

## 磁异常处理与信息提取技术研究

作者简介：戴伟，男，1983年1月生，师从成都理工大学李才明教授，2008年06月毕业于成都理工大学地球探测与信息技术专业，获得工学硕士学位。

### 摘要

磁法勘探作为物探工作中应用最早的方法，由于成本低、效率高、操作简便、工作条件限制少，在地质调查的各个阶段得到广泛应用。经过一个多世纪的发展，磁法勘探在各类磁铁矿床的普查勘探和考古勘探中起着重要的作用。

随着地面高精度磁测工作的开展，已取得大范围，甚至全球的高质量磁异常数据。利用磁异常来研究地壳内部磁结构，使之用于找矿、地震区域划分以及地球磁场的基础研究等已经成为地球物理研究工作中的一个重要方面。在对实测数据进行处理解释时，区分干扰或叠加异常成为一项十分重要的工作，它直接影响到磁测资料解释结果的可靠性与客观性。本论文针对磁异常的干扰或叠加进行研究，通过磁异常导数、频率滤波和小波变换等方法来抑制甚至消除随机干扰或者分离叠加异常，突出或提取有用信息，总结选用方法的优劣点，以便实现对不同类型叠加异常的有效处理与分离。

本文在借鉴国内外已有的研究成果的基础上，综合利用磁法勘探、数值计算、信号处理等学科的知识，对磁异常信息提取技术做比较研究，优选分离叠加磁异常的较好方法。

关键词：磁异常 叠加异常 数据处理 异常分离

# Technology research in Magnetic anomaly processing and information extraction

Introduction of the author: Daiwei, male, was born in January, 1983 whose tutor was Professor Licaiming . He graduated from Chengdu University of Technology in Earth Exploration And Information Technology major and was granted the Master Degree in June, 2008.

## Abstract

As the foremost method used in geophysical exploration, magnetic exploration is widely used for its low-cost, high efficiency, simple operation and less restrictions on working conditions in various stages of geological survey. For developing more than one century, magnetic exploration plays an important role in different types of magnetite bed investigation and archaeological survey.

Large-scale and even the global high-quality magnetic anomaly data has been gotten with high-precision ground magnetic survey work carried out. It has become an important aspect in geophysical research to use magnetic anomaly data to study the crustal magnetic anomalies structure for prospecting, seismic region partition and the Earth's magnetic field research. It becomes an extremely important task to operate the measured data, in-depth and accurate processing. It directly affects the reliability and objectivity of explanation. This paper is studying the contents of the magnetic anomaly processing and extraction. Highlight or extract useful information were obtained by using magnetic anomaly differential coefficient, Frequency filtering and wavelet transform which can restrain even eliminate random interference or separate stacking anomalies. The advantage and disadvantage of the selected methods were summed up to achieve effective processing and separation to different types stacking anomalies.

Based on existing researched results at home and abroad and the knowledge of magnetic exploration, numerical calculation and signal processing, the better Methods to separate and extract magnetic anomalies were choosen by comparating study on the magnetic anomaly extraction technologys.

**Keywords:** magnetic anomaly   stacking anomaly   data processing  
anomaly separation

## 独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得成都理工大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

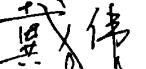
学位论文作者签名: 

2008 年 5 月 26 日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解成都理工大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权成都理工大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名: 

学位论文作者导师签名: 

2008 年 5 月 26 日

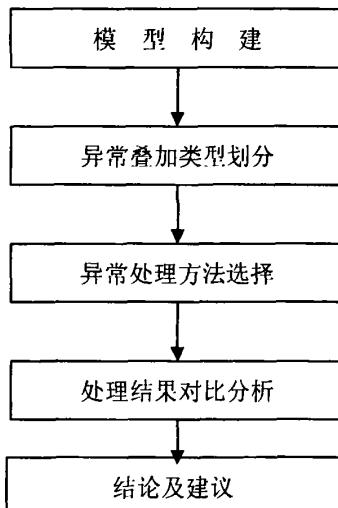
# 第1章 引言

## 1.1 背景

在继承和借鉴已有的国内外研究成果的基础上，根据目前存在的问题，综合利用磁法勘探、构造地质、数值计算、信号处理、程序设计等学科知识，对磁异常信息提取技术做一个比较深入的研究和改进，利用不同方法对磁测数据作出合适的处理，使有价值的异常能更好的体现出来。

## 1.2 论文的研究工作

论文工作的研究思路：



在本论文中采用二度水平圆柱体为基本矿体类型，构建磁场模型。在构建好矿体磁场模型以后，根据要求添加不同位置的干扰源。为了得到较好的构造效果，准备将干扰源也一水平圆柱体类模型进行构建。根据给定的埋藏深度，有效磁矩和垂直磁化等条件，画出原矿体的 T 剖面图和加了不同类型干扰后的叠加异常 T 剖面图。这些将作为后续处理的原始数据。接着文章会介绍在处理过程中要用到的各种数据处理方法，如磁异常导数处理、傅立叶变换、低通滤波、小波变换等。最后将对同一种类型的叠加异常处理后得到的结果进行对比分析，来确定对于不同的叠加异常，采用何种方式进行处理会取得比较好的效果，更能抑制干扰异常，体现原矿体本身引起的磁场异常。据此，在以后的磁异常数据处理中对处理方法

的选用能起到指导性的作用。数据处理方法的种类很多，文中所列出的方法仅仅是其中的一小部分，是否能取得令人满意的处理效果还不得而知，但作为研究性论文，不管最终结果是否理想，其过程都是有意义的。在最后的结论中，将这种分析处理结果的可利用性和对比之下的优缺点。

### 1.3 论文的结构

第一章阐明论文选题依据，介绍国内外相关研究成果及现状，简要说明论文的主要研究工作和取得的主要成果；

第二章构建模型，以水平圆柱体为基本地质体类型进行数据设计，并分别添加水平叠加异常和垂直叠加异常；

第三章介绍异常提取的方法，并研究各种方法的处理特性，依据相关特性选择最优方法对不同类型的叠加异常模型进行处理，分析处理结果。

第四章磁测异常处理结果分析，不同类型叠加异常经过各种方法处理后的实际效果对比，总结各方法在数据处理中的特性和优缺点。

第五章阐述论文研究得出的结论和认识，以及存在的问题和下一步工作的建议。

## 第2章 叠加异常的数学模型构建

### 2.1 水平圆柱体正演磁异常模型构建

在自然界中很难找到标准的水平圆柱形地质体，对于水平圆柱体我们讨论二度情况，即沿走向水平圆柱体无限伸长，且沿走向水平圆柱体的埋深、截面形状、磁化特征均稳定的情况下。在这样的情况下，其磁场为平面场，它们在空间直角坐标系中，只与坐标  $(x, z)$  有关，而与  $y$  无关。实际上，无限和有限是个相对的概念，真正的无限伸长磁性体是不存在的，但在一定的误差允许范围内，我们常将有限长的形体当作二度体来处理。

#### 2.1.1 二度水平圆柱体的磁场表达式

设水平圆柱体沿走向无限伸长，横截面积为  $s$ ，中心埋深为  $R$ ，有效磁化强度为  $M_s$ ，其倾角为  $i_s$ 。

由场论可知，水平圆柱体的引力位为

$$V = -2G\sigma S \ln r \quad (2-1)$$

式中  $S$  为柱体横截面积， $\sigma$  为柱体的密度， $r$  为观测点到柱轴的距离，  
 $r = [(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}$ 。由引力位公式可知，一个密度均匀的无限长水平圆柱体的引力位等于其质量集中于柱轴在该点的引力位。对引力位公式求二阶偏导后，将其代入二度体引力位公式，则得：

$$\left. \begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 S \left\{ M_z [(z - \zeta)^2 - (x - \xi)^2] + 2M_x (x - \xi)(z - \zeta) \right\}}{2\pi [(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2]^2} \\ H_{ax} &= H_a = \frac{-\mu_0 S \left\{ M_x [(x - \xi)^2 - (z - \zeta)^2] + 2M_z (x - \xi)(z - \zeta) \right\}}{2\pi [(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2]^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

选择坐标原点与柱体中心在地面的投影点重合，则  $\xi = 0$ ， $\zeta = 0$ ， $z = 0$ ，将此代入上式，并考虑到： $M_x = M_s \cos i_s$ ， $M_z = M_s \sin i_s$ ，令  $m_s = SM_s$  为单位长度的有效磁距，则有

$$\left. \begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + R^2)^2} [(R^2 - x^2) \sin i_s - 2Rx \cos i_s] \\ H_a &= \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + R^2)^2} [(R^2 - x^2) \cos i_s + 2Rx \sin i_s] \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

若  $i_s = I_s$ , 即  $M$  与磁化场  $T_0$  方向一致, 则上式可写为

$$\Delta T = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + R^2)^2} \frac{\sin I}{\sin I_s} [(R^2 - x^2) \sin(2i_s - 90^\circ)] \quad (2-4)$$

### 2.1.2 磁场特征分析

对二度体的磁场, 主要分析其剖面上的曲线特征。若为垂直磁化, 即  $i_s = 90^\circ$ , 则可得

$$\left. \begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{(R^2 - x^2)}{(x^2 + R^2)^2} \\ H_a &= \frac{-\mu_0 m_s \cdot 2Rx}{2\pi(x^2 + R^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

由上式可知, 当  $x=0$  时,  $H_a = 0$ ,  $Z_a = Z_{a\max} = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi R^2}$ , 当  $Z_a = 0$  时, 有  $R^2 = x^2$ , 即  $Z_a$  零值点间距离等于二倍中心埋深; 当  $x^2 > R^2$  时,  $Z_a$  为负值。因此,  $Z_a$  为两边有负值的轴对称曲线, 而  $H_a$  为点对称曲线, 且负半轴为正。同时可得到

$$\Delta T = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + R^2)^2} (R^2 - x^2) \quad (2-6)$$

由上式可知, 当  $i_s = 90^\circ$  时,  $Z_a = \Delta T$ 。

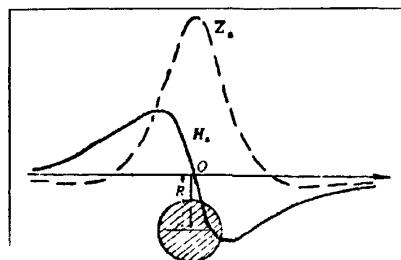


图 2-1 垂直磁化二度水平圆柱体  $Z_a, H_a$  剖面图

此时， $Z_a$  为对称曲线， $Z_{a\max}$  在原点处，可得

$$Z_{a\max} = \frac{\mu_0 m_s}{2\pi R^3} m_s \quad (2-7)$$

在本论文中将以二度水平圆柱体为模型基础。根据上述水平圆柱体正演公式可以得到模型的  $\Delta T$  形态图形如下：

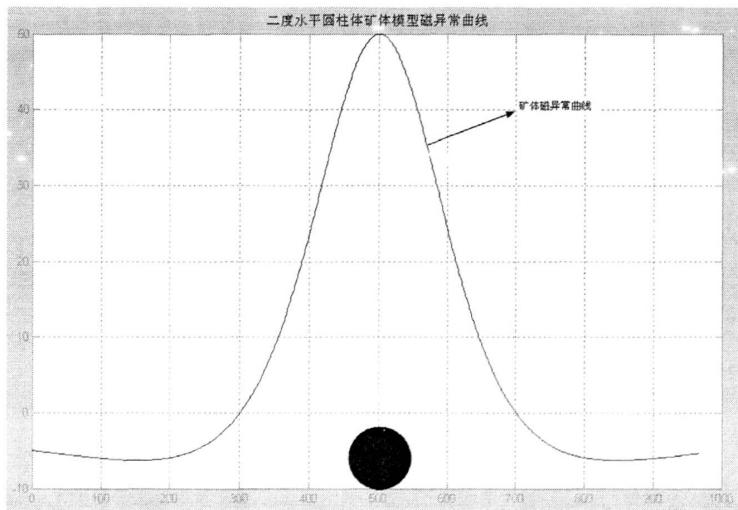


图 2-2 水平圆柱体模型  $\Delta T$  形态图

设计水平圆柱体理论模型，中心埋深 200m，单位长度的有效磁矩为  $m_s = 10000 A \cdot m^2$ ，垂直向下磁化。后续叠加异常模型将以此模型为基础，分别叠加不同类型的干扰异常。

## 2.2 水平圆柱体垂直叠加磁异常模型

### 2.2.1 二度水平磁荷面的磁场

单个的磁荷面是不存在的，但一个向下延深很大的磁性厚岩脉，当它为顺层磁化时，仅上下两个端面有磁荷分布，下端面因埋深很大，在地面引起的磁场可以忽略，可只考虑上顶面引起的磁场。

假定磁荷面与观测面平行，其磁荷面密度  $\sigma_m = \mu_0 M_n$ ，在直角坐标系中，磁荷面积分公式变为下式：

$$\left. \begin{aligned} H_{ax} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_s \frac{M_n(x-\xi)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \\ H_{ay} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_s \frac{M_n(y-\eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_s \frac{M_n(z-\zeta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\xi d\eta \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

对上式完成里层的无穷限广义积分后，且令  $z = 0, \zeta = h$ ，则有：

$$\left. \begin{aligned} H_{ax} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{x_A}^{x_B} \frac{2M_n(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + h^2} d\xi \\ H_{ay} &= 0 \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{x_A}^{x_B} \frac{-2M_n h}{(x-\xi)^2 + h^2} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

式中， $h$  为水平磁荷面的埋深，即  $h = \zeta$ 。完成以上积分，且注意到： $x_A = -b, x_B = b$ ，

且板状的倾角  $\alpha = i_s, M_n = M \cdot n = -M_s \sin \alpha$ ，则有：

$$\left. \begin{aligned} H_{ax} = H_a &= \frac{\mu_0 M_s \sin \alpha}{4\pi} \ln \frac{(x-b)^2 + h^2}{(x+b)^2 + h^2} \\ Z_a &= \frac{\mu_0 M_s \sin \alpha}{2\pi} (\operatorname{tg}^{-1} \frac{x+b}{h} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{x-b}{h}) \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

上式是研究板状体磁场的最基本公式。

## 2.2.2 水平圆柱体和水平板状体的磁异常叠加

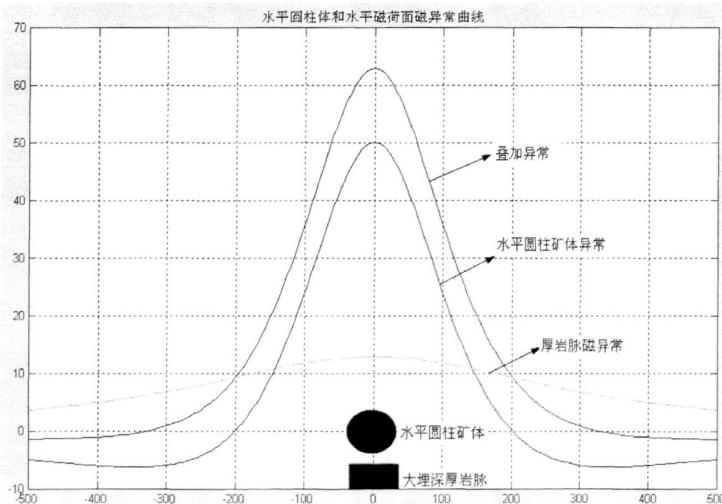


图 2-3 水平圆柱体垂直叠加异常模型  $\Delta T$  形态图

干扰体为水平磁荷面，位于矿体正下方位置，且深度为 300m，单位面积的有效磁矩为  $m_s = 5000 A \cdot m^2$ 。图 2-3 中蓝色曲线为设计矿体的磁性异常，绿色曲线为在垂直方向上叠加的干扰体磁性异常，暗红色曲线为矿体磁性异常和干扰体磁性异常叠加后的曲线。

