摘 要

不确定性推理是人工智能和专家系统研究的核心内容之一，而非经典逻辑是不确定性推理的理论基础，因此它的研究具有重要的理论意义和实用价值．本文讨论真值域是由有限个有限链的乘积构成的格蕴涵代数的格值命题逻辑系统 $LP(X)$，主要作了如下三个方面的工作：

1. 关于格蕴涵代数中蕴涵运算的研究

格蕴涵代数是徐扬为研究格值命题逻辑而提出的一个代数系统．本文重点讨论了格蕴涵代数中蕴涵运算的一些基本性质，并在由有限个有限链的乘积构成的格蕴涵代数中引入平移的概念，得到了一个蕴涵平行规则．

2. 关于蕴涵不等式的研究

本文以在智能控制中经常采用的“广义肯定式推理模型”和“广义否定式推理模型”为背景，提出一类蕴涵不等式的概念，并针对格蕴涵代数中的蕴涵算子和 Lukasiewicz 蕴涵算子，详细讨论了此类蕴涵不等式的解的性质，得到了解随参数的变化规律．

3. 关于基于由有限个有限链构成的格蕴涵代数的格值命题逻辑系统 $LP(X)$ 的研究

本文在前人研究的基础上，利用泛代数的概念和方法，借鉴 Pavelka 的思想，对基于由有限个有限链构成的格蕴涵代数的格值命题逻辑系统 $LP(X)$ 进行了较为系统的研究．重点研究了在 A 水平上的一些基本的性质，得到了它的可靠性定理、协调性定理、完备性定理和演绎定理，证明了系统“有效性”的可判定性并给出了判定算法．

关键词 格蕴涵代数 泛代数 蕴涵算子 格值命题逻辑

ABSTRACT

Uncertainty reasoning is one of the most important problems in the study fields of artificial intelligence and expert systems, whereas non-classical logic is the theoretic basis of uncertainty reasoning. The study of non-classical logic is of great significance in theory and application. This paper discusses the lattice-valued propositional logic system, whose truth-values is on a lattice implication algebra based on the product of some finite chains. The paper mainly contains the following three parts:

1. The study of the implicative operation in lattice implication algebra.

The concept of lattice implication algebra was proposed by Prof. Xu Yang for the study of lattice-valued logic. In this paper, some basic properties of the implicative operation in lattice implication algebra are discussed. The concept of parallel movement and the law of parallel implication on the product of some finite chains are given.

2. The study of inequality with implicative operators.

In this paper, a kind of inequality with implicative operator is given. This kind of inequality comes from two reasoning models widely used in artificial intelligence and intelligent control systems. For the implicative operators in lattice implication algebra and Lukasiewicz implication algebra, some basic properties of inequality are discussed systematically. Moreover, the variation law of the solution influenced by the parameters is given.

3. The study of lattice-valued propositional logic based on the product of some finite chains.

On the bases of previous works, by using the concepts and methods of universal algebra and taking the idea of Pavelka, we discussed the lattice-valued propositional logic system $LP(X)$, whose truth-values domain is the product of two finite chains, systematically. In this paper, we studied the properties on the level A and attained the consistency theorem, the soundness theorem, the deduction theorem and the adequacy theorem. Also, we proved the decidability of validity of the system and gave the method of deciding.

Keywords: lattice implication algebra, universal algebra, implicative operator, lattice-valued propositional logic

第一章 绪论

§1.1 引言

一、形成本文的背景

在现实生活中，人类的各种活动都是受人脑支配的. 人脑从外部世界接受信息，并对这些信息进行推理、判断和决策，然后通过神经系统支配人的各项活动. 在客观世界或外界事物向人脑反映的过程中，存在着大量的具有不精确性、不完全性或不完全可靠性的信息——不确定性信息. 因此，人脑所进行的推理、判断和决策大量是基于不确定性信息的思维活动，其中大多数是基于模糊信息的思维活动.

模糊信息所具有的模糊性，是一种与随机性不同的不确定性. 模糊性是指对概念的定义以及语言意义的理解上的不确定性，例如"老人"、"温度高"、"数量大"等所含的不确定性即为模糊性. 模糊性主要是人为的主观理解上的不确定性；而随机性是反映客观上的自然的不确定性，或者是事件发生的偶然性. 模糊性这种不确定性使排中律破缺；而随机性这种不确定性使因果律破缺. 历史上对不确定性有很多研究，但是着重研究的是所谓随机性的不确定性，产生并发展了处理随机性的数学工具——概率论与统计数学. 自从 1965 年美国加利弗尼亚大学控制论专家 L.A.Zadeh 教授首先提出模糊集合的概念以来，人们对模糊性的研究空前活跃，对模糊性的应用广泛开展并取得显著成绩.

1973 年，Zadeh 提出了"模糊逻辑控制器"的概念，为模糊控制奠定了基础. 1974 年，英国 E.H. Mamdani 首先利用模糊控制语句组成模糊控制器，并把它应用于锅炉和蒸汽机的控制，在实验室中获得成功，这一开拓性的成果标志着模糊控制论的诞生. 随后，模糊控制的应用蓬勃开展，较为典型的例子有：M. Sugeno 模拟小车的模糊控制；日本仙台城市地铁模糊控制系统；日本北九州模糊自动集装箱操纵系统；AT&T 贝尔实验室设计的模糊逻辑芯片和模糊计

算机等.

虽然在应用中人们通过选取合适的模糊控制规则和模糊推理方法可以取得较良好的控制效果，但是到目前为止，人们提出的各种方法其理论基础还不够完善，适用面也较窄. 随着模糊控制技术应用的发展和走向成熟，人们迫切关心其理论基础问题. 因此，作为模糊控制中不确定性推理的理论基础，非经典逻辑的研究就显示出重要的意义.

本文正是在这样的背景之下，试图通过研究以格蕴涵代数为真值域的格值命题逻辑系统为不确定性推理、模糊控制的进一步深入研究做一些准备工作.

二、国内外研究现状分析

“非标准逻辑”一词是泛指不同于经典命题演算和经典谓词演算的那些逻辑的一般性术语，非标准逻辑大体上可以划分为两大类：一类是与经典逻辑平行的逻辑，一类是对经典逻辑做了扩充的逻辑. 前者有多值逻辑、模糊逻辑和直觉主义逻辑等，后者则包括模态逻辑和时态逻辑等. 与经典逻辑平行的逻辑系统使用的语言与经典命题逻辑或经典谓词逻辑语言基本相同，区别在于经典逻辑中的一些定理在这类非标准逻辑中未必成立. 最著名的例子就是排中律，排中律在直觉主义逻辑或标准 3-值逻辑系统中都是不可证的. 对经典逻辑进行扩充的一类非标准逻辑一般都承认所有经典逻辑的定理，但大都在两个方面对经典逻辑做了补充. 一是扩充了经典逻辑的语言，二是补充了经典逻辑的定理. 这种扩充主要是由于这类非标准逻辑系统扩大了经典逻辑系统的词汇表.

作为一个逻辑系统，主要由三个组成部分组成，即语言、语义和语法. 非经典逻辑概莫能外. 在非经典逻辑中，对语言有两种处理方法，一是类似 Rosser 与 Turguette 那样，引入新的命题连接词，另一类是像 Pavelka 那样，在语言中引入命题常元. 对语义的处理则是突破经典逻辑只有 0，1 两个命题真值的束缚，真值域不再仅限于{0, 1}，而是可以取在一个一般的偏序集或全序集上. 由于真值域的扩充，方便了描述模糊概念. 多数学者在研究过程中将[0，1]作为命题解释的真值域，也有些学者将有限链，[0，1]上的子区间构成的集，[0，1]上所有模糊集构成的集或者有特殊性质的格作为真值域. 对语法的处理，则是引入新的推理规则（不仅限于 MP 规则)，确定新的公理系统(此时因为经典二

值系统中公理系统一般不再成立). 非经典逻辑的主要目的是在给出一个语义系统后，如何寻找出一个既可靠又完备的语法系统，并且给出判定这一系统存在与否的方法. 可靠性保证了所有逻辑推论都在本系统中是恒真的；完备性保证了本系统的任一恒真式可从公理按照推理规则推出. 为此人们进行了长期的努力，取得一些进展.

在非经典逻辑中，较为重要的一种类型是多值逻辑. 这不仅是由于其反映了人们朴素的观念，也是由于人们对多值逻辑研究较为深入，成果较多的缘故. 多值逻辑的思想可以追溯到古希腊时代. 命题取真假两个值是人们容易接受的，并且形成这样的观念，即命题只能取真假两个值. 这种观念在整个逻辑发展历史中占据了主导地位，由此发展了经典二值逻辑. 然而，人们在研究哲学问题时，对这种观念已经提出异议，认为命题除了真假以外，亦可能存在其它逻辑值. Aristotle 举例说“明天发生海战”这一命题的真值在说话当时就是不可决定的，因此在真与假中有一个中介值. 对逻辑命题的真假性提出质疑这一问题的实质是“是否承认逻辑中的排中律”. （逻辑上的排中律认为，任何命题 p，在原则上不是对便是错，即 $p\vee\sim p$ 总是真的. 排中律是数学证明中归缪法证明的逻辑依据. 经典二值逻辑中，排中律是成立的. ）对排中律的承认与否在逻辑上会产生很大的差异，会得到许多不同的逻辑系统. Aristotle 是对排中律提出怀疑最早的人之一，但是他的思想在其后两千年中没有得到充分的发展. 直到本世纪 20 年代波兰数学家 P.J.Lukasiewicz 及美国数学家 E.L.Post 各自发展了一套多值逻辑系统之后，多值逻辑的研究才蓬勃开展.

P.J.Lukasiewicz 与 E.L.Post 的研究工作极大地推动了多值逻辑的发展. 1920 年 Lukasiewicz[1]提出了一个三值逻辑系统，他沿袭 Aristotle 的观点，将第三个真值解释为“未决定的”或“可能的”，表示未来可能发生的状态. 这是多值逻辑的第一个形式系统，它的思想和方法后来被广泛应用于有限逻辑的研究中. 后来 Lukasiewicz 将他的三值逻辑系统推广到 n 值及无穷值. Lukasiewicz 逻辑系统是协调的、完备的，但不是函数完备的. Post[3]于 1921 年独立地发展了他的有穷多值逻辑系统，与 Lukasiewicz 三值逻辑系统不同的是，它不再关注逻辑中的哲学问题，摆脱了哲学观念的影响，是一个以二值逻辑作为特例的纯形式的逻辑系统. 该系统是完备的、协调的.

继 Lukasiewicz 与 Post 之后，大量反映不同哲学背景、具有不同应用领域的多值逻辑系统相继问世. 较有代表性的如：Kleene、Bochvar、Finn、Hallden、Segerberg、Heyting、Slupecki、Reichenbach [20]等的三值逻辑系统，Godel、Sobocinski、Slupecki[20]等的 n 值逻辑系统. 其中 Bochvar[4]在 1939 年给出的三值逻辑系统与语义悖论有关. 他的三值逻辑系统中，有命题（statement）与句子（sentence）之分，句子要么真、要么假，二者必居且仅居其一，而命题可真、可假，也可以无意义. 可以证明，Bochvar 的三值逻辑系统具有合理的计算解释. Finn[20]的思想直接来源于 Bochvar，他建立的逻辑系统与 Bochvar 的系统的主要差别在于对变量的解释. 他考虑两种变量：命题变量和句子变量，命题变量可以取真、假、无意义三个逻辑值，而句子变量只能取真、假两个逻辑值. 可以证明 Bochvar 和 Finn 的系统都是协调的、完备的.

S.C.Kleene[5]于 1952 年给出了强三值逻辑系统和弱三值逻辑系统两个三值逻辑系统. 在强三值逻辑系统中取~，∨，∧，⇒，⇐作为联系词，在弱三值逻辑系统中取~，∨，∧，⇒，⇐，≡做为联接词. Kleene 的逻辑最初是想要适应未确定的数学命题，第三个真值直观上表示“未定义(u)”，因而把它赋值到一个合式公式时并不是想说明该公式既不真也不假，而是要表示一种部分未知的状态. 在强连接词的意义下，Kleene 逻辑遵循的原则是：当复合公式的真值（真或假）可以由其分量确定时，应该给复合公式赋予所应确定的值而不必管是否有一些分量是不确定的，例如，如果A和B均赋值为真，则$A\&B$赋值真，而如果A和B中有一个赋值为假，则$A\&B$赋值假（即使另一个分量赋值为u也是如此）. 在弱连接词的意义下，一个合式公式只要有一个不确定分量，它就被赋值为 u，弱解释实际上对应 Bochvar 的解释. Kleene 的弱三值系统是在 Lukasiewicz 系统中加入新的连接词得到的.

在对不确定性信息处理方法进行研究中，人们越来越感到经典集合论的局限性. 1965 年美国加利弗尼亚大学控制论专家 L.A.Zadeh[6]创造性地提出了“模糊集合（Fuzzy Set）”的概念，模糊数学这一新的数学分支由此诞生. Zadeh 的模糊集合论的思想、方法为非经典逻辑的研究提供了新的方法. 非经典逻辑的研究也随之飞速发展.

1969 年，Goguen[7]提出了模糊逻辑的第一个形式系统，其中的真值域可

以不是[0，1]，而是一个赋予了附加运算“*”的格，以使相应的语义系统的表达能力得到加强. Goguen 曾建议真值域L应为一个完备的格序半群，即$(L,\vee,\wedge)$是一完备格，$(L,*)$是一半群且“*”对于“$\vee$”是完全分配的. 在L中“*”运算满足$a*b\le a\wedge b$，因而可用“*”刻划比“$\wedge$”更强的“且”. 一般说来，取“*”为L上的一个$L-T$模是合适的. Goguen 系统中指定I为指派真值，即在所有解释下为I的公式才是重言式.

根据 Goguen 的思想，Gottwald[8]于 1980 年在 Goguen 系统中令$L=[0,1]$或为有限链，给出了一些重言式，研究了系统的紧致性. 吴望名[34]也曾给出了一个基于 T-模的模糊逻辑系统并讨论了它的语义、语法性质.

从语法的角度来看，Goguen 逻辑系统的语言与经典逻辑的语言是等价的，系统中的有效性和重言式等概念也都是非模糊概念，因而不足以描述模糊信息. Goguen 逻辑系统没有一个与给定的语义系统相适应的完善的语法系统，这是它的最大缺陷. 因此人们意识到需要把语法系统和语义系统结合起来处理. 文献中出现两种处理办法：一是象 Rosser 与 Turguette[9]那样，在多值逻辑系统中引入一目联接词J_α，J_α满足：对于任一解释T

$$T(J_\alpha(\varphi))=\begin{cases}1; & T(\varphi)=\alpha\\ 0; & \text{否则}\end{cases}$$

这样，公式$J_\alpha(\varphi)$意指$T(\varphi)=\alpha$；另一是象 Pavelka 那样，将真值加入语言中去：对于L中的每一元素α，语言中有一个特殊公式$\tilde{\alpha}$，使对于任一解释T，$T(\tilde{\alpha})=\alpha$. 于是$p\equiv\tilde{\alpha}$，表示p具有真值α，$p\to\tilde{\alpha}$恒真表示p的真值小于或等于α，Pavelka[10]于 1979 年以丰富剩余格为真值域，建立了一个模糊逻辑系统，给出了该系统语义及语法的基本定义，证明了关于系统公理化的若干结果，其中主要包括：

1) 基于[0，1]和一个连续剩余运算的任何命题逻辑都可公理化.

2) 基于有限链的任何命题逻辑都可公理化.

3) 若L是一完备格，其中有一无穷降链且没有无穷升链，则基于 L 的任一命题逻辑都不能公理化.

Pavelka 的工作虽然只涉及命题逻辑，但是它的思想与方法被广泛应用于模糊逻辑的研究.

De.Glas[11]、Pacholczyk 及 Akdag[12]曾分别讨论了以有限链为真值域，以 Luckasiewice 蕴涵为蕴涵算子的多值命题逻辑系统，De.Glas 证明了系统的完备性. Di Zenzo[22]于 1986 年提出了一个 n 值逻辑系统 $EP(n)$，它有 n 个真值，语言联接词含非、循环算子、n 个并算子，n 个交算子、n 个蕴涵算子、n 个全称量词及 n 个存在量词. $EP(n)$ 系统是 Post 多值逻辑系统的扩充. Busch Douglas.R.[13]给出了一个带有两种类型否定的三值逻辑系统，该系统与 Lukasiewicz 三值逻辑及 Nelson 逻辑有直接的关系. Busch 对该系统进行了公理化，这个公理化可看成王浩对 Kleene 强三值逻辑系统进行公理化研究的推广. Wsteva、Francesc 等[14]对丰富剩余格 L 的闭区间集合 $Int(L)$ 构成的双格(bilattice)进行了研究，并把部分多值逻辑定义为真值取于 $Int(L)$ 的逻辑，给出了系统的模型、赋值等概念. Font Josep M.和 Moussavi Massoud[15]给出了一个六值逻辑系统，并证明了此系统可以公理化. 在这个系统当中，系统的联接词是 Kleene 强三值逻辑联接词的推广. Polymeris Andreas[16]考察了三值命题逻辑中的公式的合取范式和有关性质. Dan Butnariu[17]等人讨论了基于三角模的模糊逻辑. Castro[18]通过推理算子把 L 值逻辑看成是一簇二值逻辑，通过二值逻辑研究 L 值逻辑.

我国的模糊数学起步较晚，但发展很快，尤其是近年来在模糊逻辑研究上取得一系列引人瞩目的成果. 刘叙华和肖红[24]提出了算子模糊逻辑的概念，在这种系统中，用算子表示模糊命题的真假程度；朱梧槚、肖奚安[27]提出了中介逻辑的概念；应明生[25][26]在 Pavelka 一阶逻辑系统中引入了一般量词，证明了该系统的超积基本定理，并讨论了系统的紧致性和 Lowenhiem-Skolem 性；吴望名[24]给出了一个真值域为[0，1]，命题联接词由 t－模引出的模糊逻辑系统，讨论了它的语义、语法性质；王国俊[61][62]将命题真值取于[0，1]，引入一种模糊公式代数，在这种代数上建立了一个准形式演绎系统，证明了相应的可靠性定理与相容性定理，提出了程度化的 Modus Ponens 规则、Hypothetical Syllogism 规则和积分语义学等理论.

综上所述，在模糊逻辑的研究过程中，虽然已经有人提出了格值逻辑的概念，但大多数关于格值逻辑的重要结论却遗憾的是以有限链和[0，1]为前提的，这虽然在实际应用上产生了较好的效果，但是却对刻画现实世界也还具有一定

的局限性，因为现实世界存在许多复杂的情形或不可比较的因素，这些结论是无法作出较为合适的反映.

三、本文的研究工作

本文的主要工作包括：关于格蕴涵代数的研究和真值域为有限个有限链的乘积的格值逻辑系统的研究.

1990 年，我的导师徐扬教授在其主持的国家自然科学基金项目“抽象模糊逻辑的研究”中把格与蕴涵代数相结合提出了格蕴涵代数的概念并以此作为格值逻辑系统的真值域，他还对格蕴涵代数的格论性质和同态映射等性质进行了较详细的研究，为进一步研究格值逻辑系统创造了条件. 在这之后，徐扬、秦克云、宋振明、刘军等对基于格蕴涵代数的格值命题逻辑进行了深入的研究，建立了基于格蕴涵代数的格值命题逻辑系统 $L(X)$ 和一阶格值逻辑系统 FM，讨论了它们的基本性质，得到了该系统的可靠性定理、演绎定理和协调性定理. 本文是在上述研究成果的基础上，着重讨论真值域是由有限链的乘积构成的格蕴涵代数的格值命题逻辑系统，从而为人工智能的研究，特别是为用计算机实现基于不确定性推理的信息处理以及智能控制和专家系统的研究提供有力的理论支持. 在论文的第二章重点讨论格蕴涵代数中的蕴涵算子的性质和一类蕴涵不等式的解的性质. 通过对蕴涵算子性质的探讨，为用计算机实现格蕴涵代数的表达、计算、构造、判断提供了一种思路，为进一步用计算机实现不确定性推理提供了一个可靠的理论基础. 通过对蕴涵不等式的解的性质的探讨，为基于不确定性推理的智能控制的进一步研究提供了一些判定条件. 在论文的第三章，系统地讨论了基于有限链的乘积构成的格蕴涵代数的格值命题逻辑系统在 A 水平下的一些基本的性质，得到了 A 水平下的可靠性定理、协调性定理、完备性定理和演绎定理，目的是为进行基于不确定性推理的智能控制的研究提供一个坚实的理论基础.

§1.2 预备知识

本节介绍泛代数和格论中的一些概念及相关知识，作为本文讨论的准备.

定义 1.2.1 设 T 是一个集合，N 是非负整数的集合，$ar: T \to N$ 是一个

映射，称$\boldsymbol{T}=(T,ar)$为一型. 简记为$\boldsymbol{T}$.

以下记$T_n=\{t\in T; ar(t)=n\}$.

定义 1.2.2 设$\boldsymbol{T}$是一型，A是一非空集合，$P=\{t_A; t\in T\}$，其中对于任意$t\in T$，t_A是A上的一个$ar(t)$元运算，称$\boldsymbol{A}=(A,P)$为一个$\boldsymbol{T}$-代数，简记为$\boldsymbol{A}$.

注：在此定义中，若$ar(t)=0$，则t_A表示A中的一个指定元素，即A上的一个零元运算表示A中的一个指定元.

定义 1.2.3 设$\boldsymbol{T}$是一型，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是两个$\boldsymbol{T}$-代数，称映射$\varphi:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$为一个同态，如果对于任意$n\in N$，任意$t\in T_n$，任意$a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$，有：

$$\varphi(t_A(a_1,a_2,\cdots,a_n))=t_B(\varphi(a_1),\varphi(a_2),\cdots,\varphi(a_n))$$

定义 1.2.4 设$\boldsymbol{T}$是一型，X是一个集合，$\boldsymbol{F}$是一个$\boldsymbol{T}$代数，$\sigma:X\to F$ 是一个映射，称(F,σ)是X上的自由$\boldsymbol{T}$-代数，如果对于任意的$\boldsymbol{T}$-代数$\boldsymbol{A}$，任意的映射$\tau:X\to\boldsymbol{A}$，存在唯一的同态$\varphi:F\to\boldsymbol{A}$，使得$\tau=\varphi\circ\sigma$.

