（一）

1，（1）$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 6\times12 - 8\times9 = 0$

（2）$\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos(x)\times\cos(x) - (-\sin(x)\times\sin(x)) = 1$

（3）$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix} = (x-1)\times(x^2+x+1) - x^2 = x^3+x^2+x-x^2-x-1-x^2$

$= x^3 - x^2 - 1$

（4）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1 + 2\times2\times2 + 3\times3\times3 - 2\times1\times3 - 3\times2\times1 - 1\times3\times2$

$= 1+8+27-6-6-6 = 18$

也可化简为上三矩阵角或者按某一行（列）展开。

（5）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - c^3 - a^3 - b^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

（6）$\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 3$

2，（1）$\tau(1726354) = 0+5+0+3+0+1=9$，为奇排列. 例如和式的第二项 5 表示与排列中第二项 7 构成逆序的数，也就是 7 后面比 7 小的数的个数。

（2）$\tau(985467321) = 8+7+4+3+3+3+2+1=31$，为奇排列.

（3）$\tau((2n+1)(2n-1)\cdots531) = n + n-1 + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ 当 $n = 4k+1, 4k+2$ 时为奇排列，否则为偶排列。

3，在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 共有 C_n^2 个数对，逆序数为 s，故顺序数为 $C_n^2 - s$ 个。但在排列 $a_n a_{n-1} \cdots a_1$ 中将排列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 中的逆序数变为顺序数，顺序数变为逆序数，故排列 $a_n a_{n-1} \cdots a_1$ 的逆序数为 $C_n^2 - s$ 个。（(a_i, a_j) 变为 (a_j, a_i)　）。

4，（1）当 $i=3, k=8$ 时　$\tau(127435689) = 0+0+4+1+0+0+0+0=5$ 为奇排列，交换顺序排列改变奇偶性，故当 $i=8, k=3$ 时排列为偶排列。

（2）当 $i=3,k=6$ 时　$\tau(132564897)=0+1+0+1+1+1+1+1+0=5$ 为奇排列，交换顺序排列改变奇偶性，故当 $i=6,k=3$ 时排列为偶排列。

5，含 a_{23} 的所有项为 $(-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$、$(-1)^{\tau(1342)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$、$(-1)^{\tau(2314)}a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$、$(-1)^{\tau(2341)}a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$、$(-1)^{\tau(4312)}a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$、$(-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，

$\because \tau(1324)=1,\tau(1342)=2,\tau(2314)=2,\tau(2341)=3,\tau(4312)=5,\tau(4321)=6$，

$\therefore$ 所有包含 a_{23} 并带负号的项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41},-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

6，

（1）
$$\begin{vmatrix}5&0&0&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&0&4\\0&2&0&0&0\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_5,r_4\leftrightarrow r}\begin{vmatrix}5&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&4\end{vmatrix}=120$$

（2）
$$\begin{vmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&2&7&0\\0&3&8&0&0\\4&9&12&-5&0\\10&11&10&7&-5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第五列展开}}(-1)^{5+5}(-5)\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&7\\0&3&8&0\\4&9&12&-5\end{vmatrix}=-5!$$

（3）
$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&0&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第四五行展开}}(-1)^{(4+5)+(1+2)}\begin{vmatrix}a_{41}&a_{42}\\a_{51}&a_{52}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{23}&a_{24}&a_{25}\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

（4）
$$\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&n\\0&2&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第}a_{n2}\text{展开}}(-1)^{n+2}\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&n\end{vmatrix}=(-1)^{n+2}n!$$

7，（1）

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)+x^2y^2z^2+x^2y^2z^2-x^2z^2\left(y^2+1\right)-x^2y^2\left(z^2+1\right)-y^2z^2\left(x^2+1\right)$$

$$=1+x^2+y^2+z^2.$$

（2）第二、三行都加到第一行，从第一行中提出 $2(x+y)$ 即得：

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)[-x^2+y(x-y)]--2(x^3+y^3)$$

（3）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{并取公因子}]{r_1+r_2+r_3+r_4\to r_1} 10\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各列减第一列}} 10\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} (-1)^{1+1}10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各行减第一行}} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第三列展开}} (-1)^{1+3}10(-1)\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix}=160$$

（4）

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_2-c_1\to c_2]{\substack{c_4-c_3\to c_4 \\ c_3-c_2\to c_3}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_2\to c_3]{c_4-c_3\to c_4} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

（5）

$$\begin{vmatrix}0&2&3&4&5\\1&0&3&4&5\\1&2&0&4&5\\1&2&3&0&5\\1&2&3&4&0\end{vmatrix}\underline{\underline{\begin{matrix}r_5-r_4\to r_5\\r_4-r_3\to r_4\\r_3-r_2\to r_3\\r_2-r_1\to r_2\end{matrix}}}\begin{vmatrix}0&2&3&4&5\\1&-2&0&0&0\\0&2&-3&0&0\\0&0&3&-4&0\\0&0&0&4&-5\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按第二列展开}}}$$

$$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3&4&5\\2&-3&0&0\\0&3&-4&0\\0&0&4&-5\end{vmatrix}\underline{\underline{r_2-r_1\to r_2}}-\begin{vmatrix}2&3&4&5\\0&-6&-4&-5\\0&3&-4&0\\0&0&4&-5\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按第一列展开}}}$$

$$-2\begin{vmatrix}-6&-4&-5\\3&-4&0\\0&4&-5\end{vmatrix}\underline{\underline{r_1+2r_2\to r_1}}-2\begin{vmatrix}0&-12&-5\\3&-4&0\\0&4&-5\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}-12&-5\\4&-5\end{vmatrix}=480$$

（6）

$$\begin{vmatrix}a+1&0&0&0&a+2\\0&a+5&0&a+6&0\\0&0&a+9&0&0\\0&a+7&0&a+8&0\\a+3&0&0&0&a+4\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}(a+9)\begin{vmatrix}a+1&0&0&a+2\\0&a+5&a+6&0\\0&a+7&a+8&0\\a+3&0&0&a+4\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}(a+9)(-1)^{(2+3)+(2+3)}\begin{vmatrix}a+5&a+6\\a+7&a+8\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a+1&a+2\\a+3&a+4\end{vmatrix}$$

$$=(a+9)[(a+5)(a+8)-(a+6)(a+7)][(a+1)(a+4)-(a+2)(a+3)]=4(a+9)$$

8，（1）

$$f(x)=\begin{vmatrix}2&2&-1&3\\4&x^2-5&-2&5\\-3&2&-1&x^2+1\\3&-2&1&-2\end{vmatrix}\underline{\underline{\begin{matrix}r_2-2r_1\to r_2\\r_2-r_1\to r_3\\r_2+r_1\to r_4\end{matrix}}}\begin{vmatrix}2&2&-1&3\\0&x^2-9&0&-1\\-5&0&0&x^2-2\\5&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{按第三列展开}}}(-1)^{1+3}(-1)\begin{vmatrix}0&x^2-9&-1\\-5&0&x^2-2\\5&0&1\end{vmatrix}\underline{\underline{r_2+r_3\to r_2}}-\begin{vmatrix}0&x^2-9&-1\\0&0&x^2-1\\5&0&1\end{vmatrix}$$

$=-5(x^2-9)(x^2-1)$　故解为$x=\pm3,\pm1.$

（2）

$$f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 4 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3\\ 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3\\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3\end{vmatrix}$$

$$=(2-(-1))(2-1)(2-x)(-1-1)(-1-x)(1-x)=6(x+1)(x-1)(x-2)$$

故解为 $x=-1,1,2$

9， $D=-1\times 5+2\times 3+0\times(-7)+1\times 4=5$

10， $D=-1\times(-5)+2\times 3+0\times 7+1\times 4=15$

11，

$$M_{41}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=17,M_{42}=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-5,M_{43}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-4,M_{44}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=14$$

$$A_{41}=-M_{41},A_{42}=-M_{42},A_{43}=-M_{43},A_{44}=M_{44}$$

故： $4M_{42}+2M_{43}+2M_{44}=0,A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=-4$

也可按行列式的性质将上两式构成行列式来求：

$$4M_{42}+2M_{43}+2M_{44}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 2 & 2\end{vmatrix},$$

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=-M_{41}+M_{42}-M_{43}+M_{44}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

12，（1）

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}\xlongequal[i=3,4,\cdots,n]{\substack{r_1+(-1)r_2\to r_1\\ r_i+(-1)r_2\to r_i}}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=-2(n-2)!.$$

（2）

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}c_i\to c_1}\begin{vmatrix}1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}&1&1&\cdots&1\\0&2&0&\cdots&0\\0&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}=(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i})n!$$

（3）

$$\begin{vmatrix}1+x&2&\cdots&n-1&n\\1&2+x&\cdots&n-1&n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&2&\cdots&(n-1)+x&n\\1&2&\cdots&n-1&n+x\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+\sum_{i=2}^{n}c_i\to c_1}\begin{vmatrix}x+\frac{n(n+1)}{2}&2&\cdots&n-1&n\\x+\frac{n(n+1)}{2}&2+x&\cdots&n-1&n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\x+\frac{n(n+1)}{2}&2&\cdots&(n-1)+x&n\\x+\frac{n(n+1)}{2}&2&\cdots&n-1&n+x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i-r_1(i=2\cdots n)}\begin{vmatrix}x+\frac{n(n+1)}{2}&2&\cdots&n-1&n\\0&x&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&x&0\\0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}=x+\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}x&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&x&0\\0&\cdots&0&x\end{vmatrix}=(x+\frac{n(n+1)}{2})x^{n-1}$$

（4）

$$\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{并提取公因子}]{c_1+c_2+\cdots+c_3\to c_1}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&3&4&\cdots&n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=n,\cdots,2)]{r_i-r_{i-1}}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\0&1&1&\cdots&1&1-n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&1&1-n&\cdots&1&1\\0&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1-n&1&\cdots&1&1\\1-n&1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{n-1}\to c_1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{c_i+c_1\to c_i}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=-(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{n-2}(-1)^{\frac{(n-3)(n-2)}{2}}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n+1}{2}n^{n-1}$$

（5）

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}\xlongequal{r_i-r_{i-1}(i=n,n-1,\cdots 2)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{第}n\text{列展开}}(-1)^{n+1}n\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}n$$

（6）

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一列展开}}x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}=x^n+(-1)^{n+1}y^n$$

13，（1）

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明： 第二列乘以 $(-x)$ 加到第一列得

$$D = \begin{vmatrix} (1-x^2)a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ (1-x^2)a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ (1-x^2)a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{c_2+(-x)c_1 \to c_2}}\,(1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

（2）

$$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} .$$

证明： 用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -1 \\ a_2 & x \end{vmatrix} = a_1x+a_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k x^{2-k}$，命题成立.

假设对于 $(n-1)$ 阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^{n-1-k},$$

则 D_n 按最后一行展开，有

$$D_n = (-1)^{n+1}a_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & -1 \end{vmatrix} + xD_{n-1}$$

$$= (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1} + x\sum_{k=1}^{n-1} a_k x^{n-1-k}$$

$$= a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^{n-k}$$

$=\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}$，

因此，对于n阶行列式命题成立.

（3）

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha .$$

证明： 用数学归纳法证明.

当$n=1$时，$D_1=\cos\alpha$，命题成立.

假设对于$n-1$阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha，，$$

则D_n按最后一列展开，有

$$D_n=(-1)^{n+n-1}\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}+2\cos\alpha D_{n-1}$$

$=2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-D_{n-2}$

$=2\bullet\dfrac{1}{2}\left[\cos n\alpha+\cos(n-2)\alpha\right]-\cos(n-2)\alpha$

$=\cos n\alpha$，

因此，对于n阶行列式命题成立.

（4）

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1\to r_2 \\ r_3-r_1\to r_3 \\ r_4-r_1\to r_4 \\ \cdots}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因子}]{\text{提取}} a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & \frac{1}{a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n\to c_1} a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\begin{vmatrix} 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_{n-2}} & \frac{1}{a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$=a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$.（也可按把最后一列分开来证）。

（5）

$$\begin{vmatrix} a^n & (a+1)^n & (a+2)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & (a+2)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^2 & a+1 & a+2 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a+1 & a+2 & \cdots & a+n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & (a+2)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ a^n & (a+1)^n & (a+2)^n & \cdots & (a+n)^n \end{vmatrix}$$

$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(a+n)-(a+n-1)]\cdots[a+n-a]\cdots[(a+2)-(a+1)][a+2-a][a+1-a]$

$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}2!3!\cdots n!$

14，（1）方程的系数行列式为：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-27$$ 故原方程有唯一解，又

$$D_1=\begin{vmatrix} 31 & 2 & 4 \\ 29 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-81, D_2=\begin{vmatrix} 1 & 31 & 4 \\ 5 & 29 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}=-108, D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 31 \\ 5 & 1 & 29 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix}=-135$$

所以方程的解为：$x_1=\dfrac{D_1}{D}=3, x_2=\dfrac{D_2}{D}=4, x_3=\dfrac{D_3}{D}=5.$

（2）方程的系数行列式为：

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & a & 3 \\ -3 & 3 & a \end{vmatrix}=a(a^2-9)$$ 当 $a\neq 0,\pm 3$时，$D\neq 0$原方程有唯一解，此时

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}=(a-3)(a+1), D_2=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & a \end{vmatrix}=a^2-6a-3, D_3=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=a^2+3$$

方程的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{(a+1)(a-3)}{a(a^2-9)}=\frac{(a+1)}{a(a+3)}, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-6a-3}{a(a^2-9)}, x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{a^2+3}{a(a^2-9)}.$$

（3）方程组的系数行列式为：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=27\neq 0$$

所以方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81, \quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27, \quad D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27,$$

故可得解为

$x_1=\dfrac{D_1}{D}=3$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=-4$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1$，$x_4=\dfrac{D_4}{D}=1$.