### 2.3 水平圆柱体水平叠加磁异常模型

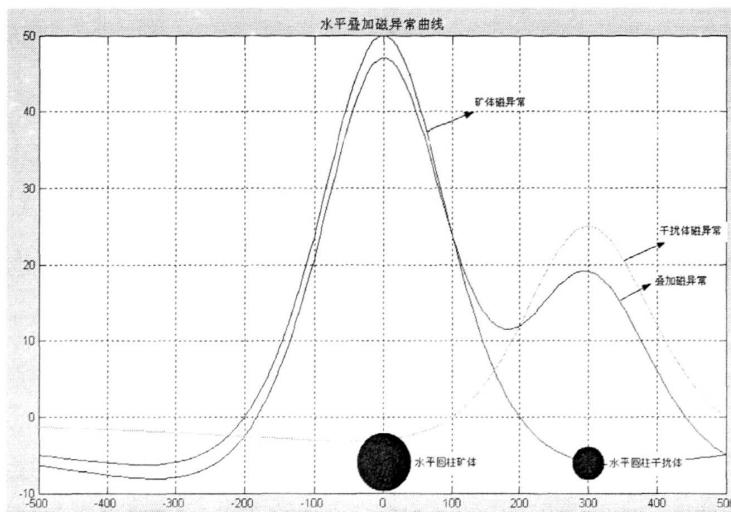


图 2-4 水平圆柱体水平叠加异常模型  $\Delta T$  形态图

干扰体也为水平圆柱体，位于矿体右侧 100m 处位置，深度为 200m，有效磁矩为  $5000 \times 10^{-3} A \cdot m^2$ 。图 2-4 中蓝色曲线为设计矿体的磁性异常，青色曲线为在水平方向上叠加的干扰体磁性异常，暗红色曲线为矿体磁性异常和干扰体磁性异常叠加后的曲线。

## 第3章 磁测异常处理方法

位场勘探包括数据采集、处理与解释部分，而由于计算机科学的发展，位场勘探数据处理成为备受关注的研究领域，偏微分方程、计算数学、数字信号处理、非线形科学、人工只能等各个学科的最新成果无不渗透到位场勘探数据处理领域，促进了位场勘探数据处理领域的变化与发展。

### 3.1 空间域磁异常导数处理方法

磁异常导数已经广泛地应用于磁异常的解释。它是压制区域场，圈定局部场，分离叠加异常的常用方法。从导数异常的物理意义就很容易看到它的这些特点。

表 3.1 二度异常分量换算系数表

换算类型	R	S	$C_0$	$C_i (i = 1, 10)$
$Z_a \rightarrow Z_{a\perp}$	$Z_{a\perp}$	$Z_a$	$\frac{\sin I}{SC}$	$-\frac{\cos I \cos A'}{SC} a_i$
$Z_a \rightarrow H_{a\perp}$	$H_{a\perp}$	$Z_a$	$\frac{\cos I \cos A'}{SC}$	$\frac{\sin I}{SC} a_i$
$Z_a \rightarrow Z_{a\parallel}$	$Z_{a\parallel}$	$Z_a$	$\cos \gamma$	$-\sin \gamma a_i$
$Z_a \rightarrow H_{a\parallel}$	$H_{a\parallel}$	$Z_a$	$\sin \gamma$	$\cos \gamma a_i$
$\Delta T \rightarrow Z_a$	$Z_a$	$\Delta T$	$\frac{\sin I}{SC}$	$-\frac{\cos I \cos A'}{SC} a_i$
$\Delta T \rightarrow H_a$	$H_a$	$\Delta T$	$\frac{\cos I \cos A'}{SC}$	$\frac{\sin I}{SC} a_i$
$\Delta T \rightarrow Z_{a\perp}$	$Z_{a\perp}$	$\Delta T$	$\frac{\sin^2 I - \cos^2 I \cos^2 A'}{(SC)^2}$	$-\frac{\sin 2I \cos A'}{(SC)^2} a_i$
$\Delta T \rightarrow H_{a\perp}$	$H_{a\perp}$	$\Delta T$	$\frac{\sin 2I \cos A'}{(SC)^2}$	$\frac{\sin^2 I - \cos^2 I \cos^2 A'}{(SC)^2} a_i$
$Z_a \rightarrow \Delta T$	$\Delta T$	$Z_a$	$\sin I$	$\cos I \cos A' a_i$
$H_a \rightarrow \Delta T$	$\Delta T$	$H_a$	$\cos I \cos A'$	$-\sin I a_i$

表中  $SC = \sin^2 I + \cos^2 I \cos^2 A'$ ；系数  $a_i$  值如表所示。

当  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  很小时，磁异常的一阶导数可近似写成下式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta T}{\partial x} &= \frac{\Delta T(x + \Delta x) - \Delta T(x)}{\Delta x} \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial z} &= \frac{\Delta T(z + \Delta z) - \Delta T(z)}{\Delta z}\end{aligned}\quad (3-1)$$

由于  $\Delta x$  和  $\Delta z$  是常数，因此  $\frac{\partial \Delta T}{\partial x}$  和  $\frac{\partial \Delta T}{\partial z}$  曲线的形态与  $\Delta T(x + \Delta x) - \Delta T(x)$  和  $\Delta T(z + \Delta z) - \Delta T(z)$  的形态是一样的。而后的物理意义由图 3-1 可以说明。由图可知， $\frac{\partial \Delta T}{\partial x}$  曲线相当于板状体两旁厚度为  $\Delta x$  的两个薄板所产生的磁场；而  $\frac{\partial \Delta T}{\partial z}$  曲线则相当于将一个薄板异常变成上下两个水平柱体的异常。根据这一分析不难理解对一个厚板状磁性体而言， $\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x \partial z}$  曲线就相当于分布于厚板角点上的水平柱体的异常（如图 3-1c）。

由此可见导数异常将大大减少相邻磁性体异常之间的干扰，有利于分离叠加异常。另外由于区域场一般表现为比较平缓的磁场特征，因而区域场的导数异常将会很小。由于导数异常的这些优点，因此在有条件的情况下，可以开展磁场梯度测量，即直接用磁力梯度仪观测磁异常的水平导数或垂向导数，以补充信息，提高解释效果。而目前多数情况下还是利用实测磁场各分量来计算其导数异常。而且这已成为磁异常处理的常用方法之一。

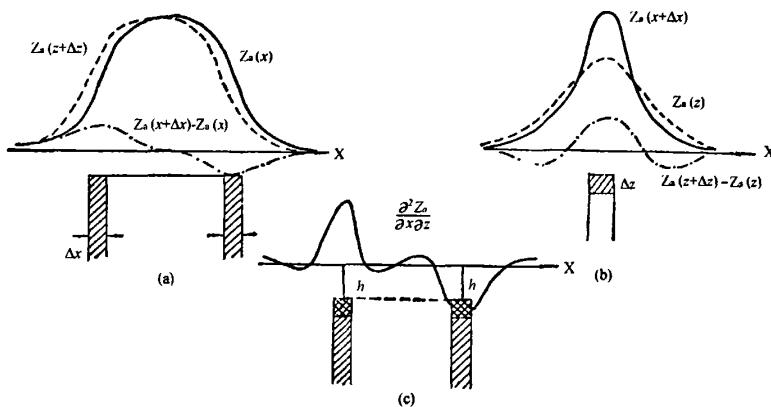


图 3-1 导数异常物理意义示意图

由 (3-1) 式可知，为计算  $\frac{\partial \Delta T}{\partial x}$  只要将实测异常前一个点  $(x + \Delta x)$  处的异常值减去后一点  $x$  处的异常值，其差值除以点距  $\Delta x$  就可作为  $x$  点的水平一阶导数值。由于  $\Delta x$  是一个常数，因此上述差值不除以  $\Delta x$ ，其异常形态也是一样的。

计算  $\frac{\partial \Delta T}{\partial z}$  时，也可仿照上述办法。先用向下延拓的方法计算出  $\Delta T(z + \Delta z)$ ，然后减去  $\Delta T(z)$ ，其差值就作为  $\frac{\partial \Delta T}{\partial z}$  值。

另外，也可以由 (3-1) 式对  $Z$  求导数，然后用类似近似积分方法，即可得到如下计算公式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} = & 1.2732 \Delta T(0,0) - 0.3979 [\Delta T(h,0) + \Delta T(-h,0)] - 0.1061 [\Delta T(2h,0) \\ & + \Delta T(-2h,0)] - 0.0398 [\Delta T(3h,0) + \Delta T(-3h,0)] - 0.0212 [\Delta T(4h,0) \\ & + \Delta T(-4h,0)] - 0.0133 [\Delta T(5h,0) + \Delta T(-5h,0)] - 0.0091 [\Delta T(6h,0) \\ & + \Delta T(-6h,0)] - 0.0066 [\Delta T(7h,0) + \Delta T(-7h,0)] - 0.0051 [\Delta T(8h,0) \\ & + \Delta T(-8h,0)] - 0.0040 [\Delta T(9h,0) + \Delta T(-9h,0)] - 0.0124 [\Delta T(10h,0) \\ & + \Delta T(-10h,0)] \end{aligned} \quad (3-2)$$

式中  $h$  为取样间隔。

根据导数异常的物理意义，它能用来解决下面几个方面的问题：

- ① 能区分相邻磁性体异常，减少其相互叠加的影响。或者分离叠加在背景场中的局部场。
- ② 能减轻磁性围岩的干扰。因为磁性围岩异常经过导数换算后，异常的幅度和范围都会大大减小。
- ③ 可以将某些非二度异常转化为二度异常来进行解释。如图 3-2 所示之椭圆状磁性体，当其磁异常沿  $x$  方向求一阶导数后，则相当于它的两侧边缘磁性体所产生的磁异常。显然这种异常更符合二度异常的条件。因而可以用二度异常来进行解释。

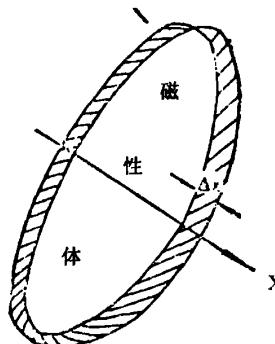


图 3-2 似二度异常的导数异常转化为二度异常示意图

- ④ 能消除正常场背景值的影响。因为正常背景值的微商为零，因此对磁异常换算成导数异常后正常背景值就消失。
- ⑤ 用垂向二阶导数圈定磁性体的范围和位置。分析厚板状磁性体异常公式可知，其垂向二阶导数的零值点恰好为其边界的位置。对于一般棱柱体异常也具有同样的特点。因此，若将实测异常换算成垂直磁化，再计算其垂向二阶导数后，其零值线基本上反映了磁性体的范围。

但需要指出的是由于导数异常的计算与计算时使用的方法技术及参数选择有很大关系，因此用在定量方面还存在很大局限性，而主要用于做定性解释。对于平面磁异常换算为导数场的方法原理同重力异常的换算方法。

#### (4) 三度异常转换为二度异常的方法

一般来说，三度异常的解释比二度异常复杂。因此，若能将三度异常转换成相应的二度异常，无疑对异常的推断解释有一定价值。

将三度异常转换为二度异常可以用积分平均法。设  $\Delta T(x, y, z)$  为某三度异常。该异常体沿  $y$  轴走向长度设为  $2L$ 。一个横截面的形状、大小、埋深及产状有三度体在  $xoz$  面上投影一样的二度体异常设为  $\Delta T(x, z)$ 。则二者有如下关系

$$\Delta T(x, z) = \frac{1}{2L} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta T(x, y, z) dy$$

即新构造的二度异常相当于原三度异常沿  $y$  方向的积分平均值。仍取计算平面  $z=0$ ，用求和的形式来近似上述积分，可以得出

$$\Delta T(x, 0) = \frac{\Delta y}{2L} \sum_{i=-n}^{n} \Delta T(x, y_i) \quad (3-3)$$

用上述公式可以将某些三度异常转换成二度异常。但这种转换仅适用于沿走向方向截面形状、大小、埋深及产状比较稳定的三度体。计算时要估算  $2L$ ，且以孤立异常为好。

## 3.2 频率域磁异常数据处理方法

### 3.2.1 傅氏级数与离散频谱

把有限区间上的复杂波分解为简谐波的叠加，在数学上称之为傅氏级数：

$$x(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin 2\pi n f_0 t + b_n \cos 2\pi n f_0 t) \quad (3-4)$$

其中：  $f_0 = \frac{1}{T}$  为基频；  $T$  是区间长度；  $b_0$  为  $x(t)$  的常数分量。

利用复数运算的尤拉公式

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (3-5)$$

可以把  $\sin 2\pi n f_0 t$  和  $\cos 2\pi n f_0 t$  用  $e^{i2\pi n f_0 t}$  和  $e^{-i2\pi n f_0 t}$  表示，于是可以得到复数形式的傅氏级数展开式，即

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i2\pi n f_0 t} \quad (3-6)$$

其中  $C_n$  称为傅氏级数的系数，即

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt \quad (3-7)$$

由于  $C_n$  可以表示  $n$  次谐波的振幅与相位，因此我们称

$C_n$  为有限区间  $[t_0, t_0 + T]$  上信号  $x(t)$  的离散频谱；

$|C_n|$  为有限区间  $[t_0, t_0 + T]$  上信号  $x(t)$  的离散振幅谱

$\text{Arg } C_n$  为有限区间  $[t_0, t_0 + T]$  上信号的离散相位谱。

由  $x(t)$  求出傅氏级数的系数，就称为在有限区间上对  $x(t)$  做频谱分析。注意到，当  $x(t)$  不是以  $T$  为周期的函数时，在整个时间轴  $(-\infty, \infty)$  上，函数  $x(t)$  与傅氏级数是不同的，但是它们在局部区间  $[t_0, t_0 + T]$  上是相同的。

### 3.2.2 傅氏积分与连续频谱

在傅氏级数中，我们在有限区间把一个复杂波分解成许多简谐波的叠加。然而在实际中遇到的波往往出现在整个时间轴上，所以在有限区间上考察它们都不能反映它们的全貌。在整个时间轴  $(-\infty, \infty)$  上出现的波分解为简谐波的叠加，这就是傅氏变换或傅氏积分，它们可以表示为

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \\ X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \end{cases} \quad (3-8)$$

我们  $X(f)$  称为  $x(t)$  的连续谱，通常称为频谱。

### 3.2.3 频谱的基本性质

频谱具有如下一些基本性质：

(1) 共轭：若信号  $x(t)$  的频谱为  $X(f)$ ，则  $\overline{x(t)}$  的频谱为  $\overline{X(-f)}$ 。特别地，