对任一集合X，任一型$\boldsymbol{T}$，X上的自由$\boldsymbol{T}$-代数可如下构造：

设$X\bigcap T=\varnothing$

1) $F_0=X\bigcup T_0$

$$F_{n+1}=\{(t,a_1,\cdots,a_k); t\in T_k, a_i\in F_{r_i}, \sum_{i=1}^{k}r_i=n\}$$

令 $F=\bigcup\limits_{n\in N}F_n$；

2) 对于任意$k\in N$，任意$t\in T_k$，在F上定义k元运算t如下：

对于任意$a_1,\cdots,a_k\in F$，$t(a_1,\cdots,a_k)=(t,a_1,\cdots,a_k)$；

3) 又令$\sigma:X\mapsto F$，满足：对于任意的$x\in X$，$\sigma(x)=x$

则(F,σ)是X上的自由$\boldsymbol{T}$-代数.

X上的自由$\boldsymbol{T}$-代数的全体在同构的意义下是唯一的.

定义 1.2.5 设P是一个集合，P上的二元关系$\le$叫做一个偏序关系（或半序关系），如果满足：对于任意的$a,b,c\in P$

1) 自反性：$a\le a$；

2) 反对称性：如果$a\le b, b\le a$，则$a=b$；

3) 传递性：如果$a \le b$，$b \le c$，则$a \le c$.

这时称$(P,\le)$（或简称P）为一个偏序集（或半序集）.

定义 1.2.6 在一个偏序集$(L,\le)$中，如果任意两个元x,y都有上确界$x \vee y$和下确界$x \wedge y$，则称偏序集$(L,\le)$（或简称L）为一个格.

如果格L满足：

1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

则称格L为分配格.

如果格L上存在一个拟序对合映射$':L \to L$使得：对于任意的$x, y \in L$

1) 如果$x \wedge y = x$，则$x' \wedge y' = y'$；

2) $(x')' = x$.

则称格L为有余格.

定义 1.2.7 当偏序集$(P,\le)$有泛界O或I时，则称O的上邻（若存在时）为P的原子（或点），称I的下邻（若存在时）为P的对偶原子（或对偶点）.

定义 1.2.8 设a是格L的一个元素，若对于任意$b,c \in L$，由$a = b \vee c$可推出$a = b$或$a = c$，则称a是$\vee-$既约元. 格L的非零$\vee-$既约元亦称为分子.

第二章 格蕴涵代数和蕴涵不等式

格蕴涵代数是徐扬在研究格值逻辑时提出的一种代数结构，它是一类范围较广的代数结构，包含了布尔代数，Lukasiewicz 代数等代数结构，具有良好的性质. 本章进一步讨论了格蕴涵代数的一些性质，并讨论了一类蕴涵不等式的解的性质.

§2.1 格蕴涵代数

本节简要介绍一下徐扬关于格蕴涵代数的一些研究成果，它是本文工作的基础. 在这里证明过程从略，这些证明可在[41][42][43]等参考文献中查阅.

定义 2.1.1 设（L，$\wedge$，$\vee$，$'$）是一个有泛界 I，O 的有余格. 若映射 $\rightarrow: L\times L\rightarrow L$ 满足：对任意 $x,y,z\in L$

（I_1）$x\rightarrow(y\rightarrow z)=y\rightarrow(x\rightarrow z)$；

（I_2）$x\rightarrow x=I$；

（I_3）$x\rightarrow y=y'\rightarrow x'$；

（I_4）若 $x\rightarrow y=y\rightarrow x=I$,则 $x=y$；

（I_5）$(x\rightarrow y)\rightarrow y=(y\rightarrow x)\rightarrow x$；

则称（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$）是一个拟格蕴涵代数. 若它还满足：

（l_1）$(x\vee y)\rightarrow z=(x\rightarrow z)\wedge(y\rightarrow z)$；

（l_2）$(x\wedge y)\rightarrow z=(x\rightarrow z)\vee(y\rightarrow z)$；

则称（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$）是一个格蕴涵代数. 若它还满足：

$$x\vee y\vee((x\wedge y)\rightarrow z)=I$$

则称（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$）是一个格 H 蕴涵代数.

注：在上述定义中 $x\rightarrow y=\rightarrow(x,y)$

例 2.1.1 设 $L=\{0,1\}$，运算$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$分别定义如下：

$\vee$	O	I
O	O	I
I	I	I

$\wedge$	O	I
O	O	O
I	O	I

x	x'
O	I
I	O

$\rightarrow$	O	I
O	I	I
I	O	I

则（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$）是一个格蕴涵代数.

例 2.1.2 设$L=[0,1]$，运算$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$分别定义如下：对于任意$x,y\in L$

$$x\wedge y=\min\{x,y\};$$

$$x\vee y=\max\{x,y\};$$

$$x'=1-x;$$

$$x\rightarrow y=1\wedge(1-x+y).$$

则（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$）是一个格蕴涵代数.

例 2.1.3 设$n\in N$，N是不包含0的自然数集，$L=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，定义L中的偏序关系“$\leq$”为整数的大小关系，L上的余运算“$'$”定义为：对于任意$x\in L$

$$x'=n-1-x$$

L上的二元运算“$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$”分别定义为：对于任意$x,y\in L$

$$x\wedge y=\min\{x,y\};$$
$$x\vee y=\max\{x,y\};$$
$$x\rightarrow y=\begin{cases}n-1 & x\leq y;\\ n-1-x+y & x>y.\end{cases}$$

则（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$）构成一个 n 元的格蕴涵代数.

例 2.1.4 设X是一个非空集合，在其幂集$P(X)$上定义二元运算$\rightarrow$如下：对于任意$A,B\in P(X)$

$$A\rightarrow B=A^c\cup B$$

其中“c”为集合的补运算. 则$(P(X),\cup,\cap,c,\rightarrow)$构成一个格 H 蕴涵代数.

例 2.1.5 设$L=\{O,a,b,c,d,I\}$是一个格，L上的偏序关系如图 2.1 所示，L上的运算$'$，$\rightarrow$分别定义为：

x	x'
O	I
a	c
b	d
c	a
d	b
I	O

$\rightarrow$	O	a	b	c	d	I
O	I	I	I	I	I	I
a	c	I	b	c	b	I
b	d	a	I	b	a	I
c	a	a	I	I	a	I
d	b	I	I	b	I	I
I	O	a	b	c	d	I

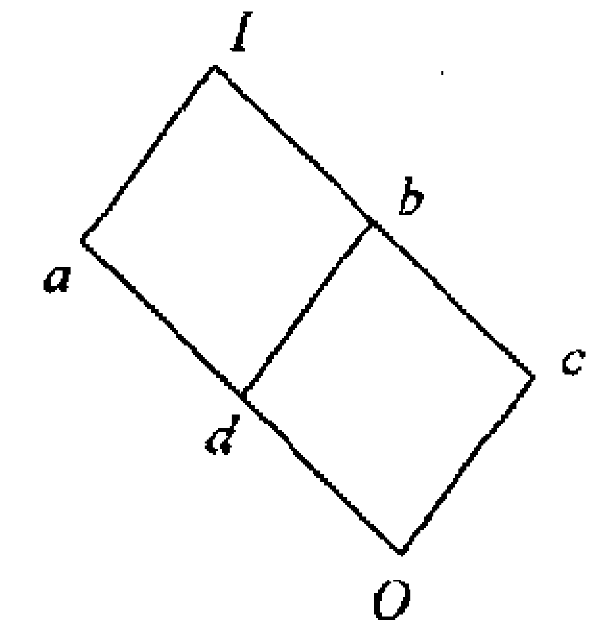


图 2.1

则（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$）是一个格蕴涵代数.

从上述例子中，我们可以看出格蕴涵代数是 Boole 代数，Lukasiewicz 代数的推广，并且全体格蕴涵代数构成一个真类.

定理 2.1.1 设（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$）是一个格蕴涵代数，对于任意的$x,y,z\in L$，有：

(1) $x\rightarrow O=x'$, $I\rightarrow x=x$；

(2) $x\le y$当且仅当$x\rightarrow y=I$；

(3) $x\rightarrow(y\vee z)=(x\rightarrow y)\vee(x\rightarrow z)$；

(4) $x\rightarrow(y\wedge z)=(x\rightarrow y)\wedge(x\rightarrow z)$；

(5) 若$x\le y$,则$x\rightarrow z\ge y\rightarrow z, z\rightarrow x\le z\rightarrow y$；

(6) $x\rightarrow y\ge x'\vee y$；

(7) $x\vee y=(x\rightarrow y)\rightarrow y, x\wedge y=((x\rightarrow y)\rightarrow x')'$.

定理 2.1.2 拟格蕴涵代数（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$）为格蕴涵代数当且仅当：对于任意$x,y,z\in L$，有：

(1) $(x\rightarrow y)\rightarrow y=x\vee y$；

(2) $x\le y$当且仅当$x\rightarrow y=I$；

(3) $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$；

定义 2.1.2 设（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\rightarrow$）是一个格蕴涵代数，如果$S\subseteq L$，且满足：

1) （S，$\wedge$，$\vee$，$'$）是（L，$\wedge$，$\vee$，$'$）的有余、有泛界 O 和 I 的子格；

2) 对任意 $x, y \in S$，有 $x \to y \in S$.

则称（S，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\to$）是（L，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\to$）的一个格蕴涵子代数.

定义 2.1.3 设（L_1，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\to$），（L_2，$\wedge$，$\vee$，$'$，$\to$）都是格蕴涵代数，若映射 $f: L_1 \to L_2$ 满足：对于任意 $x, y \in L_1$，

$$f(x \to y) = f(x) \to f(y)$$

则称 f 是一个蕴涵同态. 若 f 还满足：

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$
$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$
$$f(x') = (f(x))'$$

则称 f 是一个格蕴涵同态. 一对一的格蕴涵同态称为格蕴涵同构.

定理 2.1.3 设 L_1, L_2 是格蕴涵代数，$f: L_1 \to L_2$ 是蕴涵同态，则：

1) f 是并同态，即对于任意 $x, y \in L_1$，$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$；

2) 如果 $f(O) = O$，则 f 是格蕴涵同态.

定义 2.1.4 设 L 是一个格蕴涵代数，$F \subseteq L$，称 F 是 L 的一个蕴涵滤子，如果对于任意 $x, y \in L$，

1) $I \in F$；

2) 如果 $x \in F, x \to y \in F$，则 $y \in F$.

称 F 是 L 的一个关联蕴涵滤子，如果对于任意 $x, y, z \in L$，

3) $I \in F$；

4) 如果 $x \to y \in F, x \to (y \to z) \in F$，则 $x \to z \in F$.

格蕴涵代数的全体蕴涵滤子在集合的包含序“$\subseteq$”之下构成一个完备的分配格.

定理 2.1.4 格蕴涵代数中的蕴涵滤子为格对偶理想；关联蕴涵滤子为蕴涵滤子.

定理 2.1.5 设 L_1, L_2 是格蕴涵代数，$f: L_1 \to L_2$ 是蕴涵同态，若 $\mathrm{D\text{-}ker}(f) \neq \varnothing$，则 $\mathrm{D\text{-}ker}(f)$ 是 L_1 的一个蕴涵滤子. 其中

$\mathrm{D\text{-}ker}(f) = \{x; x \in L_1, 且\ f(x) = I\}$.

定理 2.1.6 设L_1,L_2是格蕴涵代数，$f:L_1\to L_2$是蕴涵同态，则：

1) 若S是L_1的格蕴涵子代数，则$f(S)$是L_2的格蕴涵子代数；

2) 若F是L_2的蕴涵滤子，则$f^{-1}(F)$是L_1的蕴涵滤子.

定理 2.1.7 设L是一个格蕴涵代数，F是L的一个蕴涵滤子，在L上定义二元关系"~"为：对于任意$x,y\in L$

$$x\sim y\text{当且仅当}x\to y\in F,y\to x\in F.$$

则：

1) "~"是L上的一个同余关系；

2) 对于任意$x\in L$，令

$$[x]=\{y;y\in L\text{且}y\sim x\}$$

在L/F上定义运算$\bar{\wedge},\bar{\vee},\neg,\Rightarrow$为：对于任意的$[x],[y]\in L/F$

$$[x]\bar{\wedge}[y]=[x\wedge y]$$

$$[x]\bar{\vee}[y]=[x\vee y]$$

$$[x]^{\neg}=[x']$$

$$[x]\Rightarrow[y]=[x\to y]$$

则$(L/F,\bar{\wedge},\bar{\vee},\neg,\Rightarrow)$是一个格蕴涵代数，称为$L$的由$F$决定的商代数.

3) 令$f:L\to L/F$，满足：对于任意$x\in L$

$$f(x)=[x]$$

则f是一格蕴涵满同态.

定理 2.1.8 设L_1,L_2是格蕴涵代数，$f:L_1\to L_2$是格蕴涵满同态，则：$L_1/\mathrm{D}-\ker(f)\cong L_2$.

§2.2 格蕴涵代数中的蕴涵运算

格蕴涵代数是内容丰富的代数结构，本节在上节的基础上，进一步研究关于格蕴涵代数蕴涵运算的一些性质.

定理 2.2.1 设L是一个格蕴涵代数，$a,b,c,d\in L$，且满足$a=b\vee c$，

$d = b \wedge c$，则：

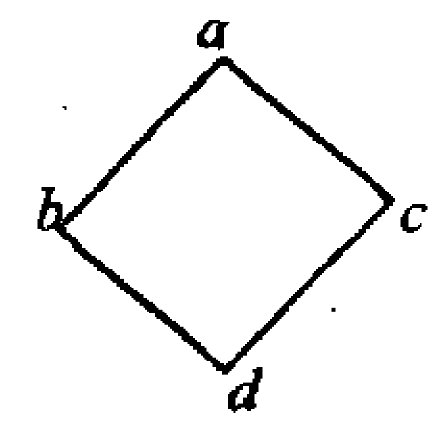


图 2.2

1) $b \to c = a \to c, c \to b = a \to b$；

2) $b \to d = a \to c, c \to d = a \to b$.

证明 根据格蕴涵代数的性质，有：

1) $a \to c = (b \vee c) \to c = (b \to c) \wedge (c \to c)$

$= (b \to c) \wedge I = b \to c$

同理：$c \to b = a \to b$.

2) $b \to d = b \to (b \wedge c) = (b \to b) \wedge (b \to c) = I \wedge (b \to c) = b \to c$

根据（1）的结论：$b \to c = a \to c$，故 $b \to d = a \to c$.

同理可证：$c \to d = a \to b$.

推论 2.2.1 设 L 是一个格蕴涵代数，$a,b,c \in L$，若满足 $a \vee b = I$，$a \wedge b = c$，则：

1) $a \to b = b, b \to a = a$；

2) $a \to c = b, b \to c = a$.

推论 2.2.2 设 L 是一个格蕴涵代数，A 是 L 的所有原子的集合，则对于任意 $x, y \in A$，成立：

1) $x \to y = x \to O = x'$；

2) 若 $x \vee y = C_{x,y}$，则 $C_{x,y} \to x = y', C_{x,y} \to y = x'$.

定理 2.2.2 设 L 是一个格蕴涵代数，$a,b,c,d,e,f \in L$ 并且 a,b,c,d,e,f 满足如图 2.3 的偏序关系：

则：

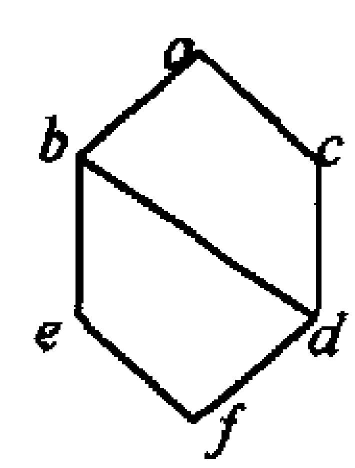


图 2.3

1) $a \to c = b \to d = e \to f$；

2) $b \to c = e \to d$；

3) $e \to c = e \to d$.

证明

(1) 由定理 2.2.1，显然成立.

(2) 由定理 2.2.1 知 $b \to c = a \to c$，且 $e \to d = b \to d$，又由（1）的结论

知道$a\to c=b\to d$，从而$b\to c=e\to d$.

(3) 由于$e\to d=e\to(b\wedge c)=(e\to b)\wedge(e\to c)$

$$=I\wedge(e\to c)=e\to c，故 e\to c=e\to d.$$

推论 2.2.3 设L是一个格蕴涵代数,$a,b,c,d,e,f\in L$并且a,b,c,d,e,f之间的偏序关系如图 2.3 所示，若满足$a\to b=b\to e$，则成立：

(1) $c\to b=d\to e$;

(2) $a\to d=b\to f$.

证明

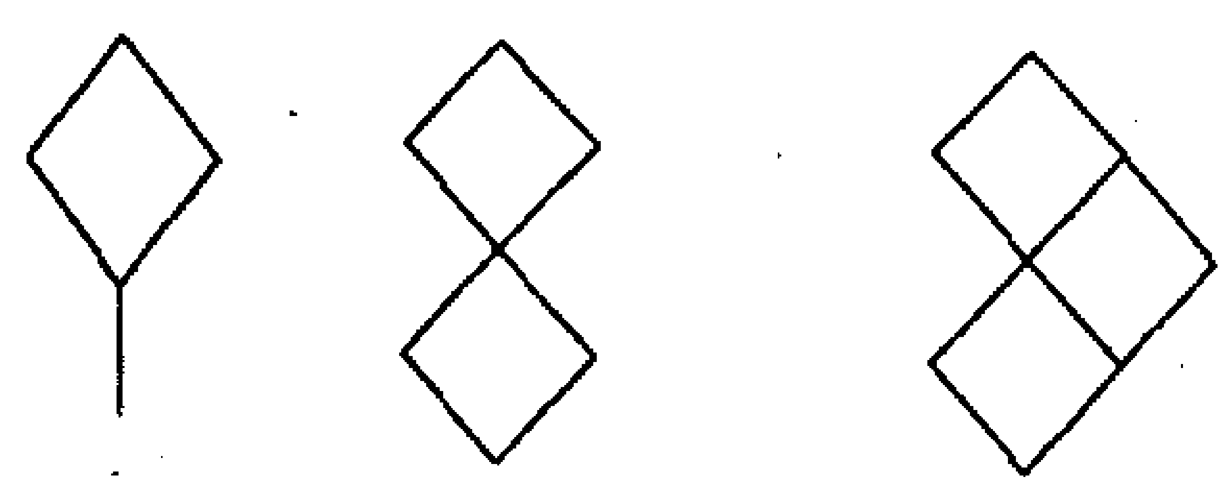
(1) 由定理 2.2.2，显然成立.

(2) 因为$a\to d=a\to(b\wedge c)=(a\to b)\wedge(a\to c)$

$$=(c\to b)\wedge(b\to c)=(d\to e)\wedge(e\to d)$$
$$=(b\to e)\wedge(b\to d)=b\to(e\wedge d)$$
$$=b\to f.$$

根据定理 2.2.1 与定理 2.2.2 及它们的推论，可以很方便地确定格蕴涵代数中的一些蕴涵运算的结果，可以方便的进行计算机实现格蕴涵代数的构造与检验.

例如 我们可以通过计算机进行验证，得到如下结果：在一个格蕴涵代数中不存在满足如下偏序关系的格蕴涵子代数.



引理 2.2.1 设L是一满足极小条件的格，则：

1) L中任意非零元a至少含有一个原子;

2) L中任意元a都有一个$\vee$-既约分解.

引理 2.2.2 设L是一完全分配格，则L的每个元都可以表示为L的分子之并，且对于任意$a\in L$，有

$$a = \vee\{x; x \le a, \text{且}x\text{是分子}\}. \qquad (*)$$

定理 2.2.3 设L是一有限格蕴涵代数，则对于任意的$a \in L$，有：

$$a = \vee\{x; x \le a, x \in L, \text{且}x\text{是分子}\}.$$

证明 因为L是一有限格蕴涵代数，则L是一个完全分配格，由引理 2.2.2 知对于任意的$a \in L$，a都可以表示成(*)式.

定理 2.2.4 设L是一个格蕴涵代数，对于任意$x, y \in L$，有：

(1) 若$x \vee y = I, x \wedge y = O$,则$x = y', y = x'$；

(2) 若$x \wedge y = O$，则$x \to y = x', y \to x = y'$；

(3) 若$x \vee y = I$，则$x \to y = y, y \to x = x$.

证明 根据格蕴涵代数的性质易证.

推论 2.2.4 设L是一个格蕴涵代数，A是L的分子的集，对于任意$x, y \in A$，则：

(1) 若$x \vee y = I, x \wedge y = O$,则$x = y', y = x'$；

(2) 若$x \wedge y = O$，则$x \to y = x', y \to x = y'$；

(3) 若$x \vee y = I$，则$x \to y = y, y \to x = x$.

定理 2.2.4 及推论 2.2.4 提供了一种通过计算机进行格蕴涵代数的计算的方法，因为有限格蕴涵代数中的每个元素可以表示成为若干分子的并，因此元素之间的蕴涵运算可以利用分子之间的蕴涵运算进行表达.

下面考察由有限个有限链的乘积构成的格.

