/K)a(r)\}<4^{(r')^{4/3}(1-1/K)}r^{1/K}, \tag{1.7}$$

$$\varphi_{1/K}(r)<r^K\exp\{(1-K)b(r)\}\le 4^{c(r)(1-K)}r^K<4^{(1-r)(1-K)}r^K, \tag{1.8}$$

$$\varphi_{1/K}(r)>r^K\exp\{(1-K)[\mu(r)+\log r]\}, \tag{1.9}$$

其中，$a(r)=\frac{r'^2\mathrm{arth}(r)}{r}\log 4$, $b(r)=\frac{(1-r)\mathrm{arth}(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}\log 4$, $c(r)=\frac{(1-r)\mathrm{arth}(\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$. 从而，对单位圆盘$B^2$到自身且保持原点不动的$K$–拟共形映射$f$ 及$\forall\ z\in B^2$，有

$$|f(z)|\le 4^{(1-|z|^2)^{2/3}(1-1/K)}|z|^{1/K}. \tag{1.10}$$

2004年，裘松良教授和马晓艳又将上述(1.4)-(1.6)式结果推广到广义形式[38]:

$$\varphi_K(a,r)<r^{1/K}\exp\{(1-1/K)a(r)\}, \tag{1.11}$$

当且仅当$m_a(r)+\log r\le a(r)$.

$$\varphi_{1/K}(a,r)<r^K\exp\{(1-K)b(r)\}, \tag{1.12}$$

当且仅当$m_a(r)+\log r\ge b(r)$.

$$\varphi_{1/K}(a,r)>r^K\exp\{(1-K)c(r)\}, \tag{1.13}$$

当且仅当$\mu_a(r)+\log r\le c(r)$. 其中$a(r)$、$b(r)$和$c(r)$为$(0,1)$上的实函数，$r\in(0,1), K\in(1,\infty), a\in(0,1/2]$. 并获得了函数$\varphi_{1/K}(a,r)$的估计：

$$\varphi_{1/K}(a,r)\le\left[\tanh\left(\frac{1}{K}\mathrm{arth}(\sqrt[4]{r'})\right)\right]^4. \tag{1.14}$$

2008年，王根娣、张孝惠、褚玉明和裘松良建立了Hersch-Pfluger偏差函数$\varphi_K(r)$和第二类完全椭圆积分$\mathcal{E}(r)$之间的关系[39]，得到了

$$\varphi_K(r)<r^{1/K}\exp\{c(1-1/K)[\mathcal{E}(r)-1]\}, \tag{1.15}$$

其中，$r\in(0,1), K\in(1,\infty), c=(\log 4)/(\pi-2)$.

1959年，Lehto、Virtanen和Väisälä引入由函数$\varphi_K(r)$表征的线性偏差函数$\lambda(K)$，且发现了$\lambda(K)$在拟共形理论中的重要作用[40]，即函数$\lambda(K)$度量了保持∞点不动的上半平面的K–拟共形自映射的边界值的偏差。1968年，Agard把函

数$\lambda(K)$推广为η-偏差函数$\eta_K(t)$，且论证了函数$\eta_K(t)$可表示K-拟共形自同构的上确界[41]。1997年，G.Martin应用全纯运动理论，揭示了η-偏差函数和解析函数论中Schottky上界的深刻联系[42]。紧接着，裘松良教授用独创的方法给出了Schottky上界问题的至今最佳且较满意的解答[43]。

1988年以来，在国内外发表的一系列关于$\varphi_K(r)$以及由它表征的函数的论著里，$\varphi_K(r)$、$\mu(r)$和$m(r)$等函数的性质得到了系统的研究，同时获得了很多新的结果。尤其是裘松良教授和合作者G.D.Anderson、M.K.Vamanamurthy、M.Vuorinen一起在$\varphi_K(r)$、$\mu(r)$和$m(r)$等函数的性质和应用上做了大量工作，为其后的研究奠定了基础[24–26,30–32,44–46]。九十年代后期，裘松良教授和其合作者又一起揭示了拟共形映射、解析函数与Ramanujan模方程的联系，从而开创了拟共形理论与模方程等领域的交叉研究。之后，又将$m(r)$、$\mu(r)$、$\varphi_K(r)$、$\lambda(K)$和$\eta_K(t)$的许多性质分别推广到了$m_a(r)$、$\mu_a(r)$、$\varphi_K(a,r)$、$\lambda(a,K)$和$\eta_K(a,t)$，创立了研究广义模方程的新方法。

本章将引入一些记号，并简要介绍Gauss超几何函数、椭圆积分、Ramanujan模方程和偏差函数的一些基本概念和性质。下面首先介绍本文中常用到的两个技术性引理。

引理1[29]. (单调性l'Hôpital法则) 设$a,b\in(-\infty,\infty)$, 函数$f,g:[a,b]\mapsto \mathbf{R}$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$上可微，且在$(a,b)$上$g'\neq 0$. 如果$f'/g'$在$(a,b)$上(严格)递增(递减)，那么函数

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \text{ 和 } G(x)=\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}$$

在(a,b)上也是(严格)递增(递减)的。

引理2[29]. 设r_n和s_n $(n=1,2,\cdots.)$为实数，幂级数

$$R(x)=\sum_{n=1}^{\infty} r_n x^n \text{ 和 } S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n$$

在$|x|<1$时收敛。如果对任意的$n=1,2,\cdots$, 有$s_n>0$, 且r_n/s_n在$(0,1)$上严格递增(递减)，那么函数R/S也是在$(0,1)$上严格递增(递减)。

本文中，对任意的$r\in(0,1)$, 总记$r'=\sqrt{1-r^2}$.

1.2 Gauss超几何函数

定义1.2.1[26]. 给定复数a,b和c，$c\neq 0,-1,-2,\cdots$, Gauss超几何函数是下式

定义的函数在裂纹复平面$\mathbf{C}\setminus[1,\infty)$上的解析开拓

$$F(a,b;c;x) = {}_2F_1(a,b;c;x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)} \frac{x^n}{n!}, \ |x| < 1. \tag{1.16}$$

这里，当$a \neq 0$时，$(a,0)=1$；当$n \in \mathbf{N} \equiv \{k : k\text{是正整数}\}$时，

$$(a,n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a). \tag{1.17}$$

$\Gamma(a)$为下面定义的经典Γ函数。显然，超几何函数与经典的Γ-函数、ψ-函数和$Beta$-函数有密切的关系。

定义1.2.2[26]. 对$\mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \ \psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x), B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1.18}$$

本文还经常会用到Γ 函数如下两个性质：

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \tag{1.19}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(a\pi) = B(x, 1-x). \tag{1.20}$$

(1.16)式中的超几何函数有如下求导公式：

$$\frac{d}{dz} F(a,b;c;z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z). \tag{1.21}$$

一般地，有n阶求导公式：

$$\frac{d^n}{dz^n} F(a,b;c;z) = \frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)} F(a+n, b+n; c+n; z). \tag{1.22}$$

超几何函数是非常重要的一类特殊函数，不少其他特殊函数都和它密切相关，例如：Legendre函数、Jacobi多项式、特种球多项式、切比雪夫多项式等都属于具有三个正则奇点的Fuchs型方程的解，都可以用Gauss超几何函数表达[26]。不少常见的初等函数也可以用超几何函数来表示，例如：

$$(1+z)^{\alpha} = F(-\alpha, \beta; \beta; -z) \quad , \quad \ln(1+z) = zF(1,1;2;-z),$$
$$\arcsin z = zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) \quad , \quad \arctan z = zF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right).$$

超几何函数在$z=1$点附近的性状分$a+b<c, a+b=c, a+b>c$三种情况给出[26,46]，对$a,b,c>0$，

$$\begin{cases} F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, c > a+b, \\ B(a,b)F(a,b;a+b;z) + \log(1-z) = R(a,b) + O((1-z)\log(1-z)), \\ F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z), c < a+b. \end{cases} \tag{1.23}$$

这里，$R(a,b)=-2\gamma-\psi(a)-\psi(b)$, 其中，$\gamma=0.57721566\cdots$为Euler常数。当$b=1-a$时，$R(a)\equiv R(a,1-a)(R(1/2)=\log 16)$是所谓的Ramanujan常数。上述的零平衡的式子(即$a+b=c$)称为Ramanujan渐近公式，它给出了函数$F(a,b;a+b;z)$在对数奇点$z=1$附近的精确描述。

1.3 完全椭圆积分和广义椭圆积分

对于完全椭圆积分的研究已经比较成熟，已获得许多精致的结果。同时，对于广义椭圆积分的研究也在不断深入。本节主要给出关于完全椭圆积分和广义椭圆积分的记号及一些已有的重要性质。首先，第一、第二类广义椭圆积分有如下定义：

定义1.3.1[26,46]. 对$r\in(0,1)$, $r'=\sqrt{1-r^2}$ 和$a\in(0,1)$,

$$\begin{cases}\mathcal{K}_a=\mathcal{K}_a(r)\equiv\frac{\pi}{2}F(a,1-a;1;r^2),\\ \mathcal{K}'_a=\mathcal{K}'_a(r)\equiv\mathcal{K}_a(r'),\\ \mathcal{K}_a(0)=\frac{\pi}{2},\ \mathcal{K}_a(1)=\infty,\end{cases}\tag{1.24}$$

和

$$\begin{cases}\mathcal{E}_a=\mathcal{E}_a(r)\equiv\frac{\pi}{2}F(a-1,1-a;1;r^2),\\ \mathcal{E}'_a=\mathcal{E}'_a(r)\equiv\mathcal{E}_a(r'),\\ \mathcal{E}_a(0)=\frac{\pi}{2},\ \mathcal{E}_a(1)=\frac{\sin(a\pi)}{2(1-a)}.\end{cases}\tag{1.25}$$

特别地，当$a=1/2$时，广义椭圆积分$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$分别退化为第一类和第二类完全椭圆积分

$$\mathcal{K}=\mathcal{K}(r)\equiv\mathcal{K}_{1/2}(r)\ \text{和}\ \mathcal{E}=\mathcal{E}(r)\equiv\mathcal{E}_{1/2}(r).$$

根据对称性，下文中总设$a\in(0,1/2]$.

广义椭圆积分有下述求导公式[24]：

$$\frac{d\mathcal{K}_a}{dr}=\frac{2(1-a)(\mathcal{E}_a-r'^2\mathcal{K}_a)}{rr'^2},\tag{1.26}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_a}{dr}=\frac{2(a-1)(\mathcal{K}_a-\mathcal{E}_a)}{r},\tag{1.27}$$

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{K}_a-\mathcal{E}_a)=\frac{2(1-a)r\mathcal{E}_a}{r'^2},\tag{1.28}$$

$$\frac{d}{dr}(\mathcal{E}_a-r'^2\mathcal{K}_a)=2ar\mathcal{K}_a.\tag{1.29}$$

当$a=1/2$时，上述公式退化为完全椭圆积分的求导公式。

广义Legendre关系式[24] 对$a, r \in (0,1)$, 有

$$\mathcal{K}_a(r)\mathcal{E}_a'(r) + \mathcal{K}_a'(r)\mathcal{E}_a(r) - \mathcal{K}_a(r)\mathcal{K}_a'(r) \equiv \frac{\pi \sin(a\pi)}{4(1-a)}, \tag{1.30}$$

当$a = 1/2$时，上述关系式退化为完全椭圆积分的Legendre关系式.

$\mathcal{K}(r)$的初等近似 由Ramanujan渐近公式可知，在奇点$r = 1$附近，函数$\mathcal{K}(r)$具有对数增长性。基于此，下面介绍$\mathcal{K}(r)$的一些不等式：

1992年，Anderson等人发现$\mathcal{K}(r)$可以由反双曲正切函数arth来逼近[47]：对任意的$r \in (0,1)$，有

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\operatorname{arth}(r)}{r}\right)^{1/2} < \mathcal{K}(r) < \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{arth}(r)}{r}. \tag{1.31}$$

1995年，Sádor 令人惊奇地给出了$\mathcal{K}(r)$与1和r'的算术均值及对数均值的关系[48,49]：令$A(1,r') = (1+r')/2$, $L(1,r') = (1-r')/(\log 1 - \log r')$, $c_1 = 2/\pi$, $c_2 = 12/(5\pi)$, 对$\forall\ r \in (0,1)$, 则有

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{c_1}{L(1,r')} + \frac{1-c_1}{A(1,r')}\right) < \mathcal{K}(r) < \frac{\pi}{2}\left(\frac{c_2}{L(1,r')} + \frac{1-c_2}{A(1,r')}\right). \tag{1.32}$$

1998年，裘松良教授等人给出了$\mathcal{K}(r)$的如下的界[50]：令$c_3 = \pi/2 - \log 2$, $c_4 = 3\log 2 - \pi/2$, $c_5 = \exp(\pi/2) - 4$, 对$\forall\ r \in (0,1)$, 则有

$$c_3 + \log(1 + 1/r') < \mathcal{K}(r) < c_3 + c_4(1-r') + \log(1 + 1/r') \tag{1.33}$$

和

$$\log(4/r' + c_5 r') < \mathcal{K}(r) < \log(4/r' + c_5). \tag{1.34}$$

2004年，裘松良教授及其合作者Horst Alzer教授进一步改进了$\mathcal{K}(r)$的上述界，获得了相应于(1.31)-(1.34)形式的$\mathcal{K}(r)$和$\mathcal{E}(r)$的精确界[29]：对$\forall\ r \in (0,1)$, 有

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\operatorname{arth}(r)}{r}\right)^{3/4} < \mathcal{K}(r) < \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{arth}(r)}{r}; \tag{1.35}$$

令$A(1,r') = (1+r')/2$, $L(1,r') = (1-r')/(\log 1 - \log r')$, $\alpha_1 = 2/\pi$, $\alpha_2 = 3/4$, 对$\forall\ r \in (0,1)$, 则有

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\alpha_1}{L(1,r')} + \frac{1-\alpha_1}{A(1,r')}\right) < \mathcal{K}(r) < \frac{\pi}{2}\left(\frac{\alpha_2}{L(1,r')} + \frac{1-\alpha_2}{A(1,r')}\right); \tag{1.36}$$

令$\alpha = \pi/2 - \log 2$, $\alpha_3 = \pi/4 - 1/2$, $\alpha_4 = 3\log 2 - \pi/2$, 对$\forall\ r \in (0,1)$, 则有

$$\alpha + \alpha_3(1-r') + \log(1 + 1/r') < \mathcal{K}(r) < \alpha + \alpha_4(1-r') + \log(1 + 1/r'); \tag{1.37}$$

令$\beta=\exp(\pi/2)-4$，$\alpha_5=[4-(\pi/4)\exp(\pi/2)]/[\exp(\pi/2)-4]$，对$\forall\ r\in(0,1)$，则有

$$\log(4/r'+\beta r')<\mathcal{K}(r)<\log(4/r'+\beta r'^{\alpha_5}). \tag{1.38}$$

1985年，Carlson和Gustafson教授得到[51]:

$$\frac{\mathcal{K}(r)}{\log(4/r')}<\frac{4}{3+r^2},0<r<1. \tag{1.39}$$

1993年，裘松良教授证明了[52]:

$$\frac{9}{8+r^2}<\frac{\mathcal{K}(r)}{\log(4/r')},0<r<1. \tag{1.40}$$

1996年，裘松良和Vamanamurthy教授得到了[53]:

$$\frac{\mathcal{K}(r)}{\log(4/r')}<1+\frac{1}{4}r'^2,0<r<1. \tag{1.41}$$

1998年，Alzer教授证明了[54]:

$$1+\left(\frac{\pi}{4\log 2}-1\right)r'^2<\frac{\mathcal{K}(r)}{\log(4/r')},0<r<1. \tag{1.42}$$

(1.41)式改进了(1.39)式，且不等式(1.41)中的常数1/4和不等式(1.42)中的常数$[\pi/(4\log 2)]-1$是最佳的。

$\mathcal{E}(r)$的初等近似

1883年，Muri指出以1和r为半轴的椭圆的周长$\Lambda(1,r)$可以由$2\pi((1+r^{3/2})/2)^{2/3}$来近似估计[55]。1997年，M.Vuorinen教授给出了如下猜测[56]：

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1+r'^{3/2}}{2}\right)^{2/3}\leq\mathcal{E}(r)\ ,\ (0\leq r\leq 1). \tag{1.43}$$

裘松良教授在同年对这个猜测给予了证明[23]。随后在2000年，Barnard等人巧妙地给出了$\mathcal{E}(r)$的上界[57]，提供了与(1.50)式对等的一个很漂亮的不等式：

$$\mathcal{E}(r)\leq\frac{\pi}{2}\left(\frac{1+r'^2}{2}\right)^{1/2}\ ,\ (0\leq r\leq 1). \tag{1.44}$$

2004年，裘松良和Horst Alzer教授改进了上述不等式，证明了此形式下的精确界[29]。即，令$\alpha_6=(\log 2)/[\log(\pi/2)]$，则对$\forall\ r\in(0,1)$有：

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1+r'^{3/2}}{2}\right)^{2/3}\leq\mathcal{E}(r)\leq\frac{\pi}{2}\left(\frac{1+r'^{\alpha_6}}{2}\right)^{1/\alpha_6}. \tag{1.45}$$

广义椭圆积分关于参数a的性质[24]：对任意的$r\in(0,1)$，则有

(1)函数$f(a)\equiv\mathcal{E}_{1-a}(r)$从$[0,1/2]$到$[\mathcal{E}(r),\pi/2]$上单调下降。

(2)函数$g(a)\equiv\mathcal{K}_a(r)$从$[0,1/2]$到$[\pi/2,\mathcal{K}(r)]$上单调上升。

(3)函数$h(r)\equiv\mathcal{E}_a(r)$从$[0,1/2]$到$[\pi r'^2/2,\mathcal{E}(r)]$上单调上升。

1.4 广义Ramanujan模方程

本节简要介绍Ramanujan模方程概念。因为广义Grötzsch环函数$\mu_a(r)$和广义Hübner上界函数$m_a(r)$在对广义Ramanujan模方程解的估计中起到举足轻重的作用，下面我们首先来介绍它们的定义。

定义1.4.1[24,46]. 设$a \in (0,1/2], r \in (0,1)$, 广义Grötzsch环函数定义为

$$\mu_a(r) \equiv \frac{\pi}{2\sin(a\pi)} \frac{F(a,1-a;1;1-r^2)}{F(a,1-a;1;r^2)} = \frac{\pi}{2\sin(a\pi)} \frac{\mathcal{K}_a'(r)}{\mathcal{K}_a(r)}. \tag{1.46}$$

当$a = 1/2$时，$\mu_a(r)$退化为平面Grötzsch环函数$\mu(r)$, 也就是平面Grötzsch环$B^2 \setminus [0,r]$的模，这里B^2是复平面上的单位开圆盘。

由Landen变换公式可得如下恒等式[46]：

$$\mu(r)\mu'(r) = \frac{\pi^2}{4}, \mu(r)\mu\left(\frac{1-r}{1+r}\right) = \frac{\pi^2}{2}, \mu(r) = 2\mu\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right). \tag{1.47}$$

定义1.4.2[24,26]. 设$a \in (0,1/2], r \in (0,1)$, 定义

$$m_a(r) \equiv \frac{2}{\pi\sin(a\pi)} r'^2 \mathcal{K}_a(r)\mathcal{K}_a'(r) \tag{1.48}$$

称函数$m_a(r)$为广义Hübner上界函数。显然，当$a = 1/2$时，函数$m_a(r)$退化为Hübner上界函数：

$$m(r) \equiv m_{1/2}(r) = \frac{2}{\pi} r'^2 \mathcal{K}(r)\mathcal{K}'(r).$$

函数$\mu_a(r)$和$m_a(r)$在研究拟共形理论及深奥的模方程理论中是必不可少的。裘松良教授和国外合作者一起就$\mu(r)$和$m_(r)$的性质做了大量工作，并将其中许多性质推广到$\mu_a(r)$和$m_a(r)$，具体参见[19-20,23-32,43-46].