当  $x(t)$  为实信号时，有

$$\overline{X(-f)} = X(f) \quad (3-9)$$

(2) 时移：若信号  $x(t)$  的频谱为  $X(f)$ ，则信号  $x(t - t_0)$  的频谱为  $X(f)e^{-i2\pi f t_0}$ ，

信号  $x(t + t_0)$  的频谱为  $X(f)e^{i2\pi f t_0}$ 。

(3) 对称: 设信号  $x(t)$  的频谱为  $X(f)$ , 若把  $x(t)$  中  $t$  的换成  $f$ ,  $X(f)$  就为一频谱, 则频谱  $x(f)$  所对应的信号为  $X(-t)$ 。

(4) 频移: 设信号  $x(t)$  的频谱为  $X(f)$ , 则信号  $x(t)e^{i2\pi f_0 t}$  的频谱为  $X(f - f_0)$ ,  $x(t)e^{-i2\pi f_0 t}$  的频谱为  $X(f + f_0)$ ,  $x(t)\cos 2\pi f_0 t$  的频谱为  $\frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$ ,  $x(t)\sin 2\pi f_0 t$  的频谱为  $\frac{1}{2i}[X(f - f_0) - X(f + f_0)]$ 。

(5) 翻转: 设信号  $x(t)$  的频谱为  $X(f)$ , 则  $x(-t)$  的频谱为  $X(-f)$ 。

### 3.2.4 傅氏积分与傅氏级数的关系

对无限区间  $(-\infty, +\infty)$  上的信号  $x(t)$ , 有傅氏积分

$$\begin{cases} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i2\pi ft} \\ X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \end{cases} \quad (3-10)$$

对有限区间  $[t_0, t_0 + T]$  上的信号  $x(t)$ , 有傅氏级数

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i2\pi \frac{n}{T} t} \\ C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt, n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \end{cases} \quad (3-11)$$

从物理意义上讲, 傅氏积分与傅氏级数有相同之处: 傅氏积分和傅氏级数都表示复杂波分解为简谐波的叠加, 频谱  $X(f)$  和离散谱  $C_n$  都表示简谐波的振幅与初相位。但是, 在复杂波表示为简谐波叠加的方式上, 即在频谱的表示上, 傅氏积分和傅氏级数有本质的差异。

在傅氏变换中, 复杂波分解为简谐波的叠加, 这些谐波的频率  $f$  可取任意值, 可连续的从  $-\infty$  变到  $+\infty$ , 所以这些谐波的叠加是连续叠加, 以积分形式出现。由于这些谐波之间可以有不同的周期, 连续叠加后的傅氏积分就可以表一个非周期函数。频谱  $X(f)$  反映频率为  $f$  的谐波的振幅和初相位, 而又连续地从  $-\infty$  变到  $+\infty$ , 所以我们称  $X(f)$  为连续谱。

在傅氏级数中, 复杂波分解为简谐波的叠加, 这些谐波的频率是一系列离散

的值  $n\frac{1}{T}$ ，其中  $\frac{1}{T}$  为基频，其它频率为它的整数倍，所以这些谐波的叠加是离散叠加，以求和的形式出现。由于这些离散频率谐波有一个共同的周期  $T$ ，所以离散叠加的傅氏级数就表示一个周期为  $T$  的函数。频谱  $C_n$  反映频率为  $n\frac{1}{T}$  的谐波的振幅和初相位，而是离散地从  $-\infty$  变到  $+\infty$ ，所以我们称  $C_n$  为离散谱。

连续谱  $X(f)$  与离散谱  $C_n$  是截然不同的，但在一定条件下，它们又可以相互转化。当有限区间  $[t_0, t_0 + T]$  变化到无限区间  $(-\infty, +\infty)$  时，离散谱就转化为连续谱  $C_n T \rightarrow X(n\frac{1}{T})$ 。

### 3.2.5 抽样定理

(1) 抽样定理 1：设连续信号  $x(t)$  的频谱为  $X(f)$ ，以抽样间隔  $\Delta$  抽样得到的离散信号为  $x(n\Delta)$ 。如果频谱  $X(f)$  和抽样间隔  $\Delta$  满足条件

$$\begin{cases} X(f) \text{ 有截频 } f_c, \text{ 即与 } |f| \geq f_c \text{ 时, } X(f) = 0 \\ \Delta \leq \frac{1}{2f_c} \text{ 或 } f_c \leq \frac{1}{2\Delta} \end{cases} \quad (3-12)$$

则可由离散信号  $x(n\Delta)$  完全确定频谱  $X(f)$ ：

并且由  $x(n\Delta)$  可完全确定连续信号  $x(t)$ ：

(2) 抽样定理 2：设连续信号  $x(t)$  的频谱为  $X(f)$ ，按抽样间隔  $\Delta$  抽样得到的离散信号为  $x(n\Delta)$ ，它的频谱为  $X_\Delta(f)$ ：

$$X_\Delta(f) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta) e^{-i2\pi fn\Delta} \quad (3-13)$$

则离散信号  $x(n\Delta)$  的频谱与连续信号  $x(t)$  的频谱  $X(f)$  有如下关系

$$X_\Delta(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X(f + \frac{m}{\Delta}) \quad (3-14)$$

抽样定理 2 的直观意义是， $X_\Delta(f)$  是一个周期函数，为了求得其在一个周期内的

值，如在  $\left[-\frac{1}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta}\right]$  内的值，我们把  $X(f)$  分成许多小段，以  $\left[-\frac{1}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta}\right]$  为基础，

每隔  $\frac{1}{\Delta}$  取一段，然后将各段叠加起来，就得到  $X_\Delta(f)$ 。

通常，把  $f_N = \frac{1}{2\Delta}$  称为 Nyquist 频率，或折叠频率。

### 3.2.6 一维频率滤波

(1) 理想滤波器：

① 理想低通

$$H_1(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_1 \\ 0, & f_1 < |f| \leq \frac{1}{2\Delta} \end{cases}$$

② 理想带通

$$H_2(f) = \begin{cases} 1, & f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0, & |f| \leq \frac{1}{2\Delta} \text{ 其它} \end{cases}$$

③ 理想高通

$$H_3(f) = \begin{cases} 0, & |f| \leq f_1 \\ 1, & f_1 < |f| \leq \frac{1}{2\Delta} \end{cases}$$

(2) 理想滤波器存在的问题。理想滤波器的时间函数  $h(n)$  长度是无限的，然而在实际滤波时，我们只能取  $h(n)$  的有限部分，由此产生吉伯斯现象。把无限长时间函数  $h(n)$  截尾成有限长度时间函数  $h_N(n)$  是产生吉伯斯现象的原因之一。为了克服吉伯斯现象，可以从两方面入手：一是在频率域，避免理想滤波器频谱中出现的突跳现象，把它改造成为一条连续甚至光滑的曲线，所采用的方法就是镶边法；二是在时间域，对截尾函数  $h_N(n)$  进行改造，所采用的方法就是时间窗函数法。

(3) 时窗函数。

一个矩形时窗

$$g_N(n) = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

它的频谱为

$$G_N(f) = \frac{\sin 2\pi(N + \frac{1}{2})\Delta f}{\sin \pi \Delta f}$$

分析矩形窗的频谱曲线可以得出：一个好的时窗函数，应当主瓣宽度尽可能地小，旁瓣水平相对于主瓣来说也尽可能地小。实际上，只能在这两个标准中取折中。由此，人们构造了各种时窗函数：

①三角形时窗：

$$W(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

②汉宁 (Hanning) 时窗：

$$W(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos \frac{\pi t}{T}), & |t| \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

③哈明(Hamming)时窗：

$$W(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \frac{\pi t}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

④帕曾 (Parzen) 时窗：

$$W(t) = \begin{cases} 1 - t(\frac{|t|}{T})^2 + t(\frac{|t|}{T})^3, & |t| \leq T/2 \\ 2(1 - \frac{|t|}{T})^3, & T/2 < |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

⑤截尾丹尼尔 (Daniell) 时窗：

$$W(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

### 3.2.7 提高位场傅立叶变换精度的方法

由于离散取样和有限截断造成了傅立叶变换的误差，为了减少吉伯斯效应，进一步提高傅立叶变换谱的精度。有关文献提出了偏移抽样理论，可以大大提高位场离散傅立叶变换的精度。

有抽样定理1可知，当频谱 $X(f)$ 有截止频率 $f_c$ ，且抽样间隔 $\Delta \leq \frac{1}{2f_c}$ 时，

有离散信号 $x(n\Delta)$ 可以完全确定频谱 $X(f)$ ，并且由离散信号可以完全确定连续信号 $x(t)$ 。可以看出，抽样定理1是过函数零点抽样，函数离散，其谱等权折叠。

文献推广了原来的抽样定理：设连续函数 $x(t)$ 的谱为 $X(f)$ ，定义序列 $x[(n+\xi)\Delta](-\infty < n < \infty, 0 \leq \xi \leq 1)$ 的谱为

$$X_{\Delta\xi}(f) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[(n+\xi)\Delta] e^{-i2\pi f(n+\xi)\Delta} \quad (3-15)$$

则 $X_{\Delta\xi}(f)$ 与 $X(f)$ 之间有如下关系

$$X_{\Delta\xi}(f) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi l\xi} X(f + \frac{l}{\Delta}) \quad (3-16)$$

类似的，若 $X_{\Delta\xi}(f)$ 为序列 $x[(n+\xi)\Delta](-\infty < n < \infty, 0 \leq \xi \leq 1)$ 的谱，以间隔 $d = \frac{1}{n\Delta}$ 和偏移量 $\eta d (0 \leq \eta \leq 1)$ 对 $X_{\Delta\xi}$ 抽样，并根据如下定义式

$$x_{d\eta}[(n+\xi)\Delta] = d \sum_{m=0}^{N-1} X_{\Delta\xi}[(m+\eta)d] e^{i2\pi(m+\eta)(n+\xi)/N} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (3-17)$$

作离散傅立叶变换，则可得有限序列 $x_{d\eta}[(n+\xi)\Delta] (n = 0, 1, \dots, N-1)$ 与原无限序列 $x_{d\eta}[(n+\xi)\Delta]$ 有如下关系

$$x_{d\eta}[(n+\xi)\Delta] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi k\eta} x\left[(n+\xi)\Delta + \frac{k}{d}\right] \quad (3-18)$$

上式中的 $e^{i2\pi l\xi}$ ,  $e^{-i2\pi k\eta}$ 即为加权折叠的加权系数； $k, l$ 分别为时域和频域中折叠段的序号。偏移抽样引起加权折叠的意义在于：一定条件下巧妙地选取 $\xi$ （或 $\eta$ ）的值，可大大削减折叠效应，达到提高傅立叶变换精度的目的。

在实际应用中，对位场数据偏开零频点0.22个采样间隔对谱均匀采样，即在频点 $0.22d, 1.22d, \dots, (N-1+0.22)d$ 对谱采样，做传统的FFT，再乘以 $e^{i2\pi \times 0.22n/N}$ （ $n$ 为空间域序列的序号）后取实部。这样做可以大大提高位场傅立叶变换的精度。

### 3.2.8 维纳滤波与匹配滤波

我们知道，浅部地质体所产生的磁异常比深部地质体产生的磁异常要尖锐得多。一个尖锐的异常其幅值从异常中心向外快速下降，以具有很大的高频成为特征。另一方面，宽缓的异常从中心向外是缓慢的衰减，具有集中于低频端的谱，异常频谱特征的这种差异，提供了分离浅部场和深部场的可能性。1966年，Bhattacharyya 详细地研究了矩形棱柱体总磁场异常的连续谱。1970年，Spector 与 Grant 运用统计结构的基本假设，引入“总体平均”的概念，推导分析了航磁图的能谱公式，把关于矩形棱柱体的谱的某些性质推广到块状体，讨论了块状体的水平尺寸、深度和厚度对能谱的影响，提出了用能谱分析来粗略估计块状体的埋深、延深的方法。1975年，Spector 运用上述方法，提出了“匹配滤波”方法，并用此方法处理科迪雷拉山区的航磁图，消除了火山岩覆盖的干扰，从而得到与成岩有关的火成岩引起的异常图。其原理如下：

#### 1. 最小均方差滤波器与维纳滤波器

设  $g(x)$  为  $f(x)$  滤波后的输出函数， $s(x)$  为期望输出， $h(x)$  为脉冲响应，如使方差

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} [s(x) - g(x)]^2 dx = \min \quad (3-19)$$

则相应的滤波器称为最小均方差滤波器，由上式积分后可得

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau) R_{ff}(\tau - \xi) d\tau d\xi - 2 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) R_{fs}(\tau) d\tau \quad (3-20)$$

选择适合的脉冲响应  $h(x)$  使  $Q$  最小，也就是求等式右方泛函的极值。由变分法知道， $h(x)$  应满足欧拉方程

$$\frac{\partial}{\partial h(\tau)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau) R_{ff}(\tau - \xi) d\xi - 2h(\tau) R_{fs}(\tau) \right] = 0 \quad (3-21)$$

即满足

$$R_{fs}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) R_{ff}(\tau - \xi) d\xi \quad (3-22)$$

其中  $R_{fs}$  为输入信号  $f(x)$  与期望输出  $S(x)$  的互相关函数， $R_{ff}$  为输入信号的自相关函数。

上式即 Wiener-Hopf 积分方程。对上式做傅氏变换得到

$$H(\omega) = \frac{P_{fs}(\omega)}{P_f(\omega)} \quad (3-23)$$

式中:  $H(\omega)$  是维纳滤波器的频率响应;  $P_f(\omega)$  为输入函数  $f(x)$  与期望输出信号  $S(x)$  的互功率谱。

若假定信号  $S(x)$  与干扰  $n(x)$  彼此不相关, 即  $R_{ns}(x) = 0, P_{ns}(\omega) = 0$ , 则

$$\begin{aligned} P_f(\omega) &= P_s(\omega) + P_{ns}(\omega) = P_s(\omega) \\ P_f(\omega) &= P_n(\omega) + P_s(\omega) \end{aligned} \quad (3-24)$$

则可得变换式  $H(\omega) = \frac{P_s(\omega)}{P_n(\omega) + P_s(\omega)}$

因为  $P_s(\omega) = S^*(\omega) \cdot S(\omega), P_n(\omega) = N^*(\omega) \cdot N(\omega)$ , 其中\*表示共轭。即得

$$H(\omega) = \frac{|S(\omega)|^2}{|S_n(\omega)|^2 + |N(\omega)|^2} \quad (3-25)$$

这样从一般形式的维纳滤波器得到特殊形式的维纳滤波器。

## 2. 分离深源场与浅源场的维纳滤波器与匹配滤波器

### ① 维纳滤波器

对于上式, 为了求出  $|S(\omega)|$  和  $|N(\omega)|$ , 我们不妨假设

$$\begin{aligned} |S(\omega)| &= AF_1(\omega)e^{-\omega h_1} \\ |N(\omega)| &= BF_2(\omega)e^{-\omega h_2} \end{aligned} \quad (3-26)$$

