

摘 要

复合材料的力学性能取决于其细观结构。如颗粒体构成的复合材料,其力学性能取决于颗粒和基体的模量、粘结强度及颗粒的体积含量和分布方式等细观结构参数。然而,材料细观参数的不确定性将导致材料宏观性能的不确定性,这就要求对复合材料弹性性能的分布进行统计分析。另一方面,利用均匀化方法、自洽法等细观力学方法确定复合材料的宏观平均性能均以细观结构尺度相对宏观结构尺度很小这一假定为基础,而这一相对尺度小到什么程度,才能用细观力学的方法获得准确的材料性能预测值,这是值得研究的问题。目前,关于复合材料细观参数的随机性对材料宏观性能的统计特性的影响和细观结构的相对尺度对宏观材料性质的影响方面的工作相对较少。

本文利用基于有限元技术的均匀化理论,研究颗粒增强复合材料的细观结构参数的不确定性对材料宏观弹性常数的影响,并用数理统计的方法统计其分布规律。另外,对材料细观结构的尺度效应进行探讨,分析代表体元尺度相对细观结构尺度对所确定的材料宏观性质的影响,寻找准确描述材料宏观性能的代表体元相对细观结构尺度的最小相对尺度。具体工作包括:

1. 在阅读相关文献的基础上总结评述了复合材料性能预测相关研究现状,重点介绍了复合材料性能预测的细观力学方法、预测复合材料宏观性能的均匀化理论的基本思想和实施过程,以及分析不确定性问题的统计特征的统计分析理论和方法。
2. 研究了颗粒增强复合材料细观模型,给出了考虑颗粒形状、尺度和分布具有不确定性的细观模型的建立过程。以圆形和椭圆形颗粒复合材料为例,建立了体分比给定下的颗粒位置在参考域内具有均匀分布特征的随机分布模型和有限元离散模型。
3. 采用均匀化方法,研究了圆形和椭圆形颗粒增强复合材料的细观结构描述参数(如颗粒的大小、形状、分布方式等)的不确定性对宏观等效弹性常数的影响,研究了复合材料等效性能的统计特性。
4. 讨论了细观结构尺度效应的影响,以数值结果分析了代表体元尺度相对细观结构尺度的大小对确定的材料宏观等效性质的影响,确定了准确描述材料性质代表体元的最小相对尺度。

本文工作得到国家自然科学基金重点项目(10332010)和创新群体基金项目(10421202)、国家重点基础研究计划(973 计划)项目(2006CB601205)和“新世纪优秀人才”资助计划(2004)的资助。

关键词: 统计分析; 颗粒增强复合材料; 不确定性; 均匀化方法; 尺度效应

Statistical Characters of Effective Properties of Random Composite Materials

Abstract

Properties of Composite material depend on its microstructures. For example, the mechanical properties of particle reinforced composites mainly depend on the representative parameters of microstructures: the modulus of particles and matrix, bond strength, and the volume contents and distribution of particles etc. However, uncertainties of microstructure induce uncertainties of effective properties. Therefore statistical analysis of elastic performance distribution of composite material is necessary. On the other hand, microstructure mechanical methods, such as homogenization and self-consistent method, which are all based on the assumption that microstructure size is negligible, are generally used to determine macro average properties of composites. While on which level of the relative small size can we get the forecast accuracy of material properties though homogenization method is a problem that worth studying. At present, the effect of the randomness of composites micro parameters to its macro average properties statistic character, and that of microstructure size to material properties have seldom been studied.

Homogenization method which is base on FE technology is used of to research the effect on elastic constant of macrostructure due to uncertainties of microstructure characters and analyze their distributing rule with mathematical statistics methods. In addition, the study of the scale effect of the material microstructure is carried out, the effect of microstructure scale relative representative volume element (RVE) scale to determined material effective properties is analyzed, and the least relative scale which describes material effective properties accurately and represents the relative microstructure scale of volume elements is the objective of the work. The concrete work is as follows:

1. Base on correlated references, the state of the study of composite material performance forecast was summarized and remarked, microstructure mechanical method of composite materials was mainly introduced, the fundamental idea and implement process of homogenization by which forecast effective properties of composite materials and the theory and method of statistic and analysis with which analysis statistical characters of uncertain problems were introduced in detail.
2. Studied microstructure model of particle reinforced composite material, shown establishing process of microstructure model with uncertainties considering particle shape, size and distribution. Took rounded and oval-shaped particle reinforced composite materials as examples, Established random distributing models in which volume content

was given and particle position distributed uniformly in the reference domain and created finite element discrete models.

3. With homogenization method, studied the effect of uncertainties of microstructure parameters (such as size, shape and distribution style.) of rounded and oval-shaped particle reinforced composite to equivalent elastic constant, studied statistical characters of composites equivalent properties.
4. The scale effect of microstructure is discussed in this research. The effect of the ratio of RVE scale to microstructure scale to certain material effective properties is analyzed with numerical results. And the least relative scale of REV which describes material properties correctly is found out.

This research is supported by National Nature Science Foundation of China (No.10332010), the Innovative Research Team Program (10421202), National Basic Research Program (No. 2006CB601205), and by the Program for New Century Excellent Talents in University of China.

Key Words: Statistic Analysis ; Particle-Reinforced Composites ; Uncertainty; Homogenization; Scale Effect

独创性说明

作者郑重声明：本硕士学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得大连理工大学或者其他单位的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

作者签名：_____日期：_____

大连理工大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者及指导教师完全了解“大连理工大学硕士、博士学位论文版权使用规定”，同意大连理工大学保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权大连理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，也可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文。

作者签名： 侯善齐

导师签名： 刘新刚

2006 年 6 月 26 日

1 绪论

1.1 引言

材料是人类历史的里程碑，是现代文明的重要支柱。石器时代，铜器时代，铁器时代，……，复合材料时代，都是按照材料的进步与发展来划分的。

复合材料是由单一材料经过人工复合而成的材料，它是一种多相材料和多层次材料。复合材料由增强材料(增强相)、基体材料(基体相)和界面层(界面相)组成，增强材料起着承受载荷的主要作用，其几何形式有长纤维、短纤维和颗粒状物等多种，基体起着粘结、支持、保护增强材料和传递应力的作用，常采用橡胶、石墨、树脂、金属和陶瓷等。使用复合材料的目的在于组分材料经过复合后，能更好的发挥组分材料的优势和潜力，尽可能的克服组分材料的缺点和弱点。经过设计的复合材料可以满足不同的强度、刚度、减振、断裂韧性、寿命、价格、耐磨性和防腐性等要求。复合材料有如此多的优点，所以，近几十年来，复合材料得到很大的发展和广泛的应用。其中包括航空航天、核工业、汽车工业、运动器械、通讯装置、石油化工、交通运输、医疗设备和各种船舶等(见图 1.1, 图 1.2)，现在也逐渐的应用到各种桥梁、道路、隧道工程与各种建筑工程等土木工程方面得到应用。在复合材料可利用的各种优异性能中，力学性能处于重要的地位。在现有的关于复合材料设计的所有理论中，力学原理的研究所达到的水平和程度要远远超过其他方面。

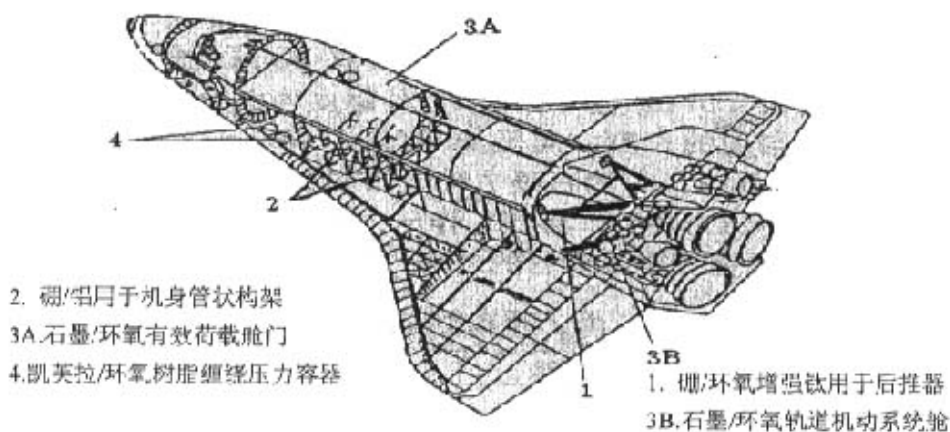


图 1.1 各种复合材料在航天飞机轨道器结构系统中的典型应用

Fig1.1 Classical used on aerospace plane



图 1.2 颗粒增强铝基复合材料在汽车上的应用

Fig.1.2 widely used on auto car

复合材料除了具有良好的力学性能和物理性能外，它另外一个重要的特征是它的设计性。根据设计要求、承载要求、使用寿命、材料性能、工艺水平和经济因素等进行设计，充分发挥复合材料及其结构的优越性，可减少施工、运输和安装的工作量，加快建设进程，取得更大的经济效益和社会效益。因此，对复合材料进行设计，使复合材料的优越性得到充分的发挥是至关重要的。复合材料可以定义为细观和宏观两层次的材料，人们在复合材料的细观结构与宏观性能间的关系这一关键性问题上进行了长期的研究和探索，力图用细观力学的原理来设计复合材料，推动新型复合材料的研制与发展，进而掌握材料增强、增韧的内在规律，特别是在近 20 年来，取得了非常大的研究成果^[1,2]。由此，材料的设计工作深入到更深的层次上，即材料的微观设计。复合材料的宏观性能由材料的微观结构和相材料的性质决定，如果弄清楚了微观结构和材料宏观平均性能之间的关系，并使材料在受控条件下组成规定的微观结构，从而得到具有预定宏观性能的新材料，这就把材料研究从探索、筛选和依靠经验的现状，提高到在理论指导下的有目标的研究和设计。

复合材料可以看作是细观和宏观两个层次的材料。宏观上均质的复合材料，当刻画尺度小到一定程度时候，其细观层次上也是非均匀的。复合材料的组份材料、夹杂或颗粒体积分量及细观结构等细观结构参数稍有变化都将引起材料宏观平均性能的变化。因此，这就要求我们对复合材料的宏观性能进行统计分析。随着复合材料研究的深入，上述问题受到越来越多人的重视^[3-6]。

复合材料的细观结构参数的不确定性势必会引起材料宏观性能的变化，那么，采用多大的试样(相对细观结构尺度)获得的材料性质才是准确的？在用实验的手段获得材料

性质的时候,也存在选取试件尺寸的尺度效应的问题。因此,尺度效应也是迫切需要研究的问题。

随着现代工业的迅速发展,对高性能复合材料的研究和开发也变得十分迫切。经典的复合材料力学多偏重于从宏观的角度对复合材料进行研究,忽略了复合材料的细观结构及其演化,难以准确的揭示材料性能。作为一种多相介质,复合材料具有明显的细观结构特征,因而其力学性能不仅取决于其组分材料的性质,同时也与细观结构有密切的关系。近年来,随着细观力学的发展,从复合材料细观力学入手,对复合材料性能的研究逐渐兴起,发展了较为系统的细观力学方法,解决一些理论和实际问题。其中比较有代表性的有自洽理论及广义自洽理论、Eshelby 等效夹杂理论、微分方法、Mori-Tanaka 方法及利用能量极值原理求上、下限方法等,其中, Eshelby^[7]等效夹杂理论给出了含有任意非均匀体夹杂的有效弹性模量,对于夹杂体积分分数较小的复合材料较为适用。在近十多年中,从物理和数学上也发展了许多方法^[8-11],针对周期性复合材料已有数学家 Lions, Oleinik 等^[8,9],发展了一种多尺度方法。

利用细观力学模型预测复合材料的有效性能,对于指导复合材料的微观设计,节省实验费用等具有重要意义。但是,预测能否准确,收到许多因素的影响,主要是组分材料本身性能的分散性以及模型与事物的差异程度。目前,对于复合材料的宏观性能预测方面的工作已经很多,但对于考虑参数不确定性对材料宏观性能的统计特性的影响方面的工作还较少,据笔者所知,杨俊等^[12]研究了颗粒填充复合材料在任意宏观应变条件下代表体元内应变分布的统计规律,得到颗粒与基体的应变涨落与宏观应变之间的关系,崔俊之、李友云等^[13]对颗粒随机分布的复合材料,给出了多尺度周期随机分布的表征方法, Hyuk-Chun, Hyo-Gyoung Kwak^[14] 研究平面应力应变状态下,泊松比的不确定性的变量响应, G. Falsone, N. Impollonia^[15]针对含不确定参数的有限元模型结构随机分析的新方法的研究,但是,这些研究工作中,极少涉及到复合材料微结构参数的随机性的影响。本文应用均匀化理论研究含周期性微观结构的颗粒增强复合材料的参数的不确定对材料宏观性能的统计特性。

先进的复合材料是高新技术新材料发展的方向,对我国国防建设与国民经济发展有深远的意义,它在军事上和民用上都具有广泛的应用前景。大力加强复合材料力学的研究是十分重要的。

1.2 复合材料力学的基本理论

在自然界中,存在着大量的复合材料,如竹子、木材、动物的肌肉和骨骼等。从力学的观点来看,天然复合材料结构往往是很理想的结构,它们为发展人工纤维增强复合

材料提供了仿生学依据。复合材料的出现可以追溯到古代,人类早已创制了有力学概念的复合材料。例如,古代中国人和犹太人用稻草或麦秸增强盖房用的泥砖;两千年前,中国制造了防腐蚀用的生漆衬布;由薄绸和漆粘结制成的中国漆器,也是近代纤维增强复合材料的雏形,它体现了重量轻、强度和刚度大的力学优点。

1.2.1 复合材料力学简介

复合材料力学是固体力学的一个新兴分支,它研究由两种或多种不同性能的材料,在宏观尺度上组成的多相固体材料,即复合材料的力学问题。复合材料具有明显的非均匀性和各向异性性质,这是复合材料力学的重要特点。复合材料具有良好的力学性能(强度、刚度、韧性和耐磨性等)和物理性能(隔音、导热、减振、耐热性和耐腐蚀性等),广泛应用于航空航天、建筑工程、电子、核能工程和汽车制造业等领域,尤其是航空、航天等高科技行业的迅速发展对复合材料的需求增加,使复合材料力学性能的研究显得尤为重要。

复合材料力学可分为复合材料的材料力学和复合材料的结构力学两部分。

复合材料的结构力学的研究对象是用复合材料组成的各种构件。它包括静力、动力和稳定性分析,以及结构优化设计等,属于宏观力学的范畴。

复合材料的材料力学包括迭层理论和细观力学。

迭层理论是各单层分别视为均质,由单层迭合而成的层合板的性能,取决于各迭层的性能以及迭层的几何,因此,迭层理论主要应用于各种整齐排列的纤维及织物增强复合材料。

细观力学是从微观角度研究复合材料组分材料之间的相互影响,以此预测复合材料的宏观力学性能,为材料的设计、制造提供依据。它研究单向复合材料的平均物理性能与各相材料的物理性能和相几何之间的关系,及研究复合材料各相材料内部的真是应力于应变场分布,以及作为确定复合材料性能与破坏机理的依据。细观力学是以复合材料中各相材料性能及相几何作为已知条件,来计算把复合材料视为均匀材料的平均性能的数值。

因此,研究细观力学的主要目的是,阐明复合材料性能的机制,并作为复合材料设计的理论基础。可以通过细观力学预测复合材料的某项性能随各相材料性能及相几何变化的规律,可以指导设计能达到预期性能的复合材料。

对于复合材料来说,其组份材料、含量及细观结构等参数稍有变化将导致复合材料宏观性能变化,因而,试图通过实验测得所有材料的性能是不现实也是不可行的,从这一角度来讲,复合材料细观力学具有较强的优势和明确的工程背景,是复合材料发展的重要的理论基础。

1.2.2 复合材料有效性能的分析方法

对于任意给定的材料,当考察尺度小到一定程度后,都将有非均匀性的特点,另一方面,均匀材料作为材料的一种理想化连续介质模型,在工程应用上取得巨大的成功。材料复合的主要目的是利用不同材料相的特殊性,创造出单一材料所没有的特定性能或其难具有的优异性能。比如在汽车制造业中广泛应用的颗粒增强铝基复合材料与基体合金相比,比弹性提高 35~60%,抗拉强度提高 45~55%,而塑性指标保持在 5~6%,并且还具有在高温下的疲劳强度稳定性和阻尼抗震性,在航空工业中广泛应用的碳纤维增强树脂基复合材料,比模量和比强度(每单位质量下的弹性模量和强度)分别可达到钢的 3 倍和 4 倍^[16]。从微观结构上看,材料复合有 0-3 复合(如颗粒状复合材料)、1-3 复合(如纤维增强复合材料)等多种形式。建立复合材料性质与复合材料的相材料性质及微观结构参数的关联,是实现复合材料的设计乃至优化基础。近半个世纪以来,人们在建立这种关联方面,经过不懈地努力取得了大量的成果。近十年来,力学方面以细观力学和非均匀材料的力学为代表,取得了不少新的重要进展,成为固体力学方面最为活跃的领域之一^[17]。在复合材料宏观性能预测方面,较为成熟的理论有:Paul 上下限法、Eshelby 等效夹杂理论、自洽及广义自洽理论、微分方法和 Mori-Tanaka 方法等。以下简要介绍几种基本方法和理论:

(1) Paul 上下限法

上、下限方法基于复合材料有效弹性刚度和弹性柔度张量定义的能量形式,通过假设复合材料内部的一个微观应力场,利用余能形式的变分原理,得到弹性刚度的下限。若假设一个微观应变场,利用位能原理,得到有效弹性刚度的上限。这个方法首先由 Paul 用于合金材料,之后被用于颗粒增强复合材料和纤维增强复合材料。

早在 1889 年,Voigt 就根据材料中各相等应变的假设,得到有效剪切模量 \bar{G} 和有效体积模量 \bar{K}

$$\bar{G} = \sum_{r=0}^n V_r G_r \quad (1.1)$$

$$\bar{K} = \sum_{r=0}^n V_r K_r \quad (1.2)$$

其中, V_r 、 G_r 和 K_r 分别为第 r 相的体积分数、剪切模量和体积模量, V_0 、 G_0 和 K_0 分别为基体材料的体积分数、剪切模量和体积模量。

后来, Reuss 根据材料中各相等应力的假设, 得到材料的有效剪切模量 \bar{G} 和有效体积模量 \bar{K}

$$\bar{G} = \left(\sum_{r=0}^n \frac{V_r}{G_r} \right)^{-1} \quad (1.3)$$

$$\bar{K} = \left(\sum_{r=0}^n \frac{V_r}{K_r} \right)^{-1} \quad (1.4)$$

对于含有夹杂的复合材料, Paul 根据最小势能原理和最小余能原理证明了式(1.1)和(1.2)为复合材料有效杨氏模量的上限, 式(1.3),(1.4)为有效杨氏模量的下限。但是, 用该方法来预测材料性能不够准确。

(2) Eshelby 等效夹杂理论

复合材料等效弹性模量的计算可以归结为在均匀边界下求其内部各离散相的应力和应变的平均值问题, 复合材料增强相可以看作嵌入弹性体的夹杂, 1957 年, 英国著名的科学家 Eshelby 在英国皇家学会刊中发表了关于无限大体内含有椭球夹杂弹性场问题的文章。Eshelby 主要的结论是当本征应变均匀时, 椭球颗粒内部的弹性场也是均匀的, 并可用椭球积分的形式表示出来, 这个解后来就成为等效弹性模量计算的基础。

假定复合材料的平均应力和应变分别为 $\bar{\sigma}_{ij}$ 和 $\bar{\epsilon}_{ij}$, 各相内的平均应力和应变为 σ'_{ij} 和 ϵ'_r , 各相的弹性常数张量为 E^*_r , 则有效弹性常数张量 E^*_ij 和柔度张量 S^*_ij 。则定义为:

$$\bar{\sigma}_{ij} = E^*_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} \quad (1.5)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = S^*_{ij} \bar{\sigma}_{ij} \quad (1.6)$$

复合材料的平均应力和应变可表示为:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \sum_{r=0}^{n_c} \bar{\sigma}'_{ij} V^r \quad (1.7)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV = \sum_{r=0}^{n_c} \bar{\epsilon}'_{ij} V^r \quad (1.8)$$

n_c 是复合材料夹杂相的个数, V^r 是各相的体分比。由上式可知如果求得各相材料内的平均应变和应力, 则可求得弹性常数张量和柔度张量。

Eshelby 证明了在无限远处施加均匀应变边界条件时, 夹杂内的应变应该是均匀的, 并给出了球形夹杂问题的表达式:

$$K^* = K^m + (K^i - K^m) \frac{3K^m + 4G^m}{3K^i + 4G^i} \quad (1.9)$$

$$G^* = G^m + (G^i - G^m) \frac{5(3K^m + 4G^m)}{9K^m + 8G^m + 6(K^m + 2G^m) \frac{G^i}{G^m}} \quad (1.10)$$

K 和 G 代表体积刚度和剪切刚度， K^* 和 G^* 表示复合材料的有效性能。

复合材料细观力学的近似方法往往将多夹杂问题转化为单夹杂问题处理，Eshelby 等效夹杂理论为细观力学理论奠定了基础。它在针对夹杂体积含量较低的情况下，预测材料的力学性能具有很好的优势。

(3) 自洽方法

自洽方法的思想最早由 Bruggeman 提出并用于热传导问题。上世纪 60 年代，Budiansky 和 Hill 最早用于预测材料的弹性刚度，他们以 Eshelby 关于无限均匀介质中含单一异性夹杂的解答为基础，讨论了球形颗粒增强复合材料的弹性性能。后来，该方法得到广泛的应用，不仅用于颗粒增强复合材料，也应用在连续纤维增强复合材料。

自洽方法所使用的模型是在无限大的均匀介质中内含单一夹杂模型。均匀介质的弹性性能与复合材料的有效弹性性能相同。如图 1.3 所示。自洽方法的基本思想，就是希望在均匀边界条件下的自洽模型求得夹杂相内的平均应变，从而求得有效弹性刚度张量。

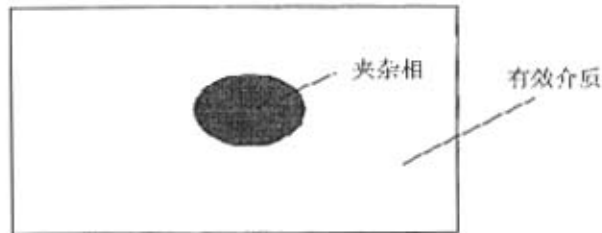


图 1.3 自洽模型

Fig.1.3 Self-consistent model

但是，由于自洽模型将各个夹杂之间的相互作用通过均匀介质反映出来，但当夹杂体分比较大时，有效刚度阵的迭代将不收敛。并且，自洽方法无法描述具有连续相这一基本特征的复合材料微结构的特点。最近的研究表明对于具有连续基体的复合材料，自

洽方法违反了相关的界限。所以，尽管自洽方法能成功的用于多晶体材料的宏观性能的研究，但在将其用于单晶体的等效模量的计算时，存在缺陷。

(4) 广义自洽方法

为了克服自洽方法用于多相夹杂复合材料的计算存在的缺陷，Kerner(1956) 首先将广义自洽方法用于预测复合材料的弹性性能。广义自洽方法确定复合材料有效弹性性能的思想同自洽方法的思想相同。只是广义自洽模型在自洽模型中的均匀介质和夹杂之间加一层基体材料，不要夹杂和均匀介质直接联结，因此，广义自洽模型是由夹杂、基体壳和有效介质组成。如图 1.4 所示。

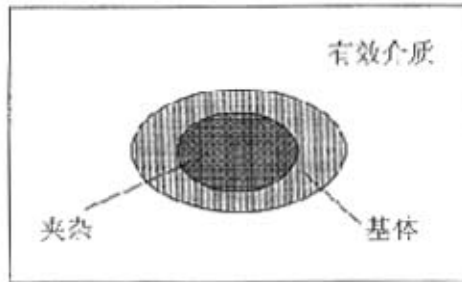


图 1.4 广义自洽模型

Fig.1.4 Generalized self-consistent model

采用这一模型，Kerner 给出了求解含夹杂复合材料的有效体积模量和剪切模量的表达式。Christense 和 Lo 在此基础上给出了球形颗粒增强复合材料等效剪切模量的计算结果。与自洽理论相比，广义自洽模型更合理，但是，由于放宽了相之间的界面约束，同时也给这种模型带来了解题的难度。

(5) Mori-Tanaka(M-T)方法

M-T 方法，不同于自洽方法和广义自洽方法等其他细观力学方法，该方法不从物理上进行简化，而是从数学上简化模型。M-T 法首先是 Mori, Tanaka (1970) 提出，并用于求解含球形夹杂的导热性预测。该方法建立了夹杂相的平均应变同基体相的平均应变间联系的四阶张量，并将这个依赖于夹杂浓度的四阶张量用无限大的基体材料内含单一夹杂问题中夹杂内的平均应变和均匀应变间联系张量代替。近年来，该方法受到广泛的应用，成为预测非均匀复合材料性能的手段之一，但是，M-T 方法只适用于夹杂物的体分比较小的情况。

到目前为止, 复合材料材料弹性常数张量预测方面的工作很多, 发展了很多方法, 研究对象也包括单向纤维增强复合材料、短纤维增强复合材料、编织纤维复合材料及空心材料等, 对于颗粒增强复合材料的弹性常数的预测研究工作也进行了很多, 但作为材料微结构设计的基础, 微结构分析除了预测材料的弹性常数外, 很重要的问题是了解微观域上的不均匀性对位移和应力场的影响, 也就是在微观层次上的位移和应力的局部场的确定, 以上所述的各种方法都不能解决这个问题。然而, 均匀化理论在这一方面具有很大的优势。

1.3 小结

本章主要介绍了复合材料的发展和应用, 阐述了复合材料力学的基本理论, 简单介绍了预测复合材料性能的较为成熟几种方法, 同时指出, 均匀化方法在解决微观层次上不均匀性对位移场和应力场的影响方面具有较大的优势。下一章将重点介绍均匀化理论。

2 均匀化理论和统计方法简介

2.1 引言

复合材料被定义为一种人造材料，它由不同组分的不同材料组成，并且每种材料之间都有明显的界面。复合材料的性质不同于单个组分材料的性质。一个单胞可以认为是复合材料的一个简单情况，它由实体和孔洞组成。这种单胞可用于结构拓扑优化。在这种研究中，假定复合材料微结构呈周期性或准周期性。应该强调的是它和复合材料宏观尺寸相比，这种不均匀性是很小的。因此，这种类型的材料被称作具有周期性微观结构的复合材料。

由于复合材料结构物理参数的非均质、各异性以及细观几何构形的复杂性，在计算它的位移场、应力和应变场时，传统的有限元法因网格生成困难和计算规模太大而难以实现。自70年代初期发展起来的均匀化理论(homogenization theory)是一套严格的数学理论，一直是现代应用数学领域的研究课题之一。均匀化方法是目前国际上分析复合材料宏观细观力学性能较为流行的方法，1999年国际杂志(Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.)就均匀化方法及其在先进复合材料中的应用出了专辑。它从构成材料微观结构的“单胞”入手，假定胞元具有空间可重复性，即假设微结构呈周期性或准周期性通过同时引入宏观尺度和微观尺度，从而可以详尽地考虑材料微结构的影响。它既能从细观尺度分析材料的等效模量和变形，又能从宏观尺度分析结构的响应。均匀化理论不同于一些细观力学方法，它不需要人为地假定胞元的边界条件，而是采取摄动解的形式，将宏观结构中一点的位移和应力等物理量展开为与细观结构尺度相关的小参数的渐近级数，并用摄动技术建立一系列控制方程，依据这些方程可求解出平均化的材料参数、细观位移和细观应力。

2.2 均匀化方法的基本理论

均匀化理论的主要思想是，针对非均匀复合材料的周期性分布这一特点，选取适当的相对于宏观尺度很小并能反映材料组成性质的单胞，建立模型，确定单胞的描述变量，写出能量表达式势能或余能等，利用能量极值原理计算变分，得出基本求解方程，再利用周期性条件和均匀性条件及一定的数学变换，便可以联立求解，最后通过类比可以得到宏观等效的弹性系数张量、热膨胀系数张量、热弹性常数张量等一系列等效的材料系数。近年来，计算机技术的飞速发展为大规模的科学计算提供了可行性，均匀化方法的应用也随之广泛起来。基于均匀化方法的复合材料设计、材料性能预测与优化、结构分析及优化在航空航天、交通、建筑、机械制造、运动器械等领域都方兴未艾。

以下简要介绍均匀化方法确定材料的宏观弹性常数张量的公式及基本思想。有关均匀化方法的详细情况参考文献^[18-22]。

严格来讲, 自然材料和人工材料的绝大部分是非均质材料。我们通常认为是均质材料的金属也是由晶粒堆积而成的, 在晶粒水平上也具有不均质性。它们的非均质性可有它们固有的微结构——单胞来描述。单胞的尺度相对于材料的宏观几何尺度来讲是很小的量, 设为 ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) 量级。当我们关心材料的宏观力学性质时, 我们在材料中取一个微元, 微元的尺寸介于单胞尺寸和物体宏观尺寸之间, 一个微元可以包含大量的单胞。可以认为在每个微元内, 材料是由反映材料不均匀性的单胞在空间中周期性重复构成的。材料的宏观性质在空间中可能是变化的, 即空间的不同位置的单胞可能是不同的。但是, 在某点的单胞尺度邻域内, 这种变化是极其微小的, 因此, 从宏观的微元来看, 材料仍具有周期性分布的特点。其相应的物理特性(几何性质、热力性质、力学性质)具有如下的性质:

$$F(x + NY) = F(x) \quad (2.1)$$

其中 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 是点的位置向量, N 是 3×3 的对角线矩阵:

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

n_1 、 n_2 、 n_3 是任意整数, $Y = \{Y_1 \ Y_2 \ Y_3\}^T$ 是常数向量, $F(\cdot)$ 是关于位置向量 x 的函数。例如, 对于一个具有周期性的复合材料力学行为可以由本构关系 $\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}$ 描述。其中张量 c_{ijkl} 是空间坐标系 x 的周期函数, 因此, c_{ijkl} 满足关系式:

$$c_{ijkl}(x + NY) = c_{ijkl}(x) \quad (2.3)$$

或者表示为:

$$c_{ijkl}(x_1 + n_1 Y_1, x_2 + n_2 Y_2, x_3 + n_3 Y_3) = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.4)$$

σ_{ij} 和 e_{kl} 分别为应力和应变张量。具有式(2.1)性质的函数称为 Y -周期性函数。

一般具有这种周期细观结构的材料通常在宏观尺度上其材料性质随 x 的变化比较平滑, 而在 x 的某个很小的邻域内材料性质通常具有很高的振荡性质。这样, 我们就可以从两个尺度上考虑, 一个是宏观尺度坐标 x , 另外一个为细观尺度坐标 y 。因此, 坐

标 y 可以在细观层次上表征材料性质的突变。细观坐标上单位向量的真是长度与宏观域上的单位向量之比是个小量 ε 。即有

$$y = x / \varepsilon \quad (2.5)$$

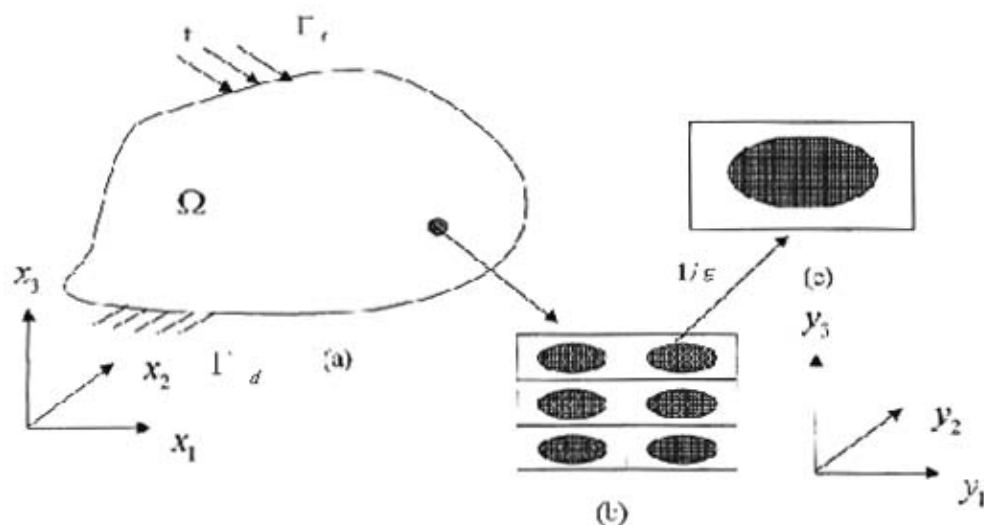
或者

$$y \varepsilon = x \quad (2.6)$$

假定 g 是整个 X 内的一个基本函数, 则有

$$g = g(x, x / \varepsilon) = g(x, y) \quad (2.7)$$

参数 ε 可看作细观尺度和宏观尺度的相对比值。 $1/\varepsilon$ 则可以看作是基本单胞放大到宏观尺度的一个放大因子。



(a) 宏观结构 (b) 细观结构 (c) 基本单胞

图 2.1 均匀化方法描述复合材料结构示意图

(a) Body of composite (b) Periodic microstructure (c) base cell

Fig.2.1 Microstructure structure and the base cell of composite

为了说明均匀化方法的优点, 假定材料性质函数 $\Phi(x)$ 在细观尺度上振荡非常强烈, 把一个周期内的曲线放大到细观尺度, 如图 2.2, 2.3 所示:

假定我们用空间 R^3 中的坐标系 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 定义复合材料全局域 Ω 上的问题。根据材料的周期性，可知整个材料是有一系列相同单胞的集合 $\varepsilon Y_1, \varepsilon Y_2, \varepsilon Y_3$ 。其中 Y_1, Y_2, Y_3 为基本单胞在局部坐标系 $y = (y_1, y_2, y_3) = x/\varepsilon$ 的边长。即对于宏观尺度上某一个固定的 x 点，任何依赖于 y 的函数可以看作是 Y -周期函数。假定具有单胞的复合材料的性质对宏观尺度变量 x 的变化比较平滑。则，复合材料的性质函数可以展开为如下形式：

$$\Phi^\varepsilon(x) = \Phi^0(x, y) + \varepsilon \Phi^1(x, y) + \varepsilon^2 \Phi^2(x, y) + \dots \quad (2.8)$$

其中， ε 是小参数，函数 $\Phi^0(x, y)$ ， $\Phi^1(x, y)$ ， \dots 在 x 上光滑，在 y 上为 Y -周期函数。

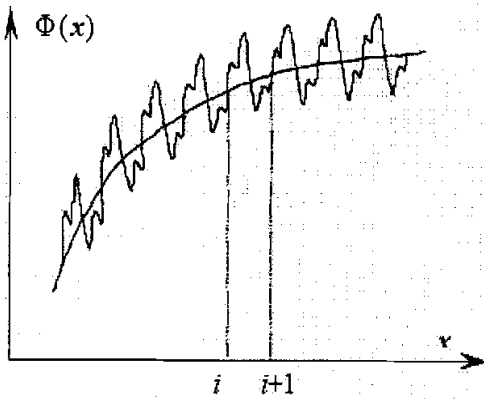


图 2.2 高振荡函数

Fig.2.2 High oscillating function

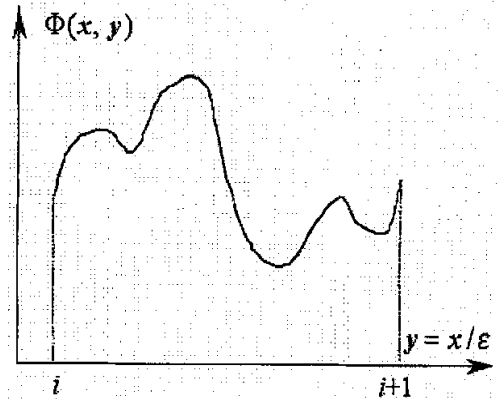


图 2.3 一个周期的高振荡函数

Fig.2.3 a periodic high oscillating function

为了讨论简便，本文只考虑二维线弹性问题。对于二维线弹性问题，复合材料的宏观弹性性能可由下式表示的本构关系描述。

$$\overline{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^H \overline{\varepsilon}_{kl} \quad (2.9)$$

材料的弹性张量可以表示为：

$$E_{ijkl}^\varepsilon(x) = E_{ijkl}(x, y) \quad (2.10)$$

将结构位移 $u^\varepsilon(x)$ 展开为小参数 ε 的渐进级数

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (2.11)$$

可知, 如果得到各级位移 $u^0(x), u^1(x), u^2(x) \dots$ 等, 则位移场 $u^e(x)$ 完全确定。按照均匀化理论将(2.11)代入虚功方程

$$\int_{\Omega} E_{ijkl} \frac{\partial u_k^e}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} f_l^e v_l d\Omega + \int_{\Gamma} t_l v_l d\Gamma + \int_{S^e} p_l^e v_l dS \quad (2.12)$$

采用摄动技术得到一系列绝对位移函数的各阶摄动方程, 由摄动方程可知, 具有 γ -周期的解是与细观坐标无关的解^[23], 即 $u^0(x, y) = u^0(x)$ 。因此, 实际上材料宏观位移可由下式(2.13)决定:

$$\int_{\Omega} E_{ijkl}^H \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_i} \frac{\partial v_{0l}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} f_l^e v_{0l} d\Omega + \int_{\Gamma} t_l v_l d\Gamma + \int_{S^e} p_l^e v_{0l} dS \quad (2.13)$$

其中 E_{ijkl}^H 就是等效弹性张量, 它可由 (2.14) 式确定

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{V^*} \int_{V^*} (E_{ijmn} - E_{ijkl} \frac{\partial \psi_k^{mn}}{\partial y_l}) dy \quad (2.14)$$

式中 ψ_k^{mn} 是以下细观均匀化问题的周期解:

$$\int_{V^*} [E_{ijmn} - E_{ijkl} \frac{\partial \psi_k^{mn}}{\partial y_l}] \frac{\partial v_l}{\partial y_i} dy = 0, \forall v \in V_{\gamma} \quad (2.15)$$

其中, γ 是周期, 式(2.14),(2.15)分别为宏观均匀化问题和细观均匀化问题, 实际上细观均匀化问题相当于有初始应变作用的线弹性问题。可以采用有限元法求解该问题, 由式(2.14)获得宏观材料常数。

2.3 数理统计方法

数理统计是具有广泛应用的一个数学分支, 它以概率为理论基础, 根据实验或者观测的数据, 来研究随机现象, 对研究的问题的客观规律性做出合理的估计和判断。首先, 介绍几个本文涉及到的几个基本的概念和统计分布。

2.3.1 基本概念

一. 随机样本

设 X 是具有分布函数 F 的随机变量, 若 X_1, X_2, \dots, X_n 是具有同一分布函数 F 的、相互独立的随机变量, 则称 X_1, X_2, \dots, X_n 为从分布函数 F 得到的容量为 n 的简单随机样本。

即得：若 X_1, X_2, \dots, X_n 是 F 的一个样本，则 X_1, X_2, \dots, X_n 的联合分布函数为

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i) \quad (2.16)$$

又如 X 具有概率密度 f ，则 X_1, X_2, \dots, X_n 的联合概率密度为：

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) \quad (2.17)$$

二. 样本均值和标准差

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本， x_1, x_2, \dots, x_n 是样本的观察值，则：

样本均值可以表示为：

$$\bar{X} = \sum_i^n X_i \quad (2.18)$$

样本的标准差：

$$S = \sqrt{S} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (2.19)$$

统计方法在数学上应用较为广泛，本文中主要用于统计有效弹性模量随着某些不确定性参数的变化规律。

2.3.2 统计分布

在材料科学中主要应用的统计分布有正态分布、对数正态分布以及 Weibull 分布。本文主要利用正态分布来拟合数据，由于在一般的概率统计教材中均可以看到，本文仅对正态分布作简要介绍。

正态分布是统计中最重要的连续概率分布，它被统计学家重视的原因不外乎许多自然现象、工程状况、商业问题以及社会现象等问题，都可以用正态分布加以叙述；并且有些离散概率分布与连续概率分布均以正态分布为其极限，因此在样本相当大的情况下，可采用正态近似法解决这些概率分布问题。

正态分布的密度函数为：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.20)$$

式中 μ 为平均值, 表示随机变量(如强度, 刚度等)的数学期望; σ 为标准差, 表示随机变量偏离均值的散步程度; σ 越小, 表示 X 落在均值 μ 附近的概率越大。

正态分布为对称分布, 其概率密度函数 $f(x)$ 关于直线 $x = \mu$ 是对称函数, 且正态分布下的面积和为 1, 且曲线的两尾端无限延伸。正态分布概率密度曲线 $y = f(x)$ 的位置完全由均值 μ 确定, 故参数 μ 是位置参数。

为了计算方便, 亦可将一般的正态分布函数标准化, 其标准分布的密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2.21)$$

化成标准分布后, 可根据 X 查正态分布表, 这也是正态分布应用广泛的一个重要原因。另外, 由于复合材料中组分材料随机性的特点, 也导致宏观材料性能的不确定性, 研究材料微结构的不确定对宏观材料的力学性能是颇为重要的。在这种情况下, 其宏观预测的弹性性能可以用正态分布来描述。

对于正态随机变量 X 有:

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974 \quad (2.22)$$

即随机变量落在区间 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 内几乎是肯定事件, 而它落在区间之外的事件基本上是小概率事件, 这就是所谓的“ 3σ 规则”, 通常也为异常数据的取舍提供了依据。

2.4 小结

本章简要介绍了细观均匀化方法的基本理论以及数理统计的基础知识, 为本文工作开展作了理论依据。

3 复合材料细观结构几何模型

早在九十年代中期 Povirk, Gusev^[24,25]等人就研究证明了可以用一个有限体积的代表体元来代替整体复合材料,模拟其细观结构,从而建立复合材料的宏观性能同其组分材料性能及细观结构之间的定量关系。以下针对复合材料细观结构的特点,用计算机随机模拟,生成几何模型的代表体元。

3.1 复合材料细观结构的计算机模拟

复合材料研制技术的迅速发展,对于复合材料的宏观性能(尤其是材料的刚度)的研究也日益的引起人们的高度重视。研究复合材料各项性能统计特征的最可靠的方法是实验,但是要得到比较准确的统计结果,需要大量的样本,费用昂贵。过去,制备一材料宏观性能测试—微结构表征—改进—重复上述过程的研究方法取得了许多成果,推动了复合材料的发展。但是这种方法有明显的缺点,研制过程长,耗时又耗力。计算机技术和数值分析方法的发展使得我们可以部分克服上述传统方法的缺点,即可以利用计算机虚拟试验技术,部分代替传统的材料研制和试验过程。计算机随机模拟技术和数值分析方法为材料的细观结构和宏观性能的定量关系的研究提供了平台。

在计算机上对随机现象进行模拟进而得到解答的方法称为统计试验方法或者蒙特卡罗方法。它的基本特点就是以概率与统计中的理论和方法为基础,以是否适于在计算机上适用为标志,它还有一个特点,对于本身具有统计性质的非确定性问题,不需要像常规方法那样将它转化为确定性问题进行计算和解答。在蒙特卡罗方法的问题中占有非常重要地位的,就是由具有已知分布的总体中产生简单子样。在已知的分布中,最简单而又最基本的一个分布是单位均匀分布,由具有单位均匀分布的总体中所产生的简单子样称为随机数序列,其中的每一个个体称为随机数。用随机发生器来生成一系列随机数,目前最流行,用的最多的随机数发生器是线性同余随机数发生器,用它生成一系列可以归一化到 $[0,1]$ 区间的整数序列,在计算机上进行数值模拟。在计算机生成的随机序列,可以模拟一个随机场。

当颗粒或纤维等增强相在基体材料内呈现随机分布时,则可以用实验的方法直接观察到随机分布的细观结构。如果增强物的形状,大小都是不规则的,并有一定的随机性,则复合材料的细观结构呈现多重的随机状态(分布、大小和形状等),可用随机场来描述。颗粒增强复合材料的细观结构大多如此。在颗粒增强复合材料的横截面内,颗粒在基体材料内将呈现随机分布,颗粒的随机分布情况如图 3.1 所示:

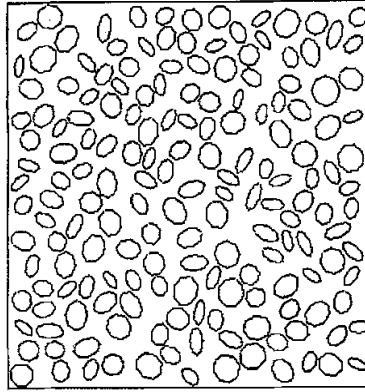


图 3.1 颗粒增强复合材料细观结构二维随机分布
Fig.3.1 2D microstructure of particle-reinforced composite

确定增强颗粒位置、形状、大小的参数皆为随机变量，由随机变量的抽样过程，既可以生成一个颗粒，并确定其在结构中的位置。生成复合材料细观结构的过程是：根据增强颗粒在结构中的统计意义上的大小，形状参数范围，逐一生成随机颗粒，并将生成的颗粒随机地放入投放区域中；同时还要满足每次投放的颗粒不能和以前放入的颗粒重叠在一起，也不能超出投放域的边界，因此还须进行重叠性检查，经重叠性检查满足以上条件人骨料才能被成功投放，否则舍去，重新再生成。如此类推，直到达到给定的体积比(所有骨粒的体积总和/投放域的体积)为止

3.2 细观结构二维几何模型建立

目前对复合材料的细观结构的模拟研究还主要在二维领域^[26-30]，国内刘光廷、王宗敏^[26]早在 1996 年就将混凝土看作由水泥、骨料及二者之间的粘结带构成的三相复合材料，根据混凝土骨料的级配随机模拟了混凝土的细观结构。崔俊之等^[29]针对颗粒/孔洞为椭圆形状并呈随机分布的多相复合材料给出了计算机模拟。高巧红^[31]从实用的角度出发，利用骨料密度作为控制的参数，对椭圆形骨料的二维和三维模型的计算模拟。本文工作也是基于文献[31]开展的，模拟了颗粒随机分布的增强复合材料。

基体内部颗粒随机分布的几何模型的建立是按照骨料密度的要求，从实用角度考虑的，采用骨料面积覆盖率来表示骨料的密度，骨料面积覆盖率为所有骨料所占面积总和与待投放骨料的平面域面积之比。为了简化模型，对颗粒增强复合材料截面进行模拟前首先要做如下假设：

- (1) 模拟区域为长方形 $[x_{min}, y_{min}] [x_{max}, y_{max}]$ 。
- (2) 在模拟区域内，颗粒尺寸在一定范围内呈现均匀分布。

(3) 颗粒不能相互重叠或者颗粒相互之间要有一定的距离。

由以上描述可知，生成复合材料细观结构随机模型的过程如下：

①首先生成矩形模型；②输入生成随机圆球的各种参数概率分布模型以及终止条件(颗粒含量为标度)；③检验模拟区域中颗粒的投放量，如果达到投放量，存储并退出，否则执行下一步；④随机圆球形生成；⑤判断此圆球形是否符合要求，是转向③；否转向④。流程图如 3.3 所示

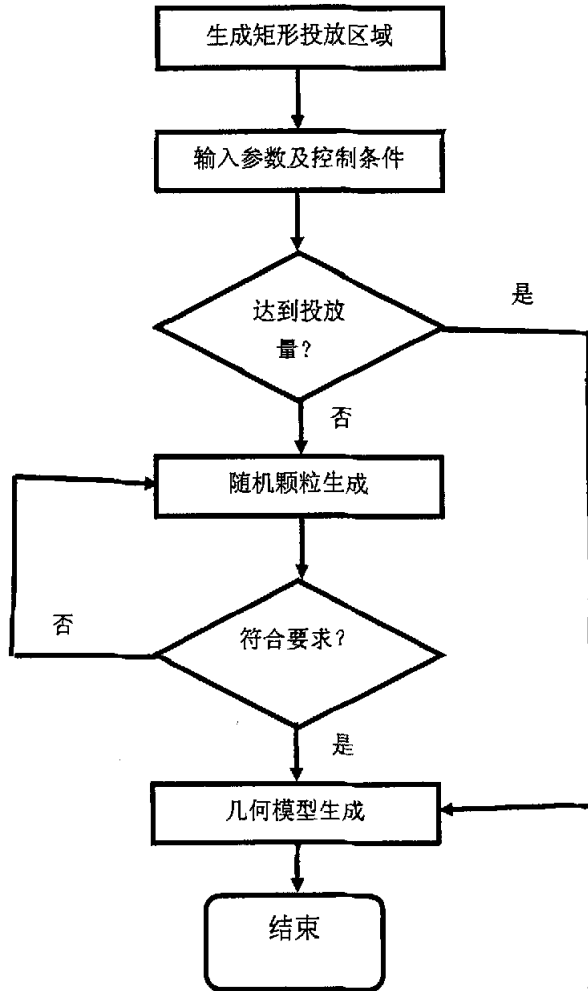


图 3.2 颗粒随机分布细观几何模型生成流程图

Fig3.2 the process chart of microstructure model of particle-random composite

3.3 小结

本章主要介绍复合材料细观结构的随机模型的生成过程。主要针对颗粒增强复合材料的细观随机模型生成原理,以及细观结构二维随机模型的建立都做了简要的介绍,网格剖分等详细内容参考文献[31]。由颗粒增强复合材料的生成过程可以看出,复合材料的细观结构具有随机性的特点,由于,材料的宏观性能取决于其细观结构,细观结构及组分参数具有不确定性势必导致材料的宏观平均性能具有不确定性。以下章节研究其宏观性能统计特性。

4 复合材料有效性能的统计特性研究

4.1 引言

对于任意给定的材料,当考察尺度小到一定程度后,都将呈现出非均匀性。因此,在复合材料力学的研究中,我们不仅需要了解复合材料的宏观平均性能,而且还需要了解它的局部性能的影响。复合材料是一种典型的多相介质,组分材料的性能、夹杂的形状和分布等,都将影响到复合材料的微观结构性能。随着对颗粒增强复合材料研究的深入,人们发现颗粒增强复合材料的力学行为很大程度上受颗粒形状、颗粒体积含量、基体特性以及颗粒尺寸的影响^[32-34],因此,摆在人们面前的问题不仅仅是预测复合材料的宏观力学性能,更重要的是通过细观力学的理论和方法,进一步探求其局部的力学行为,并考虑组分材料等细观参数的变化对复合材料宏观力学性能的影响,统计分析其规律。