（4）方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=63\neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}1&2&0&0&0\\0&3&2&0&0\\0&1&3&2&0\\0&0&1&3&2\\0&0&0&1&3\end{vmatrix}=31,\ D_2=\begin{vmatrix}3&1&0&0&0\\1&0&2&0&0\\0&0&3&2&0\\0&0&1&3&2\\0&0&0&1&3\end{vmatrix}=-15,\ D_3=\begin{vmatrix}3&2&1&0&0\\1&3&0&0&0\\0&1&0&2&0\\0&0&0&3&2\\0&0&0&1&3\end{vmatrix}=7,$$

$$D_4=\begin{vmatrix}3&2&0&1&0\\1&3&2&0&0\\0&1&3&0&0\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&3\end{vmatrix}=-3,\ D_5=\begin{vmatrix}3&2&0&0&1\\1&3&2&0&0\\0&1&3&2&0\\0&0&1&3&0\\0&0&0&1&0\end{vmatrix}=1,$$

故可得解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{31}{63},\ x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{5}{21},\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{9},\ x_4=\frac{D_4}{D}=-\frac{1}{21},\ x_5=\frac{D_5}{D}=\frac{1}{63}.$$

（5）方程组的系数行列式为：

$$D=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&1&1&1&1\\4&0&1&1&1\\4&1&0&1&1\\4&1&1&0&1\\4&1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&1&1&1&1\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{vmatrix}=4\neq 0$$

故方程组有唯一解，又

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\2&0&1&1&1\\3&1&0&1&1\\4&1&1&0&1\\5&1&1&1&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{各行减第一行}}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&-1&0&0&0\\2&0&-1&0&0\\3&0&0&-1&0\\4&0&0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{所有行加到第一行}}\begin{vmatrix}11&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0\\2&0&-1&0&0\\3&0&0&-1&0\\4&0&0&0&-1\end{vmatrix}=11$$

$$D_2=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&3&0&1&1\\1&4&1&0&1\\1&5&1&1&0\end{vmatrix}=7\text{（各行减第一行再按第一行展开）}$$

$$D_3=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&2&1&1\\1&1&3&1&1\\1&1&4&0&1\\1&1&5&1&0\end{vmatrix}=3，D_4=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&2&1\\1&1&0&3&1\\1&1&1&4&1\\1&1&1&5&0\end{vmatrix}=-1，D_5=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&2\\1&1&0&1&3\\1&1&1&0&4\\1&1&1&1&5\end{vmatrix}=-5$$

故可得解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{11}{4}，\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{7}{4}，\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{3}{4}，\ x_4=\frac{D_4}{D}=-\frac{1}{4}，\ x_5=\frac{D_5}{D}=-\frac{5}{4}.$$

15，当方程组的系数行列式为零是才有非零解：

（1）系数行列式为：

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda-4)(\lambda+1)$$

故当 $\lambda=-1,4$ 时方程组有非零解。

（2）移项整理后得系数行列式为：

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&0\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2-2(1-\lambda)=\lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$$

故当 $\lambda=0,1,3$ 时方程组有非零解。

（3）系数行列式为：

$$\begin{vmatrix}5-\lambda&-4&-7\\-6&7-\lambda&11\\6&-6&-(10+\lambda)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda&-4&-7\\-6&7-\lambda&11\\0&1-\lambda&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda&3&-7\\-6&-4-\lambda&11\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)[(5-\lambda)(-4-\lambda)+18]=(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

故当 $\lambda=-1,1,2$ 时方程组有非零解。

16，证明：因为方程租的系数行列式为：

$$\begin{vmatrix}a&b&c&d\\b&-a&d&-c\\c&-d&-a&b\\d&c&-b&-a\end{vmatrix}=-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2，$$

而 a,b,c,d 为不全为零的实数，故系数行列式不等于零。从而由克莱姆法则得所给的方程组只有零解。

17，行列式所代表的方程为：

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & x_1 - x & y_1 - y \\ 0 & x_2 - x & y_2 - y \end{vmatrix} = (x_1 - x)(y_2 - y) - (x_2 - x)(y_1 - y) = 0$$

该方程代表一直线方程，且显然经过(x_1, y_1)与(x_2, y_2)两点，而经过两不同点的直线有且只有一条，故经过这两点的直线的为$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$。

18，令$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，由$f(-1) = 0$，$f(1) = 4$，$f(2) = 3$，$f(3) = 16$知

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 0 \\ a + b + c + d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ 27a + 9b + 3c + d = 16 \end{cases}$$

方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 48 \neq 0,$$

所以方程组有唯一解. 又

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 16 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 96,\quad D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \\ 27 & 16 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -240,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 3 & 1 \\ 27 & 9 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 0,\quad D_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 2 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 336,$$

故可得解为

$$a = \frac{D_1}{D} = 2,\quad b = \frac{D_2}{D} = -5,\quad c = \frac{D_3}{D} = 0,\quad d = \frac{D_4}{D} = 7,$$

即$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$

（二）

19，（1）

$$\begin{vmatrix}2&1&4&3&5\\3&4&0&5&0\\3&4&5&2&1\\1&5&2&4&3\\4&6&0&7&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第二、五行展开}}(-1)^{(2+5)+(1+2)}\begin{vmatrix}3&4\\4&6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4&3&5\\5&2&1\\2&4&3\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(2+5)+(1+4)}\begin{vmatrix}3&5\\4&7\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&4&5\\3&5&1\\5&2&3\end{vmatrix}+(-1)^{(2+5)+(2+4)}\begin{vmatrix}4&5\\6&7\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&4&5\\3&5&1\\1&2&3\end{vmatrix}$$

$$=2\times49+1\times(-100)+(-1)\times(-2)\times(-1)=-4$$

（2）

$$\begin{vmatrix}1&1&1&0&0\\1&2&3&0&0\\0&1&1&1&1\\0&x_1&x_2&x_3&x_4\\0&x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}\xlongequal[\text{二行展开}]{\text{按第一、}}(-1)^{(1+2)+(1+2)}\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_2&x_3&x_4\\x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}+(-1)^{(1+2)+(1+3)}\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_3&x_4\\x_1^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}$$

$$=1(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_3-x_2)-2(x_4-x_3)(x_4-x_1)(x_3-x_1)$$

$$=(x_4-x_3)[(x_4-x_2)(x_3-x_2)-2(x_4-x_1)(x_3-x_1)]$$

（3）

$$\begin{vmatrix}n&0&\cdots&0&0&\cdots&0&n+2\\0&n-1&\cdots&0&0&\cdots&n+1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&⋰&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&3&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&2&4&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&⋰&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&n&\cdots&0&0&\cdots&n+2&0\\n+1&0&\cdots&0&0&\cdots&0&n+3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第}n,n+1\text{行展开}}$$

$$(-1)^{[n+(n+1)][n+(n+1)]}\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}n&0&\cdots&0&0&\cdots&0&n+2\\0&n-1&\cdots&0&0&\cdots&n+1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&⋰&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&4&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&3&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&⋰&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&n&\cdots&0&0&\cdots&n+2&0\\n+1&0&\cdots&0&0&\cdots&0&n+3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第}n-1,n\text{行展开}}$$

$$\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&4\\3&5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}n&0&\cdots&0&0&\cdots&0&n+2\\0&n-1&\cdots&0&0&\cdots&n+1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&⋰&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&3&5&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&4&6&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&⋰&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&n&\cdots&0&0&\cdots&n+2&0\\n+1&0&\cdots&0&0&\cdots&0&n+3\end{vmatrix}=\cdots=$$

$$\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&4\\3&5\end{vmatrix}\cdots\begin{vmatrix}n&n+2\\n+1&n+3\end{vmatrix}=(-2)^n$$

20，（1）

$$D_n=\begin{vmatrix}7&5&0&\cdots&0&0\\2&7&5&\cdots&0&0\\0&2&7&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&7&5\\0&0&0&\cdots&2&7\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第一行展开}}7\begin{vmatrix}7&5&\cdots&0&0\\2&7&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&7&5\\0&0&\cdots&2&7\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2&5&\cdots&0&0\\0&7&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&7&0\\0&0&\cdots&2&7\end{vmatrix}$$

$$=7D_{n-1}-10D_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n-7D_{n-1}+10D_{n-2}=0\Rightarrow D_n-2D_{n-1}-5D_{n-1}+2\times5D_{n-2}=0$$

$$\Rightarrow D_n-2D_{n-1}=5(D_{n-1}-2D_{n-2})=\cdots=5^{n-2}(D_2-2D_1)=5^{n-2}5^2=5^n$$

若按第一列展开，类似上面做法可以得到：

$$D_n-5D_{n-1}=2(D_{n-1}-5D_{n-2})=\cdots=2^{n-2}(D_2-5D_1)=2^{n-2}2^2=2^n$$

由以上两式可以得到：

$$D_n=\frac{5^{n+2}-2^{n+1}}{3}$$

（2）

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\\x_1^n&x_2^n&x_3^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$$ 加入一行一列，构成范德蒙行列式即：

$$D_{n+1}(y)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n&y\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2&y^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}&y^{n-2}\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}&y^{n-1}\\x_1^n&x_2^n&x_3^n&\cdots&x_n^n&y^n\end{vmatrix}=(y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod_{i<j}^{n}(x_j-x_i)$$

D_n 为多项式 $D_{n+1}(y)$ 中 y^{n-1} 的系数的相反数，有上式右端知 y^{n-1} 的系数为：

$$-\sum_{i=1}^{n}x_i\prod_{i<j}^{n}(x_j-x_i)$$

$$\therefore D_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\prod_{i<j}^{n}(x_j-x_i)$$

（3）将第一列分成两列：

$$D_n=\begin{vmatrix}a_n&x&x&\cdots&x\\y&a_{n-1}&x&\cdots&x\\y&y&a_{n-2}&\cdots&x\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\y&y&y&\cdots&a_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_n-y&x&x&\cdots&x\\0&a_{n-1}&x&\cdots&x\\0&y&a_{n-2}&\cdots&x\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&y&y&\cdots&a_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y&x&x&\cdots&x\\y&a_{n-1}&x&\cdots&x\\y&y&a_{n-2}&\cdots&x\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\y&y&y&\cdots&a_1\end{vmatrix}$$

$$=(a_n-y)D_{n-1}+\begin{vmatrix}y&x&x&\cdots&x\\0&a_{n-1}-x&0&\cdots&0\\0&y-x&a_{n-2}-x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&y-x&y-x&\cdots&a_1-x\end{vmatrix}(\text{各行减第一行})$$

$$=(a_n-y)D_{n-1}+y\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-x)$$

由对称性知：$D_n=(a_n-x)D_{n-1}+x\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-y)$

由以上两式可以解得：$D_n=\dfrac{y\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)-x\prod_{i=1}^{n}(a_i-y)}{y-x}$

（4）当 $n=2$ 时：

$$D_2=\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_2+b_1\\a_1+b_2&a_2+b_2\end{vmatrix}=(a_1-a_2)(b_1-b_2)$$

法一： 当$n>2$时：

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_1 & \cdots & a_n+b_1 \\ a_1+b_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1+b_n & a_2+b_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} 1 & a_2+b_1 & \cdots & a_n+b_1 \\ 1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2+b_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2+b_1 & \cdots & a_n+b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_2+b_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} 1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ 1 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b_n & \cdots & b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_2 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0+0=0$$

法二：

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_1 & \cdots & a_n+b_1 \\ a_1+b_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1+b_n & a_2+b_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

21，（1）加边

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix} \underset{(i=2,3,\cdots,n)}{\overset{r_i-r_1\to r_i}{=\!=\!=\!=}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & x_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \overset{c_1+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_{i+1}}{x_i-a_i}\to c_1}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & x_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & x_2-a_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & x_3-a_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\prod_{i=1}^{n}x_i-a_i$$

（2）加边

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} \underset{(i=2,\cdots,n+1)}{\overset{c_i-c_1\to c_i}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_2 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{拆分第一行}}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_2 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_2 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= 2x_1x_2\cdots x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - \prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\prod_{i<j} x_j - x_i$$

$$= (2\prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n}(x_i-1))\prod_{i<j} x_j - x_i$$

（3）

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ a_3^n & a_3^{n-1}b_3 & a_3^{n-2}b_3^2 & \cdots & a_3b_3^{n-1} & b_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix} = a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & (\frac{b_1}{a_1})^2 & \cdots & (\frac{b_1}{a_1})^{n-1} & (\frac{b_1}{a_1})^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & (\frac{b_2}{a_2})^2 & \cdots & (\frac{b_2}{a_2})^{n-1} & (\frac{b_2}{a_2})^n \\ 1 & \frac{b_3}{a_3} & (\frac{b_3}{a_3})^2 & \cdots & (\frac{b_3}{a_3})^{n-1} & (\frac{b_3}{a_3})^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^2 & \cdots & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^{n-1} & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^n \end{vmatrix}$$

$$= a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \prod_{i<j}(\frac{b_j}{a_j} - \frac{b_i}{a_i}) = \prod_{i<j}(a_ib_j - a_jb_i)$$

22，方程组的系数行列式为：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(a_j - a_i),$$ 将第 m 列换为 $(1, b, b^2, \cdots, b^{n-1})$ 得

$$D_m=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&b&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&b^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&b^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=(a_n-b)\cdots(a_{m+1}-b)(b-a_{m-1})\cdots(b-a_1)\prod_{\substack{i<j\\i,j\neq m}}(a_j-a_i)$$

$$\therefore x_m=\frac{D_m}{D}=\frac{(a_n-b)\cdots(a_{m+1}-b)(b-a_{m-1})\cdots(b-a_1)}{(a_n-a_m)\cdots(a_{m+1}-a_m)(a_m-a_{m-1})\cdots(a_m-a_1)}$$

23，令

$$A=\begin{vmatrix}x^2&x&1&y\\x_1^2&x_1&1&y_1\\x_2^2&x_2&1&y_2\\x_3^2&x_3&1&y_3\end{vmatrix}$$

设抛物线方程为 $y=ax^2+bx+c$，由抛物线过 $(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 得

$$\begin{cases}y_1=ax_1^2+bx_1+c\\y_2=ax_2^2+bx_2+c\\y_3=ax_3^2+bx_3+c\end{cases}$$

当把 a,b,c 视为未知数，根据克莱姆法则求解（ A_{ij} 表示 a_{ij} 的代数余子式）：

$$D=\begin{vmatrix}x_1^2&x_1&1\\x_2^2&x_2&1\\x_3^1&x_3&1\end{vmatrix}=-A_{14},D_1=\begin{vmatrix}y_1&x_1&1\\y_2&x_2&1\\y_3&x_3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}=A_{11}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}x_1^2&y_1&1\\x_2^2&y_2&1\\x_3^1&y_3&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}y_1&x_1^2&1\\y_2&x_2^2&1\\y_3&x_3^1&1\end{vmatrix}=A_{12},D_3=\begin{vmatrix}x_1^2&x_1&y_1\\x_2^2&x_2&y_2\\x_3^1&x_3&y_3\end{vmatrix}=A_{13}$$

$\Rightarrow a=\dfrac{D_1}{D}=-\dfrac{A_{11}}{A_{14}},b==\dfrac{D_2}{D}=-\dfrac{A_{12}}{A_{14}},c==\dfrac{D_3}{D}=-\dfrac{A_{13}}{A_{14}}$，代入抛物线方程：

$$y=-\frac{A_{11}}{A_{14}}x^2-\frac{A_{12}}{A_{14}}x-\frac{A_{13}}{A_{14}}\Rightarrow A_{11}x^2+A_{12}x+A_{13}+A_{14}y=0\text{，即 }A=0.$$

24，必要性：

设三直线交于一点 (x_0,y_0)，则 $\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\1\end{bmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的非零解，其中 $A=\begin{bmatrix}a&2b&3c\\b&2c&3a\\c&2a&3c\end{bmatrix}$

于是 $|A|=0$

而$|A|=\begin{vmatrix} a & 2b & 3c \\ b & 2c & 3a \\ c & 2a & 3c \end{vmatrix}=-6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

但根据题设$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故$a+b+c=0$

充分性：

考虑线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c \\ bx+2cy=-3a \\ cx+2ay=-3b \end{cases} \qquad (*)$$

将方程组(*)的三个方程相加，并由$a+b+c=0$可知，方程组(*)等价于方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c \\ bx+2cy=-3a \end{cases} \qquad (**)$$

因为$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-2[(a+\frac{1}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2]\neq 0$

故方程组(**)有惟一解所以方程组(*)有惟一解，即三直线l_1,l_2,l_3交于一点。

1. $A+B=\begin{pmatrix}2&4&1\\0&3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&1\\3&8&2\end{pmatrix}$,

$B-C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&5&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\3&6&-1\end{pmatrix}$,

$2A-3C=2\begin{pmatrix}2&4&1\\0&3&2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&2\\0&9&1\end{pmatrix}$.

