北师大版精品全册教案 高中数学选修2-1教案

四种命题、四种命题的相互关系

（一）教学目标

◆**知识与技能**：了解原命题、逆命题、否命题、逆否命题这四种命题的概念，掌握四种命题的形式和四种命题间的相互关系，会用等价命题判断四种命题的真假.

◆**过程与方法**：多让学生举命题的例子，并写出四种命题，培养学生发现问题、提出问题、分析问题、有创造性地解决问题的能力；培养学生抽象概括能力和思维能力.

◆**情感、态度与价值观**：通过学生的举例，激发学生学习数学的兴趣和积极性，培养他们的辨析能力以及培养他们的分析问题和解决问题的能力.

（二）教学重点与难点

重点：（1）会写四种命题并会判断命题的真假；（2）四种命题之间的相互关系.

难点：（1）命题的否定与否命题的区别；　　（2）写出原命题的逆命题、否命题和逆否命题；（3）分析四种命题之间相互的关系并判断命题的真假.

教具准备：与教材内容相关的资料。

教学设想：通过学生的举例，激发学生学习数学的兴趣和积极性，培养他们的辨析能力以及培养他们的分析问题和解决问题的能力.

（三）教学过程

学生探究过程：

1．复习引入

初中已学过命题与逆命题的知识，请同学回顾：什么叫做命题的逆命题？

2．思考、分析

问题1：下列四个命题中，命题（1）与命题（2）（3）（4）的条件与结论之间分别有什么关系？

（1）若$f(x)$是正弦函数，则$f(x)$是周期函数.（2）若$f(x)$是周期函数，则$f(x)$是正弦函数.（3）若$f(x)$不是正弦函数，则$f(x)$不是周期函数.（4）若$f(x)$不是周期函数，则$f(x)$不是正弦函数.

3．归纳总结

问题一通过学生分析、讨论可以得到正确结论. 紧接结合此例给出四个命题的概念，（1）和（2）这样的两个命题叫做**互逆命题，**（1）和（3）这样的两个命题叫做**互否命题，**（1）和（4）这样的两个命题叫做**互为逆否命题。**

4．抽象概括

定义1：一般地，对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们把这样的两个命题叫做**互逆命题**. 其中一个命题叫做**原命题**，另一个命题叫做原命题的**逆命题**.

让学生举一些互逆命题的例子。

定义2：一般地，对于两个命题，如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的

否定和结论的否定，那么我们把这样的两个命题叫做**互否命题**. 其中一个命题叫做**原命题**，另一个命题叫做原命题的**否命题**.

让学生举一些互否命题的例子。

定义 3：一般地，对于两个命题，如果一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定，那么我们把这样的两个命题叫做**互为逆否命题**.其中一个命题叫做**原命题**，另一个命题叫做原命题的**逆否命题**.

让学生举一些互为逆否命题的例子。

小结：

(1) 交换原命题的条件和结论，所得的命题就是它的**逆命题**：

(2) 同时否定原命题的条件和结论，所得的命题就是它的**否命题**；

(3) 交换原命题的条件和结论，并且同时否定，所得的命题就是它的**逆否命题**.

强调：原命题与逆命题、原命题与否命题、原命题与逆否命题是相对的。

5．四种命题的形式

让学生结合所举例子，思考：

若原命题为"若 P，则 q"的形式，则它的逆命题、否命题、逆否命题应分别写成什么形式？

学生通过思考、分析、比较，总结如下：

原命题：若 P，则 q．则：

逆命题：若 q，则 P．

否命题：若¬P，则¬q．（说明符号"¬"的含义：符号"¬"叫做否定符号."¬p"表示 p 的否定；即不是 p；非 p）

逆否命题：若¬q，则¬P．

6．巩固练习

写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题并判断它们的真假：

（1） 若一个三角形的两条边相等，则这个三角形的两个角相等；

（2） 若一个整数的末位数字是 0，则这个整数能被 5 整除；

（3） 若 $x^2=1$, 则 $x=1$；

（4） 若整数 a 是素数，则是 a 奇数。

7．思考、分析

结合以上练习思考：原命题的真假与其它三种命题的真假有什么关系？

通过此问，学生将发现：

①原命题为真，它的逆命题不一定为真。

②原命题为真，它的否命题不一定为真。

③原命题为真，它的逆否命题一定为真。

原命题为假时类似。

结合以上练习完成下列表格：

原　命　题	逆　命　题	否　命　题	逆　否　命　题

真	真		
		假	真
假		真	
	假		假

由表格学生可以发现：**原命题与逆否命题总是具有相同的真假性，逆命题与否命题也总是具有相同的真假性.**

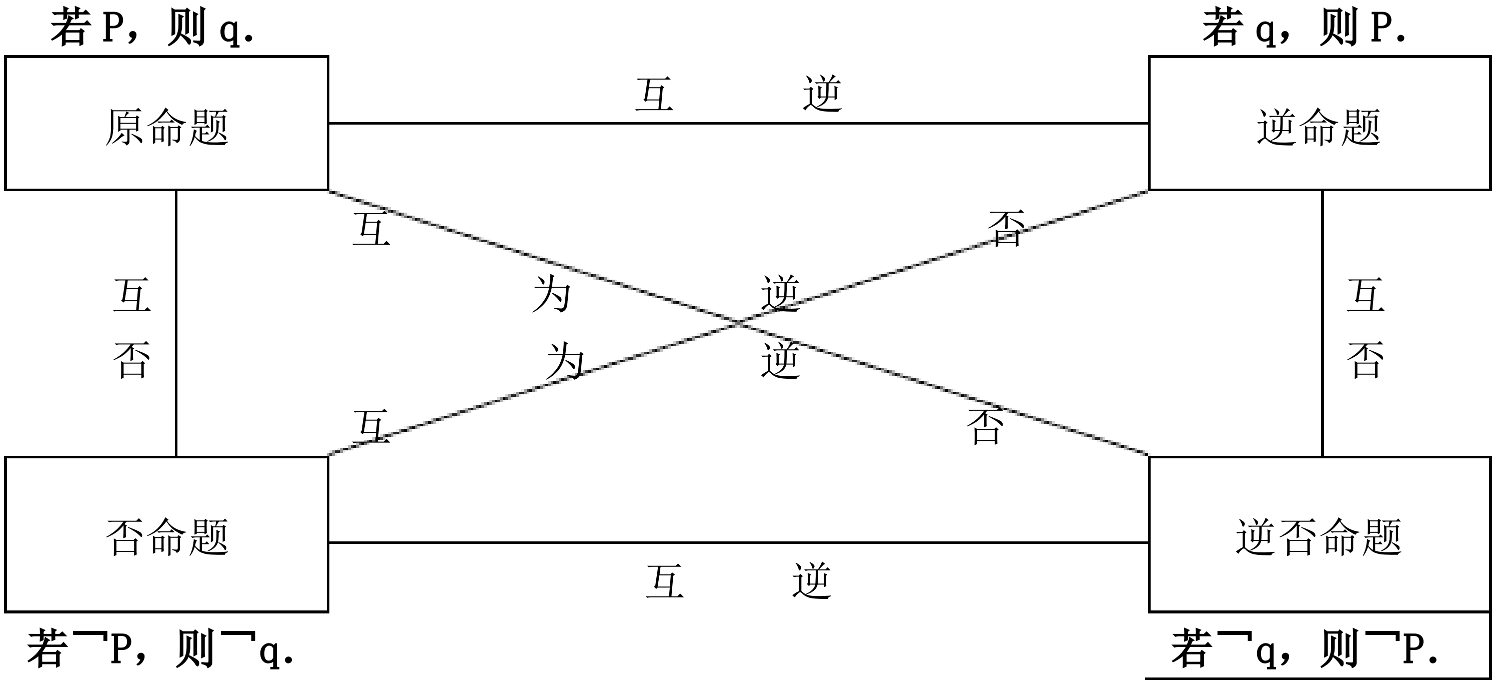
由此会引起我们的**思考：**

一个命题的逆命题、否命题与逆否命题之间是否还存在着一定的关系呢？

让学生结合所做练习分析原命题与它的逆命题、否命题与逆否命题四种命题间的关系.

学生通过分析，将发现四种命题间的关系如下图所示：

8．总结归纳



由于逆命题和否命题也是互为逆否命题，因此四种命题的真假性之间的关系如下：

（1）两个命题互为逆否命题，它们有相同的真假性；

（2）两个命题为互逆命题或互否命题，它们的真假性没有关系.

由于原命题和它的逆否命题有相同的真假性，所以在直接证明某一个命题为真命题有困难时，可以通过证明它的逆否命题为真命题，来间接地证明原命题为真命题.

9．例题分析

例 4： 证明：若 $p^2+q^2=2$，则 $p+q\leqslant 2$.

分析：如果直接证明这个命题比较困难，可考虑转化为对它的逆否命题的证明。

将“若 $p^2+q^2=2$，则 $p+q\leqslant 2$”视为原命题，要证明原命题为真命题，可以考虑证明它的逆否命题“若 $p+q>2$，则 $p^2+q^2\neq 2$”为真命题，从而达到证明原命题为真命题的目的.

证明：若 $p+q>2$，则

$$p^2+q^2=\frac{1}{2}\left[(p-q)^2+(p+q)^2\right]\geqslant\frac{1}{2}(p+q)^2>\frac{1}{2}\times 2^2=2$$

所以 $p^2+q^2\neq 2$.

这表明，原命题的逆否命题为真命题，从而原命题为真命题。

练习巩固：证明：若 $a^2-b^2+2a-4b-3\neq 0$，则 $a-b\neq 1$．

１０：教学反思

（１）逆命题、否命题与逆否命题的概念；

（２）两个命题互为逆否命题，他们有相同的真假性；

（３）两个命题为互逆命题或互否命题，他们的真假性没有关系；

（４）原命题与它的逆否命题等价；否命题与逆命题等价.

充分条件与必要条件

（一）教学目标

1.知识与技能：正确理解充分不必要条件、必要不充分条件的概念；会判断命题的充分条件、必要条件.

2.过程与方法：通过对充分条件、必要条件的概念的理解和运用，培养学生分析、判断和归纳的逻辑思维能力.

３．情感、态度与价值观：通过学生的举例，培养他们的辨析能力以及培养他们的良好的思维品质，在练习过程中进行辩证唯物主义思想教育.

（二）教学重点与难点

重点：充分条件、必要条件的概念.

(解决办法：对这三个概念分别先从实际问题引起概念，再详细讲述概念，最后再应用概念进行论证.）

难点：判断命题的充分条件、必要条件

关键：分清命题的条件和结论，看是条件能推出结论还是结论能推出条件

（三）教学过程

1．练习与思考

写出下列两个命题的条件和结论，并判断是真命题还是假命题？

（1）若 $x > a^2 + b^2$，则 $x > 2ab$,

（2）若 $ab = 0$，则 $a = 0$.

学生容易得出结论；命题(1)为真命题，命题(２)为假命题.

置疑：对于命题“若 p，则 q”，有时是真命题，有时是假命题．如何判断其真假的？

答：看 p 能不能推出 q，如果 p 能推出 q，则原命题是真命题，否则就是假命题.

２．给出定义

命题“若 p，则 q” 为真命题，是指由 p 经过推理能推出 q，也就是说，如果 p 成立，那么 q 一定成立．换句话说，只要有条件 p 就能充分地保证结论 q 的成立，这时我们称条件 p 是 q 成立的充分条件.

一般地，“若 p，则 q”为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q．这时，我们就说，由 p 可推出 q，记作：p　q.

定义：如果命题“若 p，则 q”为真命题，即 $p \Rightarrow q$,那么我们就说 **p 是 q 的充分条件；q 是 p 必要条件.**

上面的命题(1)为真命题，即 $x > a^2 + b^2 \Rightarrow x > 2ab$，

所以“$x > a^2 + b^2$”是“$x > 2ab$”的充分条件，“$x > 2ab$”是“$x > a^2 + b^2$”的必要条件.

3．例题分析：

例 1：下列“若 p，则 q”形式的命题中，那些命题中的 p 是 q 的充分条件？

（1）若 $x =1$，则 $x^2 - 4x + 3 = 0$；

（2）若 $f(x)= x$，则 $f(x)$为增函数；

（3）若 x 为无理数，则 x^2为无理数.

分析：要判断 p 是否是 q 的充分条件，就要看 p 能否推出 q.　解略.

例 2：下列“若 p,则 q”形式的命题中，那些命题中的 q 是 p 的必要条件?