即有用信号及干扰分别由埋深  $h_1$  和  $h_2$  ( $h_1 > h_2$ ) 的地质体所引起, 当地质体形态相近时  $F_1(\omega) = F_2(\omega)$ , 由此可得分离区域场的频率响应

$$H(\omega) = \frac{A^2 F_1^2(\omega) e^{-2\omega h_1}}{A^2 F_1^2(\omega) e^{-2\omega h_1} + B^2 F_2^2(\omega) e^{-2\omega h_2}} = \frac{1}{1 + \frac{B^2}{A^2} e^{2\omega(h_1 - h_2)}} \quad (3-27)$$

式中的  $A, B, h_1, h_2$  四个值由实测数据的对数功率谱曲线上求得。

根据实测数据的对数功率谱曲线  $\ln E(\omega)$ , 取低频段斜率绝对值较大的直线段作为深部场源的反映, 并且这段直线的纵轴截距为  $A^2$ , 斜率一半的负数为  $h_1$ , 中高频段斜率较小的直线段为浅部场源的反映, 并用其截距求出  $B^2$ , 用斜率一半的负数求  $h_2$ 。

### ② 匹配滤波

如果令  $S(\omega)$  与  $N(\omega)$  相同相位 (水平位置重合, 深度不同的物体相位可以相

同), 则可得另一种特殊形式的滤波器

$$H(\omega) = \frac{|S(\omega)|}{|S(\omega)| + |N(\omega)|} \quad (3-28)$$

即有分离区域场的频率响应

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{B}{A} e^{\omega(h_1-h_2)}} \quad (3-29)$$

### 3. 实现步骤

(1) 利用傅立叶变换, 由实测异常求频谱

$$S_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta T(x, 0) e^{-2\pi f x} dx \quad (3-30)$$

(2) 由傅立叶变换的实部与虚部求对数功率谱  $\ln E(\omega)$ 。

$$E(\omega) = R_e^2(\omega) + I_m^2(\omega) \quad (3-31)$$

(3) 根据对数功率谱曲线  $\ln E(\omega) - \omega$ , 求  $h_1, h_2, B/A$  等参数, 构制匹配滤波因子。

(4) 把实测异常频谱乘以相应滤波因子, 得到浅源场的频谱。

(5) 反傅立叶变换得到分离的浅源场与深源场。

## 3.3 非线性滤波磁异常数据处理方法

### 3.3.1 小波分析发展与原理

小波分析是半个多世纪以来在数学领域内调和分析的研究结果, 并且在信号处理、图像处理、量子场论、地震勘探、重磁勘探、语音识别与合成、雷达、CT 成像、天体识别、机器视觉和机械故障诊断与监控、分形以及数字电视等科技领域内得到了广泛地应用。原则上讲, 凡是传统上使用傅立叶分析的地方, 都可以用小波分析取代。

小波分析方法是一种时间窗和频率窗都可以改变的时频局部化分析方法, 在时域和频域同时具有良好的局部化性质。时频窗口大小固定但其形状可以改变, 在低频范围内具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率, 在高频范围内具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率, 具有自适应性。所以被誉为数学显微镜。

小波分析在数学中占有独特的地位。为寻求深入认识各种函数空间的简易方法, 数学家们给出了各类函数空间上的“原子分解”、“分子分解”、“框架分解”等, 并在相当长一段时间内, 在“原子分解”的名称下对小波分析进行了研

究。1910年Harr提出的规范正交基，尽管当时并没有出现“小波”这个词，但Harr的正交基是最早的小波基。1936年，Littlewood和Paley对傅氏级数建立了二进制频率分量分组理论，对频率按 $2^j$ 进行划分，其傅氏变换的相位变化并不影响函数的大小，这是多尺度分析思想的最早来源。1946年Gabor提出的加窗傅氏变换对弥补傅氏变换的不足起到了一定的作用。后来Calderon、Weiss等人将Littlewood-Paley理论推广到高维，并建立了奇异积分算子理论。1981年法国地球物理学家Morlet在分析地震数据时基于群论首先提出了小波分析(Wavelet analysis)这一概念，Morlet最初提出的是形状不变的小波(Wavelet of constant shape)，因为在分析函数时，加窗傅氏变换并不具有形状不变性。Morlet方法所取得数值分析的成功激发Morlet本人、法国理论物理学家Grossmann、法国数学家Meyer等人对小波分析进行深入研究。1985年Meyer提出光滑的小波正交基，1986年Meyer与他的学生Lemarie提出了多尺度分析的思想。1988年奥地利女数学家Daubechies提出了具有紧支集光滑正交小波基——Daubechies基。图象处理专家Mallat提出了多分辨率分析的概念，给出了构造正交小波基的一般方法。现在人们借助于Daubechies基和Mallat算法可以从事广泛的应用研究。

在自然界和工程实践中，许多现象或过程都具有多尺度特征或多尺度效应，同时，人们对现象或过程的观测及分析往往也是在不同尺度(分辨率)上进行的，因此用多尺度理论来描述、分析这些现象或过程是十分自然的，它能够很好地表现现象或过程的本质特征。此外，在解决许多实际问题时，多尺度方法具有思路清晰、简洁、计算复杂度低等优点。所以，近年来它受到许多学科领域内众多科学工作者的高度重视，在学术界掀起了多尺度(Multiscale)系统理论及应用研究的高潮。多尺度系统理论及应用研究是基于以下三个基本出发点：

- (1) 所研究的现象或过程具有多尺度特性或多尺度效应。
- (2) 无论现象或过程是否具有多尺度特性，通常，观测信号是在不同尺度或分辨级上得到，利用多尺度算法往往能获得更多信息，从而降低问题的不确定性和复杂性。
- (3) 无论现象或过程是否具有多尺度特性，观测信号是否在不同尺度或分辨级上得到，利用多尺度算法分析观测信号往往能获得更多信息，从而降低问题的不确定性和复杂性。

多尺度系统理论是在信号的多尺度表示理论基础上建立起来的，而多尺度或多分辨率现象在控制系统、信号处理等很多领域中广泛存在。在过去10年间，小波理论已在数据压缩、语音处理、子带编码等领域中得到了成功应用。小波分析的核心内容之一，多尺度分析。

### 3.3.2 小波函数定义

小波即小区域的波，图 3-3 所示为一般波和小波。小波函数的确切定义为：

设  $\psi(t)$  为一平方可积函数，即其傅立叶变换  $f(\omega)$  满足条件：

$$C_\varphi = \int_R \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (3-32)$$

我们称  $\psi(t)$  为一个基本小波或母小波 (Mother Wavelet)。并称上式为小波容许性条件。

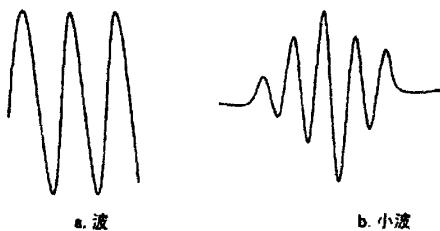


图 3-3 波和小波

从定义可以看出，小波函数的时域波形具有如下两个特点：

(1) 小——在时域上具有紧支集或近似紧支集。

(2) 波动性——由容许条件可得出，当  $\omega = 0$  时，必有  $\text{Im } \psi(\omega) = 0$ ，即直流分量为零。由此断定小波必具有正负交替的波动性。

将小波母函数势  $\psi(t)$  进行伸缩和平移，设其伸缩因子(又称尺度因子)

为  $a$ ，平移因子为  $b$ ，令其平移伸缩后的函数为  $\psi_{a,b}(t)$ ，则有

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in R; a > 0 \quad (3-33)$$

称  $\psi_{a,b}(t)$  为依赖于参数  $a, b$  的小波基函数，由于尺度因子  $a$ 、平移因子  $b$  是取连续变化的值，因此称  $\psi_{a,b}(t)$  为连续小波基函数，它们是由同一母函数  $\psi(t)$  经伸缩和平移后得到的一组函数序列。

通过伸缩因子和平移因子的变化，小波窗沿时间轴移动在不同的尺度上对整

个时间域上的函数变化进行分析。当  $a$  值小时，时间轴上观察范围小，而频域上相当于用较高频率作分辨率较高的分析，即用高频小波作细致观察。当  $a$  值较大时，时间轴上考察范围大，而在频域上相当于用低频小波作概貌观察。小波变换把信号分解成母小波按不同尺度伸缩和平移后的小波函数上，这些小波函数是紧支集的、时间有限的。图 3-4 形象地描述了小波变换。

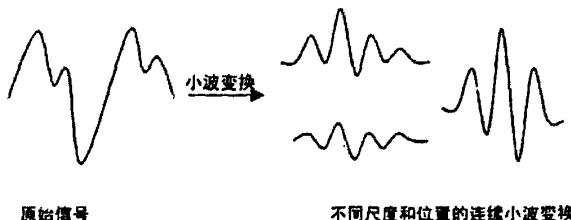


图 3-4 信号的小波分解

### 3.3.3 连续小波变换

小波变换的实质是将一个任意信号  $f(t)$  以小波函数为基底进行展开，具体定义如下：

对于任意的函数  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  的连续小波变换为

$$W_f(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3-34)$$

其逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{C\psi} \int_0^{+\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \quad (3-35)$$

然而，连续小波变换的信息量是有冗余的，为了节约计算量和便于压缩数据，应尽量减小小波变换系数的冗余度。同时，在工程实际中，我们所要分析的信号是经过采样的离散的有限长度信号，为了在计算机上实现小波变换，连续小波变换必须加以离散化。离散化的方法并不是针对时间变量  $t$ ，而是针对连续小波函数  $\psi_{a,b}(t)$  的尺度参数  $a$  和平移参数  $b$  的，这一点与以前习惯的时间离散化不同。取  $a = a_0^m, b = n a_0^m b_0$  ( $m, n \in \mathbb{Z}, a_0 > 1$ ) 来对参数  $a$  和  $b$  进行离散化，信号的离散小波变换可写作：

$$WT_f(m, n) = \langle f(t), \psi_{m,n} \rangle = a_0^{\frac{-m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi(a_0^{-m}t - nb_0)} dt$$

在实际应用中最常见的情况是取  $a_0=2$ ,  $b_0=1$  的情况, 我们称这类小波为二进小波。二进小波和离散小波相比, 它只是对尺度参数进行离散化, 而对时间上的平移参数仍保持连续变化, 因此, 二进小波不破坏连续小波变换的时移不变性, 这也是它较离散小波变换所具有的独特优点。

对二进离散小波, 由基本小波  $\psi(t)$  经伸缩和平移得到的函数序列为

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{\frac{-m}{2}} \psi(2^{-m}t - n) \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (3-36)$$

二进制小波变换可写为

$$WT_f(m, n) = \langle f(t), \psi_{m,n} \rangle = 2^{\frac{-m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi(2^{-m}t - n)} dt$$

离散小波变换和二进制小波变换都是有冗余的。

### 3.3.4 多分辨率分析

#### 1. 尺度函数与尺度空间

定义函数  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  为尺度函数 (scale function), 若其整数平移系列  $\phi_k(t) = \phi(t - k)$  满足

$$\langle \phi_k(t), \phi_k(t) \rangle = \delta_{kk} \quad (3-37)$$

定义由  $\phi_k(t)$  在  $L^2(\mathbb{R})$  空间张成的闭子空间为  $V_0$ , 称为零尺度空间:

$$V_0 = \overline{span\{\phi_k(t)\}}, k \in \mathbb{Z} \quad (3-38)$$

则, 对于任意  $f(t) \in V_0$ , 有

$$f(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) \quad (3-39)$$

同小波函数类似，我们假设尺度函数  $\phi(t)$  在平移的同时进行了尺度的伸缩，使我们得到了一个尺度和位移均可变化的函数集合：

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) = \phi_k(2^{-j}t) \quad (3-40)$$

称每一个固定尺度  $j$  上的平移系列  $\phi_k(2^{-j}t)$  所张成的空间  $V_j$  为尺度  $j$  的尺度空间：

$$V_j = \overline{sp_k an \left\{ \phi_k(2^{-j}t) \right\}}, k \in \mathbb{Z} \quad (3-41)$$

则对任意  $f(t) \in V_j$ ，有

$$f(t) = \sum_k a_k \phi_k(2^{-j}t) = 2^{-j/2} \sum_k a_k \phi_k(2^{-j}t - k) \quad (3-42)$$

由此，尺度函数  $\phi(t)$  在不同尺度下其平移系列张成一系列的尺度空间  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 。可知，随着尺度  $j$  的增大，函数  $\phi_{j,k}(t)$  的定义域变大，且实际的平移间隔  $(2^j \Delta t)$  也变大，则它的线性组合不能表示函数的细微变化，因此其张成的尺度空间只能包括大尺度的缓变信号。相反，随着尺度  $j$  的减小，函数  $\phi_{j,k}(t)$  的定义域变小，且实际的平移间隔  $(2^j \Delta t)$  也变小，则它的线性组合便能表示函数更细微变化。因此，其张成的尺度空间所包含的函数增多，尺度空间变大，也随着尺度的减小，其尺度空间增大。

## 2.多分辨率分析

多分辨率分析(Multi-Resolution Analysis,简称 MRA 方法)是 S.Mallet 在 1988 年提出的。MRA 不仅为正交小波的构造提供了一种简单的方法，而且为正交小波变换的快速算法提供了理论依据。同时，它的思想又和多采样率滤波器组不谋而合，使得小波变换和数字滤波器的理论结合起来。因此，多分辨率分析是小波理论中的精髓，具有非常重要的地位。

多分辨率的定义如下，设  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$  是  $L^2(\mathbb{R})$  上的一个子空间序列，如果  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$  和函数  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  满足以下条件：

一致单调性： $\cdots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots$

渐进完全性： $\cap V_j = \{0\}; \cup V_j = L^2(\mathbb{R}), j \in \mathbb{Z}$

伸缩规则性： $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^j t), f(2^j t) \in V_0, j \in \mathbb{Z}$

平移不变性:  $f(t) \in V_0 \Rightarrow f(t-n) \in V_0$ , 对所有  $n \in \mathbb{Z}$

正交基存在性: 存在  $\phi(t) \in V_0$ , 使得  $\{\{\phi(t-n)\}\}_n \in \mathbb{Z}$  是  $V_0$  的正交基。

则称  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$  是由函数  $\phi(t)$  生成的一个正交多分辨率分析, 其中  $\phi(t)$  称为尺度函数。从多分辨率分析的定义可以看出, 它与人类的视觉有着惊人的相似。当人杂观察某一目标时, 可设他与目标之间的距离为尺度  $j$ , 当他在远处观察目标时, 对应大尺度空间, 只能看到目标的概貌; 当他走近目标时, 对应于小尺度空间, 可以对目标进行细致观察。由远及近, 尺度相应的由大变小, 可以对目标进行多尺度的由粗到精的观察。

从上面的分析可知, 多分辨率分析的所有尺度空间  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$  是由同一尺度函数  $\phi(t)$  在不同尺度下张成的, 但由于  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$  相互包含, 不具有正交性, 因此, 尺度函数  $\phi(t)$  在不同尺度下的伸缩和平移  $\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k)$  不能构成  $L^2(\mathbb{R})$  的正交基。为此, 我们定义尺度空间  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$  的补空间如下:

设  $W_j$  为  $V_j$  在  $V_{j-1}$  中的补空间科学, 即

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j, V_j \perp W_j \quad (3-43)$$

可见, 任意子空间  $W_j$  与  $V_j$  是相互正交的。因此,  $\{W_j, j \in \mathbb{Z}\}$  构成了  $L^2(\mathbb{R})$  的一系列正交子空间。设  $\{\psi_{0,k}, k \in \mathbb{Z}\}$  是空间  $V_0$  的一组正交基且满足小波容许性条件, 则它的伸缩和平移的集合  $\{\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$  必然构成  $L^2(\mathbb{R})$  的一组正交基。其中  $\psi_{j,k}$  称为小波函数,  $W_j$  称为尺度为  $j$  的小波空间。

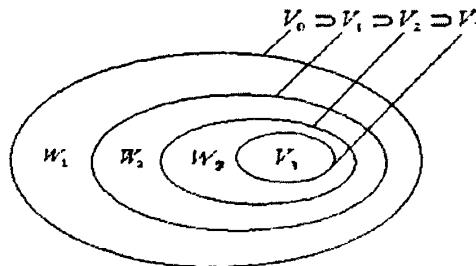


图 3-5 小波空间和尺度空间的关系

由上式可知, 小波空间  $W_j$  是两个相邻的尺度空间的差。如图所示为小波空间同尺度空间的关系, 相邻尺度空间的投影之间的细小差别即为函数  $f(t)$  在相应

尺度小波空间上的投影，因此小波空间有时又称为细节空间。

对二进制离散小波变换，实际常采用由多分辨率分析得到的 Mallat 快速算法。由二尺度方程

$$\begin{cases} \phi(t) = \sum_n h_0(n) \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \phi(2t - n) \\ \psi(t) = \sum_n h_1(n) \psi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n h_1(n) \psi(2t - n) \end{cases} \quad (3-44)$$

来完成，其中展开系数  $h_0(n)$ ,  $h_1(n)$  为：

$$\begin{cases} h_0 = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \\ h_1 = \langle \psi, \psi_{-1,n} \rangle \end{cases} \quad (3-45)$$

### 3. 正交小波变换的快速算法——Mallat 算法

正交小波变换分解与重构的快速算法，也称为 Mallat 算法，是 Mallat 在多分辨率分析的基础上提出的。它在小波分析中的地位就相当于 FFT 在经典傅立叶变换中的作用。正是由于快速算法的提出，才使得小波变换的优良特性得以充分的发挥，从而在众多领域中有着广泛的应用。其基本思想是：信号  $f(t)$  的某层小波分解是将  $f(t)$  以某个尺度  $j$  变换到空间  $L^2(R)$  的两个正交子空间  $V_j$  和  $W_j$  上，由  $V_j$  得到离散逼近值  $A_j f$ ，由  $W_j$  得到离散逼近值  $D_j f$ ，下一层分解中是以尺度  $j+1$  再将  $A_j f$  分解到子空间  $V_{j+1}$  和  $W_{j+1}$  中，这样不断分解下去，即

$$f(t) = A_1 f + D_1 f = A_2 f + D_2 f + D_1 f = A_n f + D_n f + D_{n-1} f + D_{n-2} f + \cdots + D_2 f + D_1 f$$

从而对信号进行了多分辨率的分解。分解过程如下图 3-6：

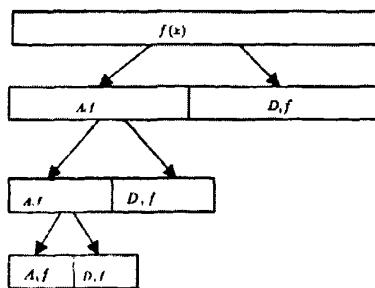


图 3-6 多分辨率分解

其中  $h$  和  $\psi$  是双通道滤波器组， $A_i f$  称为逼近信号或者平滑信号，它对应着信号的低频成分； $D_i f$  称为细节信号，它对应着信号的高频成分。

重构过程是分解的逆过程，相应的重构方法为

$$A_n f + D_n f + D_{n-1} f + D_{n-2} f + \cdots + D_2 f + D_1 f = f(t) \quad (3-46)$$

分解与重构的 Mallat 塔式算法的数学表达式为：若将  $f(t) \in L^2(R)$  按以下空间组合展开：

$$L^2(R) = \sum_{j=-\infty}^J W_j \oplus V_j \quad (3-47)$$

其中  $J$  为任意设定的尺度，则

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^J \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{J,k} \phi_{J,k}(t) \quad (3-48)$$

其中  $C_{J,k} = \langle f(t), \phi_{J,k}(t) \rangle$  称为尺度展开系数， $d_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle$  称为小波展开系数。

### 3.3.5 二尺度方程及多分辨率滤波器组

二尺度方程是多尺度分析赋予尺度函数  $\phi(t)$ ，小波函数  $\varphi(t)$  的最基本特征，它描述的是两个相邻尺度空间  $V_{j-1}$  和  $V_j$ ，或相邻的尺度空间  $V_{j-1}$ ，小波空间的基本函数  $W_j$  的基函数  $\phi_{j-1}, k, \phi_j, k$  和  $\phi_{j-1}, k, \varphi_j, k$  之间内在的本质联系。

由多分辨率分析概念得知， $\phi(t), \varphi(t)$  分别为尺度空间  $V_0$  及小波空间  $W_0$  的一个标准正交基函数。又由于  $V_0 \subset V_{-1}, W_0 \subset V_{-1}$ ，所以  $\phi(t), \varphi(t)$  也必然属于  $V_{-1}$  空间，也即  $\phi(t), \varphi(t)$  可用  $V_{-1}$  空间的正交基  $\phi_{-1,n}$  线性展开：

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_n h_0(n) \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n h_0(n) \phi(2t - n) \\ \varphi(t) &= \sum_n h_1(n) \phi_{-1,n}(t) = \sqrt{2} \sum_n h_1(n) \phi(2t - n) \end{aligned} \quad (3-49)$$

其中展开系数  $h_0(n), h_1(n)$  为

$$h_0(n) = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle, h_1(n) = \langle \varphi, \phi_{-1,n} \rangle \quad (3-50)$$

由于前三式描述的是相邻两尺度空间基函数之间的关系，所以称它们为一尺度方程。需要说明的是，二尺度关系存在与任意尺度之间，即：

$$\begin{aligned} \phi_{j,0}(t) &= \sum_n h_0(n) \phi_{-1,n}(t) \\ \varphi_{j,0}(t) &= \sum_n h_1(n) \phi_{-1,n}(t) \end{aligned} \quad (3-51)$$

并且展开系数  $h_0, h_1$  不随尺度  $j$  的变化而变化。

滤波器组系数和性质：

(1)  $h_0(n)$  和  $h_1(n)$  的总和为：

$$\sum_n h_0(n) = \sqrt{2}, \sum_n h_1(n) = 0$$

(2) 频域初值：

$$H_0(\omega = 0) = 1, H_1(\omega = 0) = 1$$

(3) 递推关系：

$$\Phi(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H_0(2^{-j}\omega)$$

$$\psi(\omega) = H_1\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{j=1}^{\infty} H_0(2^{-j}\omega)$$

(4)  $h_0(n)$  和  $h_1(n)$  的正交性：

$$\langle h_0(n-2k), h_0(n-2l) \rangle = \delta(k-l)$$

$$\langle h_1(n-2k), h_1(n-2l) \rangle = \delta(k-l)$$

$$\langle h_0(n-2k), h_1(n-2l) \rangle = 0$$

上式说明  $h_0(n)$  和  $h_1(n)$  分别满足次位移正交性，并且  $h_0(n)$  和  $h_1(n)$  也是偶次位移正交的。

(5) 滤波器  $H_0(\omega)$  和  $H_1(\omega)$  的特性：

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1$$

$$|H_1(\omega)|^2 + |H_1(\omega + \pi)|^2 = 1$$

$$H_0(\omega)\overline{H_1(\omega)} + H_0(\omega + \pi)\overline{H_1(\omega + \pi)} = 0$$

若令  $h_1(n) = g_n, h_0(n) = h_0$ ，则

$$g_n = (-1)^n h_{-n+1+2N}, N \in \mathbb{Z}$$

为上式的一组解。

此处如果取  $h_1(n) = -(-1)^n h_0(N-n)$ ，即  $H_1(Z) = Z^{-N} H_0(-Z^{-1})$ ，其频率特性为：

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-jN\omega} H_0(e^{-j(\omega+\pi)}) \quad (3-52)$$

两者的幅频特性是以  $\omega = \frac{\pi}{2}$  为轴线左右对称，相频特性是成共轭关系的，称共轭正交滤波器组 (conjugate quadrature filter bank, 简记 CQF)。CQF 具有正交性质、无损性质和功率互补性质等值得注意的良好特性。其中功率互补的含义是：尽管每个通道的频率特性小是全通的，也是带通的，但各通道合在一起却具有全通特征：

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_1(\omega)|^2 = C \quad (3-53)$$

证明：因为 CQF 条件下有  $H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = C$ ，且：

$$H_1(z) = z^{-N}H_0(-z^{-1}), H_1(z^{-1}) = z^{-N}H_0(-z)$$

代入上式便得：

$$H_1(z)H_1(z^{-1}) = H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = C$$

令  $z = e^{j\omega}$ ，便得：

$$|H_0(\omega)|^2 + |H_1(\omega)|^2 = C \quad (3-54)$$

由此设计的滤波器即为 CQF 滤波器。

### 3.3.6 离散序列的多分辨率分析与正交小波变换

由二尺度方程特性可推得：

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \sum_m h_0(m-2k)c_{j-1} \\ d_{j,k} &= \sum_m h_1(m-2k)c_{j-1} \\ c_{j-1,m} &= \sum_k c_{j,k}h_0(m-2k) + \sum_k d_{j,k}h_1(m-2k) \end{aligned} \quad (3-55)$$

式中  $c_{j,k}$  和  $d_{j,k}$  为信号  $f(t)$  在尺度  $j$  上的展开系数，其中上式为小波变换的重建公式。

从数字滤波器的角度来看上式所描述的分解过程可由图所示的电路结构来实现。其中， $h_0(n)$  和  $h_1(n)$  为由上式确定的滤波器系数。 $C_j(k)$  代表分辨率为  $a = 2^j$  的离散概貌信号，各  $d_j(k)$  代表该分辨率下的细节信号。由电路图可以看出每级滤波器所采用的滤波参数是一致的，且每一级计算后产生的输出都经过二抽取，因此该方法的计算量远低于数值积分法。此算法是由法国学者 Mallat 首先提出的，故称 Mallat 算法。

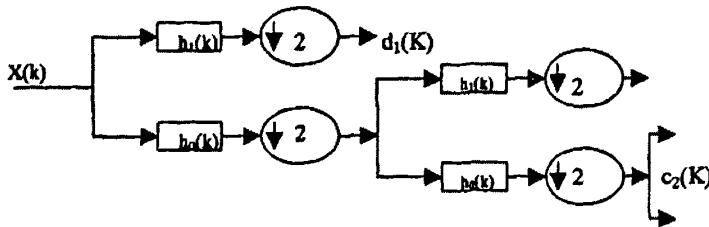


图3-7 两级 Mallat 多分辨率分解电路结构

据前述数字滤波器的理论描述重建方程的电路结构如图中  $h_0(n)$  和  $h_1(n)$  同信号分解时的一样，多分辨率框架  $h$  的滤波器系数，符号  $\uparrow 2$  表示一插值，用以恢复一抽取前的序列长度。插值后的序列经相应的低通  $h_0(n)$  或高通  $h_1(n)$  滤波，可平滑补零后的波形，也就是去掉补零后的镜像谱。

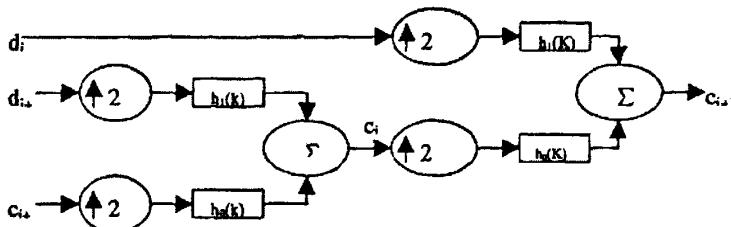


图3-8 两级重建电路

### 3.3.7 常用的小波函数

小波分析中所用到的小波函数具有不唯一性，即小波函数  $\psi(t)$  具有多样性。在小波分析的工程应用中，一个十分重要的问题是最佳小波基的选择问题，这是因为用不同的小波基分析同一个问题会产生不同的结果。目前主要通过用小波分析方法处理信号的结果与理论结果的误差来判定小波基的好坏，并由此选择小波基。

根据不同的标准，小波函数具有不同的类型，这些标准通常有：

1、 $\psi$ 、 $\hat{\psi}$ 、 $\phi$  和  $\hat{\phi}$  支撑长度。即当时间或频率趋向于无穷时， $\psi$ 、 $\hat{\psi}$ 、 $\phi$  和  $\hat{\phi}$  从一个有限值收敛到 0 的速度。其中  $\psi$  为小波系数， $\phi$  为尺度函数， $\hat{\psi}$  和  $\hat{\phi}$  为它们对应的傅立叶变换。

2、对称性。它在图象处理中对于避免移相是非常有用的。

3、 $\psi$  和  $\phi$  的消失矩阵阶数。它对于压缩是非常有用的。

4、正则性。它对信号或图像的重构获得较好的平滑效果是非常有用的。

但在众多的小波基函数家族中，有一些小波函数被实践证明是非常有用的。接着将介绍几种常见的小波函数：

#### ①Daubechies(dbN)小波系

Daubechies 函数是由世界著名的小波分析学者 Ingrid Daubechies 对尺度取 2 的整数幂（即  $a = 2^j, j \in \mathbb{Z}^+$ ）构造的小波函数，除 db1(即 Haar 小波)外，其它小波没有明确的表达式，但转换函数  $h$  的平方模是很明确的。

假设  $p(y) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k^{n-1+k} y^k$ ，其中  $C_k^{n-1+k}$  为二项式的系数，则有

$$|m_0(\omega)|^2 = (\cos^2 \frac{\omega}{2})^N p(\sin^2 \frac{\omega}{2}) \quad (3-56)$$

其中

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-jk\omega} \quad (3-57)$$

小波函数  $\psi$  和尺度函数  $\phi$  的有效支撑长度为  $2N-1$ ， $N$  值越大  $\psi$  的长度就越长。小波函数  $\psi$  的消失矩阶数为  $N$ 。

dbN 大多数不具有对称性；对于有些小波，不对称性是非常明显的。dbN 小波具有正则性。

#### ②Morlet(morl)小波

Morlet 小波是一种单频复正弦调制高斯波，也是常用的复值小波。定义为

$$\psi(x) = Ce^{-x^2/2} \cos(5x) \quad (3-58)$$

它的尺度函数不存在，且不具有正交性。

Morlet 小波是一种复数小波，其时、频两域都具有很好的局域性，常用于复数信号的分解及时频分析中。Morlet 小波在推广到 N 维时具有很好的角度选择性。

### 3.3.8 小波包分析

狭义的小波分析仅指多分辨率分析，广义的小波分析则包括多分辨率分析和小波包分析两部分内容。多分辨率分析的基本思想是把信号投影到一组相互正交的小波函数构成的子空间上，形成了信号在不同尺度上的展开，从而提取了信号