定理 2.2.5 设J是一个有限指标集，$|J| = n$，$L_j\ (j \in J)$是长度为m_j的 Lukasiewicz 链. 令：$L = \prod_{j \in J} L_j$，在L中运算$\vee, \wedge, \to, '$分别按坐标运算，即：

对于任意的$\alpha, \beta \in L$，记$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$

$$\alpha \vee \beta = (\alpha_1 \vee \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2, \cdots, \alpha_n \vee \beta_n)$$

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha_1 \wedge \beta_1, \alpha_2 \wedge \beta_2, \cdots, \alpha_n \wedge \beta_n)$$

$$\alpha \to \beta = (\alpha_1 \to \beta_1, \alpha_2 \to \beta_2, \cdots, \alpha_n \to \beta_n)$$

$$\alpha' = (\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n')$$

则$(L, \vee, \wedge, ', \to)$是一个格蕴涵代数.

在下面的讨论中，用N表示不包含0的自然数集，用Z表示整数集.

定义 2.2.1[35] 设$(P,\le)$是有零元O的偏序集，$x\in P$，称x与O的距离为元素x的维数或高度，记为$h(x)$. 若P中任意元素的维数都是有限数，则称映射：

$$\begin{aligned} h: P &\to Z \\ x &\mapsto h(x) \end{aligned}$$

为P的维数函数.

设J是一个有限指标集，$|J|=n$，$L_j\ (j\in J)$是长度为m_j的 Lukasiewicz 链，并且设$L_j=\{O_j=a_{j_0}<a_{j_1}<\cdots<a_{j_{m_j-1}}=I_j\}$，令$L=\prod_{j\in J}L_j$，$j\in J$，则$L$中的元素可以表示成为如下形式：$a\in L,\ a=(a_{1_{i_1}},a_{2_{i_2}},\cdots,a_{n_{i_n}})$,其中$a_{j_{i_j}}\in L_j$，$j\in J$，$0\le i_j\le m_j-1$. 今后为简便记$a=p((i_1,i_2,\cdots,i_n))=(a_{1_{i_1}},a_{2_{i_2}},\cdots,a_{n_{i_n}})$或$a=p((i_1,i_2,\cdots,i_n))=p(\widetilde{a})$，$\widetilde{a}=(i_1,i_2,\cdots,i_n)\in Z^n$. 即$a$可用 n 维整数空间中的点$\widetilde{a}$表示. 称$\widetilde{a}$是$a$的坐标.

本节余下讨论中令$L=\prod_{j\in J}L_j$.

定义 2.2.2 设$h: L\to N$，对于任意$\alpha\in L$，

$$h(\alpha)=h(p((i_1,i_2,\cdots,i_n)))=\sum_{k=1}^{n}i_k+1$$

则称h是L的维数函数.

定理 2.2.6 设$e_1=(\underbrace{1,0,\cdots,0}_{n})$，$e_2=(\underbrace{0,1,0,\cdots,0}_{n})$，$\cdots$，$e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n})\in Z^n$，则$p(e_i)$是$L$的原子，$i=1,2,\cdots,n$.

定理 2.2.7 设$1\le k_j\le m_j-1$，$j\in J$，令：

$$k_1\cdot e_1=(k_1,0,\cdots,0)\in Z^n$$

$$k_2\cdot e_2=(0,k_2,0,\cdots,0)\in Z^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k_n\cdot e_n=(0,\cdots,0,k_n)\in Z^n$$

则 $p(k_j\cdot e_j)=p((\underbrace{0,\cdots,0,k_j,0,\cdots,0}_{n}))\in Z^n$ 是 L 的分子，并且上述表达给出 L 的全部分子.

证明　根据分子的定义证明，仅需考察 $p(k_i\cdot e_i)$. 假设存在 $b,c\in L$，$b\vee c=p(k_i\cdot e_i)$，且 $b\neq c$，令 $b=p((s_1,s_2,\cdots,s_n))$，$c=p((t_1,t_2,\cdots,t_n))$

则 $b\vee c=p((s_1\vee t_1,s_2\vee t_2,\cdots,s_n\vee t_n))=p(k_i\cdot e_i)$.

故：
$$\begin{aligned}&s_1\vee t_1=0\\&\quad\vdots\\&s_{i-1}\vee t_{i-1}=0\\&s_i\vee t_i=k_i\\&s_{i+1}\vee t_{i+1}=0\\&\quad\vdots\\&s_n\vee t_n=0\end{aligned}$$

从而有：$s_1=\cdots=s_{i-1}=s_{i+1}=\cdots=s_n=0$；

$t_1=\cdots=t_{i-1}=t_{i+1}=\cdots=t_n=0$；

$s_i\vee t_i=k_i$.

由于 $s_i,t_i\in Z$，则 $k_i=s_i$ 或 $k_i=t_i$. 这表明 $p(k_i\cdot e_i)=b$ 或 $p(k_i\cdot e_i)=c$. 即 $p(k_i\cdot e_i)$ 是分子.

设 α 是 L 中除 $p(k_j\cdot e_j)$，$1\le j\le n,1\le k_j\le m_j-1$ 之外的分子. 设
$$\alpha=p((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)),$$
则存在 $\alpha_{l_1},\alpha_{l_2}\ge 1,l_1\neq l_2,1\le l_1,l_2\le n$,否则
$$\alpha\in\{p(k_j\cdot e_j)\mid 1\le j\le n,1\le k_j\le m_j-1\}.$$
令
$$\hat{\alpha}_1=p((0,\cdots,0,\alpha_{l_1},0,\cdots,0,\cdots,0,\alpha_{l_2},0,\cdots,0));$$
$$\breve{\alpha}_2=p((\alpha_1,\cdots,\alpha_{l_1-1},0,\alpha_{l_1+1},\cdots,\alpha_{l_2-1},0,\alpha_{l_2+1},\cdots,\alpha_n)).$$
显然，$\hat{\alpha}_1\vee\breve{\alpha}_2=\alpha$，但是 $\hat{\alpha}_1\neq\alpha$ 且 $\breve{\alpha}_2\neq\alpha$. 这与 α 是 L 中的分子矛盾.

在 L 中定义“$\hat{+}$”运算：设 $\theta\in Z^n$，$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)$，$\alpha,\beta\in L$

则 $\alpha \hat{+} \theta = \beta \Leftrightarrow_{def} p(\tilde{\alpha}+\theta) = p(\tilde{\beta})$

其中 $p(\tilde{\alpha}) = \alpha, p(\tilde{\beta}) = \beta$.

即$\alpha \hat{+} \theta = \beta$表示$\alpha$,β的坐标之间满足关系式$\tilde{\alpha}+\theta = \tilde{\beta}$.

(1) 若θ满足：$\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 0$，称$\theta$为水平移动量；

(2) 若θ满足：$\sum_{i=1}^{n}\theta_i > 0$，$\theta_i \ge 0, 1 \le i \le n$，称$\theta$为$I-$向移动量；

(3) 若θ满足：$\sum_{i=1}^{n}\theta_i < 0$，$\theta_i \le 0, 1 \le i \le n$，称$\theta$为$O-$向移动量；

(4) 除上述(1)(2)(3)之外，称θ为任意移动量.

定理 2.2.8 若L是一个有限个有限链的乘积构成的格蕴涵代数，$\alpha,\beta \in L$，若$\alpha \hat{+} \theta = \beta$，则

(1) θ为水平移动量，$\alpha \to \beta = p(M \wedge (M-\theta))$；

(2) θ为$I-$向移动量，$\beta \to \alpha = p(M-\theta)$；

(3) θ为$O-$向移动量，$\alpha \to \beta = p(M+\theta)$；

(4) θ为任意移动量，$\alpha \to \beta = p(M \wedge (M-\theta))$.

其中$M = (m_1-1, m_2-1, \cdots, m_n-1)$.

定理 2.2.9 （蕴涵平行规则）

设θ为移动量，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2 \in L$，并且满足：$\alpha_1 \hat{+} \theta = \beta_1$，$\alpha_2 \hat{+} \theta = \beta_2$，则

$$\alpha_1 \to \beta_1 = \alpha_2 \to \beta_2,\quad \beta_1 \to \alpha_1 = \beta_2 \to \alpha_2.$$

证明 由定理 2.2.8 知：

(1) 若θ为水平移动量，则

$$\alpha_1 \to \beta_1 = \alpha_2 \to \beta_2 = p(M \wedge (M-\theta));$$

$$\beta_1 \to \alpha_1 = \beta_2 \to \alpha_2 = p(M \wedge (M+\theta)).$$

(2) 若θ为$I-$向移动量，则

$$\alpha_1 \to \beta_1 = \alpha_2 \to \beta_2 = p(M) = I;$$

$$\beta_1 \to \alpha_1 = \beta_2 \to \alpha_2 = p(M-\theta).$$

(3) 若θ为O－向移动量，则

$$\alpha_1 \to \beta_1 = \alpha_2 \to \beta_2 = p(M \wedge (M+\theta))\text{；}$$

$$\beta_1 \to \alpha_1 = \beta_2 \to \alpha_2 = p(M) = I\text{.}$$

(4) 若θ为任意移动量，则

$$\alpha_1 \to \beta_1 = \alpha_2 \to \beta_2 = p(M \wedge (M-\theta))\text{；}$$

$$\beta_1 \to \alpha_1 = \beta_2 \to \alpha_2 = p(M \wedge (M+\theta))\text{.}$$

蕴涵平行规则描述了有限链的乘积构成的格蕴涵代数中不可比元之间的蕴涵规律.

对于任意$\alpha,\beta \in L$，令

$$\alpha \otimes \beta = (\alpha \to \beta')'$$

$$\alpha \oplus \beta = \alpha' \to \beta$$

则由格蕴涵代数的性质，容易证明：

定理 2.2.10 对于任意的$x,y,z \in L$，

(1) $x \oplus (y \vee z) = (x \oplus y) \vee (x \oplus z)$，$x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$；

(2) $(y \vee z) \oplus x = (y \oplus x) \vee (z \oplus x)$，$(y \wedge z) \oplus x = (y \oplus x) \wedge (z \oplus x)$；

(3) $x \oplus y = (x' \otimes y')'$，$x \otimes y = (x' \oplus y')'$；

(4) $x \to (y \oplus z) = y \oplus (x \to z)$；

(5) $(y \oplus z) \to x = x \oplus (y \oplus z)'$.

定理 2.2.11 对于任意的$x,y,z,\alpha,\beta \in L$，

(1) 若$x \le \alpha$，$y \le \beta$，则$x \otimes y \le \alpha \otimes \beta$，$x \oplus y \le \alpha \oplus \beta$；

(2) $x \otimes y = y \otimes x$，$x \oplus y = y \oplus x$；

(3) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$，$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$；

(4) $O \otimes x = O$，$O \oplus x = x$；

(5) $I \otimes x = x$，$I \oplus x = I$；

(6) $x \otimes x' = O$，$x \oplus x' = I$；

(7) $x \otimes y \le x \wedge y \le x \vee y \le x \oplus y$.

定理 2.2.12 对于任意的$x,y,z \in L$，$m,n \in N$，有：

(1) $x^m = (mx')'$；

(2) $(x^m \to (y \to z)) \to ((x^n \to y) \to (x^{m+n} \to z)) = I$；

其中

$x^2 = x \otimes x$， $x^m = x^{m-1} \otimes x$；

$2x = x \oplus x$， $mx = (m-1)x \oplus x$.

证明

(1) 采用数学归纳法：

当$m = 1$，显然$x = (x')'$；

假设当$m \le k$时，结论成立. 那么当$m = k+1$时，

$$\begin{aligned} x^{k+1} = x^k \otimes x &= ((kx')' \to x')' \\ &= (x \to (kx'))' \\ &= ((k-1)x' \oplus (x \to x'))' \\ &= ((k-1)x' \oplus 2x')' \\ &= ((k+1)x')' \end{aligned}$$

故对于任意$m \in N$，结论成立.

(2) 根据(1)的结论以及定理2.2.9的结论，有

$$\begin{aligned} &(x^m \to (y \to z)) \to ((x^n \to y) \to (x^{m+n} \to z)) \\ &= ((mx')' \to (y \to z)) \to (((nx')' \to y) \to (((m+n)x')' \to z)) \\ &= (mx' \oplus (y \to z)) \to ((nx' \oplus y) \to ((m+n)x' \oplus z)) \\ &= (mx' \oplus y' \oplus z) \to ((m+n)x' \oplus z \oplus (nx' \oplus y)') \\ &= ((mx' \oplus z) \oplus y') \to ((mx' \oplus z) \oplus (nx' \oplus (nx' \oplus y)')) \qquad (*) \end{aligned}$$

记$nx' = w$，因为

$$w \oplus (w \oplus y)' = w' \to (w' \to y)' = (w' \to y) \to w = (y' \to w) \to w = y' \vee w \ge y'$$

故$(*) = I$，从而结论成立.

§2.3 一类蕴涵不等式的解的性质

随着计算机技术的发展以及计算机技术的广泛应用，智能控制与智能信息处理成为人们关注的一个热点. 经典控制研究的对象是确定性的控制系统，它的运行规律可以用微分方程、状态方程等经典的数学手段加以全面而有效地刻

画，本质上可以进行数值形式的计算与描述. 而智能控制研究的对象往往是复杂的、非线性的、大滞后的、不清晰且不易用确切的数学模型有效刻画的控制系统，即充满不确定性的一种信息系统. 事实上，因为它是仿人智能的一种信息处理系统，而通过采集信息、反馈信息和作出控制对某对象实施控制的过程，除局部进行少量数值计算外，从整体结构上讲基本上都不是进行数值计算去实施控制的过程，而是根据一定(通常已经给出)的推理规则，采用一定的不确定性推理方式，经过一系列推理、判断从而快速决策(控制)的过程. 智能控制的推理规则 R 实质上是一组蕴涵关系，通常表现为“如果 A，则 B”这样的形式.

本节中针对在近似推理中较常用的广义肯定式推理模型与广义否定式推理模型，提出一类简单的模糊蕴涵不等式，并对它们的解的一些基本定理进行讨论.

“蕴涵”关系表示的是“如果…，则…”这样的判断. 人们已经提出几十种具体的蕴涵的概念，这些蕴涵概念各有优点，较为常见的有 Lukasiewicz 蕴涵、Kleene 蕴涵、Goguen 蕴涵等. 吴望名曾给出了一个一般的“模糊蕴涵算子”的定义，其取值在[0,1]区间上. 本节给出如下更为广泛的定义：本节中L表示一般的格，

定义 2.3.1 设L是一个有泛界I，O的有余格，映射$f:L\times L\to L$称为正常格值蕴涵算子(简称格值蕴涵算子)，如果满足：

(1) $f(I,O)=O$，$f(O,O)=f(O,I)=f(I,I)=I$；

(2) f关于第一个变量单调减，关于第二个变量单调增.

如果f不满足(1)则称为非正常的(或异常的)格值蕴涵算子.

可以看出“格值蕴涵算子”是“模糊蕴涵算子”的拓广，它描述了现实生活中不可比较概念构成近似推理规则时应满足的一些基本条件.

例 2.3.1 格蕴涵代数中的蕴涵运算“$\to$”满足定义 2.3.1，因此“$\to$”是一个格值蕴涵算子.

定义 2.3.2 称含有格值蕴涵算子的不等式为蕴涵不等式，简称不等式.

本节所讨论的是$f(a,x)$□b和$f(x,a)$□b形式的不等式，其中□表示≤或≥，为行文方便记f为$\to$，而将$f(x,y)$写为$x\to y$，本节中格值蕴涵算子采用

Lukasiewicz 蕴涵算子与格蕴涵代数中的蕴涵算子，分别表示为$\to_L$ 与$\to_{LIA}$. 显然可以证明它们满足如下性质:

引理 2.3.1 Lukasiewicz 蕴涵算子与格蕴涵代数中的蕴涵算子满足:

(1) 对任意的$a\in L$，$O\to a=I$.

(2) 对任意的$a\in L$，$I\to a=a$.

(3) 对任意的$a\in L$，$a\to a=I$.

(4) 对任意的$a,b\in L$，$a\to b\geq b$.

(5) 对任意的$a,b,c\in L$，$a\to(b\to c)=b\to(a\to c)$.

(6) 对任意的$a,b\in L$，$a\to b=b'\to a'$.

(7) 对任意的$a,b\in L$，$a\to b=I$ 当且仅当$a\leq b$.

下面讨论型如$a\to x\Box b$ 不等式解的性质.

形式如上的不等式以广义肯定式推理模型为背景. 现分别考虑如下两类具体情况:

$$a\to x\geq b \qquad (1)$$

$$a\to x\leq b \qquad (2)$$

定理 2.3.1 设$(L,\vee,\wedge,',\to_{LIA})$是一个格蕴涵代数，对于任意的$a,b\in L$，不等式(1)的解集是$L$ 的凸子格，并且对任意$x\in L$，x是不等式(1)的解，当且仅当$x\geq b\otimes a$，其中$b\otimes a=(b\to a')'$.

证明 根据格蕴涵代数的性质，不等式(1)的解集是L 的凸子格，显然.

因为x是不等式(1)的解，所以$a\to x\geq b$. 根据引理 2.3.1 的(5)、(6)和(7)有:

$$I=b\to(a\to x)=b\to(x'\to a')=x'\to(b\to a')$$
$$=(b\to a')'\to x=b\otimes a\to x$$

这表明$b\otimes a\leq x$.

如果x满足$x\geq b\otimes a$，那么

$$a\to x\geq a\to b\otimes a=a\to(b\to a')'=(b\to a')\to a'=b\vee a'\geq b$$

这表明x是不等式(1)的解.

推论 2.3.1 令$(L,\vee,\wedge,',\to_{LIA})$是一个格蕴涵代数，则$b\otimes a$是不等式(1)的最小解.

定理 2.3.2 令$L=[0,1]$，$\to$取为$\to_L$，则不等式(1)的解集为：

$$[0\vee(a+b-1),1].$$

证明 假设x是不等式(1)的解，那么$a\to x\geq b$，即

$$1\wedge(1-a+x)\geq b$$

分三种情况讨论：

(1) 当$b=0$时，任意的$x\in[0,1]$都是不等式(1)的解.

(2) 当$0<b<1$时，

如果$1-a\geq b$，则任意的$x\in[0,1]$都是不等式(1)的解.

如果$1-a<b$，则任意的$x\in[(a+b-1),1]$都是不等式(1)的解.

(3) 当$b=1$时，则任意的$x\in[a,1]$都是不等式(1)的解.

综上所述，不等式(1)的解集为$[0\vee(a+b-1),1]$.

定理 2.3.3 不等式(1)的解集具有如下的变化规律:

(1) 当b增大时，解集变小，当b减小时，解集变大;

(2) 当a增大时，解集变小，当a减小时，解集变大.

定理 2.3.4 设$(L,\vee,\wedge,',\to_{LIA})$是一个格蕴涵代数，对于任意的$a,b\in L$，不等式(2)的解集是$L$的凸子格，并且

(1) 如果$b\vee a'=b$，并且$b\neq a'$，则任意的$x\leq b\otimes a$都是不等式(2)的解;

(2) 如果$b\vee a'=a'$，并且$b\neq a'$，则不等式(2)的解集是空集.

定理 2.3.5 设$(L,\vee,\wedge,',\to_{LIA})$是一个格蕴涵代数，对于任意的$a,b\in L$，当$b\neq a'$，并且$x\geq b\to a$时，如果$x$是不等式(2)的解，则$b\vee x'=I$.

定理 2.3.6 令$L=[0,1]$，$\to$取为$\to_L$，则

(1) 当$b=1$，不等式(2)的解集为$[0,1]$;

(2) 当$b\neq1$，

若$a+b\geq1$，则不等式(2)的解集为$[0,a+b-1]$;

若$a+b<1$，则不等式(2)无解.

定理 2.3.7 不等式(2)的解集具有如下的变化规律:

(1) 当b增大时，解集变大，当b减小时，解集变小;

(2) 当a增大时，解集变大，当a减小时，解集变小.

下面讨论型如 $x \to a \Box b$ 的不等式的解的性质.

形式如上的不等式以广义否定式推理模型为背景. 我们分别考虑如下两类具体情况:

$$x \to a \geq b \tag{3}$$

$$x \to a \leq b \tag{4}$$

定理 2.3.8 设 $(L, \vee, \wedge, ', \to_{LIA})$ 是一个格蕴涵代数，对于任意的 $a, b \in L$，不等式(3)的解集是 L 的凸子格，并且对任意 $x \in L$， x 是不等式(3)的解，当且仅当 $x \leq b \to a$.

证明 根据格蕴涵代数的性质，不等式(3)的解集是 L 的凸子格，显然.

因为 x 是不等式(3)的解，所以 $x \to a \geq b$. 根据引理 2.3.1 的(5)、(6)和(7)有:

$$I = b \to (x \to a) = x \to (b \to a)$$

这表明 $x \leq b \to a$.

如果 x 满足 $x \leq b \to a$，那么

$$x \to a \geq (b \to a) \to a = b \vee a \geq b$$

这表明 x 是不等式(3)的解.

推论 2.3.2 如果 $L = [0,1]$，$\to$ 取为 $\to_L$. 则 $x \in [0, (1-b+a) \wedge 1]$ 是不等式(3)的解.

定理 2.3.9 不等式(3)的解集具有如下的变化规律:

(1) 当 b 增大时，解集变小，当 b 减小时，解集变大;

(2) 当 a 增大时，解集变大，当 a 减小时，解集变小.

定理 2.3.10 设 $(L, \vee, \wedge, ', \to_{LIA})$ 是一个格蕴涵代数，对于任意的 $a, b \in L$

(1) 如果 $b \vee a = b$， $a \neq b$，则任意 $x \in [b \to a, I]$ 是不等式(4)的解;

(2) 如果 $b \vee a = a$， $a \neq b$，则不等式(4)无解;

定理 2.3.11 设 $(L, \vee, \wedge, ', \to_{LIA})$ 是一个格蕴涵代数，如果 $a = b$ 且 x 是不等式(4)的解，则 $x \vee a = I$.

定理 2.3.12 不等式(4)的解集具有如下的变化规律:

(1) 当 b 增大时，解集变大，当 b 减小时，解集变小;

(2) 当 a 增大时，解集变小，当 a 减小时，解集变大.