(1) 若 $x = y$，则 $x^2 = y^2$；

(2) 若两个三角形全等，则这两个三角形的面积相等；

(3) 若 $a >b$,则 $ac>bc$.

分析：要判断 q 是否是 p 的必要条件，就要看 p 能否推出 q.　解略.

4．练习巩固：　5．课堂总结

充分、必要的定义.

在“若 p，则 q”中，若 $p \Rightarrow q$，则 p 为 q 的充分条件，q 为 p 的必要条件.

注:（1）条件是相互的;

（2）p 是 q 的什么条件，有四种回答方式：

① p 是 q 的充分而不必要条件；

② p 是 q 的必要而不充分条件；

③ p 是 q 的充要条件；

④ p 是 q 的既不充分也不必要条件.

充要条件

(一)教学目标

1.知识与技能目标：

(1)正确理解充要条件的定义,了解充分而不必要条件, 必要而不充分条件, 既不充分也不必要条件的定义.

（2）正确判断充分不必要条件、 必要不充分条件、充要条件、 既不充分也不必要条件.

（3）通过学习，使学生明白对条件的判定应该归结为判断命题的真假 .

2.过程与方法目标：在观察和思考中，在解题和证明题中，培养学生思维能力的严密性品质.

3. 情感、态度与价值观：

激发学生的学习热情，激发学生的求知欲，培养严谨的学习态度，培养积极进取的精神.

（二）教学重点与难点

重点：1、正确区分充要条件　　2、正确运用“条件”的定义解题

难点：正确区分充要条件.

(三)教学过程

1.思考、分析

已知p：整数a是2的倍数；q：整数a是偶数.

请判断： p是q的充分条件吗？p是q的必要条件吗？

分析：要判断p是否是q的充分条件，就要看p能否推出q，要判断p是否是q的必要条件，就要看q能否推出p.

易知：$p \Rightarrow q$，故p是q的充分条件；

又 $q \Rightarrow p$，故p是q的必要条件.

此时,我们说，p是q的**充分必要条件**

2.类比归纳

一般地,如果既有 $p \Rightarrow q$ ，又有 $q \Rightarrow p$ 就记作

$$p \Leftrightarrow q.$$

此时,我们说,那么p是q的**充分必要条件**,简称**充要条件**.显然,如果p是q的充要条件,那么q也是p的充要条件.

概括地说,**如果 $p \Leftrightarrow q$,那么p 与 q互为充要条件**.

3.例题分析

例1：下列各题中，哪些p是q的充要条件？

（1） $p: b=0$, q:函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数；

（2） $p: x>0, y>0$, $q: xy>0$；

（3） $p: a>b$, $q: a+c>b+c$；

（4） $p: x>5$, , $q: x>10$

（5） $p: a>b$, $q: a^2>b^2$

分析：要判断p是q的充要条件，就要看p能否推出q，并且看q能否推出p.

解：命题（1）和（3）中，$p \Rightarrow q$ ，且 $q \Rightarrow p$，即 $p \Leftrightarrow q$，故p 是q的充要条件；

命题（2）中，$p \Rightarrow q$,但 $q \not\Rightarrow p$，故p 不是q的充要条件；

命题（4）中，$p \not\Rightarrow q$ ，但 $q \Rightarrow p$，故p 不是q的充要条件；

命题（5）中，$p \not\Rightarrow q$ ，且 $q \not\Rightarrow p$，故p 不是q的充要条件；

4．类比定义

一般地，

若 $p \Rightarrow q$,但 $q \not\Rightarrow p$，则称p是q的充分但不必要条件；

若 $p \not\Rightarrow q$，但 $q \Rightarrow p$，则称p是q的必要但不充分条件；

若 $p \not\Rightarrow q$，且 $q \not\Rightarrow p$，则称p是q的既不充分也不必要条件.

在讨论p是q的什么条件时，就是指以下四种之一：

①若 $p \Rightarrow q$,但 $q \not\Rightarrow p$，则p是q的充分但不必要条件；

②若 $q \Rightarrow p$，但 $p \not\Rightarrow q$，则p是q的必要但不充分条件；

③若 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件；

④若 p $\not\Rightarrow$ q，且 q $\not\Rightarrow$ p，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

5．练习巩固： 说明：要求学生回答 p 是 q 的充分但不必要条件、或 p 是 q 的必要但不充分条件、或 p 是 q 的充要条件、或 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

6．例题分析

例 2：已知：⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d．求证：d＝r 是直线 l 与⊙O 相切的充要条件.

分析：设 p：d＝r，q：直线 l 与⊙O 相切．要证 p 是 q 的充要条件，只需要分别证明充分性（$p\Rightarrow q$）和必要性（$q\Rightarrow p$）即可.

证明过程略.

例 3、设 p 是 r 的充分而不必要条件，q 是 r 的充分条件，r 成立，则 s 成立．s 是 q 的充分条件，问（1）s 是 r 的什么条件？（2）p 是 q 的什么条件？

7．课堂总结：

充要条件的判定方法

如果“若 p，则 q”与“ 若 p 则 q”都是真命题，那么 p 就是 q 的充要条件，否则不是.

全称量词与存在量词

(一)教学目标

1.知识与技能目标

（1）通过生活和数学中的丰富实例理解全称量词与存在量词的含义，熟悉常见的全称量词和存在量词.

（2）了解含有量词的全称命题和特称命题的含义，并能用数学符号表示含有量词的命题及判断其命题的真假性.

2.过程与方法目标 使学生体会从具体到一般的认知过程，培养学生抽象、概括的能力.

3.情感态度价值观

通过学生的举例，培养他们的辨析能力以及培养他们的良好的思维品质，在练习过程中进行辩证唯物主义思想教育.

(二)教学重点与难点

重点:理解全称量词与存在量词的意义　　　难点: 全称命题和特称命题真假的判定.

教具准备：与教材内容相关的资料。

教学设想：激发学生的学习热情，激发学生的求知欲，培养严谨的学习态度，培养积极进取的精神.

（三）教学过程

学生探究过程：**1．思考、分析**

下列语句是命题吗？假如是命题你能判断它的真假吗？

（1）2x＋1 是整数；　（2）x＞3；

(3) 如果两个三角形全等，那么它们的对应边相等；

（4）平行于同一条直线的两条直线互相平行；

(5)海师附中今年所有高中一年级的学生数学课本都是采用人民教育出版社A版的教科书；

（6）所有有中国国籍的人都是黄种人；　（7）对所有的x∈R，x＞３；

（8）对任意一个x∈Ｚ，2x＋１是整数。

1． 推理、判断

（让学生自己表述）

（1)、(2）不能判断真假，不是命题。

（3)、(4)是命题且是真命题。

（5）－（8）如果是假，我们只要举出一个反例就行。

注：对于（5）－（8）最好是引导学生将反例用命题的形式写出来。因为这些命题的反例涉及到“存在量词”“特称命题”“全称命题的否定”这些后续内容。

（5）的真假就看命题：海师附中今年存在个别（部分）高一学生数学课本不是采用人民教育出版社A版的教科书；这个命题的真假，该命题为真，所以命题（5）为假；

命题（6）是假命题．事实上，存在一个（个别、部分）有中国国籍的人不是黄种人．

命题（7）是假命题．事实上，存在一个（个别、某些）实数（如x＝2)， x＜３．

（至少有一个x∈R，x≤３）

命题（8）是真命题。事实上不存在某个x∈Ｚ，使2x＋１不是整数。也可以说命题：存在某个x∈Ｚ使2x＋１不是整数，是假命题．

3．发现、归纳

命题（5）－（8）跟命题（3)、(4）有些不同，它们用到 **“所有的”“任意一个”** 这样的词语，这些词语一般在指定的范围内都表示**整体或全部**，这样的词**叫做全称量词**，用符号**“∀”**表示，**含有全称量词的命题，叫做全称命题**。命题（5）－（8）都是全称命题。

通常将含有变量x的语句用p（x)，q（x)，r（x)，……表示，变量x的取值范围用M表示。那么全称命题“对M中任意一个x，有p（x）成立”可用符号简记为：∀x∈M, p（x)，读做“对任意x属于M，有p（x）成立”。

刚才在判断命题（5）－（8）的真假的时候，我们还得出这样一些命题：

(5)' 存在个别高一学生数学课本不是采用人民教育出版社A版的教科书；

(6)' 存在一个（个别、部分）有中国国籍的人不是黄种人．

(7)' 存在一个（个别、某些）实数x（如x＝2)，使x≤３．(至少有一个 x∈R，x≤３）

(8)' 不存在某个x∈Ｚ使2x＋１不是整数．

这些命题用到了**“存在一个”“至少有一个”**这样的词语，这些词语都是表示**整体的一部分**的词叫做**存在量词**。并用符号“∃”表示。**含有存在量词的命题叫做特称命题（或存在命题）**命题（5)'－（8)'都是特称命题（存在命题)．

特称命题：“存在M中一个x，使p（x）成立”可以用符号简记为：$\exists x \in M, p(x)$。读做“存在一个x属于M,使p（x）成立”.

全称量词相当于日常语言中“凡”,“所有”,“一切”,“任意一个”等；存在量词相当于日

常语言中“存在一个”,“有一个”,“有些”,“至少有一个”,“ 至多有一个”等.

4．巩固练习

（1）下列全称命题中，真命题是：

A．所有的素数是奇数；　　　　B．$\forall x \in R,(x-1)^2 \text{ f } 0$；

C．$\forall x \in R, x+\frac{1}{x} \geq 2$　　　　D．$\forall x \in (0,\frac{\pi}{2}),\sin x+\frac{1}{\sin x} \geq 2$

（2）下列特称命题中，假命题是：

A．$\exists x \in R, x^2-2x-3=0$　　　　B.至少有一个 $x \in Z, x$ 能被 2 和 3 整除

C．存在两个相交平面垂直于同一直线　　D.$\exists x \in \{x \mid x\text{是无理数}\}$，$x^2$是有理数.

（3）已知：对 $\forall x \in R^+, a \text{ p } x+\frac{1}{x}$ 恒成立，则 a 的取值范围是____________________；

变式:已知:对 $\forall x \in R^+, x^2-ax+1 \text{ p } 0$ 恒成立,则 a 的取值范围是____________________；

（4）求函数 $f(x)=-\cos^2 x-\sin x+3$ 的值域；

变式：已知：对 $\forall x \in R$, 方程 $\cos 2x+\sin x-3+a=0$ 有解，求 a 的取值范围.

5．教学反思：

（1）判断下列全称命题的真假：

①末位是 o 的整数，可以被 5 整除；

②线段的垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等；

③负数的平方是正数；　　④梯形的对角线相等。

（2）判断下列特称命题的真假：

①有些实数是无限不循环小数；②有些三角形不是等腰三角形；③有些菱形是正方形。

（3）探究：

①请课后探究命题（5），－（8），跟命题（5）－（8）分别有什么关系？

②请你自己写出几个全称命题，并试着写出它们的否命题．写出几个特称命题，并试着写出它们的否命题。

简单的逻辑联结词（一）或且非

教学目标：**了解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义，理解复合命题的结构.**

教学重点：逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义及复合命题的构成。

教学难点：对“或”的含义的理解；

教学手段：多媒体

一、创设情境

前面我们学习了命题的概念、命题的构成和命题的形式等简单命题的基本框架。本节内容，我们将学习一些简单命题的组合，并学会判断这些命题的真假。

问题 1：下列语句是命题吗？如果不是，请你将它改为命题的形式

①$11>5$　　②3 是 15 的约数吗？　　③0.7 是整数　④$x>8$

二、活动尝试

①是命题，且为真；②不是陈述句，不是命题，改为③是3 是 15 的约数，则为真；

③是假命题

④是陈述句的形式，但不能判断正确与否。改为 $x2\geqslant0$，则为真；

例如，$x<2$，$x-5=3$，$(x+y)(x-y)=0$.这些语句中含有变量 x 或 y，在没有给定这些变量的值之前，是无法确定语句真假的.这种含有变量的语句叫做开语句（有的逻辑书也称之为条件命题）。我们不要在判断一个语句是不是命题上下功夫，因为这个工作过于复杂，只要能从正面的例子了解命题的概念就可以了。

三、师生探究

问题 2：（1）6 可以被 2 或 3 整除；

（2）6 是 2 的倍数且 6 是 3 的倍数；

（3）$\sqrt{2}$ 不是有理数；

上述三个命题前面的命题在结构上有什么区别？比前面的命题复杂了，且（1）和（2）明显是由两个简单的命题组合成的新的比较复杂的命题。

命题（1）中的“或”与集合中并集的定义：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$的“或”意义相同.