在不同频带的特征，同时保留了信号在各尺度上的时域特征。虽然多分辨率分析是一种有效的时频分析方法，但它每次只对信号的低频部分进行分解，高频部分保留不动。而且它的频率分辨率与  $2^j$  成正比，因此高频部分频率分辨率差。小波包分析对此进行了改进，它同时可在低频和高频部分进行分解，自适应地确定信号在不同频段的分辨率。由于尺度函数小波函数存在着二尺度关系：

$$\begin{cases} \mu_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \mu_0(2x - k) \\ \mu_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \mu_0(2x - k) \end{cases} \quad (3-59)$$

其中， $\mu_0 = \phi(x), \mu_1 = \psi(x)$ ，则

$$\begin{cases} \mu_{2l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \mu_1(2x - k) \\ \mu_{2l+1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \mu_1(2x - k) \end{cases} \quad (3-60)$$

定义的  $\mu_n, n = 2l + 1, l = 0, 1, \dots$ ，称为关于正交尺度函数  $\mu_0(x) = \phi(x)$  的小波包。联系多分辨率分析，将和统一用记号  $C$  表示，在求和公式中作变量代换并乘以归一化系数，并以离散形式表示得到：

$$\begin{cases} c_{2l} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) c_1(2n - k) \\ c_{2l+1} = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) c_1(2n - k) \end{cases} \quad (3-61)$$

此即作为信号的小波包分解。分析得知，小波包分解每次得到的都是两个序列，而这两个序列都要进一步的分解，即分解过程不只对低频部分，高频部分也要进行，从而使信号的高频部分的频率分辨率也得到了提高。最终在尺度  $j = J$  上的分解序列为  $\{C_{2^{J-1}}, C_{2^{J-1}+1}, \dots, C_{2^{J-1}+2^{J-1}}\}$

由小波包分解后的序列重构信号，所用的算法也由 Mallat 给出，当记  $H_{n,k} = h_{k-2n}, G_{n,k} = g_{k-2n}$ ，则有矩阵  $H = (H_{n,k}), G = (G_{n,k})$ ，可得：

$$\begin{cases} c_{j+1}(n) = Hc_j(k) \\ d_{j+1}(n) = Gc_j(k) \end{cases}$$

则有：

$$c_j(k) = H^* c_{j+1} + G^* d_{j+1} \quad (3-62)$$

上式为小波多分辨率分析和小波包分解的重构算法，其中  $H^*$ 、 $G^*$  分别为  $H$ 、

$G$  对偶算子，小波多分辨率和小波分解结构树如图所示，重构即按分解的反方向作逆运算。

### 3.3.9 位场小波变换原理

#### 1. 连续小波变换

Morean 等人提出了用于二维物理空间小波变换的基本理论，直接定义函数  $\phi_0(x \in R)$  的连续小波变换卷积形式：

$$W_{\psi|\phi_0}(b, a) = \int_R \frac{dx}{a} \psi\left(\frac{b-x}{a}\right) \phi_0(x) = (D_a \psi * \phi_0)(b) \quad (3-63)$$

式中： $\psi(x \in R)$  是分析小波； $a \in R^+$  是尺度参数，膨胀算子  $D_a$  定义为

$$D_a \psi(x) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x}{a}\right) \quad (3-64)$$

分析小波  $\psi$  是一维函数，可以在一类具有消失积分的震荡函数中任意选择，其支撑可以严格限制到含有坐标原点的区间内。第一式的定义与一般小波变换的定义略有差别。显然有小波

$$W_{\psi|D_a \phi_0}(b, a) = \int_R \frac{dx}{a} \psi\left(\frac{b-x}{a}\right) \frac{1}{\lambda} \phi_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} W_{\psi|\phi_0}\left(\frac{b}{\lambda}, \frac{a}{\lambda}\right) \quad (3-65)$$

若  $\phi_0$  是  $a \in R$  阶齐次函数，即

$$\phi_0(\lambda x) = \lambda^a \phi_0(x), (\forall \lambda > 0)$$

满足上两式的函数可简化为

$$W_{\psi|D_a \phi_0}(\lambda b, \lambda a) = \int_R \frac{d(x/\lambda)}{a} \psi\left(\frac{b-x/\lambda}{a}\right) \lambda^a \phi_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \lambda^a W_{\psi|\phi_0}(b, a) \quad (3-66)$$

说明一个齐次函数的全部小波变换可以通过对任意单个“声音”进行膨胀、改变尺度而获得。下面从位场理论引入小波。

#### 2. 位场解析延拓与齐次位场源：

根据面磁荷磁场理论，水平面磁荷的磁场垂直分量为

$$f_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(z - \zeta) d\xi d\eta}{\sqrt[3]{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \quad (3-67)$$

式中： $\sigma$  为场源的面磁荷密度； $\xi, \eta, \zeta$  为  $\sigma$  的坐标； $x, y, z$  为观测点的坐标

(Z轴向下),  $\mu_0$ 为空气的磁导率。在二维情况下, 上式简化为

$$f_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\xi, \zeta)(z - \xi)d\xi}{(x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2} \quad (3-68)$$

设  $K(x, z) = \frac{z}{x^2 + z^2}$ , 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, z)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{x^2 + z^2} dx = \pi \quad (3-69)$$

为了归一化, 取

$$p_z(x) = \frac{1}{\pi} k(x, z) = \frac{1}{\pi} \frac{z}{x^2 + z^2} \quad (3-70)$$

那么  $f_z(z) = (\mu_0/2) \sigma(x, \zeta) * p_{z-\zeta}(x)$ , 即观测点的场值  $f_z(z)$  等于场源密度

$\sigma_z(x)$  与核函数  $p_{z-\zeta}(x)$  的卷积。若在  $z = z'$  观测, 则

$$f_{z'}(x) = (\mu_0/2) \sigma(x, \zeta) * p_{z'-\zeta}(x) \quad (3-71)$$

得其傅氏变换为:

$$F_{z'}(u) = (\mu_0/2) \Xi(u, \zeta) \cdot e^{-2\pi|u|(z-z')} \quad (3-72)$$

解析延拓到某一高度  $z < z'$  处,  $f_z(x)$  的傅氏变换为

$$F_z(u) = F_{z'}(u) \cdot e^{-2\pi|u|(z-z')} \quad (3-73)$$

便得延拓到  $z < z'$  处的  $f_z(x)$ , 令  $x = b$

$$f_z(b) = f_{z'}(b) * p_{z-z'}(b) = (D_{z-z'} p_z * f_{z'})(b) = W_{p_z | f_z}(b, z - z') \quad (3-74)$$

如取  $Z' = 0$ , 即观测点位于  $x$  轴上, 则  $f_z(b) = W_{p_z | f_z}(b, z)$ 。

由此可见,  $f_z(b)$  在高度  $Z$  处的解析延拓值  $f_z(b)$  等于其尺度为相应高度  $Z$  的小波系数, 也就是说水平面磁荷的磁场小波变换与其上延拓实质上是同等的。

更一般地, 设位场  $\phi$  解析延拓的边值问题为

$$\nabla^2 \phi(q) = 0, \forall q = (x, z) \in R \times R^{-1}; \phi(x, z = 0) = \phi_0(x); \int_R |\phi(x, z \leq 0)|^2 dx < \infty$$

其中  $\phi_0(x)$  是有界、平方可积的,  $\phi(x, z)$  由  $\phi_0(x)$  和在无穷远边界条件唯一确定。 $\phi(x, z)$  是  $\phi_0(x)$  从超平面  $R$  到上半空间的解析延拓, 可表示成卷积形式

$$\phi(x, z) = (D_z p * \phi_0)(x)$$

这里  $P$  为 Poisson 核，且满足半群性质  $D_z P^* D_{z'} P = D_{z+z'} P$ ， $\phi_0(x)$  的解析延拓值可以表示成小波变换系数，即  $\phi(x, z) = W_{\psi|_{\phi_0}}(x, z)$ 。

对于场来说，用齐次函数  $\sigma(x, z)$  模拟场源，其 Poisson 方程为

$$\nabla^2 \phi(q) = -\sigma(q), q(x, z) \in R^2 \quad (3-75)$$

式中  $\sigma$  是相对于点  $(x, z \geq 0)$  处的齐次场源密度，是正则指数为  $\alpha$  的齐次函数，支撑区间是  $R \times R^+$  的下半空间，这意味着：对任意正数  $\lambda$  有  $\sigma(\lambda x, \lambda z) = \lambda^\alpha \sigma(x, z)$ ，且有  $\sigma(x/\lambda, z) = \lambda^{-\alpha} \sigma[x, \lambda(z - z_0) + z_0]$ ， $\sigma(q)$  产生位场  $\phi(x, z)$  的正则指数  $\alpha + 2$  为，即

$$\phi(x/\lambda, z) = \lambda^{-\alpha-2} \phi[x, \lambda(z - z_0) + z_0] \quad (3-76)$$

对观测位场来说，有  $D_\lambda \phi_0(x) = \lambda^{-1-\alpha-2} \phi[x, (1-\lambda)z_0]$ ，膨胀算子只作用于  $x_0$ 。

上式说明：对于齐次位场来说，其膨胀算子的作用与向上延拓算子的作用是等效的。综合之后，可得下式：

$$D_{(1-\lambda)z_0} P^* = \lambda^{1+\alpha+2} D_\lambda \quad (3-77)$$

### 3. 局部齐次位场源小波分析

小波变换与膨胀是协变的，位场也是齐次的，可得

$$W_{\psi|_{\phi_0}}(b, a) = \lambda W_{\psi|_{D_\lambda \phi_0}}(\lambda b, \lambda a) = \lambda^{-\alpha-2} W_{\psi|_{\phi[x, (1-\lambda)z_0]}(\lambda b, \lambda a)} \quad (3-78)$$

由解析延拓式给出

$$\phi[x, (1-\lambda)z_0] = [(D_{(1-\lambda)z_0} P)^* \phi_0](x) \quad (3-79)$$

则

$$W_{\psi|_{\phi_0}}(b, a) = \lambda^{-\alpha-2} \cdot \left\{ [D_{(1-\lambda)z_0} P]^* D_{\lambda a} \right\} \psi^* \phi_0(\lambda b) \quad (\lambda b) \text{ 可 } (D_\alpha P^* D_{\alpha'}) \psi = (c D_{\alpha''}) \psi$$

系数  $C$  与膨胀系数  $\alpha''$  简化为

$$W_{\psi|_{\phi_0}}(b, a) = \lambda^{-\alpha-2} [(c D_{\alpha''} \psi)^* \phi_0](\lambda b) = c \lambda^{-\alpha-2} W_{\psi|_{\phi_0}}(\lambda b, a'')$$

将  $C$  和  $\alpha''$  用  $\alpha$ 、 $\lambda$ 、 $Z_0$  来表示，Moreau 等人已证明：满足上式一类小波可以用线性算子作用于 Poisson 核  $P(x)$  来构成，即

$$\psi^\gamma = \mathcal{P} p_1$$

$\mathcal{P}$  为  $\gamma$  阶齐次傅氏乘子，由傅氏变换的性质  $\frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} p_1(x) \xleftrightarrow{F} (i\omega)^\gamma p_1(\omega)$  可知，

只要取， $L(\omega) = (i\omega)^\gamma$ ，且有  $L(\lambda\omega) = \lambda^\gamma L(\omega)$ ，即满足齐次性。

这是我们熟悉的向上延拓算子，把调和场  $\phi(\bullet, z)$  从高度  $Z$  变换到高度  $z+a$ 。由  $p_1$  沿水平和垂直（向上）的一次导数可以分别构成“水平”  $\psi_x$  和“垂直”  $\psi_z$  两类小波，那么， $\psi_x$  和  $\psi_z$  对  $x$  的  $\gamma-1$  次导数分别给出  $\gamma$  阶小波及其傅氏变换

$$\begin{cases} \psi_x' (x) = \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} p_1(x) \\ \psi_z' (x) = \frac{\partial^{\gamma-1}}{\partial x^{\gamma-1}} \left( \frac{\partial}{\partial a} p_a(x) \right)_{a=1} \end{cases}, \begin{cases} \psi_x'(u) = (i2\pi u)^\gamma e^{-2\pi|u|} \\ \psi_z'(u) = (i2\pi u)^{\gamma-1} (-2\pi|u|) e^{-2\pi|u|} \end{cases} \quad (3-80)$$

将  $\gamma$  齐次傅氏乘子和膨胀算子  $D_a$  作用于 Poisson 半群核，获得一类小波  $\psi^\gamma$ ，也称为柯西 (Cauchy) 小波，当  $\gamma$  分别为 1、2、3 时，有

$$\begin{aligned} \psi_x^1(x) &= -\frac{2}{\pi} \frac{x}{(1+x^2)^2}, \psi_x^2(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} \\ \psi_x^3(x) &= \frac{24}{\pi} \frac{x-x^3}{(1+x^2)^4}, \psi_z^1(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ \psi_z^2(x) &= \frac{2}{\pi} \frac{3x-x^3}{(1+x^2)^3}, \psi_z^3(x) = \frac{6}{\pi} \frac{1-6x^2+x^4}{(1+x^2)^4} \end{aligned} \quad (3-81)$$

这类  $\gamma$  阶小波是连续的非正交、非紧支支撑母小波。用这类  $\gamma$  阶母小波对位场  $\phi_0(x)$  进行小波变换分析，即用膨胀参数  $a$  膨胀这些母小波，把  $\psi^\gamma(x)$  变换成  $\psi^\gamma(x/a)/a$ ，位场  $\phi_0(x)$  与这些膨胀实小波的卷积给出尺度为  $a$  的位场小波系数，它相应于位场  $\phi_0(x)$  求  $\gamma$  次导数后向上延拓到高度为  $z+a$  出的延拓值  $\phi^{(\gamma)}(x, z+a)$ ，延拓场量纲为原场量纲，有

$$W_{\psi_x^\gamma \phi_0}(x, a) = a^\gamma \frac{\partial^{\gamma-1} \phi_x(x, z+a)}{\partial x^{\gamma-1}}, W_{\psi_z^\gamma \phi_0}(x, a) = a^\gamma \frac{\partial^{\gamma-1} \phi_z(x, z+a)}{\partial x^{\gamma-1}} \quad (3-82)$$

式中:  $\phi_x(\cdot, z)$  和  $\phi_z(\cdot, z)$  分别表示位于  $z$  处的位场函数  $\phi_0$  沿水平、垂直方向上的一次导数。

针对此类小波, 可得简化后的等式如下:

$$W_{\psi'|\phi_0}(b, a) = \left(\frac{a}{a'}\right)^{\gamma} \left(\frac{a' + z_0}{a + z_0}\right)^{\gamma-\alpha-2} W_{\psi'|\phi_0}\left(b \frac{a' + z_0}{a + z_0}, a'\right) \quad (3-83)$$