设$K > 0$, $a \in (0,1/2]$, $r \in (0,1)$, 广义Hersch-Pfluger偏差函数定义为

$$s = \varphi_K(a,r) = \mu_a^{-1}(\mu_a(r)/K), \varphi_K(a,0) = \varphi_K(a,1) - 1 = 0. \tag{1.49}$$

当$a = 1/2$时, 函数$\varphi_K(a,r)$即为Hersch-Pfluger偏差函数

$$\varphi_K(r) = \mu^{-1}(\mu(r)/K).$$

于是，符号差为$1/a$的p次广义模方程

$$\frac{F(a,1-a;1;1-s^2)}{F(a,1-a;1;s^2)} = p\frac{F(a,1-a;1;1-r^2)}{F(a,1-a;1;r^2)}, \quad p > 0 \tag{1.50}$$

可写成

$$\mu_a(s) = p\mu_a(r),$$

而$\varphi_{1/p}(a,r)$就是(1.50)的解。当$a=1/2$时，式(1.50)退化为经典模方程：

$$\frac{\mathcal{K}'(s)}{\mathcal{K}(s)} = p\frac{\mathcal{K}'(r)}{\mathcal{K}(r)}, \text{即}\mu(s) = p\mu(r).$$

广义Agard $\eta-$偏差函数$\eta_K(a,t)$和广义线性偏差函数$\lambda(a,K)$分别定义为[46]：

$$\eta_K(a,t) = \left[\frac{\varphi_K(a,r)}{\varphi_{1/K}(a,r')}\right]^2, r = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \tag{1.51}$$

和

$$\lambda(a,K) = \eta_K(a,1) = \left[\frac{\varphi_K(a,\sqrt{2}/2)}{\varphi_{1/K}(a,\sqrt{2}/2)}\right]^2. \tag{1.52}$$

同样，当$a=1/2$时，$\eta_K(a,t)$和$\lambda(a,K)$即为$\eta-$偏差函数$\eta_K(t)$和线性偏差函数$\lambda(K)$：

$$\eta_K(t) = \left[\frac{\varphi_K(r)}{\varphi_{1/K}(r')}\right]^2, r = \sqrt{\frac{t}{t+1}},$$

$$\lambda(K) = \eta_K(1) = \left[\frac{\varphi_K(\sqrt{2}/2)}{\varphi_{1/K}(\sqrt{2}/2)}\right]^2.$$

这两个函数在拟共形映射的极值问题和拟正则映射以及拟对称函数等数学领域中发挥着重要的作用[33-36,40-43]。例如，函数$\eta_K(t)$为拟对称映射提供了界。而$\lambda(K)$度量了固定无穷远点的上半平面映为自身的$K-$拟共形映射的边值的偏差。G.Martin应用全纯运动理论，建立了η_K和就范解析函数的极值问题的联系[42]：令$A(r) = \{f : B^2 \mapsto R^2 \setminus \{0,1\} \mid f\text{解析，且}|f(0)| = r\}$, 则，

$$\eta_K(r) = \sup\left\{|f(z)| : f \in A(r), |z| = \frac{K-1}{K+1}\right\}$$

由此并利用Schottky's定理，有

$$|f(z)| \le K(r,|z|) \equiv \eta_K(r), K = (1+|z|)/(1-|z|),$$

其中，$f \in A(r), |z| < 1$. 特别地，当$f \in A(1)$时[58]，

$$|f(r)| \le \lambda(K), K = (1+|z|)/(1-|z|).$$

鉴于其理论和应用价值，对函数$m_a(r)$、$\mu_a(r)$、$\varphi_K(a,r)$、$\lambda(a,K)$和$\eta_K(a,t)$的性质的研究是十分必要的。

第二章 广义椭圆积分的性质

2.1 引言

椭圆积分在物理学（如电磁场及其相关特性的计算、单摆和其它振子的研究、天体力学的一些问题等）以及几何函数论等学科中都有着重要的作用[27]。例如，在几何应用上[56]，令$\Lambda(1,r)$表示长、短半轴依次为1和$r\in(0,1)$的椭圆的周长，则有，$\Lambda(1,r)=4\mathcal{E}(r')$，即第二类完全椭圆积分$\mathcal{E}(r)$ 给出了椭圆的周长。近年来，对于完全椭圆积分的研究又有新的深入。相比之下，对广义椭圆积分的性质的研究要少的多。基于广义椭圆积分应用的广泛性和定义的抽象性，对于如何将完全椭圆积分所具有的精致性质推广到广义椭圆积分这一研究工作受到了数学工作者的广泛关注。尤其是对其由初等函数给出的上下界估计，它不仅使得广义椭圆积分更加形象具体化，还使得和它密切相关的广义Hersch-Pfluger偏差函数$\varphi_K(a,r)$等特殊函数的界更加精确。因此，对广义椭圆积分性质的深入研究有着十分重要的意义。

2.2 广义椭圆积分的性质与函数不等式

本节研究了广义椭圆积分$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$分别与某些初等函数组合的分析性质，获得了$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$的一些函数不等式和在研究广义椭圆积分过程中经常要用到的一些函数的性质。

2.2.1 $\mathcal{K}_a(r)$的性质

当$a=1/2$ 时，下面的定理2.1(1)、定理2.2(1)(2)、定理2.3(1)(2)分别退化为[46,定理3.21(3)]、[46,定理3.21(10)]和[47,定理3.2(3)]。

定理2.1. 设$c\in\mathbf{R}$, 定义函数$f_1(r)\equiv\mathcal{K}_a(r)+c\log(r')$, 则有:

(1) 函数f_1在$(0,1)$上严格单调上升(下降)且是向下凸(凹，即向上凸)的当且仅当$c\le a(1-a)\pi(c\ge\sin(a\pi))$; 特别地，函数$\mathcal{K}_a(r)+\sin(a\pi)\log(r')$从$(0,1)$到$([R(a)\sin(a\pi)]/2,\pi/2)$上严格单调下降且是凹的。函数$\mathcal{K}_a(r)+a(1-a)\pi\log(r')$从$(0,1)$到$(\pi/2,\infty)$上是严格单调上升且是向下凸的。

(2) 当$a(1-a)\pi<c<\sin(a\pi)$时，存在唯一的$r_0\in(0,1)$使得函数f_1在$(0,r_0]$ 上严格单调下降，在$[r_0,1)$上严格单调上升且是向下凸的。

证明：(1) 求导可得

$$f_1'(r)=\frac{r}{r'^2}\left[2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}-c\right].$$

由[24,引理5.2(1)]可知

$$f_1'(r)>0 \ \Leftrightarrow\ c\le 2(1-a)\inf_{0<r<1}\left\{\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}\right\}=a(1-a)\pi;$$
$$f_1'(r)<0 \ \Leftrightarrow\ c\ge 2(1-a)\sup_{0<r<1}\left\{\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}\right\}=\sin(a\pi).$$

由此即得关于f_1单调性的结论。

(2) 当$a(1-a)\pi<c<\sin(a\pi)$时，由[24,引理5.2(1)]可知函数$2(1-a)[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/r^2-c$从$(0,1)$到$(a(1-a)\pi-c,\sin(a\pi)-c)$上严格单调上升。所以存在唯一的$r_0\in(0,1)$ 使得在$(0,r_0)$上有$f_1'(r)<0$,在$(r_0,1)$上有$f_1'(r)>0$，且f_1'单调上升。故$f_1(r)$在$(0,r_0)$上严格单调下降，在$(r_0,1)$上严格单调上升且是凸函数。证毕。

下面证明凹凸性，利用级数展开可得

$$\mathcal{K}_a(r)-\pi/2+c\log(r')=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(nA_n-c)r^{2n}$$

其中，$A_n=(a,n)(1-a,n)\pi/(n!)^2$.

$$\frac{(n+1)A_{n+1}}{nA_n}=\frac{(n+a)(n+1-a)}{n^2+n}=\frac{n^2+n+a(1-a)}{n^2+n}>1,$$

由[46,引理1.50]和(1.20)式可知序列$\{nA_n\}$关于n严格单调上升，且有极限$\sin(a\pi)$ $(n\to\infty)$; 对于$n\ge1$，$nA_n-c\ge0\Leftrightarrow c\le\min\{nA_n\}=a(1-a)\pi$; $nA_n-c\le0\Leftrightarrow c\ge\sup\{nA_n\}=\sin(a\pi)$. 据此得到关于$f_1$的凹凸性的结论。证毕。

定理2.2. 设$c\in\mathbf{R}$,且$c\ge1$. 定义函数$f_2(r)\equiv\mathcal{K}_a(r)/\log(c/r')$, 则

(1) 函数f_2在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\ge\exp\{1/[2a(1-a)]\}$; 而且当$c\ge\exp\{1/[2a(1-a)]\}$时，f_2是向下凸的。特别地，此时对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$\frac{\pi}{2\log c}<\frac{\mathcal{K}_a(r)}{\log(c/r')}<\frac{\pi}{2\log c}+\left[\sin(a\pi)-\frac{\pi}{2\log c}\right]r. \tag{2.1}$$

(2) 函数f_2在$(0,1)$上严格单调下降当且仅当$1\le c\le\exp(R(a)/2)$.

(3) 当$\exp(R(a)/2)<c<\exp\{1/[2a(1-a)]\}$时，存在唯一的$r_0\in(0,1)$，使得函数$f_2$在$(0,r_0]$上严格单调下降，在$[r_0,1)$上单调上升。

证明：求导得

$$f_2'(r)=\frac{1}{r'[\log(c/r')]^2}\left\{2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r}\log\frac{c}{r'}-r\mathcal{K}_a(r)\right\}.$$

所以,

$$f_2'(r)>(<)0\Leftrightarrow c\geq(\leq)\sup_{0<r<1}\left(\inf_{0<r<1}\right)\left\{r'\exp\left[\frac{r^2\mathcal{K}_a(r)}{2(1-a)(\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r))}\right]\right\}.$$

由[59,定理3.8(9)] 可知函数$r'\exp\{r^2\mathcal{K}_a(r)/[2(1-a)(\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r))]\}$从$(0,1)$到$(\exp(R(a)/2),\exp(1/[2a(1-a)]))$上严格单调下降。所以,在$(0,1)$上,$f_2'(r)>0$当且仅当$c\geq\exp\{1/[2a(1-a)]\}$,$f_2'(r)<0$当且仅当$1\leq c\leq\exp(R(a)/2)$. 由此即得结论(1)和(2)中关于单调性的论断。

现令$g_1(r)\equiv r'\log(c/r')$, 则当$c\geq\exp\{1/[2a(1-a)]\},r\in(0,1)$时,

$$g_1'(r)=\frac{r}{r'}\left(1-\log\frac{c}{r'}\right)<-\frac{r}{r'}\left[\frac{a^2+(1-a)^2}{2a(1-a)}+\log\frac{1}{r'}\right]<0,$$

故g_1在$(0,1)$上严格单调下降。

又由[59,定理3.8(9)]可知,函数

$$g_2(r)\equiv\log c-\log\left\{r'\exp\left[\frac{r^2\mathcal{K}_a(r)}{2(1-a)(\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r))}\right]\right\}\tag{2.2}$$

在$(0,1)$上是正的且严格单调上升当且仅当

$$c\geq\sup_{0<r<1}\left\{r'\exp\left[\frac{r^2\mathcal{K}_a(r)}{2(1-a)(\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r))}\right]\right\}=\exp\{1/[2a(1-a)]\}.$$

所以,当$c\geq\exp\{1/[2a(1-a)]\}$时,

$$f_2'(r)=2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{rg_1(r)^2}g_2(r)$$

在$(0,1)$上严格单调上升,故函数f_2为向下凸的。据[24,引理5.2(8)], $f_2(0^+)=\pi/(2\log c),f_2(1^-)=\sin(a\pi)$. 不等式(2.1)显然成立。所以,(1)中其余结论成立。

最后,当$\exp(R(a)/2)<c<\exp\{1/[2a(1-a)]\}$时,有

$$R(a)/2<\log c<1/[2a(1-a)],$$

而函数g_2从$(0,1)$到$(\log c-1/[2a(1-a)],\log c-R(a)/2)$上严格单调上升。因此,由(2.2)知存在唯一的$r_0\in(0,1)$使得在$(0,r_0)$上有$f_2'(r)<0$, 在$(r_0,1)$上$f_2'(r)>0$. 由此即得结论(3). 证毕。

定理2.3. 设$c\in\mathbf{R}$, 定义函数$f_3(r)\equiv r^2\mathcal{K}_a(r)+c\log r'$, 则

(1) 函数f_3在$(0,1)$上严格单调上升(下降)当且仅当$c\leq\sin(a\pi)(c\geq\pi)$; 并且,当$c\geq\pi$时,$f_3$在$(0,1)$上是向上凸的。特别地,对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$\sin(a\pi)<\frac{r^2\mathcal{K}_a(r)}{\log(1/r')}<\pi.\tag{2.3}$$

(2) 当$\sin(a\pi) < c < \pi$时，存在唯一的$r_0 \in (0,1)$使得函数f_3 在$(0,r_0]$上严格单调上升，在$[r_0,1)$上严格单调下降。

证明：(1) 由[24,引理5.4(1)]和$\mathcal{E}_a(r)$的单调性，知函数

$$g(r) \equiv ar'^2\mathcal{K}_a(r) + (1-a)\mathcal{E}_a(r)$$

从$(0,1)$到$(\sin(a\pi)/2, \pi/2)$上严格单调下降。求导得

$$f_3'(r) = \frac{r}{r'^2}[2g(r) - c] = -\frac{r}{r'^2}[c - 2g(r)]. \tag{2.4}$$

于是有：

$$f_3'(r) > 0 \Leftrightarrow c \le 2 \inf_{0<r<1}\{g(r)\} = \sin(a\pi),$$

$$f_3'(r) < 0 \Leftrightarrow c \ge 2 \sup_{0<r<1}\{g(r)\} = \pi.$$

故得(1)中前一结论。

因为函数$r \mapsto r/r'^2$在$(0,1)$上严格单调上升，函数$c - 2g(r) > 0$且单调上升当且仅当$c \ge 2 \sup\limits_{0<r<1}\{g(r)\} = \pi$. 因此，当$c \ge \pi$时，函数

$$-f_3'(r) = \frac{r}{r'^2}[c - 2g(r)]$$

在$(0,1)$上严格单调上升。由此得到(1)中的第二个结论。

(2) 当$\sin(a\pi) < c < \pi$时，函数$2g(r) - c$从$(0,1)$到$(\sin(a\pi) - c, \pi - c)$上严格单调下降。所以由(2.4)式可知，存在唯一的$r_0 \in (0,1)$使得在$(0,r_0)$上有$f_3'(r) > 0$, 在$(r_0,1)$上$f_3'(r) < 0$. 结论(2)即得。证毕。

下面的引理是对[24,引理5.4(1)和(2)]的补充和完善。

引理2.4. 设$c \in \mathbf{R}$, 则有：

(1) 若函数$f_4(r) \equiv r'^c\mathcal{K}_a(r)$, 则当$0 < c < 2a(1-a)$时，存在唯一的点$r_0 \in (0,1)$使得函数$f_4$在$(0,r_0]$上严格单调上升，在$[r_0,1)$上严格单调下降。当$2a(1-a) \le c \le 2$时，函数$f_4$是向上凸的，且成立不等式

$$(1-r)\pi/2 < r'\mathcal{K}_a(r) < \pi/2. \tag{2.5}$$

(2) 若函数$f_5(r) \equiv r'^c\mathcal{E}_a(r)$, 则当$-2(1-a)^2 < c < 0$时，存在唯一的点$r_0 \in (0,1)$使得函数$f_5$在$(0,r_0]$上严格单调下降，在$[r_0,1)$上严格单调上升。且当$c \le -2(1-a)^2$时，函数$f_5$是向下凸的。

(3) 函数$f_6(r) \equiv r'^2\{\mathcal{K}_a(r) - \pi/2\}/r^2$ 从$(0,1)$到$(0, a(1-a)\pi/2)$上严格单调下降且是向上凸的。

(4) 令$c\in\mathbb{R}$且$c>0$, 则函数$f_7(r)\equiv r^c r'^2\mathcal{K}_a(r)$在$(0,1)$上严格单调下降当且仅当$c\le 0$, 并且不存在$c\in\mathbb{R}$使得函数$f_7(r)$在$(0,1)$上单调上升。

(5) 函数$f_{10}(r)\equiv\{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)\}/[1-r'^2\mathrm{arth}r/r]$ 从$(0,1)$到$(\sin(a\pi)/[2(1-a)],3a\pi/4)$上严格单调下降。

证明：(1) 求导得

$$f_4'(r)=-rr'^{c-2}\mathcal{K}_a(r)\left[c-2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2\mathcal{K}_a(r)}\right]. \tag{2.6}$$

由[24,引理5.2(4)]知，当$0<c<2a(1-a)$时，函数

$$h_1(r)\equiv 2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2\mathcal{K}_a(r)}-c$$

从$(0,1)$到$(-c,2a(1-a)-c)$上严格单调下降，故由(2.6)式可知存在唯一的$r_0\in(0,1)$ 使得在$(0,r_0)$上有$f_4'(r)>0$, 在$(r_0,1)$上$f_4'(r)<0$.

当$2a(1-a)\ge c\le 2$时，$r\mapsto r'^{c-2}\mathcal{K}_a(r)$在$(0,1)$上严格单调上升，而且$-h_1$在$(0,1)$上是正的严格单调上升函数。故由(2.6)式知当$2a(1-a)\le c\le 2$时，$f_4'$ 严格单调下降。不等式(2.5)显然。

(2)求导得

$$f_5'(r)=rr'^{c-2}\mathcal{E}_a(r)\left\{2(a-1)\frac{r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}{r^2\mathcal{E}_a(r)}-c\right\}.$$

根据[24,引理5.2(6)]，函数

$$h_2(r)\equiv 2(a-1)\frac{r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}{r^2\mathcal{E}_a(r)}-c$$

从$(0,1)$到$(-c-2(1-a)^2,-c)$上严格单调上升。所以，当$-2(1-a)^2<c<0$时，存在唯一的$r_0\in(0,1)$使得函数f_5在$(0,r_0]$上严格单调下降，在$[r_0,1)$上严格单调上升。

由[24,引理5.4(2)和引理5.2(6)]可知：函数$r\mapsto r'^{c-2}\mathcal{E}_a(r)$在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\le 2-2(1-a)^2=2a(2-a)$, 函数$h_2$在$(0,1)$上是正的且严格单调上升当且仅当

$$\begin{aligned} c &\le \inf_{0<r<1}\left\{2(a-1)\frac{r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}{r^2\mathcal{E}_a(r)}\right\}\\ &= 2(a-1)\sup_{0<r<1}\left\{\frac{r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}{r^2\mathcal{E}_a(r)}\right\}=-2(1-a)^2. \end{aligned}$$

因此，当$c\le-2(1-a)^2$时，f_5'在$(0,1)$上严格单调上升，故函数f_5是向下凸的。

(3) 利用级数展开可得

$$\begin{aligned} f_6(r) &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n!)^2}r^{2n-2}-\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n!)^2}r^{2n} \\ &= \frac{a(1-a)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(1-a)-(n+1)}{(n+1)^2}\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n!)^2}r^{2n}. \end{aligned}$$

因为对于所有的$n=1,2,\cdots$, $a_n\equiv\frac{a(1-a)-(n+1)}{(n+1)^2}<0$, 所以函数$f_6$在$(0,1)$上严格单调下降且是向上凸的。并且，$f_6(0^+)=a(1-a)\pi/2$, $f_6(1)=0$.

(4) 求导可得

$$\frac{r^{1-c}f_7'(r)}{r'^2\mathcal{K}_a(r)}=c-\frac{2r^2}{r'^2}\left\{1-(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2\mathcal{K}_a(r)}\right\}\equiv c-2g(r). \qquad (2.7)$$

由[24,引理5.2(4)]可知，函数g从$(0,1)$到$(0,\infty)$上严格单调上升。所以，由(2.7)式知，$f_7'(r)<0\Leftrightarrow c\le\inf\limits_{0<r<1}\{2g(r)\}=0$, 且不存在$c\in\mathbb{R}$使得$f_7'(r)>0$对所有的$r\in(0,1)$都成立。

(5) 利用(1.16)(1.24)(1.25)级数展开有：

$$f_{10}(r)=\frac{a\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^{2n}\Big/\sum_{n=0}^{\infty}b_nr^{2n},$$

其中

$$a_n=\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n!)^2},\ b_n=\frac{1}{4(n+1)^2-1}.$$

再令$c_n\equiv a_n/b_n$, 则有

$$\begin{aligned} a_n\equiv\frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(n+a)(n+1-a)[4(n+2)^2]-1}{(n+1)(n+2)[4(n+1)^2]-1}<1 \\ &\Leftrightarrow\ 4[1-a(1-a)](n+1)^2+2[1-4a(1-a)](n+1)-3a(1-a)>0. \end{aligned}$$

由于此式左边关于n严格单调上升。因此，它大于$3[2-5a(1-a)]>3/4$. 因此，c_n关于n严格单调下降。由引理2可知f_{10}在$(0,1)$上严格单调下降。易得，$f_{10}(0^+)=3a\pi/4$,$f_{10}(1^-)=\sin(a\pi)/[2(1-a)]$. 证毕。

定理2.5. 令$c\in\mathbf{R}$. 定义函数$f_{11}(r)\equiv[\mathcal{K}_a(r)-\pi/2]/r^c$, 则有：

(1) 函数f_{11}在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\le2$.