命题（2）中的“且”与集合中交集的定义：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$的“且”意义相同.

命题（3）中的“非”显然是否定的意思，即“$\sqrt{2}$ 不是有理数”是对命题$\sqrt{2}$ 是有理数”进行否定而得出的新命题.

四、数学理论

1. 逻辑连接词

命题中的“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词.

2. 复合命题的构成

简单命题：不含有逻辑联结词的命题叫做简单命题.

复合命题：由简单命题再加上一些逻辑联结词构成的命题叫复合命题.

3.复合命题构成形式的表示

常用小写拉丁字母 p、q、r、s……表示简单命题.

复合命题的构成形式是：p 或 q；p 且 q；非 p.

即：p 或 q　记作 $p\vee q$　　p 且 q　　记作 $p\wedge q$　　非 p　　(命题的否定)　　记作 $\neg p$

释义：“p 或 q”是指 p,q 中的任何一个或两者.例如，“$x\in A$ 或 $x\in B$”，是指 x 可能属于 A 但不属于 B（这里的“但”等价于“且”），x 也可能不属于 A 但属于 B，x 还可能既属于 A 又属于 B（即 $x\in A\cup B$）；又如在“p 真或 q 真”中，可能只有 p 真，也可能只有 q 真，还可能 p,q 都为真.

“p 且 q”是指 p,q 中的两者.例如，“$x\in A$ 且 $x\in B$”，是指 x 属于 A，同时 x 也属于 B（即 $x\in A\cap B$）.

“非 p”是指 p 的否定，即不是 p.　例如，p 是“$x\in A$”，则“非 p”表示 x 不是集合 A 的元素（即 $x\in \complement_U A$）.

五、巩固运用

例 1:指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题：

（1）24 既是 8 的倍数，也是 6 的倍数；

（2）李强是篮球运动员或跳高运动员；

（3）平行线不相交

解：（1）中的命题是 p 且 q 的形式，其中 p：24 是 8 的倍数；q：24 是 6 的倍数.

（2）的命题是 p 或 q 的形式，其中 p：李强是篮球运动员；q：李强是跳高运动员.

（3）命题是非 p 的形式，其中 p：平行线相交。

例 2: 分别指出下列复合命题的形式

（1）8≥7

（2）2 是偶数且 2 是质数；

（3）π 不是整数；

解：（1）是“$p\vee q$”形式，p：$8>7$，q：8=7；

（2）是“$p\wedge q$”形式，p：2 是偶数，q：2 是质数；

（3）是“$\neg p$”形式，p：π 是整数；

例 3：写出下列命题的非命题：

（1）p:对任意实数 x，均有 $x^2-2x+1\geq 0$；

（2）q：存在一个实数 x，使得 $x^2-9=0$

（3）“AB∥CD”且“AB=CD”；

（4）“△ABC 是直角三角形或等腰三角形”.

解：（1）存在一个实数 x，使得 $x^2-2x+1<0$；

（2）不存在一个实数 x，使得 $x^2-9=0$；

（3）AB 不平行于 CD 或 AB≠CD；

（4）原命题是“p 或 q”形式的复合命题，它的否定形式是：△ABC 既不是直角三角形又不是等腰三角形.

复合命题的构成要注意：（1）“p 或 q”、“p 且 q”的两种复合命题中的 p 和 q 可以是毫无关系的两个简单命题

（2）“非 p”这种复合命题又叫命题的否定；是对原命题的关键词进行否定；

下面给出一些关键词的否定：

正面语词	或	等于	大于	小于	是	都是	至少一个	至多一个
否定	且	不等于	不大于（小于等于）	不小于（大于等于）	不是	不都是	一个也没有	至少两个

六、回顾反思

本节课讨论了简单命题与复合命题的构成，以及逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义。需要注意的是否命题的关键词的否定是问题的核心。

七、课后练习

1．命题“方程 $x2=2$ 的解是 $x=\pm\sqrt{2}$ 是(　　)

A．简单命题　　B．含“或”的复合命题

C．含“且”的复合命题　　D．含“非”的复合命题

2．用“或”“且”“非”填空，使命题成为真命题：

（1）x∈A∪B，则 x∈A__________x∈B；

（2）x∈A∩B，则 x∈A__________x∈B；

（3）a、b∈R，a＞0__________b＞0，则 ab＞0.

3．把下列写法改写成复合命题“p 或 q”“p 且 q”或“非 p”的形式：

（1）（a－2）（a+2）=0；

（2）$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$；

（3）a＞b≥0.

4．已知命题 p：$a\in A$，q：$a\in B$，试写出命题“p 或 q”“p 且 q”“$\neg p$”的形式.

5．用否定形式填空：

(1)$a>0$ 或 $b\leq 0$；________________　(2)三条直线两两相交

(3)A 是 B 的子集.__________________　(4)a，b 都是正数.__________　(5) x 是自然数. ____________________(在 Z 内考虑)

6. 在一次模拟打飞机的游戏中，小李接连射击了两次，设命题 p_1 是“第一次射击中飞机”，命题 p_2 是“第二次射击中飞机”试用 p_1、p_2 以及逻辑联结词或、且、非(∨，∧，¬)表

示下列命题：

命题 S：两次都击中飞机；

命题 r：两次都没击中飞机；

命题 t：恰有一次击中了飞机；

命题 u：至少有一次击中了飞机.

八、参考答案：

1．B

2．（1）或　（2）且　（3）且

3．（1）p：a－2=0 或 q：a+2=0；

（2）p：x=1 且 q：y=2

（3）p：a＞b 且 q：b≥0

4．命题“p 或 q”：a∈A 或 a∈B．“p 且 q”：a∈A 且 a∈B．“¬ p”：a∉ A

5．(1)a≤0 且 b＞0

(2)三条直线中至少有两条不相交

(3)A 不是 B 的子集

(4)a，b 不都是正数

(5)x 是负整数.

6．（1）$p\wedge q$　（2）$\neg p\wedge\neg q$（3）$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$（4）$\neg(\neg p\wedge\neg q)$

第二章空间向量与立体几何

课　　题：平面向量知识复习

教学目标：

复习平面向量的基础知识，为学习空间向量作准备

教学重点：平面向量的基础知识

教学难点：运用向量知识解决具体问题

教学过程：

一、基本概念

向量、向量的模、零向量、单位向量、平行向量、相等向量、共线向量、相反向量、向量的加法、向量的减法、实数与向量的积、向量的坐标表示、向量的夹角、向量的数量积。

二、基本运算

1、向量的运算及其性质

运算类型	几何方法	坐标方法	运算性质

向量的加法	1.平行四边形法则 2.三角形法则	$a+b=(x_1+x_2,y_1+y_2)$	$a+b=b+a$ $(a+b)+c=a+(b+c)$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
向量的减法	三角形法则	$a-b=(x_1-x_2,y_1-y_2)$	$a-b=a+(-b)$ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$
向量的乘法	1.λa 是一个向量, 满足: 2.$\lambda>0$ 时, λa 与 a 同向; $\lambda<0$ 时, λa 与 a 异向; $\lambda=0$ 时, $\lambda a=0$.	$\lambda a=(\lambda x,\lambda y)$	$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$ $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ $a\,//\,b\Leftrightarrow a=\lambda b$
向量的数量积	$a\bullet b$ 是一个数 1.$a=0$ 或 $b=0$ 时, $a\bullet b=0$ 2.$a\neq0$ 且 $b\neq0$ 时, $a\bullet b=\|a\|\|b\|\cos(a,b)$	$a\bullet b=x_1x_2+y_1y_2$	$a\bullet b=b\bullet a$ $(\lambda a)\bullet b=a\bullet(\lambda b)=\lambda(a\bullet b)$ $(a+b)\bullet c=a\bullet c+b\bullet c$ $a^2=\|a\|^2\ \|a\|=\sqrt{x^2+y^2}$ $\|a\bullet b\|\leq\|a\|\|b\|$

2、平面向量基本定理：

如果 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\vec{a}$，有且只有一对实数 λ_1,λ_2，使 $\vec{a}=$________________；

注意 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$ 的几何意义

3、两个向量平行的充要条件：

(1) $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ 的充要条件是：__________；（向量表示）

(2) 若 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$ 的充要条件是：__________________；（坐标表示）

4、两个非零向量垂直的充要条件：

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充要条件是：_________；（向量表示）

(2) 若 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充要条件是：_________；（坐标表示）

三、课堂练习

1. O 为平面上的定点，A、B、C 是平面上不共线的三点，若($\overrightarrow{OB}$ - $\overrightarrow{OC}$)·($\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}$)=0，则ΔABC 是（ ）

A．以 AB 为底边的等腰三角形　　　B．以 BC 为底边的等腰三角形

C．以 AB 为斜边的直角三角形　　　D．以 BC 为斜边的直角三角形

2．P 是△ABC 所在平面上一点，若 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则 P 是△ABC 的（ ）

A．外心　　B．内心　　C．重心　　D．垂心

3．在四边形 ABCD 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，则四边形 ABCD 是（   ）

A． 矩形　　B． 菱形　　C．直角梯形　　D．等腰梯形

4．已知 $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$，$|\vec{q}|=3$，$\vec{p}$ 、$\vec{q}$ 的夹角为 $45°$，则以 $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$，$\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$ 为邻边的平行四边形的一条对角线长为（   ）

A．15　　B．$\sqrt{15}$　　C． 14　　D．16

5. O 是平面上一定点,A,B,C 是平面上不共线的三个点,动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$ 则 P 的轨迹一定通过△ABC 的( )

A．外心　　B．内心　　C．重心　　D．垂心

6．设平面向量 $\vec{a}$ =(－2，1)，$\vec{b}$ =(λ，-1)，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，则 λ 的取值范围是（   ）

A．$(-\frac{1}{2},2)\cup(2,+\infty)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-\frac{1}{2},+\infty)$　　D．$(-\infty,-\frac{1}{2})$

7．若 $\vec{a}=(2,3)$, $\vec{b}=(-4,7)$, $\vec{a}+\vec{c}=\vec{0}$, 则 $\vec{c}$ 在 $\vec{b}$ 方向 上的投影为________。

8．向量 $\overrightarrow{OA}=(k,1),\overrightarrow{OB}=(4,5),\overrightarrow{OC}=(-k,10)$，且 A，B，C 三点共线，则 k=_______.

9. 在直角坐标系 xoy 中，已知点 A(0,1)和 点 B(-3,4)，若点 C 在∠AOB 的平分线上且$|\overrightarrow{OC}|$=2, 则 $\overrightarrow{OC}=$

10．在 ΔABC 中，O 为中线 AM 上一个动点，若 AM=2，则 $\overrightarrow{OA}\bullet(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 的最小值是__________。