近 10 年来,充分考虑增强相的影响的复合材料宏观性能的研究逐渐兴起。冯西桥等^[35,36]研究了基体/夹杂复合材料增强相的形状对有效模量的影响,模拟了最大有效弹性模量随夹杂形状参数的变化关系。齐海波等^[37]通过研究 $\text{SiC}_p/\text{ZL109}$ 复合材料中颗粒长径比的实际分布情况,充分考虑长径比 λ 的影响,研究了等效杨氏模量随颗粒体积分数的变化关系。然而,对复合材料有效性能的统计特性分析方面的工作却较少见,据作者所知,文献[6]在考虑纤维尺寸随机性的基础上,研究了尺寸随机性对复合性能分散性的影响,文献[12]针对颗粒填充复合材料的任意宏观变形条件下,代表体元内应变分布的统计规律。但是,针对颗粒增强复合材料的微结构参数的随机性引起材料宏观性能的分散性的研究方面的工作较少。

本章依据表 4.1 中各组分材料的弹性参数,采用蒙特卡罗方法模拟颗粒增强相的分布、大小和体积分数等细观参数的不确定性产生一系列的数字化样本,采用均匀化方法计算每一个样本的弹性参数,利用数理统计方法分析这些参数,得到材料弹性性能的统计特性,并给出材料宏观弹性常数的分布。计算流程图如图 4.1 所示。

计特性,并给出材料宏观弹性常数的分布。计算流程图如图 4.1 所示。

表 4.1 各组分的弹性参量

Table 4.1 Young's modulus and Poisson's ratio of particle and matrix

	E/GPa	μ
颗粒	67	0.16
基体	27.24	0.2

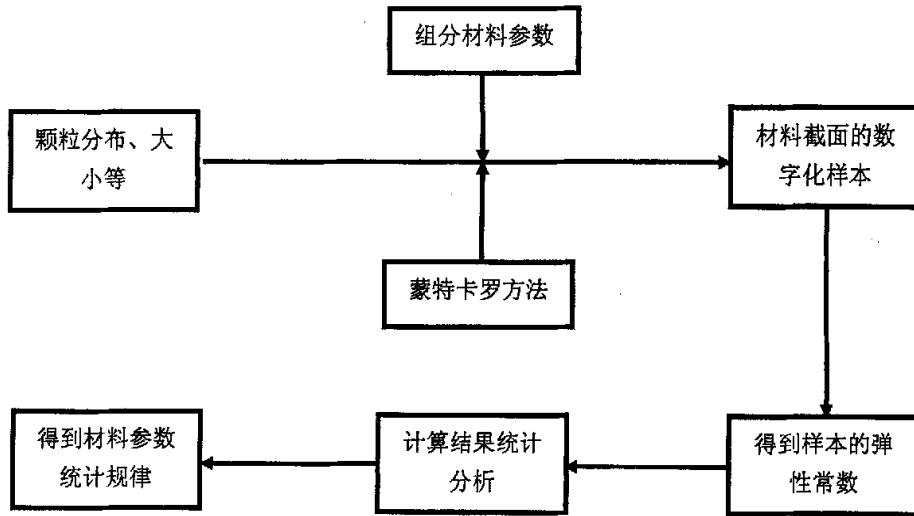


图 4.1 计算流程图

Fig.4.1 the calculation of random model

4.2 颗粒位置随机性对等效弹性性能的影响

由颗粒和基体组成的复合材料在工程中获得广泛的应用。颗粒增强复合材料，如混凝土是一类由颗粒和胶结物组成的非均质、无序、多相材料。虽然，增强颗粒的形状各异，但多数可以表示成具有随机分布特征的长、中、短轴的椭球体。为了不失一般性，采用矩形平面作为颗粒投放区域，砂石、砾石等颗粒可简化为球体或椭球体，在二维颗粒随机分布模型中可以近似用圆或椭圆代替。模型参考图 3.1。下面分别研究颗粒增强复合材料的颗粒的位置，体积分数，形状等细观参数的不确定性对材料宏观性能分散性的影响。

4.2.1 圆形截面颗粒位置随机性的影响

假定增强相的截面形状为圆形，且均匀分布在基体材料中。在所取的代表体元内具有均匀分布特征的颗粒的分布位置是随机的。颗粒分布位置的随机性对材料的宏观等效弹性常数的影响有多大呢？

下面针对如图 4.2 所示的随机模型，参考表 4.1 所示的各个组分材料的弹性参量，取代表体元尺度为 $300\text{ mm} \times 300\text{ mm}$ 的矩形区域，探讨颗粒体积分数为 0.3 的颗粒增强复合材料的颗粒位置随机性的影响。为了使讨论更具有实际的意义，以下分别取代表体元尺度与颗粒尺度的比值为 30，20 和 15，计算得到 $1\text{E}4$ 组材料宏观等效弹性性能参数，然

后对得到的有效性能的数据进行统计处理，并用正态分布拟合材料的宏观弹性常数的概率密度图。

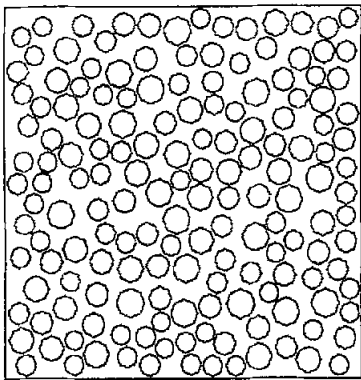


图 4.2 圆形颗粒增强复合材料
Fig4.2 Rounded particle-reinforced composites

(1) 当所取代表体元尺度与颗粒尺度之比为 30 时，所得的材料等效杨氏模量和泊松比的概率密度图如下所示：

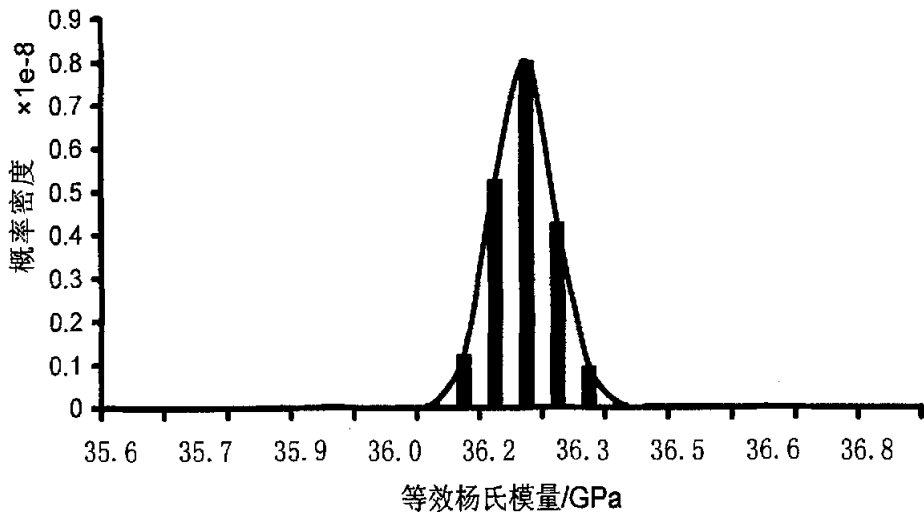


图 4.3 等效杨氏模量的概率密度图
Fig.4.3 The pdf of equivalent Young' modulus

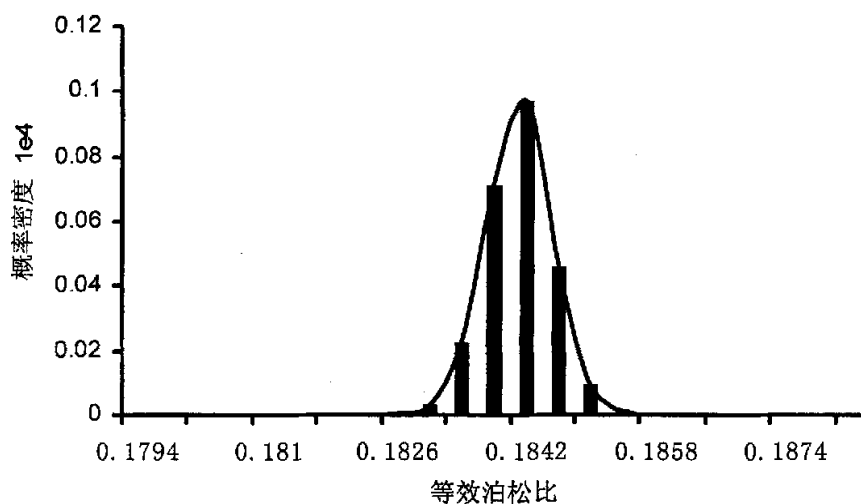


图 4.4 泊松比的概率密度图
Fig4.4 The pdf of equivalent Poisson's ratio

(2) 当所取代表体元尺度与颗粒尺度之比为 20 时, 所得的材料等效杨氏模量和泊松比的概率密度图如下所示:

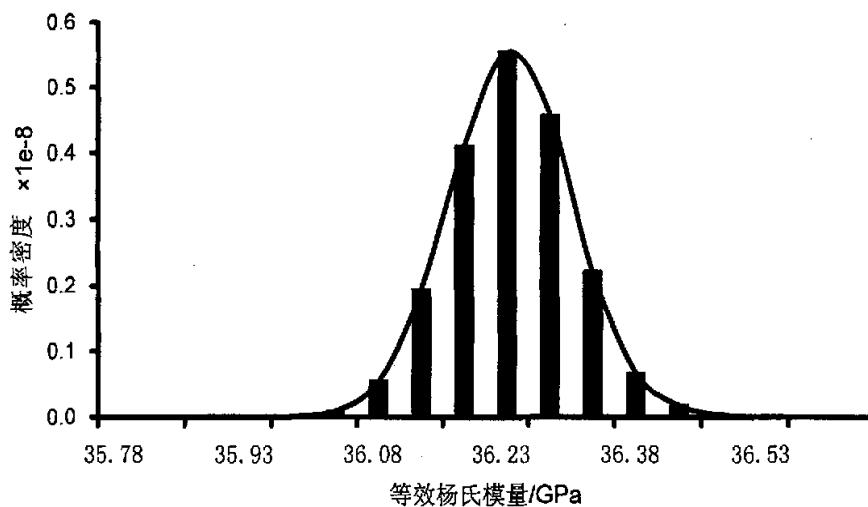


图 4.5 等效杨氏模量的概率密度图
Fig.4.5 The pdf of equivalent Young's modulus

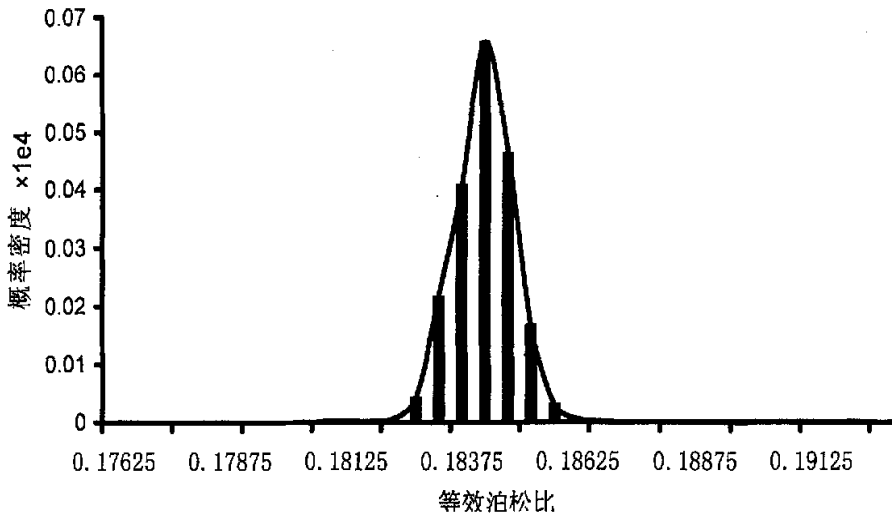


图 4.6 松比的概率密度图
Fig4.6 The pdf of equivalent Poisson's ratio

(3) 当所取代表体元尺度与颗粒尺度之比为 15 时, 所得的材料等效杨氏模量和泊松比的概率密度图如下所示:

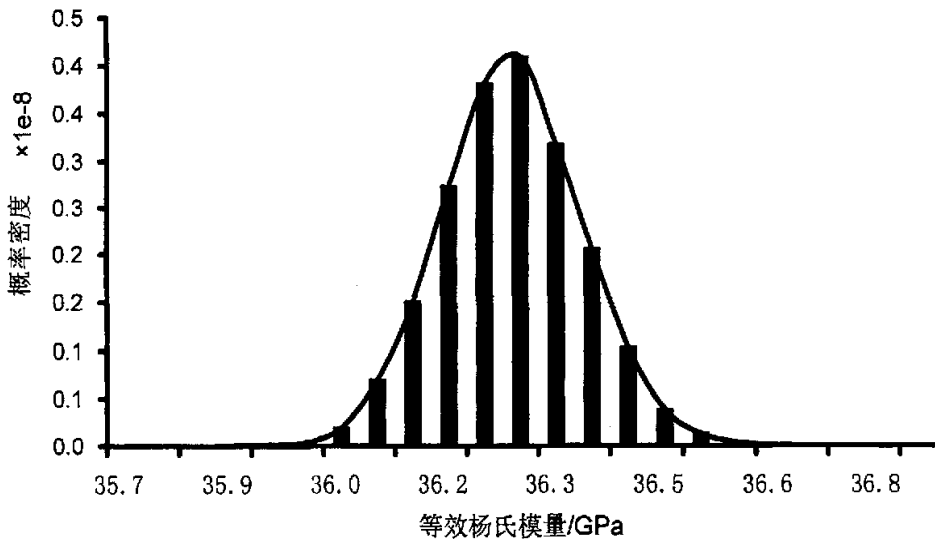


图 4.7 等效杨氏模量的概率密度图
Fig.4.7 The pdf of equivalent Young' modulus

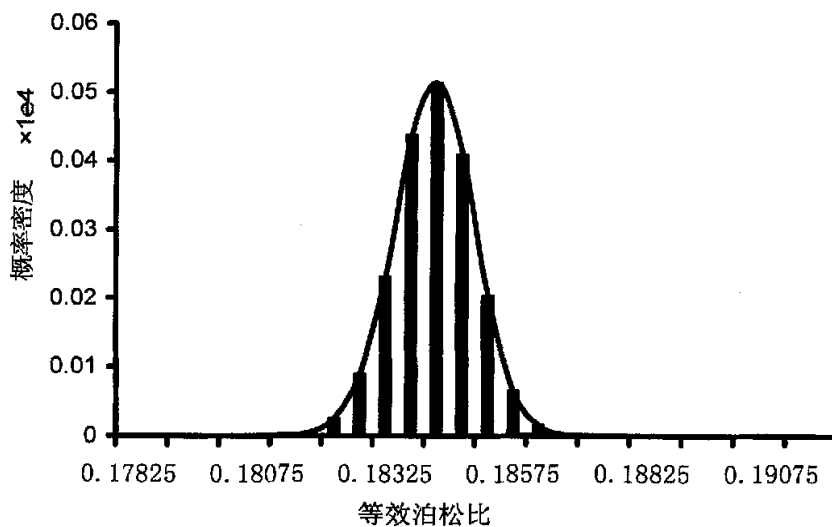


图 4.8 泊松比的概率密度图
Fig4.8 The pdf of equivalent Poisson's ratio

(4) 针对颗粒体积分数为 0.3 的颗粒增强复合材料，代表体元尺度与颗粒尺度之比取不同值时的等效杨氏模量和泊松比的概率密度图的比对。

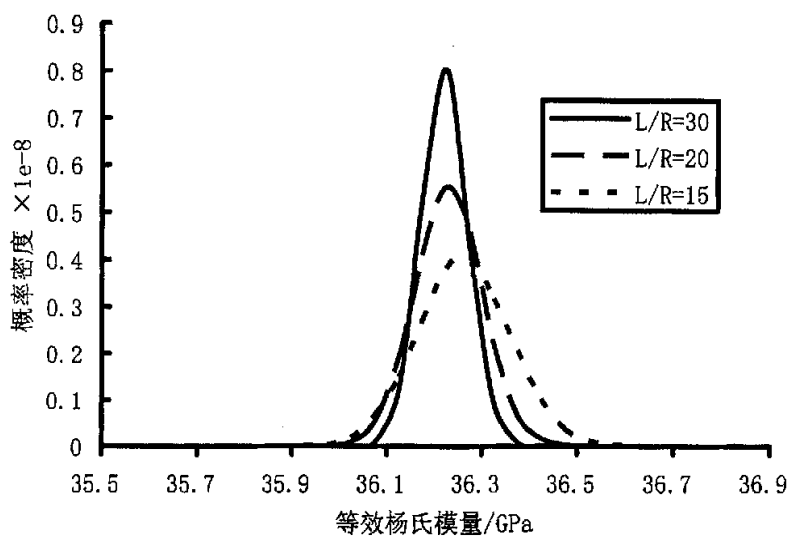


图 4.9 三种模型的杨氏模量对比图
Fig .4.9 The comparison of Young's modulus

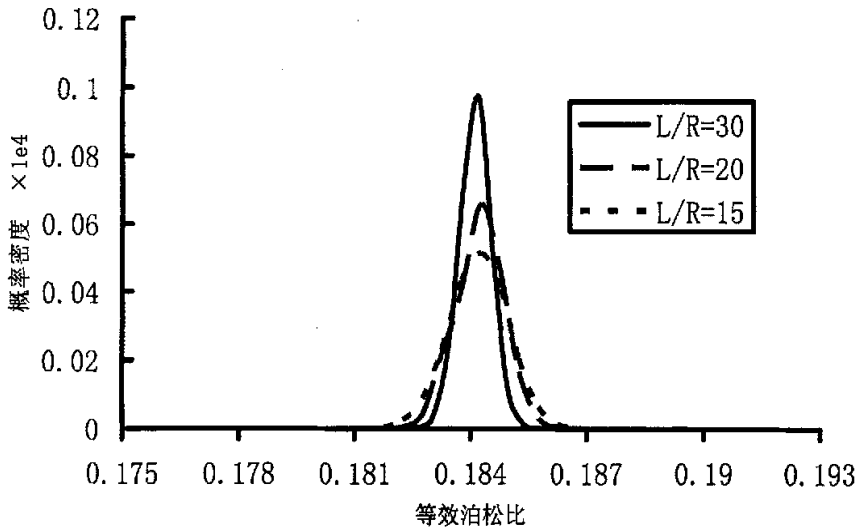


图 4.10 三种模型的泊松比对比图
Fig. 4.10 The comparison of Poisson's ratio

分析计算结果得到等效杨氏模量 E 和等效泊松比 σ 的概率分布图 (见图 4.3~图 4.8)。从图中可以看出, 无论代表体元尺寸与颗粒尺寸取何值, 所得到等效杨氏模量和泊松比的概率密度图近似呈现正态分布。即得出:

(1) 从杨氏模量和泊松比的分布图看出, 曲线都大致呈现正态分布。近似以等效杨氏模量的期望值 $U(\bar{E})$ 为对称轴。

(2) 从图 4.9 和图 4.10 比较中可以看出, 所取相对尺度 (代表体元尺度相对颗粒尺度) 越大, 概率密度的带宽越窄, 峰值越高。当相对尺度分别为 30 和 20 时, 两概率密度图基本上具有相同的对称轴, 样本的等效杨氏模量的均值是相等的。同时看出, 当相对尺度为 15 时, 等效杨氏模量的概率密度图有向右有偏量。

(3) 等效杨氏模量和泊松比的概率密度图服从 3σ 规则, 且落在 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 内的概率都在 99.98% 以上。

圆形截面颗粒位置的不确定性导致材料的宏观性质具有以上的统计特性。那么, 颗粒截面形状为椭圆形的增强复合材料有没有类似的性质呢? 以下研究椭圆形截面颗粒位置的不确定性对材料宏观性质的影响。

4.2.2 椭圆形截面颗粒位置随机性的影响

严格来讲,椭圆截面形状的颗粒更接近于真实的混凝土材料。依据表 4.1 的各组分材料弹性参量,采用如图 3.1 所示随机模型,取颗粒含量为 20%,相对尺度(代表体元尺度相对颗粒尺度)分别为 30 和 20 时,计算得到 1E4 组宏观等效弹性性能的参数,然后对得到的数据进行统计处理。

(1) 当所取代表体元尺度与颗粒尺度之比为 30 时,所得的材料等效杨氏模量和泊松比的概率密度图如下所示:

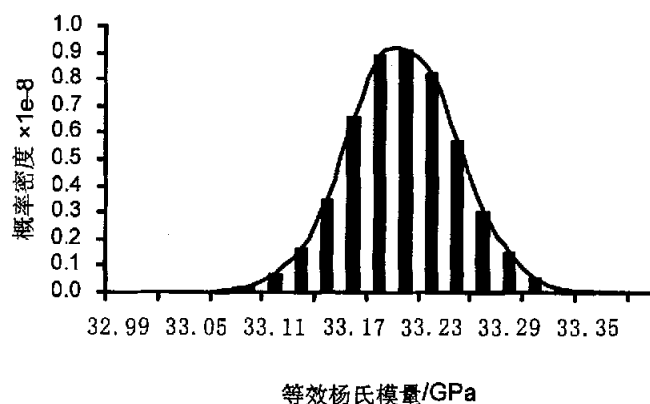


图 4.11 等效杨氏模量的概率分布图

Fig 4.11 The pdf of equivalent Young's modulus

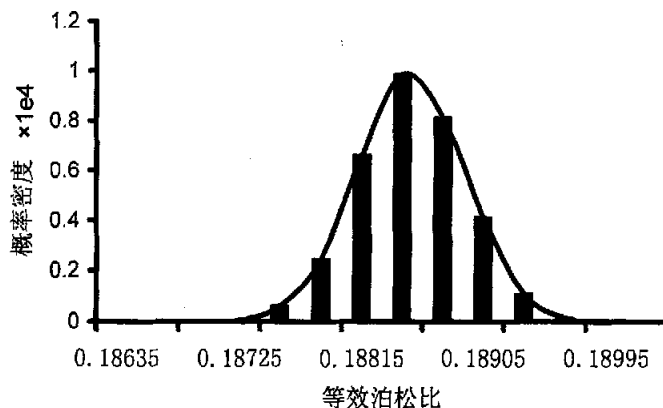


图 4.12 泊松比的概率密度图

Fig4.12 The pdf of equivalent Poisson's ratio

(2) 当所取代表体元尺度与颗粒尺度之比为 20 时, 所得的材料等效杨氏模量和泊松比的概率密度图如下所示:

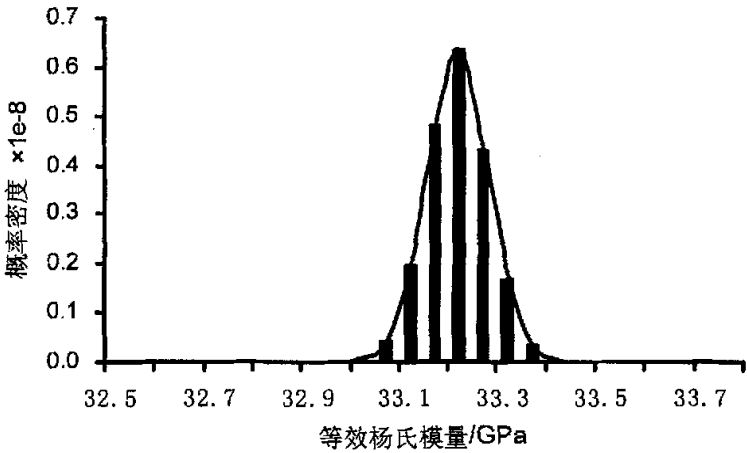


图 4.13 等效杨氏模量的概率分布图

Fig 4.14 The pdf of equivalent Young' modulus

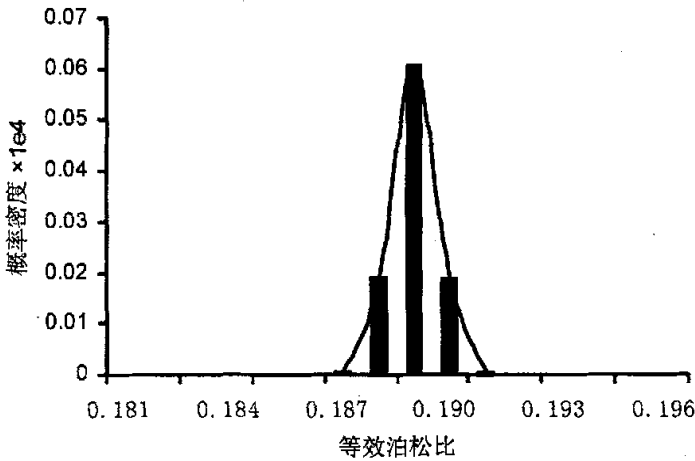


图 4.14 泊松比的概率密度图

Fig4. 14 The pdf of equivalent Poisson' s ratio

(3) 代表体元尺度与颗粒尺度之比取不同值时的等效杨氏模量和泊松比的概率密度图的比对。

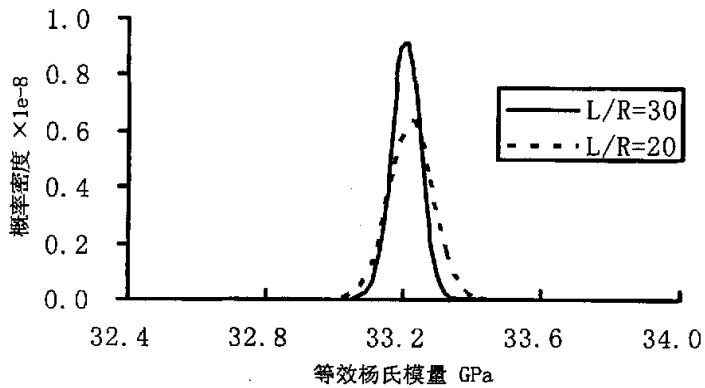


图 4.15 三种模型的杨氏模量对比图
Fig .4.15 The comparison of Young's modulus

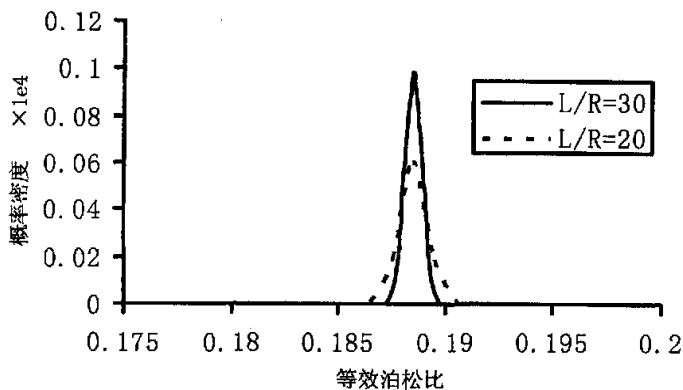


图 4.16 三种模型的泊松比对比图
Fig .4.16 The comparison of Poisson's ratio

从图 4.11~图 4.14 可以看出,椭圆形截面增强材料也具有类似的统计特性。它的等效杨氏模量和泊松比的概率密度图也近似为正态分布。由此,颗粒位置的分散性对材料宏观统计性能的影响比较大。

4.2.3 小结

颗粒增强复合材料的颗粒位置的不确定性对材料弹性性能的分散性的影响较大,从材料等效杨氏模量和泊松比的概率密度图看出,正态分布较好的描述了等效杨氏模量 E 和等效泊松比 μ 的概率密度分布情况。

4.3 增强颗粒体积分数随机性的影响

颗粒增强复合材料中颗粒的体积分数(所有颗粒的体积总和/投放域的体积)也是一个统计值。采用金相学方法可以比较准确地研究颗粒的统计规律,但是需要花费相当多的研究经费。本节利用计算机随机模拟的方法,针对颗粒体积分数随机分布的微观代表体元进行研究。即,采用数值模拟的方法研究颗粒增强复合材料中颗粒体积分数的统计规律。为了不失一般性,在数值模拟时采取如下假定:

- (1) 所有颗粒的截面都为圆形。
- (2) 在所考察的矩形区域内颗粒截面是完整的,即该区域内包含整数个颗粒。
- (3) 所有颗粒的截面不发生重叠。
- (4) 用于统计计算颗粒体积比 V_f 的相对尺度由式子 $d = \frac{L}{R} = \sqrt{\frac{n\pi}{V_f}}$ 确定。式中, L

为正方形的边长; R 颗粒的平均半径; \bar{V}_f 为复合材料平均颗粒体积分数; n 为统计区域内颗粒的数目。

在边长为 L 的正方形投放区域内进行颗粒均匀随机数值模拟投放,然后统计每个正方形内颗粒的体分比 V_f , 此时的 V_f 是一个随机变量。

以下统计颗粒增强复合材料细观结构的代表体元尺寸与颗粒尺寸比值为 30, 颗粒体分比 \bar{V}_f 分别为 0.05, 0.1……0.3 的统计样本的颗粒体积分数做统计分析, 得到统计规律。

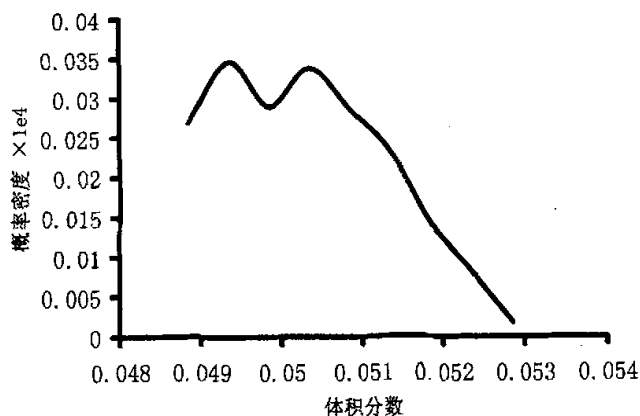


图 4.17 颗粒体积分数 0.05 的概率密度图

Fig.4.17 The pdf when content is 0.05

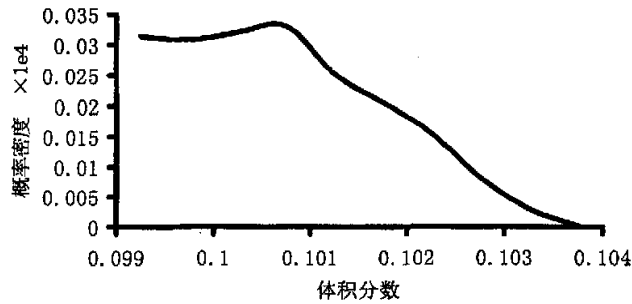


图 4.18 颗粒体积分数 0.1 的概率密度图

Fig.4.18 The pdf when content is 0.1

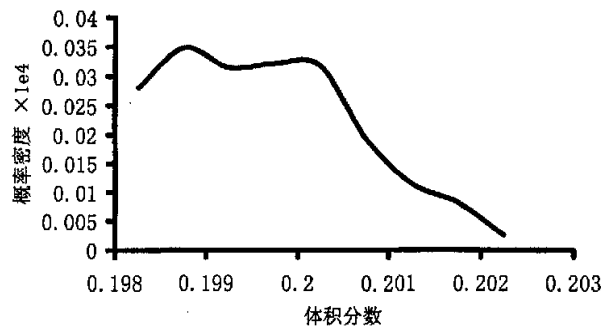


图 4.19 颗粒体积分数 0.2 的概率密度图

Fig.4.19 The pdf when content is 0.2

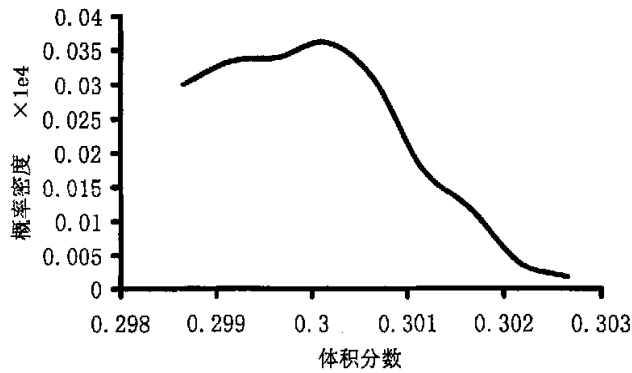


图 4.20 颗粒体积分数 0.3 的概率密度图

Fig.4.20 The pdf when content is 0.3

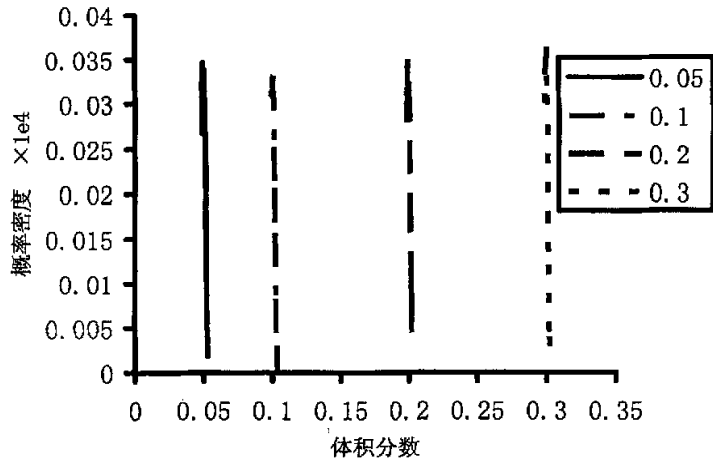


图 4.21 概率密度图

Fig 4.21 Probability density figure

由图 4.21 的统计值可以看出, 虽然增强颗粒的体积分数具有一定的随机性, 但基本上都是在给定积分数 V_{f_0} 的小邻域内。由图 4.17~图 4.20 可以看出在代表体元内颗粒实际的体积分数 V_f 的分布规律。颗粒体积分数分布 V_f 在指定体积分数 V_{f_0} 的两侧, 并且当颗粒体积分数 V_f 大于指定分数 V_{f_0} 小邻域内概率迅速降为零。