2. 由$3A-2X=B$可得

$$X=\frac{1}{2}(3A-B)=\frac{1}{2}\left(3\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&2&1\\3&4&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&1&1\\2&1&1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}8&3&-2\\-2&5&2\\7&11&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&\frac{3}{2}&-1\\-1&\frac{5}{2}&1\\\frac{7}{2}&\frac{11}{2}&\frac{5}{2}\end{bmatrix}.$$

3. 由$\begin{pmatrix}a+2b&2a-b\\2c+d&c-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\4&-3\end{pmatrix}$可得，

$$\begin{cases}a+2b=4\\2a-b=-2\\2c+d=4\\c-2d=-3\end{cases}$$

解方程组可得$a=0,b=2,c=1,d=2$.

4. 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，当$kA=O$时，由零矩阵定义，有$ka_{ij}=0$，则$k=0$或$a_{ij}=0$，

即$k=0$或$A=O$.

5.（1）$\begin{bmatrix}3&2\\-1&4\\5&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&8&-1\\2&0&3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot1+2\cdot2&3\cdot8+2\cdot0&3\cdot(-1)+2\cdot3\\-1\cdot1+4\cdot2&-1\cdot8+4\cdot0&-1\cdot(-1)+4\cdot3\\5\cdot1+1\cdot2&5\cdot8+1\cdot0&5\cdot(-1)+1\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&24&3\\7&-8&13\\7&40&-2\end{bmatrix}$.

（2）$\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&4&2\\7&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+3\cdot(-2)-1\cdot3\\0\cdot1+4\cdot(-2)+2\cdot3\\7\cdot1+0\cdot(-2)+1\cdot3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\-2\\10\end{bmatrix}$.

（3）$\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\3\end{bmatrix}(3\quad 2\quad -1\quad 0)=\begin{bmatrix}1\cdot3&1\cdot2&1\cdot(-1)&1\cdot0\\-1\cdot3&-1\cdot2&-1\cdot(-1)&-1\cdot0\\2\cdot3&2\cdot2&2\cdot(-1)&2\cdot0\\3\cdot3&3\cdot2&3\cdot(-1)&3\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&-1&0\\-3&-2&1&0\\6&4&-2&0\\9&6&-3&0\end{bmatrix}$.

（4）$(1\quad 3\quad 2)\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\left(1\cdot1+3\cdot2+2\cdot(-1)\right)=(5)$.

（5）$(1\quad -1\quad 2)\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\1&0&-1\end{bmatrix}=\left(1\cdot2-1\cdot1+2\cdot1\quad 1\cdot(-1)-1\cdot1+2\cdot0\quad 1\cdot0-1\cdot3+2\cdot(-1)\right)$

$=(3\quad -2\quad -5)$.

（6）

$$(x\quad y\quad 1)\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{12}&a_{22}&b_2\\b_1&b_2&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\left(a_{11}x+a_{12}y+b_1\quad a_{12}x+a_{22}y+b_2\quad b_1x+b_2y+c\right)\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

$=\left((a_{11}x+a_{12}y+b_1)x+(a_{12}x+a_{22}y+b_2)y+(b_1x+b_2y+c)\right)$

$=\left(c+2b_1x+2b_2y+a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2\right)$.

6. $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$,

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix}$,

因此，我们猜测 $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{pmatrix}$，下面用归纳法证明：

当 $n=1$ 时成立；
假设当 $n-1$ 时成立，则

$$A^n=A^{n-1}A=\begin{pmatrix}1&0\\(n-1)\lambda&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\(n-1)\lambda+\lambda&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{pmatrix},$$

因此 $A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n\lambda&1\end{pmatrix}$.

7.（1）设 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$,

则 $A^2=\begin{pmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta\end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix}\cos3\theta&-\sin3\theta\\\sin3\theta&\cos3\theta\end{pmatrix}$,

因此，我们猜测 $A^n=\begin{pmatrix}\cos n\theta&-\sin n\theta\\\sin n\theta&\cos n\theta\end{pmatrix}$，下面用归纳法证明：

当 $n=1$ 时成立；

假设当 $n-1$ 时成立，则

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta\cos\theta - \sin(n-1)\theta\sin\theta & -\cos(n-1)\theta\sin\theta - \sin(n-1)\cos\theta \\ \sin(n-1)\cos\theta + \theta\cos(n-1)\theta\sin\theta & -\sin(n-1)\theta\sin\theta + \cos(n-1)\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix},$$

因此 $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$.

（2）设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$，则 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

所以 $A^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$， $A^{2k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$，

即 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2-2(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 0 & -1+2(-1)^n & -1+(-1)^n \\ 0 & 2-2(-1)^n & 2-(-1)^n \end{bmatrix}$.

（3）设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，则

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E_4,$$

所以 $A^{2k} == 4^k E_4$， $A^{2k+1} = 4^k \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

（4）

$$(\alpha\beta^T)=\underbrace{\alpha\beta^T\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T}_{n}=\alpha\,\underbrace{\beta^T\alpha\beta^T\alpha\cdots\beta^T\alpha}_{n-1}\,\beta^T=\alpha(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^{n-1}\beta^T$$

$$=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^{n-1}\alpha\beta^T=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^{n-1}\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}$$

8，（1）设矩阵 $B=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$ 与矩阵 A 可交换，

则 $AB=\begin{pmatrix}x_{11}+x_{21}&x_{12}+x_{22}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$， $BA=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{11}+x_{12}\\x_{21}&x_{21}+x_{22}\end{pmatrix}$，

由 $AB=BA$ 得

$$x_{21}=0，\ x_{11}=x_{22}.$$

（2）设矩阵 $B=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$ 与矩阵 A 可交换，

则 $AB=\begin{pmatrix}x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\0&0&0\end{pmatrix}$， $BA=\begin{pmatrix}0&x_{11}&x_{12}\\0&x_{21}&x_{22}\\0&x_{31}&x_{32}\end{pmatrix}$，

由 $AB=BA$ 得

$x_{21}=x_{31}=x_{32}=0$， $x_{11}=x_{22}=x_{33}$， $x_{12}=x_{23}$

9. 设矩阵

$B=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{bmatrix}$ 与矩阵 A 可交换，

则 $AB=\begin{bmatrix}ax_{11}&ax_{12}&ax_{13}\\bx_{21}&bx_{22}&bx_{23}\\cx_{31}&cx_{32}&cx_{33}\end{bmatrix}$， $BA=\begin{bmatrix}ax_{11}&bx_{12}&cx_{13}\\ax_{21}&bx_{22}&cx_{23}\\ax_{31}&bx_{32}&cx_{33}\end{bmatrix}$，

由 $AB=BA$ 得

$$x_{21}=x_{31}=x_{32}=x_{12}=x_{13}=x_{23}=0，$$

即与 A 可交换的矩阵必为对角距阵.

10. 因为 $A^T=A$, 所以

$$(P^TAP)^T=P^T(P^TA)^T=P^TA^TP=P^TAP,$$

从而 P^TAP 是对称矩阵.

11. 证明

充分性: 因为 $A^T=A$, $B^T=B$, 且 AB=BA, 所以

$$(AB)^T=(BA)^T=A^TB^T=AB,$$

即 AB 是对称矩阵.

必要性：因为 $A^T=A$, $B^T=B$, 且 $(AB)^T=AB$, 所以

$$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA.$$

12.（1）因为 $AB=BA$，

所以 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$，得证.

（2）因为 $AB=BA$，

所以右边 $=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2=$ 左边，得证.

（3）因为 $AB=BA$，

所以

$$(AB)^p=\overbrace{(AB)(AB)(AB)\cdots(AB)(AB)(AB)}^{p}=A\overbrace{(BA)(BA)(BA)\cdots(BA)(BA)(BA)}^{p-1}B$$

$$=A\overbrace{(AB)(AB)(AB)\cdots(AB)(AB)(AB)}^{p-1}B=A^2\overbrace{(BA)(BA)\cdots(BA)(BA)}^{p-2}B^2$$

$$=A^2\overbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)(AB)}^{p-2}B^2=A^3\overbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)(AB)}^{p-3}B^3=\cdots=A^{p-1}(AB)B^{p-1}=A^pB^p$$

；

如果 $AB\neq BA$，则上述等式不成立.

13，$A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

14，充分性：因为 $B^2=E$，

所以 $A^2=\frac{1}{4}(B^2+E+2B)=\frac{1}{4}(2E+2B)=\frac{1}{2}(E+B)=A$；

必要性：因为 $A^2=A$，

所以 $A^2=\frac{1}{4}(B^2+E+2B)=\frac{1}{4}(2E+2B)=\frac{1}{2}(B+E)$，

整理得 $B^2=E$.

15，因为 A 是反对称矩阵，B 是对称矩阵，

所以 $A^T=-A$，$B^T=B$，

（1）$(A^2)^T=A^TA^T=(-A)(-A)=A^2$，

即 A^2 是对称矩阵.

（2）$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T=B(-A)-(-A)B=AB-BA$，

即 $AB-BA$ 是对称矩阵.

（3）充分性：因为 $AB=BA$，

所以 $(AB)^T=B^TA^T=B(-A)=-BA=-AB$，

即 A 是反对称矩阵；

必要性：因为 A 是反对称矩阵，

所以 $(AB)^T=B^TA^T=B(-A)=-BA=-AB$，

即 $AB=BA$.

16,

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n-1} & a_{2n-1} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix}$，

则 A^2 主对角线上的元素分别为 $a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n-1}^2+a_{1n}^2$，$a_{12}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n-1}^2+a_{2n}^2$，…，$a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots+a_{n-1n}^2+a_{nn}^2$，又因为 $A^2=O$，

所以

$$a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n-1}^2+a_{1n}^2=0,\quad a_{12}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n-1}^2+a_{2n}^2=0,\quad \cdots,$$

$$a_{1n}^2+a_{2n}^2+\cdots+a_{n-1n}^2+a_{nn}^2=0,$$

解得 $a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1n}=a_{22}=a_{23}=\cdots=a_{2n}=\cdots=a_{nn}=0$，

即 $A=O$.

17. 设

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，则 $A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，

$$AA^T=\begin{bmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & a_{m1}^2+a_{m2}^2+\cdots+a_{mn}^2 \end{bmatrix}$$

因为 $AA^T=O$，

则 $a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2=0$，$a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2=0$，…，$a_{m1}^2+a_{m2}^2+\cdots+a_{mn}^2=0$，

所以 $a_{11}=a_{12}=\cdots=a_{1n}=a_{21}=a_{22}=\cdots+a_{2n}=\cdots=a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}=0$，

即 $A=O$.

18,（1）$A^2-2A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-4\\8&7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2\\4&1\end{pmatrix}$.

（2）$3A^3-2A^2+5A-4E=3\begin{pmatrix}-1&-4\\8&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1&-4\\8&7\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=3\begin{pmatrix}-9&-11\\22&13\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&-8\\16&14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&-5\\10&15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-24&-30\\60&36\end{pmatrix}$.

19，因为 $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda+1$，

所以 $f(A)=A^2-A+E=\begin{pmatrix}15&5&12\\1&3&3\\13&7&13\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\3&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14&3&9\\0&5&3\\10&6&12\end{pmatrix}$.

20，$A_{11}=d$，$A_{12}=-c$，$A_{21}=-b$，$A_{22}=a$，

所以 $A^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

若 $ad-bc\neq 0$，则 $|A|=ad-bc\neq 0$，所以矩阵 A 可逆，

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc}&-\frac{b}{ad-bc}\\-\frac{c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}.$$

21，$A_{11}=d$，$A_{12}=-c$，$A_{21}=-b$，$A_{22}=a$，

所以 $A^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

若 $ad-bc\neq 0$，则 $|A|=ad-bc\neq 0$，所以矩阵 A 可逆，

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}\frac{d}{ad-bc}&-\frac{b}{ad-bc}\\-\frac{c}{ad-bc}&\frac{a}{ad-bc}\end{pmatrix}.$$

22.（1）$|A|=-20\neq 0$，所以矩阵 A 可逆，又

$A_{11}=-2$，$A_{12}=-3$，$A_{21}=-6$，$A_{22}=1$，

所以 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{-20}\begin{pmatrix}-2 & -6\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{20} & -\frac{1}{20}\end{pmatrix}$.

（2）$|A|=1\neq 0$，所以矩阵 A 可逆，又

$A_{11}=\cos\theta$，$A_{12}=-\sin\theta$，$A_{21}=\sin\theta$，$A_{22}=\cos\theta$，

所以 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

（3）$|A|=1\neq 0$，所以矩阵 A 可逆，又

$A_{11}=1$，$A_{12}=0$，$A_{13}=0$，$A_{21}=-2$，$A_{22}=1$，$A_{23}=0$，$A_{31}=7$，$A_{32}=-2$，$A_{33}=1$，

所以 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

（4）

$$(A\quad E)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&1&0&0\\2&1&3&0&0&0&1&0\\1&2&1&4&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+(-2)r_1\to r_3\\ r_4+(-1)r_1\to r_4}]{r_2+(-1)r_1\to r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&2&0&0&-1&1&0&0\\0&1&3&0&-2&0&1&0\\0&2&1&4&-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&3&0&-2&0&1&0\\0&2&0&0&-1&1&0&0\\0&2&1&4&-1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+(-2)r_2\to r_4]{r_3+(-2)r_2\to r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&3&0&-2&0&1&0\\0&0&-6&0&3&1&-2&0\\0&0&-5&4&3&0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-1)r_4\to r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&3&0&-2&0&1&0\\0&0&-1&-4&0&1&0&-1\\0&0&-5&4&3&0&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-5)r_3\to r_4]{r_2+(3)r_3\to r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&-12&-2&3&1&-3\\0&0&-1&-4&0&1&0&-1\\0&0&0&24&3&-5&-2&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1&\frac{1}{8}&-\frac{5}{24}&-\frac{1}{12}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

所以，距阵 A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

（5）因为 $|A|=0$，

所以 A^{-1} 不存在.

（6）$|A|=5\neq 0$，所以矩阵 A 可逆，又

$A_{11}=3$，$A_{12}=2$，$A_{13}=-1$，$A_{21}=-3$，$A_{22}=3$，$A_{23}=1$，$A_{31}=-1$，$A_{32}=-4$，$A_{33}=2$，

所以 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$.

（7）

$$(A,E)=\begin{bmatrix}1 & a & a^2 & a^3 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & a^2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-ar_4]{\substack{r_1-ar_2\\ r_2-ar_3}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以，距阵 A 可逆，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -a & 1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 1\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

22，（1）

$$X=\begin{pmatrix}10 & 1 & -2\\ -5 & -3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}10 & 1 & -2\\ -5 & -3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 7 & -10\\ -1 & -23 & 33\end{pmatrix};$$

（2）$X=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&\frac{1}{b}&0\\0&0&\frac{1}{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$；

（3）$X=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\0&1&1&\cdots&1&1\\0&0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&1&1&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&-1&-1&\cdots&0&0\\1&1&-1&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{bmatrix}$$

（4）由 $XP=PB$ 得：

$$X=PBP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$X^5=(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})=PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}$$
$$=PB(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B(P^{-1}P)B(P^{-1}P)BP^{-1}=PB^5P^{-1}$$

$B^5=B$，故 $X^5=XB^5X=XBX=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{bmatrix}$

23，

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$$ 故：

$$(A+2E)^{-1}(A^2+A-2E)=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&-2&0\\1&-1&-2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&-2&0\\1&-1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\1&-2&0\\1&1&-2\end{bmatrix}$$

24，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1&1\\1&1&0\\2&1&1\end{bmatrix},\quad 由\left|A^{-1}\right|=\left|A\right|^{-1}，A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*,得|A|=\left|A^{-1}\right|^{-1}=\frac{1}{3},$$

$$A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}，(A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&1&1\\-1&-5&4\end{bmatrix},(A^*)^*=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&-1\\-1&1&1\\-1&-5&4\end{bmatrix}$$

25，

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix},A^*=|A|A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

而 A^* 中的所有元素即为 A 中所有元素的代数余子式，即 A 所有元素的代数余子式为 0.