课　　题：空间向量及其线性运算

教学目标：

1．运用类比方法，经历向量及其运算由平面向空间推广的过程；

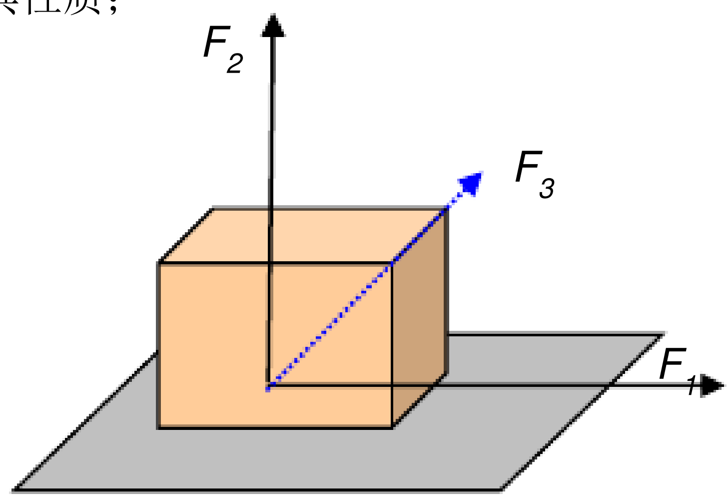
2．了解空间向量的概念，掌握空间向量的线性运算及其性质；

3．理解空间向量共线的充要条件

教学重点：空间向量的概念、空间向量的线性运算及其性质；

教学难点：空间向量的线性运算及其性质。

教学过程：



一、创设情景

1、平面向量的概念及其运算法则；

2、物体的受力情况分析

二、建构数学

1．空间向量的概念：

在空间，我们把具有大小和方向的量叫做向量．

注：⑴空间的一个平移就是一个向量．

⑵向量一般用有向线段表示．同向等长的有向线段表示同一或相等的向量．

⑶空间的两个向量可用同一平面内的两条有向线段来表示．

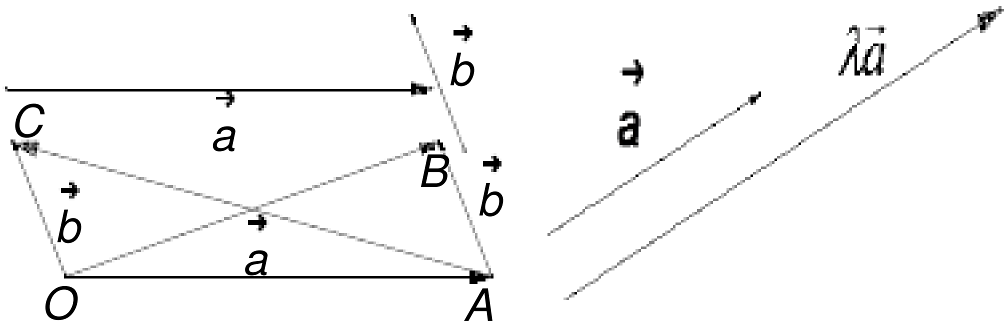
2．空间向量的运算

定义：与平面向量运算一样，空间向量的加法、减法与数乘向量运算如下（如图）

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{a}(\lambda\in R)$$

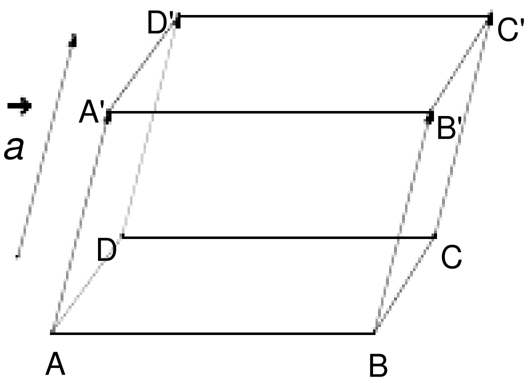


运算律：

⑴加法交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

⑵加法结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

⑶数乘分配律：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$



3．平行六面体：

平行四边形 ABCD 平移向量$\vec{a}$到$A'B'C'D'$的轨迹所形成的几何体，叫做平行六面体，并记作：ABCD－$A'B'C'D'$，它的六个面都是平行四边形，每个面的边叫做平行六面体的棱。

4．共线向量

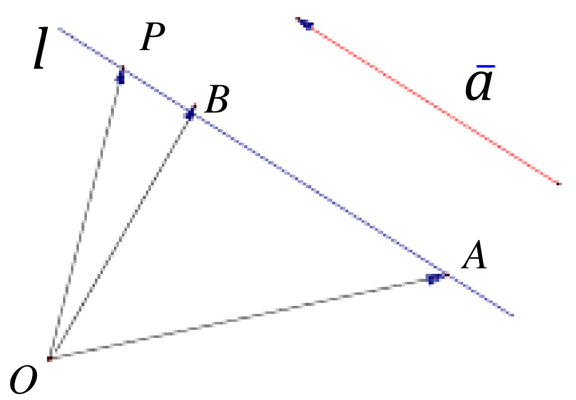
与平面向量一样，如果表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量叫做共线向量或平行向量．$\vec{a}$平行于$\vec{b}$记作$\vec{a}//\vec{b}$．

当我们说向量$\vec{a}$、$\vec{b}$共线（或$\vec{a}//\vec{b}$）时，表示$\vec{a}$、$\vec{b}$的有向线段所在的直线可能是同一直线，也可能是平行直线．

5．共线向量定理及其推论：

共线向量定理：空间任意两个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$（$\vec{b}\neq\vec{0}$），$\vec{a}//\vec{b}$的充要条件是存在实数λ，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$．

推论：如果l为经过已知点A且平行于已知非零向量$\vec{a}$的直线，那么对于任意一点O，点P在直线l上的充要条件是存在实数t满足等式 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{a}$．其中向量$\vec{a}$叫做直线$l$的方向向量.



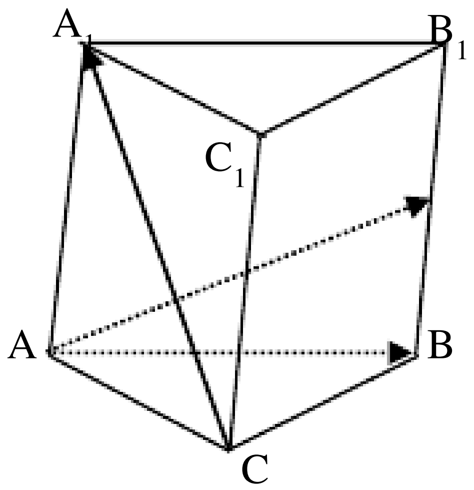
三、数学运用

1、例 1 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，M 是BB_1的中点，化简下列各式，并在图中标出化简得到的向量：

（1）$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA_1}$；

（2）$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$；

（3）$\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$



解：（1）$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA_1}=\overrightarrow{CA_1}$

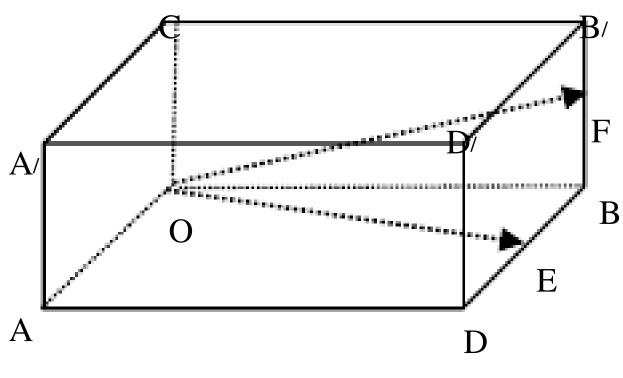
（2）$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AM}$

（3）$\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA_1}$

2、如图，在长方体$OADB-CA'D'B'$中，$OA=3,OB=4,OC=2,OI=OJ=OK=1$，点 E,F 分别是$DB,D'B'$的中点，设$\overrightarrow{OI}=\vec{i},\overrightarrow{OJ}=\vec{j},\overrightarrow{OK}=\vec{k}$,试用向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$表示$\overrightarrow{OE}$和$\overrightarrow{OF}$

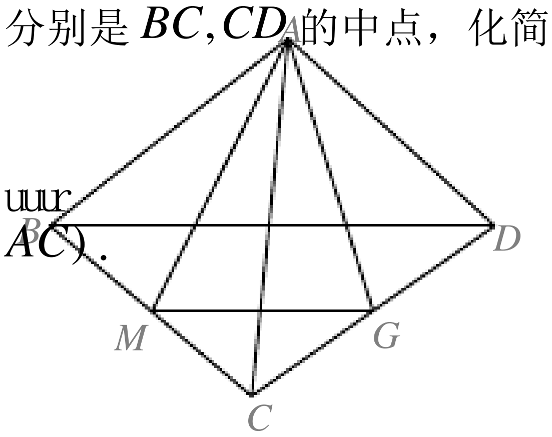
解：$\overrightarrow{OE}=\frac{3}{2}\vec{i}+4\vec{j}$

$\overrightarrow{OF}=\frac{3}{2}\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$



3、课堂练习

已知空间四边形 $ABCD$ ，连结 AC,BD，设 M,G 分别是 BC,CD 的中点，化简下列各表达式，并标出化简结果向量：



（1）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$；

（2）$\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$；　　（3）$\overrightarrow{AG}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$．

四、回顾总结

空间向量的定义与运算法则

五、布置作业

课　　题：共面向量定理

教学目标：

1．了解共面向量的含义，理解共面向量定理；

2．利用共面向量定理证明有关线面平行和点共面的简单问题；

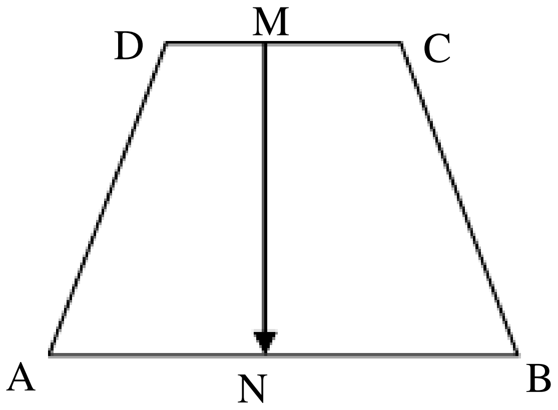
教学重点：共面向量的含义，理解共面向量定理

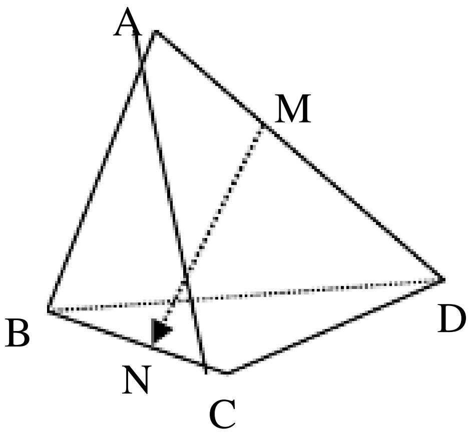
教学难点：利用共面向量定理证明有关线面平行和点共面的简单问题

教学过程：

一、创设情景

1、关于空间向量线性运算的理解





平面向量加法的三角形法则可以推广到空间向量，只要图形封闭，其中的一个向量即可以用其它向量线性表示。

从平面几何到立体几何，类比是常用的推理方法。

二、建构数学

1、　共面向量的定义

一般地，能平移到同一个平面内的向量叫共面向量；

理解：若 $\vec{a},\vec{b}$ 为不共线且同在平面α 内，则 $\vec{p}$ 与 $\vec{a},\vec{b}$ 共面的意义是 $\vec{p}$ 在α 内或 $\vec{p}\,//\,\vec{\alpha}$

2、共面向量的判定

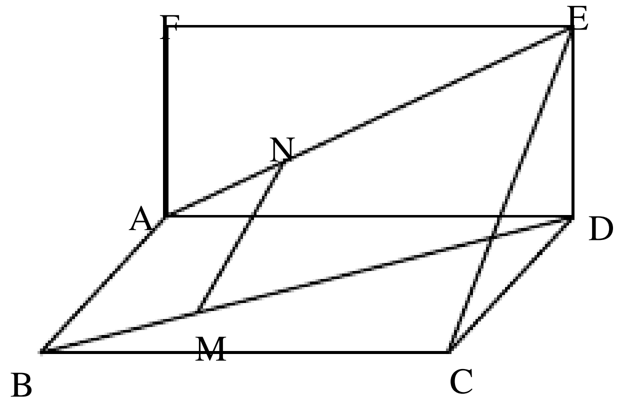
平面向量中，向量$\vec{b}$与非零向量$\vec{a}$共线的充要条件是$\vec{b}=\lambda\vec{a}$，类比到空间向量，即有

共面向量定理　如果两个向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，那么向量$\vec{p}$与向量$\vec{a},\vec{b}$共面的充要条件是存在有序实数组(x,y)，使得$\vec{p}=x\vec{\alpha}+y\vec{b}$

这就是说，向量$\vec{p}$可以由不共线的两个向量$\vec{a},\vec{b}$线性表示。

三、数学运用

1，例 1 如图，已知矩形 ABCD 和矩形 ADEF 所在平面互相垂直，点 M,N 分别在对角线 BD,AE 上，且$BM=\frac{1}{3}BD,AN=\frac{1}{3}AE$.



求证：MN//平面 CDE

证明：$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DE}$

又$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{DE}$不共线

根据共面向量定理，可知$\overrightarrow{MN},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE}$共面。

由于 MN 不在平面 CDE 中，所以 MN//平面 CDE.

2、例 2 设空间任意一点 O 和不共线的三点 A、B、C，若点 P 满足向量关系$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$（其中 x+y+z=1）

试问：P、A、B、C 四点是否共面？

解：由$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$　可以得到　$\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}$

由 A,B,C 三点不共线，可知$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$不共线，所以$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$共面且具有公共起点 A.