第三章　基于有限链乘积的格值命题逻辑系统

多值逻辑作为一种典型的非经典逻辑，始于本世纪二、三十年代，主要出现在 Lukasiewicz 的研究工作中. Zadeh 模糊集合论的产生，为非经典逻辑的研究提供了有力的数学工具，模糊逻辑以及以模糊逻辑为基础的模糊推理的研究得到了迅速发展.

§ 3.1　$LP(X)$ 中的语义

在本章中，研究真值域为两个有限 Lukasiewicz 链的乘积的格值逻辑系统. 为了行文方便，作如下规定：

设 L_a 是一 $n+1$ 元 Lukasiewicz 链，L_b 是一 $m+1$ 元 Lukasiewicz 链，并且

$$L_a=\{O_a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=I_a\}$$

$$L_b=\{O_b=b_0<b_1<b_2<\cdots<b_m=I_b\}.$$

令 $L=L_{a\times b}=L_a\times L_b$，则 $L=\{(a_i,b_j);a_i\in L_a,0\le i\le n;b_j\in L_b,0\le j\le m\}$.

L 中的运算 $\vee$，$\wedge$，$'$，$\to$，$\otimes$，$\oplus$ 分别按坐标运算. 显然（L，$\vee$，$\wedge$，$'$，$\to$）构成一个格蕴涵代数.

定理 3.1.1　如果 L 的定义同上，并且 $n>1,m>1$，则 L 是非布尔的.

定义 3.1.1　设 $\alpha\in L,k\in N$，若满足 $\alpha^k=O$，则称 k 是 α 的一个幂零指数，记 $E(\alpha)=\min\{k;\alpha^k=O\}$.

定理 3.1.2　设 $t\in N$，$t<E(\alpha)$，$\alpha=p((i,j))\in L$，则

$$\alpha^t=p((0\vee(n-t(n-i)),0\vee(m-t(m-j))).$$

推论 3.1.1　设 $\alpha=p((i,j))\in L$，则

$$\max\{[\frac{n}{n-i}],[\frac{m}{m-j}]\}\le E(\alpha)\le\max\{[\frac{n}{n-i}]+1,[\frac{m}{m-j}]+1\}.$$

定理 3.1.3　设 $\alpha=p((i,j))\in L$，$t\in N$，如果 $t<E(\alpha)$，则 $\alpha^t>O$.

定义 3.1.2 设$\alpha = p((i,j)) \in L$，$\alpha \neq O, I$，若存在$k \in N$，并且α^k是L的分子，则称k为α的分子化指数，其中最小的一个记为$C(\alpha)$，称α为可分子化.

定理 3.1.4 对于任意的$\alpha = p((i,j)) \in L$，

1) 若α可分子化，则$\frac{n}{n-i} \neq \frac{m}{m-j}$；

2) 若α不可分子化，则$\left|[\frac{n}{n-i}]-[\frac{m}{m-j}]\right| = 1$或$\left|[\frac{n}{n-i}]-[\frac{m}{m-j}]\right| = 0$.

其中$[\frac{n}{n-i}]$表示不超过$\frac{n}{n-i}$的最大整数，$[\frac{m}{m-j}]$表示不超过$\frac{m}{m-j}$的最大整数.

证明 设$\alpha = p((i,j)) \in L$，

若α可分子化，则存在$C(\alpha)$，使得$\alpha^{C(\alpha)}$是分子. 根据定理 2.2.6 知：L中的分子只有两种：$p((l,0))$与$p((0,l^*))$，其中$l = 1,2,\cdots,n$，$l^* = 1,2,\cdots,m$.

第一种情况：$\alpha^{C(\alpha)}$是第一类分子

因为$\alpha^{C(\alpha)} = p((0 \vee (n - C(\alpha)(n-i)), 0 \vee (m - C(\alpha)(m-j)))) = p((l,0))$

于是有：
$$m - C(\alpha)(m-j) \leq 0;$$
$$n - C(\alpha)(n-i) = l;$$

即：
$$C(\alpha) \geq \frac{m}{m-j}$$
$$C(\alpha) < \frac{n}{n-i}$$

因此有$\frac{n}{n-i} \neq \frac{m}{m-j}$

第二种情况：$\alpha^{C(\alpha)}$是第二类分子

因为$\alpha^{C(\alpha)} = p((0 \vee (n - C(\alpha)(n-i)), 0 \vee (m - C(\alpha)(m-j)))) = p((0,l^*))$

于是有：
$$n - C(\alpha)(n-i) \leq 0;$$
$$m - C(\alpha)(m-j) = l^*$$

即：
$$C(\alpha) \geq \frac{n}{n-i}$$
$$C(\alpha) < \frac{m}{m-j}$$

因此有$\frac{n}{n-i} \neq \frac{m}{m-j}$；

若α不可分子化，则存在$k \in N$，使得$\alpha^k = O$，$\alpha^{k-1} > O$且α^{k-1}不是分子，故

$$\alpha^k = p((0 \vee (n-k(n-i)), 0 \vee (m-k(m-j)))) = p((0,0)) = O$$

$$\alpha^{k-1} = p((0 \vee (n-(k-1)(n-i)), 0 \vee (m-(k-1)(m-j))) > p((0,0)) = O$$

则有：$n-k(n-i) \le 0$

$m-k(m-j) \le 0$

$n-(k-1)(n-i) > 0$

$m-(k-1)(m-j) > 0$

即：$k-1 < \dfrac{n}{n-i} \le k$

$k-1 < \dfrac{m}{m-j} \le k$

从而有：$\left|[\dfrac{n}{n-i}]-[\dfrac{m}{m-j}]\right| = 1$或$\left|[\dfrac{n}{n-i}]-[\dfrac{m}{m-j}]\right| = 0$

· **引理 3.1.1** 有限 Lukasiewicz 链只有平凡滤子.

证明 设$C_{n+1} = \{O = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = I\}$是$n+1$元有限 Lukasiewicz 链，其中的运算$\to$为：

$$a_i \to a_j = a_{n \wedge (n-i+j)}$$

当$n = 0,1$时，结论显然成立.

当$n > 1$时，显然$\{I\}$是C_{n+1}中的一个平凡滤子. 假设$\{I\} \subset J \subseteq C_{n+1}$是$C_{n+1}$中的一个滤子，如果$x \in J$，$x < a_n = I$，那么：令$x = a_i$，

若 $n-i \ge i$，有 $a_i \to a_0 = a_{n-i} \ge a_i$，$a_i \to a_0 = a_{n-i} \in J$，（如果 $j \ge i$，$a_i \to a_j = a_n \in J$，$a_j \in J$）. 由于J是滤子，则$a_0 \in J$. 从而$J = C_{n+1}$；

若$n-i < i$，有$i > \dfrac{n}{2}$. 由于$i < n$，故有$a_{n-1} \in J$.

（这是因为若$i = n-1$，则由于$x = a_i = a_{n-1} \in J$；若$i < n-1$，由于$a_i \to a_{n-1} = a_n = I \in J$，则$a_{n-1} \in J$）.

由下列诸式：

$$a_i \to a_{i-1} = a_{n-1} \in J, a_i \in J, 得: a_{i-1} \in J$$

$$a_{i-1} \to a_{i-2} = a_{n-1} \in J, a_{i-1} \in J, \text{得}: a_{i-2} \in J$$

$$\vdots$$

$$a_1 \to a_0 = a_{n-1} \in J, a_1 \in J, \text{得}: a_0 \in J$$

得： $C_{n+1} \subseteq J$

从而： $C_{n+1} = J$

综上所述，C_{n+1} 只有平凡滤子.

定理 3.1.5 L 只有如下四个滤子，并且只有 J_a, J_b 是非平凡滤子.

$$J_I = \{p((n,m))\}$$

$$J_a = \{p((n,0)), p((n,1)), \cdots, p((n,m))\}$$

$$J_b = \{p((0,m)), p((1,m)), \cdots, p((n,m))\}$$

$$J_{a\times b} = L$$

证明 显然上述四个是滤子.

下面证明如果 J 是滤子，并且 J 中含有不可比元，则

$$p((n,m-1)) \in J \text{ 且 } p((n-1,m)) \in J$$

设 $\alpha_1 = p((i_1, j_1)) \in J$ 与 $\alpha_2 = p((i_2, j_2)) \in J$ 是 J 中的两个不可比元. 则 $\alpha_1 \wedge \alpha_2, \alpha_1 \vee \alpha_2 \in J$.

不妨设 $i_1 < i_2, j_1 > j_2$，则

$$\alpha_1 \to (\alpha_1 \wedge \alpha_2) = p((n, m - j_1 + j_2)) \in J$$

$$(\alpha_1 \vee \alpha_2) \to \alpha_1 = p((n - i_2 + i_1, m)) \in J$$

但是显然： $p((n,m-1)) \ge p((n, m - j_1 + j_2))$

$$p((n-1,m)) \ge p((n - i_2 + i_1, m))$$

所以： $p((n,m-1)) \in J$ 且 $p((n-1,m)) \in J$.

设 $\theta = p((i_\theta, j_\theta))$ 是 J 中的任一元，所以根据引理 3.1.1 的证明方法可以证明：

$$p((0, j_\theta)) \in J, \quad p((i_\theta, 0)) \in J$$

根据格蕴涵代数的性质，J 是一个凸子格，所以得到

$$p((0,0)) = p((0, j_\theta)) \wedge p((i_\theta, 0)) \in J$$

从而$J=L$. 这就表明L的真滤子中不含有不可比较元.

定义 3.1.3 设X是一个非空集合, X中的元素称为命题变元, $T=L\cup\{',\to\}$是一型, 称X上的自由$T-$代数为命题变元集X上的格值命题逻辑系统$LP(X)$的命题公式代数. 其中对于任意$\alpha\in L$, $ar(\alpha)=0$, $ar(')=1$, $ar(\to)=2$.

显然$LP(X)$可以如下构成:

1) $L\subseteq LP(X)$, $X\subseteq LP(X)$;

2) 若$p\in LP(X)$, 则$p'\in LP(X)$;

3) 若$p,q\in LP(X)$, 则$p\to q\in LP(X)$;

4) 任意$LP(X)$中的公式都是有限次使用 1)、2)、3)得到的.

在$LP(X)$中记$(',p)$为p', 记$(\to,p,q)$为$p\to q$.

定理 3.1.6 $LP(X)$是满足下列条件的最小的Y:

(1) $L\bigcup X\subseteq Y$;

(2) 若$p,q\in Y$, 则$p',p\to q\in Y$.

定理 3.1.7 设$\sigma:X\to LP(X)$是X到X上的自由$T-$代数$LP(X)$的恒等映射, A_s是一个与$LP(X)$同型的$T-$代数, 并且$\tau:X\to A_s$是X到A_s的一个映射, 则存在唯一的$LP(X)$到A_s的同态$\varphi:LP(X)\to A_s$, 使得$\varphi\cdot\sigma=\tau$.

设L是一格蕴涵代数, 根据格蕴涵代数的性质, 对于任意$\alpha,\beta\in L$, 我们有:

$$\alpha\vee\beta=(\alpha\to\beta)\to\beta$$

$$\alpha\wedge\beta=(\alpha'\vee\beta')'=((\alpha'\to\beta')\to\beta')'$$

L可看成是一个与$LP(X)$同型的$T-$代数, 其中$T=L\bigcup\{',\to\}$.

定义 3.1.5 如果映射$v:LP(X)\to L$是一个$T-$代数同态, 则称v是$LP(X)$的一个赋值.

如果v是$LP(X)$的一个赋值, 则对于任意的$\alpha\in L$, $v(\alpha)=\alpha$.

定理 3.1.8 设$f:LP(X)\to L$是一个映射, 则f是一个赋值当且仅当:

(1) 对于任意$\alpha\in L$, $f(\alpha)=\alpha$;

(2) 对于任意$p\in LP(X)$, $f(p')=(f(p))'$;

(3) 对于任意 $p,q\in LP(X)$，$f(p\to q)=f(p)\to f(q)$.

设 $\boldsymbol{F}_L(LP(X))$ 表示 $LP(X)$ 上的全体 $L-$ 型模糊集构成的集合，即

$$\boldsymbol{F}_L(LP(X))=\{f;f:LP(X)\to L\}.$$

显然，如果 v 是 $LP(X)$ 的一个赋值，则有 $v\in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$.

定义 3.1.6 设 $A\in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，称 A 是闭的，如果对于任意 $p,q,r\in LP(X)$，$\alpha\in L$，满足

(1) $A(p\to q)\otimes A(p)\le A(q)$；

(2) $A(p\to q)\otimes A(q\to r)\le A(p\to r)$；

(3) $A(\alpha)\le\alpha$；

(4) $\alpha\to A(p)\le A(\alpha\to p)$.

显然，由(4)对任意 p，$\alpha\le\alpha'\to A(p)\le A(\alpha'\to p)$，所以

$$\alpha\le A(\alpha'\to O)=A(\alpha)\le\alpha$$

因此，$A(\alpha)=\alpha$.

定理 3.1.9 如果 v 是 $LP(X)$ 的一个赋值，则 v 是闭的.

证明 设 v 是 $LP(X)$ 的一个赋值，那么对于任意 $p,q,r\in LP(X)$，$\alpha\in L$：

(1)
$$\begin{aligned}v(p\to q)\otimes v(p)&=(v(p)\to v(q))\otimes v(p)\\&=((v(p)\to v(q))\to(v(p))')'\\&=(((v(q))'\to(v(p))')\to(v(p))')'\\&=((v(q')\to v(p'))\to v(p'))'\\&=((v(q))'\vee(v(p))')'\\&=v(q)\wedge v(p)\\&\le v(q)\text{；}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&v(p\to q)\otimes v(q\to r)\to v(p\to r)\\&=(v(p\to q)\to(v(q\to r))')'\to v(p\to r)\\&=(v(p\to r))'\to(v(p\to q)\to(v(q\to r))')\\&=v(p\to q)\to((v(p\to r))'\to(v(q\to r))')\\&=v(p\to q)\to(v(q\to r)\to v(p\to r))\\&=(v(p)\to v(q))\to((v(q)\to v(r))\to(v(p)\to v(r)))\end{aligned}$$

$$=(v(p)\to v(q))\to(v(p)\to((v(q)\to v(r))\to v(r)))$$
$$=(v(p)\to v(q))\to(v(p)\to(v(q)\vee v(r)))$$
$$=I$$

即 $v(p\to q)\otimes v(q\to r)\le v(p\to r)$；

(3) $v(\alpha)=\alpha\le\alpha$；

(4) $\alpha\to v(p)=v(\alpha)\to v(p)=v(\alpha\to p)$；

综上所述，v是闭的.

定义 3.1.7 设$A\in F_L(LP(X))$，v是$LP(X)$的一个赋值，称v满足A，如果对于任意$p\in LP(X)$，有$A(p)\le v(p)$. 称A是可满足的，如果存在满足A的赋值v.

定义 3.1.8 设$A\in F_L(LP(X))$，$p\in LP(X)$，$\alpha\in L$，称A以真值程度α语义导出p，记为$A\models_\alpha p$，如果对于$LP(X)$的任一满足A的赋值v，均有$v(p)\ge\alpha$.

如果对于$LP(X)$的任一赋值v，均有$v(p)\ge\alpha$、即$\varnothing\models_\alpha p$，则称$p$以真值程度$\alpha$有效；如果$\varnothing\models_I p$，则称$p$为有效公式（或赋值恒真公式）.

在下文中用$\models_\alpha p$代替$\varnothing\models_\alpha p$，用$\models p$代替$\varnothing\models_I p$.

例 3.1.1 根据格蕴涵代数的性质，对于任意的$p,q,r\in LP(X)$，有

$$\models p\to(q\to p)$$
$$\models(p\wedge q)\to p$$
$$\models(p\wedge q)\to q$$
$$\models p\to(q\to p\wedge q)$$
$$\models_{\tau_0}(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$$
$$\models_{\tau_0}(p\to q)\to((p\to q')\to p')$$

其中$\tau_0=p(([\frac{n}{2}],[\frac{m}{2}]))$.

定义 3.1.9 设$p,q\in LP(X)$，称p,q是赋值相等的（简称等值的），记为$p=q$，如果对于$LP(X)$的任意赋值v，均有$v(p)=v(q)$.

定义 3.1.10 设$A\in F_L(LP(X))$，$p,q\in LP(X)$，v是$LP(X)$的满足A的一

个赋值，如果$v(p)=v(q)$，称p,q在(A,v)下赋值相等，记为$p\overset{A,v}{=}q$；如果对于$LP(X)$的任意满足A的赋值v，均有$v(p)=v(q)$，则称p,q在A下赋值相等，记为$p\overset{A}{=}q$.

显然，如果$p=q$，那么对于任意的$A\in F_L(LP(X))$，恒有$p\overset{A}{=}q$，但反之不成立.

定理 3.1.10 设$A\in F_L(LP(X))$，$p,q\in LP(X)$，

(1) $p\overset{A}{=}q$当且仅当：$A\models p\leftrightarrow q$；

(2) $p=q$当且仅当：$\models p\leftrightarrow q$；

其中$p\leftrightarrow q=(p\to q)\wedge(q\to p)$.

证明

(1) 如果$p\overset{A}{=}q$，则对于$LP(X)$的任意满足A的赋值v，均有$v(p)=v(q)$. 故根据格蕴涵代数的性质，有

$$v(p\to q)=v(p)\to v(q)=I;$$

$$v(q\to p)=v(q)\to v(p)=I;$$

从而得到：

$$v(p\leftrightarrow q)=v(p\to q)\wedge v(q\to p)=I;$$

即 $A\models p\leftrightarrow q$.

反之，如果$A\models p\leftrightarrow q$，则对于$LP(X)$的任意满足$A$的赋值$v$，有

$$\begin{aligned}I\le v(p\leftrightarrow q)&=v((p\to q)\wedge(q\to p))\\&=v(p\to q)\wedge v(q\to p)\end{aligned}$$

从而得到：

$$v(p)\to v(q)=v(p\to q)=I;$$

$$v(q)\to v(p)=v(q\to p)=I;$$

根据格蕴涵代数的性质，故得：

$$v(p)\le v(q)\text{ 且 }v(q)\le v(p)$$

即 $v(p)=v(q)$.

由于v是$LP(X)$的任意满足A的赋值，从而有$p\overset{A}{=}q$.

(2) 同理可证$p=q$当且仅当：$\models p\leftrightarrow q$.

定理 3.1.11 设$A\in F_L(LP(X))$，$p,q\in LP(X)$，如果$p=q$，则$p\overset{A}{=}q$

定理 3.1.12 设$A\in F_L(LP(X))$，$p,q\in LP(X)$，$\alpha\in L$，如果$p\overset{A}{=}q$则：$A\models_\alpha p$当且仅当$A\models_\alpha q$.

证明 如果$p\overset{A}{=}q$，则对于$LP(X)$的任意满足A的赋值v，有

$$v(p)=v(q).$$

此外，因为$A\models_\alpha p$，所以对于$LP(X)$的任意满足A的赋值v，有

$$v(p)\geq\alpha.$$

从而有 $$v(q)\geq\alpha.$$

即 $$A\models_\alpha q.$$

反之，亦可以证明.

定理 3.1.13 “$\overset{A}{=}$”是$LP(X)$上的同余关系.

证明 设$A\in F_L(LP(X))$，$p,q,r\in LP(X)$，

(1) $p\overset{A}{=}p$，显然成立；

(2) 如果$p\overset{A}{=}q$，则$q\overset{A}{=}p$，显然成立；

(3) 如果$p\overset{A}{=}q$，$q\overset{A}{=}r$，则对于$LP(X)$的任意满足A的赋值v，有

$$v(p)=v(q),\quad v(q)=v(r)$$

从而 $$v(p)=v(r)$$

由v的任意性，得到：$p\overset{A}{=}r$.

以上证明了“$\overset{A}{=}$”是$LP(X)$上的等价关系. 下面证明“$\overset{A}{=}$”是保运算的.

(4) 如果$p\overset{A}{=}q$，则对于$LP(X)$的任意满足A的赋值v，有

$$v(p)=v(q).$$

故 $$v(p')=(v(p))'=(v(q))'=v(q')$$

即 $p' \overset{A}{=} q'$；

(5) 如果 $p_1 \overset{A}{=} q_1$，$p_2 \overset{A}{=} q_2$，则对于 $LP(X)$ 的任意满足 A 的赋值 v，有

$$v(p_1)=v(q_1),\quad v(p_2)=v(q_2)$$

从而得到

$$v(p_1 \to p_2)=v(p_1)\to v(p_2)=v(q_1)\to v(q_2)=v(q_1 \to q_2)$$

即 $p_1 \to p_2 \overset{A}{=} q_1 \to q_2$；

以上证明了“$\overset{A}{=}$”是保运算的.

综上所述，“$\overset{A}{=}$”是 $LP(X)$ 上的一个同余关系.

由于，“$\overset{A}{=}$”是 $LP(X)$ 上的一个同余关系，令

$$\overline{LP(X)} = LP(X)\big/\overset{A}{=} = \{\overline{p}; p \in LP(X)\}$$

其中，$\overline{p} = \{q \in LP(X); q \overset{A}{=} p\}$.

在 $\overline{LP(X)}$ 上定义一元运算“$'$”以及二元运算“$\vee$、$\wedge$、$\to$”如下：对于任意的 $\overline{p},\overline{q} \in \overline{LP(X)}$，

$$(\overline{p})' = \overline{p'};$$

$$\overline{p} \vee \overline{q} = \overline{p \vee q};$$

$$\overline{p} \wedge \overline{q} = \overline{p \wedge q};$$

$$\overline{p} \to \overline{q} = \overline{p \to q}.$$

定理 3.1.14 $(\overline{LP(X)},\vee,\wedge,',\to)$ 构成一个格蕴涵代数.