26，由题意得：$E=-A(A^*+kA^{-1})=-AA^*-kE=-|A|E-kE$，即

$$k=-|A|-1=-3$$

27，（1）. 因为 $AX=B+2X$，

所以 $(A-2E)X=B$，又因为

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&-1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

则

$$X=\left(A-2E\right)^{-1}B=\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&-1&0\\-2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&4\\2&0&1\\-3&-1&-1\end{pmatrix}$$

（2）由题意得：

$$AXA+BXB-AXB-BXA=E$$
$$\Rightarrow (A-B)X(A-B)=E$$
$$\Rightarrow X=(A-B)^{-1}(A-B)^{-1}$$

故：$X=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

（3）由 $|A|>0,\left|A^{*}\right|=|A|^{n-1}=|A|^{2}\Rightarrow|A|=2$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2&&\\&-2&\\&&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$ABA^{-1}=BA^{-1}+3E\Rightarrow ABA^{-1}-BA^{-1}=3E\Rightarrow(A-E)BA^{-1}=3E$$

由 $\Rightarrow B=3(A-E)^{-1}A=3\begin{bmatrix}1&&\\&-3&\\&&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&&\\&-2&\\&&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$

28，因为 A，B，C 都是非奇异矩阵，

所以 A^{-1}，B^{-1}，C^{-1} 存在，

又 $ABC\bullet C^{-1}B^{-1}A^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}\bullet ABC=E$，

则由推论知 ABC 可逆，且

$$\left(ABC\right)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

29，$AB=BA\Leftrightarrow B^{-1}ABB^{-1}=B^{-1}BAB^{-1}\Leftrightarrow B^{-1}A=AB^{-1}$，

$AB=BA\Leftrightarrow A^{-1}ABA^{-1}=A^{-1}BAA^{-1}\Leftrightarrow BA^{-1}=A^{-1}B$，

$AB=BA\Leftrightarrow\left(AB\right)^{-1}=\left(BA\right)^{-1}\Leftrightarrow B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$，

综上可得 $AB=BA\Leftrightarrow AB^{-1}=B^{-1}A\Leftrightarrow A^{-1}B=BA^{-1}\Leftrightarrow A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

30，（1）不成立，$A=-B$ 时不成立.

（2）成立，A，B可逆，$|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$，$|AB|=|A||B|\neq 0$，则AB可逆.

（3）成立，AB可逆，$|AB|=|A||B|\neq 0$，$|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$，则A，B可逆.

31，$A^2-A+E=0\Rightarrow A-A^2=E\Rightarrow A\left(E-A\right)=E\Rightarrow |A|\neq 0$，

即A为非奇异矩阵.

32，因为B可逆，

所以$|B|\neq 0$，$\left|B^2\right|=|B||B|\neq 0$，

又$A^2+AB+B^2=O$，

则$A^2+AB=-B^2$，$\left|A^2+AB\right|=\left|A\left(A+B\right)\right|=|A||A+B|=\left|-B^2\right|=\left(-1\right)^n\left|B^2\right|\neq 0$，

即$|A|\neq 0$，$|A+B|\neq 0$，

由推论知A和$A+B$都可逆.

33，证明：假设A^*可逆，则$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}\neq 0\Rightarrow |A|\neq 0$，即$A$可逆，$A^{-1}$存在，

再由$A^2=A\Rightarrow A^2A^{-1}=AA^{-1}\Rightarrow A=E$

与题设$A\neq E$矛盾，故假设不成立即A^*不可逆，证毕。

34，证明：$E+BA^{-1}$可逆$\Rightarrow \left|E+BA^{-1}\right|=\left|AA^{-1}+BA^{-1}\right|=\left|(A+B)A^{-1}\right|=\left|(A+B)\right|\left|A^{-1}\right|\neq 0$

可以得到$A+B$可逆。

$E+A^{-1}B=A^{-1}A+A^{-1}B=A^{-1}(A+B)$，由$A,A+B$都可逆，故$E+A^{-1}B$可逆。

且$(E+A^{-1}B)^{-1}=(A^{-1}(A+B))^{-1}=(A+B)^{-1}A$

35，证明：$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}=|A|^2,\left|-A^T\right|=(-1)^3\left|A^T\right|=-|A|$

故$A^*=-A^T\Rightarrow\left|A^*\right|=\left|-A^T\right|=|A|^2=-|A|\Rightarrow |A|=0$或 $|A|=-1$

当$|A|=0$时，$AA^*=|A|E=0\Rightarrow -AA^T=0\Rightarrow A=0$ （17 题）与A为非零实矩阵矛盾，即$|A|=-1$。

36，因为$A^k=0$，所以$E-A^k=E$。 又因为

$$E-A^K=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$

所以$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E$，

因此 $(E-A)$可逆，且$(E-A)^{-1}=(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$.

37，$\left|A^*\right|=|A|^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$，

$$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-2A^{*}\right|=\left|3A^{-1}-2A^{*}\right|=\left|3\frac{A^{*}}{|A|}-2A^{*}\right|=\left|4A^{*}\right|=4^{5}\left|A^{*}\right|=4^{5}\times\frac{1}{16}=64$$

38，因为$(A-E)^{-1}=(B-E)^{T}$，

则

$$(A-E)(B-E)^{T}=E\Rightarrow(A-E)\left(B^{T}-E\right)=E\Rightarrow AB^{T}-B^{T}-AE+E=E\Rightarrow AB^{T}-B^{T}=AE$$

$$\Rightarrow(A-E)B^{T}=AE\Rightarrow A-E=AE\bullet\left(B^{T}\right)^{-1}=AE\bullet\left(B^{-1}\right)^{T}\Rightarrow A-A\left(B^{-1}\right)^{T}=E\Rightarrow A\left[E-\left(B^{-1}\right)^{T}\right]=E$$

，

所以$|A|\neq 0$，由推论知A可逆.

39，证明：因为$|E-A|\neq 0$，

所以由定理知$(E-A)^{-1}$存在，且$(E-A)^{*}=|E-A|(E-A)^{-1}$，

则左边$=(E+A)|E-A|(E-A)^{-1}=|E-A|\left((E-A)^{-1}+A(E-A)^{-1}\right)$

$=|E-A|\left(2(E-A)^{-1}+A(E-A)^{-1}-E(E-A)^{-1}\right)$

$=|E-A|\left(2(E-A)^{-1}-(E-A)(E-A)^{-1}\right)=|E-A|\left(2(E-A)^{-1}-E\right)$，

右边$=|E-A|(E-A)^{-1}(E+A)=|E-A|\left((E-A)^{-1}+(E-A)^{-1}A\right)$

$=|E-A|\left(2(E-A)^{-1}+(E-A)^{-1}A-(E-A)^{-1}E\right)$

$=|E-A|\left(2(E-A)^{-1}-(E-A)^{-1}(E-A)\right)=|E-A|\left(2(E-A)^{-1}-E\right)=$左边，得证.

方法二：$|E-A|\neq 0\Rightarrow(E-A)^{*}=|E-A|(E-A)^{-1}$

40,（1）设$A_{11}=\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix}$，$A_{12}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$A_{21}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&0\end{pmatrix}$，$A_{22}=\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}$，$B_{1}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$，

$B_{2}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$，

则 $\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{1}\\B_{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{1}+A_{12}B_{2}\\A_{21}B_{1}+A_{22}B_{2}\end{pmatrix}$，

而

$$A_{11}B_{1}+A_{12}B_{2}=\begin{pmatrix}3&2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&7\\4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&7\\3&5\end{pmatrix},$$

$$A_{21}B_{1}+A_{22}B_{2}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&6\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&9\\-2&1\end{pmatrix},$$

所以$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 5 \\ -4 & 9 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,

即$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 5 \\ -4 & 9 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

（2）设$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，

$B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$B_{22} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，

则$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$，

而$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$，

$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ ，

所以$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$，

即$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

41，（1）设$\begin{pmatrix} O & A \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix} O & A \\ C & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_3 & AB_4 \\ CB_1 & CB_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}.$$

由此得 $\begin{cases} AB_3 = E \\ AB_4 = O \\ CB_1 = O \\ CB_2 = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_3 = A^{-1} \\ B_4 = O \\ B_1 = O \\ B_2 = C^{-1} \end{cases}$，

所以 $\begin{pmatrix} O & A \\ C & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

42，（1）设 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

则 $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$，

所以 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{matrix} \end{pmatrix}$.

（2）设 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

则 $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$，$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

所以 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{matrix} & O \end{pmatrix}$.

（3）设 $A_1=\begin{pmatrix} a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$，$A_2=\left(a_1\right)$，

则 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$，$A_2^{-1}=\left(\frac{1}{a_1}\right)$，

所以

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & O & & & & \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_3} & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & O \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} & \end{pmatrix}$$

.

（4）设 $A_1=\begin{pmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ \iddots & & \\ a_n & & \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} a_{n+1} & & & \\ & a_{n+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{2n} \end{pmatrix}$，

则 $A_1^{-1}=\begin{pmatrix} & & \frac{1}{a_n} \\ & \frac{1}{a_{n-1}} & \\ \iddots & & \\ \frac{1}{a_1} & & \end{pmatrix}$，$A_2^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{n+1}} & & & \\ & \frac{1}{a_{n+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_{2n}} \end{pmatrix}$，

所以 $\begin{pmatrix} & & & & & & & a_1 \\ & & & & & & a_2 & \\ & & & & & \iddots & & \\ & & & & a_n & & & \\ a_{n+1} & & & & & & & \\ & a_{n+2} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & a_{2n} & & & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} & & & & \frac{1}{a_{n+1}} & & & \\ & & & & & \frac{1}{a_{n+2}} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \frac{1}{a_{2n}} \\ & & & \frac{1}{a_n} & & & & \\ & & \frac{1}{a_{n-1}} & & & O & & \\ & \iddots & & & & & & \\ \frac{1}{a_1} & & & & & & & \end{pmatrix}$$

43，将矩阵 A 用初等行变换化为单位矩阵，并记录所用的初等变换：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + 3r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + (-1) r_2 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

上面的初等变换过程说明

$$R_{1+(-1)2} R_{2+(3)1} A = E$$

因而

$$A = \left(R_{1+(-1)2} R_{2+(3)1}\right)^{-1} = \left(R_{2+(3)1}\right)^{-1} \left(R_{1+(-1)2}\right)^{-1} = \left(R_{2+(-3)1}\right)\left(R_{1+(1)2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

44，（1）设 $R_{i\leftrightarrow j}A = B$，则 $B^{-1} = A^{-1}R_{i\leftrightarrow j}{}^{-1} = A^{-1}C_{i\leftrightarrow j}$，

即相当于交换 A^{-1} 的第 i 列和第 j 列；

（2）设 $R_{(k)i}A = B$，则 $B^{-1} = A^{-1}R_{(k)i}{}^{-1} = A^{-1}R_{\left(\frac{1}{k}\right)i} = A^{-1}C_{\left(\frac{1}{k}\right)i}$，

即相当于将 A^{-1} 的第 i 列乘以 $\frac{1}{k}$；

（3）设 $R_{j+(\lambda)i}A = B$，则 $B^{-1} = A^{-1}R_{j+(\lambda)i}{}^{-1} = A^{-1}C_{i+(-\lambda)j}$

即相当于A^{-1}的第j列的$(-\lambda)$倍加至第i列.

45，（1）设$C=(C_1,C_2,\cdots,C_n)$，因为$r(C)=r$，则$C_1,C_2,\cdots,C_n$中必存在r个$C_{i1},C_{i2},\cdots,C_{ir}$，使得$(C_{i1},C_{i2},\cdots,C_{ir})$可逆，又$BC=O$，

则$B(C_{i1},C_{i2},\cdots,C_{ir})=O$，$B=O(C_{i1},C_{i2},\cdots,C_{ir})^{-1}=O$.

（2）因为$BC=C$，所以$(B-E)C=O$，由（1）知$B-E=O$，$B=E$.

46，（1）用初等行变换将矩阵化成阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}3&2&1&1\\1&2&-3&2\\4&4&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&2\\3&2&1&1\\4&4&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&2\\0&-4&10&-5\\0&-4&10&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-3&2\\0&-4&10&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故$r=2$.

（2）用初等行变换将矩阵化成阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}2&-1&3&3\\3&1&-5&0\\4&-1&1&3\\1&3&-13&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-13&-6\\3&1&-5&0\\4&-1&1&3\\2&-1&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-13&-6\\0&-8&34&18\\0&-13&53&27\\0&-7&29&15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-13&-6\\0&-1&5&3\\0&-13&53&27\\0&-7&29&15\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&3&-13&-6\\0&-1&5&3\\0&0&-12&-12\\0&0&-6&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-13&-6\\0&-1&5&3\\0&0&-12&-12\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故$r=3$.

（3）用初等行变换将矩阵化成阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&0&3\\2&-1&0&1&-1\\3&1&-1&1&2\\0&-5&2&1&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&0&3\\0&-5&2&1&-7\\0&-5&-4&1&-7\\0&-5&2&1&-7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&0&3\\0&-5&2&1&-7\\0&0&-6&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故$r=3$.

（4）用初等行变换将矩阵化成阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\2&-1&2&3\\3&2&1&1\\1&-4&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\\0&-7&4&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-1&-2\\0&-7&4&7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

故$r=2$.

（5）当a_i，b_j不全为零时，不妨假设$a_1\neq0$，$b_1\neq0$，则

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故 $r=1$；

其它情形时，

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故 $r=0$.

47，$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+3a & a & a & a \\ 1+3a & 1 & a & a \\ 1+3a & a & 1 & a \\ 1+3a & a & a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+3a & a & a & a \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$

故（1）：当 $a \neq 1, a \neq -\frac{1}{3}$ 时，矩阵 A 可逆.

（2）：当 $a=-\frac{1}{3}$ 时，矩阵 A 的秩为 3.

（3）：当 $a=1$ 时，矩阵 A 的秩为 1.

48，$|A|=-2$，故 $r(B)=r(AB)=2$，故 $|B|=1-a=0$，解得 $a=1$，代入 B 验证 B 的秩确实为 2.

49，$A^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, BA^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，故 $r(BA^*)=1$。

50，（1）$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -7/9 \\ 0 & 0 & 1 & 20/9 \end{pmatrix} = \widetilde{A}_1$

解以 $\widetilde{A}_1$ 为增广矩阵的线性方程组，即得

$$\begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 = -7/9 \\ x_3 = 20/9 \end{cases}.$$

（2）$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 7 & 11 & 14 & 0\\ 3 & 3 & 6 & 10 & 15 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}=\widetilde{A}_1$

解以 $\widetilde{A}_1$ 为增广矩阵的线性方程组，即得

$$\begin{cases}x_1=-x_2-x_5\\ x_2=x_2\\ x_3=3x_5\\ x_4=-3x_5\\ x_5=x_5\end{cases}.$$

（3）$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & -1 & -5 & 9\\ 4 & -1 & 1 & -1 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/7 & -4/7 & 12/7\\ 0 & 1 & -3/7 & -9/7 & 13/7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\widetilde{A}_1$

解以 $\widetilde{A}_1$ 为增广矩阵的线性方程组，即得

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{7}z+\dfrac{4}{7}u+\dfrac{12}{7}\\ y=\dfrac{3}{7}z+\dfrac{9}{7}u+\dfrac{13}{7}\\ z=z\\ u=u\end{cases}.$$

（4）$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}8 & 6 & 5 & 2 & 21\\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10\\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8\\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15\\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\widetilde{A}_1$

解以 $\widetilde{A}_1$ 为增广矩阵的线性方程组，即得

$$\begin{cases}x_1=3\\ x_2=0\\ x_3=-5\\ x_4=11\end{cases}.$$

（5）$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 4\\ 1 & 4 & -3 & 7\\ 1 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & 1\\ & 1 & -11 & -1\\ & & 18 & 5\\ & & 0 & 1\end{pmatrix}=\widetilde{A}_1$

注意以 $\widetilde{A}_1$ 为增广矩阵的线性方程组的最后一个方程为

$$0=1$$

这是一个矛盾方程，因此，原方程组无解.