从而 P,A,B,C 四点共面。

解题总结：

推论： 空间一点 P 位于平面 MAB 内的充要条件是存在有序实数对 x，y 使得：$\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$，或对空间任意一点 O 有：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$。

3、 课堂练习

（1）已知非零向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$不共线，如果$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{e_1}+8\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{e_1}-3\overrightarrow{e_2}$，求证：

A、B、C、D 共面。

（2）已知平行四边形 ABCD，从平面 AC 外一点 O 引向量 $\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OD}$。求证：（1）四点 E、F、G、H 共面；（2）平面 AC//平面 EG。

（3）课本练习

四、回顾总结

1、共面向量定理； 2、类比方法的运用。

五、布置作业

课　　题：空间向量的基本定理

教学目标：

1．掌握及其推论，理解空间任意一个向量可以用不共面的三个已知向量线性表示，而且这种表示是唯一的；

2．在简单问题中，会选择适当的基底来表示任一空间向量。

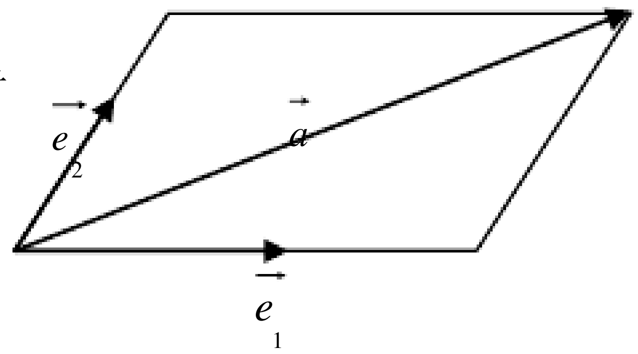
教学重点：空间向量的基本定理及其推论

教学难点：空间向量的基本定理唯一性的理解

教学过程：

一、创设情景

平面向量基本定理的内容及其理解

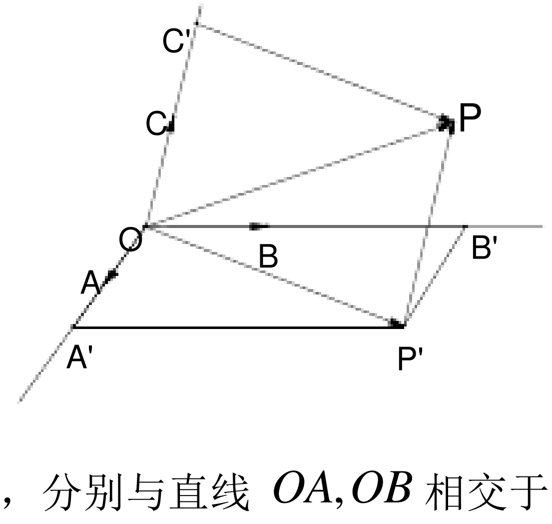


如果 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\vec{a}$，有且只有一对实数 λ_1,λ_2，使 $\vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$

二、建构数学

1、空间向量的基本定理

如果三个向量 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 不共面，那么对空间任一向量 $\vec{p}$，存在一个唯一的有序实数组 (x,y,z)，使 $\vec{p}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$



证明：（存在性）设 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 不共面，

过点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}=\vec{e}_2,\overrightarrow{OC}=\vec{e}_3,\overrightarrow{OP}=\vec{p}$

过点 P 作直线 PP' 平行于 OC，交平面 OAB 于点 P'；

在平面 OAB 内，过点 P' 作直线 $P'A'//OB,P'B'//OA$，分别与直线 OA,OB 相交于点 A',B'，于是，存在三个实数 x,y,z，使

$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OB}=y\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OC}=z\overrightarrow{e_3}$

$\therefore \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$

所以$\overrightarrow{p}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}+z\overrightarrow{e_3}$

（唯一性）假设还存在x',y',z'使$\overrightarrow{p}=x'\overrightarrow{e_1}+y'\overrightarrow{e_2}+z'\overrightarrow{e_3}$

$\therefore x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}+z\overrightarrow{e_3}=x'\overrightarrow{e_1}+y'\overrightarrow{e_2}+z'\overrightarrow{e_3}$　　$\therefore (x-x')\overrightarrow{e_1}+(y-y')\overrightarrow{e_2}+(z-z')\overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{0}$

不妨设$x\neq x'$即$x-x'\neq 0$　　　$\therefore \overrightarrow{e_1}=-\dfrac{y-y'}{x-x'}\overrightarrow{e_2}-\dfrac{z-z'}{x-x'}\overrightarrow{e_3}$

$\therefore \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$共面此与已知矛盾　　$\therefore$该表达式唯一 ，综上两方面，原命题成立.

由此定理， 若三向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$不共面，那么空间的任一向量都可由$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$线性表示，我们把$\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$叫做空间的一个**基底**，$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$叫做**基向量。**

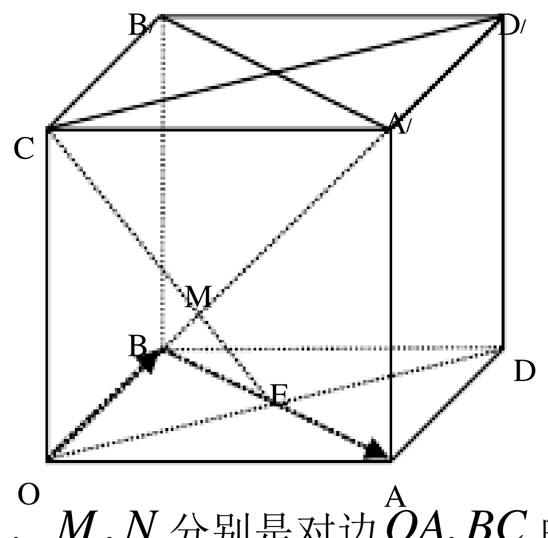
空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个**基底.**

如果空间一个基底的三个基向量两两互相垂直，那么这个基底叫做正交基底，特别地，当一个正交基底的三个基向量都是单位向量时，称这个基底为单位正交基底，通常用$\left\{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right\}$表示。

推论：设O,A,B,C是不共面的四点，则对空间任一点 P，都存在唯一的三个有序实数x,y,z，使$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

三、数学运用

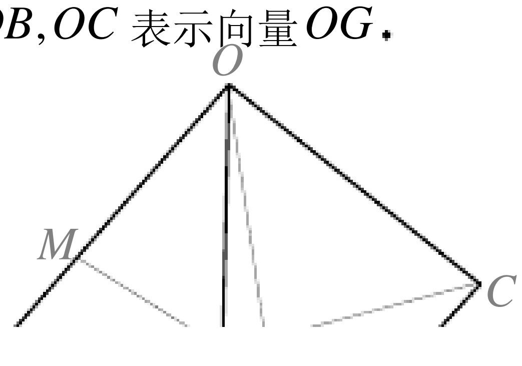
1、例 1 如图，在正方体$OADB-CA'D'B'$中，, 点 E 是 AB 与 OD 的交点,M 是 OD/与 CE 的交点，试分别用向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$表示$\overrightarrow{OD}$和$\overrightarrow{OM}$



解：$\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

2、例 2 如图，已知空间四边形$OABC$，其对角线OB,AC，M,N分别是对边OA,BC的中点，点G在线段MN上，且$MG=2GN$，用基底向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$表示向量$\overrightarrow{OG}$.



解：$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}$

$$=\overrightarrow{OM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}[\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}]$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$$

$$\therefore \overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

3、课堂练习

四、回顾总结

五、布置作业

课　　题：空间向量的坐标表示

教学目标：

1．能用坐标表示空间向量，掌握空间向量的坐标运算；

2．会根据向量的坐标判断两个空间向量平行。

教学重点：空间向量的坐标运算

教学难点：空间向量的坐标运算

教学过程：

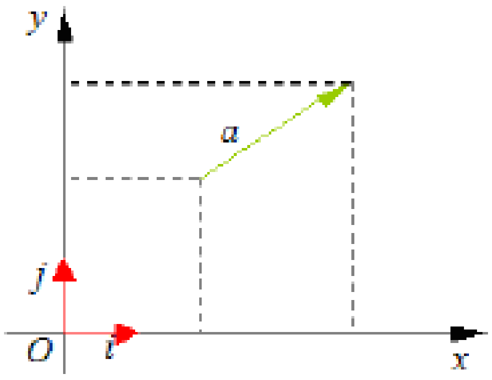
一、创设情景

1、平面向量的坐标表示

分别取与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 作为基底.任作一个向量 $\vec{a}$，由平面向量基本定理知，有且只有一对实数 x、y，使得 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$

把 (x,y) 叫做向量 $\vec{a}$ 的（直角）坐标，记作 $\vec{a}=(x,y)$

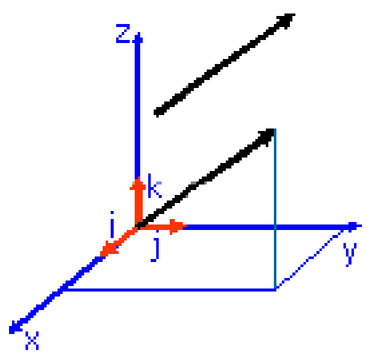
其中 x 叫做 $\vec{a}$ 在 x 轴上的坐标，y 叫做 $\vec{a}$ 在 y 轴上的坐标，　特别地，$\vec{i}=(1,0)$，$\vec{j}=(0,1)$，$\vec{0}=(0,0)$.



二、建构数学

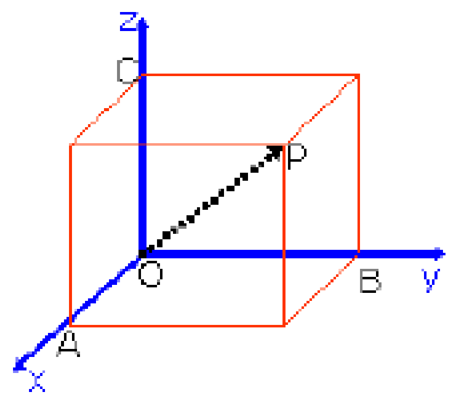
1、空间直角坐标系：

（1）若空间的一个基底的三个基向量互相垂直，且长为



这个基底叫单位正交基底，用$\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$表示；

（2）在空间选定一点O和一个单位正交基底$\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$，以点$O$为原点，分别以$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$的方向为正方向建立三条数轴：$x$轴、$y$轴、$z$轴，它们都叫坐标轴．我们称建立了一个空间直角坐标系$O-xyz$，点O叫原点，向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$都叫坐标向量．通过每两个坐标轴的平面叫坐标平面，分别称为xOy平面，yOz平面，zOx 平面。



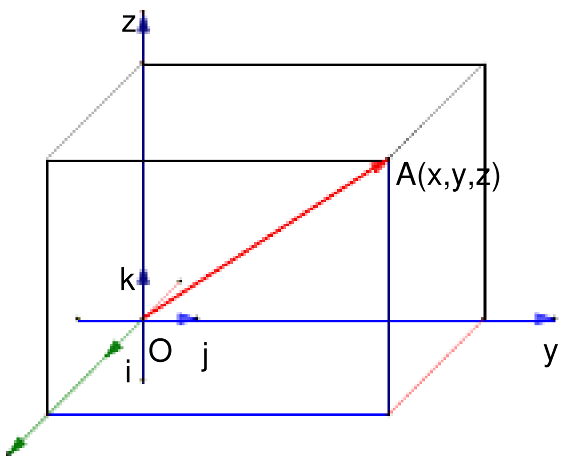
（3）作空间直角坐标系 $O-xyz$ 时，一般使 $\angle xOy=135^\circ$（或45°），$\angle yOz=90^\circ$；

（4）在空间直角坐标系中，让右手拇指指向x轴的正方向，食指指向y轴的正方向，如果中指指向z轴的正方向，称这个坐标系为右手直角坐标系.规定立几中建立的坐标系为右手直角坐标系.

2、空间直角坐标系中的坐标：

如图给定空间直角坐标系和向量 $\vec{a}$，设 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为坐标向量，则存在唯一的有序实数组(a_1,a_2,a_3)，使 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，有序实数组 (a_1,a_2,a_3)叫作向量 $\vec{a}$ 在空间直角坐标系$O-xyz$中的坐标，记作$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$.

在空间直角坐标系$O-xyz$中，对空间任一点A，存在唯一的有序实数组(x,y,z)，使$\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，有序实数组$(x,y,z)$叫作向量$A$在空间直角坐标系$O-xyz$中的坐标，记作$A(x,y,z)$，$x$叫横坐标，$y$叫纵坐标，$z$叫竖坐标.