这表明位于  $(x=0, z=z_0)$  的局部齐次场源在  $z=0$  处所产生的位场  $\phi_0(x) = \phi(x, z=0)$ , 其小波变换系数在位置参数与膨胀参数所构成的上半平面 ( $a = -z > 0$ ) 内服从小波变换双尺度定律, 可得

$$W_{\psi'|\phi_0}(b, a) = \left(\frac{a}{a'}\right)^{\gamma} \left(\frac{a' + z_0}{a + z_0}\right)^{-\beta} W_{\psi'|\phi_0}\left(b \frac{a' + z_0}{a + z_0}, a'\right) \quad (3-84)$$

等式左边中  $b, a$  分别表示某一位置、膨胀参数 (不同高度), 而右边中  $b(a' + z_0)/(a + z_0)$ 、 $a'$  分别表示另一位置、膨胀参数。指数  $\gamma$  是小波  $\psi'$  的阶数, 指数  $\beta$  是与场源正则指数  $\alpha$  有关的参数, 称尺度指数。在  $(b, a)$  平面内, 形成满足常数的一簇直线, 并且在下半平面相交于点  $(0, z_0)$ , 在三维情况下, 就会形成一族圆锥柱面, 圆锥柱面的顶点为交汇点。信噪比在极值上为最佳, 故取  $\frac{\partial^m}{\partial b^m} W_{\psi'|\phi_0}(b, a) = 0$ , 则驻点形成一族直线, 称此簇直线为极值轴线, 也称小波系数的峰脊, 其交汇点为场源位置, 而沿着峰脊, 小波系数的幅值是按指数  $a^\alpha$  的形式变化的, 根据其变化规律, 可估计齐次函数的正则指数  $\alpha$ 。

## 第4章 磁异常处理结果

### 4.1 垂直叠加磁异常处理结果

#### 4.1.1 一次导数提取垂直叠加磁异常

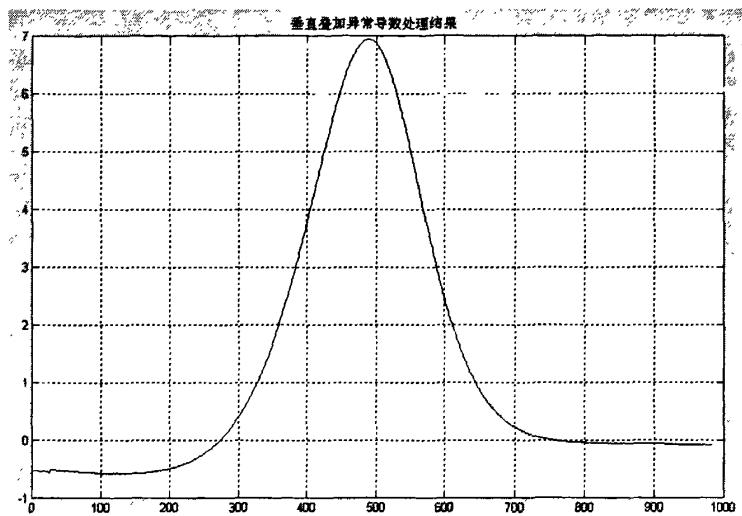


图 4-1 垂直叠加磁异常导数处理结果图

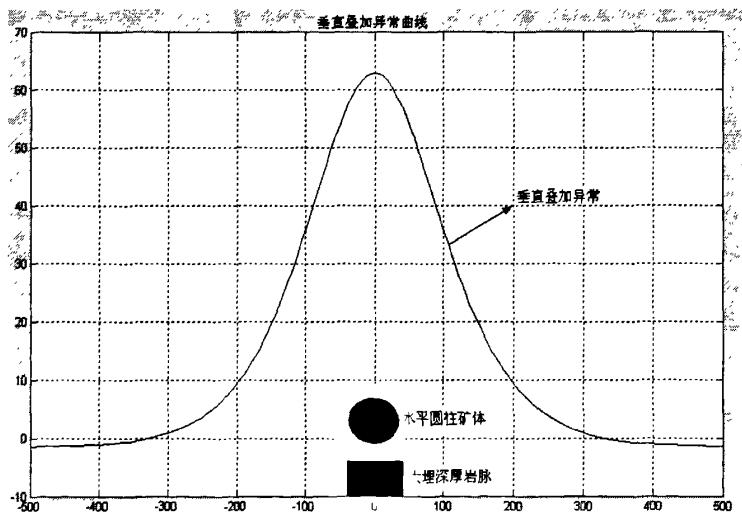


图 4-2 垂直叠加磁异常导曲线图

#### 4.1.2 低通滤波提取垂直叠加磁异常

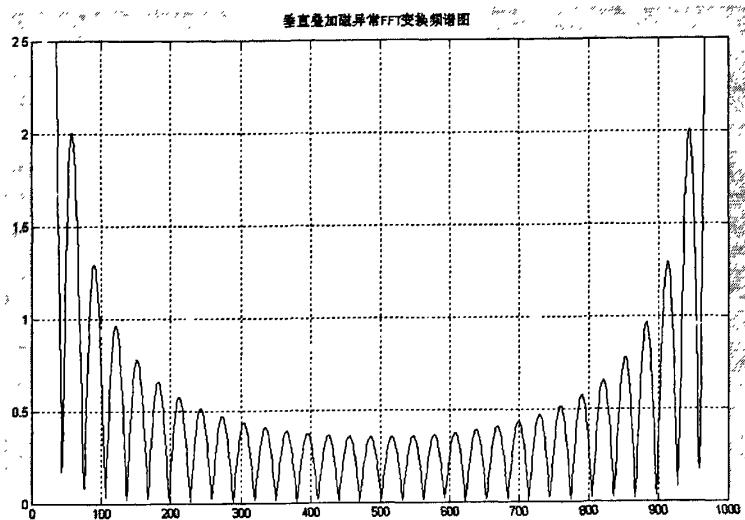


图 4-3 垂直叠加磁异常 FFT 变换频谱图

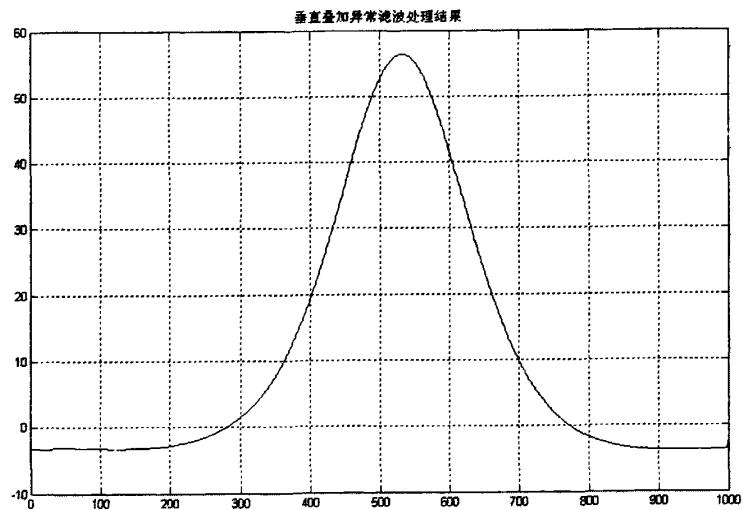


图 4-4 垂直叠加磁异常低通滤波处理结果图

### 4.1.3 小波变换提取垂直叠加磁异常

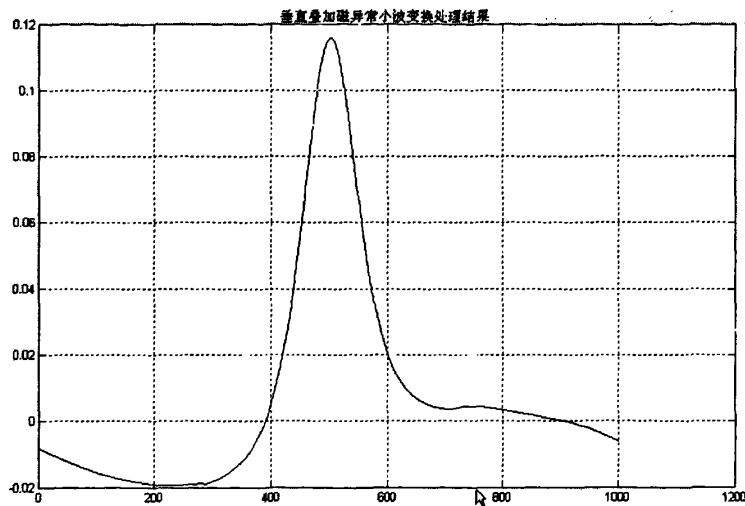


图 4-5 垂直叠加磁异常小波变换处理结果图

## 4.2 水平叠加磁异常处理结果

### 4.2.1 一次导数提取水平叠加磁异常

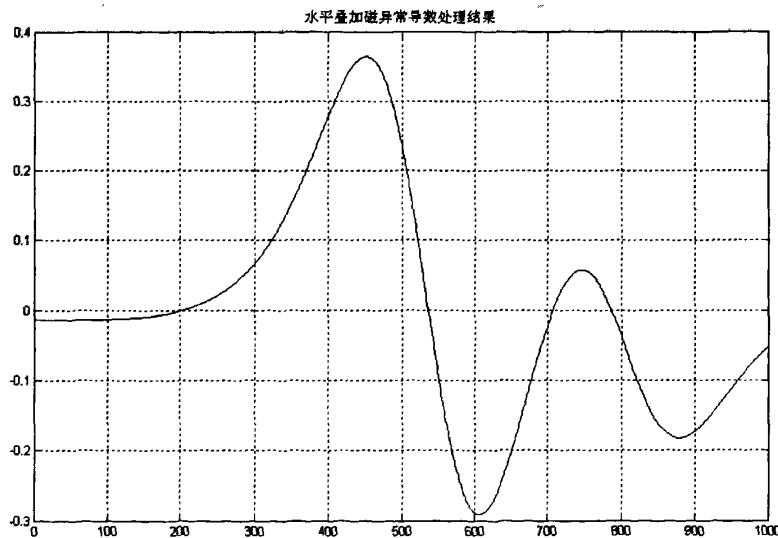


图 4-6 水平叠加磁异常导数处理结果图

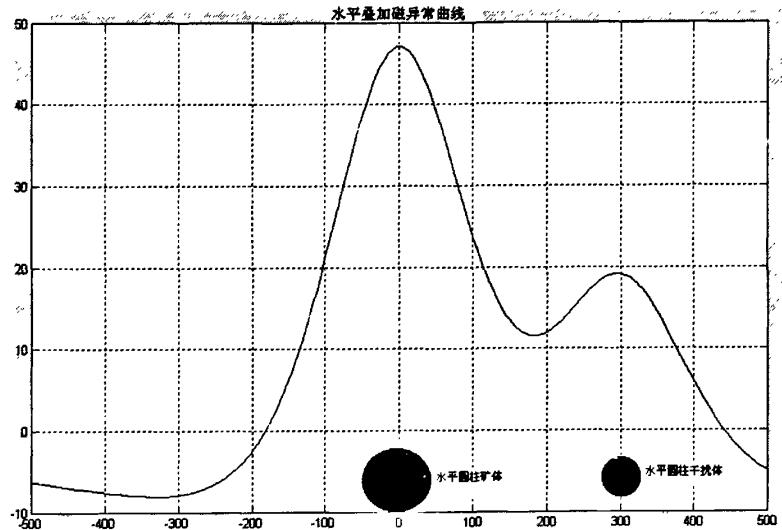


图 4-7 水平干扰叠加磁异常曲线

#### 4.2.2 低通滤波提取水平叠加磁异常

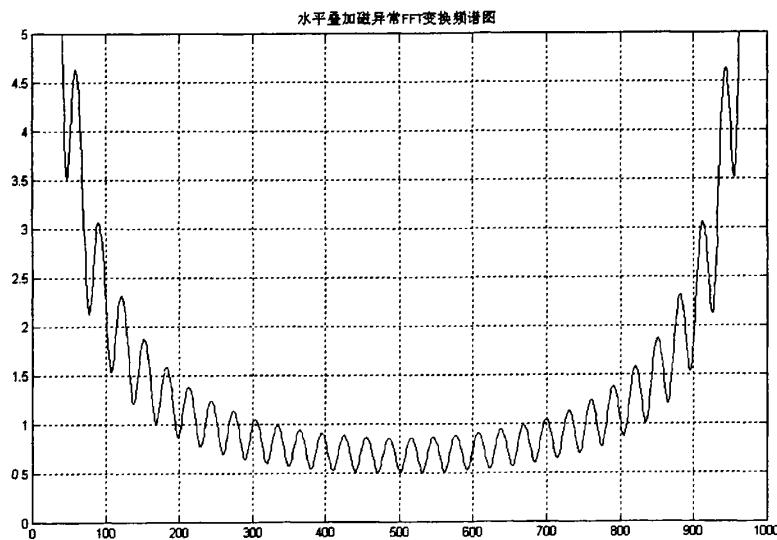


图 4-8 水平叠加磁异常 FFT 变换频谱图

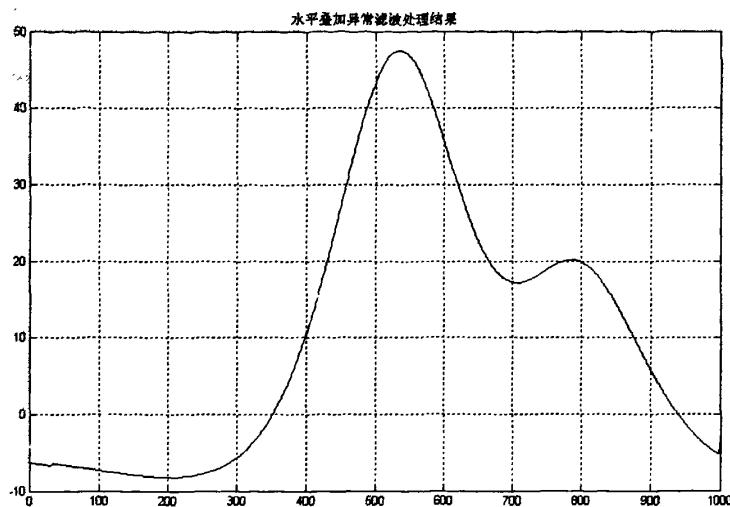


图 4-9 水平叠加磁异常低通滤波处理结果图

#### 4.2.3 小波变换提取水平叠加磁异常

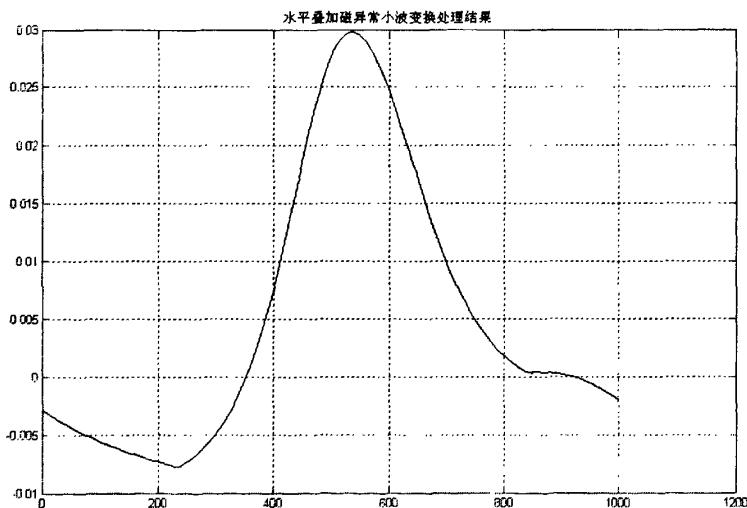


图 4-10 水平叠加磁异常小波变换处理结果图

## 第 5 章 研究成果总结

### 5.1 处理成果分析

#### 5.1.1 垂直叠加异常处理结果分析

经过磁异常导数、频率滤波、小波变换三中方法的处理得到的垂直叠加磁异常结果图象如图 4-1、图 4-4、图 4-5 所示。

图 4-1 所示为磁异常导数换算算法，磁异常的一次垂向导数用差商代替。一般来说磁异常导数换算对于复杂形体磁异常的解释很有利，尤其是对于确定岩层接触带和分离薄板状矿体的磁性异常时具有很明显的效果。本文所设计的地磁体模型为水平圆柱体矿体和水平圆柱体干扰异常，通过对模型数据用磁异常导数方法处理后所得到的图形已经能比较清楚的反映矿体和干扰体的埋藏情况。在图 4-1 能明显的显示矿体异常和分离后的干扰异常。从处理成果图中能够得到矿体的相关信息，如大致的矿体中心位置，矿体磁异常大小等。