由此看出, 材料的体积分数具有一定的离散性, 它也对材料的性能有一定的影响, 应该在预测材料性质时考虑到颗粒体积分数分散性的影响。

4.4 颗粒截面形状对材料宏观性能的影响

增强颗粒截面形状的不同对材料的等效弹性性能有没有影响呢? 针对颗粒体积分别为 0.05, 0.1……0.3 的增强相截面形状分别为圆形和椭圆形的复合材料作对比, 颗粒增强复合材料的宏观等效杨氏模量与增强相体积分数的关系曲线如图 4.21 和图 4.22 所示。

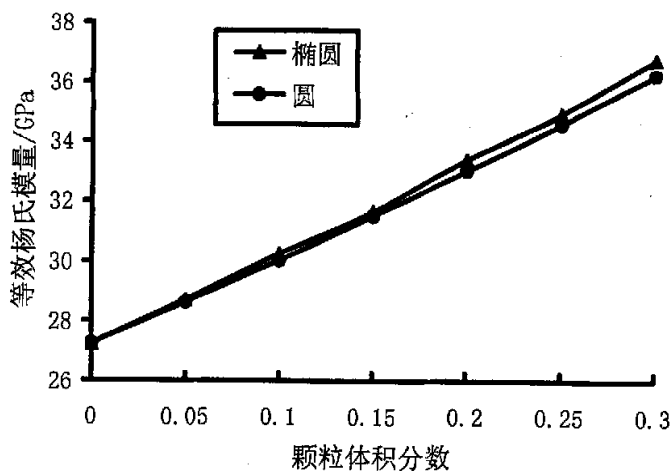


图 4.22 等效杨氏模量

Fig 4.22 Equivalent Young's modulus

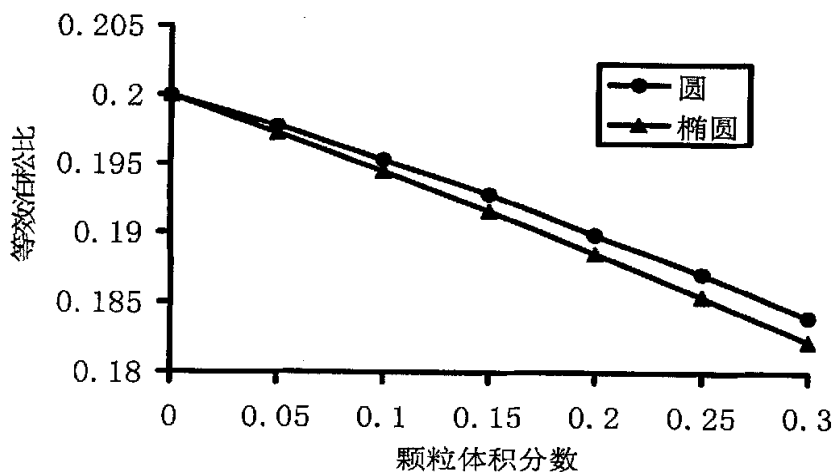


图 4.23 等效泊松比

Fig 4.23 Equivalent Poisson's ratio

从图 4.22 中看出，在颗粒体积分数较低的时候，无论截面形状是圆形还是椭圆形，两者的预测结果基本相同，且重合的较好，但当体积分数较高时候，椭圆形截面的等效杨氏模量高于圆形截面，说明，在体积分数相同的情况下，椭圆形截面增强相更有助于提高材料的等效杨氏模量。从图 4.23 看出，材料的等效泊松比也有类似的性质，只是，截面形状对泊松比的影响更大些。材料的等效杨氏模量和泊松比随着体积分数的增加而增加，且具有线性关系。

4.5 结论

宏观均匀的复合材料，其微结构具有不确定性或者统计特性。本章着手研究了颗粒增强复合材料的颗粒位置、体积分数及颗粒形状的不确定性对材料宏观性能的分散性研究，本章的研究为材料微结构的概率设计奠定了基础。

通过对颗粒位置随机性的研究发现，材料的等效杨氏模量和泊松比的概率分布近似呈现正态分布。并且它的分布与材料代表体元尺寸与颗粒尺寸之比有关系。那么，相对尺度 L/R 为多大时候，材料的微结构才能准确的描述出材料的宏观性质？下一章，我们将讨论材料的尺度效应。

5 复合材料尺度效应的研究

5.1 引言

利用实验的方法测试材料宏观性能时，所取的试样一方面要保证测试的实验结果是准确的，另一方面试样又不能过大，否则就造成材料的浪费。因此，我们希望能找到一个合适的尺寸，既能满足材料性能预测精度的要求又能节省材料。本节从细观力学的角度出发，研究复合材料的代表体元尺度相对颗粒尺度的比值为多少时恰好能准确预测材料的宏观等效弹性性能。

复合材料的宏观性质取决于其细观结构，是细观性能的综合反映，不但与组分材料的体积分数有关，还和增强相的形状、大小、分布等有密切的关系。利用均匀化方法、自洽方法、Eshelby 等效夹杂法、微分法和 M-T 方法等细观力学方法，并根据细观结构和组分材料的性质确定复合材料的宏观性质^[38]。这些细观力学方法均是以细观结构尺度相对于宏观结构尺度很小的假设为基础。然而这一相对尺度小到什么程度，细观力学方法才可获得准确的材料性质的预测值一直是需要研究的问题。即，采用多大的试样(相对细观结构尺度)获得的材料性质才是准确的？用实验的手段确定宏观材料性质，也存在类似的尺度效应^[38-43]问题，但是，每个试样都在试验机上测试是比较昂贵的。文献[44]研究了蜂窝材料性能预测的尺度效应问题。文献[45]研究层状材料的弹性性能细观尺度的影响，常崇义研究复合材料粘弹性性能预测的多尺度算法^[46]。本节以混凝土材料为研究对象，采用表 4.1 和表 5.1 的材料组分参数，考察试样(相对于细观结构尺度)为多大时，利用细观力学方法恰好能准确的预测出材料性质，研究尺度效应对宏观材料弹性常数的影响。

表 5.1 各组分的弹性参量
Table 5.1 Young's modulus and Poisson's ratio of particle and matrix

	E/GPa	μ
颗粒	67	0.16
基体	13.62	0.2

5.2 典型算例

由前几章的理论知识可知，预测材料弹性性能的方法有很多种，比较有代表性的有 Eshelby 等效夹杂法，自洽法，微分法，均匀化方法等。每种预测方法都有它的优点和局限性，如 Eshelby 等效夹杂法只适用于颗粒体积含量较低的情况(一般颗粒体积含量不

超过 15%)。本文采用基于有限元技术的宏细观结合的多尺度模型计算材料的宏观弹性常数。为了说明该方法在求解细观问题上具有一定的优越性,本节举例说明,并与文献中的结果进行比对。

算例 1:

颗粒增强复合材料的基体铝合金 ZL109 的杨氏模量 $E_0=76.4\text{GPa}$, 泊松比 $\nu=0.34$, 增强颗粒 SiC_p 的杨氏模量 $E_1=420\text{GPa}$, 泊松比 $\nu=0.14$ 。按照齐海波等采用 KYKY-2800 扫描电子显微镜对 $\text{SiC}_p/\text{ZL109}$ 复合材料中颗粒的长径比 λ (长径 α_1 与短径 α_2 之比) 统计分析得出 $\lambda=1.866$ 。文献中将实验数据与改进的 Eshelby 等效夹杂法和改进的自洽法进行比较。因此,本例也考虑 λ 因子的影响,取 $\lambda=1.886$,然后将基于有限元技术的均匀化方法预测材料的宏观弹性性能,并把预测的结果与文献中实验数据相比较。得到如图 4.1 所示:

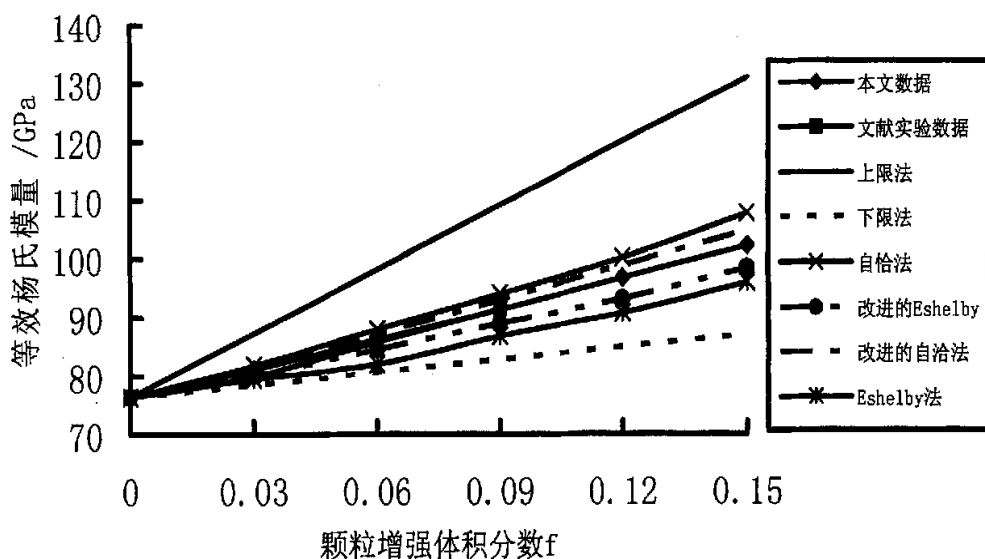


图 5.1 各种理论预测与试验数据比较

Fig.5.1 Theoretical prediction compare with test data

齐海波等考虑了长径比的分布规律,并假设材料中仍存在 n 中增强相,它们的弹性常数均相同,而在材料中的影响不尽相同,从而将颗粒的长径比 λ 及与其相应的颗粒所占的体积分数 $V(\lambda)$ 之间关系引入 Eshelby 等效夹杂法和自洽方法中,进而得到了改进的 Eshelby 等效夹杂法和改进的自洽方法,如式 5.1~5.4 所示。其中, f 为增强颗粒总的体

积分数, \bar{G} 和 \bar{K} 分别为材料有效剪切模量和有效体积模量, V_0, G_0, K_0 分别为基体材料的体积分数、剪切模量和体积模量, 而 V_r, G_r, K_r 分别为材料中第 r 相的体积分数、剪切模量和体积模量, S_{1212}, S_{ijij} 均为颗粒长径比的函数。详细内容请参考文献[37]。

Eshelby 等效夹杂法修正后的预测公式:

$$\bar{G} = \frac{G_0}{1 + \int_0^1 \frac{V(\lambda)f(G_0 - G_r)}{\{G_0 + 2S_{1212}(\lambda)(G_r - G_0)\}} d\lambda} \quad (5.1)$$

$$\bar{K} = \frac{K_0}{1 + \int_0^1 \frac{V(\lambda)f(K_0 - K_r)}{\{K_0 + \frac{1}{3}S_{ijij}(\lambda)(K_r - K_0)\}} d\lambda} \quad (5.2)$$

改进后的自洽方法的预测公式:

$$\bar{G} = G_0 + \int_0^1 \frac{V(\lambda)f(G_r - G_0)}{\{\bar{G} + 2S_{ijij}(\lambda)(G_r - \bar{G})\}} d\lambda \quad (5.3)$$

$$\bar{K} = K_0 + \int_0^1 \frac{V(\lambda)f(K_r - K_0)}{\{\bar{K} + \frac{1}{3}S_{ijij}(\lambda)(K_r - \bar{K})\}} d\lambda \quad (5.4)$$

由图 5.1 可以看出, 文献中仅对颗粒体积分数较低的复合材料进行实验。在颗粒体积分数较低的情况下(颗粒体积含量低于 6%), 改进的 Eshelby 等效夹杂法和改进的自洽方法对有效弹性模量的预测均具有较高的精度, 但是本文的结果与文献中的实验数据的吻合性更好, 基本上与实验数据吻合, 并且相对误差甚小。当颗粒增强体积分数逐渐增加时候, 各个预测方法之间差距变大。由于文献中作者未对颗粒体积分数较高的复合材料进行实验, 因此, 无法将颗粒增强体积分数较高的复合材料有效弹性模量预测结果与试验数据进行比较, 但是, 从图中仍然可以看出, 在颗粒增强体积分数较高的时候, 本文的预测结果仍然处在改进后的 Eshelby 等效夹杂法和改进后的自洽法之间, 说明了用有限元方法与均匀化方法结合预测颗粒增强复合材料的弹性性能更具有优势, 预测的结果更接近实验值。

算例 2:

陶瓷颗粒增强—铝基复合材料, 铝基体的材料常数 $E_s = 70GPa$, $\nu_s = 0.3$, 增强相陶瓷材料 $E_p = 350GPa$, $\nu_p = 0.3$ 。假定颗粒增强相的截面为圆形和正方形且分布稀疏均

匀。文献预测了正方形截面和圆形截面的增强复合材料的宏观等效杨氏模量。本文仅对圆形截面增强复合材料的有效模量做了比较。

由图 5.2 可以看出, 文献[47]的计算结果位于 Voigt 上限和 Reuss 下限之间, 无论圆形还是方形截面的颗粒增强复合材料, 其等效杨氏模量随着增强相体积分数的增加而增加。从图 5.3 的数值结果可以看出, 针对增强相截面为圆形的复合材料的等效杨氏模量的预测结果与文献结果非常接近, 且相对误差不超过 2%。同时, 可以得到: 当增强相为圆形颗粒的时候, 材料宏观等效杨氏模量随着增强相的体积分数的增加而增加, 两者都具有较好的线性关系。

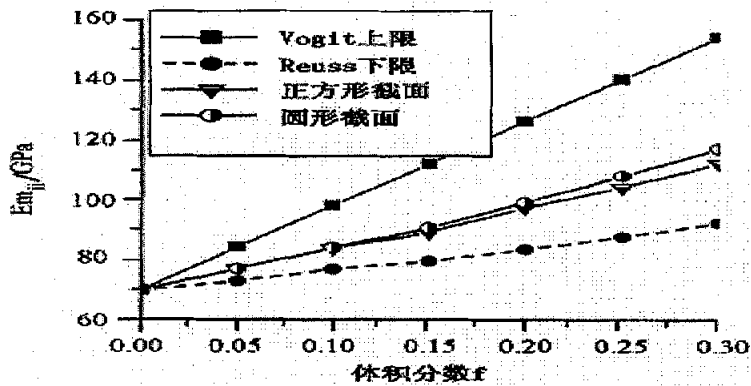


图 5.2 文献[47]数据

Fig. 5.2 the data in literature[47]

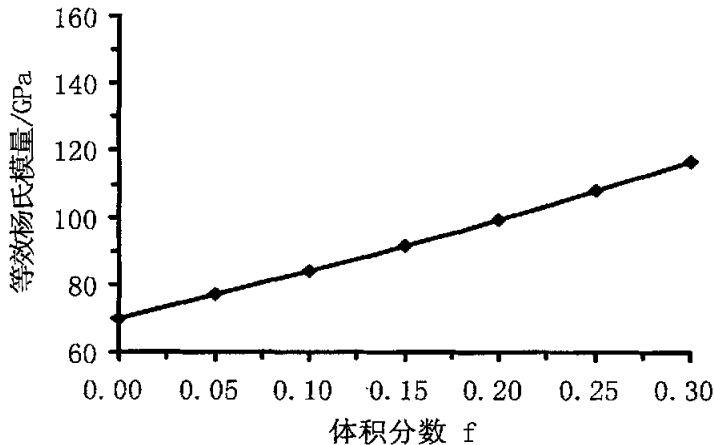


图 5.3 本文计算结果

Fig.5.3 the results in this article

综上所述, 通过以上例子跟文献的结果相比较可以明显的看出, 本文利用蒙特卡罗法模拟颗粒随机分布的颗粒增强复合材料, 并利用均匀化方法和有限元法结合计算每个样本的弹性常数是较为准确的, 以下针对圆形和椭圆形截面的复合材料预测得到的材料弹性常数进行统计分析, 并分析其统计规律。

5.3 尺度效应研究

长期以来人们对于代表体元的最小尺寸的认识是定性的, 如 Lemaitre^[48]曾粗略的认为代表体元的最小尺寸是 $0.1\text{ mm} \times 0.1\text{ mm} \times 0.1\text{ mm}$ (金属)、 $10\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 10\text{ mm}$ (木材) 或者 $100\text{ mm} \times 100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ (混凝土)。Ostoja-Starzewski^[49]具体研究了由颗粒为片状或者针状的颗粒复合材料在反平面剪切变形下的表观模量, 发现在 5% 的最大许可误差和颗粒模量约为基体模量的 100 倍的情况下, 最小代表体元的尺度是颗粒尺度的 10 倍到 20 倍。Ren 和 Zheng^[50]数值实验代表所有立方多晶的数百种立方多晶, 发现关于杨氏模量的最小代表体元尺度与立方晶体的各向异性程度近似线性相关, 绝大多数的立方多晶的最小代表体元尺度为晶体尺度的 10 倍。那么, 颗粒增强复合材料(以混凝土为例)的最小代表体元的尺度与颗粒尺度的比值 $d=L/R$ 为多少时材料才具有宏观统计的均匀性?