51，$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\-1&0&0&0&1&a_5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&a_1\\0&1&-1&0&0&a_2\\0&0&1&-1&0&a_3\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&\sum_{i=1}^{5}a_i\end{pmatrix}=\widetilde{A}_1$

以 $\widetilde{A}_1$ 为增广矩阵的线性方程组有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^{5}a_i=0$，则由定理知

原方程组有解的充要条件为 $\sum_{i=1}^{5}a_i=0$.

52.要使齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=0\\x_1+bx_2+x_3=0\\x_1+2bx_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解，必须

$$\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1-ab&1-a\\1&b&1\\0&b&0\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1-ab&1-a\\b&0\end{vmatrix}=(a-1)b=0,$$

即 $a=1$ 或 $b=0$.

53，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&a+2&-(b+2)\\0&-3a&a+2b\end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-(b+2)&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&-3a&a+2b-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{pmatrix},$$

当 $r(A)=r(\tilde{A})=3$ 时，即 $a\neq 0,a\neq b$ 时有唯一解：$x_1=1-\frac{1}{a},x_2=\frac{1}{a},x_3=0$

当 $r(A)=r(\tilde{A})<3$ 时，即 $a=b\neq 0$ 时有无穷多组解：$x_1=0,x_2=x_3+1,x_3=x_3$

当 $r(A)\neq r(\tilde{A})$ 时，即 $a=0$ 时无解。

（二）

54，（1）$E_{ij}E_{kl}=\begin{cases}E_{il}, j=k\\ O, j\neq k\end{cases}$.

（2）

$$AE_{ij}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2i} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3i} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2i} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1i} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$E_{ij}A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots & a_{jn-2} & a_{jn-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ \\ \\ i, \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

由 $AB=BA$ 得

当 $k\neq i$ 时 $a_{ki}=0$，当 $k\neq j$ 时 $a_{jk}=0$，且只有 $a_{ii}=a_{jj}$.

（3）由第 9 题知与所有的 n 阶矩阵可交换的矩阵必为对角矩阵，设

$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ 与所有的 n 阶矩阵可交换，于是由 $AE_{ij}=E_{ij}A$ 可推出 $a_i=a_j=a$，

$i,j=1,2,\cdots,n$，即 $A=aE$.

55，

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n2} \end{pmatrix}$，故

$$AB=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_{1i}b_{i1} & & & \\ & \sum_{i=1}^{n}a_{2i}b_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=1}^{n}a_{ni}b_{in}\end{pmatrix},BA=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}b_{1i}a_{i1} & & & \\ & \sum_{i=1}^{n}b_{2i}a_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=1}^{n}b_{ni}a_{in}\end{pmatrix}$$

$$tr(AB)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}b_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ij}a_{ji}==\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ji}a_{ij}=tr(BA)$$

56，证明：因为对任意 $n\times 1$ 矩阵 α 都有 $\alpha^T A\alpha=0$，当我们取 $\alpha=(0\quad 0\quad \cdots\quad 1\quad \cdots\quad 0)^T$ 即只有第 i 个元素为 1 其他元素为零时得：

$$\alpha^T A\alpha=(0\quad 0\quad \cdots\quad 1\quad \cdots\quad 0)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=a_{ii}=0$$

即对角线元素都为零，当我们再取第 i 个与第 j 个元素为 1 其他元素为零时得：

$$\alpha^T A\alpha=(0\quad \cdots\quad 1\quad \cdots\quad 1\quad \cdots\quad 0)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=0$$

由第一种取法得对角线元素都为零，代入上式得：$a_{ij}+a_{ji}=0$，即 A 为反对称矩阵。

57，证明：当对角线上存在非零元素时，不妨设 $a_{ii}\neq 0$，此时取 α 为的 i 元素为 1 其他元素为零的列向量即可。当对角线上元素都为零时，则一定存在 $a_{ij}=a_{ji}\neq 0$，则此时取第 i 个与第 j 个元素为 1 其他元素为零的列向量即可。

58，由 $A^2+2A+2E=0$，得：$A^2+2A=-2E$，故

$$(A+xE)(A+(2-x)E)=A^2+2A+x(2-x)E=(2x-x^2-2)E$$

由于 $2x-x^2-2=-[(x-1)^2+1]\neq 0$，故 $(A+xE)^{-1}=\dfrac{1}{2x-x^2-2}(A-(2-x)E)$。

59，证明：$A+B=AB\Rightarrow AB-A-B=0\Rightarrow AB-A-B+E=E\Rightarrow(A-E)(B-E)=E$

故，$(A-E),(B-E)$ 都可逆，且互为逆矩阵

所以，$(B-E)(A-E)=E\Rightarrow BA-A-B+E=E\Rightarrow BA=A+B=AB$

$A+B=AB\Rightarrow AB-A=B\Rightarrow A(B-E)=B\Rightarrow A=B(B-E)^{-1}$

60，证明：由题意得：

$$\begin{aligned}
&A(E-BA)=A-ABA=(E-AB)A\Rightarrow A=(E-AB)^{-1}A(E-BA)\\
&\Rightarrow BA=B(E-AB)^{-1}A(E-BA)\\
&\Rightarrow BA-B(E-AB)^{-1}A(E-BA)=0\\
&\Rightarrow E-BA+B(E-AB)^{-1}A(E-BA)=E\\
&\Rightarrow(E+B(E-AB)^{-1}A)(E-BA)=E
\end{aligned}$$

故 $(E-BA)$ 也可逆。且 $(E-BA)^{-1}=(E+B(E-AB)^{-1}A)$

61，证明：

（1） 当 $|AB|\neq 0$ 时，这时 $|A|\neq 0,|B|\neq 0,$ 由公式 $A^*=|A|A^{-1}$ 可得：

$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|B|B^{-1}|A|A^{-1}=B^*A^*$ 结论成立。

当 $|AB|=0$ 时，考虑矩阵 $A(\lambda)=A-\lambda E,B(\lambda)=B-\lambda E$，由于 A 和 B 最多只有有限个特征值，因此存在无穷多个 λ，使

$$|A\lambda|\neq 0,|B\lambda|\neq 0$$

那么由上面已证结论，$(A(\lambda)B(\lambda))^*=B^*(\lambda)A^*(\lambda)$

令 $(A(\lambda)B(\lambda))^*=(f_{ij}(\lambda))_{n\times n},B^*(\lambda)A^*(\lambda)=(g_{ij}(\lambda))_{n\times n}$，则有 $(f_{ij}(\lambda))=(g_{ij}(\lambda)),(i,j=1,2,\cdots,n)$，使得无数多个 λ 成立，但 $(f_{ij}(\lambda)),(g_{ij}(\lambda))$ 都是多项式，因此 $(f_{ij}(\lambda))=(g_{ij}(\lambda))$ 对于一切的 λ 都成立。特别令 $\lambda=0$，这时有

$$(AB)^*=(A(0)B(0))^*=B^*(0)A^*(0)=B^*A^*$$

（2）$(-A)^*=(-EA)^*=A^*(-E)^*=(-1)^{n-1}A^*E=(-1)^{n-1}A^*$

（3）

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则

$$(A^*)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

故，$(A^*)^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{2n} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=(A^T)^*$

（4）由 A 可逆及 $|A|^{-1}=|A^{-1}|$ 得：

$$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{-1}(A^{-1})^{-1}=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=(A^{-1})^*$$

（5）由 A 可逆得：$A^*=|A|A^{-1}\Rightarrow|A^*|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}$

$$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-1}|A|^{-1}A=|A|^{n-2}A$$

62，证明：

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$，两边取行列式得：

$$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|=|AD-CAA^{-1}B|=|AD-CB|$$

63，证明：

必要性：因为 A 的元素全为整数，所以 $|A|$ 也是整数，又 A^{-1} 的元素为整数，则 $|A^{-1}|$ 也为整数，而 $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$，所以 $|A|=1$ 或 -1。

充分性：因为 $|A|=1$ 或 -1，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，又因为 A 的元素全为整数，则 A^* 的元素也全为整数，所以 A^{-1} 的元素全为整数。

64，证明：

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

则，$AB=C=(c_{ij})_{n\times n}$

当 $i>j$ 时，$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=i}^{n}a_{ik}b_{kj}=0$。（或直接把 C 的形式写出来）。

65，证明：

（1）设 $r(A)=t, r(B)=r$，分别对 A,B 进行初等变换，化为阶梯型矩阵，

即存在 P_1,P_2,C_1,C_2 使得：

$$P_1AC_1=\begin{pmatrix}E_t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, P_2BC_2=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

取 $P=\begin{pmatrix}P_1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}C_1 & 0\\ 0 & C_2\end{pmatrix}$ 则： $P\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}E_t & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_r & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

故：$r\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=t+r=r(A)+r(B)$。

（2）利用（1）式的 P,Q 得：$P\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}E_t & 0 & \multicolumn{2}{c}{P_1CC_2}\\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & E_r & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

由于 $r\begin{pmatrix}E_t & 0 & P_1CC_2\\ 0 & 0 & \end{pmatrix}\geq r\begin{pmatrix}E_t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=t$

故：$r\begin{pmatrix}A & C\\ 0 & B\end{pmatrix}\geq t+r=r(A)+r(B)$

（3）$\begin{pmatrix}E_p & 0\\ -A & E_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_p & B\\ A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_p & -B\\ 0 & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_p & 0\\ 0 & -AB\end{pmatrix}$

故：$r\begin{pmatrix}E & B\\ A & 0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}E_p & 0\\ 0 & -AB\end{pmatrix}=r(E_p)+r(-AB)=p+r(AB)$

又 $r\begin{pmatrix}E & B\\ A & 0\end{pmatrix}\geq r(A)+r(B)$，故 $p+r(AB)\geq r(A)+r(B)$，即 $r(AB)\geq r(A)+r(B)-p$。

1. 由 $5(\alpha-\beta)+4(\beta-\gamma)=2(\alpha+\gamma)$ 得

$$\gamma=\frac{1}{6}(3\alpha-\beta)=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}^T.$$

2．设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，则有

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=1\\ k_2+k_3=2\\ k_1+k_3=3\end{cases}$$

解得 $k_1=-1$，$k_2=-2$，$k_3=4$，

即 $\beta=-\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3$.

3. 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$，则有

$$\begin{cases}k_1+k_3+2k_4=0\\ k_1+5k_2-k_3-3k_4=0\\ k_1+2k_2=0\\ k_1+k_2+k_4=0\end{cases}$$

解得 $k_1=-2k_4$，$k_2=k_4$，$k_3=0$，

即只有 α_3 不能由其余三个向量线性表出.

4. (1) 因为

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a & 2\\ 1 & 2 & b & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & a & 3\\ 0 & 0 & b-1 & -2\end{pmatrix}=B,$$

所以 $a\neq0$，$b-1\neq0$ 且 $-2a=3(b-1)$，即 $a\neq0$，$b\neq1$ 且 $a=\frac{3}{2}(1-b)$ 时 β 是向量 α_1，α_2，α_3 的线性组合，当 $a=1$，$b=\frac{1}{3}$ 时，

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & a & 3\\ 0 & 0 & b-1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以 $\beta=-5\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3$.

(2) 由(1)知，当$a=0$或$b=1$或$a\neq 0$，$b\neq 1$且$a\neq \frac{3}{2}(1-b)$时β不能由向量α_1，α_2，α_3线性表出.

5. (1) 设$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix}$，则$r(A)=2<3$，

所以α，β，γ线性相关.

(2) 设$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，则$r(A)=2<3$.

所以α，β，γ线性相关.

(3) 设$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则$r(A)=3$，

所以α，β，γ线性无关.

(4) 设$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则$r(A)=3$，

所以α，β，γ线性无关.

6. (1) 设$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & k\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2+k\end{pmatrix}$，

所以不论k取何值α，β，γ都线性无关.

(2) 设$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & 2 & 5\\ k & -3 & -4\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -3-\frac{k}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

所以当$-3-\frac{k}{2}=0$，即$k=-6$时，$r(A)=2<3$，α，β，γ线性相关；

当$-3-\frac{k}{2}\neq 0$，即$k\neq -6$时α，β，γ线性无关.

7，（1）错误

（2）错误

（3）正确

（4）错误

（5）正确

（6）错误

8，设$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_s(\alpha_s+\alpha_1)=0$，

则$(k_1+k_s)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{s-1}+k_s)\alpha_s=0$，

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$\begin{cases} k_1+k_s=0 \\ k_1+k_2=0 \\ \quad\vdots \\ k_{s-1}+k_s=0 \end{cases}$，系数距阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

当s为奇数时$A\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$r(A)=s$，方程组只有零解，

所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_s+\alpha_1$线性无关；

当s为偶数时$A\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$r(A)<s$，方程组有非零解，

所以$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_s+\alpha_1$线性相关.

9，设$k_1(l\beta-\alpha)+k_2(m\gamma-\beta)+k_3(\alpha-\gamma)=0$，

则$(-k_1+k_3)\alpha+(lk_1-k_2)\beta+(mk_2-k_3)\gamma=0$，

由于 α,β,γ 线性无关，则 $\begin{cases}-k_1+k_3=0\\ lk_1-k_2=0\\ mk_2-k_3=0\end{cases}$，系数距阵

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\ l&-1&0\\ 0&m&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&0&1\\ 0&-1&l\\ 0&0&lm-1\end{pmatrix},$$

只有当 $lm-1\neq0$ 即 $lm\neq1$ 时，$r(A)=3$，方程组只有零解，$l\beta-\alpha,m\gamma-\beta,\alpha-\gamma$ 线性无关.

10，设 $k_1(\alpha-\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma-\alpha)=0$，则

$(k_1-k_3)\alpha+(-k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma=0$，

由于 α，β，γ 线性无关，则 $\begin{cases}k_1-k_3=0\\ -k_1+k_2=0\\ k_2+k_3=0\end{cases}$，

解得 $k_1=k_2=k_3=0$，所以 $\alpha-\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma-\alpha$ 也线性无关.