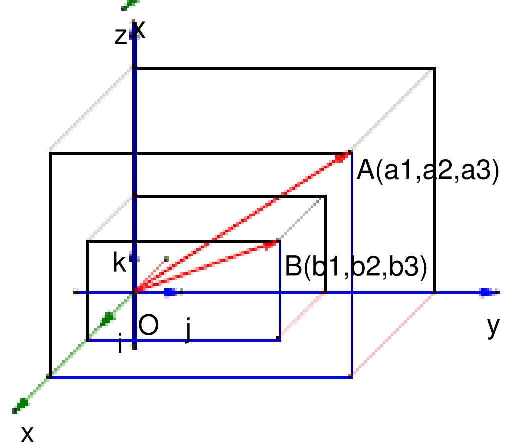


3、空间向量的直角坐标运算律

（1）若$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，

则$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$，

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$，



$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)(\lambda\in R)$，

$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in R)$，

（2）若 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$．

一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标。

三、数学运用

1、例 1 已知 $\vec{a}=(1,-3,8),\vec{b}=(3,10,-4)$，求 $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b},3\vec{a}$

解：$\vec{a}+\vec{b}=(4,7,4)$　　$\vec{a}-\vec{b}=(-2,-13,12)$

$3\vec{a}=(3,-9,24)$

2、已知空间四点 $A(-2,3,1),B(2,-5,3),C(10,0,10)$ 和 $D(8,4,9)$，求证：四边形 $ABCD$ 是矩形

解：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,-8,2)$，$\overrightarrow{DC}=(2,-4,1)$　　$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$

所以 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{DC}$，　所以四边形 $ABCD$ 是矩形。

3、课堂练习

三、回顾总结

空间向量的坐标表示及其运算

四、布置作业

课　　题：空间向量的数量积

教学目标：

1．掌握空间向量的夹角的概念，掌握空间向量的数量积的概念、性质和运算律，了解空间向量数量积的几何意义；

2．掌握空间向量数量积的坐标形式，会用向量的方法解决有关垂直、夹角和距离问题。

教学重点：空间向量的夹角的概念，掌握空间向量的数量积的概念、性质和运算律

教学难点：用向量的方法解决有关垂直、夹角和距离

教学过程

一、创设情景

1、空间直角坐标系中的坐标；

2、空间向量的直角坐标运算律；

3、平面向量的数量积、夹角、模等概念。

二、建构数学

1、夹角

定义：$\vec{a},\vec{b}$是空间两个非零向量，过空间任意一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则$\angle AOB$叫做向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}$的夹角，记作$<\vec{a},\vec{b}>$

规定：$0\le<\vec{a},\vec{b}>\le\pi$

特别地，如果$<\vec{a},\vec{b}>=0$，那么$\vec{a}$与$\vec{b}$同向；如果$<\vec{a},\vec{b}>=\pi$，那么$\vec{a}$与$\vec{b}$反向；如果$<\vec{a},\vec{b}>=90^0$，那么$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，记作$\vec{a}\perp\vec{b}$。

2、数量积

（1）设$\vec{a},\vec{b}$是空间两个非零向量，我们把数量$|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$叫作向量$\vec{a},\vec{b}$的数量积，记作$\vec{a}\cdot\vec{b}$，即　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$

（2）夹角：$\cos\left\langle\vec{a}\cdot\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

（3）运算律

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{b}\cdot\vec{a})$；$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

（4）模长公式：若$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，

则$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$.

（5）两点间的距离公式：若$A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，

则　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$，或$d_{A,B}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

（6）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

三、数学运用

1、例1 已知$A(3,1,3)$，$B(1,0,5)$，求：

（1）线段AB的中点坐标和长度；

（2）到A,B两点的距离相等的点$P(x,y,z)$的坐标x,y,z满足的条件.

解：（1）设M是线段AB的中点，则$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(2,3,\frac{3}{2})$.

$\therefore AB$的中点坐标是$(2,3,\frac{3}{2})$， $\overrightarrow{AB}=(-2,4,3)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{29}$.

（2）$\because$ 点$P(x,y,z)$到A,B两点的距离相等，

则$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z-0)^2}$，

化简得：$4x-8y+6z+7=0$，

所以，到A,B两点的距离相等的点$P(x,y,z)$的坐标x,y,z满足的条件是$4x-8y+6z+7=0$.

点评：到A,B两点的距离相等的点$P(x,y,z)$构成的集合就是线段AB的中垂面，若将点P的坐标x,y,z满足的条件$4x-8y+6z+7=0$的系数构成一个向量$\vec{a}=(4,-8,6)$，发现与$\overrightarrow{AB}=(-2,4,3)$共线。

2、例2 已知三角形的顶点是$A(1,-1,1)$，$B(2,1,-1)$，$C(-1,-1,-2)$，试求这个三角形的面积。

分析：可用公式$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin A$来求面积.

解：$\because \overrightarrow{AB}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,0,-3)$，

$\therefore |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+0+(-3)^2}=\sqrt{13}$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,2,-2)\cdot(-2,0,-3)=-2+6=4$，

$\therefore \cos A=\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{3\times\sqrt{13}}=\frac{4\sqrt{13}}{39}$，

$\sin A=\sin<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=\sqrt{1-\cos^2<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>}=\frac{13\times\sqrt{101}}{39}$

$\therefore$所以，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin A=\frac{\sqrt{101}}{2}$.

四、回顾总结

五、布置作业

课　　题：直线的方向向量与平面的法向量

教学目标：

1．理解直线的方向向量和平面的法向量；

2．会用待定系数法求平面的法向量。

教学重点：直线的方向向量和平面的法向量

教学难点：求平面的法向量

教学过程

一、创设情景

1、平面坐标系中直线的倾斜角及斜率，直线的方向向量，直线平行与垂直的判定；

2、如何用向量描述空间的两条直线、直线和平面、平面和平面的位置关系？

二、建构数学

1、直线的方向向量

我们把直线l上的向量$\vec{e}$以及与$\vec{e}$共线的向量叫做直线l的方向向量

2、平面的法向量

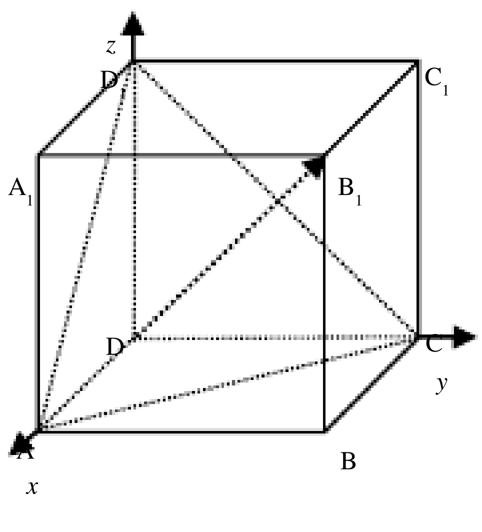
如果表示向量$\vec{n}$的有向线段所在直线垂直于平面α，则称这个向量垂直于平面α，记作$\vec{n}\perp\alpha$，如果$\vec{n}\perp\alpha$，那么向量$\vec{n}$叫做平面α的法向量。

三、数学运用

1、例 1 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，求证：$\overrightarrow{DB_1}$是平面ACD_1的法向量

证：设正方体棱长为 1，以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$为单位正交基底，

建立如图所示空间坐标系$D-xyz$



$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$

$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以$\overrightarrow{DB_1}\perp\overrightarrow{AC}$

同理$\overrightarrow{DB_1}\perp\overrightarrow{AD_1}$

所以$\overrightarrow{DB_1}\perp$平面$ACD$

从而$\overrightarrow{DB_1}$是平面ACD_1的法向量。

2、例 2 在空间直角坐标系内，设平面α经过点$P(x_0,y_0,z_0)$，平面α的法向量为$\vec{e}=(A,B,C)$，

$M(x,y,z)$为平面α 内任意一点，求x,y,z满足的关系式。

解：由题意可得$\overrightarrow{PM}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$

$\vec{e}\cdot\overrightarrow{PM}=0$

即$(A,B,C)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$　化简得$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

3、课堂练习

已知点P 是平行四边形$ABCD$所在平面外一点，如果$\overrightarrow{AB}=(2,-1,4)$，$\overrightarrow{AD}=(4,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,2,-1)$.

（1）求证：$\overrightarrow{AP}$是平面$ABCD$的法向量；

（2）求平行四边形$ABCD$的面积.

（1）证明：$\because\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(-1,2,-1)\cdot(2,-1,-4)=0$，

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=(-1,2,-1)\cdot(4,2,0)=0$，

$\therefore AP\perp AB$，$AP\perp AD$，又$AB\cap AD=A$，$AP\perp$平面$ABCD$，

$\therefore\ \overrightarrow{AP}$是平面$ABCD$的法向量.

（2）$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$，$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{4^2+2^2+0^2}=2\sqrt{5}$，

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(2,-1,-4)\cdot(4,2,0)=6$，

$$\therefore\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{6}{\sqrt{21}\times2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{105}}{105},$$

$$\therefore\sin\angle BAD=\sqrt{1-\frac{9}{105}}=\sqrt{\frac{32}{35}},$$

$$\therefore S_{\triangledown ABCD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\sin\angle BAD=8\sqrt{6}.$$

四、回顾总结

1、直线得方向向量与平面法向量得概念；

2、求平面法向量得方法

五、布置作业

课　　题：空间线面关系的判定（1）

教学目标：

1．能用向量语言描述线线、线面、面面的平行与垂直关系；

2．能用向量方法证明空间线面位置关系的一些定理；

3．能用向量方法判断空间线面垂直关系。

教学重点：用向量方法判断空间线面垂直关系

教学难点：用向量方法判断空间线面垂直关系

教学过程

一、创设情景

1、空间直线与平面平行与垂直的定义及判定

2、直线的方向向量与平面的法向量的定义

二、建构数学

1、用向量描述空间线面关系

设空间两条直线 l_1,l_2 的方向向量分别为 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$，两个平面 α_1,α_2 的法向量分别为 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$，则由如下结论

	平　行	垂　直
l_1 与 l_2	$\overrightarrow{e_1}//\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{e_2}$
l_1 与 α_1	$\overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{n_1}$	$\overrightarrow{e_1}//\overrightarrow{n_1}$
α_1 与 α_2	$\overrightarrow{n_1}//\overrightarrow{n_2}$	$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

2、相关说明：

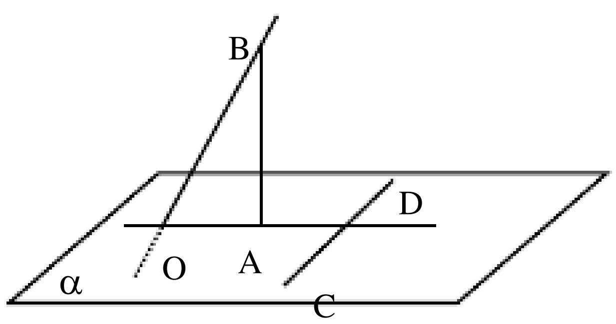
上表给出了用向量研究空间线线、线面、面面位置关系的方法，判断的依据是相关的判定与性质，要理解掌握。

三、数学运用

1、例 1 证明：在平面内的一条直线，如果它和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。（三垂线定理）

已知：如图，OB 是平面α 的斜线，O 为斜足，$AB\perp\alpha$，A 为垂足，$CD\subset\alpha,CD\perp OA$

求证：$CD\perp OB$



证明：$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$AB\perp\alpha \Rightarrow \overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\therefore CD\perp AB$

2、例 2 证明：如果一条直线和平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线垂直于这个平面。（直线于平面垂直的判定定理）

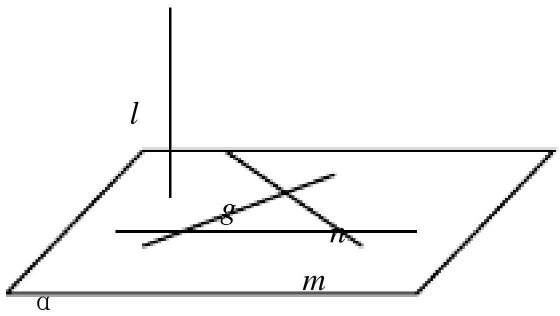
已知：$m\subset\alpha,n\subset\alpha,m\cap n=B$，$l\perp m,l\perp n$