证明

(1) 首先证明 $(\overline{LP(X)},\vee,\wedge,')$ 是一个有泛界的有余格.

i) 对于任意的 $\overline{x} \in \overline{LP(X)}$，根据上面关于运算 $\vee$、$\wedge$ 的定义和格蕴涵代数的性质，有：

$$\overline{x} \vee \overline{x} = \overline{x \vee x} = \overline{(x \to x) \to x} = \overline{I \to x} = \overline{x};$$

$$\overline{x} \wedge \overline{x} = \overline{x \wedge x} = \overline{((x' \to x') \to x')'} = \overline{(I \to x')'} = \overline{(x')'} = \overline{x};$$

这表明 $(\overline{LP(X)},\vee,\wedge)$ 满足幂等律.

ii) 对于任意的 $\bar{x},\bar{y}\in\overline{LP(X)}$，根据上面关于运算∨、∧的定义和格蕴涵代数的性质，有：

$$\bar{x}\vee\bar{y}=\overline{x\vee y}=\overline{(x\to y)\to y}=\overline{(y\to x)\to x}=\overline{y\vee x}=\bar{y}\vee\bar{x}\,;$$

$$\bar{x}\wedge\bar{y}=\overline{x\wedge y}=\overline{(x'\vee y')'}=\overline{((x'\to y')\to y')'}$$
$$=\overline{((y'\to x')\to x')'}=\overline{y\wedge x}=\bar{y}\wedge\bar{x}\,;$$

这表明 $(\overline{LP(X)},\vee,\wedge)$ 满足交换律.

iii) 对于任意的 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in\overline{LP(X)}$，根据上面关于运算∨、∧的定义和格蕴涵代数的性质，有：

$$(\bar{x}\wedge\bar{y})\wedge\bar{z}=\overline{x\wedge y}\wedge\bar{z}$$
$$=\overline{(x'\vee y')'}\wedge\bar{z}$$
$$=\overline{(x'\vee y')'\wedge z}$$
$$=\overline{((x'\vee y')\vee z')'}$$
$$=\overline{((((x'\to y')\to y')\to z')\to z')'}\,;$$

$$\bar{x}\wedge(\bar{y}\wedge\bar{z})=\bar{x}\wedge\overline{y\wedge z}$$
$$=\bar{x}\wedge\overline{(y'\vee z')'}$$
$$=\overline{x\wedge(y'\vee z')'}$$
$$=\overline{(x'\vee(y'\vee z'))'}$$
$$=\overline{((x'\to((y'\to z')\to z'))\to((y'\to z')\to z'))'}$$

由于在格蕴涵代数中，有：

$$(((x'\to y')\to y')\to z')\to z'=(x'\vee y')\vee z'$$

$$=x'\vee(y'\vee z')=(x'\to((y'\to z')\to z'))\to((y'\to z')\to z')\,;$$

从而成立： $(\bar{x}\wedge\bar{y})\wedge\bar{z}=\bar{x}\wedge(\bar{y}\wedge\bar{z})$.

又因为： $(\bar{x}\vee\bar{y})\vee\bar{z}=\overline{x\vee y}\vee\bar{z}=\overline{(x\vee y)\vee z}$

$$=\overline{x\vee(y\vee z)}=\bar{x}\vee\overline{y\vee z}=\bar{x}\vee(\bar{y}\vee\bar{z})$$

从而成立 $(\bar{x}\vee\bar{y})\vee\bar{z}=\bar{x}\vee(\bar{y}\vee\bar{z})$;

这表明 $(\overline{LP(X)},\vee,\wedge)$ 满足结合律.

iv) 对于任意的 $\bar{x},\bar{y}\in\overline{LP(X)}$，根据上面关于运算 $\vee$、$\wedge$ 的定义和格蕴涵代数的性质，有:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}) &= \bar{x}\wedge\overline{x\vee y}=\overline{x\wedge(x\vee y)}\\
&=\overline{(x'\vee(x\vee y)')'}=\overline{((x\vee y)'\vee x')'}\\
&=\overline{((((x\to y)\to y)'\to x')\to x')'}\\
&=\overline{((x\to((x\to y)\to y))\to x')'}\\
&=\overline{(((x\to y)\to(x\to y))\to x')'}\\
&=\overline{(I\to x')'}=(\overline{x'})'=\bar{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{x}\vee(\bar{x}\wedge\bar{y}) &= \bar{x}\vee\overline{x\wedge y}=\overline{x\vee(x\wedge y)}\\
&=\overline{x\vee(x'\vee y')'}=\overline{(x'\vee y')'\vee x}\\
&=\overline{((x'\vee y')'\to x)\to x}\\
&=\overline{(x'\to((x'\to y')\to y'))\to x}\\
&=\overline{((x'\to y')\to(x'\to y'))\to x}\\
&=\overline{I\to x}=\bar{x}
\end{aligned}
$$

这表明 $(\overline{LP(X)},\vee,\wedge)$ 满足吸收律.

至此，证明了 $(\overline{LP(X)},\vee,\wedge)$ 构成一个格. 其中的序关系“$\leqslant$”为:

$\bar{x}\le\bar{y}$ 当且仅当: $\bar{x}\vee\bar{y}=\bar{y}$

当且仅当: 对于 $LP(X)$ 的任意满足 A 的赋值 v，有 $v(x\vee y)=v(y)$

当且仅当: 对于 $LP(X)$ 的任意满足 A 的赋值 v，有 $v(x)\le v(y)$

v) 显然在上述定义的序关系之下，$\bar{O}$ 与 $\bar{I}$ 是 $\overline{LP(X)}$ 的泛界.

vi) 对于任意的 $\bar{x},\bar{y}\in\overline{LP(X)}$，任意的 $LP(X)$ 满足 A 的赋值 v，如果 $\bar{x}\le\bar{y}$，则由序关系的定义可知: $v(x)\le v(y)$

从而 $(v(y))'\le(v(x))'$

$$v(y')=(v(y))'\le(v(x))'=v(x')$$

故 $\qquad \bar{y}' \le \bar{x}'$

此外，$((\bar{x})')' = (\overline{x'})' = \overline{(x')'} = \bar{x}$；

这就证明了一元运算“′”是$\overline{LP(X)}$上的余运算.

至此，证明了$(\overline{LP(X)}, \vee, \wedge, ')$是一个有泛界的有余格.

(2) 其次证明二元运算“→”满足格蕴涵代数的定义：对于任意$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \overline{LP(X)}$

i) $\bar{x} \to (\bar{y} \to \bar{z}) = \bar{x} \to \overline{y \to z} = \overline{x \to (y \to z)}$

$$= \overline{y \to (x \to z)} = \bar{y} \to \overline{x \to z} = \bar{y} \to (\bar{x} \to \bar{z})$$

ii) $\bar{x} \to \bar{x} = \overline{x \to x} = \bar{I}$

iii) 如果$\bar{x} \to \bar{y} = \bar{y} \to \bar{x} = \bar{I}$，则对于任意的$LP(X)$满足$A$的赋值$v$，有：

$$v(x) \to v(y) = v(x \to y) = v(I) = I\text{；}$$

$$v(y) \to v(x) = v(y \to x) = v(I) = I\text{；}$$

从而得 $\qquad v(x) \le v(y)$，$v(y) \le v(x)$

即 $\qquad v(x) = v(y)$

这表明：$\quad y \overset{A}{=} x$，即 $\quad \bar{y} = \bar{x}$.

iv) $(\bar{x} \to \bar{y}) \to \bar{y} = \overline{x \to y} \to \bar{y} = \overline{(x \to y) \to y}$

$$= \overline{x \vee y}$$

$$= \overline{(y \to x) \to x} = \overline{y \to x} \to \bar{x} = (\bar{y} \to \bar{x}) \to \bar{x}$$

v) $\bar{x} \to \bar{y} = \overline{x \to y} = \overline{y' \to x'} = \overline{y'} \to \overline{x'} = \bar{y}' \to \bar{x}'$

vi) $(\bar{x} \vee \bar{y}) \to \bar{z} = \overline{x \vee y} \to \bar{z} = \overline{(x \vee y) \to z} = \overline{(x \to z) \wedge (y \wedge z)}$

$$= \overline{x \to z} \wedge \overline{y \to z} = (\bar{x} \to \bar{z}) \wedge (\bar{y} \to \bar{z})$$

vii) $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \to \bar{z} = \overline{x \wedge y} \to \bar{z} = \overline{(x \wedge y) \to z} = \overline{(x \to z) \vee (y \wedge z)}$

$$= \overline{x \to z} \vee \overline{y \to z} = (\bar{x} \to \bar{z}) \vee (\bar{y} \to \bar{z})$$

综合(1)、(2)的证明，知$(\overline{LP(X)}, \vee, \wedge, ', \to)$构成一个格蕴涵代数.

定理 3.1.15 设$A \in F_L(LP(X))$，v是$LP(X)$上的一个满足A的赋值，令

$$\bar{v} : \overline{LP(X)} \to L$$

满足：对于任意$\bar{x}\in\overline{LP(X)}$，

$$\bar{v}(\bar{x})=v(x)$$

则$\bar{v}$是一个格蕴涵满同态.

证明 因为v是$LP(X)$上的一个满足A的赋值，如果$\bar{x},\bar{y}\in\overline{LP(X)}$，并且$\bar{x}=\bar{y}$，那么根据定义有$v(x)=v(y)$，所以$\bar{v}$的定义是合理的.

对于任意的$\alpha\in L$，显然有$\bar{v}(\bar{\alpha})=v(\alpha)=\alpha$，从而$\bar{v}$是一个满射.

对于任意的$\bar{x},\bar{y}\in\overline{LP(X)}$，根据定义得：

$$\bar{v}(\bar{x}\to\bar{y})=\bar{v}(\overline{x\to y})=v(x\to y)=v(x)\to v(y)=\bar{v}(\bar{x})\to\bar{v}(\bar{y})$$

$$\begin{aligned}\bar{v}(\bar{x}\vee\bar{y})&=\bar{v}(\overline{x\vee y})=v(x\vee y)=v((x\to y)\to y)\\&=(v(x)\to v(y))\to v(y)=v(x)\vee v(y)=\bar{v}(\bar{x})\vee\bar{v}(\bar{y})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{v}(\bar{x}\wedge\bar{y})&=\bar{v}(\overline{x\wedge y})=v(x\wedge y)=v((x'\vee y')')\\&=((v(x')\to v(y'))\to v(y'))'=v(x)\wedge v(y)=\bar{v}(\bar{x})\wedge\bar{v}(\bar{y})\end{aligned}$$

$$\bar{v}((\bar{x})')=\bar{v}(\overline{x'})=v(x')=(v(x))'=(\bar{v}(\bar{x}))'$$

可以看出$\bar{v}$既是一个格同态又是一个蕴涵同态，并且$\bar{v}$是满的.

定义 3.1.11 设$A\in F_L(LP(X))$、$p\in LP(X)$，$\alpha\in L$，称p在A中α真，记为$A\Vdash_\alpha p$，如果

$$\alpha=\wedge\{v(p);v\text{是满足}A\text{的}LP(X)\text{的赋值}\}.$$

以下记$A\Vdash_I p$为$A\Vdash p$，记$\varnothing\Vdash_I p$为$\Vdash p$.

定理 3.1.16 设$A\in F_L(LP(X))$，$p\in LP(X)$，$\alpha\in L$，则$A\models_\alpha p$当且仅当$A\models\alpha\to p$.

证明

必要性 如果$A\models_\alpha p$，则对于任意$LP(X)$的满足A的赋值v，恒有：

$$v(p)\geq\alpha,$$

根据格蕴涵代数的性质，得到：

$$I=\alpha\to v(p)=v(\alpha)\to v(p)=v(\alpha\to p).$$

即表明 $A\models\alpha\to p$；

充分性 如果$A\models\alpha\to p$，则对于任意$LP(X)$的满足A的赋值v，恒有：

$$v(\alpha \to p) \geq I,$$

所以得到：

$$I \leq v(\alpha \to p) = v(\alpha) \to v(p) = \alpha \to v(p),$$

根据格蕴涵代数的性质，得到：

$$\alpha \leq v(p)$$

这表明 $A \models_\alpha p$.

定理 3.1.17 设 $A \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$p, q \in LP(X)$，$\alpha \in L$，如果满足 $p \overset{A}{=} q$，则 $A \Vdash_\alpha p$ 当且仅当 $A \Vdash_\alpha q$.

证明 由于 $p \overset{A}{=} q$，则对于任意 $LP(X)$ 的满足 A 的赋值 v，恒有：

$$v(p) = v(q)$$

此外，由于 $A \Vdash_\alpha p$，根据定义 3.1.11，知：

$$\alpha = \wedge\{v(p); v\text{是满足}A\text{的}LP(X)\text{的赋值}\}.$$

所以，将 $v(p) = v(q)$ 带入上式得到：

$$\alpha = \wedge\{v(q); v\text{是满足}A\text{的}LP(X)\text{的赋值}\},$$

这表明 $A \Vdash_\alpha q$.

反之，采用同样的方法可以证明.

定理 3.1.18 设 $A, B \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$p, q \in LP(X)$，并且 $B \supseteq A$，$p \overset{A}{=} q$，则 $p \overset{B}{=} q$.

证明 设 v 是任意 $LP(X)$ 的满足 B 的赋值，那么 v 满足 A.

此外，因为 $p \overset{A}{=} q$，所以得到：$v(p) = v(q)$.

根据 v 的任意性，因此 $p \overset{B}{=} q$.

定理 3.1.19 设 $A \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$p \in LP(X)$，$\alpha, \beta \in L$，如果 $A \Vdash_\alpha p$，$\beta \leq \alpha$，则 $A \models_\beta p$.

定理 3.1.20 设 $A \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$p \in LP(X)$，$\alpha \in L$，则

$A \Vdash_\alpha p$ 当且仅当 $A \Vdash_\alpha p$ 且对于任意的 $\beta > \alpha$，$A \models_\beta p$ 不成立.

定理 3.1.21 $\Vdash p$ 当且仅当 $\models p$.

定义 3.1.12 称映射 $f: \boldsymbol{F}_L(LP(X)) \to \boldsymbol{F}_L(LP(X))$ 为一闭包运算，如果 f 满足：对于任意的 $A, B \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$

(1) $A \subseteq f(A)$；

(2) 如果 $A \subseteq B$，则 $f(A) \subseteq f(B)$；

(3) $f(f(A)) = f(A)$.

定理 3.1.22 在 $\boldsymbol{F}_L(LP(X))$ 上定义映射

$$Con: \boldsymbol{F}_L(LP(X)) \to \boldsymbol{F}_L(LP(X))$$

满足：对于任意的 $A \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$

$$Con(A) = \bigcap\{v; v\text{是}LP(X)\text{上满足}A\text{的赋值}\}$$

则 Con 是一个闭包运算.

证明 对于任意的 $A, B \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$

(1) 对于任意的 $p \in LP(X)$，因为 v 是 $LP(X)$ 的满足 A 的赋值，所以

$$A(p) \le v(p)$$

因此得到：

$$A(p) \le \wedge\{v(p); v\text{是}LP(X)\text{上满足}A\text{的赋值}\} = Con(A)(p)$$

即 $\quad A \subseteq Con(A)$；

(2) 假设 $A \subseteq B$. 如果 v 是 $LP(X)$ 的满足 B 的赋值，则 v 是 $LP(X)$ 的满足 A 的赋值，即：

$$\{v: v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\} \supseteq \{v; v\text{是}LP(X)\text{的满足}B\text{的赋值}\}$$

对于任意的 $p \in LP(X)$，有：

$$\begin{aligned} Con(A)(p) &= \wedge\{v(p); v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\} \\ &\le \wedge\{v(p); v\text{是}LP(X)\text{的满足}B\text{的赋值}\} \\ &= Con(B)(p)\text{；} \end{aligned}$$

(3) 如果 v 是 $LP(X)$ 的满足 A 的赋值，对于任意的 $p \in LP(X)$，有：

$$Con(A)(p) = \wedge\{v(p); v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\} \le v(p)$$

从而 v 满足 $Con(A)$，所以：

$$\{v: v是LP(X)的满足A的赋值\} \subseteq \{v; v是LP(X)的满足Con(A)的赋值\}$$

因此得到：

$$\begin{aligned} Con(A)(p) &= \wedge\{v(p); v是LP(X))的满足A的赋值\} \\ &\geq \wedge\{v(p); v是LP(X)的满足Con(A)的赋值\} \\ &= Con(Con(A))(p) \end{aligned}$$

即　$Con(A) \supseteq Con(Con(A))$.

此外，根据(1)的结论，知：

$$Con(A) \subseteq Con(Con(A))$$

故　$Con(A) = Con(Con(A))$.

综上所述，Con 是一个闭包运算.

推论 3.1.2　设 $A \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$p \in LP(X)$，$\alpha \in L$，则

$$A \Vdash_\alpha p \quad 当且仅当 \quad Con(A)(p) = \alpha.$$

定理 3.1.23　设 $A \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$p, q \in LP(X)$，则

$$p \overset{A}{=} q \quad 当且仅当 \quad Con(A)(p \leftrightarrow q) = I.$$

证明　设 v 是 $LP(X)$ 的任意满足 A 的赋值，注意到：

v 满足 A 当且仅当 v 满足 $Con(A)$.

1) 如果 $p \overset{A}{=} q$，那么 $v(p) = v(q)$，即：

$$I = v(p) \to v(q) = v(p \to q);$$

$$I = v(q) \to v(p) = v(q \to p);$$

从而有：

$$I = v(p \to q) \wedge v(q \to p) = v((p \to q) \wedge (q \to p)) = v(p \leftrightarrow q);$$

由 v 的任意性知：

$$\begin{aligned} Con(A)(p \leftrightarrow q) &= \wedge\{v(p \leftrightarrow q); v是LP(X)的满足A的赋值\} \\ &= \wedge\{I; v是LP(X)的满足A的赋值\} = I \end{aligned}$$

2) 如果 $Con(A)(p \leftrightarrow q) = I$，则

$$I = \wedge\{I; v是LP(X)的满足A的赋值\};$$

从而：对于 $LP(X)$ 的任意满足 A 的赋值 v，有：

$$I=v(p\leftrightarrow q)=v(p\to q)\wedge v(q\to p)=(v(p)\to v(q))\wedge(v(q)\to v(p))$$

故： $v(p)\to v(q)=I$ 且 $v(q)\to v(p)=I$

根据格蕴涵代数的性质，知： $v(p)=v(q)$；

所以得到： $p\overset{A}{=}q$.

定理 3.1.24 设 $A\in F_L(LP(X))$，$p\in LP(X)$，令：

$$\beta_0^A(p)=\vee\{\alpha\in L; A\models_\alpha p\}$$

$$\beta_1^A(p)=\wedge\{v(p); v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}=Con(A)(p)$$

则 $\beta_0^A(p)=\beta_1^A(p)$.

证明 首先，因为 L 是一个有限的格蕴涵代数，所以如果 $A\models_\alpha p$，则对于 $LP(X)$ 的任意满足 A 的赋值 v，有：$\alpha\to v(p)=v(\alpha)\to v(p)=I$；反之亦然.

因为
$$\begin{aligned}v(\beta_0^A(p)\to p)&=v(\vee\{\alpha\in L; A\models_\alpha p\}\to p)\\&=v(\vee\{\alpha\in L; A\models_\alpha p\})\to v(p)\\&=\left(\bigvee_{A\models_\alpha p}v(\alpha)\right)\to v(p)\\&=\bigwedge_{A\models_\alpha p}(v(\alpha)\to v(p))=I\end{aligned}$$

所以有： $v(\beta_0^A(p))\le v(p)$

因为 $\beta_0^A(p)\in L$，所以上式表明：

$$\beta_0^A(p)\le v(p)$$

从而证明了： $\beta_0^A(p)\le\wedge\{v(p); v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}=\beta_1^A(p)$；

反之，因为对于 $LP(X)$ 的任意满足 A 的赋值 v'

$$\begin{aligned}v'(\beta_1^A(p)\to p)&=v'(\beta_1^A(p))\to v'(p)\\&=v'(\wedge\{v(p); v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\})\to v'(p)\\&=\bigwedge_{v\text{满足}A}v(p)\to v'(p)\\&=\bigvee_{v\text{满足}A}(v(p)\to v'(p))=I\end{aligned}$$

故 $v'(\beta_1^A(p)\to p)=I$

即是说 $A \models_{\beta_1^A(p)} p$

从而 $\beta_1^A(p) \in \{\alpha \in L; A \models_\alpha p\}$

所以 $\beta_1^A(p) \le \vee\{\alpha \in L; A \models_\alpha p\} = \beta_0^A(p)$

综上所述，$\beta_0^A(p) = \beta_1^A(p)$.

定义 3.1.13 设 $A \in F_L(LP(\overline{X})), \overline{X}$ 是一有限非空集合，称 $D(A,\overline{X})$ 是 $\overline{X}$ 的有值定义域，如果 $D(A,\overline{X}) = \bigcup_{k=1}^{|\overline{X}|} D_k(A,\overline{X})$，$D_k(A,\overline{X}) \subseteq L^k$，满足：

$$D_1(A,\overline{X}) = \{v(x); x \in \overline{X}, v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_k(A,\overline{X}) = \{(v(x_1), v(x_2), \cdots, v(x_k)); \{x_1, x, \cdots, x\} = \overline{X}_k \subseteq \overline{X},\ v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$$

$$D(A,\overline{X}) = \bigcup_{k=1}^{|\overline{X}|} D_k(A,\overline{X}).$$

显然，在 L^n 中的一个区域 $D_n(A,\overline{X})$ 上，经过 $D_n(A,\overline{X})$ 中的每一点，存在且仅存在 $LP(X)$ 的一个满足 A 的赋值 v.

对于 $\overline{LP(X)}$ 中的任一 $\overline{p}(s_1, s_2, \cdots, s_n)$，其中：

$$\{s_1, s_2, \cdots, s_n\} = X_n \subseteq X$$

设 $p(s_1, s_2, \cdots, s_n) \in LP(X)$，满足：

$$\overline{p(s_1, s_2, \cdots, s_n)} = \overline{p}(s_1, s_2, \cdots, s_n)$$

定义 3.1.14 作映射 $f_{\overline{p}}^A : L^n \to L$ 如下：

对于任意的 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in L^n$，存在 $LP(X)$ 的唯一的赋值 v 满足

$$v(s_i) = \alpha_i \qquad 1 \le i \le n$$

令

$$f_{\overline{p}}^A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \begin{cases} v(p(s_1, s_2, \cdots, s_n)) & (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in D_n(A, X) \\ O & (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \notin D_n(A, X) \end{cases}$$

称 $f_{\overline{p}}^A$ 为 L^n 上的一个 $A-$真值函数.