11，证明：充分性：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意 $k(1\leq k\leq s)$ 个向量都线性无关，特别地，$k=s$ 时也成立，即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性无关的。

必要性：反证法，假设存在 k 个向量线性无关，不妨设为 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$，那么存在 k 个不全为零的数 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 使得：

$$r_1\alpha_{i_1}+r_2\alpha_{i_2}+\cdots+r_k\alpha_{i_k}=0,$$

令 $r_{k+1}=\cdots=r_s=0$ 可得：

$$r_1\alpha_{i_1}+r_2\alpha_{i_2}+\cdots+r_k\alpha_{i_s}=r_1\alpha_{i_1}+r_2\alpha_{i_2}+\cdots+r_k\alpha_{i_k}=0$$

而 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 不全为零，这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性无关的是矛盾的。

12，证明：设这两个 n 维向量为：$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

充分性：这两个向量的对应分量成比例，不妨设比例系数为 k，即，$\alpha=k\beta$，因此有：

$$\alpha-k\beta=0$$

即这两个 n 维向量是线性相关的。

必要性：若这两个n维向量是线性相关的，则存在不全为零的k,l使得：

$$k\alpha+l\beta=0$$

不妨设$k\neq 0$，因而有：

$$\alpha=-\frac{l}{k}\beta$$

即这两个向量成比例。

13，证明：设有$k_1,k_2,\cdots,k_s$使

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots+k_s(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=0$$

则有

$$(k_1+k_2\cdots+k_s)\alpha_1+(k_2\cdots+k_s)\alpha_2+\cdots+(k_{s-1}+k_s)\alpha_{s-1}+k_s\alpha_s=0$$

但由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，故

$$\begin{aligned} k_1+k_2\cdots+k_s&=0\\ k_2\cdots+k_s&=0\\ &\cdots\\ k_s&=0 \end{aligned}$$

于是可得$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$。即向量组$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$是线性无关的。

14，n维单位向量$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$线性无关，不妨设：

$$\begin{aligned} \varepsilon_1&=k_{11}\alpha_1+k_{12}\alpha_2+\cdots+k_{1n}\alpha_n\\ \varepsilon_2&=k_{21}\alpha_1+k_{22}\alpha_2+\cdots+k_{2n}\alpha_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varepsilon_n&=k_{n1}\alpha_1+k_{n2}\alpha_2+\cdots+k_{nn}\alpha_n \end{aligned}$$

所以
$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\ k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}$$

两边取行列式，得$\begin{vmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\ k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{vmatrix}$，由$\begin{vmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow\begin{vmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{vmatrix}\neq 0$

即n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$所构成矩阵的秩为$n$，故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关.

15，证明：必要性：任取一n维向量β后，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$是线性相关的，故存在不

全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_n,k$使得：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n+k\beta=0$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性无关的，故必$k\neq 0$。于是上式两端除以$k$并移项可得：

$$\beta=\frac{k_1}{k}\alpha_1+\frac{k_2}{k}\alpha_2+\cdots+\frac{k_n}{k}\alpha_n$$

即β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示。

充分性：取n维向量空间的一组基$e_1,e_2,\cdots,e_n$，故$e_1,e_2,\cdots,e_n$是线性无关的，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$可由$e_1,e_2,\cdots,e_n$线性表出，又由题意$e_1,e_2,\cdots,e_n$也可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表出，即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$与$e_1,e_2,\cdots,e_n$是等价的，所以它们的秩相同，从而得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性无关的。

16，证明 设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k_m\beta+k_n\gamma=0$，则由条件知$k_m\neq 0$，$k_n\neq 0$，因为若$k_m=0$，则由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta,\gamma$线性相关知，$\gamma$能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出，与已知条件矛盾，故$k_m\neq 0$；同理可得$k_n\neq 0$. 因此，$\beta=-\frac{k_1}{k_m}\alpha_1-\frac{k_2}{k_m}\alpha_2-\cdots-\frac{k_s}{k_m}\alpha_s-\frac{k_n}{k_m}\gamma$，即$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$也可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma$线性表出，同理可得，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma$也可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$线性表出，故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\gamma$等价.

17，反证法：假设存在$k_i=0$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

因为任意$m-1$个向量线性无关，则$k_1=k_2=\cdots=k_{i-1}=k_{i+1}=\cdots=k_m=0$，即$k_j=0\left(j=1,2,\cdots,m\right)$，又$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0,$$

矛盾，故$k_i\neq 0\left(i=1,2,\cdots,m\right)$，即必存在$m$个全不为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0.$$

18，(1) 构造矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，对 A 作初等行变换，将其化为规范的阶梯形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=B$$

显然，$r(A)=r(B)=4$，即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=4$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 A 的列向量组的极大无关组.

(2) 构造矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，对 A 作初等行变换，将其化为规范的阶梯形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}2&0&14&4&6\\1&2&7&2&5\\3&-1&0&-1&1\\0&0&3&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{3}&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=B$$

显然，$r(A)=r(B)=4$，即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=4$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 或 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 是 A 的列向量组的极大无关组.

19，(1) 构造矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，对 A 作初等行变换，将其化为规范的阶梯形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

显然，$r(A)=r(B)=2$，即 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，$\alpha_1,\alpha_2$ 是 A 的列向量组的极大无关组，且有 $\alpha_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_3$，$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2$.

(2) 构造矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，对 A 作初等行变换，将其化为规范的阶梯形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

显然，$r(A)=r(B)=3$，即$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是$A$的列向量组的极大无关组，且有$\alpha_3=\alpha_1-5\alpha_2+0\alpha_4$.

20，法 1：已知$4\alpha-5\beta+3\gamma=4(2\xi-\eta)-5(\xi+\eta)+3(-\xi+3\eta)=0$，且$4,-5,3$不全为零，由定义$\alpha,\beta,\gamma$线性相关.

法 2：α,β,γ由ξ,η线性表出,且$3>2$，则由命题 3.12 知α,β,γ线性相关.

21，从向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s \tag{1}$$

中任取m个向量，记为

$$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{im} \tag{2}$$

在组(1)中删掉一个向量后，则其秩最多减 1. 组(2)可作为组(1)删掉$s-m$个向量后所得的向量组，因此组(2)的秩至少是$r-(s-m)=r+m-s$.

22，设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n),C=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$的极大线性无关组分别为$A',B',C'$，含有的向量个数(秩)分别为$r(A),r(B),r(C)$，则$A,B,C$分别与$A',B',C'$等价，易知$A,B$均可由$C$线性表示，则$r(C)\ge r(A)$，$r(C)\ge r(B)$，即$\max\{r(A),r(B)\}\le r(C)$.

设A'与B'中的向量共同构成向量组D，则A,B均可由D线性表示，即C可由D线性表示，从而C'可由D线性表示，所以$r(C')\le r(D)$，D为$r(A)+r(B)$阶矩阵，所以$r(D)\le r(A)+r(B)$，即$r(C)\le r(A)+r(B)$.

23，(1) 首先将系数矩阵化为规范阶梯矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&3&2\\3&-5&4\\1&17&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{11}{7}\\0&1&\frac{1}{7}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

选 z 为自由未知量，取 $z=-7$，得基础解系

$$\eta=\begin{pmatrix}11\\1\\-7\end{pmatrix}$$

于是原方程组的通解为 $X=c\eta$，即

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}11\\1\\-7\end{pmatrix}，$$ c 为任意常数.

(2) 首先将系数矩阵化为规范阶梯矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

x_3, x_4, x_5 为自由未知量.

分别取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

得基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

所以原方程组的解为 $X=k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$，其中 k_1，k_2，k_3 为任意常数.

(3) 用初等行变换将 (A,β) 化为规范阶梯矩阵，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

选 x_3, x_4 为自由未知量.

令 $x_3 = x_4 = 0$，得特解

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得出对应的齐次线性方程组的基础解系

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}，\eta_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是原方程组的通解为

$$X = \gamma_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

24，首先将系数矩阵化为规范阶梯矩阵，

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

选 x_3, x_4, x_5 为自由未知量，分别取 $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$，$x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ 和 $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$，得基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \eta_2=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \eta_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

所以四个解向量不能构成方程组的基础解系，必须去掉二、四列，取$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，

$\eta_2=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，补充$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\eta_1,\eta_2,\eta_3$构成基础解系.

26，(1) 用初等行变换将(A,β)化为规范阶梯矩阵，

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&k\\1&1&k&k^2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&k&1&k\\0&1-k&k-1&k^2-k\\0&1-k^2&1-k&1-k^2\end{pmatrix}=B$$

当$k\neq1$时，$B=\begin{pmatrix}1&k&1&k\\0&1&-1&-k\\0&1+k&1&1+k\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1+k&k+k^2\\0&1&-1&-k\\0&0&2+k&(1+k)^2\end{pmatrix}$，

若$k=-2$，则$2+k=0$，而$(1+k)^2=1\neq0$，原方程组无解；

若$k\neq-2$，则原方程组有唯一解；

当$k=1$时，$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，原方程组有无穷多组解，选$y,z$为自由未知量.令

$y=z=0$，得特解

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

分别取$\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}$为$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得出对应的齐次线性方程组的基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是原方程组的通解为

$$X=\gamma_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

其中 c_1,c_2 为任意常数.

27，（1）

解 对方程组的增广矩阵施行初等行变换：

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}a&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}0&1-ab&1-a&4-3a\\1&b&1&3\\0&b&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}0&1-ab&1-a&4-3a\\1&0&1&2\\0&b&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}0&1&1-a&4-2a\\1&0&1&2\\0&b&0&1\end{array}\right)$$

$$=\overline{B}.$$

原方程组(1)与下面以 $\overline{B}$ 为增广矩阵的线性方程组同解：

$$\begin{cases}x_2+(1-a)x_3=4-2a\\x_1+x_3=2\\bx_2=1.\end{cases}\qquad(2)$$

此方程组的系数行列式为：

$$D=\begin{vmatrix}0&1&1-a\\1&0&1\\0&b&0\end{vmatrix}=b(1-a).$$

当 $D=b(1-a)\neq0$，即 $a\neq1$ 且 $b\neq0$ 时，方程组(2)(从而方程组(1))有惟一解，且由(2)知，此惟一解为：

$$x_1=\frac{2b-1}{b(a-1)},\quad x_2=\frac{1}{b},\quad x_3=\frac{1-4b+2ab}{b(a-1)}.$$

当 $a=1$ 时，分以下两种情形：

1) $b=\frac{1}{2}$ 时，原方程组(也就是方程组(2))有无穷多解：

$x_1=2-x_3$，$x_2=2$，x_3 为任意常数．

2) $b\neq\frac{1}{2}$ 时，易知方程组(2)无解，从而原方程组无解．

当 $b=0$ 时，显然方程组(2)也无解．从而原方程组也无解．

（2） 用初等行变换将 (A,β) 化为规范阶梯矩阵，

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}=B$$

当 $a=1,b\neq -1$ 时， $a-1=0$，而 $b+1\neq 0$，原方程组无解；

当 $a\neq 1$ 时， $B=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{b-a+2}{a-1}\\0&1&0&0&\frac{a-2b-3}{a-1}\\0&0&1&0&\frac{b+1}{a-1}\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

则原方程组有唯一解：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{b-a+2}{a-1}\\\frac{a-2b-3}{a-1}\\\frac{b+1}{a-1}\\0\end{pmatrix};$$

当 $a=1,b=-1$ 时， $B=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 原方程组有无穷多组解，选 x_3,x_4 为自由未知量．令 $x_3=x_4=0$，得特解

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

分别取 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$， $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得出对应的齐次线性方程组的基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是原方程组的通解为

$$X=\gamma_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\8\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

其中c_1,c_2为任意常数.

28 ，

解 1）设 $A,\overline{A}$ 分别为(1)的系数矩阵和增广矩阵，则显然 $r(A)\leqslant 3$. 但是，当 a_1,a_2,a_3,a^4 互异时，由范得蒙行列式知

$$|\overline{A}|=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)\cdot(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdot(a_4-a_3)\neq 0,$$

从而 $r(\overline{A})=4$. 因此 $r(A)\neq r(\overline{A})$，故方程组(1)无解 .

29，（1）错误

（2）错误

（3）错误

（4）正确

（5）正确

（6）错误

30，由解向量$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$的任意性可得$AX=O$的基础解系含解向量个数为n，则$r(A)=n-n=0$，所以$A=O$.

31，因为$A_{ij}\neq 0$，则$r(A)=n-1$，又由于方程组含有n个未知量，故其基础解系只含一个非零的解向量，亦即任何非零的解向量都是一个基础解系，而由于

$$a_{11}A_{i1}+a_{12}A_{i2}+\cdots+a_{1n}A_{in}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=|A|=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}A_{i1}+a_{n2}A_{i2}+\cdots+a_{nn}A_{in}=0$$

且 $A_{ij}\neq 0$，故 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$ 是方程组的一个非零解，即

$$\left(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}\right)^T$$

是该齐次线性方程组的一个基础解系.

32，充分性：若 $|A|\neq 0$，则由克莱姆法则知，方程组有解.

必要性：若方程组有解，则系数矩阵 A 与增广矩阵 $\overline{A}$ 的秩相同，再由 b_i 的任意性，秩都应等于 n，即 A 必为非奇异矩阵，故 $|A|\neq 0$.

33，(1) 反证法，假设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r,\xi$ 线性相关．因为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性无关，而 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r,\xi$ 线性相关，所以 ξ 可由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r$ 线性表示，且表示式是唯一的，这说明 ξ 也是齐次线性方程组的解，矛盾.

(2) 显然向量组 $\xi,\eta_1+\xi,\eta_2+\xi,\cdots,\eta_r+\xi$ 与向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r,\xi$ 可以相互表示，故这两个向量组等价，而由 (1) 知向量组 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r,\xi$ 线性无关，所以向量组 $\xi,\eta_1+\xi,\eta_2+\xi,\cdots,\eta_r+\xi$ 也线性无关.

(3) 由定理 3.8 知，

$$\begin{aligned}\gamma&=\xi+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_r\eta_r\\&=\left(1-c_1-c_2-\cdots-c_r\right)\xi+c_1\left(\eta_1+\xi\right)+c_2\left(\eta_2+\xi\right)+\cdots+c_r\left(\eta_r+\xi\right)\end{aligned}$$

设 $c_0=1-c_1-c_2-\cdots-c_r$，则 $c_0+c_1+c_2+\cdots+c_r=1$，且

$$\gamma=c_0\xi+c_1\left(\eta_1+\xi\right)+c_2\left(\eta_2+\xi\right)+\cdots+c_r\left(\eta_r+\xi\right).$$

34，证明 当 $r(A)=n$ 时，$|A|\neq 0$，故有

$$|AA^*|=|A||A^*|=\left||A|E\right|=|A|^n,\quad |A^*|=|A|^{n-1}\neq 0,$$

所以 $r(A^*)=n$；

当 $r\left(A\right)=n-1$ 时，$|A|=0$，故有

$$AA^*=|A|E=0$$

即 A^* 的列向量都是方程组 $Ax=0$ 的解．因为 $r\left(A\right)=n-1$，所以方程组 $Ax=0$ 的基础解系中只含一个解向量，即基础解系的秩为 1．因此 $r(A^*)=1$；

当 $r\left(A\right)\leq n-2$ 时，A 中每个元素的代数余子式都为 0，故 $A^*=0$，从而 $r(A^*)=0$.