图 4-4 所示为对垂直叠加磁异常快速傅立叶变换后，进行滤波然后进行傅立叶反变换后的处理结果。本论文中所设计的磁体异常模型和干扰异常模型相比，当转换到频率域后，矿体磁异常的频率谱在大部分区间内都低于干扰磁异常的频率谱，所以按照设想，对他们的叠加频率谱进行频率滤波，应当会滤掉频率较大的干扰异常频率，使相对较低的矿体磁异常频率被保留下。既而对滤波后得到的频率谱进行傅立叶反变换，得到频率滤波后的垂直叠加异常处理结果。如图 4-4 所示，经过频率滤波的处理，得到的矿体磁异常曲线虽然不能很好的和原矿体产生的磁异常完全吻合，但是有在埋藏位置，异常大小上有了很好的显示。尤其是对于矿体异常的大小得到了比较好的反演效果。但滤波器的设计直接影响到滤波的处理结果，所以这次的处理结果是否能够最佳的还原矿体异常还有待进一步的研究。

图 4-5 所示为对垂直叠加磁异常进行小波变换以后得到的处理结果图形。小波快速变换，实际上是将信号通过低通和高通两组滤波器，把信号分解为低频和高频两部分，对于平稳信号来说，信号的能量大部分都集中在低频部分，只有少部分的细节才会出现在高频部分。而噪声的大部分能量都集中在高频部分。而非平稳信号的频率是分布在整个频域，因此它和噪声的频域一定有部分是重叠的，所以用经典的时不不变滤波方法就不能将非平稳信号同噪声区分开，使得在相应坐标系统内的信号同噪声的重叠尽可能地小。在本文中我们认为矿体产生的磁异常相当于是低频的稳定信号，而干扰体产生的磁异常认为是部分高频的非稳定信

号。这里采用高频系数置零的去噪，其优点是比起传统滤波器来说，用小波变换将高频系数强制置零去噪的方法比较方便，因为传统滤波器对于不同的截止频率的信号是需要用不同的截止频率的滤波器去除噪声的，且比传统的滤波法所得到的效果要好。从图 4-5 可以看出经小波变换后的磁异常结果大体上能够反映原矿体的磁性异常大小及形态，从这些信息可以反演出矿体的位置大小和埋藏深度等。

### 5.1.2 水平叠加异常处理结果分析

经过磁异常导数、频率滤波、小波变换三中方法的处理得到的垂直叠加磁异常结果图象如图 4-6、图 4-9、图 4-10 所示。和垂直叠加磁异常处理结果相比，水平叠加磁异常处理结果能更有效地反映矿体实际磁性异常。

图 4-6 为磁异常导数处理水平叠加磁异常的结果图象。图中  $\frac{\partial \Delta T}{\partial x}$  曲线将矿体异常和水平叠加的干扰体异常很好地分离开来了。在矿体上方和干扰体上方都出现了明显的孤立波峰，而在原叠加异常图中叠加的部分也被部分得分开。从图 4-6 中可以清晰地看出矿体和干扰体的相对位置信息。

图 4-9 为所示为对水平叠加磁异常快速傅立叶变换后，进行频率滤波然后进行傅立叶反变换后的处理结果。经过频率滤波的处理，得到了结果图形没有能够很好的分离出原矿体和干扰体的磁性异常。即对于磁异常的处理利用傅立叶频率滤波方法处理文中数学模型还需要进一步研究。

图 4-10 所示为对水平叠加磁异常进行小波变换以后得到的处理结果图形。从处理结果图形来看，对于水平叠加的球形矿体磁异常模型来说，经小波变换后能够部分反映出原矿体的磁异常形态和埋藏位置。

## 5.2 解决方案

在论文中，我选用了三种方法对不同叠加类型的磁性体异常进行处理，三种方法分别是：磁异常导数处理、频率滤波和小波变换。从处理成果来看，三种方法都能从某一个或者几个方面来反映出原矿体的部分信息，但是对于文中所建立的模型，几种方法中还没有一种是能够完全精确的反映原矿体磁性异常的。对于处理的结果图象也有部分能够确定矿体的大小和位置，应用于实际的生活生产中是没有问题的。但是对于学术研究来说，还需要进行更为深入和细致的研究来完善和弥补现在所存在的不足。

关于解决方案，我想除了对文中所选择的方法进行改进外，还应利用更多的时间和精力寻找新的数据处理方法。使其既满足数据处理的要求也要符合磁异常

处理在实际应用中的要求。

### 5.3 研究方向

磁测异常处理的研究从有磁法探测时就一直在进行着，我在本文中仅仅是建立了一个二度水平圆柱体矿体模型，以及在垂直方向和水平方向上的水平圆柱体磁异常干扰而已。对于自然界中存在的复杂磁性体和复杂干扰形式而言，还远远不够。所以我觉得进一步的研究方向是建立更加复杂和完备的磁性体和干扰异常模型，使其更加接近自然界中真实存在的实际情况。然后利用数据处理方法对其进行处理，让所得结果最大限度的与真实结果接近。

## 结 论

在模型的建立和对模型数据的处理过程中，得到了以下结论：

1. 磁异常导数处理方法在处理水平圆柱体模型磁性异常的过程中，表现出了算法简单快捷，利于操作的特点，在水平叠加异常的处理过程中充分显示了其对异常分离的强大作用。

2. 傅立叶变换频率滤波处理方法，能够很好的处理平稳的由矿体引起的磁性异常，在大部分区间内可以把似高频的干扰异常消除掉，在本文的数据处理过程中，从结果看到，滤波较好的还原了原矿体的磁异常曲线。

3. 小波变换处理方法被称为“显微镜”，在提取微弱异常方面有其得天独厚的优势，在本文的处理过程中其处理结果也是不错的，能够大部分地反映出原矿体的磁异常形态，分辨出其大致的埋藏位置等重要信息。

4. 小波变换在磁异常数据处理中的应用还不成熟，本文也只是试探性的进行了研究，鉴于其处理过程相对较复杂，且处理结果也并非十分完善，所以有待进一步深入地研究。

5. 综合以上的几点，三种方法各自都有自身的优点和缺点，在水平叠加异常的情况下，因为所叠加的异常信号和原矿体的信号都属于较低频率，所以在频率域中将其完全分离开来存在一定的难度，只能做到部分分离，相比之下磁异常导数方法更加具有优势。在垂直叠加异常的情况下，磁异常导数方法不能发挥作用，而滤波和小波变换相对来说能较有效的分离和恢复叠加异常和原矿体的异常。而且整个数据的频率谱带宽都在一个较小的范围内，在频率域的直接滤波更有优势。

6. 文中的模型仅限于水平圆柱体模型，各方法的功效没有得到完全的发挥，在往后我将深入研究各方法在磁测数据处理中的效用。

## 致 谢

时光飞逝，三年的硕士学习即将结束，总的来说三年的研究生生活我过得很快乐。现在我将怀着无比依恋的心情告别校园，告别老师和很多很多的同学朋友，走上工作岗位，走上新的人生征程。此时，我要感谢在我的学习生涯中给予我真切帮助和热情指导的老师和同学。

感谢抚养我成长的父母，正是有了他们坚定地支持才能够使我的学业顺利完成。感谢我的导师李才明教授，从 2005 年 9 月那个金黄的秋季开始，李老师一直如师如父般地给予我关怀和教育，使我不仅仅学到专业的知识，更重要的是处世的态度和做人的道理。同时在三年的时间里给了我很多开阔眼界和实践的机会，这些对我来说都是极其宝贵的财富是一生都不会忘却的美好记忆。

感谢唐小兵、刘英利同学和师弟师妹们的无私帮助，感谢李军、余舟师兄的慷慨指点，关心照顾。正是在这这么多人的关怀和帮助下，我的研究生生活才充满了欢歌笑语阳光雨露。

## 参考文献

- [1] 吴顺和. 石油地球物理勘探:重力 磁法 电法[M]. 石油工业出版社,1987. 6.
- [2] 罗孝宽. 应用地球物理教程:重力磁法[M]. 地质出版社,1991. 5.
- [3] 纳比吉安. 勘查地球物理:电磁法[M]. 地质出版社,1992. 1.
- [4] 林赛思. 地球物理资料数字处理[M]. 石油工业出版社,1984. 4.
- [5] 丁次乾. 矿场地球物理[M]. 石油大学出版社,1992. 9.
- [6] 瓦赫罗麦耶夫. 勘探地球物理建模问题[M]. 中国地质大学出版社,1994. 9.
- [7] 蒋宏耀. 考古地球物理学[M]. 科学出版社,2000.
- [8] 王秀明. 应用地球物理方法原理[M]. 石油工业出版社,2000.
- [9] 王妙月. 勘探地球物理学[M]. 地震出版社,2003.
- [10] 李舟波. 资源综合地球物理勘查[M]. 地质出版社,2004.
- [11] 刘天佑. 应用地球物理数据采集与处理[M]. 中国地质大学出版社,2004.
- [12] 史歌. 地球物理学基础[M]. 北京大学出版社,2002.
- [13] 江玉乐, 雷宛. 地球物理数据处理教程[M]. 地质出版社,2006.
- [14] 陈玉东. 地球物理信息处理基础[M]. 地质出版社,2006.
- [15] 帕拉司尼斯. 应用地球物理学原理[M]. 地质出版社,1974.
- [16] 胡广书. 数字信号处理:理论、算法与实现[M]. 清华大学出版社,1997.
- [17] 程佩青. 数字信号处理教程[M]. 清华大学出版社,2001.
- [18] 恩格尔. 数字信号处理:使用 MATLAB[M]. 西安交通大学出版社,2002.
- [19] Proakis. 数字信号处理:原理、算法与应用[M]. 电子工业出版社,2004.
- [20] 力武常次. 地球科学中的数学物理方法[M]. 地震出版社,1988. 7.
- [21] 徐文耀. 地磁学[M]. 地震出版社,2003.
- [22] 列维亚金. 高精度磁法勘探[M]. 地质出版社,1991. 4.
- [23] 吴宣志. 傅立叶变换和位场谱分析方法及其应用[M]. 测绘出版社, 1987. 9.
- [24] 苏金明. MATLAB 实用教程[M]. 电子工业出版社, 2005. 7.
- [25] 张志涌. MATLAB 教程[M]. 北京航空航天大学出版社, 2001. 4.
- [26] 唐向宏. MATLAB 及在电子信息类课程中的应用[M]. 电子工业出版社, 2006. 8.
- [27] 刘天佑. 重磁异常反演理论与方法[M]. 中国地质大学出版社, 1992. 1.
- [28] 曾华霖. 重磁勘探反演问题[M]. 石油工业出版社, 1991. 4
- [29] 杨文采. 地球物理反演的理论与方法[M]. 地质出版社, 1997. 12.
- [30] 管志宁. 磁法勘探重要问题理论分析与应用[M]. 地质出版社, 1993. 9
- [31] 董焕成. 重磁勘探教程[M]. 地质出版社, 1993. 5
- [32] 冉启文. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用[M]. 哈尔滨工业大学出版社, 2001
- [33] 彭玉华. 小波变换与工程应用[M]. 科学出版社, 1999
- [34] 郑治真. 小波变换及其在分析化学中的应用[M]. 地质出版社, 2000
- [35] 李世雄. 小波变换及其应用[M]. 高等教育出版社, 1997. 7
- [36] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 科学出版社, 1999

- [37] 李世雄,刘家琦. 小波变换和反演数学基础[M]. 地质出版社, 1994. 5
- [38] 薛国良. 信息熵[J]. 物理通报,1988,1,38-40.
- [39] 孟庆生. 信息论[M]. 西安:西安交通大学出版社[M],1986.
- [40] 金振玉. 信息论[M]. 北京:北京理工大学出版社[M],1991.
- [41] 李弱程,罗建书. 小波分析及其应用[M]. 北京:电子工业出版社,2005.
- [42] 王洪元,史国栋. 人工神经网络及其应用[M]. 北京:中国石化出版社,2002.
- [43] 范建中. 基于 ICA 和小波神经网络的人脸识别研究[D]. 华侨大学硕士学位论文,2005.
- [44] 吴清等. 一种多维小波网络的构造性算法[J]. 计算机学报,2003,9(26),1206 - 1210.
- [45] 宋如顺. 基于小波神经网络的多属性决策方法及应用 [J]. 控制与决策,2000,15(6):765 - 768.
- [46] 侯遵泽,杨文采. 中国重力异常的小波变换与多尺度分析[J]. 地球物理学报,1997 ,40(1) :85 - 95.
- [47] 王西文, 苏明军, 刘军迎, 等. 基于小波变换的地震相干的算法及应用[J], 石油物探, 2002, 41(3):334 - 338.
- [48] 程正兴. 小波分析算法与应用 (M). 西安:西安交通大学出版社, 2003.
- [49] 胡昌华,李国华,刘涛.基于 MATLAB6.x 的系统分析与设计一小波分析(第二版)(M). 西安:西安电子科技大学出版社, 2004.
- [50] Lebane G E,Niorns W A. Denoising of aeromagnetic data via the wavelet transform[J]. Geophysics,2001,66(6):1793~1804.
- [51] Ridsdill-smith T A,Dentith M C. The wavelet transform in aeromagnetic processing[J]. Getophysics,1999,64(4):1003~1013.
- [52] Kumar P,Foufoula-Georgiou E. Wavelet analysis for geophysical applications[J]. Rev Geophysics,1997,35(4):385~412.
- [53] Miyajima H et al. Simple analysis of torque measurement of magnetic thin films[J]. J. Appl. Phys. 1976,47:4669-4671.
- [54] Zhang Qinghua. Using Wavelet Neural In Nonparamation Estimation. IEEE,Trans. On Neural Networks,1997,8(2):227-236.