定理 3.1.25 如果$f_{\overline{p}}^{A}$与$f_{\overline{p}_1}^{A}$是L^n上的两个A-真值函数，并且$f_{\overline{p}}^{A}\neq O$，$f_{\overline{p}_1}^{A}\neq O$，则$f_{\overline{p}}^{A}=f_{\overline{p}_1}^{A}$当且仅当$\overline{p}=\overline{p}_1$.

证明 设$p(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in L_{cp}(S)$，$p_1(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in LP(X)$，满足：

$$\overline{p(s_1,s_2,\cdots,s_n)}=\overline{p}$$

$$\overline{p_1(s_1,s_2,\cdots,s_n)}=\overline{p}_1$$

对于$LP(X)$的任一满足A的赋值v，令：

$$v(s_i)=\alpha_i \qquad 1\le i\le n$$

则$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in D_n(A,X)$.

对于$D_n(A,X)$中的任一点$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，存在一个满足$A$的赋值$v$，使得：

$$v(s_i)=\alpha_i \qquad 1\le i\le n$$

从而
$$\begin{aligned} v(p(s_1,s_2,\cdots,s_n)) &= f_{\overline{p}}^{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \\ &= f_{\overline{p}_1}^{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \\ &= v(p_1(s_1,s_2,\cdots,s_n)) \end{aligned}$$

当$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$取遍$D_n(A,X)$中的所有点的时候，同时赋值$v$取遍所有满足$A$的赋值，因此根据$v$的任意性，知：

$$v(p)=v(p_1)$$

故$p\overset{A}{=}p_1$，即$\overline{p}=\overline{p}_1$.

反之，如果$\overline{p}=\overline{p}_1$，则根据$f_{\overline{p}}^{A}$及$f_{\overline{p}_1}^{A}$的定义，结论显然成立.

定理 3.1.26 设$p(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in LP(X)$，$A\in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$\alpha\in L$，则：$A\models_{\alpha} p$当且仅当对于任意的$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in D_n(A,X)$，

$$f_{\overline{p}}^{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\ge\alpha.$$

证明

1) 如果对于任意$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in D_n(A,X)$，$f_{\overline{p}}^{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\ge\alpha$.
对于任一满足A的赋值v，记

$$v(s_i)=\alpha_i \qquad 1\le i\le n$$

根据$D_n(A,X)$的构造，知：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in D_n(A,X)$

故 $\quad v(p(s_1,s_2,\cdots,s_n))=f_{\bar{p}}^{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\ge\alpha$

根据v的任意性，有$A\models_\alpha p$.

2) 假设$A\models_\alpha p$，则对于任一$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in D_n(A,X)$，存在满足$A$的赋值$v$，使得：

$$v(s_i)=\alpha_i \qquad 1\le i\le n$$

并且 $\quad v(p)\ge\alpha$

于是得：$f_{\bar{p}}^{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=v(p(s_1,s_2,\cdots,s_n))\ge\alpha$.

推论 3.1.3 设$p(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in LP(X)$，$A\in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，则$A\models p$当且仅当对于任意的$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in D_n(A,X)$，$f_{\bar{p}}^{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=I$.

定理 3.1.27 设$A\in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$p(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in LP(X)$，$\tau\in L$，则：在$LP(X)$中“$p$在$A$下以真值$\tau$有效”是可以判定的.

证明 由于L是一个有限格蕴涵代数，故：$D_n(A,X)\subseteq L^n$是有限的. 根据定理 3.1.26 以及推论 3.1.3，知：p在A下以真值τ有效当且仅当对于任意的$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in D_n(A,X)$，$f_{\bar{p}}^{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\ge\tau$.从而只需要计算$L^n$中有限个点的值即可.

推论 3.1.4 设$A\in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$p(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in LP(X)$，则：在$LP(X)$中“$p$在$A$下有效”是可以判定的.

§3.2 $LP(X)$中的语法

在本节中讨论格值逻辑系统$LP(X)$的语法问题.

引理 3.2.1 对于任意的$p,q,r\in LP(X)$，$\alpha\in L$，$m,n\in N$，

(1) $\Vert\!= p\to I$；

(2) $\Vert\!= p\to p$；

(3) $\Vert\!= (p\to(q\to r))\to(q\to(p\to r))$；

(4) $\Vdash p \wedge q \to p$；

(5) $\Vdash p \wedge q \to q$；

(6) $\Vdash (p \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r \wedge q))$；

(7) $\Vdash p \to p \vee q$；

(8) $\Vdash q \to p \vee q$；

(9) $\Vdash (p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$；

(10) $\Vdash p \to (q \to p \otimes q)$；

(11) $\Vdash p \to (q \to p \wedge q)$；

(12) $\Vdash p \to (q \to p)$；

(13) $\Vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$；

(14) $\Vdash (p^m \to (q \to r)) \to ((p^n \to q) \to (p^{m+n} \to r))$；

(15) $\Vdash ((mp')' \to (q \to r)) \to (((np')' \to q) \to (((m+n)p')' \to r))$；

(16) $\Vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \otimes q) \to r)$；

(17) $\Vdash (p \to q) \to (q' \to p')$；

(18) $\Vdash (p')' \to p$；

(19) $\Vdash_\alpha \alpha$；

引理 3.2.2 因为L是有限的，所以L是一个完备格，并且满足：对于任意$P \subseteq L$，$\alpha \in L$，

$$\alpha \to \bigvee_{x \in P} x = \bigvee_{x \in P} (\alpha \to x);$$

$$\alpha \to \bigwedge_{x \in P} x = \bigwedge_{x \in P} (\alpha \to x).$$

引理 3.2.3 对于任意$P_1, P_2 \subseteq L$，$\alpha \in L$，则：

(1) $\bigvee_{x \in P_1} x \to \alpha = \bigwedge_{x \in P_1} (x \to \alpha)$；

(2) $\bigwedge_{x \in P_1} x \to \alpha = \bigvee_{x \in P_1} (x \to \alpha)$；

(3) $\alpha \otimes \bigvee_{x \in P_1} x = \bigvee_{x \in P_1} (\alpha \otimes x)$；

(4) $\alpha \otimes \bigwedge_{x \in P_1} x = \bigwedge_{x \in P_1} (\alpha \otimes x)$；

(5) $(\bigvee_{x\in P_1} x)\otimes(\bigvee_{y\in P_2} y)=\bigvee_{\substack{x\in P_1\\ y\in P_2}}(x\otimes y)$；

(6) $(\bigwedge_{x\in P_1} x)\otimes(\bigwedge_{y\in P_2} y)=\bigwedge_{\substack{x\in P_1\\ y\in P_2}}(x\otimes y)$.

定义 3.2.1 格值命题逻辑系统$LP(X)$的公理是如下形式的L-型的模糊集A_L，$A_L\in F_L(LP(X))$，$\varphi\in LP(X)$，

$$A_L(\varphi)=\begin{cases} I, & \varphi\text{是引理3.2.1中(1)～(18)形式的公式;}\\ \alpha, & \varphi=\alpha,\alpha\in L;\\ O, & \text{其它.}\end{cases}$$

定义 3.2.2 设$A\in F_L(LP(X))$，$\varphi\in LP(X)$，从A到φ的一个形式证明$pr(A,\varphi)$是如下形式的有穷序列：

$$(\varphi_1,\alpha_1),(\varphi_2,\alpha_2),\cdots\cdots,(\varphi_n,\alpha_n)$$

其中$\varphi_i\in LP(X)$，$\alpha_i\in L$，$1\le i\le n$，$\varphi_n=\varphi$，并且满足：

(1) φ_i是引理 3.2.1 中(1)~(19)形式的公式，则$A_L(\varphi_i)=\alpha_i$或

(2) $\beta_1^A(\varphi_i)=\alpha_i$或

(3) φ_i是由φ_j，φ_k运用 MP 规则得到，$j,k<i$，则$\alpha_i=\alpha_j\otimes\alpha_k$或

(4) φ_i是由φ_j，φ_k运用 HS 规则得到，$j,k<i$，则$\alpha_i=\alpha_j\otimes\alpha_k$或

(5) $\varphi_i=\alpha\to\varphi_j$，$j<i$，则$\alpha_i=\alpha\to\alpha_j$.

MP 规则是如下的推理规则：

前提 1	$P\to Q$
前提 2	P
结论	Q

HS 规则是如下的推理规则：

前提 1	$P\to Q$
前提 2	$Q\to R$
结论	$P\to R$.

在下文中，将从A到φ的形式证明$pr(A,\varphi)$简称为证明，简记为pr，称n为证明$pr(A,\varphi)$的长度，记为$l(pr(A,\varphi))$或简记为$l(pr)$，称α_n为证明$pr(A,\varphi)$

的值，记为$Val(pr(A,\varphi))$或简记为$Val(pr)$.

定义 3.2.3 设$A\in F_L(LP(X)),\varphi\in LP(X),\alpha\in L$，称$\varphi$是$A$的一个$\alpha-$定理，记为$A\vdash_\alpha\varphi$，如果

$$\alpha\le\vee\{Val(pr);pr\text{是从}A\text{到}\varphi\text{的证明}\}$$

又如果

$$\alpha=\vee\{Val(pr);pr\text{是从}A\text{到}\varphi\text{的证明}\}$$

则记为$A\Vdash_\alpha\varphi$.

如果$\varnothing\vdash_\alpha\varphi$，则称$\varphi$是一个$\alpha-$定理，记为$\vdash_\alpha\varphi$，如果$\varnothing\Vdash_\alpha\varphi$，记为$\Vdash_\alpha\varphi$.

定理 3.2.1 对于任意$\varphi,\psi,\gamma\in LP(X)$，下列各式都是$I-$定理：

(1) $\varphi\to I$；

(2) $\varphi\to\varphi$；

(3) $(\varphi\to(\psi\to\gamma))\to(\psi\to(\varphi\to\gamma))$；

(4) $(\varphi\wedge\psi)\to\varphi$；

(5) $(\varphi\wedge\psi)\to\psi$；

(6) $(\varphi\to\psi)\to((\varphi\to\gamma)\to(\varphi\to\psi\wedge\gamma))$；

(7) $\varphi\to(\varphi\vee\psi)$；

(8) $\psi\to(\varphi\vee\psi)$；

(9) $(\varphi\to\gamma)\to((\psi\to\gamma)\to(\varphi\vee\psi\to\gamma))$；

(10) $(\varphi\to\psi)\to((\psi\to\gamma)\to(\varphi\to\gamma))$；

(11) $\varphi\to(\psi\to(\varphi\otimes\psi))$；

(12) $\varphi\to(\psi\to(\varphi\wedge\psi))$；

(13) $\varphi\to(\psi\to\varphi)$；

(14) $(\varphi^m\to(\psi\to\gamma))\to((\varphi^n\to\psi)\to(\varphi^{m+n}\to\gamma))$；

(15) $(\varphi\to(\psi\to\gamma))\to((\varphi\otimes\psi)\to\gamma)$；

(16) $(\varphi\to\psi)\to(\psi'\to\varphi')$；

(17) $(\varphi')'\to\varphi$；

定理 3.2.2 设 $A\in F_L(LP(X)),\varphi\in LP(X),\alpha,\beta\in L$,如果 $A\vdash_\alpha\varphi,\beta\le\alpha$，则 $A\vdash_\beta\varphi$.

定理 3.2.3 设 $A\in F_L(LP(X)),\varphi\in LP(X),\alpha\in L$，如果 $A\Vdash_\alpha\varphi$，则 $A(\varphi)\le\alpha$.

证明

显然 $(\varphi,\beta_1^A(\varphi))$ 是一个 A 到 φ 的证明. 由于 $A\Vdash_\alpha\varphi$，则:

$$\beta_1^A(\varphi)\le\alpha$$

再根据 $\beta_1^A(\varphi)$ 的定义:

$$\beta_1^A(\varphi)=\wedge\{v(\varphi);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$$

所以有:

$$A(\varphi)\le\beta_1^A(\varphi)=\alpha.$$

定理 3.2.4 $A_L\subseteq Con(\varnothing)=\bigcap\{v;v\text{是}LP(X)\text{的赋值}\}$.

特别地，$A_L\subseteq Con(A)=\bigcap\{v;v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$.

推论 3.2.1 设 $A\in F_L(LP(X))$，$\varphi\in LP(X)$，v 是 $LP(X)$ 的满足 A 的赋值，则 $v(\varphi)\ge A(\varphi)\vee A_L(\varphi)$.

定理 3.2.5 设 $A\in F_L(LP(X))$，$\varphi\in LP(X)$，$\alpha\in L$，如果 $A\vdash_\alpha\varphi$，则对于 $LP(X)$ 的任意满足 A 的赋值 v，$v(\varphi)\ge\alpha$.

证明 往证：对于从 A 到 φ 的任一证明 $pr(A,\varphi)$:

$$(\varphi_1,\alpha_1),\ (\varphi_2,\alpha_2),\ \cdots\cdots,\ (\varphi_n,\alpha_n)$$

都有

$$v(\varphi)\ge Val(pr(A,\varphi))$$

其中 $\varphi_n=\varphi$.

采用数学归纳法，对证明的长度 $l(pr)$ 进行归纳:

1. $l(pr)=1$.

显然，$(\varphi,A_L(\varphi))$ 和 $(\varphi,\beta_1^A(\varphi))$ 都是从 A 到 φ 的证明，

i). 如果 $A_L(\varphi)=\alpha_n$，因为 $A_L\subseteq Con(A)$，所以根据推论 3.2.1 得:

$$v(\varphi) \geq A_L(\varphi) = a_n = Val(pr(A,\varphi))$$

ii) 如果$\beta_1^A(\varphi) = \alpha_n$，根据$\beta_1^A(\varphi)$的定义，知：$\alpha_n = \beta_1^A(\varphi) \leq v(\varphi)$

从而得：

$$v(\varphi) \geq \alpha_n = Val(pr(A,\varphi)).$$

2. 假设对于$l(pr) < m$的证明 pr 结论成立. 下面考虑$l(pr) = m$的证明：

$$(\varphi_1,\alpha_1),(\varphi_2,\alpha_2),\cdots\cdots,(\varphi_m,\alpha_m)$$

其中$\varphi_m = \varphi$.

i) 如果$A_L(\varphi_m) = \alpha_m$或$\beta_1^A(\varphi_m) = \alpha_m$，则仿照 1 的证明过程可证.

ii) 如果φ_m是由φ_i，φ_j运用 MP 规则得到，则$\alpha_m = \alpha_i \otimes \alpha_j$.

根据归纳假设，因为$A\vdash_{\alpha_i}\varphi_i$，$A\vdash_{\alpha_j}\varphi_j$，所以：

$$Val(pr(A,\varphi_i)) = \alpha_i \leq v(\varphi_i)$$

$$Val(pr(A,\varphi_j)) = \alpha_j \leq v(\varphi_j)$$

从而有：

$$\begin{aligned} v(\varphi_m) &\geq v(\varphi_j \to \varphi_m) \otimes v(\varphi_j) \\ &= v(\varphi_i) \otimes v(\varphi_j) \\ &\geq \alpha_i \otimes \alpha_j \\ &= \alpha_m \end{aligned}$$

即： $v(\varphi_m) \geq \alpha_m = Val(pr(A,\varphi_m))$

iii) 如果φ_m是由φ_i，φ_j运用 HS 规则得到，则$\alpha_m = \alpha_i \otimes \alpha_j$.

根据归纳假设，因为$A\vdash_{\alpha_i}\varphi_i$，$A\vdash_{\alpha_j}\varphi_j$，所以：

$$Val(pr(A,\varphi_i)) = \alpha_i \leq v(\varphi_i)$$

$$Val(pr(A,\varphi_j)) = \alpha_j \leq v(\varphi_j)$$

假设$\varphi_m = p \to r$，$\varphi_i = p \to q$，$\varphi_j = q \to r$，则：

$$\begin{aligned} v(\varphi_m) &= v(p \to r) \\ &\geq v(p \to q) \otimes v(q \to r) \\ &= v(\varphi_i) \otimes v(\varphi_j) \end{aligned}$$

$$\geq \alpha_i \otimes \alpha_j$$

$$= \alpha_m$$

即：　$v(\varphi_m) \geq \alpha_m = Val(pr(A, \varphi_m))$.

iv) 如果 $\varphi_m = \alpha_0 \to \varphi_i$，则 $\alpha_m = \alpha_0 \to \alpha_i$.

根据归纳假设，因为 $A|-_{\alpha_i} \varphi_i$，所以：

$$Val(pr(A, \varphi_i)) = \alpha_i \leq v(\varphi_i)$$

从而有：

$$v(\varphi_m) = v(\alpha_0 \to \varphi_i)$$

$$= \alpha_0 \to v(\varphi_i)$$

$$\geq \alpha_0 \to \alpha_i$$

$$= \alpha_m$$

即：　$v(\varphi_m) \geq \alpha_m = Val(pr(A, \varphi_m))$.

综上所述：对于任一从 A 到 φ 的任一证明 $pr(A,\varphi)$，都有

$$v(\varphi) \geq Val(pr(A,\varphi))$$

从而：

$$v(\varphi) \geq \vee\{Val(pr); pr\text{是从}A\text{到}\varphi\text{的证明}\} \geq \alpha.$$

推论 3.2.2　设 $A \in F_L(LP(X))$，$\varphi \in LP(X)$，$\alpha \in L$，如果 $A|-_{\alpha} \varphi$，则 $A|=_{\alpha} \varphi$.

推论 3.2.3　设 $A \in F_L(LP(X))$，$\varphi \in LP(X)$，$\alpha \in L$，如果 $A\|-_{\alpha} \varphi$ 且 v 是 $LP(X)$ 的满足 A 的赋值，则 $v(\varphi) \geq \alpha$.

推论 3.2.4　设 $A \in F_L(LP(X))$，$\varphi \in LP(X)$，$\alpha \in L$，如果 $A\|-_{\alpha} \varphi$，则存在 $\beta \in L$，$\beta \geq \alpha$，使得 $A|=_{\beta} \varphi$.

证明

(1)　如果 A 不可满足，则 $A|=\varphi$，结论显然成立.

(2)　如果 A 可满足，则由推论 3.2.3 知：对于任意的 $LP(X)$ 的满足 A 的赋值 v，

$$v(\varphi) \geq \alpha$$

令 $\beta = \wedge\{v(\varphi); v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$

显然 $\beta \geq \alpha$，并且 $A \Vdash_{\beta} \varphi$，所以 $A \models_{\beta} \varphi$.

定理 3.2.6 设 $A \in F_L(LP(X))$，$\varphi \in LP(X)$，A 是可满足的，令：

$$\beta_2^A(\varphi) = \vee\{Val(pr(A,\varphi)); pr\text{是从}A\text{到}\varphi\text{的证明}\}$$

则：$\beta_1^A(\varphi) = \beta_2^A(\varphi)$.

证明

(1) 很显然 $A \Vdash\!\!-_{\beta_2^A(\varphi)} \varphi$，根据推论 3.2.3 知：对于任意的 $LP(X)$ 的满足 A 的赋值 v，

$$v(\varphi) \geq \beta_2^A(\varphi)$$

故 $\beta_1^A(\varphi) = \wedge\{v(\varphi); v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\} \geq \beta_2^A(\varphi)$

(2) 根据 $\beta_2^A(\varphi)$ 的定义知：对于任意的从 A 到 φ 的证明 $pr(A,\varphi)$，

$$\beta_2^A(\varphi) \geq Val(pr)$$

但是我们知道，$(\varphi, \beta_1^A(\varphi))$ 是一个从 A 到 φ 的证明，因此应该成立：

$$\beta_2^A(\varphi) \geq \beta_1^A(\varphi)$$

综合(1)(2)即得：

$$\beta_1^A(\varphi) = \beta_2^A(\varphi).$$

推论 3.2.5 设 $A \in F_L(LP(X))$，$\varphi \in LP(X)$，A 是可满足的，则：

$$\beta_0^A(\varphi) = \beta_1^A(\varphi) = \beta_2^A(\varphi).$$

推论 3.2.6 设 $A \in F_L(LP(X))$，$\varphi \in LP(X)$，则 $A \Vdash\!\!-_{\beta_1^A(\varphi)} \varphi$.

定理 3.2.7 设 $A \in F_L(LP(X))$，$\varphi, \psi, \gamma \in LP(X)$，$\alpha, \beta, \theta \in L$，如果 $A \vdash_{\alpha} \varphi$，$A \vdash_{\beta} \varphi \to \psi$，$A \vdash_{\theta} \psi \to \gamma$，则

(1) $A \vdash_{\alpha \otimes \beta} \psi$

(2) 对于任意的 $\alpha_0 \in L$，$A \vdash_{\alpha_0 \to \alpha} \alpha_0 \to \varphi$

(3) $A|-_{\beta\otimes\theta}\varphi\to\gamma$

证明

(1) 因为$A|-_{\alpha}\varphi$，$A|-_{\beta}\varphi\to\psi$，所以

$$\alpha\le\wedge\{v(\varphi);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$$

$$\beta\le\wedge\{v(\varphi\to\psi);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$$

所以：

$$\begin{aligned}\alpha\otimes\beta&\le(\wedge\{v_1(\varphi);v_1\text{是满足}A\text{的赋值}\})\otimes(\wedge\{v_2(\varphi\to\psi);v_2\text{是满足}A\text{的赋值}\})\\&=\wedge\{v_1(\varphi)\otimes v_2(\varphi\to\psi);v_1,v_2\text{是满足}A\text{的赋值}\}\\&\le\wedge\{v(\varphi)\otimes v(\varphi\to\psi);v\text{是满足}A\text{的赋值}\}\\&\le\wedge\{v(\psi);v\text{是满足}A\text{的赋值}\}\end{aligned}$$

从而：$A|-_{\alpha\otimes\beta}\psi$.