（二）

35，证明：任取 $s-t$ 个数 $a_{s+1},\cdots,a_t$，使 $a_1,\cdots,a_s,a_{s+1},\cdots,a_t$ 互不相同，于是 t 阶范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_s & a_s & \cdots & a_t \\ a_1^2 & \cdots & a_s^2 & a_{s+1}^2 & \cdots & a_t^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{t-1} & \cdots & a_s^{t-1} & a_{s+1}^{t-1} & \cdots & a_{t+1}^{t-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

从而 t 个列向量线性无关，由此知其部分列向量 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也线性无关。

36，

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i\alpha_i + \cdots + k_s\alpha_s = \theta.$$

设 k_i 是最后一个不等于零的系数，即有

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_i\alpha_i = \theta.$$

由于 $\alpha_1 \neq \theta$，从而不可能 $i=1$．亦即不可能有 $k_1\alpha_1 = \theta$．于是 $1 < i \leqslant s$，且由上式得

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1}$$

即 α_i 可被其前面的向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表示．

37，

2）设向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \tag{1}$$

与

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t \tag{2}$$

有相同的秩 r，且

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r} \tag{3}$$

与

$$\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_r} \tag{4}$$

分别为(1)与(2)的极大无关组．若(1)可由(2)线性表示，则(3)便可由(4)线性表示．但由于(3)线性无关，故由第 409 题知，(3)与(4)等价，于是(1)与(2)也等价．

38，证明：由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$ 线性相关可知，存在一组不全为零的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_m, k$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m + k\beta = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关可知 k 必不为零，又若 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 全为零则得 $k\beta = 0$，根

据 k 不为零得 β 为零，与题意矛盾，故可得 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 也一定不全为零，不妨设 $k_i \neq 0$，方程两边同除以 k_i 并移项得：

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{k_m}{k_i}\alpha_m - \frac{k}{k_i}\beta$$

即 α_i 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性表出。

39，证明：必要性：因为 A 有 n 个 m 维的列向量，由题意列向量是线性无关的，故 $m \geq n$，且 $r(A)=n$，因此 $AX=0$ 只有零解，所以 $AB=0$ 时必有 $B=0$。

充分性：当 $AB=0$ 时必有 $B=0$ 表明对 B 的任一列向量 β_j 都有

当 $A\beta_j=0$ 时必有 $\beta_j=0$

这说明 $AX=0$ 只有零解，即 $r(A)=n$，所以 A 的列向量是线性无关的。

40，证明：作齐次线性方程组 $AX=0$

由于 $r(A)=r$，则方程组存在一基础解系 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$，令

$$B=(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r},0,\cdots,0)_{n\times n},$$

则 $AB=0$，且 $r(B)=n-r$。

41　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　，

证　由于方程组(1)的系数矩阵的秩为 r，故(1)的每个基础解系都包含 $n-r$ 个向量．设

$$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r} \tag{2}$$

为(1)的一基础解系，又设

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r} \tag{3}$$

为(1)的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量，则组(3)可由组(2)线性表示，因此由第409题知，组(3)与组(2)等价．于是方程组(1)的任一解向量都可由组(3)线性表示，所以组(3)也是方程组(1)的一个基础解系．

42，证明：

（1）

证：设 x_0 是 $Ax=0$ 的解，则 $Ax_0=0$，$\therefore A^TAx_0=0$，即 x_0 也是 $A^TAx=0$ 的解，反之，设 y_0 是 $A^TAx=0$ 的解，则 $A^TAy_0=0$，$\therefore y_0^TA^TAy_0=0$，即 $(Ay_0)^TAy_0=0$，①

令 $Ay_0=(b_1,b_2,\cdots b_m)^T\in R^{n\times 1}$，由①有

$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_m^2=0$，$\therefore b_1=\cdots b_m=0$，此即 $Ay_0=0$，即 y_0 是 $Ax=0$ 的解，综上两步得证.

43 ，

证：先证必要性，设 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解，则 $n-$秩$(AB)=n-$秩(B)，$\therefore$秩$(AB)=$秩(B).

再证充分性，设 W_1 与 W_2 分别为 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 的解空间，显然 $W_2\subseteq W_1$，又 $dimW_2=dimW_1=n-$秩$(AB)=n-$秩 B.

$\therefore W_2=W_1$，此即 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

44，证明：由 $A^2=A$ 可得

$$A(A-E)=0$$

根据 A,B 为 n 阶方阵市若 $AB=0$ 则 $r(A)+r(B)\le n$（592）得：

$$r(A)+r(A-E)\le n$$

另一方面（591），有

$$r(A)+r(A-E)\ge r[A-(A-E)]=r(E)=n$$

故得

$$r(A)+r(A-E)=n$$

45，证明：由 $A^2=E$ 可得

$$(A+E)(A-E)=0$$

根据 A,B 为 n 阶方阵市若 $AB=0$ 则 $r(A)+r(B)\le n$（592）得：

$$r(A+E)+r(A-E)\le n$$

另一方面（591），有

$$r(A+E)+r(A-E)\ge r[(A+E)-(A-E)]=r(2E)=n$$

故得

$$r(A+E)+r(A-E)=n$$

47，

(6)(天津师范大学)　可以证明对一切 $A_{n\times n}$(不一定 A 非奇异)都有

$$(A^*)^* = (A)^{n-2}A. \qquad ⑤$$

由于 $|A^*| = |A|^{n-1}$　⑥

(ⅰ)当秩 $A = n$ 时，$|A|\neq 0$，A 可逆，用 A^{-1}左乘①式两边可得

$$A^* = |A|\cdot A^{-1} \qquad ⑦$$

在 ⑦式中用 A 换 A^* 得

$$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}\left(\frac{1}{|A|}A\right) = |A|^{n-2}A. \qquad ⑧$$

(ⅱ)当秩 $A\leqslant n-1$ 时，则秩 $A^*\leqslant 1$，$|A| = 0$，从而秩$(A^*)^* = 0$.

$$(A^*)^* = 0 = |A|^{n-1}A, \qquad ⑨$$

综上⑧，⑨两式，即证$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

48，

证　证法Ⅰ.

可以证明方程组 $A^{n+1}X=0$ 与 $A^nX=0$ 有完全相同的解.事实上，若 $A^nX_1=0$，则左乘以 A 后得 $A^{n+1}X_1=0$. 即 $A^nX=0$ 的解都是 $A^{n+1}X=0$ 的解. 反之，若 $A^{n+1}X_1=0$，则必有 $A^nX_1=0$. 假若不然，设 $A^nX_1\neq 0$，则 $n+1$ 个 n 元向量 $A^nX_1, A^{n-1}X_1, \cdots, AX_1, X_1$ 线性无关.(因为若

$$k_0X_1+k_1AX_1+\cdots+k_nA^nX_1=0,$$

则依次用 $A^n, A^{n-1}, \cdots$乘，即得 $k_0=k_1=\cdots=k_n=0$)，矛盾.

所以 $A^n\cdot X_1=0$，因此 $A^{n+1}X=0$ 的解也都是 $A^nX=0$ 的解.所以 $r(A^n)=r(A^{n+1})$，同样可证$r(A^{n+1})=r(A^{n+2})=\cdots$

证法Ⅱ.

显然，$n\geqslant r(A^0)$(即 E)$\geqslant r(A)\geqslant r(A^2)\geqslant r(A^3)\geqslant\cdots\geqslant r(A^{n+1})\geqslant 0$，因此在这 $n+2$ 个矩阵中，必有某 $0\leqslant k\leqslant n$，使 $r(A^k)=r(A^{k+1})$. 于是由 587 题知方程组 $A^kX=0$，$A^{k+1}X=0$ 的解完全相同，从而方程组 $A^{k+1}X=0$ 与 $A^{k+2}X=0$ 的解完全相同，等等. 于是仍由 587 题知，

$$r(A^k)=r(A^{k+1})=r(A^{k+2})=\cdots.$$

1. (1)设 $a_1+b_1\sqrt{3},a_2+b_2\sqrt{3}\in K_1$，且 a_2,b_2 不全为零，则

$\dfrac{a_1+b_1\sqrt{3}}{a_2+b_2\sqrt{3}}=\dfrac{a_1a_2-3b_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}\sqrt{3}$ 不一定属于 K_1，因为 $\dfrac{a_1a_2-3b_1b_2}{a_2^2-3b_1^2}$，$\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-3b_1^2}$ 不一定为整数，所以 K_1 不是数域.

2.(2)设 $a_1+b_1i,a_2+b_2i\in F_2$，则 a_1+b_1i,a_2+b_2i 的和、差、积仍为 F_2 中的数，当 a_2,b_2 不全为零时，$\dfrac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$，由于 a_1,a_2,b_1 和 b_2 皆为有理数，且 a_2,b_2 不全为零，则 $\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$，$\dfrac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$ 也为有理数，故 $\dfrac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$ 也属于 F_2，

即 F_2 是数域.

3.(3)当 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 时，按数乘定义，$1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，所以不构成线性空间.

4.(1) $x=(x_1,x_2,x_3)\in W_1$，$y=(y_1,y_2,y_3)\in W_1$，有 $x+ky\in W_1$，所以 W_1 是子空间；

(2) $x=(1,1,1)\in W_2$，而 $-x\notin W_2$，所以 W_2 不是子空间；

(3) $x=(1,1,1)\in W_3$，而 $-x\notin W_3$，所以 W_3 不是子空间；

(4) $x=(x_1,x_2,x_3)\in W_4$，$y=(y_1,y_2,y_3)\in W_4$，有 $x+ky\in W_4$，所以 W_4 是子空间；

(5) $x=(1,0,1)\in W_5$，而 $-x\notin W_5$，所以 W_5 不是子空间；

(6) $x=(1,1,1)\in W_6$，而 $-x\notin W_6$，所以 W_6 不是子空间.

5.(1) $f(x)\geq 0$，而 $-f(x)\leq 0$，所以 U_1 不是子空间；

(2)设 $f\in U_2$，$g\in U_2$，则 $f(1)-f(2)=0$，$g(1)-g(2)=0$，

$$(f+kg)(1)-(f+kg)(2)=f(1)-f(2)+k\left[g(1)-g(2)\right]=0,$$

所以 $f+kg\in U_2$，即 U_2 是子空间；

(3) 设 $f\in U_3$，$g\in U_3$，则 $f(0)f(1)=0$，$g(0)g(1)=0$，

而 $$(f+g)(0)(f+g)(1)=\left[f(0)+g(0)\right]\left[f(1)+g(1)\right]$$

$=f(0)f(1)+g(0)g(1)+f(0)g(1)+g(0)f(1)=f(0)g(1)+g(0)f(1)$，不一定为零，所以$U_3$不是子空间；

(4) $f(1)-f^2(1)=0$，而$-f(1)-\left[-f(1)\right]^2=-f(1)-f^2(1)$，不一定为零，

所以U_4不是子空间；

(5) 设 $f\in U_5$，$g\in U_5$，则 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$，

$$(f+kg)(-x)=f(-x)+kg(-x)=f(x)+kg(x)=(f+kg)(x),$$

所以 $f+kg\in U_5$，即U_5是子空间；

(6) 设 $f\in U_6$，$g\in U_6$，则 $f(x)-f(x^2)=0$，$g(x)-g(x^2)=0$，

$$(f+kg)(x)-(f+kg)(x^2)=f(x)+kg(x)-\left[f(x^2)+kg(x^2)\right]$$
$$=f(x)-f(x^2)+k\left[g(x)-g(x^2)\right]=0$$

所以 $f+kg\in U_6$，即U_6是子空间.

6.(1)设$\varepsilon_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，

$\varepsilon_{33}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则若有 $k_1\varepsilon_{11}+k_2\varepsilon_{12}+k_3\varepsilon_{13}+k_4\varepsilon_{22}+k_5\varepsilon_{23}+k_6\varepsilon_{33}=0$，必有 $k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=k_6=0$，即 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{22},\varepsilon_{23},\varepsilon_{33}$ 线性无关，又任一 $\eta=\begin{pmatrix}a&b&c\\&d&e\\&&f\end{pmatrix}\in M^{3\times 3}$，可表示为$\eta=a\varepsilon_{11}+b\varepsilon_{12}+c\varepsilon_{13}+d\varepsilon_{22}+e\varepsilon_{23}+f\varepsilon_{33}$，因此，该子空间维数为 6，且$\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{22},\varepsilon_{23},\varepsilon_{33}$为一组基.

(2)设$\varepsilon_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，

$\varepsilon_{33}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则若有$k_1\varepsilon_{11}+k_2\varepsilon_{12}+k_3\varepsilon_{13}+k_4\varepsilon_{22}+k_5\varepsilon_{23}+k_6\varepsilon_{33}=0$，必有

$$k_1=k_2=k_3=k_4=k_5=k_6=0,$$

即 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{22},\varepsilon_{23},\varepsilon_{33}$ 线性无关，又任一 $\eta=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}\in M^{3\times3}$，可表示为

$$\eta=a\varepsilon_{11}+b\varepsilon_{12}+c\varepsilon_{13}+d\varepsilon_{22}+e\varepsilon_{23}+f\varepsilon_{33},$$

因此，该子空间维数为 6，且 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{22},\varepsilon_{23},\varepsilon_{33}$ 为一组基.

(3)设 $\varepsilon_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_{23}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，则若有 $k_1\varepsilon_{12}+k_2\varepsilon_{13}+k_3\varepsilon_{23}=0$，必有 $k_1=k_2=k_3=0$，即 $\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23}$ 线性无关，又任一 $\eta=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}\in M^{3\times3}$，可表示为 $\eta=a\varepsilon_{12}+b\varepsilon_{13}+c\varepsilon_{23}$，因此，该子空间维数为 3，且 $\varepsilon_{12},\varepsilon_{13},\varepsilon_{23}$ 为一组基.

7. 首先将系数矩阵化为规范阶梯矩阵，

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}=B$$

选 x_3,x_4,x_5 为自由未知量，分别取 $x_3=1,x_4=0,x_5=0$，$x_3=0,x_4=1,x_5=0$ 和 $x_3=0,x_4=0,x_5=1$，得基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以解空间的维数为 3，η_1,η_2,η_3 为一组基.

8.设 $\left(a_{ij}\right)_{2\times2},\left(b_{ij}\right)_{2\times2}$ 属于该集合，则 $\left(a_{ij}\right)_{2\times2}+k\left(b_{ij}\right)_{2\times2}$ 也属于该集合，即该集合是 $M^{2\times2}$ 的子空间；设 $\varepsilon_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\varepsilon_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，则若有 $k_1\varepsilon_{11}+k_2\varepsilon_{12}+k_3\varepsilon_{21}=0$，必有 $k_1=k_2=k_3=0$，即 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21}$ 线性无关，又任一 $\eta=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix}\in M^{2\times2}$，可表示为 $\eta=a\varepsilon_{11}+b\varepsilon_{12}+c\varepsilon_{21}$，因此，该子空间维数为 3，且 $\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\varepsilon_{21}$ 为一组基.

9.以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为列作矩阵，并对其作初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1&4&0&3&-1\\1&5&1&2&0\\-1&-2&0&-1&0\\-1&-7&-1&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&0&3&-1\\0&1&1&-1&1\\0&0&-2&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

由于$r(A)=r(B)=3$，且由B知，第 1，2，3 列线性无关，故子空间的维数为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为一组基.

10.因为$k_1k_3\neq0$，即$k_1\neq0$，$k_3\neq0$，于是由

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=O \tag{1}$$

可得
$$\alpha_1=-\frac{k_2}{k_1}\alpha_2-\frac{k_3}{k_1}\alpha_3,$$

故α_1可由α_2,α_3线性表示. 因此，α_1,α_2可由α_2,α_3线性表示.

同样由(1)可知，α_3可由α_1,α_2线性表示. 因此，α_2,α_3可由α_1,α_2线性表示. 即α_1,α_2同α_2,α_3等价，故

$$L(\alpha_1,\alpha_2)=L(\alpha_2,\alpha_3).$$

11．构造矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$，对$A$作初等行变换，将其化为规范的阶梯形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&3\\1&0&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&5\\0&0&1&-1\end{pmatrix}=B$$

显然，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$A$的列向量组的一组基，且$\beta$在这组基下的坐标为$(2,5,-1)^T$.

12．构造矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta)$，对$A$作初等行变换，将其化为规范的阶梯形矩阵，即

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&-1&-1&2\\1&-1&1&-1&1\\1&-1&-1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{5}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&0&1&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=B$$

显然，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是$A$的列向量组的一组基，且$\beta$在这组基下的坐标为$\left(\frac{5}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)^T$.