我们猜测, 材料的名义杨氏模量 $E(d)$ 随着某参考域尺度 d 的增大而围着某一值 E_{eff} 上下波动, 直到稳定于等效杨氏模量 E_{eff} , 故能找到最小的相对尺度 d_E , 如图 5.4 所示。

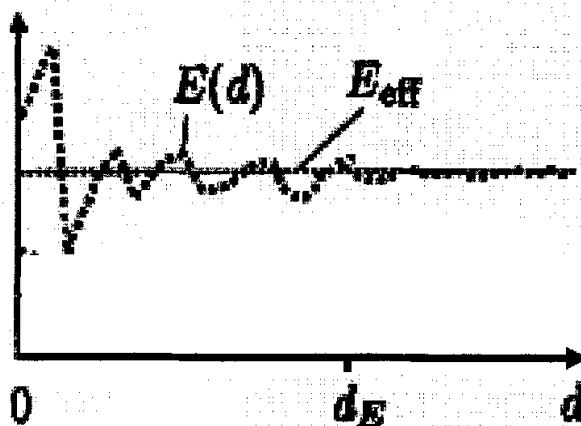


图 5.4 杨氏模量的波动图

Fig.5.4 the wave chart of Young's modulus

依据表 4.1 中各组分材料的弹性参量, 针对颗粒体积含量分别为 10%、20%和 30% 的代表体元模型, 随机抽取 1000 组截面参数, 利用有限元方法和均匀化方法计算得到 1000 组等效材料参数, 进行统计分析, 得到材料的宏观等效弹性常数随着代表体元尺寸与颗粒尺寸比值的变化关系图(见图 5.5~图 5.7)。

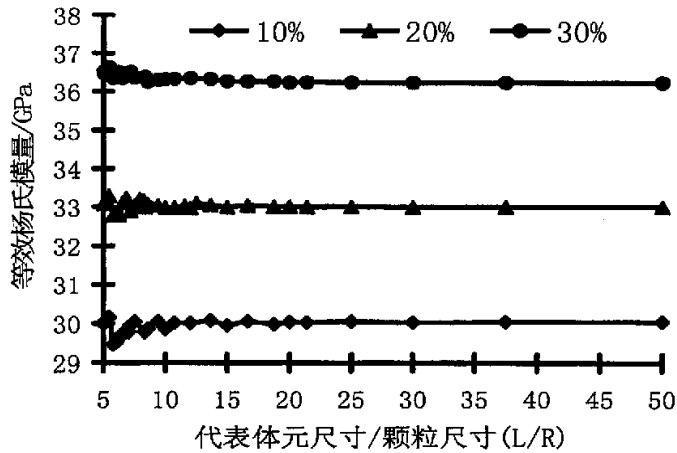


图 5.5 等效杨氏模量 \bar{E} 随 L/R 的变化

Fig.5.5 Equivalent Young's modulus changed chart

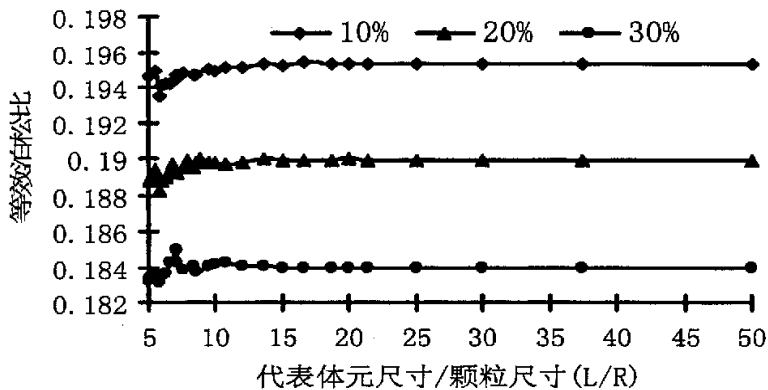


图 5.6 等效泊松比 $\bar{\mu}$ 随 L/R 的变化

Fig.5.6 Equivalent Poisson' ratio changed chart

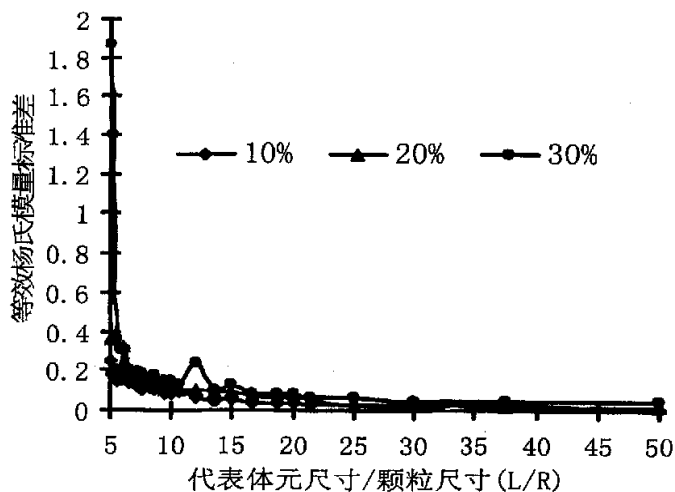

 图 5.7 等效杨氏模量标准差随 L/R 的变化图

 Fig.5.7 Changed chart of $\sigma(\bar{E})$

图 5.5~图 5.7 分别给出了宏观材料的等效杨氏模量、等效泊松比和等效杨氏模量的标准差随着代表体元尺寸与颗粒尺寸的比值 (L/R) 的变化曲线图。从各曲线的变化趋势可以得到以下几点结论:

- (1) 材料等效弹性性能在 L/R 较小时, 数值解振荡, 但随着 L/R 的增大波动性逐渐的变小, 直到接近于某个特定的值, 即曲线出现平台。
- (2) 增强颗粒体积分数 V_f 越大, 其曲线的平台出现的越早。从图 5.5 可以看到, 当颗粒含量为 30% 的等效杨氏模量数值解出现平台的时候, 颗粒含量为 10% 的曲线仍具有振荡性。
- (3) 等效杨氏模量的标准差随 L/R 的增大迅速变小, 虽也有数值振荡的特点, 但 $L/R > 10$ 后, 其样本的标准差几乎降为零。
- (4) 在基体材料中加入增强材料后, 材料的刚度将有所提高。

同理, 我们依据表 5.1 中复合材料组分材料的弹性参量得到的材料等效弹性性能作类似的统计分析。同样, 得到宏观材料等效杨氏模量和等效泊松比的曲线, (见图 5.8~图 5.10)。

由图看出, 材料等效弹性常数的变化趋势与图 5.5~图 5.7 相同, 曲线都存在平台。但同时也看出, 表 5.1 中削弱了基体材料后, 宏观材料的等效杨氏模量将有所降低, 即

材料的刚度将有所下降。换言之，如果想提高整个材料的刚度，就应该在基体中加入刚度较大的增强材料。

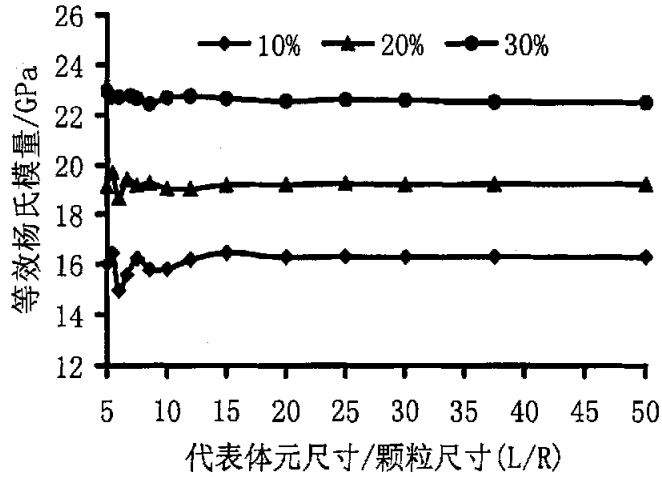


图 5.8 等效杨氏模量 \bar{E} 随 L/R 的变化

Fig.5.8 Equivalent Young's modulus

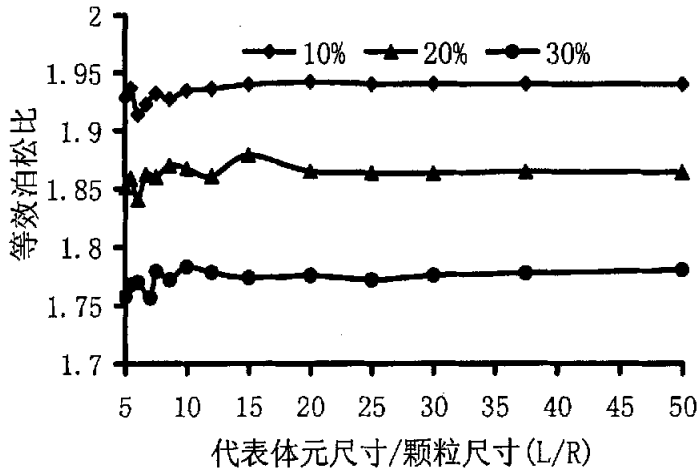


图 5.9 等效泊松比 $\bar{\nu}$ 随 L/R 的变化

Fig.5.9 Equivalent Poisson' ratio

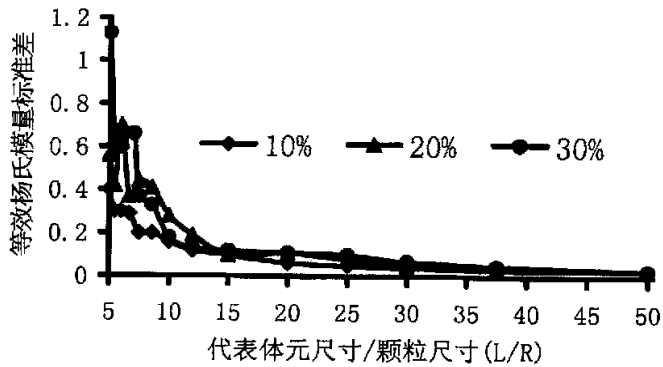


图 5.10 等效杨氏模量标准差随 L/R 的变化图

Fig.5.10 Changed chart of $\sigma(\bar{E})$

为确保代表体元模型具有统计的均匀性,传统观点认为代表体元尺寸与夹杂尺寸比例应选择在 10: 1 到 100: 1 之间。但对于各向同性夹杂的代表体元,这一比例要小的多。Drugan^[51, 52]等人证明,对于随机分布且不互相重叠、大小相同的球形颗粒,5: 1 的比例已经足够的大;文献[12]针对颗粒含量 34.3%,颗粒基体模量比 5: 1,泊松比 0.25 的颗粒填充复合材料,得出了数值解在 6:1 时离散较小。

那么,针对本文表 4.1 中组分材料的弹性参量,代表体元尺寸与颗粒尺寸的比值(L/R)为多少时,所取的代表体元才恰好能准确的描述材料的宏观弹性性质? 以下分别取颗粒含量为 30%和 10%的等效弹性常数作详细分析:

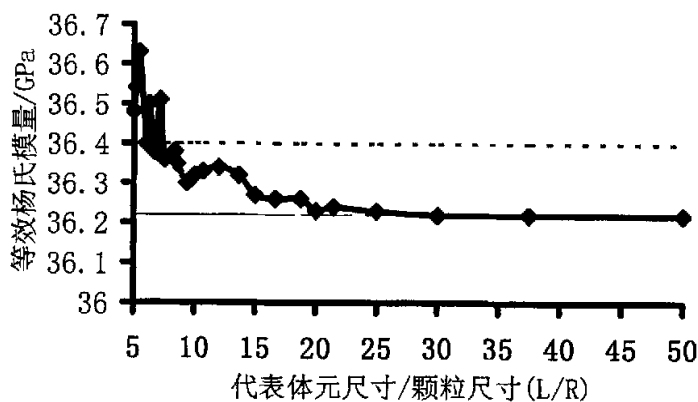


图 5.11 颗粒含量 30%等效杨氏模量曲线图

Fig.5.11 The chart of equivalent Young's modulus (30%)

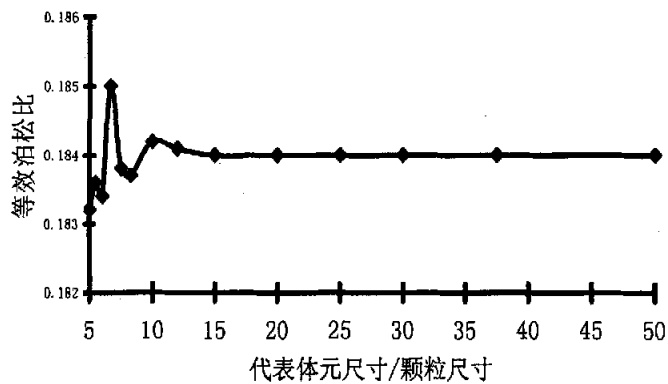
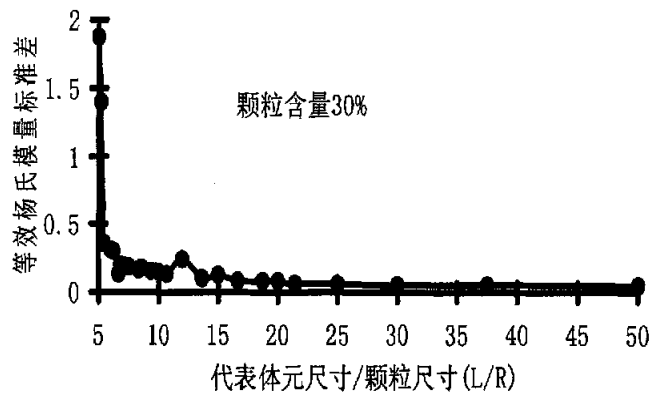
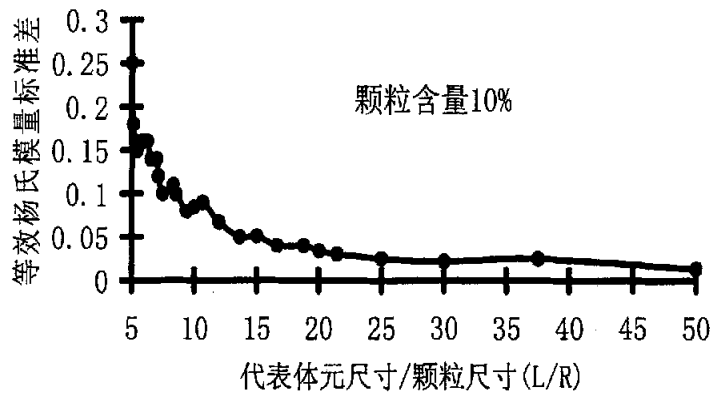


图 5.12 颗粒含量 30%等效泊松比曲线图

Fig.5.12 The chart of Poisson's ratio (30%)



颗粒含量30%



颗粒含量10%

图 5.13 $\sigma(\bar{E})$ 与 L/R 的关系图

Fig5.13 Relationship between $\sigma(\bar{E})$ and L/R

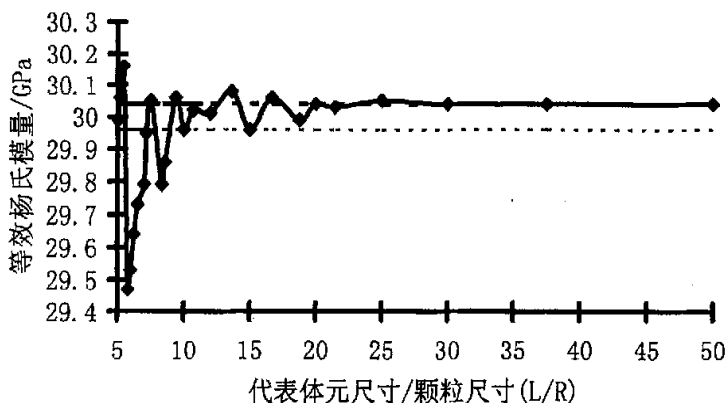


图 5.14 颗粒含量 10%等效杨氏模量曲线图

Fig.5.14 The chart of equivalent Young's modulus (10%)