(2) 因为$A|-_{\alpha}\varphi$，所以

$$\alpha\le\wedge\{v(\varphi);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$$

$$\begin{aligned}\alpha_0\to\alpha\le\alpha_0&\to\wedge\{v(\varphi);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}\\&=\wedge\{\alpha_0\to v(\varphi);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}\\&=\wedge\{v(\alpha_0\to\varphi);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}\end{aligned}$$

从而：$A|-_{\alpha_0\to\alpha}\alpha_0\to\varphi$.

(3) 因为$A|-_{\beta}\varphi\to\psi$，$A|-_{\theta}\psi\to\gamma$，所以

$$\beta\le\wedge\{v(\varphi\to\psi);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$$

$$\theta\le\wedge\{v(\psi\to\gamma);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$$

故：

$$\begin{aligned}\beta\otimes\theta&\le(\wedge\{v_1(\varphi\to\psi);v_1\text{是满足}A\text{的赋值}\})\otimes(\wedge\{v_2(\psi\to\gamma);v_2\text{是满足}A\text{的赋值}\})\\&=\wedge\{v_1(\varphi\to\psi)\otimes v_2(\psi\to\gamma);v_1,v_2\text{是满足}A\text{的赋值}\}\\&\le\wedge\{v(\varphi\to\psi)\otimes v(\psi\to\gamma);v\text{是满足}A\text{的赋值}\}\\&\le\wedge\{v(\varphi\to\gamma);v\text{是满足}A\text{的赋值}\}\end{aligned}$$

从而：$A|-_{\beta\otimes\theta}\varphi\to\gamma$.

推论 3.2.7 若 $A\Vdash_{\alpha}\varphi$,则对于任意 $\alpha_0\in L$，$A\Vdash_{\alpha_0\to\alpha}\alpha_0\to\varphi$

定理 3.2.8 (演绎定理)

设 $A,A^*\in F_L(LP(X)),\varphi,\psi\in LP(X)$，$A^*=A\cup\{I/\varphi\}$，$\alpha\in L$，

(1) 若 $A\vdash_{\alpha}\varphi\to\psi$，则 $A^*\vdash_{\alpha}\psi$；

(2) 若 $pr(A^*,\psi)$ 是从 A^* 到 ψ 的一个证明，则存在自然数 $n\in N$ 以及从 A 到 $\varphi\to\psi$ 的一个证明，使得

$$Val(pr(A,\varphi\to\psi))\geq(\beta_1^A(\varphi))^{n-1}\otimes Val(pr(A^*,\psi))$$

(3) 若 $A^*\Vdash_{\alpha}\psi$，则对于每个 $n\in N$，存在 θ_n，使得 $A\Vdash_{\theta_n}\varphi^n\to\psi$，且 $\theta_n\leq\alpha$

证明

(1) 因为 $A\vdash_{\alpha}\varphi\to\psi$，$A\subseteq A^*$，故

$$\alpha\leq\wedge\{v(\varphi\to\psi);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A\text{的赋值}\}$$
$$\leq\wedge\{v(\varphi\to\psi);v\text{是}LP(X)\text{的满足}A^*\text{的赋值}\}$$

即：$A^*\vdash_{\alpha}\varphi\to\psi$，由定理 3.2.7 知：

$$A^*\vdash_{\alpha}\psi$$

(2) 首先证明：如果 $pr(A^*,\psi)$ 是从 A^* 到 ψ 的一个证明，则存在自然数 $n\in N$ 以及从 A 到 $\varphi^n\to\psi$ 的一个证明，使得

$$Val(pr(A^*,\psi))\leq Val(pr(A,\varphi^n\to\psi))$$

设 $pr(A^*,\psi)$：$(\psi_1,\xi_1),(\psi_2,\xi_2),\cdots\cdots,(\psi_k,\xi_k)$ 是从 A^* 到 ψ 的一个证明. 下面采用数学归纳法对证明的长度进行归纳.

i)若 $l(pr)=1$，则 $A_L(\psi_k)=\xi_k$ 或 $\beta_1^{A^*}(\psi_k)=\xi_k$.

当 $A_L(\psi_k)=\xi_k$ 时，下面的序列是从 A 到 $\varphi^n\to\psi$ $(n=1)$ 的一个证明：

(ψ_k,ξ_k)

$(\psi_k\to(\varphi\to\psi_k),I)$

$(\varphi\to\psi_k,\xi_k)$

记该证明为 $pr(A,\varphi\to\psi)$，显然成立

$$Val(pr(A^*,\psi))\le Val(pr(A,\varphi\to\psi))$$

当 $\beta_1^{A^*}(\psi_k)=\xi_k$ 时，如果 $\varphi\ne\psi_k$，则 $\beta_1^A(\psi_k)=\xi_k$，所以上述证明序列仍然是一个从 A 到 $\varphi^n\to\psi$ $(n=1)$ 的证明，记该证明为 $pr(A,\varphi\to\psi)$，显然成立：

$$Val(pr(A^*,\psi))\le Val(pr(A,\varphi\to\psi))$$

如果 $\varphi=\psi_k$，则

$$(\varphi\to\psi_k,I)$$

是一个从 A 到 $\varphi^n\to\psi$ $(n=1)$ 的证明，记该证明为 $pr(A,\varphi\to\psi)$，显然成立：

$$Val(pr(A^*,\psi))\le Val(pr(A,\varphi\to\psi))$$

ii) 假设对于证明长度 $l(pr)<k$ 时，结论成立. 当 $l(pr)=k$ 时，

a) 如果 $A_L(\psi_k)=\xi_k$ 或 $\beta_1^{A^*}(\psi_k)=\xi_k$，则仿照i)的证明可证；

b) 如果存在 $i,j<k$，并且 ψ_k 是由 ψ_i,ψ_j 按照 MP 规则得到，并且 $\psi_i=\psi_j\to\psi_k$，$\xi_k=\xi_i\otimes\xi_j$. 则根据归纳假设，存在自然数 s,t，使得：

$$(p_1,a_1),(p_2,a_2),\cdots\cdots,(p_{k_1},a_{k_1})$$

是一个从 A 到 $\varphi^s\to\psi_i$ 的证明，并且 $a_{k_1}\ge\xi_i$

$$(q_1,b_1),(q_2,b_2),\cdots\cdots,(q_{k_2},b_{k_2})$$

是一个从 A 到 $\varphi^t\to\psi_j$ 的证明，并且 $b_{k_2}\ge\xi_j$

于是下面的序列：

$$(p_1,a_1),(p_2,a_2),\cdots\cdots,(p_{k_1},a_{k_1})$$

$$(q_1,b_1),(q_2,b_2),\cdots\cdots,(q_{k_2},b_{k_2})$$

$$((\varphi^s\to(\psi_j\to\psi_k))\to((\varphi^t\to\psi_j)\to(\varphi^{s+t}\to\psi_k)),I)$$

$$((\varphi^t\to\psi_j)\to(\varphi^{s+t}\to\psi_k),a_{k_1})$$

$$(\varphi^{s+t}\to\psi_k,a_{k_1}\otimes b_{k_2})$$

是一个从 A 到 $\varphi^{s+t}\to\psi_k$ 的证明，并且可得：

$$Val(pr(A^*,\psi_k))=\xi_k=\xi_i\otimes\xi_j\le a_{k_1}\otimes b_{k_2}=Val(pr(A,\varphi^{s+t}\to\psi))$$

c) 如果存在$i,j<k$，使得ψ_k是由ψ_i,ψ_j按照 HS 规则得到，并且假设$\psi_i=p\to q$，$\psi_j=q\to r$，$\psi_k=p\to r$，$\xi_k=\xi_i\otimes\xi_j$．则根据归纳假设，存在自然数s,t，使得：

$$(p_1,a_1),(p_2,a_2),\cdots\cdots,(p_{k_1},a_{k_1})$$

是一个从A到$\varphi^s\to\psi_i$的证明，并且$a_{k_1}\ge\xi_i$

$$(q_1,b_1),(q_2,b_2),\cdots\cdots,(q_{k_2},b_{k_2})$$

是一个从A到$\varphi^t\to\psi_j$的证明，并且$b_{k_2}\ge\xi_j$

于是下面的序列：

$(p_1,a_1),(p_2,a_2),\cdots\cdots,(p_{k_1},a_{k_1})$

$(q_1,b_1),(q_2,b_2),\cdots\cdots,(q_{k_2},b_{k_2})$

$(\psi_i\to(\psi_j\to\psi_k),I)$

$((\psi_i\to(\psi_j\to\psi_k))\to(\varphi\to(\psi_i\to(\psi_j\to\psi_k))),I)$

$(\varphi\to(\psi_i\to(\psi_j\to\psi_k)),I)$

$((\varphi\to(\psi_i\to(\psi_j\to\psi_k)))\to((\varphi^s\to\psi_i)\to(\varphi^{s+1}\to(\psi_j\to\psi_k))),I)$

$((\varphi^s\to\psi_i)\to(\varphi^{s+1}\to(\psi_j\to\psi_k)),I)$

$(\varphi^{s+1}\to(\psi_j\to\psi_k),a_{k_1})$

$((\varphi^{s+1}\to(\psi_j\to\psi_k))\to((\varphi^t\to\psi_j)\to(\varphi^{s+t+1}\to\psi_k)),I)$

$((\varphi^t\to\psi_j)\to(\varphi^{s+t+1}\to\psi_k),a_{k_1})$

$(\varphi^{s+t+1}\to\psi_k,a_{k_1}\otimes b_{k_2})$

是一个从A到$\varphi^{s+t+1}\to\psi_k$的证明，并且可得：

$$Val(pr(A^*,\psi_k))=\xi_k=\xi_i\otimes\xi_j\le a_{k_1}\otimes b_{k_2}=Val(pr(A,\varphi^{s+t+1}\to\psi))$$

d) 如果存在$i<k$，$\alpha_0\in L$，使得$\psi_k=\alpha_0\to\psi_i$且$\xi_k=\alpha_0\to\xi_i$，则由归纳假设，存在自然数s，使得：

$$(p_1,a_1),(p_2,a_2),\cdots\cdots,(p_{k_1},a_{k_1})$$

是一个从A到$\varphi^s\to\psi_i$的证明，并且$a_{k_1}\ge\xi_i$．

于是下面的序列：

$(p_1,a_1),(p_2,a_2),\cdots\cdots,(p_{k_1},a_{k_1})$

$(\alpha_0\to(\varphi^s\to\psi_i),\alpha_0\to a_{k_1})$

$((\alpha_0\to(\varphi^s\to\psi_i))\to(\varphi^s\to(\alpha_0\to\psi_i)),I)$

$(\varphi^s\to(\alpha_0\to\psi_i),\alpha_0\to a_{k_1})$

是一个从 A 到 $\varphi^s\to\psi_k$ 的证明，并且可得：

$$Val(pr(A^*,\psi_k))=\xi_k=\alpha_0\to\xi_j=\alpha_0\to a_{k_1}=Val(pr(A,\varphi^s\to\psi))$$

综上所述，结论成立.

其次，证明：对于任意的自然数 $n\in N$，

$$\varphi^n\to\psi=\underbrace{\varphi\to(\varphi\to(\cdots\cdots(\varphi}_{n个\varphi}\to\psi)))$$

采用数学归纳法：

i) 当 $n=1$ 时，结论显然成立.

ii) 当 $n=2$ 时，根据格蕴涵代数的性质得：

$$\begin{aligned}\varphi^2\to\psi&=(\varphi\to\varphi')'\to\psi=\psi'\to(\varphi\to\varphi')\\&=\varphi\to(\psi'\to\varphi')=\varphi\to(\varphi\to\psi)\end{aligned}$$

结论成立.

iii) 假设对任意的 $n<k$，结论成立. 则当 $n=k$ 时，

$$\begin{aligned}\varphi^k\to\psi&=\varphi^{k-1}\otimes\varphi\to\psi\\&=(\varphi^{k-1}\to\varphi')'\to\psi=\psi'\to(\varphi^{k-1}\to\varphi')\\&=\varphi^{k-1}\to(\psi'\to\varphi')=\varphi^{k-1}\to(\varphi\to\psi)\\&=\underbrace{\varphi\to(\varphi\to(\cdots\cdots(\varphi}_{n-1个\varphi}\to(\varphi\to\psi))))\end{aligned}$$

结论成立. 所以对于任意自然数 $n\in N$ 结论成立.

由于 $(\varphi,\beta_1^A(\varphi))$ 是一个从 A 到 φ 的证明，所以 $A|\!-_{\beta_1^A(\varphi)}\varphi$. 根据前面的证明，得到：若 $pr(A^*,\psi)$ 是从 A^* 到 ψ 的一个证明，则存在自然数 $n\in N$ 以及从 A 到 $\varphi^n\to\psi$ 的一个证明，使得：

$$Val(pr(A^*,\psi)) \le Val(pr(A,\varphi^n \to \psi))$$

又因为$\varphi^n \to \psi$可以表示成为

$$\varphi^n \to \psi = \underbrace{\varphi \to (\varphi \to (\cdots\cdots(\varphi}_{n个\varphi} \to \psi)))$$

所以在从A到$\varphi^n \to \psi$的证明之后，连续应用 MP 规则，即得：从A到$\varphi \to \psi$的证明，并且显然此证明满足：

$$Val(pr(A,\varphi \to \psi)) \ge (\beta_1^A(\varphi))^{n-1} \otimes Val(pr(A^*,\psi))$$

(3) 若$A^* \Vdash_{\alpha} \psi$，则：由于对于任意满足A^*的$LP(X)$的赋值v，成立

$$v(\varphi^n) = I$$

所以
$$\alpha = \wedge\{v(\psi), v是满足A^*的LP(X)的赋值\}$$
$$= \wedge\{v(\varphi^n) \to v(\psi); v是满足A^*的LP(X)的赋值\}$$
$$= \wedge\{v(\varphi^n \to \psi); v是LP(X)的满足A^*的赋值\}$$
$$\ge \wedge\{v(\varphi^n \to \psi); v是LP(X)的满足A的赋值\}$$

从而知：$\theta_n = \wedge\{v(\varphi^n \to \psi); v是LP(X)的满足A的赋值\} \le \alpha$

故存在$\theta_n \le \alpha$，$A \Vdash_{\theta_n} \varphi^n \to \psi$.

推论 3.2.8 如果$A \Vdash_{\alpha} \varphi \to \psi$，则存在$\beta \in L$，$\beta \ge \alpha$，$A^* \Vdash_{\beta} \psi$.

定义 3.2.4 设$A \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，如果

$$\beta = \vee\{\alpha; 存在\alpha_1,\alpha_2 \in L, \varphi \in LP(X), 使得A \Vdash_{\alpha_1} \varphi, A \Vdash_{\alpha_2} \varphi'且\alpha = \alpha_1 \otimes \alpha_2\}$$

则称A是β'－协调的. 如果A是I－协调的，则A简称为协调的.

定理 3.2.9 如果A是β－协调的，则：对于任意$\varphi \in LP(X)$，

$$\beta \le A(\varphi') \to (A(\varphi))'$$

证明 对于任意的$\varphi \in LP(X)$，设$A \Vdash_{\alpha_1} \varphi$，$A \Vdash_{\alpha_2} \varphi'$，所以

$$A(\varphi) \le \alpha_1，\ A(\varphi') \le \alpha_2$$

从而有：

$$\beta' \ge \alpha_1 \otimes \alpha_2 \ge A(\varphi) \otimes A(\varphi')$$

故
$$\beta \le (A(\varphi) \otimes A(\varphi'))'$$

$$= ((A(\varphi') \to (A(\varphi))')')'$$
$$= A(\varphi') \to (A(\varphi))'$$

推论 3.2.9 如果A是$\beta-$协调的，则对于任意$\varphi \in LP(X)$，以及从A到φ的证明$pr(A,\varphi)$，从A到φ'的证明$pr(A,\varphi')$，有：

$$\beta \le Val(pr(A,\varphi)) \to (Val(pr(A,\varphi')))'.$$

定理 3.2.10 假设$A \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$A$是可满足的，则$A$是协调的.

证明 设$A \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$A$是可满足的，对于任意$\varphi \in LP(X)$，如果$A \Vdash_{\alpha_1} \varphi$，$A \Vdash_{\alpha_2} \varphi'$，则有：

$$\begin{aligned}\alpha_1 \otimes \alpha_2 &= (\wedge\{v_1(\varphi); v_1\text{是满足}A\text{的赋值}\}) \otimes (\wedge\{v_2(\varphi'); v_2\text{是满足}A\text{的赋值}\}) \\ &\le \wedge\{v(\varphi) \otimes v(\varphi'); v\text{是满足}A\text{的赋值}\}) \\ &= O\end{aligned}$$

故 $\beta = \vee\{\alpha; \alpha = \alpha_1 \otimes \alpha_2\} = O$

从而$\beta' = I$，即A是协调的.

定理 3.2.11 设$A \in \boldsymbol{F}_L(LP(X))$，$\varphi,\psi,\gamma \in LP(X)$，$\alpha \in L$，

(1) 在$LP(X)$上定义关系“$\prec_A$”如下：

$$\varphi \prec_A \psi \text{ 当且仅当：} A \vdash \varphi \to \psi$$

则关系“$\prec$”是一个拟序，并且满足：对于任意$\alpha \in L$，

$$\alpha \prec_A \varphi \text{ 当且仅当：} A \vdash_\alpha \varphi$$

(2) 在$LP(X)$上定义关系“$\approx_A$”如下：

$$\varphi \approx_A \psi \text{ 当且仅当：} \varphi \prec_A \psi \text{ 且 } \psi \prec_A \varphi$$

则关系“$\approx_A$”是一个同余关系

(3) 令$\overline{LP(X)} = LP(X)/_{\approx_A}$，在$\overline{LP(X)}$上定义二元运算“$\vee$、$\wedge$、$\to$”以及一元运算“$'$”为：

$$\overline{\varphi} \vee \overline{\psi} = \overline{\varphi \vee \psi}$$
$$\overline{\varphi} \wedge \overline{\psi} = \overline{\varphi \wedge \psi}$$
$$\overline{\varphi} \to \overline{\psi} = \overline{\varphi \to \psi}$$

$$(\overline{\overline{\varphi}})' = \overline{\overline{\varphi'}}$$

则$(\overline{\overline{LP(X)}},\vee,\wedge,',\to)$构成一个格蕴涵代数

(4) 令$g: L \to \overline{\overline{LP(X)}}$满足：对于任意$\alpha \in L$，

$$g(\alpha) = \overline{\overline{\alpha}}$$

则g是一个格蕴涵同态.

在下面的证明过程中，为了书写简便用$\prec$代替$\prec_A$，用$\approx$代替$\approx_A$.

证明

(1) 对于任意$\varphi,\psi,\gamma \in LP(X)$，$\alpha \in L$，

i) $\varphi \prec \varphi$显然成立；

ii) 如果$\varphi \prec \psi$且$\psi \prec \gamma$，则$A| \!\!- \varphi \to \psi$，$A| \!\!- \psi \to \gamma$，

又因为

$$A| \!\!- (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \gamma) \to (\varphi \to \gamma))$$

根据定理 3.2.7 知：

$$A| \!\!- \varphi \to \gamma$$

即 $\varphi \prec \gamma$.

i)、ii)表明关系“$\prec$”是一个拟序.

iii) 如果$\alpha \prec \varphi$，则$A| \!\!- \alpha \to \varphi$，又因为$A| \!\!-_{\alpha} \alpha$，所以$A| \!\!-_{\alpha} \varphi$.

反之，如果$A| \!\!-_{\alpha} \varphi$，则根据定理 3.2.7 知：$A| \!\!-_{\alpha \to \alpha} \alpha \to \varphi$，

即$A| \!\!- \alpha \to \varphi$，从而$\alpha \prec \varphi$.

(2) 首先证明关系“$\approx$”是一个等价关系.

i) 显然有$\varphi \approx \varphi$；

ii) 如果$\varphi \approx \psi$且$\psi \approx \gamma$，则

$$A| \!\!- \varphi \to \psi \text{ 且 } A| \!\!- \psi \to \varphi$$

$$A| \!\!- \psi \to \gamma \text{ 且 } A| \!\!- \gamma \to \psi$$

根据$A| \!\!- \varphi \to \psi$，$A| \!\!- \psi \to \gamma$，$A| \!\!- (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \gamma) \to (\varphi \to \gamma))$得：

$$A|\!-\varphi \to \gamma$$

即 $\varphi \prec \gamma$

根据 $A|\!-\psi \to \varphi$，$A|\!-\gamma \to \psi$，$A|\!-(\gamma \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to (\gamma \to \varphi))$ 得：

$$A|\!-\gamma \to \varphi$$

即 $\gamma \prec \varphi$

所以得到： $\varphi \approx \gamma$

iii) 如果 $\varphi \approx \psi$，则显然有 $\psi \approx \varphi$

以上表明关系"$\approx$"是一个等价关系.

iv) 下面证明对于任意 $\varphi, \psi \in LP(X)$，$\varphi \vee \psi$，$\varphi \wedge \psi$ 分别是关于"$\prec$"的上确界和下确界.

事实上，因为 $A|\!-\varphi \wedge \psi \to \varphi$，$A|\!-\varphi \wedge \psi \to \psi$，所以

$$\varphi \wedge \psi \prec \varphi$$
$$\varphi \wedge \psi \prec \psi$$

即：$\varphi \wedge \psi$ 是 φ, ψ 的一个下界.

又如果 $\gamma \prec \varphi$，$\gamma \prec \psi$，则 $A|\!-\gamma \to \varphi$，$A|\!-\gamma \to \psi$，又因为

$$A|\!-(\gamma \to \varphi) \to ((\gamma \to \psi) \to (\gamma \to (\varphi \wedge \psi)))$$

所以根据定理 3.2.7 得：

$$A|\!-\gamma \to (\varphi \wedge \psi)$$

即：$\gamma \prec (\varphi \wedge \psi)$，从而 $\varphi \wedge \psi$ 是 φ, ψ 的下确界.