13．(1)由于$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)C$，即

$$\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}C$$

故$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}$，

设ξ在$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标为$x'$，已知$\xi=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，则

由(4.9)式

$$x'=C^{-1}x=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}&\frac{1}{3}&-1&-\frac{11}{9}\\\frac{1}{27}&\frac{4}{9}&-\frac{1}{3}&-\frac{23}{27}\\\frac{1}{3}&0&0&-\frac{2}{3}\\-\frac{7}{27}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}&\frac{26}{27}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4x_1+3x_2-9x_3-11x_4}{9}\\\frac{x_1+12x_2-9x_3-23x_4}{27}\\\frac{x_1-2x_4}{3}\\\frac{-7x_1-3x_2+9x_3+26x_4}{27}\end{pmatrix}$$

(2). 设由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的过渡矩阵为$C$,

则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)C$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&1&1&0\\2&-1&2&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\0&2&1&1\\1&1&1&3\\1&2&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

设ξ在$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$,

则$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4=(1\quad 0\quad 0\quad 0)^T$

得ξ在$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$下的坐标为$\begin{pmatrix}\frac{4}{13}\\\frac{2}{13}\\\frac{-3}{13}\\\frac{-1}{13}\end{pmatrix}$

ξ在$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$下的坐标为 $C^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{13}\\\frac{5}{13}\\\frac{-2}{13}\\\frac{-3}{13}\end{pmatrix}$

14．由题意知$\begin{cases}\dfrac{4x_1+3x_2-9x_3-11x_4}{9}=x_1\\\dfrac{x_1+12x_2-9x_3-23x_4}{27}=x_2\\\dfrac{x_1-2x_4}{3}=x_3\\\dfrac{-7x_1-3x_2+9x_3+26x_4}{27}=x_4\end{cases}$ 整理得$\begin{cases}-5x_1+3x_2-9x_3-11x_4=0\\x_1-15x_2-9x_3-23x_4=0\\x_1-3x_3-2x_4=0\\-7x_1-3x_2+9x_3-x_4=0\end{cases}$

将系数矩阵化为规范阶梯矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}-5&3&-9&-11\\1&-15&-9&-23\\1&0&-3&-2\\-7&-3&9&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

选x_4为自由未知量，取$x_4=1$，得基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

所以$\eta=c\eta_1=c\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

15.因为 α 非零，则 a_1,a_2,a_3 不全为零，假设 a_1 不为零，取 $\beta_1=\alpha$，$\beta_2=\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_3$，则 β_1,β_2,β_3 为一组基，且 α 在这组基下的坐标为 $(1,0,0)^T$.

16. (1)不难看出 $1=1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$，$1+x=1+x+0\cdot x^2+0\cdot x^3$，$1+x+x^2=1+x+x^2+0\cdot x^3$，$1+x+x^2+x^3=1+x+x^2+x^3$，所以 $1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$ 在 $1,x,x^2,x^3$ 下的坐标分别为

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

即从 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$ 的过渡矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix};$$

(2) $1+2x+3x^2+3x^3$ 在 $1,x,x^2,x^3$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\end{pmatrix}$，由 (4.9) 式 $1+2x+3x^2+3x^3$ 在 $1,1+x,1+x+x^2,1+x+x^2+x^3$ 下的坐标为

$$x'=C^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\3\end{pmatrix};$$

(3) $p(x)$ 在 $1,x,x^2,x^3$ 下的坐标为

$$x=C\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\9\\7\\4\end{pmatrix}.$$

17. 不难看出 $\eta_1=0\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$，$\eta_2=\varepsilon_1+0\cdot\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$，$\eta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3+\varepsilon_4$，$\eta_4=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+0\cdot\varepsilon_4$，所以 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标分别为

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

即从$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$到$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$的过渡矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix};$$

由于$\delta=0\varepsilon_1+\varepsilon_2+2\varepsilon_3+3\varepsilon_4$，则$\delta$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的坐标为$\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$，由(4.9)式$\delta$在$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$下的坐标为

$$x'=C^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

18．因为$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)+2(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)\le(\alpha,\alpha)+2|\alpha||\beta|+(\beta,\beta)$

$$=|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2=(|\alpha|+|\beta|)^2,$$

而$|\alpha+\beta|\ge0$，$|\alpha|+|\beta|\ge0$，故$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$.

19．(1)$|\alpha_1|=\sqrt{1^2+1^2+1^2+2^2}=\sqrt{7}$，$|\beta_1|=\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{11}$；

(2)$\langle\alpha_1,\beta_1\rangle=\arccos\frac{(\alpha_1,\beta_1)}{|\alpha_1||\beta_1|}=\arccos\frac{3}{\sqrt{77}}$，$\langle\alpha_2,\beta_2\rangle=\arccos\frac{(\alpha_2,\beta_2)}{|\alpha_2||\beta_2|}=\arccos 0=\frac{\pi}{2}$；

(3) $|\alpha_1-\beta_1|=\sqrt{(1-3)^2+(1-1)^2+(1+1)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{3}$，

$|\alpha_2-\beta_2|=\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2+(3+2)^2+(2-1)^2}=2\sqrt{7}$.

20．设所求单位向量为$(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$，则有

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3-a_4=0 \\ a_1-a_2+a_3-a_4=0 \\ 2a_1+a_2+3a_3+a_4=0 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=1 \end{cases}$$

解得$\begin{cases} a_1=\pm\dfrac{4}{\sqrt{26}} \\ a_2=0 \\ a_3=\mp\dfrac{3}{\sqrt{26}} \\ a_4=\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}} \end{cases}$，所以所求单位向量为$\pm\left(\dfrac{4}{\sqrt{26}},0,-\dfrac{3}{\sqrt{26}},\dfrac{1}{\sqrt{26}}\right)^T$.

21．因为$a_1,a_2,\cdots,a_n$是V的一组基，则可设$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，又$(\beta,\alpha_i)=0$，则有$(\beta,\beta)=(\beta,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)=\sum_{i=1}^{n}k_i(\beta,\alpha_i)=0$，所以$\beta=0$.

22．设任一向量$\alpha\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，则可设$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，又$(\beta,\alpha_i)=0$，则有$(\beta,\alpha)=(\beta,k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=\sum_{i=1}^{m}k_i(\beta,\alpha_i)=0$，即$\beta$与$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$中的任何向量均正交.

23．(2)设$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，正交化：

$$\beta_1=\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \beta_2=\eta_2-\frac{(\beta_1,\eta_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\eta_3-\frac{(\beta_1,\eta_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\eta_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\2/3\\1\end{pmatrix}$$

再单位化：

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$即为所得标准正交基.

(3). 设$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}$，$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix}$，正交化：

$$\beta_1=\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}，\quad \beta_2=\eta_2-\frac{(\beta_1,\eta_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\-2\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\eta_3-\frac{(\beta_1,\eta_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\eta_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{5}{14}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{14}\\0\\-\frac{5}{14}\\\frac{2}{7}\end{pmatrix}$$

再单位化：

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}，\quad \varepsilon_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}，\quad \varepsilon_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}1\\0\\-5\\4\end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$即为所得标准正交基.

24．首先将系数矩阵化为规范阶梯矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1&-1\\2&1&-3&1&0\\3&2&-4&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&2&1\\0&1&1&-3&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

选 x_3,x_4,x_5 为自由未知量，分别取 $x_3=1,x_4=0,x_5=0$，$x_3=0,x_4=1,x_5=0$ 和 $x_3=0,x_4=0,x_5=1$，得基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}，\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\\0\end{pmatrix}，\quad \eta_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

正交化：

$$\beta_1=\eta_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \beta_2=\eta_2-\frac{(\beta_1,\eta_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{7}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\11/6\\7/6\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\eta_3-\frac{(\beta_1,\eta_3)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\beta_2,\eta_3)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{4}{7}\begin{pmatrix}1/3\\11/6\\7/6\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/7\\2/7\\0\\-4/7\\1\end{pmatrix}$$

再单位化：

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{210}}\begin{pmatrix}2\\11\\7\\6\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon_3=\frac{\beta_3}{|\beta_3|}=\frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-4\\7\end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 即为 R^3 的一组标准正交基.

25．(1)设 $\alpha\in S$， $\beta\in S$， 则 $\alpha\perp\alpha_1,\alpha\perp\alpha_2$， $\beta\perp\alpha_1,\beta\perp\alpha_2$， $(\alpha+k\beta)\perp\alpha_1,(\alpha+k\beta)\perp\alpha_2$，

即 $\alpha+k\beta\in S$， 故 S 是 R^4 的子空间；

(2)设 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in S$， 则 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1-2x_2=0\end{cases}$，

将系数矩阵化为规范阶梯矩阵，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-2&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

选 x_3,x_4 为自由未知量，分别取 $x_3=1,x_4=0$ 和 $x_3=0,x_4=1$ 得基础解系

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\\1\end{pmatrix}$$

正交化：

$$\beta_1=\eta_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix},\quad \beta_2=\eta_2-\frac{(\beta_1,\eta_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{5}{14}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{7}\\-\frac{3}{14}\\-\frac{5}{14}\\1\end{pmatrix}$$

再单位化：

$$\varepsilon_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\\0\end{pmatrix},\quad \varepsilon_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{266}}\begin{pmatrix}-6\\-3\\-5\\14\end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 即为 S 的一组标准正交基；

(3)任取 η_3， η_4， 使 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 构成 R^4 的一组基，再正交化，单位化，即得到 R^4 的一组标准正交基.

1．(3)

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$$

所以，A 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，解齐次线性方程组 $(-E-A)X=O$，得其基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，故

与 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应的全体特征向量为

$$c\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

其中 c 为非零常数.

2．设 λ 为 A 的特征值，α 是对应的特征向量，则

$$A\alpha=\lambda\alpha$$

用矩阵 A 左乘上式两端，并利用 $A^2=A$，得

$$A^2\alpha=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha=A\alpha=\lambda\alpha$$

故

$$\lambda(\lambda-1)\alpha=0$$

即 $\lambda=0,1$.

3．设 λ 为 A 的特征值，α 是对应的特征向量，则

$$A\alpha=\lambda\alpha$$

用矩阵 A^{k-1} 左乘上式两端，并利用 $A^k=O$，得

$$A^k\alpha=\lambda^k\alpha=O$$

故

$$\lambda^k=0$$

即 $\lambda=0$.

4．因为 λ 是 A 的特征值，α 是对应的特征向量，则

$$g(A)\alpha=\left(a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mE\right)\alpha=a_0A^m\alpha+a_1A^{m-1}\alpha+\cdots+a_{m-1}A\alpha+a_mE\alpha$$

$$=a_0\lambda^m\alpha+a_1\lambda^{m-1}\alpha+\cdots+a_{m-1}\lambda\alpha+a_m\alpha=g(\lambda)\alpha$$

即 $g(\lambda)$ 是 $g(A)$ 的特征值，α 是对应的特征向量.

5. 设 β 为 $\left(\mathrm{P}^{-1}AP\right)^T$ 对应于 λ 的特征向量.

由题意， $A\alpha=\lambda\alpha$，且 $A^T=A$

$$\beta=P^T\alpha \ (P^{-1}AP)^T\beta=\lambda\beta$$

$$P^TA(P^T)^{-1}\beta=\lambda\beta$$

$$A(P^T)^{-1}\beta=\lambda(P^T)^{-1}\beta$$

则，$(P^T)^{-1}\beta$ 为 A 对应于 λ 的特征向量.

故， $\alpha=(P^T)^{-1}\beta$

即， $\beta=P^T\alpha$

7. A 的特征多项式为 $(\lambda+2)^4(\lambda-1)=0$.

8. 由题意，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，

则 $B^T=(P^{-1}AP)^T=(P^{-1})^TA^TP^T=(P^T)^{-1}A^TP^T$

由于 P^T 可逆，所以 $A^T\sim B^T$

9．因为 $P^{-1}A_1P=B_1$， $P^{-1}A_2P=B_2$，则 $P^{-1}(A_1+A_2)P=P^{-1}A_1P+P^{-1}A_2P=B_1+B_2$，

即 $A_1+A_2\sim B_1+B_2$；

且 $P^{-1}A_1A_2P=P^{-1}A_1PP^{-1}A_2P=B_1B_2$，

即 $A_1A_2\sim B_1B_2$.

10． A 可逆，则 A^{-1} 存在，且 $A^{-1}ABA=BA$

由定义 $AB\sim BA$.

16. $\left(M^{-1}AM\right)^n=M^{-1}A^nM=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6n&4n\\-9n&1-6n\end{pmatrix}$

18． A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-1)^2$$

故 A 的特征值为

$$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=1$$

对 $\lambda_1=0$，齐次线性方程组 $AX=O$ 的基础解系为

$$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$$

对 $\lambda_2=\lambda_3=1$，齐次线性方程组 $(E-A)X=O$ 的基础解系为

$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

令

$$Q=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}A^nQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

故

$$A^n=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&5&-2\\-4&8&-3\end{pmatrix}.$$

19．必要性：由性质知，$A\sim B$，则 A,B 有相同的特征值，又 A,B 为对角矩阵，则特征值为主对角元，即 A 和 B 的主对角元除了排列次序外是完全相同的；

充分性：若 A 和 B 的主对角元除了排列次序外是完全相同的，则必存在初等矩阵 $R_i\left(i=1,2,\cdots,s\right)$，使得 $R_1R_2\cdots R_sAR_s^{-1}\cdots R_2^{-1}R_1^{-1}=B$，即 $A\sim B$．

23．设

$$Q=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

则由题意知

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

故

$$A=Q\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

29．因为 A 正交，且 $|A|=1$，则

$|E-A|=|A^TA-A|=|A^T-E||A|=|A^T-E^T|=|A-E|=(-1)^n|E-A|$

又 A 为奇数阶，则 $|E-A|=-|E-A|$，即 $|E-A|=0$

故 $E-A$ 为不可逆矩阵.

31．(1) A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

故 A 的特征值为

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$$

对 $\lambda_1=1$，齐次线性方程组 $(E-A)X=O$ 的基础解系为

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\varepsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

对 $\lambda_2=2$，齐次线性方程组 $(2E-A)X=O$ 的基础解系为

$$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

对 $\lambda_3=5$，齐次线性方程组 $(5E-A)X=O$ 的基础解系为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

单位化得

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令

$$Q = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2) A 的特征多项式为

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 10)$$

故 A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$$

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，齐次线性方程组 $(E - A)X = O$ 的基础解系为

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

正交化单位化得

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

对 $\lambda_3 = 10$，齐次线性方程组 $(10E - A)X = O$ 的基础解系为

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

单位化得

$$\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

令

$$Q = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

则

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

32. 设 $\alpha_1 = (1 \quad -2 \quad 0)^T$，$\alpha_2 = (1 \quad 0 \quad -1)^T$，特征值 8 对应的特征向量为 $x = (x_1, \quad x_2, \quad x_3)^T$，由于实对称矩阵不同特征根对应特征向量正交，故

$(\alpha_1, \quad x) = x_1 - 2x_2 = 0$， $(\alpha_2, \quad x) = x_1 - x_3 = 0$

求得方程组的基础解系为 $\alpha_3 = (2 \quad 1 \quad 2)^T$

取 α_3 为特征值 8 对应的特征向量，并令

$$P = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \Lambda$$

则 $A=P^{-1}\Lambda P=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\\\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&-\frac{5}{9}\\\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$