求证：$l\perp\alpha$

证明：在α 内任作一条直线g ，在直线l,g,m,n上分别取向量$\vec{l},\vec{m},\vec{n},\vec{g}$

$\vec{g}=x\vec{m}+y\vec{n}$

所以$\vec{l}\cdot\vec{g}=\vec{l}\cdot(x\vec{m}+y\vec{n})=x\vec{l}\cdot\vec{m}+y\vec{l}\cdot\vec{n}$



因为$\vec{l}\perp\vec{m},\vec{l}\perp\vec{n}$

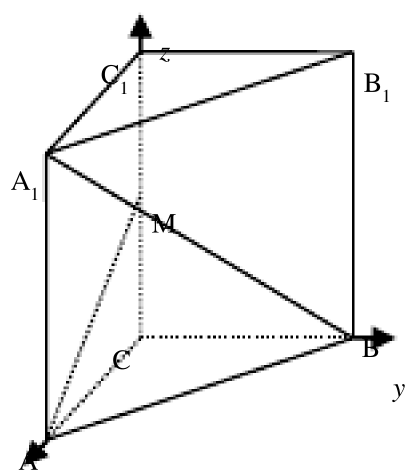
所以$\vec{l}\cdot\vec{m}=0,\vec{l}\perp\vec{n}=0$

可得$\vec{l}\cdot\vec{g}=0$

即$l\perp g$

3、例 3 在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$BC=1,A_1A=\sqrt{6},M$ 是CC_1得中点。 求证：$A_1B\perp AM$

证明：如图，建立空间坐标系



$A_1(\sqrt{3},0,\sqrt{6}),B(0,1,0),A(\sqrt{3},0,0),M\ (0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$

$\overrightarrow{AM}\ =(-\sqrt{3},0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}),\overrightarrow{A_1B}=(-\sqrt{3},1,-\sqrt{6})$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$

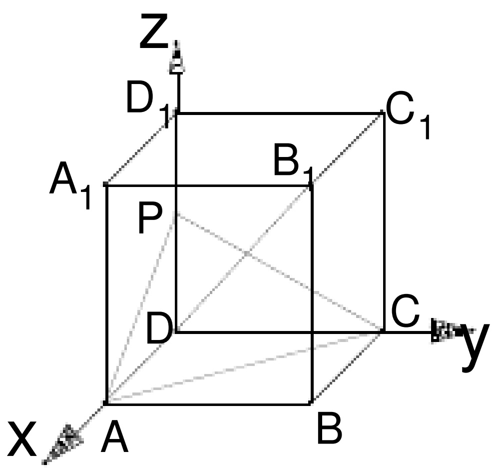
总结：用向量证明比几何方法证明简单、明了。

4、课堂练习：棱长为a的正方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中，在棱DD_1上是否存在点P使$B_1D\perp$面PAC?

解：以 D 为原点建立如图所示的坐标系，

设存在点 P（0，0，z），

$\overrightarrow{AP}=(-a,0,z)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,a,0)$，$\overrightarrow{DB_1}=(a,a,a)$，



∵$B_1D\perp$面 PAC，∴$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，$\overrightarrow{DB_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

∴$-a^2+az=0$ ∴$z=a$，即点 P 与 D_1 重合

∴点 P 与 D_1 重合时，$DB_1\perp$面 PAC

四、回顾总结

本课主要研究垂直问题

五、布置作业

课　　题：空间线面关系的判定（2）

教学目标：

1．能用向量语言描述线线、线面、面面的平行与垂直关系；

2．能用向量方法判断空间线面平行与垂直关系。

教学重点：用向量方法判断空间线面平行与垂直关系

教学难点：用向量方法判断空间线面平行与垂直关系

教学过程

一、复习引入

1、用向量研究空间线面关系，设空间两条直线 l_1,l_2 的方向向量分别为 $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$，两个平面 α_1,α_2 的法向量分别为 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$，则由如下结论

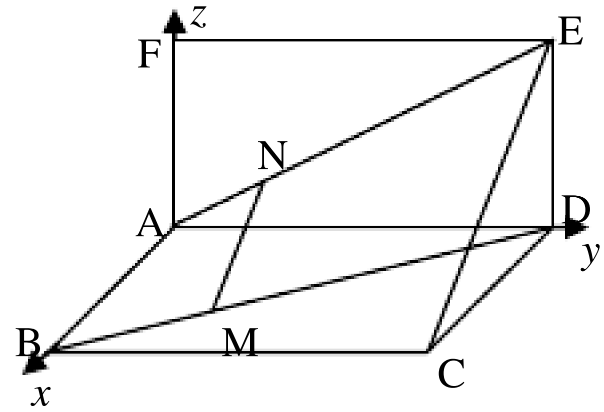
	平　行	垂　直
l_1 与 l_2	$\overrightarrow{e_1}\,//\,\overrightarrow{e_2}$	$\overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{e_2}$
l_1 与 α_1	$\overrightarrow{e_1}\perp\overrightarrow{n_1}$	$\overrightarrow{e_1}\,//\,\overrightarrow{n_1}$
α_1 与 α_2	$\overrightarrow{n_1}\,//\,\overrightarrow{n_2}$	$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

二、数学运用

1、例 4 如图，已知矩形 $ABCD$ 和矩形 $ADEF$ 所在平面互相垂直，点 M,N 分别在对角线 BD,AE 上，且 $BM=\frac{1}{3}BD,AN=\frac{1}{3}AE$，求证：$MN\,//$ 平面 CDE

证明：建立如图所示空间坐标系，设 AB,AD,AF 长分别为 $3a,3b,3c$

$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = (2a,0,-c)$



又平面 CDE 的一个法向量 $\overrightarrow{AD} = (0,3b,0)$

由 $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

得到 $\overrightarrow{NM} \perp \overrightarrow{AD}$

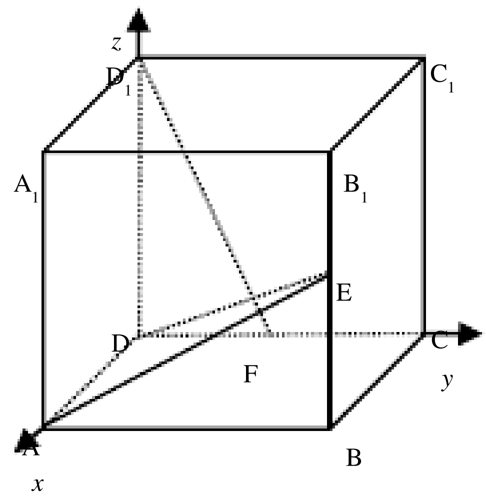
因为 MN 不在平面 CDE 内

所以 NM//平面 CDE

2、例 5 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BB_1, CD 中点，求证：$D_1F\perp$平面 ADE

证明：设正方体棱长为 1，建立如图所示坐标系 $D-xyz$

$\overrightarrow{DA} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{DE} = (1,1,,\frac{1}{2})$



因为 $\overrightarrow{D_1F} = (0,\frac{1}{2},-1)$

所以 $\overrightarrow{D_1F} \cdot \overrightarrow{DA} = 0, \overrightarrow{D_1F} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$

$\overrightarrow{D_1F} \perp \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{D_1F} \perp \overrightarrow{DE}$

$DE \cap DA = D$

所以 $D_1F \perp$ 平面 ADE

3、补充 (20XX 年湖南高考理科试题) 如图，在底面是菱形的四棱锥 $P—ABCD$ 中，

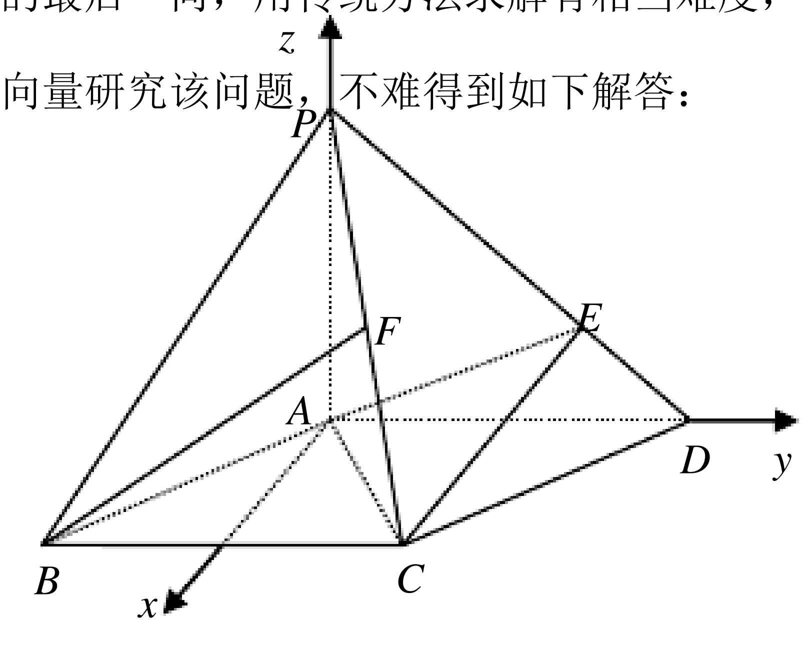
$\angle ABC = 60°$， $PA = AC = a, PB = PD = \sqrt{2}a$, 点 E 在 PD 上,且 $PE{:}ED= 2{:}1$.

(III)在棱 PC 上是否存在一点 F, 使 BF∥平面 AEC?证明你的结论.

该问为探索性问题，作为高考立体几何解答题的最后一问，用传统方法求解有相当难度，但使如果我们建立如图所示空间坐标系，借助空间向量研究该问题，不难得到如下解答：

根据题设条件，结合图形容易得到：

$B(\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{a}{2},0)$， $D(0,a,a)$， $E(0,\frac{2a}{3},\frac{a}{3})$



$C(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2},0)$， $P(0,0,a)$

$\overrightarrow{CP}=(-\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{a}{2},a)$

假设存在点 F

$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CP}=(-\frac{\sqrt{3}\lambda a}{2},-\frac{\lambda a}{2},\lambda a)$。

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\left(-\frac{\sqrt{3}\lambda a}{2},(1-\frac{\lambda}{2})a,\lambda a\right)$

又 $\overrightarrow{AE}=(0,\frac{2a}{3},\frac{a}{3})$， $\overrightarrow{AC}=(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{a}{2},0)$

则必存在实数 λ_1,λ_2 使得 $\overrightarrow{BF}=\lambda_1\overrightarrow{AC}+\lambda_2\overrightarrow{AE}$，把以上向量得坐标形式代入得

$$\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}\lambda a}{2}=\frac{\sqrt{3}\lambda_1 a}{2}\\(1-\frac{\lambda}{2})a=\frac{\lambda_1 a}{2}+\frac{2\lambda_2 a}{3}\\\lambda a=\frac{\lambda_2 a}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}\\\lambda_1=-\frac{1}{2}\\\lambda_2=\frac{3}{2}\end{cases}\quad\text{即有 }\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$$

所以，在棱 PC 存在点 F，即 PC 中点，能够使 BF∥平面 AEC。

本题证明过程中，借助空间坐标系，运用共面向量定理，应用待定系数法，使问题的解决变得更方便，这种方法也更容易被学生掌握。

三、回顾总结

综合运用向量知识判断空间线面平行与垂直

四．布置作业

课　　题：空间的角的计算（1）

教学目标：

能用向量方法解决线线、线面的夹角的计算问题

教学重点：异线角与线面角的计算

教学难点：异线角与线面角的计算

教学过程

一、创设情景

1、异面直线所称的角、线面角的定义及求解方法

2、向量的夹角公式

二、建构数学

1、法向量在求面面角中的应用：

原理：一个二面角的平面角α_1与这个二面角的两个半平面的法向量所成的角α_2相等或互补。

2、法向量在求线面角中的应用：

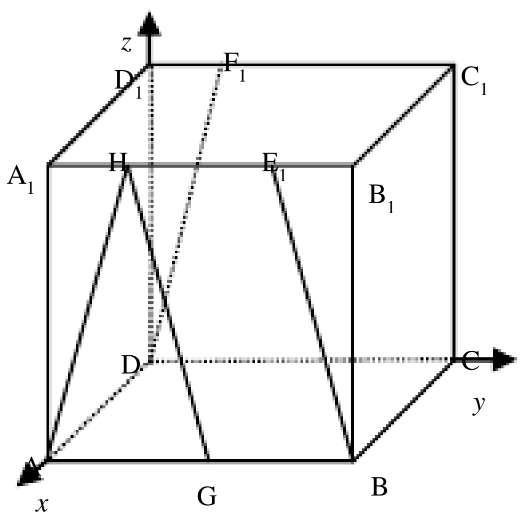
原理：设平面β的斜线 l 与平面β所的角为α_1，斜线 l 与平面β的法向量所成角α_2，则α_1与α_2互余或与α_2的补角互余。