(2) 当$c>2$时，存在唯一的$r_0\in(0,1)$使得函数f_{11}在$(0,r_0]$上严格单调下降，在$[r_0,1)$上严格单调上升。

(3) 当$c\le1$时，函数$f_{11}(r)$是向下凸的。

证明：(1) 由[24,引理5.2(1)]和引理2.4(3)可知函数

$$h(r)\equiv\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r'^2(\mathcal{K}_a(r)-\pi/2)}=\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}\frac{r^2}{r'^2(\mathcal{K}_a(r)-\pi/2)}$$

从$(0,1)$到$(1/(1-a),\infty)$上严格单调上升。求导可得

$$f_{11}'(r)=\frac{\mathcal{K}_a(r)-\pi/2}{r^{c+1}}\Big[2(1-a)h(r)-c\Big]. \tag{2.8}$$

于是，

$$f_{11}'(r)>0\Leftrightarrow c\le 2(1-a)\inf_{0<r<1}\left\{\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\pi/2]}\right\}=2,$$

$$f_{11}'(r)<0\Leftrightarrow c\ge 2(1-a)\sup_{0<r<1}\left\{\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\pi/2]}\right\}=\infty.$$

故结论(1)成立。

(2) 因为$[\mathcal{K}_a(r)-\pi/2]/r^{c+1}>0$, 且有当$c>2$时，函数$2(1-a)h(r)-c$从$(0,1)$到$(2-c,\infty)$上严格单调上升，故由(2.8)式知存在唯一的点$r_0\in(0,1)$使得在$(0,r_0)$上$f_{11}'(r)<0$, 在$(r_0,1)$上$f_{11}'(r)>0$.

(3) 由第(1)部分知，函数$[\mathcal{K}_a(r)-\pi/2]/r^{c+1}$在$(0,1)$ 上是正的且严格单调上升当且仅当$c\le 1$。函数$2(1-a)h(r)-c$在$(0,1)$上是正的且严格单调上升当且仅当$c\le 2$, 所以由(2.8)式知，当$c\le 1$时，f_{11}'在$(0,1)$上单调上升。证毕。

定理2.6. 令$c\in\mathbf{R}$, 定义函数$f_{12}(r)\equiv\mathcal{K}_a(r)-\pi/2-c\,\mathrm{arth}r$, 则有：

(1) 函数f_{12}在$(0,1)$上严格单调上升且是向下凸的当且仅当$c\le 0$.

(2) 函数f_{12}在$(0,1)$上严格单调下降当且仅当$c\ge\sin(a\pi)$.

(3) 当$0<c<\sin(a\pi)$时，存在唯一的点$r_0\in(0,1)$使得函数f_{12}在$(0,r_0]$上严格单调下降，在$[r_0,1)$上单调上升。

证明： 求导得

$$f_{12}'(r)=2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{rr'^2}-\frac{c}{r'^2}=\frac{1}{r'^2}\left[2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r}-c\right].$$

于是，由[24,引理5.2(1)]可知：

$$f_{12}'(r)>0\Leftrightarrow c\le\inf_{0<r<1}\{2(1-a)[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/r\}=0,$$

且此时，f_{12}'在$(0,1)$上单调上升；

$$f_{12}'(r)<0\Leftrightarrow c\ge\sup_{0<r<1}\{2(1-a)[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/r\}=\sin(a\pi).$$

由此即得结论(1)(2)。

当$0<c<\sin(a\pi)$时，函数$2(1-a)[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/r-c$从$(0,1)$到$(-c,\sin(a\pi)-c)$上严格单调上升。于是存在唯一的点$r_0\in(0,1)$ 使得在$(0,r_0)$上有函数$f_{12}'(r)<0$, 在$(r_0,1)$上有$f_{12}'(r)>0$. 故结论(3)成立。证毕。

定理2.7. 令$c\in\mathbf{R}$且$c>0$, 定义函数

$$f_{13}(r)\equiv\mathcal{K}_a(r)-\pi/2-c[(\text{arth}r)/r-1],$$

则有：(1) 函数f_{13}在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\leq\sin(a\pi)$.

(2) 函数f_{13}在$(0,1)$上严格单调下降当且仅当$c\geq 3a(1-a)\pi/2$; 特别地，对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$\frac{\pi}{2}+\sin(a\pi)\left(\frac{\text{arth}r}{r}-1\right)<\mathcal{K}_a(r)<\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}a(1-a)\pi\left(\frac{\text{arth}r}{r}-1\right).\tag{2.9}$$

(3) 当$\sin(a\pi)<c<3a(1-a)\pi/2$时，存在唯一的点$r_0\in(0,1)$使得函数$f_{13}$在$(0,r_0]$上严格单调上升，在$[r_0,1)$上单调下降。

证明：求导得

$$\frac{rr'^2f'_{13}(r)}{1-r'^2(\text{arth}r)/r}=2(1-a)f_{10}(r)-c,\tag{2.10}$$

这里$f_{10}(r)$如同引理2.4(5)中所定义。由(2.10)式和引理2.4(5)可得：

$$f'_{13}(r)>0\ \Leftrightarrow\ c\leq 2(1-a)\inf_{0<r<1}\{f_{10}(r)\}=\sin(a\pi),$$
$$f'_{13}(r)<0\ \Leftrightarrow\ c\geq 2(1-a)\sup_{0<r<1}\{f_{10}(r)\}=3a(1-a)\pi/2.$$

由此即得结论(1)和(2)。

当$\sin(a\pi)<c<3a(1-a)\pi/2$时，由引理2.4(5)可知：函数$2(1-a)f_{10}-c$从$(0,1)$到$(\sin(a\pi)-c,3a(1-a)\pi/2-c)$上严格单调下降。所以由(2.10)式可知，存在唯一的$r_0\in(0,1)$使得在$(0,r_0)$上有$f'_{13}(r)>0$, 在$(r_0,1)$上$f'_{13}(r)<0$. 于是结论(3)成立。证毕。

定理2.8. 令$c\in\mathbf{R}$且$c>0$, 定义函数

$$f_{14}(r)\equiv 2\mathcal{K}_a(r)/\pi-c(\text{arth}r)/r.$$

则有：

(1) 函数f_{14}在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\leq 2\sin(a\pi)/\pi$.

(2) 函数f_{14}在$(0,1)$上严格单调下降当且仅当$c\geq 3a(1-a)$.

(3) 当$2\sin(a\pi)/\pi<c<3a(1-a)$时，存在唯一的点$r_0\in(0,1)$使得函数$f_{14}$在$(0,r_0)$上严格单调上升，在$[r_0,1)$上单调下降。

证明：求导得

$$\frac{rr'^2f'_{14}(r)}{1-r'^2(\text{arth}r)/r}=[4(1-a)/\pi]f_{10}(r)-c.$$

据此，与定理2.7的证明一样，可得结论(1)-(3). 证毕。

定理2.9. 函数

$$f_{15}(r) \equiv [\mathcal{K}_a(r) - \pi/2]/[(\mathrm{arth}r)/r - 1]$$

从$(0,1)$到$(\sin(a\pi), 3a(1-a)\pi/2)$上严格单调下降。特别地，对于任意的$r \in (0,1)$，成立不等式

$$\frac{\pi}{2} + \sin(a\pi)\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r} - 1\right) < \mathcal{K}_a(r) < \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}a(1-a)\pi\left(\frac{\mathrm{arth}r}{r} - 1\right). \tag{2.11}$$

证明：令

$$h_1(r) \equiv \mathcal{K}_a(r) - \pi/2, h_2(r) \equiv (\mathrm{arth}r)/r - 1,$$

则有$f_{15}(r) = h_1(r)/h_2(r)$. 利用级数展开可得：

$$h_1(r) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n!)^2}r^{2n} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n r^{2n}, h_2(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}r^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}b_n r^{2n}.$$

于是，

$$c_n \equiv \frac{a_n}{b_n} = \frac{(2n+1)(a,n)(1-a,n)}{(n!)^2}.$$

因为

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(2n+3)(a+n)(1-a+n)}{(2n+1)(n+1)^2} = 1 - \frac{(n+1)[1-2a(1-a)] - a(1-a)}{(2n+1)(n+1)^2} < 1.$$

即c_n严格单调下降。故由引理2可得：函数f_{15}在$(0,1)$上严格单调下降。并且有$f_{15}(0^+) = \pi c_1/2 = 3a(1-a)\pi/2, f_{15}(1^-) = \sin(a\pi)$, 不等式(2.11)为显然。证毕。

2.2.2 $\mathcal{E}_a(r)$的性质

定理2.10. 令$c \in \mathrm{R}$, 定义函数$f_1(r) \equiv \mathcal{E}_a(r) - c\log r'$, 则：

(1) 函数f_1在$(0,1)$上严格单调上升且是向下凸的当且仅当$c \geq (1-a)^2\pi$.

(2) 函数f_1在$(0,1)$上严格单调下降且是向上凸的当且仅当$c \leq 0$.

(3) 当$0 < c < (1-a)^2\pi$时，存在唯一的点$r_0 \in (0,1)$，使得函数f_1 在$(0, r_0]$上严格单调下降，在$[r_0, 1)$上单调上升。

证明：(1) 求导得

$$\begin{aligned} f_1'(r) &= -2(1-a)\frac{\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)}{r} + \frac{cr}{r'^2} \\ &= \frac{r}{r'^2}\left[c - 2(1-a)r'^2\frac{\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)}{r^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

由[38,定理2.7(5)]得：

$$f_1'(r)>0 \Leftrightarrow c \geq 2(1-a)\sup_{0<r<1}\left\{r'^2\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^2}\right\}=(1-a)^2\pi,$$

而且，此时，据(2.12)知：f_1'在$(0,1)$上严格单调上升。由此即得结论(1)。

(2) 由(2.12)得：

$$f_1'(r)<0 \quad \Leftrightarrow \quad c \leq 2(1-a)\inf_{0<r<1}\left\{r'^2\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^2}\right\}=0,$$

而且，此时，

$$f_1'(r)=-\left[|c|\frac{r}{r'^2}+2(1-a)\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r}\right]$$

在$(0,1)$上严格单调下降，故得结论(2)。

(3) 当$0<c<(1-a)^2\pi$时，函数

$$c-2(1-a)r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]/r^2$$

从$(0,1)$到$(c-(1-a)^2\pi,c)$上严格单调上升，由(2.12)式可知存在唯一的点$r_0\in(0,1)$使得在$(0,r_0)$上有$f_1'(r)<0$,在$(r_0,1)$上$f_1'(r)>0$. 证毕。

引理2.11. (1) 函数$f_2(r)\equiv r'[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]/r^2$从$(0,1)$到$(0,(1-a)\pi/2)$上严格单调下降。

(2) 函数$f_3(r)\equiv[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]/[\pi/2-\mathcal{E}_a(r)]$ 从$(0,1)$到$(1/(1-a),\infty)$上严格单调上升。

(3) 函数$f_4(r)\equiv\frac{r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}{r^2\{\mathcal{E}_a(r)-\sin(a\pi)/[2(1-a)]\}}$ 从$(0,1)$到$((1-a)^2\pi/[(1-a)\pi-\sin(a\pi)],$ $1/(1-a))$上严格单调上升。

证明：(1) 求导得

$$r^4f_2'(r)=(r/r')f(r), \tag{2.13}$$

其中，

$$f(r)=\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)+(1-2a)r^2\mathcal{E}_a(r)-[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)].$$

由于$f(0)=0$, 而且

$$r'^2f'(r)/(2r)=-\{a[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]+(1-2a)r^2\mathcal{E}_a(r)-(1-a)(1-2a)r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]\}<0,$$

所以，f在$(0,1)$上严格单调下降且为负的。因此，从(2.13)式得到f_2的单调性。显然，$f_2(1^-)=0$，由Hôpital法则可求得：$f_2(0^+)=(1-a)\pi/2$.

(2) 令$g_1(r)\equiv\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r), g_2(r)\equiv\pi/2-\mathcal{E}_a(r)$. 则有$f_3(r)=g_1(r)/g_2(r), g_1(0)=g_2(0)=0$, 而且

$$\frac{g_1'(r)}{g_2'(r)}=\frac{r^2\mathcal{E}_a(r)}{r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}.$$

根据[24,引理5.2(6)], $g_1'(r)/g_2'(r)$在$(0,1)$上严格单调上升，故由引理1知f_3在$(0,1)$上严格单调上升。且有$f_3(0^+)=1/(1-a)$, $f_3(1^-)=\infty$.

(3) 令

$$g_3(r)\equiv r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)], g_4(r)\equiv r^2\{\mathcal{E}_a(r)-\sin(a\pi)/[2(1-a)]\}, g_5(r)\equiv\mathcal{K}_a(r)-(2-a)\mathcal{E}_a(r),$$

$$g_6(r)\equiv(1-a)\mathcal{K}_a(r)-(2-a)\mathcal{E}_a(r)+\sin(a\pi)/[2(1-a)]=g_7(r)+\sin(a\pi)/[2(1-a)].$$

则有$g_3(0)=g_4(0)=0$, 及

$$f_4(r)=\frac{g_3(r)}{g_4(r)},\ \frac{g_3'(r)}{g_4'(r)}=\frac{g_5(r)}{g_6(r)}=\left[\frac{g_7(r)}{g_5(r)}+\frac{\sin(a\pi)}{2(1-a)g_5(r)}\right]^{-1}. \tag{2.14}$$

利用(1.16)、(1.24)和(1.25)式级数展开可得

$$g_5(r)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+(1-a)^2}{n+a-1}\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n!)^2}r^{2n}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^{2n},$$

$$g_6(r)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a)(n+1)}{n+a-1}\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n!)^2}r^{2n}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}b_nr^{2n}.$$

因为对所有的$n=1,2,\cdots$, $a_n>0$ 有$b_n/a_n=(1-a)\{1+[1-(1-a)^2]/[n+(1-a)^2]\}$ 关于n严格单调下降，且函数g_5在$(0,1)$上严格单调上升。由引理2可推知函数$g_7(r)/g_5(r)$在$(0,1)$上严格单调下降。故有$g_5(r)/g_6(r)$在$(0,1)$上严格单调上升。由(2.14)式和单调性l'Hôpital法则可知，函数f_4在$(0,1)$上严格单调上升。且有$f_4(0^+)=(1-a)^2\pi/[(1-a)\pi-\sin(a\pi)]$, $f_4(1^-)=1/(1-a)$. 证毕。

定理2.12. 令$c\in\mathbf{R}$, 且$c>0$, 则有:

(1) 定义函数$f_5(r)\equiv\mathcal{E}_a(r)^2-c(1+r')$, 则: (i) 函数$f_5$在$(0,1)$上严格单调上升且是向下凸的当且仅当$c\geq(1-a)^2\pi^2$; 特别地，对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$[1/4-2(1-a)^2]\pi^2+(1-a)^2\pi^2(1+r')<\mathcal{E}_a(r)^2<\{[\sin(a\pi)/(2-2a)]^2$$
$$-\pi^2/4+(1-a)^2\pi^2\}r+(1-a)^2\pi^2(1+r')+\pi^2/4-2(1-a)^2\pi^2. \tag{2.15}$$

(ii) 当$0<c<(1-a)^2\pi^2$时，存在唯一的点$r_0\in(0,1)$，使得函数f_5 在$(0,r_0]$上严格单调下降，在$[r_0,1)$上单调上升。

(2) 函数$f_6(r)\equiv\mathcal{E}_a(r)-c(1+r'^2)$ 在$(0,1)$上严格单调下降且是向上凸的当且仅当$c\leq(1-a)^2\pi/2$，并且不存在$c\in\mathbf{R}$使得函数f_6在$(0,1)$上单调上升。特别地，对任意的$r\in(0,1)$,$c=(1-a)^2\pi/2$, $A=\{\pi-\pi(1-a)^2-[\sin(a\pi)]/(1-a)\}/2$, 成立不等式

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}(1-a)^2r^2-Ar<\mathcal{E}_a(r)<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}(1-a)^2r^2. \tag{2.16}$$

(3) 定义函数$f_7(r)\equiv\mathcal{E}_a(r)-c(1+r')$, 则有：(i) 函数$f_7$在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\geq(1-a)^2\pi$, 而且此时，$f_7$是向下凸的。特别地，对任意的$r\in(0,1)$, $c=\pi(1-a)^2$, 及$A=\frac{\sin(a\pi)}{2(1-a)}+(1-a)^2\pi-\frac{\pi}{2}$, 成立不等式

$$\frac{\pi}{2}-\pi(1-a)^2(1-r')<\mathcal{E}_a(r)<\frac{\pi}{2}-\pi(1-a)^2(1-r')+Ar. \tag{2.17}$$

(ii) 当$0<c<(1-a)^2\pi$时，存在唯一的$r_0\in(0,1)$使得函数f_7在$(0,r_0]$上严格单调下降，在$[r_0,1)$上单调上升。

证明：(1) (i) 求导得

$$\begin{aligned}f_5'(r)&=4(a-1)\mathcal{E}_a(r)\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r}+\frac{cr}{r'}\\&=\frac{r}{r'}\left[c-4(1-a)r'\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^2}\mathcal{E}_a(r)\right].\end{aligned} \tag{2.18}$$

由引理2.11(1)和函数$\mathcal{E}_a(r)$的单调性可知：$h(r)\equiv r'[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]\mathcal{E}_a(r)/r^2$ 在$(0,1)$上严格单调下降。并且，$h(0^+)=(1-a)\pi^2/4$,$h(1^-)=0$. 因此，由(2.18)式得

$$f_5'(r)>0\Leftrightarrow c\geq4(1-a)\sup_{0<r<1}\{h(r)\}=(1-a)^2\pi^2,$$

而且，此时f_5'在$(0,1)$上严格单调上升。显然，当$c=(1-a)^2\pi^2$时，$f_5(0)=(\pi^2/4)-2c$,$f_5(1)=[\sin(a\pi)/(2-2a)]^2-c$. 由此即得(1).

(ii) 当$0<c<(1-a)^2\pi^2$时, 由$h(r)$的单调性可知$c-4(1-a)h(r)$ 从$(0,1)$到$(c-(1-a)^2\pi^2,c)$上严格单调上升，所以存在唯一的点$r_0\in(0,1)$ 使得在$(0,r_0)$上有$f_5'(r)<0$, 在$(r_0,1)$上有$f_5'(r)>0$.

(2) 求导得

$$f_6'(r)=-2r\{(1-a)[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]/r^2-c\}. \tag{2.19}$$

由[24,引理5.2(3)]和(2.19)可得：

$$f_6'(r)<0\Leftrightarrow c\leq(1-a)\inf_{0<r<1}\{[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]/r^2\}=(1-a)^2\pi/2,$$

并且不存在$c \in \mathbf{R}$使得在$(0,1)$上恒有$f_6'(r) > 0$. 当$c \le (1-a)^2\pi/2$时，由(2.19)式知：f_6'在$(0,1)$上严格单调下降，故f_6在$(0,1)$上是向上凸的，不等式(2.16)显然成立。

(3) (i) 求导得

$$f_7'(r) = (r/r')\{c - 2(1-a)r'[\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)]/r^2\}. \tag{2.20}$$

由引理2.11(1)和(2.20)式可得：对$\forall\ r \in (0,1)$,

$$f_7'(r) > 0 \ \Leftrightarrow\ c \ge 2(1-a)\sup_{0<r<1}\{r'[\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)]/r^2\} = (1-a)^2\pi,$$

并且，当$c \ge (1-a)^2\pi$时，f_7'在上严格单调上升，故f_7为向下凸的。不等式(2.17)为显然。

(ii) 当$0 < c < (1-a)^2\pi$时，由引理2.11(1)可知$c - 2(1-a)r'[\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)]/r^2$从$(0,1)$到$(c-(1-a)^2\pi, c)$上严格单调上升。所以由(2.20)式可知：存在唯一的$r_0 \in (0,1)$，使得在$(0,r_0)$上$f_7'(r) < 0$, 在$(r_0,1)$上$f_7'(r) \ge 0$. 故结论(ii)成立。证毕。

定理2.13. (1) 函数$f_8(r) \equiv r'^2[\pi/2 - \mathcal{E}_a(r)]/r^2$从$(0,1)$到$(0,(1-a)^2\pi/2)$上严格单调下降且是向上凸的。特别地，对任意的$r \in (0,1)$，成立不等式

$$\mathcal{E}_a(r) < \frac{\pi}{2} - \frac{(1-a)^2\pi}{2}\frac{r^2}{1+r}. \tag{2.21}$$

(2) 函数$f_9(r) \equiv [\mathcal{E}_a(r) - (\pi/2)]/\log r'$从$(0,1)$到$(0,(1-a)^2\pi)$上严格单调下降。且对任意的$r \in (0,1)$，成立不等式

$$\mathcal{E}_a(r) > \pi/2 + (1-a)^2\pi\log r'. \tag{2.22}$$

证明：(1) 显然，$f_8(0^+) = (1-a)^2\pi/2$, $f_8(1^-) = 0$. 利用(1.16)、(1.24)和(1.25)级数展开可得：

$$f_8(r) = \frac{(1-a)^2\pi}{2} - \frac{(1-a)\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1+(1-a)^2+2n]}{(a+n-1)}\frac{(a,n)(1-a,n)}{[(n+1)!]^2}r^{2n}.$$

据此即得结论(1).