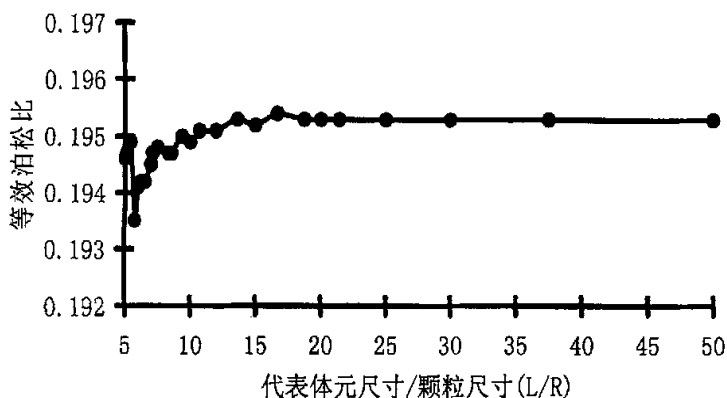


图 5.15 颗粒含量 10%等效泊松比曲线图

Fig.5.15 The chart of Poisson's ratio (10%)

从图 5.11~图 5.15 可以清晰的看出材料的弹性常数随着 L/R 的振荡性。但是，我们如果把预测的材料等效杨氏模量和泊松比的相对误差均控制在 0.5%之内，则可以得到以下几点结论：

- (1) 代表体元尺寸与颗粒尺寸的比值 L/R 存在临界值，当超过临界值后， L/R 的变化将基本不会引起材料弹性常数的改变。
- (2) 颗粒含量为 30%时，由样本的数值解可以得出， L/R 大于 7.5 时，已经能准确的描述宏观材料等效弹性常数；颗粒含量为 10%时， L/R 大约为 9 时，数值解才具有较小的振荡性。
- (3) L/R 的变化对材料等效杨氏模量的影响较大，而对等效泊松比的影响相对较小。

- (4) 由等效杨氏模量的标准差来看, 颗粒含量为 30% 时, $\sigma(\bar{E})$ 迅速变小直到为零, 样本的离散性较小。

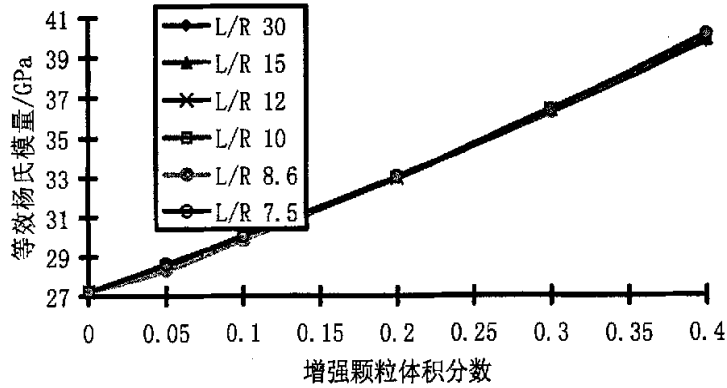


图 5.16 等效杨氏模量随体分比的变化

Fig.5.16 Variation of equivalent Young's modulus

综上所述, 材料的等效杨氏模量 E 和等效泊松比 μ 在 L/R 较小的时候, 具有一定的波动性, 但随着 L/R 的增加逐渐出现一个平台。即: 存在一个临界值, 当细观结构的尺寸与颗粒尺寸的比值大于该临界值或者小于该临界值的倒数时, 代表体元尺寸/颗粒尺寸的变化将基本不会引起材料弹性性质的变化。同时, 可以看出颗粒含量越高, 临界值出现的越早。图 5.16 可以清楚的看出, 预测宏观材料的等效杨氏模量随着增强颗粒体积分数的变化是呈现线性变化, 颗粒含量越高, 材料的等效杨氏模量越高, 即材料的刚度越大。

5.4 结论

本章研究了颗粒增强复合材料的尺度效应的影响。找到了描述材料宏观平均性能的最小代表体元的尺度。通过本章的颗粒增强复合材料的宏观弹性常数随着代表体元尺寸与颗粒尺寸的比值的变化关系得到:

- (1) 材料的等效杨氏模量随着代表体元尺寸与颗粒尺寸的比值 (L/R) 的增大逐渐出现平台, 所取微结构的 L/R 大于临界值后, L/R 的变化基本不会影响材料的宏观弹性性能。即找到了能反映宏观材料性质的最小的尺度。
- (2) 随着颗粒含量的增加, 平台也出现的越早。
- (3) 材料的等效杨氏模量随颗粒含量成线性分布。

结论与展望

总结

随着现代工业的发展,尤其是航空航天、电子和信息技术等高科技行业的迅速发展,对高性能先进复合材料的研究和开发变得更加迫切。近年来,随着细观力学的迅速发展,从复合材料的细观入手,对复合材料的性能研究逐渐兴起,发展了较为系统的细观力学计算方法,利用细观力学模型应用自洽、广义自洽、Eshelby 等效夹杂、均匀化等理论预测复合材料的有效性能,对于指导复合材料的微观设计,节省实验费用具有重要的意义。另外,复合材料的细观结构和复合材料中各组元材料的性能具有随机性,这就要求对材料的弹性性能的分布进行研究,研究各组元的不确定性给复合材料的宏观弹性性能的影响。

复合材料作为一种多相材料组成的结构,其力学性能必然受到组成方式的影响。这正是微观力学研究复合材料的基本出发点。本文考虑到复合材料各组元材料的不确定性的影响,研究颗粒增强复合材料弹性性能的统计特征。在研究的过程中,得到以下几点结论:

1. 以计算机随机模拟技术为基础,得到颗粒的随机分布场,利用细观均匀化方法的弹性理论为基础,研究了颗粒增强复合材料尺度效应的影响。得到了能准确描述材料性质的试样(相对细观结构尺度)的最小尺寸。
2. 在合理的尺度范围内,针对每组样本得到的材料的有效性能,利用数理统计方法,研究了材料等效杨氏模量和等效泊松比随着颗粒位置随机的影响。并得到材料的等效弹性常数近似呈现正态分布。
3. 椭圆形截面形状的颗粒增强复合材料的等效弹性性能要高于同体积分数下的圆形截面增强颗粒,可见,椭圆形有利于提高宏观材料的等效杨氏模量,增加材料的刚度。
4. 颗粒体积分数的不确定性研究,对预测材料的宏观等效材料常数起到一定的影响。

展望

应该看到先进复合材料的性能预测及细观力学分析方法有着广阔的发展前景,研究由微观结构参数的不确定性引起的材料宏观性能的不确定性研究也是很重要的工作,本文的工作只是冰山一角,由于时间和水平有限,在以下的几个方面有待于进一步深入研究:

1. 颗粒增强相不仅仅是圆形和椭圆形，还有其他形状，如多面体等，统计其他形状的颗粒增强相并加以对比，也是很有意义的一项工作。
2. 三维模型更加准确的模拟混凝土材料，因此，研究三维模型的参数的随机性研究和尺度效应的影响虽具有一定的难度，但具有更大的意义。

参 考 文 献

- [1] 王震鸣, 杜善义, 张恒等. 复合材料及其结构力学、设计、应用和评价(第一册). 北京: 北京大学出版社, 1998 年 7 月.
- [2] 王震鸣, 杜善义, 张恒等. 复合材料及其结构力学、设计、应用和评价(第二册). 北京: 北京大学出版社, 1998 年 11 月.
- [3] L. L. Graham, K. Gurleyb, F. Masters. Non-Gaussian simulation of local material properties based on a moving window technique [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2003, 18:223-234.
- [4] 范建华, 杨庆雄. 复合材料弹性模量随机计算模型[J]. 复合材料学报, 1998, 15(4).
- [5] 宋迎东, 孙志刚. 纤维增强复合材料有效性能分散性. [J]. 航空动力学报, 2005, 20(2) 230-235.
- [6] 高希光, 宋迎东, 孙志刚. 纤维尺寸随机引起的复合材料性能分散性研究[J], 材料科学与工程, 2005, 23(3) 335-340.
- [7] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems [J]. Proc Royal Soc London A, 1957, 241(1226):376-396.
- [8] Rabbit D. 计算材料学. 北京: 化学工业出版社, 2002.
- [9] Teply J L, Reddy J L, Brockenbrough JR. A Unified Formulation of Micro-mechanics Model of Fiber-reinforced Composites. Composite Structures , Testing, Analysis and Design 1992.
- [10] Oleinik O A, Shamaev A S, and Yosifian G A. Mathematical problems in Elasticity and Homogenization. Amstredam North-Holland, 1992.
- [11] Jikov V V, Kozlow, S M, Oleinik O A. Homogenization of Differential Operators and Integral Funcions, Springs-Verlag, 1994 .
- [12] 杨俊, 吴炜, 王治国等. 颗粒增强复合材料的应变统计特征与刚度模量. 航空学报, 2005. 44-49.
- [13] 李友云, 崔俊之. 具有随机颗粒分布复合材料力学参数的多尺度计算[C]. 北京: 中国计算力学大会, 2003 会议论文集, 2003. 456-463.
- [14] Hyuk- Chun, Hyo-Gyoung Kwak. Response variability due to randomness in Poisson' s ratio for plane-strain and plane-stress states, International Journal of Solid and Structures 43 (2006) 1093-1116.
- [15] G Falsone, N. Impollonia. A new approach for the stochastic analysis of finite element modeled structures with uncertain parameters. Comput. Methods. Appl. Mech. Engra. 191(2002) 5056-5085.
- [16] Ashby M F, Jones D R H. Engineering Materials 1: An Introduction to Their Properties and Application, Pergamon Press. 1980.
- [17] 郑泉水, 黄克智等. 世纪之交的力学—参加第 20 届国际理论与应用力学大会有感. 力学进展, 2001, 30(3):478-480.

- [18] 谢先海, 廖道训. 均匀化方法中等效弹性模量的计算. 华中科技大学学报, 2001. 44-46.
- [19] 刘书田, 程耿东. 复合材料应力分析的均匀化方法. 力学学报, 1997. 306-313.
- [20] 苑学众, 杨文成, 李殿起. 复合材料有效性能的宏细观尺度效应. 沈阳建筑工程学院学报(自然科学版), 2001. 180-181.
- [21] 刘书田, 郑新广, 程耿东. 特定弹性性能材料的细观结构设计优化. 复合材料学报, 2001. 124-127.
- [22] 刘书田. 复合材料热弹性分析与优化设计, 博士论文, 1996.
- [23] Christensen R M, Lo K H. Solutions for effective shear properties in three sphere and cylinder models[J]. J. Mech. Phys. Solids, 1979, 27(4):315-330.
- [24] G. L. Povirk. Incorporation of microstructural information into models of tow-phase materials. Acta metal mater, 1995, 43(8):3199-3206.
- [25] Gusev A A. Representative volume element size for elastic composites: a numerical study, J. Mech. Phys. Solids, 45(9):1449-1459.
- [26] 刘光廷, 王宗敏. 用随机骨料模型数值模拟混凝土材料的断裂. 清华大学学报(自然科学版), 1996, 36(1):84-89.
- [27] Z. M. Wang, A. K. H. Kwan, H. C. Chan. Mesoscopic study of concrete I: generation of random aggregate structure and finite element mesh. Computers and Structures, 1999, 58, 533-544.
- [28] 高政国, 刘光廷. 二维混凝土随机骨料模型研究. 清华大学学报(自然科学版), 2003, 43(5)710-714.
- [29] 李友云, 崔俊芝. 具有大量椭圆颗粒孔洞随机分布区域的计算机模拟及其改进三角形自动网格生成算法. 计算力学学报, 2004, 21(5):540-545.
- [30] 郑建军, 周欣竹, 刘彦青. 混凝土骨料二维分布的模拟和应用. 水利学报, 2003, 7:80-84.
- [31] 高巧红, 复合材料设计有限元网格模型的自动生成, 硕士论文, 2005.
- [32] 权高峰, 柴东朗, 宋余九等. 增强体种类及含量对金属基复合材料力学性能的影响[J]. 复合材料学报, 1999, 16(2)62-66.
- [33] 罗兵辉, 柏振海. SiC 增强颗粒含量对 6066 铝合金组织及力学性能的影响[J]. 轻合金加工技术, 2001, 29(8)42-46.
- [34] Kiser M T, Zok F W, Wilkinson D S. Plastic flow and fracture of particulate metal matrix composite [J]. Acta Mater, 1996, 44(9):3465-3476.
- [35] 冯西桥, 余寿文. 复合材料中颗粒相形状对有效模量的影响 (I), 清华大学学报(自然科学版), 2001, Vol 41 No. 11.
- [36] 冯西桥, 余寿文. 复合材料中颗粒相形状对有效模量的影响 (II), 清华大学学报(自然科学版), 2001, Vol 41 No. 11.
- [37] 齐海波, 吕宝华, 王文华. 颗粒增强复合材料弹性模量的统计分析方法, 工程力学 增刊, 2001, 295-299.
- [38] 罗兵辉, 柏振海. SiC 增强颗粒含量对 6066 铝合金组织及力学性能的影响[J]. 轻合金加工技术, 2001, 29(8)42-46.
- [39] 李锐坚. 模型材料弹性波的尺度效应和环境效应, 石油地球物理勘探, 1994, 2.

- [40] 李国敏, 陈崇希. 空隙介质水动力弥散尺度效应的分形特征及弥散度初步估计, 地球科学-中国地质大学学报, 1995, 4.
- [41] 魏悦广, 王学峥, 武晓雷等. 微压痕尺度效应的理论和实验, 中国科学 A 辑, 2000, 11.
- [42] 胡雪蛟, 杜建华, 刘翔等. 多孔介质突破特性的尺度效应, 科学通报, 2001, 4.
- [43] 魏玉萍, 国海光, 刘化章. 化工过程中的多尺度效应, 浙江化工, 2002, 4.
- [44] P. R. Onck, E. W. Andrews, I. J. Gibson. Size effects in ductile cellular solid Part I: modeling, Mechanical Sciences, 2001, 43, 681-699.
- [45] 刘书田, 陈晓霞, 常崇义. 复合材料弹性性能尺度效应, 大连理工大学学报, 2004. 44(2): 200-205.
- [46] 常崇义. 复合材料粘弹性性能预测的多尺度算法与数值模拟, 2003 年 3 月, 硕士论文.
- [47] 庄守兵, 吴长春, 冯森林等. 基于均匀化方法的多孔材料细观力学特性数值研究, 材料科学与工程, 2001, Vol. 19 No. 4: 9-13.
- [48] Lemaitre J. Formulation and identification of damage kinetic constitutive equations. In: Krajcinovic D, Lemaitre J, eds. Continuum Damage Mechanics Theory and Applications. Wien-New-York: Springer-Verlag, 1987.
- [49] Ostoja-Starzewski M. Random field models of heterogeneous materials. Int J Solids and estimates of representative volume element size for elastic composites. J. Mech. Phys. of Solids, 1996, 44: 497-524.
- [50] Ren ZY, Zheng Q S. A quantitative study on minimum sizes of representative volume elements of cubic polycrystals-Mumerical experiments. J Mech Phys of Solids, 2001.
- [51] Drugan W J. Micromechanics-based variational estimates for a higher-order non-local constitutive equation and optimal choice of effective moduli of elastic composites [J]. J. Mech. Phys. Solids, 2000, 48: 1359-1387.
- [52] Drugan W J, Willis J R. A micromechanics-based non-local constitutive equation and estimates of the representative volume element size for elastic composites[J]. J. Mech. Phys. Solids, 1996, 44: 497-524.

攻读硕士学位期间参加工作的科研项目

1. 国家自然科学基金重点项目：超轻结构设计新理论，编号：10332010，2004—2007
2. 国家重点基础研究发展计划（973 计划）项目：超轻多孔材料与结构创新构型设计优化新理论，编号：2006CB601205，2006—2010

致 谢

在攻读硕士学位期间，曾得到很多老师、朋友、同学的关心和帮助，同时，也得到家人的大力支持，谨在本文即将完成之际，向他们表示衷心的感谢！

感谢我的导师刘书田教授，本文工作是在刘老师的悉心指导下完成的，所有的工作都包含着导师的心血和汗水。刘老师渊博的学识、严谨的治学态度、敏锐的提出和把握新问题的能力和诚挚正直的处事态度都给我留下了深刻的印象，使我受益匪浅。在此向恩师的辛勤培养和不倦教诲致以崇高的敬意和诚挚的谢意！

感谢陪我度过硕士学习生活的教研室的师兄姐妹们，谢谢你们对我学习过程中的帮助和启迪，感谢张永存、曹先凡、苏文政、许卫锴、刘鹏、高巧红、王晓明、张宗华等师兄们对本人科研工作的无私帮助！

感谢程耿东院士、李刚教授和杨迪雄老师对本文的学术指导，在每周的研讨会上程耿东院士、刘书田教授等老师们和同学们的讨论，使我视野开阔，培养了做科研工作的兴趣。衷心感谢课题组的全体同学对本工作的有益的建议和启迪！

感谢父母对我的养育之恩和无私的奉献，感谢父母和妹妹对我学业的支持和鼓励！

谨以本文向给予我关心、支持和帮助的老师、同学、家人和亲朋好友们致以深深的谢意，感谢你们，祝你们一生幸福！

侯善祥

2006年6月于大连理工大学