类似地，因为 $A|\!-\varphi \to (\psi \vee \varphi)$，$A|\!-\psi \to (\psi \vee \varphi)$，所以

$$\varphi \prec (\psi \vee \varphi)$$
$$\psi \prec (\psi \vee \varphi)$$

即：$\varphi \vee \psi$ 是 φ, ψ 的一个上界.

又如果 $\varphi \prec \gamma$，$\psi \prec \gamma$，则 $A|\!-\varphi \to \gamma$，$A|\!-\psi \to \gamma$，又因为

$$A|\!-(\varphi \to \gamma) \to ((\psi \to \gamma) \to ((\varphi \vee \psi) \to \gamma))$$

所以根据定理 3.2.7 得：

$$A \vdash (\varphi \vee \psi) \to \gamma$$

即：$(\varphi \vee \psi) \prec \gamma$，从而$\varphi \vee \psi$是$\varphi, \psi$的上确界.

v) 下面证明关系“$\approx$”是保运算的.

对于任意$\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in LP(X)$，如果$\varphi_1 \approx \psi_1$，$\varphi_2 \approx \psi_2$，则有：

$$A \vdash \varphi_1 \to \psi_1 \text{且} A \vdash \psi_1 \to \varphi_1$$

$$A \vdash \varphi_2 \to \psi_2 \text{且} A \vdash \psi_2 \to \varphi_2$$

从而：

a) 根据$A \vdash \varphi_1 \to \psi_1$，$A \vdash \varphi_2 \to \psi_2$，知：

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \prec \varphi_1 \prec \psi_1$$

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \prec \varphi_2 \prec \psi_2$$

故： $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \prec (\psi_1 \wedge \psi_2)$

同理可证：$(\psi_1 \wedge \psi_2) \prec (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

所以有： $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \approx (\psi_1 \wedge \psi_2)$

b) 根据$A \vdash \varphi_1 \to \psi_1$，$A \vdash \varphi_2 \to \psi_2$，知：

$$\varphi_1 \prec \psi_1 \prec (\psi_1 \vee \psi_2)$$

$$\varphi_2 \prec \psi_2 \prec (\psi_1 \vee \psi_2)$$

故： $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \prec (\psi_1 \vee \psi_2)$

同理可证：$(\psi_1 \vee \psi_2) \prec (\varphi_1 \vee \varphi_2)$

所以有： $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \approx (\psi_1 \vee \psi_2)$

c) 根据$A \vdash \varphi_1 \to \psi_1$，$A \vdash (\varphi_1 \to \psi_1) \to ((\psi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_2))$知

$$A \vdash (\psi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_2)$$

所以：$\psi_1 \to \varphi_2 \prec \varphi_1 \to \varphi_2$

根据$A \vdash \psi_2 \to \varphi_2$，$A \vdash (\psi_2 \to \varphi_2) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \varphi_2))$知

$$A \vdash (\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \varphi_2)$$

所以：$\psi_1 \to \psi_2 \prec \psi_1 \to \varphi_2$

故： $\psi_1 \to \psi_2 \prec \varphi_1 \to \varphi_2$

根据 $A\vdash\psi_1\to\varphi_1$，$A\vdash(\psi_1\to\varphi_1)\to((\varphi_1\to\varphi_2)\to(\psi_1\to\varphi_2))$ 知

$$A\vdash(\varphi_1\to\varphi_2)\to(\psi_1\to\varphi_2)$$

所以：$\varphi_1\to\varphi_2\prec\psi_1\to\varphi_2$

根据 $A\vdash\varphi_2\to\psi_2$，$A\vdash(\varphi_2\to\psi_2)\to((\psi_1\to\varphi_2)\to(\psi_1\to\psi_2))$ 知

$$A\vdash(\psi_1\to\varphi_2)\to(\psi_1\to\psi_2)$$

所以：$\psi_1\to\varphi_2\prec\psi_1\to\psi_2$

故：$\varphi_1\to\varphi_2\prec\psi_1\to\psi_2$

所以有 $\varphi_1\to\varphi_2\approx\psi_1\to\psi_2$

d) 根据 $A\vdash\varphi\to\psi$，$A\vdash(\varphi\to\psi)\to(\psi'\to\varphi')$ 知

$$A\vdash\psi'\to\varphi'$$

所以：$\psi'\prec\varphi'$；

同理可以证明：$\varphi'\prec\psi'$；

所以有 $\varphi'\approx\psi'$.

综上所述，关系“$\approx$”是保运算的.

故关系“$\approx$”是一个同余关系.

(3) 下面证明 $(\overline{\overline{LP(X)}},\vee,\wedge,',\to)$ 构成一个格蕴涵代数.

i) 显然可以证明 $\overline{\overline{\varphi}}\vee\overline{\overline{\psi}}$，$\overline{\overline{\varphi}}\wedge\overline{\overline{\psi}}$ 分别是 $\overline{\overline{\varphi}}$ 和 $\overline{\overline{\psi}}$ 在 $\overline{\overline{LP(X)}}$ 中的上确界和下确界，在 $\overline{\overline{LP(X)}}$ 中的序关系为：

$$\overline{\overline{\varphi}}\le\overline{\overline{\psi}} \text{ 当且仅当：} \varphi\prec\psi$$

所以 $(\overline{\overline{LP(X)}},\vee,\wedge)$ 构成一个格.

对任意 $\varphi\in LP(X)$，因为 $A\vdash O\to\varphi$，$A\vdash\varphi\to I$，所以

$$O\le\varphi\le I$$

故：$\overline{\overline{O}}$，$\overline{\overline{I}}$ 分别为 $\overline{\overline{LP(X)}}$ 中的最小元与最大元.

ii) 对于任意 $\varphi,\psi\in LP(X)$，若 $\overline{\overline{\varphi}}\le\overline{\overline{\psi}}$，则 $\varphi\prec\psi$，$\psi'\prec\varphi'$，从而

$$\overline{\overline{\psi'}}\le\overline{\overline{\varphi'}}$$

又因为 $(\overline{\overline{\varphi}})' = \overline{\overline{\varphi'}}$

所以运算 $'$ 是 $\overline{\overline{LP(X)}}$ 上的余运算.

iii) 对于任意 $\varphi,\psi,\gamma \in LP(X)$，因为

$$A \vdash (\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to (\psi \to (\varphi \to \gamma))$$

$$A \vdash (\psi \to (\varphi \to \gamma)) \to (\varphi \to (\psi \to \gamma))$$

所以：
$$\varphi \to (\psi \to \gamma) \prec \psi \to (\varphi \to \gamma)$$
$$\psi \to (\varphi \to \gamma) \prec \varphi \to (\psi \to \gamma)$$

故：
$$\varphi \to (\psi \to \gamma) \approx \psi \to (\varphi \to \gamma)$$

从而有：
$$\overline{\overline{\varphi \to (\psi \to \gamma)}} = \overline{\overline{\psi \to (\varphi \to \gamma)}}$$

即：
$$\overline{\overline{\varphi}} \to (\overline{\overline{\psi}} \to \overline{\overline{\gamma}}) = \overline{\overline{\psi}} \to (\overline{\overline{\varphi}} \to \overline{\overline{\gamma}})$$

类似地可以证明 $(\overline{\overline{LP(X)}},\vee,\wedge,',\to)$ 关于蕴涵运算所应满足的其它性质.

综上所述，$(\overline{\overline{LP(X)}},\vee,\wedge,',\to)$ 构成一个格蕴涵代数.

(4) 对于任意 $\alpha,\beta \in L$，因为

$$g(\alpha') = \overline{\overline{\alpha'}} = (\overline{\overline{\alpha}})' = (g(\alpha))'$$

$$g(\alpha \to \beta) = \overline{\overline{\alpha \to \beta}} = \overline{\overline{\alpha}} \to \overline{\overline{\beta}} = g(\alpha) \to g(\beta)$$

故根据格蕴涵代数的性质，知：g 是一个格蕴涵同态.

定理 3.2.12 设 $A \in F_L(LP(X))$，v 是 $LP(X)$ 的满足 A 的赋值，令

$$\bar{v}: \overline{LP(X)} \to L$$
$$\bar{p} \mapsto v(p)$$
$$g: L \to \overline{\overline{LP(X)}}$$
$$\alpha \mapsto \overline{\overline{\alpha}}$$

则 $f = g \circ \bar{v}$ 是 $\overline{LP(X)}$ 到 $\overline{\overline{LP(X)}}$ 的格蕴涵同态.

第四章 总结与展望

§4.1 总结

本文讨论真值取于有限链乘积构成的格蕴涵代数上的格值命题逻辑系统，主要讨论了如下三个方面的问题.

1. **关于格蕴涵代数的蕴涵运算的讨论**

为了研究真值取于格上的一般逻辑系统，徐扬教授在其国家自然科学基金资助项目“抽象模糊逻辑的研究”中，把格与蕴涵代数相结合，提出了格蕴涵代数的概念.格蕴涵代数是一类范围较广的代数系统，具有很好的性质.虽然对格蕴涵代数的研究已经很多，但是对其中的蕴涵运算的研究仍显薄弱.本文为了能使格蕴涵代数的研究可以通过计算机进行，讨论了它的蕴涵运算的一些性质，并且在有限链乘积构成的格蕴涵代数中得到了一个蕴涵平行规则.这样就为用计算机实现格蕴涵代数的表达、计算，进而为实现基于格值命题逻辑系统的不确定性推理提供了一种可能.

2. **关于蕴涵不等式的讨论**

在智能控制中常常要用到不确定性推理.模糊控制、智能控制的过程是一个根据一定的推理规则，对采集到的信息进行分析、判断、处理、传递的过程.在这个过程中，推理规则起着十分重要的作用.推理规则的实质是表达一组模糊蕴涵关系，通常用“若 A，则 B”这样的形式表述.本文中，以在智能控制和模糊控制中经常采用的“广义肯定式推理模型”和“广义否定式推理模型”为背景，以格蕴涵代数中的蕴涵算子和 Lukasiwiecz 蕴涵算子为对象，讨论了一类蕴涵不等式的解的性质，得到了不等式的解随参数变化的规律.为进一步研究基于不确定推理的智能控制系统作了一些有益的准备工作.

3. **关于基于有限链乘积构成的格蕴涵代数的格值命题逻辑系统的讨论**

格值逻辑系统的研究具有很大的理论和现实意义.本文在前人研究的基础上，借鉴 Pavelka 的思想和方法，在真值取于由有限个有限链的乘积构成的格

蕴涵代数上系统地讨论了格值命题逻辑系统 LP(X)的语义、语法的基本性质，得到了该系统的协调性定理、可靠性定理、完备性定理和演绎定理，并且证明了“有效性”的可判定性. 为进一步研究基于格值命题逻辑系统的不确定性推理、人工智能等提供了一个思路.

§4.2 展望

多值逻辑的研究具有重要的理论和现实意义，目前，它的思想、方法已经被广泛应用于计算机科学、电子电工学、人文社会科学等众多学科领域. 本文深入地讨论了一个特殊的多值逻辑系统——基于有限个有限链乘积构成的格蕴涵代数的格值命题逻辑系统，提出了一些新的观点，但是许多工作仍很不完善. 同时由于作者本人才疏学浅，文中尚存诸多不足，恳请各位前辈同行不吝斧正.

作者认为，在下述方面尚需进一步深入研究:

1. 关于格蕴涵代数的计算机生成、表达、计算.
2. 关于基于格值命题逻辑系统的不确定性推理、定理机器证明的计算机实现.
3. 关于格值命题逻辑系统和其他多值逻辑系统的分析、比较.

上述问题的研究具有深远的意义，也是作者本人的下一步努力方向，由于作者知识和能力所限，仍需进行不懈的学习和探索.

作者深信，随着信息科学技术的飞速发展和智能控制研究的进一步深入，本文提出的新的观点和方法将会为研究的深入起到一定的促进作用.

致 谢

本文是在导师徐扬教授的悉心指导下完成的. 作者在学习期间，导师在学业上严格要求、一丝不苟，在生活上嘘寒问暖、关怀倍至. 导师渊博的知识，严谨的学风，忘我的工作态度和敬业精神，使我受益匪浅，终生难忘. 论文写作期间，导师事无巨细亲自过问，付出了极大的心血，值此论文完成之际，谨向导师致以崇高的敬意与诚挚的感谢.

作者在学习期间还得到了黄天民教授，秦克云、宋振明、袁俭、吴建乐、赵海良副教授以及智能控制开发中心的其他老师的热心帮助，特别是秦克云副教授和宋振明副教授，他们审阅了全文并提出许多宝贵的修改建议，此外，博士研究生刘军、硕士研究生裴峥等同学也给予作者很大帮助，在此表示衷心地感谢.

作者在此感谢西南交通大学数学系老师多年的培养、教育.

本文参考、引用了其他作者的研究成果，在此一并致谢.

1999 年元月 6 日

参考文献

[1] J. Lukasiewicz, On 3-valued logic, Ruch Filozoficzny, 5(1920), 169-170(in polish).

[2] J. Lukasiewicz, Selected Works-Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland, Amsterdam/PWN, Warzawa, 1970.

[3] E. Post, Introduction to a general theory of elementary propositions. American Journal of Mathematics, 43(1921), 163-185. Reprinted in J. Van Heijenoort (ed.), From Frege to Godel: A source book in mathematical logic 1879-1931, Cambridge, Mass., 1967.

[4] D.A. Bochvar, On a 3-valued logic calculus and its application to the analysis of contradictions, matematiceskij sbornik, 4(1939), 287-308(in Russian).

[5] S.C. Kleene, Introduction to Metamathematics, New York: Van Nostrand, 1952.

[6] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inf. Control, 8(1965), 338-353.

[7] J.A. Goguen, The logic of inexact concepts, Synthese, 19(1969), 325-373

[8] S. Gottwald, Fuzzy propositional logics, Fuzzy Sets and Systems, 3(1980), 181-192.

[9] J.B. Rosser, A.R. Turquette, Many valued logic, North Holland, Amsterdam, 1952.

[10] J. Pavelka, On fuzzy logic, Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagend. Math., 25(1979), 45-52, 119-134, 447-464.

[11] M.De Glas, Knowledge representation in a fuzzy setting, Tech. Rep. 89/48, LAFORIA, Universite Paris VI, France, 1989.

[12] H. Akdag, D. Pacholczyk, Incertitude et logique multivalente-Premiere partie: Etude theorique, BUSEFAL. 38(1989), 75-82.

[13] Busch Douglas R., A sequent axiomatization of three valued logic with two negations, Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning, 476-494, MIT Press, Cambridge, MA, 1993(Lisbon).

[14] Esteva F., Garcia C.P., Godo L., Enriched interval bilattices and partial many valued logics: an approach to deal with graded truth and imprecision, Inter. J. Uncertain. Fuzziness Knowledge Based Systems, 2(1994), No.1, 37-54.

[15] Font J.M., Moussavi M., Note on a six valued extension of three valued logic, J. Appl. Non-Classical Logics, 3(1993), 173-187.

[16] Polymeris A., Conjunctive normal forms in three valued propositional ligics, J. Logic Comput., 4(1994), 157-173.

[17] D. Butnariu, E.P. Klement, S. Zafrany, On triangular norm-based propositional fuzzy logics, Fuzzy Sets and Systems, 69(1995), 241-255.

[18] J. L. Castro, fuzzy logics as families of bivalued logics, Fuzzy Sets and Systems, 64(1994), 321-332.

[19] D. Pacholczyk, Incertitude et logique multivalente-Interpretation et completude, BUSEFAL, 40(1989),80-88.

[20] Leonard Bole, Piotr Borowik, Many-valued logics, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1992.

[21] H.J. Skala, On many-valued logics, fuzzy sets, fuzzy logics and their applications, Fuzzy Sets and Systems, 1(1978), 129-149.

[22] S. Di. Zenzo, A new many-valued logic and its applications to approximate reasoning, In: H. Kugler, Ed. Information Processing 86, North-Holland, Amsterdam, 1986, 291-302.

[23] Dubois D., Lang J., Prade H., Fuzzy sets in approximate reasoning, Part I: Inference with possibility distributions, Part II: Logical approaches, Fuzzy Sets and Systems, 40(1991), 143-202, 203-244.

[24] X.H. Liu. H. Xiao, Operator fuzzy logic and fuzzy resolution, Proc. of the 5th IEEE Inter. Symp. On Multiple-valued Logic, ISMUL 85, Kingstion, Canada, 68-75, 1985.

[25] Ying M.S., The fundamental theorem of ultraproduct in Pavelka's logic, Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math., 38(1992), 197-201.

[26] Ying M.S., Compactness, the Lowenheim-Skolem property and the direct product of lattices of truth valued, Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math., 38(1992), 521-524.

[27] 朱梧槚、肖奚安，数理逻辑引论，南京大学出版社，1995.

[28] 马光胜，数理逻辑引论，哈尔滨工程大学出版社，1997.

[29] 王宪钧，数理逻辑引论，北京大学出版社，1998.

[30] 陆钟万，面向计算机科学的数数理逻辑，科学出版社，1998.

[31] 王雨田，现代逻辑科学导引，中国人民大学出版社，1987.

[32] Donald W. Borns, John M. Mack, An algebraic introduction to mathematical logic, New York-Heidelberg-Berlin: Springer, 1975.

[33] Raymond Turner 著，赵沁平译，李未、张锦文校，人工智能中的逻辑，北京大学出版社，1990.

[34] 吴望名，模糊推理的原理和方法，贵州科技出版社，1994.

[35] 胡长流、宋振明，格论基础，河南大学出版社，1990.

[36] 黄天民等，格、序引论及其应用，西南交通大学出版社.

[37] G. Birkhoff, Lattice Theory, 3rd edition, American Mathematical Society Providence, R.L, 1967.

[38] 吴望名，Fuzzy 蕴涵代数，模糊系统与数学，1(1990)，56-64.

[39] 胡庆平，BCI-代数，陕西科学技术出版社，1987.

[40] 徐扬, 有余格, 西南交通大学学报, 1(1992), 37-42.

[41] 徐扬，格蕴涵代数，西南交通大学学报，1(1993)，20-27.

[42] 徐扬，格蕴涵代数中的同态，中国第五届多值逻辑学术会议论文集，1992，南京.

[43] 徐扬、秦克云，格蕴涵代数的格论性质，四川省应用数学协会 1992 年年会论文集，成都科技大学出版社，1992.

[44] 徐扬、秦克云，格 H 蕴涵代数与格蕴涵代数类，河北煤炭建筑工程学院学报，3(1992), 139-143.

[45] 刘军、徐扬, 格蕴涵代数的滤子和结构, 科学通报, 10(1997), 1049-1052.

[46] Xu Yang, Qin Keyun, On filter of Lattice implication algebras, The Journal of Fuzzy Mathematics, 2(1993), 251-260.

[47] 宋振明、徐扬, 格蕴涵代数上的同余, 应用数学, 3(1997), 91-94.

[48] 刘军、徐扬，关于格蕴涵代数性质(P)的讨论，兰州大学学报，1996 年增刊.

[49] Qin Keyun, Xu Yang, Lukasiewicz implication algebras on [0,1], Proc. Of the 5th International Fuzzy Systems Association world Congress, Secoul, 1993.

[50] 秦克云, 关于格蕴涵代数的研究, 西南交通大学研究生硕士学位论文, 1994.

[51] 刘军, 关于格蕴涵代数的结构的研究, 西南交通大学研究生硕士学位论文, 1996.

[52] 汪培庄、李洪兴, 模糊系统理论与模糊计算机, 科学出版社, 1998.

[53] 张文修、王国俊、刘旺金、方锦暄, 模糊数学引论, 西安交通大学出版社, 1991.

[54] 邹开其、徐扬，模糊系统与专家系统，西南交通大学出版社，1989.

[55] Wang Guojun, On the logic foundation of FMP and FMT. The International

Journal of Fuzzy Mathematics. 1997, 5(1): 229-250.

[56] 孙增圻，智能控制理论与技术，北京清华大学出版社和广西科学技术出版社.

[57] Xu Yang, Qin Keyun, Liu Jun, Song Zhenming, L-valued Propositional Logic L_{vpl}, (to appear).

[58] Qin Keyun, Xu Yang, Fuzzy propositional logic system, J. Fuzzy Math, Vol 2, No.2., 1994, 152-157.

[59] Xu Yang, Qin Keyun, Lattice-valued propositional logic (I), 西南交通大学学报(英文版), 2(1993), 123-128.

[60] Xu Yang, Qin Keyun, Lattice-valued propositional logic (II), 西南交通大学学报(英文版), 1(1994), 22-27.

[61] 王国俊，一类代数上的逻辑学(I)，陕西师范大学学报(自然科学版)，1997，25(1)：1-8.

[62] 王国俊，一类代数上的逻辑学(II)，陕西师范大学学报(自然科学版)，1997，25(3)：1-8.

[63] 王国俊，模糊命题演算的一种形式系统，科学通报，1997，42（10）：1041-1045.

[64] 刘叙华，模糊逻辑与模糊推理，吉林大学出版社，

[65] 秦克云、徐扬，一阶格值逻辑系统 ***FM*** 的语义问题，西南交通大学百周年校庆论文集（研究生分册），成都：西南交通大学出版社，1996，4.

[66] 徐扬、秦克云、宋振明, 一阶格值逻辑系统 ***FM*** 的语法问题, 科学通报, 10(1997), 1052-1055.

[67] 秦克云、徐扬、宋振明, 格值命题系统 ***L*(X)(II)**, 模糊系统与数学, 1(1998), 10-19.

[68] 徐扬, 一阶格值逻辑 L_{vpl} (待发表).

[69] 秦克云, 基于格蕴涵代数的格值逻辑系统及其应用的研究, 西南交通大学博士论文, 1996.

[70] 马骏，关于模糊蕴涵方程的解的讨论，西南交通大学学报（增刊），Vol.33, 1998, 14-17.