(2) 令$f_9(r) \equiv g(r)/h(r)$, 其中，

$$g(r) \equiv \mathcal{E}_a(r) - \pi/2, h(r) \equiv \log(r').$$

则有$g(0) = h(0) = 0$. 求导得

$$\frac{g'(r)}{h'(r)} = 2(1-a)r'^2\frac{\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)}{r^2}.$$

由[38,定理2.7(5)]和单调性l'Hôpital法则可知函数f_9 在$(0,1)$上严格单调下降，且有极限$f_9(0^+)=(1-a)^2\pi$和$f_9(1^-)=0$. 不等式(2.22)显然。证毕。

定理2.14. 令$c\in \mathrm{R}$, 定义函数

$$f_{10}(r)\equiv\frac{(\pi/2)-\mathcal{E}_a(r)}{r^c}.$$

则有：

(1) 函数f_{10}在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\le 2$, 但不存在$c\in R$使得函数f_{10}在$(0,1)$上单调下降。

(2) 当$c>2$时，存在唯一的点$r_0\in(0,1)$使得函数f_{10}在$(0,r_0]$上严格单调下降，在$[r_0,1)$上严格单调上升。

(3) 当$c\le 1$时，函数f_{10}是向下凸的，且对任意的$r\in(0,1)$及$\alpha=\pi/2-[\sin(a\pi)]/[2(1-a)]$，成立不等式

$$\mathcal{E}_a(r)>\frac{\pi}{2}-\alpha r^2. \tag{2.23}$$

(4) 函数$f(r)\equiv[(\pi/2)-\mathcal{E}_a(r)]/r^2$从$(0,1)$到$((1-a)^2\pi/2,\alpha)$上严格单调上升且是向下凸的。特别地，对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$\frac{\pi}{2}[1-(1-a)^2r^2]-[\alpha-\frac{\pi}{2}(1-a)^2]r^3<\mathcal{E}_a(r)<\frac{\pi}{2}[1-(1-a)^2r^2]. \tag{2.24}$$

证明：(1) 求导可得

$$f_{10}'(r)=\frac{(\pi/2)-\mathcal{E}_a(r)}{r^{c+1}}\left[2(1-a)\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{(\pi/2)-\mathcal{E}_a(r)}-c\right]. \tag{2.25}$$

根据引理2.11(2)和(2.25)式可知：对任意的$r\in(0,1)$,

$$f_{10}'(r)>0\Leftrightarrow c\le 2(1-a)\inf_{0<r<1}\left\{\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{(\pi/2)-\mathcal{E}_a(r)}\right\}=2,$$

$$f_{10}'(r)<0\Leftrightarrow c\ge 2(1-a)\sup_{0<r<1}\left\{\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{(\pi/2)-\mathcal{E}_a(r)}\right\}=\infty.$$

由此便得结论(1).

(2) 当$c>2$时，由引理2.11(2)可知函数

$$2(1-a)\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{(\pi/2)-\mathcal{E}_a(r)}-c$$

从$(0,1)$到$(2-c,\infty)$上严格单调上升。故存在唯一的$r_0\in(0,1)$使得函数f_{10}在$(0,r_0]$上严格单调下降，在$[r_0,1)$上严格单调上升。

(3) 因为函数$r \mapsto [(\pi/2) - \mathcal{E}_a(r)]/r^{c+1}$在$(0,1)$上是正的且严格单调上升当且仅当$c \le 1$; 而当$c \le 1$时，函数$r \mapsto 2(1-a)[\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)]/[(\pi/2) - \mathcal{E}_a(r)] - c$在$(0,1)$上是正的且严格单调上升。因此，由(2.24)式可知：当$c \le 1$时，$f'_{10}(r)$为两个正的单调上升函数的乘积，故函数f_{10}是向下凸的。不等式(2.23)为显然。

(4) 利用级数展开得

$$f(r) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a)(1-a+n)(a,n)(1-a,n)}{[(n+1)!]^2}r^{2n}.$$

由此即得f的单调性和凹凸性。显然，$f(1^-) = \alpha$，$f(0^+) = (1-a)^2\pi/2$. 不等式(2.24)显然成立。证毕。

定理2.15. 令$B = 2(1-a)^3\pi/[(1-a)\pi - \sin(a\pi)]$, $\beta = [\sin(a\pi)]/[2(1-a)]$, 定义函数

$$f_{11}(r) \equiv \frac{\mathcal{E}_a(r) - \beta}{r'^c}.$$

则有：

(1) 函数f_{11}在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c \ge 2$.

(2) 函数f_{11}在$(0,1)$上严格单调下降当且仅当$c \le B$.

(3) 当$B < c < 2$时，存在唯一的点$r_0 \in (0,1)$使得f_{11}在$(0,r_0]$上严格单调上升，在$[r_0,1)$上严格单调下降。

(4) 当$0 \le c \le B$时，函数f_{11}为向上凸的，且对任意的$r \in (0,1)$，成立不等式

$$\mathcal{E}_a(r) > \beta + [\pi/2 - \beta](1-r)r'^c. \tag{2.26}$$

(5) 函数

$$T_1(r) \equiv \frac{\mathcal{E}_a(r) - \beta}{r'}$$

从$(0,1)$到$(0,(\pi/2)-\beta)$上严格单调下降，而函数

$$T_2(r) \equiv \frac{\mathcal{E}_a(r) - \beta}{r'^2}$$

从$(0,1)$到$((\pi/2)-\beta,\infty)$上严格单调上升。特别地，对任意的$r \in (0,1)$，成立不等式

$$(\pi/2 - \beta)r'^2 < \mathcal{E}_a(r) - \beta < (\pi/2 - \beta)r'. \tag{2.27}$$

证明：令函数g为引理2.11(3)中的$f_4(r)$. 求导可得

$$\begin{aligned} f_{11}'(r) &= \frac{r}{r'^{c+2}}\left\{2(a-1)r'^2\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^2}+c[\mathcal{E}_a(r)-\beta]\right\} \\ &= r\frac{\mathcal{E}_a(r)-\beta}{r'^{c+2}}\left\{2(a-1)\frac{r'^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}{r^2[\mathcal{E}_a(r)-\beta]}+c\right\} \\ &= r\frac{\mathcal{E}_a(r)-\beta}{r'^{c+2}}[c-2(1-a)g(r)] \end{aligned} \tag{2.28}$$

于是有：对$\forall r\in(0,1)$,

$$f_{11}'(r)>0\Leftrightarrow c\geq 2(1-a)\sup_{0<r<1}\{g(r)\}=2,$$

$$f_{11}'(r)<0\Leftrightarrow c\leq 2(1-a)\inf_{0<r<1}\{g(r)\}=B.$$

据此即得结论(1)和(2).

当$B<c<2$时，由引理2.11(3)可知函数$r\mapsto 2(a-1)g(r)+c$从$(0,1)$到$(c-2,c-B)$上严格单调下降。故由(2.28)式可知存在唯一的点$r_0\in(0,1)$使得在$(0,r_0)$上有$f_{11}'(r)>0$,在$(r_0,1)$上有$f_{11}'(r)<0$. 于是结论(3)成立。

因为

$$-f_{11}'(r)=r\frac{\mathcal{E}_a(r)-\beta}{r'^{c+2}}\{2(1-a)g(r)-c\},$$

由第(1)部分和引理2.11(3)可得：函数$[\mathcal{E}_a(r)-\beta]/r'^{c+2}>0$且在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\geq 0$; 函数$2(1-a)g(r)-c>0$且在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\leq B$. 所以，当$0\leq c\leq B$时，函数$-f_{11}'(r)$为三个正的且在$(0,1)$上严格单调上升函数的乘积。故得函数$f_{11}$的凹凸性，不等式(2.26)显然成立。

最后，易证$B>1$.故由结论(1)和(2)即得T_1和T_2的单调性。T_1和T_2的端点值及不等式(2.27)是显然的。证毕。

2.2.3 由$\mathcal{K}_a(r)$和$\mathcal{E}_a(r)$定义的一些函数的性质

下面的定理2.16是对[24,引理5.4(5)]的补充和完善。

定理2.16. 设$c\in R$,且$c>0$. 在$(0,1)$上定义函数

$$f_1(r)\equiv[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/(1-r'^c),\ f_2(r)\equiv[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]/(1-r'^c).$$

则有：

(1) 当$c\geq 2$时，函数f_1在$(0,1)$上严格单调上升; 当$2(1-a+a^2)<c<2$时，存在唯一的$r_0\in(0,1)$，使得函数f_1在$(0,r_0]$上严格单调上升，在$[r_0,1)$上严格单调下降。

(2) 当$c \geq 2(1-a)^2$或$c < 0$时，函数f_2在$(0,1)$上严格单调上升; 当$2(1-a+a^2) < c < 2$时，存在唯一的$r_0 \in (0,1)$使得函数f_2 在$(0,r_0]$上严格单调下降，在$[r_0,1)$上严格单调上升。

证明：(1) 令

$$g(r) \equiv \mathcal{E}_a(r) - r'^2\mathcal{K}_a(r),\ h(r) \equiv 1 - r'^c.$$

则有$g(0) = h(0) = 0$, 且$f_1(r) = g(r)/h(r)$. 求导可得

$$\frac{g'(r)}{h'(r)} = \frac{2a}{c} r'^{2-c}\mathcal{K}_a(r).$$

根据[24,引理5.4(1)]和引理2.4(1)和单调性l'Hôpital法则可知：当$c \geq 2$时，函数f_1在$(0,1)$上严格单调上升；当$c \leq 2(1-a+a^2)$时，f_1在$(0,1)$上严格单调下降；当$2(1-a+a^2) < c < 2$时，存在唯一的点$r_0 \in (0,1)$使得函数f_1在$(0,r_0)$上严格单调上升，在$(r_0,1)$上严格单调下降。

(2) 令

$$g(r) \equiv \mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r),\ h(r) \equiv 1 - r'^c.$$

则有$g(0) = h(0) = 0$及$f_2(r) = g(r)/h(r)$. 求导可得

$$\frac{g'(r)}{h'(r)} = \frac{2(1-a)}{c} r'^{-c}\mathcal{E}_a(r).$$

由[24,引理5.4(2)], 引理2.4(2)及单调性l'Hôpital法则可知：当$c \geq 2(1-a)^2$或$c < 0$时，函数f_2在$(0,1)$上严格单调上升；当$0 < c < 2(1-a)^2$时，存在唯一的$r_0 \in (0,1)$使得函数f_2在$(0,r_0)$上严格单调下降，在$(r_0,1)$上严格单调上升。

当$a = 1/2$时，下面的定理2.17、2.18、2.19、定理2.21、2.22、2.23(且c=1时)、2.24、2.25(1)(2)分别退化为[29,定理3-8,定理14-15]；不等式(2.30)将不等式(1.37)推广到广义椭圆积分。

定理2.17. 函数

$$f_3(r) \equiv \frac{1}{(1+r')^2} - \frac{4(1-a)}{\sin(a\pi)} \frac{r'\{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)\}}{r^4}$$

从$(0,1)$到$(\frac{1}{4} - \frac{a^2(1-a)^2\pi}{\sin(a\pi)}, 1)$上严格单调上升且是向下凸的。

证明：显然有，$f_3(0^+)=\frac{1}{4}-\frac{a^2(1-a)^2\pi}{\sin(a\pi)}$, $f_3(1^-)=1$. 求导得

$$\begin{aligned}
f_3'(r)=&\frac{r}{r'}\left\{\frac{2}{(1+r')^3}+\frac{4(1-a)}{\sin(a\pi)}\left[\frac{(2a^2-5a+3)r^4-(2a^2-6a+7)r^2+4}{r^6}\mathcal{K}_a(r)\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{4-(2a^2-2a+3)r^2}{r^6}\mathcal{E}_a(r)\right]\right\}\\
=&\frac{r}{r'}[g_1(r)+h_1(r)], \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

其中，

$$g_1(r)\equiv\frac{2}{(1+r')^3}-\frac{a^3(1-a)^3(a+1)(2-a)\pi}{6\sin(a\pi)}r^2,$$

$$\begin{aligned}
h_1(r)\ \equiv\ &\frac{4(1-a)}{\sin(a\pi)}\left\{\frac{(2a^2-5a+3)r^4-(2a^2-6a+7)r^2+4}{r^6}\mathcal{K}_a(r)\right.\\
&\left.-\frac{4-(2a^2-2a+3)r^2}{r^6}\mathcal{E}_a(r)+\frac{a^3(1-a)^2(a+1)(2-a)\pi}{24\sin(a\pi)}r^2\right\}.
\end{aligned}$$

不难证明：函数g_1从$(0,1)$到$(1/4,2-[a^3(1-a)^3(a+1)(2-a)\pi]/[6\sin(a\pi)])$上严格单调上升。利用级数展开可得

$$\begin{aligned}
h_1(r)\ =\ &-\frac{a^2(1-a)^2[1+2a(1-a)]\pi}{6\sin(a\pi)}+\frac{(1-a)\pi}{\sin(a\pi)}\cdot\\
&\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2a(n+1)+4a(a^2-a-1)}{(n+3)(n+2)}\frac{(a+n)(1-a+n)}{n+1}\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n!)^2}r^{2n}.
\end{aligned}$$

据此，函数h_1是从$(0,1)$到$(\{-a^2(1-a)^2[1+2a(1-a)]\pi\}/[6\sin(a\pi)],\infty)$上严格单调上升。因此，由(2.29)式可得$f_3'(r)>0$且在$(0,1)$上是严格单调上升的，故结论可证成立。证毕。

定理2.18. 令$b=\pi/[2\sin(a\pi)]-\log 2$, 则函数

$$f_4(r)\equiv[\mathcal{K}_a'(r)/\sin(a\pi)-b-\log(1+1/r)]/(1-r)$$

从$(0,1)$到$(a(1-a)\pi/\sin(a\pi)-1/2,R(a)/2-b)$上严格单调下降。特别地，对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{a(1-a)\pi}{\sin(a\pi)}-\frac{1}{2}\right)(1-r')+b+\log\left(1+\frac{1}{r'}\right)\right]\sin(a\pi)<\mathcal{K}_a(r)\\
&<\left[\left(\frac{R(a)}{2}-b\right)(1-r')+b+\log\left(1+\frac{1}{r'}\right)\right]\sin(a\pi). \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

证明：令

$$g_2(r)\equiv\mathcal{K}_a'(r)/\sin(a\pi)-b-\log(1+1/r),\ h_2(r)\equiv1-r$$

$$g_3(r)\equiv\frac{2(1-a)}{\sin(a\pi)}\frac{\mathcal{E}'_a(r)-r^2\mathcal{K}'_a(r)}{r'^2}-\frac{1}{1+r},\ h_3(r)\equiv r$$

则$g_2(1)=h_2(1)=0$, $g_3(0^+)=h_3(0)=0$. 并且有

$$f_4(r)=\frac{g_2(r)}{h_2(r)},\ \frac{g'_2(r)}{h'_2(r)}=\frac{g_3(r)}{h_3(r)}\tag{2.31}$$

和

$$\frac{g'_3(r)}{h'_3(r)}=\frac{1}{(1+r)^2}-\frac{4(1-a)}{\sin(a\pi)}\frac{r\{[1+(a-1)r'^2]\mathcal{K}'_a(r)-\mathcal{E}'_a(r)\}}{r'^4}=f_3(r'),$$

其中，$f_3(r)$由定理2.17中定义。由定理2.17可知$g'_3(r)/h'_3(r)$ 在$(0,1)$上严格单调下降。由(2.31)式和单调性l'Hôpital法则即得函数f_4 的单调性，且有极限$f_4(0^+)=R(a)/2-b$, $f_4(1^-)=a(1-a)\pi/\sin(a\pi)-1/2$. 不等式(2.30)显然成立。证毕。

定理2.19. 函数

$$f_5(r)\equiv r'^2\frac{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^4}\left[1-\frac{2(1-a)}{\sin(a\pi)}\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}\right]^{-1}$$

从$(0,1)$到$(a^2(1-a)\pi[\sin(a\pi)]/\{4[\sin(a\pi)-a(1-a)\pi]\},[\sin(a\pi)]/[2(1-a)])$上严格单调上升。

证明：由[24,引理5.2(1)]，函数$r\mapsto[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/r^2$从$(0,1)$到$\left(\frac{a\pi}{2},\frac{\sin(a\pi)}{2(1-a)}\right)$上严格单调上升。所以，函数$f_5$定义在$(0,1)$上。令

$$g_4(r)\equiv r'^2\frac{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^4},\ h_4(r)\equiv 1-\frac{2(1-a)}{\sin(a\pi)}\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}.$$

求导并利用(1.16)、(1.24)和(1.25)级数展开可得:

$$\begin{aligned}g'_4(r)&=2\{a(1-a)r^2[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]-(2-r^2)[(1+(a-1)r^2)\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]\}/r^5\\&=\frac{\pi}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{an[a(1-a)-n](a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n+2)(n!)^2}r^{2n}\\&=-\frac{\pi a}{r}\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^{2n},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h'_4(r)&=-\frac{4(1-a)}{\sin(a\pi)}\frac{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^3}\\&=-\frac{2a(1-a)\pi}{\sin(a\pi)}\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}b_nr^{2n}\end{aligned}$$

其中

$$a_n=\frac{n[n-a(1-a)](a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n+2)(n!)^2},\ b_n=\frac{n(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n!)^2}.$$

因为对所有的$n=1,2,\cdots$, $a_n/b_n=[2+a(1-a)]/(n+2)-\sin(a\pi)/[2(1-a)]$关于$n$严格单调下降。由引理2可知$g_4'(r)/h_4'(r)$在$(0,1)$上严格单调上升。因为$g_4(1^-)=h_4(1^-)=0$ 且$h_4'(r)\neq 0$, 由单调性l'Hôpital法则即得f_5的单调性。显然，$f_5(0^+)=a^2(1-a)\pi[\sin(a\pi)]/\{4[\sin(a\pi)-a(1-a)\pi]\}$. 用l'Hôpital法则可求得：$f_5(1^-)=[\sin(a\pi)]/[2(1-a)]$. 证毕。

定理2.20. 令$b=\pi/\sin(a\pi)$, $c=\exp(R(a)/2)$, 则函数

$$f_6(r)\equiv\left\{r'\exp\left(\frac{\mathcal{K}_a(r)}{\sin(a\pi)}\right)-c\right\}\left[1-\frac{2(1-a)}{\sin(a\pi)}\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}\right]^{-1}$$

从$(0,1)$到$(c/2,[\exp(b/2)-c]/[1-a(1-a)b])$上严格单调下降。

证明：令

$$t_1(r)\equiv r'\exp[\mathcal{K}_a(r)/\sin(a\pi)]-c,\ t_2(r)\equiv 1-[2(1-a)/\sin(a\pi)][\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/r^2.$$

由[24,引理5.2(1)和定理5.5(1)]可知：函数t_1从$(0,1)$到$(0,\exp(b/2)-C)$上严格单调下降，t_2从$(0,1)$到$(0,1-a(1-a)b)$上严格单调下降。所以函数f_6 定义在$(0,1)$上，$f_6(r)\equiv t_1(r)/t_2(r)$, 且$t_1(1^-)=t_2(1^-)=0$. 求导可得

$$t_1'(r)=-\frac{r}{r'}\left[1-\frac{2(1-a)}{\sin(a\pi)}\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}\right]\exp\left(\frac{\mathcal{K}_a(r)}{\sin(a\pi)}\right),$$

$$t_2'(r)=-\frac{4(1-a)}{\sin(a\pi)}\frac{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^3}.$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{t_1'(r)}{t_2'(r)}&=\frac{\sin(a\pi)}{4(1-a)}r'\exp\left(\frac{\mathcal{K}_a(r)}{\sin(a\pi)}\right)\left[1-\frac{2(1-a)}{\sin(a\pi)}\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}\right]\\&\quad\cdot\left\{r'^2\frac{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^4}\right\}^{-1}\\&=\frac{\sin(a\pi)}{4(1-a)}\frac{t_1(r)+c}{f_5(r)},\end{aligned}\tag{2.32}$$

其中函数f_5由定理2.19定义。由定理2.19和(2.32)可得：函数$t_1'(r)/t_2'(r)$ 在$(0,1)$上严格单调下降。于是，根据单调性l'Hôpital法则，函数f_6在$(0,1)$上严格单调下降。且有，$f_6(0^+)=[\exp(b/2)-c]/[1-a(1-a)b]$, $f_6(1^-)=c/2$. 证毕。

若函数$f:(a,b)\mapsto\mathbf{R}$满足(1) $f\in C^\infty((a,b))$，(2) 对所有的$x\in(a,b)$和$k=0,1,\cdots$, 有$f^{(k)}(x)>0$ 成立，则称函数f是严格绝对单调的。

定理2.21. 函数

$$f_7(r)\equiv\frac{\{2-[2-a(1-a)]r^2\}\mathcal{E}_a(r)-[2-(1-a)(2-a)r^2]r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^6}$$

从$(0,1)$到$(a^2(1-a^2)(2-a)/12, a\sin(a\pi)/2)$上是严格绝对单调的。

证明：显然，$f_7(1^-)=a\sin(a\pi)/2$. 利用(1.16)、(1.24)和(1.25)级数展开可得

$$\begin{aligned} f_7(r) &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)(2-a)n}{(n+1)(n+2)}\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n!)^2}r^{2(n-1)} \\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)(2-a)(a+n)(1-a+n)}{(n+1)(n+2)(n+3)}\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n!)^2}r^{2n} \\ &= \frac{a(a+1)(2-a)\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}c_n r^{2n} \end{aligned}$$

其中，

$$c_n=\frac{(a,n+1)(1-a,n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n!)^2},$$

于是可知$f_7(0^+)=a^2(1-a^2)(2-a)/12$, 且对任意的$r\in(0,1)$和$k=0,1,\cdots$, 有$f_7^{(k)}(r)>0$成立。证毕。

定理2.22. 函数

$$f_8(r)\equiv\frac{r^2\{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)\}}{\{2-[2-a(1-a)]r^2\}\mathcal{E}_a(r)-[2-(1-a)(2-a)r^2]r'^2\mathcal{K}_a(r)}$$

从$(0,1)$到$(3/[(1+a)(2-a)],\infty)$上严格单调上升。

证明：首先，显然有$f_8(1^-)=\infty$. 令

$$g_5(r)\equiv\{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)\}/r^4,$$

$$h_5(r)\equiv\{2-[2-a(1-a)]r^2\}\mathcal{E}_a(r)-[2-(1-a)(2-a)r^2]r'^2\mathcal{K}_a(r).$$

则有

$$f_8(r)=\frac{g_5(r)}{f_7(r)}. \tag{2.33}$$

由级数展开可得：

$$g_5(r)=\frac{a\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^{2n+4}, \tag{2.34}$$

而$f_7(r)$具有级数展开式(2.32). 此处，

$$a_n=\frac{(a,n+1)(1-a,n+1)}{(n+1)(n+2)(n!)^2}.$$

因为对所有的$n=1,2,\cdots,a_n/c_n=(n+3)$严格单调上升，由(2.33)式和引理2可知$f_8$在$(0,1)$上严格单调上升，且有$f_8(0^+)=3/[(1+a)(2-a)]$. 证毕。

定理2.23. 令$c\in\mathbf{R}$, 定义函数

$$F_c(r)\equiv r'^c\{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)\}/r^4.$$

则有：

(1) 函数F_c在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c \le 0$, F_0从$(0,1)$到$(\frac{a^2(1-a)\pi}{4}, \infty)$上严格单调上升且是向下凸的。

(2) 函数F_c在$(0,1)$上严格单调下降当且仅当$c \ge 2(a+1)(2-a)/3$.

(3) 当$0 < c < 2(a+1)(2-a)/3$时，存在唯一的$r_0 \in (0,1)$使得函数F_c在$(0, r_0)$上严格单调上升，在$(r_0, 1)$上严格单调下降。且当$2(a+1)(2-a)/3 \le c \le 2$时，函数$F_c$是向上凹的。特别地，函数$F_2$ 从$(0,1)$到$(0, \frac{a^2(1-a)\pi}{4})$上严格单调下降且是向上凸的。

证明：首先，由(2.34)可得关于F_0的结论。其次，求导得：

$$\begin{aligned}
&\frac{r^3 r'^{2-c} F_c'(r)}{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)} = \\
&= 2\frac{\{2-[2-a(1-a)]r^2\}\mathcal{E}_a(r) - [2-(1-a)(2-a)r^2]r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2\{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)\}} - c \\
&= 2[f_8(r)]^{-1} - c. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

其中f_8由定理2.22中定义。由定理2.22知：$[f_8(r)]^{-1}$从$(0,1)$ 到$(0, (1+a)(2-a)/3)$上严格单调下降。因此，对任意的$r \in (0,1)$,

$$\begin{aligned}
F_c'(r) > 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; c \le 2 \inf_{0<r<1} [f_8(r)]^{-1} = 0, \\
F_c'(r) < 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; c \ge 2 \sup_{0<r<1} [f_8(r)]^{-1} = 2(1+a)(2-a)/3.
\end{aligned}$$

由此即得结论(1)和(2).

当$0 < c < 2(1+a)(2-a)/3$时，由定理2.22得：函数$[f_8(r)]^{-1} - c$ 从$(0,1)$到$(-c, 2(1+a)(2-a)/3 - c)$上严格单调下降。因此，存在唯一的$r_0 \in (0,1)$使得函数F_c在$(0, r_0]$上严格单调上升，在$[r_0, 1)$上严格单调下降。

因为

$$-F_c'(r) = r r'^{c-2} \frac{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)}{r^4} \left\{ c - \frac{2}{f_8(r)} \right\}.$$

由结论(1)可知，函数$r'^{c-2}\{[1+(a-1)r^2]\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)\}/r^4 > 0$且是严格单调上升的当且仅当$c \le 2$; 函数$c - 2/f_8 > 0$ 且严格单调上升当且仅当$c \ge 2(1+a)(2-a)/3$. 所以，当$2(a+1)(2-a)/3 \le c \le 2$时，函数$-F_c'$为三个正的且严格单调上升函数的乘积，故函数$F_c$是向上凹的。由(2.34)可得：$F_2(0^+) = a^2(1-a)\pi/4$, $F_2(1) = 0$. 证毕。

定理2.24. 函数

$$f_9(r) \equiv \frac{(1 - a r'^2)\mathcal{E}_a'(r) - r^2\mathcal{K}_a'(r)}{r'^2[\mathcal{K}_a'(r) - \mathcal{E}_a'(r)]}$$

从$(0,1)$到$(0,a(2-a)/2)$上严格单调上升；函数

$$f_{10} \equiv f_9(r)/r^2$$

从$(0,1)$到$(a(2-a)/2,\infty)$上严格单调下降。

证明：显然，$f_9(0^+)=0$.令$f_9(r') \equiv g_6(r)/h_6(r)$, 其中

$$g_6(r) \equiv (1-ar^2)\mathcal{E}_a(r) - r'^2\mathcal{K}_a(r), h_6(r) \equiv r^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)].$$

利用(1.16)、(1.24)和(1.25)级数展开可得

$$g_6(r) = \frac{a(2-a)\pi}{2} r^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{2n},$$

$$h_6(r) = \frac{\pi}{2} r^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{2n}.$$

其中，

$$a_n = n(a,n)(1-a,n)/[(n+1)(n+a-1)(n!)^2], b_n = n(a,n)(1-a,n)/[(n+a-1)(n!)^2]$$

因为对于所有的$n=1,2,\cdots$, 有$b_n>0$, 且$a_n/b_n = 1/(n+1)$关于n严格单调下降，由引理2可推出$f_9(r)$在$(0,1)$上严格单调上升。且有，$f_9(1^-)=a(2-a)/2$.

利用上面的级数展开得

$$f_{10}(r') = \frac{f_9(r')}{r'^2} = a(2-a)\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{2n} \bigg/ \left(1-a-\sum_{n=1}^{\infty} d_n r^{2n}\right)$$

其中，

$$c_n = \frac{(1-a+n)(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n+2)(n!)^2}, d_n = \frac{[n+(1-a)^2](a,n)(1-a,n)}{(n+1)(a+n-1)(n!)^2}$$

因为对所有的$n=1,2,\cdots$, 有$d_n>0$, 及$r'^2 h_6(r)>0$，故有$f_{10}(r')$在$(0,1)$上严格单调上升，进而得到函数f_{10}的单调性。且有极限$f_{10}(0^+)=\infty$, $f_{10}(1^-)=f_9(1^-)=a(2-a)/2$. 证毕。

定理2.25. 对$c\in\mathbf{R}$, 定义函数$G_c(r) \equiv r'^c[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]/r^2$. 则有：

(1) 函数G_c在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\le 0$.

(2) 函数G_c在$(0,1)$上严格单调下降当且仅当$c\ge a(2-a)$.

(3) 当$0<c<a(2-a)$时，存在唯一的$r_0\in(0,1)$, 使得函数G_c在$(0,r_0]$上严格单调上升，在$[r_0,1)$上严格单调下降。当$a(2-a)\le c\le 2$时, 函数G_c是向上凸的。

证明：求导得

$$\begin{aligned} G_c'(r) &= \frac{r'^{c-2}[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}{r}\left[2\frac{(1-ar^2)\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}-c\right] \\ &= \frac{r'^{c-2}[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}{r}[2f_9(r')-c], \end{aligned} \tag{2.36}$$

其中，函数f_9为定理2.24中所定义。由(2.36)式、定理2.24及函数$r'^{c-2}[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]/r>0$可知：

$$G_c'(r)>0 \quad\Leftrightarrow\quad c\le 2\inf_{0<r<1}\{f_9(r')\}=0,$$
$$G_c'(r)<0 \quad\Leftrightarrow\quad c\ge 2\sup_{0<r<1}\{f_9(r')\}=a(2-a).$$

由此即得结论(1)与(2).

当$0<c<a(2-a)$时，由于函数$2f_9(r')-c$从$(0,1)$到$(-c,a(2-a)-c)$上严格单调下降，所以存在唯一的$r_0\in(0,1)$, 使得在$(0,r_0)$上有$G_c'(r)>0$, 在$(r_0,1)$上有$G_c'(r)<0$.

因为

$$-G_c'(r)=r\frac{r'^{c-2}[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]}{r^2}[c-2f_9(r')],$$

由(1)、(2)部分可知：函数$r'^{c-2}[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)]/r^2>0$且在$(0,1)$上是严格单调上升的当且仅当$c\le 2$；函数$c-2f_9(r')>0$当且仅当$c\ge 2\sup\limits_{0<r<1}\{f_9(r')\}=a(2-a)$，且在$(0,1)$上是严格单调上升。所以，当$a(2-a)\le c\le 2$时，$-G_c'(r)$为三个正的且在$(0,1)$上严格单调上升的函数的乘积，故函数$G_c$是向上凸的。证毕。

定理2.26. 函数

$$f_{11}(r)\equiv\frac{a\mathcal{K}_a(r)-[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/r^2}{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}$$

从$(0,1)$到$(a(1-a)/2,\infty)$上严格单调上升。函数

$$f_{12}(r)\equiv r'^2f_{11}(r)$$

从$(0,1)$到$(0,a(1-a)/2)$上严格单调下降。

证明：显然，$f_{11}(1^-)=\infty$. 令$g_7(r)=a\mathcal{K}_a(r)-[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/r^2$及$h_7(r)=\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)$, 则$f_{11}(r)\equiv g_7(r)/h_7(r)$. 利用级数展开可得：

$$\begin{aligned} g_7(r) &= \frac{a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n!)^2}r^{2n} \\ &= \frac{a\pi}{2}r^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+n)(1-a+n)(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n+2)(n!)^2}r^{2n} \\ &= \frac{a\pi}{2}r^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^{2n}, \end{aligned}$$

及

$$h_7(r)=\frac{a\pi}{2}r^2\sum_{n=0}^{\infty}b_nr^{2n},$$

其中，

$$a_n=\frac{(a+n)(1-a+n)(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n+2)(n!)^2},b_n=\frac{(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n!)^2}.$$

因为对所有的$n=1,2,\cdots$, 有$b_n>0$, 且$a_n/b_n=(a+n)(1-a+n)/(n+2)$ 关于n严格单调上升。由引理2知：函数f_{11}在$(0,1)$上严格单调上升，且有$f_{11}(0^+)=a(1-a)/2$.

根据以上级数展开可得$f_{12}(r)\equiv g_8(r)/h_7(r)$, 其中，

$$\begin{aligned}g_8(r)=r'^2g_7(r)&=\frac{a\pi}{2}(1-r^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n!)^2}r^{2n}\\ &=\frac{a\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n!)^2}r^{2n}-\frac{a\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n!)^2}r^{2n+2}\\ &=\frac{a\pi}{2}r^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-a^2-n)(a,n)(1-a,n)}{(n+1)(n+2)(n!)^2}r^{2n}\\ &=\frac{a\pi}{2}r^2\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^{2n},\end{aligned}$$

其中，$c_n=(a-a^2-n)(a,n)(1-a,n)/[(n+1)(n+2)(n!)^2]$, 当$n\geq 1$时，$c_n<0$. 所以$g_8$严格单调下降。但$h_7$严格单调上升，故函数$f_{12}$在$(0,1)$上严格单调下降。且有极限$f_{12}(0^+)=a(1-a)/2$, $f_{12}(1)=0$. 证毕。

定理2.27. 对$c\in\mathbf{R}$. 定义函数$H_c(r)\equiv r'^c[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/r^2$. 则有：

(1) 函数H_c在$(0,1)$上严格单调上升当且仅当$c\leq 0$.

(2) 函数H_c在$(0,1)$上严格单调下降当且仅当$c\geq a(1-a)$.

(3) 当$0<c<a(1-a)$时，存在唯一的点$r_0\in(0,1)$, 使得函数H_c在$(0,r_0]$上严格单调上升，在$[r_0,1)$上严格单调下降。且当$a(1-a)\leq c\leq 2$时，函数H_c 是向上凸的。

证明：求导可得

$$\begin{aligned}H_c'(r)&=\frac{r'^{c-2}}{r}\left\{-c[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]+2r'^2\left[a\mathcal{K}_a(r)-\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}\right]\right\}\\ &=r'^{c-2}\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r}\{2f_{12}(r)-c\}\\ &=-rr'^{c-2}\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}\{c-2f_{12}(r)\},\end{aligned}\tag{2.37}$$

其中，函数f_{12}由定理2.26中定义。由(2.37)式有

$$H_c'(r)>0 \ \Leftrightarrow\ c\le 2\inf_{0<r<1}\{f_{12}(r)\}=0,$$
$$H_c'(r)<0 \ \Leftrightarrow\ c\ge 2\sup_{0<r<1}\{f_{12}(r)\}=a(1-a).$$

由此即得结论(1)和(2).

当$0<c<a(1-a)$时，由定理2.26可知函数$2f_{12}-c$从$(0,1)$到$(-c,a(1-a)-c)$上严格单调下降。因此，存在唯一的$r_0\in(0,1)$，使得在$(0,r_0)$上有$H_c'>0$，在$(r_0,1)$上$H_c'<0$.

又因为函数$r'^{c-2}[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/r^2$ 在$(0,1)$上是正的且严格单调上升当且仅当$c\le 2$；函数$c-2f_{12}$ 在$(0,1)$上是正的当且仅当$c\ge 2\sup\limits_{0<r<1}\{f_{12}(r)\}=a(1-a)$, 所以，当$a(1-a)\le c\le 2$时，函数$H_c'$单调下降。证毕。

2.3 广义椭圆积分依赖于参数a的性质

本节研究了广义椭圆积分依赖于参数 a 的一些分析性质，并获得了广义椭圆积分与完全椭圆积分的一些联系。

引理2.28. 设$n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $c\in\mathbf{R}$,$x\in(0,1/2]$,

(1) 令$f_n(x)\equiv[(x,n+1)(1-x,n+1)]/x^c$, 则对一切$n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, 函数$f_n$在$(0,1/2]$上严格单调上升当且仅当$c\le 0$，函数$f_n$ 在$(0,1/2]$上严格单调下降当且仅当$c\ge 1$。

(2) 函数$g_n(x)\equiv -x(-x,n+1)(x,n+1)/(1-x)^c$在$(0,1/2]$上严格单调上升当且仅当$c\ge -2$

(3) 定义函数$h_n(x)\equiv -(-x,n+1)(x,n+1)/x^c$，则对一切$n\in\mathbf{N}$, 函数$h_n$在$(0,1/2]$上严格单调下降当且仅当$c\ge 2$，$h_n$在$(0,1/2]$上严格单调上升当且仅当$c\le 1$。

证明：(1) 由于

$$f_n(x)=\Gamma(n+x+1)\Gamma(n+2-x)/[\Gamma(x)\Gamma(1-x)x^c],$$

根据公式

$$\psi(n+x)=\psi(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+x}, \tag{2.38}$$

对数求导得：

$$\begin{aligned}\frac{xf_n'(x)}{f_n(x)} &= x[\psi(n+x+1)-\psi(n+2-x)-\psi(x)+\psi(1-x)]-c\\ &= 1-c-x\left(\frac{1}{n+1-x}+2x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-x^2}\right)\\ &\equiv F_n(x).\end{aligned}$$

显然，F_n从$(0,1/2]$到$(-c,1-c]$上严格单调下降。据此即得结论(1)。

(2) 由于

$$g_n(x)=x^2\Gamma(n+1-x)\Gamma(n+1+x)/[\Gamma(x)\Gamma(1-x)(1-x)^c],$$

求导并利用(2.38)得：

$$\begin{aligned}\frac{(1-x)g_n'(x)}{g_n(x)} &= G_n(x)\equiv c-2+\frac{2}{x}+(1-x)[\psi(n+1+x)-\psi(x)+\psi(1-x)]\\ &= c-2+\frac{2}{x}+(1-x)\left(\frac{1}{x}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k^2-x^2}\right).\end{aligned}$$

易看出，G_n从$(0,1/2]$到$[2+c+\frac{1}{2n+1},\infty)$上严格单调下降。所以，对一切$n\in\mathbf{N}$及$x\in(0,1/2)$都有$G_n(x)>0$当且仅当$c\geq -2$.

(3) 显然，$h_n(x)$可写成

$$\begin{aligned}h_n(x) &= \Gamma(n+1-x)\Gamma(n+1+x)/[\Gamma(x)\Gamma(1-x)x^{c-1}]\\ &= (1-x^2)(2^2-x^2)\cdots(n^2-x^2)/x^{c-2}>0.\end{aligned}$$

对数求导得：

$$\begin{aligned}\frac{xh_n'(x)}{h_n(x)} &= H_n(x)\equiv x[\psi(n+1+x)-\psi(n+1-x)-\psi(x)+\psi(1-x)]+1-c\\ &= 2-c-2\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{k^2-x^2}.\end{aligned}$$

H_n从$(0,1/2]$到$[1-c+\frac{1}{2n+1},2-c)$上严格单调下降，由此立即可得结论(3)。证毕。

定理2.29. 对任意的$r\in(0,1)$, $c\in\mathbf{R}$, 设$0<a<b\leq 1/2$, 并定义$f(a)\equiv\mathcal{K}_a(r)/a^c$, $g(a)\equiv(1-a)\mathcal{E}_a(r)/a^c$, $h(a)\equiv\mathcal{E}_a(r)/(1-a)^c$. 则有：

(1) 若$c\leq 0$, 则$f(b)-f(a)$关于r^2的泰勒系数都是正的；若$c\geq 1$，则$f(b)-f(a)$关于r^2的泰勒系数都是负的。

(2) 若$-2\leq c\leq 0$, 则$g(b)-g(a)$关于r^2的泰勒系数都是正的。

(3) 若$c\geq 2$, 则$h(b)-h(a)$关于r^2的泰勒系数都是负的；若$c\leq 1$,则$h(b)-h(a)$关于r^2的泰勒系数都是正的。

证明：(1) 利用级数展开得：

$$f(b)-f(a)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(b,n)(1-b,n)}{b^c}-\frac{(a,n)(1-a,n)}{a^c}\right]\frac{r^{2n}}{(n!)^2}.$$

据此及引理2.28(1)便得结论(1)。

(2) 利用级数展开得：

$$g(b)-g(a)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(1-b)(b-1,n)(1-b,n)}{b^c}-\frac{(1-a)(a-1,n)(1-a,n)}{a^c}\right]\frac{r^{2n}}{(n!)^2}.$$

由此及引理2.28(2)便得结论(2)。

(3) 利用级数展开得：

$$h(b)-h(a)=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(b-1,n)(1-b,n)}{(1-b)^c}-\frac{(a-1,n)(1-a,n)}{(1-a)^c}\right]\frac{r^{2n}}{(n!)^2}.$$

由此及引理2.28(3)便得结论(2)。证毕。

定理2.30. 令$c\in \mathrm{R}$, 定义函数

$$F(a)\equiv\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{a^c}.$$

则当$c\leq 1$时，函数F在$(0,1/2]$上严格单调上升；当$c\geq 2$时，函数F在$(0,1/2]$上严格单调下降。

证明：求导得

$$\frac{dF(a)}{dr}=2r\frac{\mathcal{K}_a(r)}{a^{c-1}}.$$

由定理2.29(1)得：当时$c\leq 1$，函数$\mathcal{K}_a(r)/a^{c-1}$ 关于a严格单调上升；当$c\geq 2$时，$a\mapsto a^{1-c}\mathcal{K}_a(r)$ 在$(0,1/2)$上严格单调下降。所以，若$0<a<b\leq 1/2$, 且$c\leq 1$, 则

$$\begin{aligned}&\int_0^r\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathcal{E}_a(t)-t'^2\mathcal{K}_a(t)}{a^c}\right]dt=\int_0^r 2t\frac{\mathcal{K}_a(t)}{a^{c-1}}dt\\ <&\int_0^r 2t\frac{\mathcal{K}_b(t)}{b^{c-1}}dt=\int_0^r\frac{d}{dt}\left[\frac{\mathcal{E}_b(t)-t'^2\mathcal{K}_b(t)}{b^c}\right]dt.\end{aligned}$$

于是有

$$\frac{\mathcal{E}_a(t)-t'^2\mathcal{K}_a(t)}{a^c}<\frac{\mathcal{E}_b(t)-t'^2\mathcal{K}_b(t)}{b^c};$$

若$0 < a < b \le 1/2$且$c \ge 2$, 则

$$\int_0^r \frac{d}{dt}\left[\frac{\mathcal{E}_a(t) - t'^2\mathcal{K}_a(t)}{a^c}\right]dt = \int_0^r 2t\frac{\mathcal{K}_a(t)}{a^{c-1}}dt$$
$$> \int_0^r 2t\frac{\mathcal{K}_b(t)}{b^{c-1}}dt = \int_0^r \frac{d}{dt}\left[\frac{\mathcal{E}_b(t) - t'^2\mathcal{K}_b(t)}{b^c}\right]dt.$$

于是有

$$\frac{\mathcal{E}_a(t) - t'^2\mathcal{K}_a(t)}{a^c} > \frac{\mathcal{E}_b(t) - t'^2\mathcal{K}_b(t)}{b^c}.$$

证毕。

定理2.31. 令$c \in \mathbf{R}$, 定义函数

$$G(a) \equiv \frac{\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)}{a^c}, \quad H(a) \equiv \frac{\mathcal{K}_a(r) - \mathcal{E}_a(r)}{(1-a)^c}.$$

则当$-2 \le c \le 0$时，函数G从$(0, 1/2]$到$(0, 2^c(\mathcal{K}(r) - \mathcal{E}(r))]$上严格单调上升；当$c \ge 2$时，函数$H$从$(0, 1/2]$到$[2^c[\mathcal{K}(r) - \mathcal{E}(r)], \infty)$上严格单调下降；当$c \le 2$时，函数$H$从$(0, 1/2]$到$(\pi r^2/2, 2^c[\mathcal{K}(r) - \mathcal{E}(r)]]$上严格单调上升。

证明：求导得

$$\frac{dG(a)}{dr} = 2\frac{r}{r'^2}\frac{(1-a)\mathcal{E}_a(r)}{a^c}, \quad \frac{dH(a)}{dr} = 2\frac{r}{r'^2}\frac{\mathcal{E}_a(r)}{(1-a)^{c-1}}.$$

由定理2.29(2)、(3)可得，当$0 < a < b \le 1/2$时，若$-2 \le c \le 0$, 则有

$$\int_0^r \frac{d}{dt}\left[\frac{\mathcal{K}_a(t) - \mathcal{E}_a(t)}{a^c}\right]dt = \int_0^r 2\frac{t}{t'^2}\frac{(1-a)\mathcal{E}_a(t)}{a^c}dt$$
$$< \int_0^r 2\frac{t}{t'^2}\frac{(1-b)\mathcal{E}_b(t)}{b^c}dt = \int_0^r \frac{d}{dt}\left[\frac{\mathcal{K}_b(t) - \mathcal{E}_b(t)}{b^c}\right]dt.$$

因此，

$$\frac{\mathcal{K}_a(t) - \mathcal{E}_a(t)}{a^c} < \frac{\mathcal{K}_b(t) - \mathcal{E}_b(t)}{b^c};$$

若$c \ge 2$, 则有

$$\int_0^r \frac{d}{dt}\left[\frac{\mathcal{K}_a(t) - \mathcal{E}_a(t)}{(1-a)^c}\right]dt = \int_0^r 2\frac{t}{t'^2}\frac{\mathcal{E}_a(t)}{(1-a)^c}dt$$
$$> \int_0^r 2\frac{t}{t'^2}\frac{\mathcal{E}_a(t)}{(1-a)^c}dt = \int_0^r \frac{d}{dt}\left[\frac{\mathcal{K}_b(t) - \mathcal{E}_b(t)}{(1-b)^c}\right]dt.$$

于是，

$$\frac{\mathcal{K}_a(t) - \mathcal{E}_a(t)}{(1-a)^c} > \frac{\mathcal{K}_b(t) - \mathcal{E}_b(t)}{(1-b)^c}.$$

若$c \le 2$, 同理可证H的单调性。各极限可以从[24,推论7.3]得到。证毕。

第三章　函数$m_a(r)$和$\mu_a(r)$的性质及其应用

本章主要研究广义 Grötzsch 环函数 $\mu_a(r)$ 和广义 Hübner 上界函数 $m_a(r)$ 的一些分析性质，获得函数 $\mu_a(r)$ 与 $m_a(r)$ 的一些函数不等式，并将其应用到广义 Ramanujan 模方程解的界的估计上。

3.1　主要结果

下面的结果中，当$a=1/2$时，定理3.1退化为[37,引理7]。

定理3.1. 函数

$$f_1(r) \equiv \mu_a(r) + \frac{\pi^2 \log r}{4r'^2 \mathcal{K}_a(r)^2}$$

从$(0,1)$到$(0,R(a)/2)$上严格单调下降且是向上凸的。并且，对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$\frac{\log(1/r)}{r'} + \frac{(1-r)R(a)}{2} < \frac{\pi^2\log(1/r)}{4r'^2\mathcal{K}_a(r)^2} + \frac{(1-r)R(a)}{2} < \mu_a(r)$$
$$< \frac{\pi^2\log(1/r)}{4r'^2\mathcal{K}_a(r)^2} + \frac{R(a)}{2} < \frac{\log(1/r)}{r'^2} + \frac{R(a)}{2}. \quad (3.1)$$

定理3.2. 函数

$$f_2(r) \equiv \{R(a)/2 - [\mu_a(r) + \log r]\}/[\mathcal{K}_a(r) - \pi/2]$$

从$(0,1)$到$(0,(1-2a+2a^2)/[a(1-a)\pi])$上严格单调下降。并且，对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$R(a)/2 - (1-2a+2a^2)[\mathcal{K}_a(r)-\pi/2]/[a(1-a)\pi] < \mu_a(r) + \log r < R(a)/2. \quad (3.2)$$

定理3.3. 函数

$$f_3(r) \equiv [\mu_a(r) + \log r]/\{\mathcal{E}_a(r) - \sin(a\pi)/[2(1-a)]\}$$

从$(0,1)$到$([(1-a)R(a)]/[(1-a)\pi - \sin(a\pi)],\infty)$上严格单调上升。特别地，对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$\mu_a(r) + \log r > \{\mathcal{E}_a(r) - \sin(a\pi)/[2(1-a)]\}[(1-a)R(a)]/[(1-a)\pi - \sin(a\pi)]. \quad (3.3)$$

定理3.4. 函数

$$f_4(r) \equiv \{R(a)/2 - [\mu_a(r) + \log r]\}/[\pi/2 - \mathcal{E}_a(r)]$$

从(0, 1)到$([1-2a(1-a)]/[(1-a)\pi], (1-a)R(a)/[(1-a)\pi-\sin(a\pi)])$上严格单调上升。并且，对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$\frac{R(a)}{2}-\left[\frac{\pi}{2}-\mathcal{E}_a(r)\right]\frac{(1-a)R(a)}{(1-a)\pi-\sin(a\pi)}<\mu_a(r)+\log r$$
$$<\frac{R(a)}{2}-\left[\frac{\pi}{2}-\mathcal{E}_a(r)\right]\frac{1-2a(1-a)}{(1-a)\pi}. \tag{3.4}$$

定理3.5. 函数

$$f_5(r)\equiv\frac{m_a(r)+\log r}{(\pi/2)-\mathcal{E}'_a(r)}$$

从(0, 1)到$((1-a)R(a)/[(1-a)\pi-\sin(a\pi)], \infty)$上严格单调上升。特别地，对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$m_a(r)+\log r>[(1-a)\pi-\sin(a\pi)][(\pi/2)-\mathcal{E}'_a(r)]. \tag{3.5}$$

定理3.6. 函数

$$f_6(r)\equiv\frac{\frac{R(a)}{2}-[m_a(r)+\log r]}{\mathcal{E}'_a(r)-\frac{\sin(a\pi)}{2(1-a)}}$$

从(0, 1)到$([(1-a)^2+a^2]/[(1-a)\sin(a\pi)], (1-a)R(a)/[(1-a)\pi-\sin(a\pi)])$上严格单调上升。特别地，对任意的$r\in(0,1)$, 成立不等式

$$\frac{R(a)}{2}-\left[\mathcal{E}'_a(r)-\frac{\sin(a\pi)}{2(1-a)}\right]\frac{(1-a)R(a)}{(1-a)\pi-\sin(a\pi)}<m_a(r)+\log r$$
$$<\frac{R(a)}{2}-\left[\mathcal{E}'_a(r)-\frac{\sin(a\pi)}{2(1-a)}\right]\frac{(1-a)^2+a^2}{(1-a)\sin(a\pi)}. \tag{3.6}$$

3.2 主要结果的证明

定理3.1的证明： 求导得

$$\begin{aligned}
f'_1(r)&=\frac{-\pi^2}{4rr'^2\mathcal{K}_a(r)^2}+\frac{\pi^2}{4r'^4\mathcal{K}_a(r)^4}\left\{\frac{r'^2\mathcal{K}_a(r)^2}{r}+2r\mathcal{K}_a(r)^2\log r\right.\\
&\quad\left.-4(1-a)\mathcal{K}_a(r)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r}\log r\right\}\\
&=\frac{\pi^2}{2}\left\{\frac{r\mathcal{K}_a(r)^2\log r}{r'^4\mathcal{K}_a(r)^4}-2(1-a)\frac{\mathcal{K}_a(r)[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]\log r}{rr'^4\mathcal{K}_a(r)^4}\right\}\\
&=-\frac{\pi^2}{2}\frac{r\log(1/r)}{r'^2}\left\{\frac{1}{r'^2\mathcal{K}_a(r)^2}-2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2r'^2\mathcal{K}_a(r)^3}\right\}\\
&=-\frac{\pi^2}{2}\frac{r\log(1/r)}{r'^2}\frac{1}{r'^2\mathcal{K}_a(r)^2}\left\{1-2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2\mathcal{K}_a(r)}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

由[24,引理5.4(1)和引理5.2(4)]可知函数$r \mapsto r'\mathcal{K}_a(r)$从$(0,1)$到$(0,\pi/2)$上严格单调下降，函数$r \mapsto 1-2(1-a)[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)]/[r^2\mathcal{K}_a(r)]$ 从$(0,1)$到$(a^2+(1-a)^2,1)$上严格单调上升。根据单调性l'Hôpital法则可知函数$r\log(1/r)/r'^2$在$(0,1)$上严格单调上升。因此由(3.7)式可得$-f_1'(r)$为三个正的且在$(0,1)$上严格单调上升函数的乘积，故函数f_1在$(0,1)$上严格单调下降且是向上凸的。显然，$f_1(1^-)=0$. 应用l'Hôspital法则可得：

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\pi^2}{4}-r'^2\mathcal{K}_a(r)^2\right]=\frac{[a^2+(1-a)^2]\pi^2}{4},$$

所以

$$f_1(0^+)=\lim_{r\to 0}\left\{[\mu_a(r)+\log r]+\frac{\pi^2/4-r'^2\mathcal{K}_a(r)^2}{r^2}\frac{r^2\log r}{r'^2\mathcal{K}_a(r)^2}\right\}=\frac{R(a)}{2}.$$

(3.1)式的第二、第三及第四个不等式显然成立。由[24,引理5.4(1)]可知(3.1)中的第一个不等式成立。证毕。

定理3.2的证明：令

$$t_1(r)\equiv R(a)/2-[\mu_a(r)+\log r], t_2(r)\equiv \mathcal{K}_a(r)-\pi/2,$$

$$t_3(r)\equiv \pi^2/[4\mathcal{K}_a(r)^2]-r'^2, t_4(r)\equiv 2(1-a)[\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)].$$

则有$t_1(0^+)=t_2(0^+)=t_3(0^+)=t_4(0^+)=0$, 且

$$f_2(r)=\frac{t_1(r)}{t_2(r)}, \frac{t_1'(r)}{t_2'(r)}=\frac{t_3(r)}{t_4(r)}, \tag{3.8}$$

经求导得

$$\frac{t_3'(r)}{t_4'(r)}=\frac{1}{2a(1-a)\mathcal{K}_a(r)}-\frac{\pi^2}{4a}\frac{1}{r'^2\mathcal{K}_a(r)^4}\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2}\equiv t_5(r). \tag{3.9}$$

由[24,引理5.2(1)、引理5.4(1)]和$\mathcal{K}_a(r)$的单调性可知：函数t_5在$(0,1)$上严格单调下降。由(3.8)-(3.9)式和单调性l'Hôpital法则可知：f_2在$(0,1)$上严格单调下降。且有$f_2(1^-)=0$, $f_2(0^+)=(1-2a+2a^2)/[a(1-a)\pi]$. 不等式(3.2)为显然。证毕。

定理3.3的证明：令

$$h_1(r)\equiv \mu_a(r)+\log r,\quad h_2(r)\equiv \mathcal{E}_a(r)-\sin(a\pi)/[2(1-a)],$$

$$h_3(r)\equiv \frac{\pi^2}{4r'^2\mathcal{K}_a(r)^2}-1,\quad h_4(r)\equiv 2(1-a)[\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)],$$

则有$h_1(1^-)=h_2(1)=0$, $h_3(0)=h_4(0)=0$,及

$$f_3(r)=\frac{h_1(r)}{h_2(r)},\ \frac{h_1'(r)}{h_2'(r)}=\frac{h_3(r)}{h_4(r)}. \tag{3.10}$$

求导得

$$\frac{h_3'(r)}{h_4'(r)}=\frac{\pi^2}{8(1-a)^2}\frac{1}{r'^2\mathcal{K}_a(r)^2\mathcal{E}_a(r)}\left[1-2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2\mathcal{K}_a(r)}\right]. \tag{3.11}$$

由[24, 引理5.2(4)，引理5.4(1)]及$\mathcal{E}_a(r)$的单调性可知：$h_3'(r)/h_4'(r)$为两个正的严格单调上升函数的乘积。所以函数$h_3'(r)/h_4'(r)$在$(0,1)$上严格单调上升。由(3.10)-(3.11)式和单调性l'Hôpital法则可知：函数f_3在$(0,1)$上严格单调上升。极限$f_3(0^+)=[(1-a)R(a)]/[(1-a)\pi-\sin(a\pi)]$和$f_3(1^-)=\infty$以及不等式(3.3)为显然。证毕。

定理3.4的证明：令$h_3(r)$、$h_4(r)$如同定理3.3中定义。

$$h_5(r)\equiv R(a)/2-[\mu_a(r)+\log r],\quad h_6(r)\equiv\pi/2-\mathcal{E}_a(r),$$

则有$h_5(0)=h_6(0)=0$, $h_3(0)=h_4(0)=0$,及

$$f_4(r)=\frac{h_5(r)}{h_6(r)},\quad \frac{h_5'(r)}{h_6'(r)}=\frac{h_3(r)}{h_4(r)}. \tag{3.12}$$

求导得

$$\frac{h_3'(r)}{h_4'(r)}=\frac{\pi^2}{8(1-a)^2}\frac{1}{r'^2\mathcal{K}_a(r)^2\mathcal{E}_a(r)}\left[1-2(1-a)\frac{\mathcal{E}_a(r)-r'^2\mathcal{K}_a(r)}{r^2\mathcal{K}_a(r)}\right]. \tag{3.13}$$

故根据定理3.3的证明和(3.12)-(3.13)式以及单调性l'Hôpital法则可得函数f_4的单调性。显然，$f_4(1)=(1-a)R(a)/[(1-a)\pi-\sin(a\pi)]$, 由l'Hôpital法则可得：$f_4(0^+)=[1-2a(1-a)]/[(1-a)\pi]$. 不等式(3.4)为显然。证毕。

定理3.5的证明：令

$$g_1(r)\equiv m_a(r)+\log r,\quad g_2(r)\equiv(\pi/2)-\mathcal{E}_a'(r),$$

则$g_1(1^-)=g_2(1^-)=0$, 且$f_5(r)=g_1(r)/g_2(r)$. 根据[24,定理4.1(9)]及[24,(1.11)]，经求导得:

$$\frac{g_1'(r)}{g_2'(r)}=\frac{2}{\pi(1-a)\sin(a\pi)}\mathcal{K}_a(r)\frac{r'^2\mathcal{K}_a'(r)}{\mathcal{K}_a'(r)-\mathcal{E}_a'(r)}\left[2(1-a)\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^2\mathcal{K}_a(r)}+(2a-1)\right]. \tag{3.14}$$

根据[24,引理5.2(3)]和(3.14)式，$g_1'(r)/g_2'(r)$在$(0,1)$上严格单调上升。故由单调性l'Hôpital法则得到函数f_5的单调性。显然，$f_5(0^+)=(1-a)R(a)/[(1-a)\pi-\sin(a\pi)]$, 由(3.14)得：$f_5(1^-)=\infty$. 不等式(3.5)为显然。证毕。

定理3.6的证明：令

$$g_3(r)\equiv\frac{R(a)}{2}-[m_a(r)+\log r],\quad g_4(r)\equiv\mathcal{E}_a'(r)-\frac{\sin(a\pi)}{2(1-a)},$$

则$g_3(0)=g_4(0)=0$, 且$f_6(r)=g_3(r)/g_4(r)$. 根据[24,定理4.1(9)]及[24,(1.11)]，经求导得：

$$\frac{g_3'(r)}{g_4'(r)}=\frac{2\mathcal{K}_a(r)}{\pi(1-a)\sin(a\pi)}\frac{r'^2\mathcal{K}_a'(r)}{\mathcal{K}_a'(r)-\mathcal{E}_a'(r)}\left[2(1-a)\frac{\mathcal{K}_a(r)-\mathcal{E}_a(r)}{r^2\mathcal{K}_a(r)}+(2a-1)\right]=\frac{g_1'(r)}{g_2'(r)}. \tag{3.15}$$

其中，$g_1'(r)/g_2'(r)$如同(3.14)中定义。故由(3.14)-(3.15)式及单调性l'Hôpital法则得到函数f_6的单调性。显然，$f_6(1)=(1-a)R(a)/[(1-a)\pi-\sin(a\pi)]$, 由(3.15)式和l'Hôpital法则得：$f_6(0^+)=[(1-a)^2+a^2]/[(1-a)\sin(a\pi)]$. 不等式(3.6)为显然。证毕。

3.3 在广义Ramanujan模方程中的应用

定理3.7. 对任意的$a\in(0,1/2]$, $r\in(0,1)$, $K\in(1,\infty)$, 有

$$\varphi_{1/K}(a,r)>r^K\exp\{(1-K)[R(a)/2+(r/r')^2\log(1/r)]\}.$$

证明：由[38,定理3.77]和定理3.1即得结果。证毕。

定理3.8. 设$a\in(0,1/2]$, $t=[1-2a(1-a)]/[(1-a)\pi]$, 对任意的$r\in(0,1)$, $K\in(1,\infty)$, 有

$$\varphi_{1/K}(a,r)>r^K\exp\left\{(1-K)\left[\frac{R(a)}{2}-t\left(\frac{\pi}{2}-\mathcal{E}_a(r)\right)\right]\right\}$$

证明：由[38,定理3.77(3)]和定理3.4即得结果。证毕。

注： 定理3.8揭示了广义Ramanujan模方程的解$\varphi_{1/K}(a,r)$的界的估计对第二类广义椭圆积分$\mathcal{E}_a(r)$的依赖性，因此在第二章中所获得的$\mathcal{E}_a(r)$的上界均可用来估计广义Ramanujan模方程的解$\varphi_{1/K}(a,r)$的界，得到出不同的初等函数表示的$\varphi_{1/K}(a,r)$的精确界。

定理3.9. 设$a\in(0,1/2]$, 对任意的$r\in(0,1)$, $K\in(1,\infty)$, 有

$$\varphi_{1/K}(a,r)<r^K\exp\{(1-K)[(1-a)\pi-\sin(a\pi)][(\pi/2)-\mathcal{E}_a'(r)]\}.$$

证明：由[38,定理3.77]及定理3.5即得结果。证毕。

注： 定理3.9利用定理3.5建立的广义Hübner上界函数$m_a(r)$与第二类广义椭圆积分$\mathcal{E}_a(r)$的关系，给出广义Hersch-pfluger偏差函数$\varphi_{1/K}(a,r)$的界的估计对$\mathcal{E}_a(r)$的依赖关系，因此在第二章中获得的$\mathcal{E}_a(r)$的上界均可用来估计偏差函数$\varphi_{1/K}(a,r)$的界，获得不同形式下的$\varphi_{1/K}(a,r)$的精确界。

定理3.10. 设$a \in (0,1/2]$, $b = [(1-a)^2+a^2]/[(1-a)\sin(a\pi)]$, $c = [(1-a)R(a)]/[(1-a)\pi-\sin(a\pi)]$, 对任意的$r \in (0,1)$,$K \in (1,\infty)$, 有

$$\varphi_K(a,r) < r^{1/K}\exp\left\{(1-1/K)\left[\frac{R(a)}{2} - b\left(\mathcal{E}_a'(r) - \frac{\sin(a\pi)}{2(1-a)}\right)\right]\right\}$$

和

$$\varphi_{1/K}(a,r) < r^{K}\exp\left\{(1-K)\left[\frac{R(a)}{2} - c\left(\mathcal{E}_a'(r) - \frac{\sin(a\pi)}{2(1-a)}\right)\right]\right\}.$$

证明： 由[38,定理3.77(3)]及定理3.6即得结论。证毕。

注：定理3.10建立了广义Ramanujan模方程的解$\varphi_{1/K}(a,r)$与$\varphi_K(a,r)$的界的估计对第二类广义椭圆积分$\mathcal{E}_a(r)$的依赖关系，因此在第二章中所获得的$\mathcal{E}_a(r)$的上下界均可用来估计广义Ramanujan模方程的解$\varphi_{1/K}(a,r)$与$\varphi_K(a,r)$的界，获得不同形式下的精确界。

第四章　广义Ramanujan模方程的若干性质

本章主要研究广义Ramanujan模方程的解$\varphi_K(a,r)$及由其定义的广义Agard η-偏差函数$\eta_K(a,t)$和广义线性偏差函数$\lambda(a,K)$的一些分析性质。

4.1　主要结果

下面的结果中，当$a=1/2$时，定理4.1退化为[37,引理6]；定理4.2、4.4、4.6、4.7、4.8和推论4.3、4.5分别退化为[60,定理3.1、1.11、3.21、4.5、4.18和推论3.7、3.17]。

定理4.1. 对任意的$r\in(0,1)$,关于K的函数

$$s=s(K)=\varphi_K^a(r^K),$$

从$[1,\infty)$到$[r,\mu_a^{-1}(\log(1/r)))$上严格单调上升。

定理4.2. (1) 令$b=4\mathcal{K}_a(1/\sqrt{2})^2/[\pi\sin(a\pi)]$. 函数$f(K)\equiv(K-1)^2\log\lambda(a,K)$从$(1,\infty)$到$(\pi/\sin(a\pi),b)$上严格单调下降且是向下凸的。

(2) 令$c=b/2$, 则函数$g(K)\equiv\log\{\lambda(a,K)\exp[c(-K+1/K)]\}/(K-1)$从$(1,\infty)$到$(0,\pi/\sin(a\pi)-c)$上严格单调上升。

推论4.3. 设$K>1$, 则有

$$\max\{\exp[(K-1)\pi/\sin(a\pi)],\exp[c(K+1/K)]\}<\lambda(a,K)$$
$$<\min\{\exp[b(K-1)],\exp[(K-1)(\pi/\sin(a\pi)+c/K)]\},\tag{4.1}$$

其中，b、c如同定理4.2中定义，且有

$$\lim_{K\to1}\lambda(a,K)^{1/(K-1)}=\exp(b),\ \lim_{K\to\infty}\lambda(a,K)^{1/(K-1)}=\exp(\pi/\sin(a\pi)).$$

定理4.4. 令$b=4\mathcal{K}_a(1/\sqrt{2})^2/[\pi\sin(a\pi)]$,$c=b\{3(b-1)^2-[1-a(1-a)]b^2\}/12$. 则函数

$$f(K)\equiv(K-1)^{-3}\left[\lambda(a,K)-1-b(K-1)-\frac{1}{2}b(b-1)(K-1)^2\right]$$

从$(1,\infty)$到(c,∞)上严格单调上升。特别地，若$K>1$, 则有

$$\lambda(a,K)>1+b(K-1)+\frac{1}{2}b(b-1)(K-1)^2+c(K-1)^3\tag{4.2}$$

若$K \in (1,2)$, 则

$$1+b(K-1)+\frac{1}{2}b(b-1)(K-1)^2+c(K-1)^3<\lambda(a,K)$$
$$<1+b(K-1)+\frac{1}{2}b(b-1)(K-1)^2+c_1(K-1)^3 \tag{4.3}$$

其中，$c_1=\lambda(a,2)-1-b-(1/2)b(b-1)$.

推论4.5. (1) 设$K\to 1, b=4\mathcal{K}_a(1/\sqrt{2})^2/[\pi\sin(a\pi)]$, 则有

$$\lambda(a,K)=1+b(K-1)+\frac{1}{2}b(b-1)(K-1)^2+o((K-1)^3)$$

(2) 令$\delta>0$为任意实数，c_1由定理4.4中定义，$d=\frac{1}{2}b(b-1)$, 则对任意的$1<K\le K_0\equiv 1+(\sqrt{d^2-4c_1\delta}-d)/(2c_1)$, 有

$$\lambda(a,K)<1+(b+\delta)(K-1). \tag{4.4}$$

特别地，对$1<K\le 1+(\sqrt{d^2-4c_1\delta}-d)/(2c_1)$, 有

$$\lambda(a,K)<1+5(K-1). \tag{4.5}$$

定理4.6. 对任意的$K>1$, 成立:

$$\frac{\exp[\pi K/\sin(a\pi)]}{\exp(R(a))}-\frac{1}{2}+c_1(K)\exp\{R(a)-[\pi K/\sin(a\pi)]\}<\lambda(a,K)$$
$$<\frac{1}{16}\exp[-\pi K/\sin(a\pi)]-\frac{1}{2}+c_2(K)\exp[-\pi K/\sin(a\pi)]. \tag{4.6}$$

其中，

$$c_1(K)=\frac{1}{64}+\frac{1}{2\exp\{2[R(a)-\pi K/\sin(a\pi)]\}+16},$$
$$c_2(K)=\frac{1}{16}\left(1+4\frac{5\exp\left(-\frac{4\pi K}{\sin(a\pi)}\right)+14\exp\left(-\frac{2\pi K}{\sin(a\pi)}\right)+5}{\exp\left(-\frac{6\pi K}{\sin(a\pi)}\right)+7\exp\left(-\frac{4\pi K}{\sin(a\pi)}\right)+7\exp\left(-\frac{2\pi K}{\sin(a\pi)}\right)+1}\right)<\frac{21}{16}.$$

定理4.7. 对任意固定的$t\in(0,\infty)$, 函数$F(K)\equiv\eta_K(a,t)+1$关于K在$(0,\infty)$上是对数向下凸函数，函数$\eta_K(a,t)$是对数向上凸函数。特别地，对任意的$t,K,L\in(0,\infty)$和满足$p+q=1$的$p,q\in(0,1)$, 有

$$\eta_K(a,t)^p\eta_L(a,t)^q<\eta_{pK+qL}(a,t)<[\eta_K(a,t)+1]^p[\eta_L(a,t)+1]^q-1. \tag{4.7}$$

定理4.8. (1) 对任意的$t\in(0,\infty)$, 函数

$$f(K)\equiv\exp[R(a)/K]\eta_K(a,t)/[t^{1/K}(1+t)^{K-1/K}]$$

从$[1,\infty)$到$[\exp[R(a)],\infty)$上严格单调上升且是向下凸的。特别地，对任意的$t\in(0,\infty)$及$K>1$, 有

$$\eta_K(a,t)\geq\exp[(1-1/K)R(a)]t^{1/K}(1+t)^{K-1/K}, \tag{4.8}$$

对任意的$t\in(0,\infty)$ 及$K\in(1,2)$, 有

$$\begin{aligned}\exp[(1-1/K)R(a)]&<\frac{\eta_K(a,t)}{t^{1/K}(1+t)^{K-1/K}}\\&<[(a^*-1)(K-1)+1][\exp(1-1/K)R(a)],\end{aligned} \tag{4.9}$$

其中，$a^*=\exp[-R(a)/2]\frac{r'^4\varphi_2(a,r)^2}{r[1-\varphi_2(a,r)^2]}$.

(2) 设$t\in(0,\infty)$, 令$r=\sqrt{t/(1+t)}$,$A=A(r)=r'\exp(\mu_a(r'))$及$B=B(r)=r\exp\{2\mathcal{K}_a(r)\mathcal{K}_a'(r)/[\pi\sin(a\pi)]-\mu_a(r)\}$, 则函数

$$g(K)\equiv A^{-K}B^{1/K}\left[\frac{\eta_K(a,t)}{t^{1/K}(1+t)^{K-1/K}}\right]^{1/2}$$

从$[1,\infty)$到$(1/4,B/A]$上严格单调下降。特别地，对任意的$t\in(0,\infty)$和$K\in(1,\infty)$, 成立不等式

$$\exp[-R(a)]A^{2K}B^{-2/K}<\frac{\eta_K(a,t)}{t^{1/K}(1+t)^{K-1/K}}<A^{2(K-1)}B^{2(1-1/K)}. \tag{4.10}$$

4.2 主要结果的证明

定理4.1的证明：因为$\mu_a(s)=\mu_a(r^K)/K$, 求导可得:

$$\frac{\pi^2}{4ss'^2\mathcal{K}_a(s)^2}\frac{ds}{dK}=\frac{\pi\mathcal{K}_a'(r^K)}{2\sin(a\pi)K^2\mathcal{K}_a(r^K)}+\frac{\pi^2r^K\log r}{4Kr^K(1-r^{2K})\mathcal{K}_a(r^K)^2},$$

$$\frac{ds}{dK}=\frac{ss'^2\mathcal{K}_a(s)^2}{(1-r^{2K})K^2\mathcal{K}_a(r^K)^2}\left\{m_a(r^K)+\log r^K\right\}.$$

故根据[24,Th5.5(3)]得到函数$s(K)$的单调性。

显然，$s(1)=r$. 应用l'Hôpital法则可求得

$$\lim_{K\to\infty}s(K)=\lim_{K\to\infty}\mu_a^{-1}(\mu_a(s))=\mu_a^{-1}(\lim_{K\to\infty}\mu_a(r^K)/K)=\mu_a^{-1}(\log(1/r)).$$

证毕。

定理4.2的证明：令$r=\mu_a^{-1}(\pi/[2K\sin(a\pi)])$. 则根据(1.53)式及[38,定理4.7], $\lambda(a,K)=(r/r')^2$. 求导得:

$$\frac{dr}{dK}=\frac{2rr'^2}{\pi\sin(a\pi)}\left(\frac{\mathcal{K}_a(r)}{K}\right)^2=\frac{2}{\pi\sin(a\pi)}rr'^2\mathcal{K}_a'(r)^2, \tag{4.11}$$

$$\frac{d\lambda(a,K)}{dK}=\frac{d\lambda(a,K)}{dr}\frac{dr}{dK}=\frac{4}{\pi\sin(a\pi)}\lambda(a,K)\mathcal{K}_a'(r)^2. \tag{4.12}$$

据(4.11)、(4.12)式，求导得

$$f'(K)=\frac{4(K-1)\mathcal{K}_a'(r)^2/[\pi\sin(a\pi)]-\log\lambda(a,K)}{(K-1)^2}=\frac{f_1(K)}{f_2(K)}. \tag{4.13}$$

其中，$f_1(K)=4(K-1)\mathcal{K}_a'(r)^2/[\pi\sin(a\pi)]-\log\lambda(a,K)$, $f_2(K)=(K-1)^2$,

$$f_1'(K)=-2(1-a)\left(\frac{4}{\pi\sin(a\pi)}\right)^2(K-1)\mathcal{K}_a'(r)^3[\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)]<0$$

及

$$\frac{f_1'(K)}{f_2'(K)}=-(1-a)\left(\frac{4}{\pi\sin(a\pi)}\right)^2\mathcal{K}_a'(r)^3[\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)]\equiv f_3(K). \tag{4.14}$$

由(4.14)及$f_1(1)=0$知：函数f在$(1,\infty)$上严格单调下降。

因为函数f_3关于r在$(0,1)$上严格单调上升，所以$f_1'(K)/f_2'(K)$关于K在$(1,\infty)$上严格单调上升。根据单调性l'Hôpital法则，函数f'在$(1,\infty)$上严格单调上升。故f是向下凸的。

用l'Hôpital法则可得：

$$\lim_{K\to1}f(K)=4\mathcal{K}_a(1/\sqrt{2})^2/[\pi\sin(a\pi)],\ \lim_{K\to\infty}f(K)=\pi/\sin(a\pi).$$

(2) 令$g_1(K)=\log\{\lambda(a,K)\exp[c(-K+1/K)]\}$, $g_2(K)=(K-1)$, 则$g_1(1)=g_2(1)=0$. 由(4.11)、(4.12)及$K=\mathcal{K}_a(r)/\mathcal{K}_a'(r)$, 经求导得

$$g_1'(K)/g_2'(K)=4\mathcal{K}_a'(r)^2/[\pi\sin(a\pi)]-c(1+1/K^2)\equiv g_3(K) \tag{4.15}$$

及

$$g_3'(K)=-\frac{32(1-a)}{[\pi\sin(a\pi)]^2}\mathcal{K}_a'(r)^3[\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)]+\frac{2c}{K^3},$$

$$\frac{K^3}{2}g_3'(K)=c-\frac{16(1-a)}{[\pi\sin(a\pi)]^2}r'^2\mathcal{K}_a(r)^3\frac{\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)}{r'^2}\equiv g_4(K). \tag{4.16}$$

由[24,引理5.2(1)]和[24,引理5.4(1)]可知：函数g_4在$(1,\infty)$上严格单调上升。又$r\in(1/\sqrt{2},1)$, 由广义Lcgendrc关系可得：$g_4(1/\sqrt{2})=0$.

由(4.16)可知：函数g_3在$(1,\infty)$上严格单调上升。故由(4.15)可单调性l'Hôpital法则获得函数g的单调性。

由l'Hôpital法则易得：

$$\lim_{K\to1}g(K)=\lim_{K\to1}g_3(K)=0,\ \lim_{K\to\infty}g(K)=\lim_{K\to\infty}g_3(K)=\pi/\sin(a\pi)-c.$$

证毕。

定理4.4的证明：令$r=\mu_a^{-1}(\pi/[2K\sin(a\pi)])$. 则(4.11)和(4.12)成立。求导得

$$\frac{d\mathcal{K}_a'(r)}{dK}=-\frac{4(1-a)}{\pi\sin(a\pi)}\mathcal{K}_a'(r)^2[\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)], \tag{4.17}$$

$$\lambda''(a,K)=\frac{4\lambda'(a,K)}{\pi\sin(a\pi)}\mathcal{K}_a'(r)\{\mathcal{K}_a'(r)-2(1-a)[\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)]\}, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\lambda'''(a,K)=&\frac{6\lambda''(a,K)}{\pi\sin(a\pi)}\mathcal{K}_a'(r)\{\mathcal{K}_a'(r)-2(1-a)[\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)]\}\\&-\frac{8\lambda'(a,K)}{[\pi\sin(a\pi)]^2}[1-4a(1-a)r^2r'^2]\mathcal{K}_a'(r)^4.\end{aligned} \tag{4.19}$$

由广义Legendre关系[26]可得

$$\mathcal{K}_a(1/\sqrt{2})[\mathcal{E}_a(1/\sqrt{2})-(1/2)\mathcal{K}_a(1/\sqrt{2})]=\frac{\pi\sin(a\pi)}{8(1-a)}. \tag{4.20}$$

由(4.11)、(4.12)、(4.17)-(4.20)式得

$$\lambda'(a,1)=b,\lambda''(a,1)=b(b-1),\lambda'''(a,1)=6c. \tag{4.21}$$

现令$g(K)=\lambda(a,K)-1-b(K-1)-\frac{1}{2}b(b-1)(K-1)^2$ 及$h(K)=(K-1)^3$. 则有：

$$g(1)=h(1)=g'(1)=h'(1)=g''(1)=h''(1)=0,f(K)=g(K)/h(K),$$

而且，

$$\frac{g'(K)}{h'(K)}=\frac{\lambda'(a,K)-b-b(b-1)(K-1)}{3(K-1)^2}, \tag{4.22}$$

$$\frac{g''(K)}{h''(K)}=\frac{\lambda''(a,K)-b(b-1)}{6(K-1)},\frac{g'''(K)}{h'''(K)}=\frac{1}{6}\lambda'''(a,K). \tag{4.23}$$

由(4.17)-(4.19)式及$\lambda(a,K)=(r/r')^2$可得

$$\lambda'''(a,K)=\frac{32(r\mathcal{K}_a'(r)^2)^2}{[\pi\sin(a\pi)]^3}F(K).$$

其中，

$$\begin{aligned}F(K)\ =\ &2\left(\frac{\mathcal{K}_a'(r)}{r'}\right)^2+4a(1-a)(r\mathcal{K}_a'(r))^2-12(1-a)\frac{\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)}{r'^2}\\&\cdot\{\mathcal{K}_a'(r)-(1-a)[\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)]\}.\end{aligned}$$

应用(4.20)可得

$$F(1)=[4+2a(1-a)]\mathcal{K}_a(1/\sqrt{2})^2+24(1-a)^2[\mathcal{E}_a(1/\sqrt{2})-(1/2)\mathcal{K}_a(1/\sqrt{2})]^2-3\pi\sin(a\pi)>0$$

因为$r\in(1/\sqrt{2},1)$, 由[24,引理5.2(1),引理5.4(1)]可知函数$\mathcal{K}_a'(r)/r'$, $r\mathcal{K}_a'(r)$单调上升。同时，函数$[\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)]/r'^2$和$\mathcal{K}_a'(r)-(1-a)[\mathcal{E}_a'(r)-r^2\mathcal{K}_a'(r)]$在$(0,1)$上是正的且严格单调下降，故可推得函数$F(K)$ 关于K在$(1,\infty)$上严格单调上升。因此，$\lambda'''(a,K)$ 关于K在$(1,\infty)$上严格单调上升。

应用l'Hôpital法则及(4.21)-(4.23)式可得：$f(1^+)=c$, 因为$K=\mathcal{K}_a(r)/\mathcal{K}_a'(r)$, $\lambda(a,K)=(r/r')^2$, 及

$$f(K)=G(r)=\frac{r^2-r'^2\{1+b[\mathcal{K}_a(r)/\mathcal{K}_a'(r)-1]+d[\mathcal{K}_a(r)/\mathcal{K}_a'(r)-1]^2\}}{r'^2[\mathcal{K}_a(r)/\mathcal{K}_a'(r)-1]^3},$$

其中，$d=\frac{1}{2}b(b-1)$, 且有$\sqrt{r'}\mathcal{K}_a(r)\to 0$ as $r\to 1$,可以得到

$$\lim_{K\to\infty}f(K)=\lim_{r\to 1}G(r)=\infty.$$

最后，(4.2)显然成立。又因为

$$f(2)=\lambda(a,2)-1-b-(1/2)b(b-1)=c_1$$

及$f(k)$关于K单调上升，故(4.3)可证成立。证毕。

推论4.5的证明：由(4.3)可知结论(1)成立。由于

$$\begin{aligned}\lambda(a,K) &< 1+b(K-1)+\frac{1}{2}b(b-1)(K-1)^2+c_1(K-1)^3\le 1+(b+\delta)(K-1)\\ &\Leftrightarrow b+\frac{1}{2}b(b-1)(K-1)+c_1(K-1)^2\le b+\delta\\ &\Leftrightarrow d(K-1)+c_1(K-1)^2\le\delta\\ &\Leftrightarrow d(K-1)+c_1(K-1)^2-\delta\le 0\\ &\Leftrightarrow 1<K\le 1+(\sqrt{d^2-4c_1\delta}-d)/(2c_1)=K_0,\end{aligned}$$

由此得(4.4). 又由于$c_1>0$. 令$\delta=5-b$, 便从(4.4)得到(4.5). 证毕。

定理4.6的证明：根据[38,推论2.15]和[60,定理2(1)]可知，对任意的$r\in(0,1)$,

$$\log\left(\frac{1+\sqrt[4]{r'}}{1-\sqrt[4]{r'}}\right)<2\mu_a(r)<\log\left\{\frac{\exp[R(a)]}{8}\frac{1+\sqrt{r'}}{1-\sqrt{r'}}\right\}. \tag{4.24}$$

于是，令$x=\exp[2\mu_a(r)]\ge 2$,$A=\frac{1}{8}\exp[R(a)]$, 则对所有的$r\in(0,\mu_a^{-1}(\log(\sqrt{2}))]$,有：

$$1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^8<r^2<1-\left(\frac{x-A}{x+A}\right)^4. \tag{4.25}$$

再令$r=\mu_a^{-1}(K\pi/[2\sin(a\pi)])$, 则有$0<r<1/\sqrt{2}<\mu_a^{-1}(\log(\sqrt{2}))$, $x=\exp[K\pi/\sin(a\pi)]$, 及$\lambda(a,K)=(r'/r)^2$.

由(4.24)式的第一个不等式和(4.25)式可得

$$\begin{aligned}\lambda(a,K) &= \frac{1}{r^2}-1<\frac{x(1+x^{-1})^8}{16(1+x^{-2})(x^{-4}+6x^{-2}+1)}-1\\ &= \frac{1}{16}\exp(\pi K/\sin(a\pi))+\frac{1}{16}\left[8+y\left(1+4\frac{5y^4+14y^2+5}{y^6+7y^4+7y^2+1}\right)\right]-1\end{aligned}$$

其中，$y=1/x=\exp[-\pi K/\sin(a\pi)]$, 所以(4.6)中的第二个不等式成立。

下面，由(4.24)式中的第二个不等式可知

$$\begin{aligned}\lambda(a,K) &= \frac{1}{r^2}-1>\frac{(x+A)^4}{(x+A)^4-(x-A)^4}-1\\ &= \frac{x}{8A}\frac{(1+Ax^{-1})^4}{1+A^2x^{-2}}-1\\ &= \frac{x}{8A}-\frac{1}{2}+\frac{t}{8}\left(1+\frac{4}{1+t^2}\right),\end{aligned}$$

其中，$t=Ax^{-1}$. 由此即得(4.6)之第一个不等式。证毕。

定理4.7的证明：根据[24,定理4.1(10)]有:

$$\frac{\partial\eta_K(a,t)}{\partial K}=\frac{4}{K\pi\sin(a\pi)}\eta_K(a,t)\mathcal{K}_a(s)\mathcal{K}_a'(s)=\frac{2\eta_K(a,t)\mathcal{K}_a'(s)^2}{\sin^2(a\pi)\mu_a(r)}.$$

于是，

$$\frac{1}{\eta_K(a,t)}\frac{\partial\eta_K(a,t)}{\partial K}=\frac{2\mathcal{K}_a'(s)^2}{\sin^2(a\pi)\mu_a(r)}$$

是关于K在$(0,\infty)$上严格下降的函数，所以函数$\eta_K(a,t)$是对数向上凸的。

令$s=\varphi_K(a,r)$, 其中$r=\sqrt{t/(1+t)}$. 则有：$\eta_K(a,t)=(s/s')^2$, 而

$$F(K)=\eta_K(a,t)+1=(s/s')^2+1=1/s'2.$$

对数求导得

$$\begin{aligned}\frac{F'(K)}{F(K)} &= \frac{2s}{s'^2}\frac{ds}{dK}=\frac{8s^2\mathcal{K}_a(s)^2\mu_a(s)}{K\pi^2}\\ &= \frac{2s^2\mathcal{K}_a'(s)^2}{\sin^2(a\pi)\mu_a(r)}\equiv f(K).\end{aligned}$$

于是，由[24,引理5.4(1)]可知，函数f 关于K在$(0,\infty)$上严格单调上升，故函数F为对数向下凸的。不等式(4.7)显然成立。证毕。

定理4.8的证明：(1) 令$r=\sqrt{t/(1+t)}$, $s=\varphi_K(a,r)$. 则函数$f(K)$可写为

$$f(K) = \left\{\exp[R(a)/(2K)]\frac{s}{s'}\frac{r'^K}{r^{1/K}}\right\}^2.$$

对数求导得：

$$\begin{aligned}\frac{f'(K)}{2f(K)} &= \frac{2\mathcal{K}_a(s)\mathcal{K}_a'(s)}{K\pi\sin(a\pi)} - \frac{R(a)}{2K^2} + \log r' + \frac{1}{K^2}\log r \\ &= F_1(K) \equiv \frac{\mathcal{K}_a'(s)^2}{\sin^2(a\pi)\mu_a(r)} + \frac{1}{K^2}\log\{r/\exp[R(a)/2]\} + \log r'\end{aligned}$$

显然，

$$\begin{aligned}F_1(1) &= \frac{2\mathcal{K}_a(r)\mathcal{K}_a'(r)}{\pi\sin(a\pi)} + \log(rr') - \frac{R(a)}{2} \\ &= m_a(r) + m_a(r') + \log(rr') - R(a)/2,\end{aligned}$$

$$\lim_{K\to\infty} F_1(K) = \frac{\pi^2}{4\sin^2(a\pi)\mu_a(r)} + \log r' = \mu_a(r') + \log r'.$$

求导得

$$F_1'(K) = -\frac{4(1-a)\mathcal{K}_a'(s)}{\sin^2(a\pi)\mu_a(r)}\frac{\mathcal{E}_a'(s) - s^2\mathcal{K}_a'(s)}{ss'^2}\frac{2ss'^2\mathcal{K}_a(s)\mathcal{K}_a'(s)}{K\pi\sin(a\pi)} - \frac{2\log[r/\exp(R(a)/2)]}{K^3}$$

$$\frac{1}{2}K^3F_1'(K) = F_2(K) \equiv \log\frac{\exp(R(a)/2)}{r} - \frac{8(1-a)}{\pi^2\sin^2(a\pi)}\frac{\mathcal{K}_a'(r)}{\mathcal{K}_a(r)}s'^2\mathcal{K}_a(s)^3\frac{\mathcal{E}_a'(s) - s^2\mathcal{K}_a'(s)}{s'^2}.$$

由[24,引理5.2(1)和引理5.4(1)]可知：函数F_2 在$[1,\infty)$上严格单调上升，且有

$$F_2(1) = \left\{\log\frac{\exp[R(a)/2]}{r}\right\}\left\{1 - \frac{16(1-a)}{\pi^3\sin(a\pi)}\frac{\mu_a(r)}{\log[\exp(R(a)/2)/r]}r'^2\mathcal{K}_a(r)^3\frac{\mathcal{E}_a'(r) - r^2\mathcal{K}_a'(r)}{r'^2}\right\},$$

$$\lim_{K\to\infty} F_2(K) = \log\frac{\exp[R(a)/2]}{r}.$$

由[24,引理5.2(1)、引理5.4(1)和定理5.5(6)]可知：函数$F_2(1)/\log[\exp(R(a)/2)/r]$关于$r$从$(0,1)$到$(0,1)$上严格单调上升，故函数$F_2(K) > 0$，从而函数$F_1$在$[1,\infty)$上严格单调上升。

因为对于任意的$r \in (0,1)$，有$F_1(1) > 0$; 对任意的$K \geq 1$及$r \in (0,1)$，有$F_1(K) > 0$，故$f'(K)/2 = f(K)F_1(K)$ 为两个正的且在$[1,\infty)$上严格单调上升函数的乘积。由此便得函数f的单调性和凹凸性。且有：$f(1) = \exp[R(a)]$. 由[61,定理4.18的证明]可得

$$\lim_{K\to\infty} f(K) = \lim_{K\to\infty}\frac{r'^K}{s'} = \infty.$$

不等式(4.8)为显然。对任意的$t \in (0,\infty)$ 及$K \in (1,2)$，由于

$$f(2) = \exp[R(a)/2]\frac{\varphi_2(a,r)^2}{1-\varphi_2(a,r)^2}\frac{r'^4}{r}$$

故不等式(4.9)显然成立。

(2) 函数$g(K)$可写成

$$g(K) = \frac{s}{s'}\left(\frac{r'}{A}\right)^K \left(\frac{B}{r}\right)^{1/K}.$$

求导得:

$$\frac{K^2 g'(K)}{g(K)} = g_1(K) \equiv \frac{4\mathcal{K}_a(s)^2\mu_a(r)}{\pi^2} + K^2\log\left(\frac{r'}{A}\right) - \log\left(\frac{B}{r}\right)$$

和

$$\frac{1}{2K}g_1'(K) = g_2(K) \equiv \frac{8(1-a)}{\pi^2\sin(a\pi)^2}\frac{\mathcal{K}_a(r)}{\mathcal{K}_a'(r)}s^2\mathcal{K}_a'(s)^3\frac{\mathcal{E}_a(s) - s'^2\mathcal{K}_a(s)}{s^2} + \log\left(\frac{r'}{A}\right).$$

由[24,引理5.2(1)和引理5.4(1)]知：函数g_2在$[1,\infty)$上严格单调上升。因此，对所有的$K \geq 1$, 有

$$g_2(K) < \lim_{K\to\infty} g_2(K) = \mu_a(r') + \log(r'/A) = 0.$$

故函数g_1在$[1,\infty)$上严格单调下降。从而，对$K > 1$, 有

$$g_1(K) < g_1(1) = \frac{2\mathcal{K}_a(r)\mathcal{K}_a'(r)}{\pi\sin(a\pi)} + \log\left(\frac{rr'}{AB}\right) = 0.$$

因而，函数g关于K在$[1,\infty)$上严格单调下降。显然，$g(1) = B/A$. 由[31,定理1.4(3)]得

$$\lim_{K\to\infty} g(K) = \lim_{K\to\infty}\frac{s}{s'}\left(\frac{r'}{A}\right)^K = \lim_{s\to 1}\frac{1}{s'\exp[\mu_a(s')]} = \frac{1}{\exp[R(a)/2]}.$$

不等式(4.10)为显然。证毕。

参考文献

[1] J.Dutka. The early history of the hypergeometric function[J]. Arch.Hist.Exact Sci.1984/1985,31:15-34.

[2] E.T.Whittaker, G.N.Waston. A course of modern analysis[M]. 4th ed. Cambridge University Press.

[3] W.K.Bühler. Gauss,a biographical study[J]. Springer-Verlag.Berlin,1981.

[4] F.Klein. Vorlesungen über die hypergeometrische funktionen[J].B.G.Teubner, Berlin,1933.

[5] H.A.Schnarz. über diejenigen Fälle,in welchen die Gauss'sche hypergeometrische reihe eine algebraische function ihres vierten elements darstellt[J]. J.Reine Angew.Mzth.1873,75:292-335.

[6] R.Ask. Ramanujan and hypergeometric and basic hypergeometric series[J]. Ramanujan international Symposium on analysis.Pune.India.Russian Math.surveys.1990,451:37-86.

[7] B.C.Berndt. Ramanujan's Notebook I[M]. Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg New York,1985.

[8] B.C.Berndt. Ramanujan's Notebook II[M]. Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg New York,1989.

[9] B.C.Berndt. Ramanujan's Notebook III[M]. Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg New York,1991.

[10] B.C.Berndt. Ramanujan's Notebook IV[M]. Springer-Verlag,Berlin-Heidelberg New York,1993.

[11] G.J.Martin, G.D.Osgood. The quasihyperbolic metric and associated estimates on the hyperbolic metric[J]. J.Analyse Math.1986,47:37-53.

[12] P.Deligne, G.D.Mostow. Commensurabilities among lattices in PU(1,n)[J]. Ann.of Math.Stud..Princeton Univ.Press.Princeton.NJ.1993.

[13] P.B.Cohen, F.Hirzebruch. A survey of [DM], Bull[J]. Amer. Math. Soc. 1995,32:88-105.

[14] A.Varchenko. Multidimensional hypergeometric functions and their appearance in conformal field theory,algebraic K-theory,algebraic geometry etc[J]. in Proc Internat.Congr.Math.(Kyoto,Japan).1990:281-300.

[15] B.C.Carlson. Special function of applied mathematics[J]. Academic Press.New York.1997.

[16] Ch.Houzel. Ellipticsche funktionen und Abelsche integrale,in Geschichte Matematic 170-1900[J]. ed.by J.Dieudonn VEB Deutscher Verlag Wiss.. Berlin.1985:422-539.

[17] K.Dhandrasekharan. Elliptic functions,Grundlehren Math.Wiss[J]. Springer-Verlag.Berlin.1985,281.

[18] U.Bottazzini. The higher calculus:A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass[J]. Springer-Verlag.Berlin,1986.

[19] G.D.Anderson, M.K.Vamanamurthy, M.Vuorinen. Special functions of quasi-conformal theory[J]. Exposition.Math., 1989,7:97-138.

[20] M.K.Vamanamurthy, M.Vuorinen. Functional inequalities, Jacobi products, and quasiconformal maps[J]. Illinois J. Math., 1994,38:394-419.

[21] B.C.Carlson, J.L.Gustafson. Asymptotic approximation for symmetric elliptic integrals[J]. SIAM J.Math.Anal.,1994,25:288-303.

[22] M.K.Vamanamurthy,M.Vuorinen. Inequalities for means[J]. J.Math.Anal. Appl,1994,183:155-166.

[23] S.-L.Qiu, J.-M.Shen. On two problems concerning means[J]. J.hangzhou Inst.Electr. Eng.,1997,3:1-7.

[24] G.D.Anderson, S.-L.Qiu, M.K.Vamanamurthy, M.Vuorinen. Generalized elliptic integrals and modular equations[J]. Pacific J.Math.,2000,1:1-37.

[25] S.-L.Qiu, M.Vuorinen. Landen inequalities for Hypergeometric function[J]. Nagoya Math.J.,1999,154:31-56.

[26] S.-L.Qiu, M.Vuorinen. Hand-Book of Complex Analysis: Geometric function theory [M]. Elsevier B.V.,2005:621-659.

[27] V.Heikkala, H.Lindén, M.K.Vamanamurthy, M.Vuorinen. Generalized elliptic integrals and the Legendre M-function[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2008,338:223-243.

[28] G.D.Anderson, M.K.Vamanamurthy. An inequality for complete elliptic integrals[J]. J.Math.Anal.Appl.,1994,182:257-259.

[29] Horst Alzer, Song-Liang Qiu. Monotonicity theorems and inequalities for the complete elliptic integrals[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004,172:289-312.

[30] G.D.Anderson, M.K.Vamanamurthy, M.Vuorinen. Functional inequalities for hypergeometric functions and complete elliptic integrals[J]. SIAM J.Math.Anal.,1992,23:512-524.

[31] S.-L.Qiu, M.Vuorinen. Infinite products and the normalized quotients of hypergeometric functions[J]. SIAM J. Math. Analysis,1999,30:1057-1075.

[32] S.-L.Qiu, M.Vuorinen. Duplication inequalities for the ratios of hypergeometric functions[J]. Forum Math,2000,12:109-133.

[33] L.V.Ahlfors. Lectures on quasiconformal mappings[M]. American Mathematical Society. Second Edition,2005.

[34] J.Hersch, A.Pfluger. Généralisation du lemma de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytique[J]. C.R.Acad.Sci.Paris,1952,234:43-45.

[35] Chuan-Fang Wang. On the precision of *Mori*'s theorem in the Q-mappings[J]. Science Record,1960,4:329-33.

[36] O.Hübner. Remarks on a paper of Lawrynowicz on quasiconformal mappings[J]. Bull.de L'Acad.Polon.des Sci.,1970,18:183-186.

[37] S.-L.Qiu, M.K.Vamanamurthy, M.Vuorinen. Some inequalities for the Hersch-Pfluger distortion function[J]. J.of Inequal.Appl.,1999,4:115-139.

[38] 马晓艳. 广义椭圆积分与模方程解的若干性质[D].杭州：杭州电子科技大学硕士学位论文,2004.

[39] Wang Gen-di, Zhang Xiao-hui, Chu Yu-ming, Qiu Song-liang. 完全椭圆积分和Hersch-Pfluger偏差函数[J]. 数学物理学报,2008,28:731-734.

[40] O.Lehto, K.I.Virtanen, J.*Väisälä*. Contributions to the distortion theory of quasiconformal mappings[J]. Ann.Acad.Sci.Fenn.ser.*A I*,1959,273:1-14.

[41] S.Agard. Distortion theorems for quasiconformal mappings[J]. Ann.Acad. Sci.Fenn.Ser.AI.,1968,413:1-12.

[42] G.J.Martin. The distortion theorem for quasiconformal mappings,Schottky's theorem and holomorphic motions[J]. Proc.Amer.Math.Soc.,1997,125:1095-1103.

[43] S.-L.Qiu. Singular values,quasiconformal maps and the Schottky upper bound[J]. Sci.in China Ser.A,1998,41:1241-1247.

[44] S.-L.Qiu, M.Vuorinen. Submultiplicative properties of the φ-distortion function[J]. Studia Math.,1996,117:225-242.

[45] S.-L.Qiu. Grötzsch ring and Ramanujan's modular equations[J]. Acta Math. Sinica,2000,43:283-290.

[46] G.D.Anderson, M.K.Vamanamurthy, M.Vuorinen. Conformal invariants, inequalities, and quasi-conformal maps[M]. New York:John Wiley Sons,1997.

[47] G.D.Anderson, M.K.Vamanamurthy, M.Vuorinen. Functional inequalities for hypergeometric functions and complete elliptic integrals. SIAM J.Math. Anal.,1992,23:512-524.

[48] J.Sandor. On certain inequalities for means I.J.Math.Anal. Appl.,1995,189:602-606.

[49] J.Sandor. On certain inequalities for means II.J.Math.Anal.Appl.,1996,199:629-635.

[50] S.-L.Qiu, M.K.Vamanamurthy, M.Vuorinen. Some inequalities for the growth of elliptic integrals.SIAM J.Math.Anal.,1998,29:1224-1237.

[51] B.C.Carlson, J.L.Gustafson. Asymptotic expansion of the first elliptic integral[J]. SIAM J.Math.Anal.1985,16:1072-1092.

[52] S.-L.Qiu. The proof of a conjecture on the first elliptic integral[J]. J.Hangzhou Inst.of Elect.Eng.1993,3:29-36.

[53] S.-L.Qiu, M.K.Vamanamurthy. Sharp estimate for complete elliptic integrals[J]. SIAM J.Math.Anal.1996,27:823-834.

[54] Horst Alzer. Sharp inequalities for the complete elliptic integra of the first kind[J]. Math.Proc.Camb.phil.Soc.1998,124:309-314.

[55] T.Muir. On the perimeter of an ellipse.Mess.Math,1883,12:149-151.

[56] M.Vuorinen. Hypergeometric functions in geometric funtion theory,in: Special Functions and Differential Equations,Proceedings of a Workshop held at The Institute of Mathmatical Sciences. Madras,January 13-14,1997. Allied Publ. New Delhi,1998:119-126.

[57] R.W.Barnard, K. Pearce, K.C. Richards. A monotonicity property involving ${}_3F_2$ and comparisions of the classical approximations of elliptic arc length. SIAM J.Math.Anal.,2000,32:403-419.

[58] S.-L.Qiu, M.Vuorinen. Quasimultiplicative properties for the η-distortion function. Complex Variables Theory Applic.,1996,30:77-96.

[59] 赵叶华. 广义椭圆积分的若干性质[D]. 杭州：杭州电子科技大学硕士学位论文,2004.

[60] 裘松良. Grötzsch环与Ramanujan的模方程[J]. 数学学报，2000,43:283-290.

[61] G.D.Anderson,S.-L.Qiu,M.Vuorinen. Modular equations and distortion functions[J]. Ramanujan J,2009,18:147-169.

致 谢

不知不觉中两年又半载的研究生生活已如光般即将飞逝，在论文完成之际，我的心情无法平静，回顾过去的近一千个日日夜夜，所收获的不仅仅是愈加丰厚的知识，更重要的是在阅读、实践中所培养的思维方式、表达能力和广阔视野。很庆幸这些年来我遇到了许多良师益友，无论在学习上、生活上还是工作上都给予了我无私的帮助和热心的照顾，让我在诸多方面都有所成长。感恩之情难以用语言量度，谨以最朴实的话语致以最崇高的敬意。

“饮其流者怀其源，学其成时念吾师”，本文的研究工作从选题到完成，无不倾注了恩师裘松良教授和褚玉明教授诲人不倦的关怀、指导和教诲。两年多来，裘老师和褚老师对我的学习和研究要求都非常严格，并给予了悉心的指导，亦师亦父；在生活和思想上，两位恩师又给予了我的慈母般的细心关怀与循循善诱的教诲，亦师亦母。裘老师和褚老师渊博的学识、严谨的治学态度、敏锐的科学洞察力、实事求是的学术作风以及为人师表的风范给了我巨大的启迪、鼓舞和鞭策，并将成为我人生道路上的楷模。在他们的言传身教中，我深深地感受到了追求完美的重要性，学习和品尝到了独立思考，独立研究的乐趣，在此，谨向我尊敬的导师裘松良教授和褚玉明教授致以诚挚的谢意和崇高的敬意！

感谢胡觉亮教授、黄土森教授、裴道武教授、樊太和教授、骆桦副教授等理学院的各位老师，从他们身上我学习到了很多的知识。

感谢我的师姐马晓艳、任梁玉，师兄赵鹏、贺建辉、冯保平，他们给予的生活和学习上的关心和帮助，让我这个远游他乡的学子感受到了亲人般的温暖！

感谢本科同学在华东师范大学读研的常章亮，在我毕业论文的资料搜集、写作过程中给予了很多的帮助，使我深深感受到同学间友谊之长青，情谊之无价！

我还要感谢我的同班同学黄阿敏、李琳、李艳莉、沈红梅、王敏芝、张玮虹、张艳萍和周培桂，她们从各个方面影响着我，让我时刻警醒自己要加倍努力。感谢我的师弟师妹们，他们的不断进步，积极努力使我明白自己不能够松懈，要始终保持前进的状态。

最后，我要特别感谢父母多年以来给予我的极大的支持和鼓励。古人云：“焉得谖草，言树之背”。感谢父母，养育之恩，无以回报，二十载的求学路，他们默默承受着生活的压力，鼓励我安心完成学业；感谢哥哥，感谢弟弟，他们虽平凡，在我却是最珍贵的！他们的支持与鼓励，永远是支撑我前进的最大动力。今后我将竭尽所能，用我的努力去诠释对你们的感激！

攻读学位期间的研究成果

攻读学位期间参加的科研项目

国家自然科学基金项目(10771195),2007.10-2009.12.

攻读学位期间发表的学术论文

[1] QIU Song-liang, TU Guo-yan, LI Yan-li, ZHOU Pei-gui. Dependence of generalized elliptic integrals on parameter. 浙江理工大学学报，已录用。

[2] QIU Song-Liang, ZHOU Pei-gui, TU Guo-yan, LI Yan-li. Some properties of the Ramanujan constant. 浙江理工大学学报，已录用。

[3] QIU Song-Liang, LI Yan-li, ZHOU Pei-gui, TU Guo-yan. Some properties of the generalized η-distortion function. 浙江理工大学学报，已录用。

[4] QIU Song-liang, TU Guo-yan, ZHOU Pei-gui, LI Yan-li. Generalizations of some properties of complete elliptic integrals. 待发。