三、数学运用

1、例 1 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E_1，F_1 分别在 A_1B_1,C_1D_1 上，且 $E_1B_1=\frac{1}{4}A_1B_1$，$D_1F_1=\frac{1}{4}D_1C_1$，求 BE_1 与 DF_1 所成的角的大小。

解 1：(几何法)作平行线构造两条异面直线所成的角$\angle AHG$

$$\cos\angle AHG=\frac{15}{17}$$



解 2：（向量法）设 $\overrightarrow{DD_1}=4\vec{a},\overrightarrow{D_1F_1}=\vec{b}$，则 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$

$$|\overrightarrow{DF_1}|^2=|\overrightarrow{BE_1}|^2=(4\vec{a})^2+\vec{b}^2=17\vec{a}^2$$

$$\overrightarrow{DF_1}\cdot\overrightarrow{BE_1}=(4\vec{a}+\vec{b})(4\vec{a}-\vec{b})=15\vec{a}^2$$

$$\cos<\overrightarrow{BE_1},\overrightarrow{DF_1}>=\frac{\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}}{|\overrightarrow{BE_1}||\overrightarrow{DF_1}|}=\frac{15}{17}$$

解 3：（坐标法）设正方体棱长为 4，以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 为正交基底，建立如图所示空间坐标系 $D-xyz$

$$\overrightarrow{BE_1}=(0,-1,4),\overrightarrow{DF_1}=(0,1,4)，\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}=15$$

$$\cos<\overrightarrow{BE_1},\overrightarrow{DF_1}>=\frac{\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}}{|\overrightarrow{BE_1}||\overrightarrow{DF_1}|}=\frac{15}{17}$$

2、例 2 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, F 分别是 BC 的中点，点 E 在 D_1C_1 上,且 $D_1E_1=\frac{1}{4}D_1C_1$, 试求直线 E_1F 与平面 D_1AC 所成角的大小

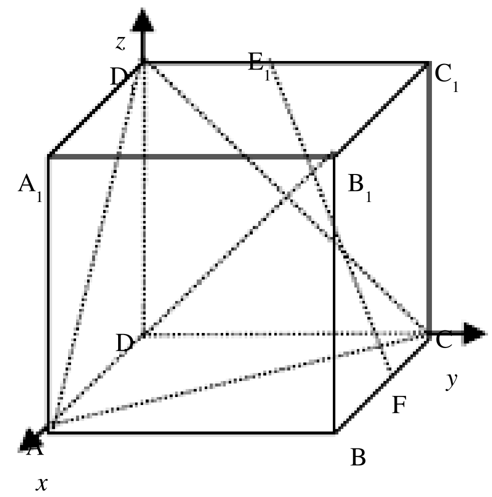
解：设正方体棱长为 1，以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 为单位正交基底，建立如图所示坐标系 $D-xyz$

$\overrightarrow{DB_1}$ 为 D_1AC 平面的法向量，$\overrightarrow{DB_1}=(1,1,1)$

$\overrightarrow{E_1F}=(\frac{1}{2},\frac{3}{4},-1)$

$\cos<\overrightarrow{DB_1},\overrightarrow{E_1F}>=\frac{\sqrt{87}}{87}$

所以直线 E_1F 与平面 D_1AC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{87}}{87}$



3、补充例题 在三棱锥 S—ABC 中，$\angle SAB=\angle SAC=\angle ACB=90°$，$AC=2$，$BC=\sqrt{13}$，$SB=\sqrt{29}$。

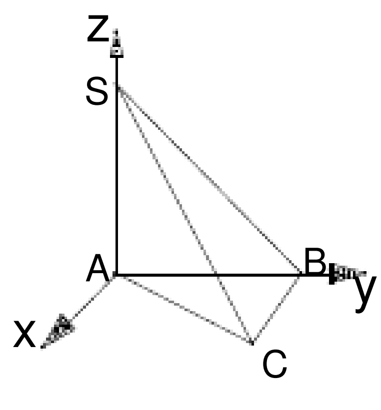
（1）求证：$SC\perp BC$;

（2）求 SC 与 AB 所成角的余弦值。

解：如图，取 A 为原点，AB、AS 分别为 y、z 轴建立空间直角坐标系，则有 $AC=2$，$BC=\sqrt{13}$，$SB=29$，

得 B（$0,\sqrt{17},0$）、S（$0,0,2\sqrt{3}$）、C（$2\sqrt{\frac{13}{17}},\frac{4}{\sqrt{17}},0$），

$\therefore \overrightarrow{SC}$ =（$2\sqrt{\frac{13}{17}},\frac{4}{\sqrt{17}},-2\sqrt{3}$），$\overrightarrow{CB}$ =（$-2\sqrt{\frac{13}{17}},\frac{13}{\sqrt{17}},0$）。



（1）$\because \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，$\therefore SC\perp BC$。

（2）设 SC 与 AB 所成的角为 α，

$\because \overrightarrow{AB}$ =（$0,\sqrt{17},0$），$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{AB}=4$，$|\overrightarrow{SC}||\overrightarrow{AB}|=4\sqrt{17}$，

$\therefore \cos\alpha=\frac{\sqrt{17}}{17}$，即为所求。

4、课堂练习

四、回顾总结

求异线角与线面角的方法

五、布置作业

课　　题：空间的角的计算（2）
教学目标：
　　能用向量方法解决二面角的计算问题
教学重点：二面角的计算
教学难点：二面角的计算
教学过程

一、创设情景

1、二面角的定义及求解方法

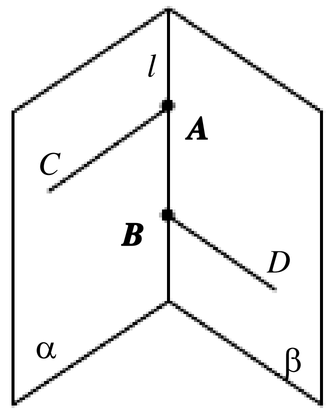
2、平面的法向量的定义

二、建构数学

利用向量求二面角的大小。

方法一：转化为分别是在二面角的两个半平面内且与棱都垂直的两条直线上的两个向量的夹角

（注意：要特别关注两个向量的方向）

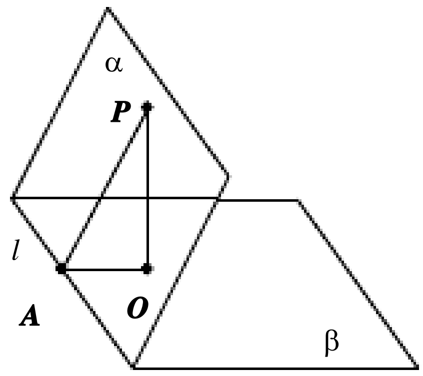


如图：二面角 α-l-β 的大小为 θ，

A，$B\in l$，$AC\subset\alpha$，$BD\subset\beta$, $AC\perp l$，$BD\perp l$

则 $\theta=<\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}>=<\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DB}>$

方法二：先求出二面角一个面内一点到另一个面的距离及到棱的距离，然后通过解直角三角形求角。



如图：已知二面角 α-l-β，在 α 内取一点 P，

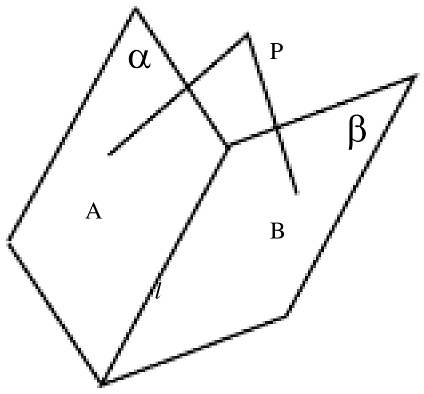
过 P 作 PO⊥β，及 PA⊥l,连 AO，

则 AO⊥l 成立，∠PAO 就是二面角的平面角

用向量可求出|PA|及|PO|，然后解三角形 PAO

求出∠PAO。

方法三：转化为求二面角的两个半平面的法向量夹角的补角。

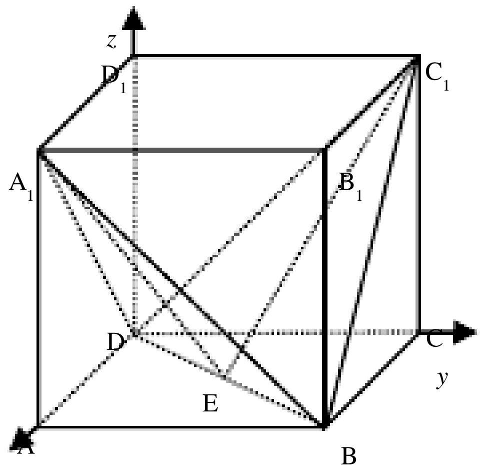


如图（1）P 为二面角 α-l-β 内一点，作 PA⊥α，

PB⊥β，则∠APB 与二面角的平面角互补。

三、数学运用

1、例 3 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求二面角 A_1-BD-C_1 的大小。



解：设正方体棱长为 1，以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 为单位正交基底，

建立如图所示坐标系 $D-xyz$

（法一）$\overrightarrow{EA_1}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$，$\overrightarrow{EC_1}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$

$$\cos<\overrightarrow{EA_1},\overrightarrow{EC_1}>=\frac{1}{3}$$

（法二）求出平面 A_1BD 与平面 C_1BD 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)$， $\overrightarrow{n_2}=(-1,1,1)$

$$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{3}$$

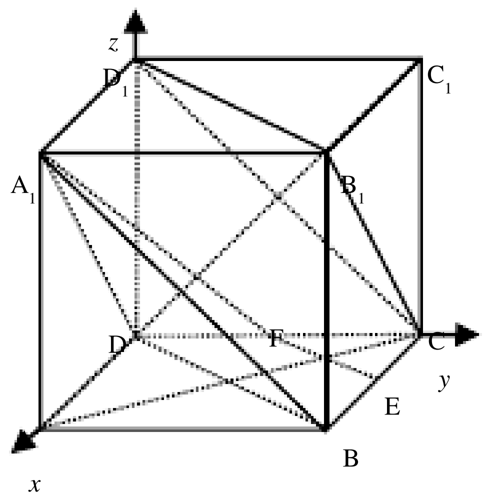
2、例 4　已知 E,F 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BC 和 CD 的中点，求：

（1）A_1D 与 EF 所成角的大小；

（2）A_1F 与平面 B_1EB 所成角的大小；

（3）二面角 $C-D_1B_1-B$ 的大小。

解：设正方体棱长为 1，以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 为单位正交基底，建立如图所示坐标系 $D-xyz$



（1）$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,-1)$

$$\overrightarrow{EF}=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$$

$$\cos<\overrightarrow{A_1D},\overrightarrow{EF}>=\frac{\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{A_1D}||\overrightarrow{EF}|}=\frac{1}{2}$$

A_1D 与 EF 所成角是 60^0

（2）$\overrightarrow{A_1F}=(-1,\frac{1}{2},-1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$

$$\cos<\overrightarrow{A_1F},\overrightarrow{AB}>=\frac{\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{A_1F}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{3}$$

（3）$\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$， $\cos<\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{AC}>=\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC_1}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

二面角 $C-D_1B_1-B$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

四、回顾总结

1、二面角的向量解法

2、法向量的夹角与二面角相等或互补的判断

五、布置作业

课　　题：空间的距离

教学目标：能用向量方法进行有关距离的计算

教学重点：向量方法求点到面的距离

教学难点：向量方法求点到面的距离

教学过程

一、创设情景

1、空间中的距离包括：两点间的距离，点到直线的距离，点到平面的距离，平行直线间的距离，异面直线直线间的距离，直线与平面的距离，两个平行平面间的距离。这些距离的定义各不相同，但都是转化为平面上两点间的距离来计算的。

2、距离的特征：⑴距离是指相应线段的长度；⑵此线段是所有相关线段中最短的；⑶除两点间的距离外，其余总与垂直相联系。

3、求空间中的距离有⑴直接法，即直接求出垂线段的长度；⑵转化法，转化为线面距或面面距，或转化为某三棱锥的高，由等积法或等面积法求解；⑶向量法求解。

二、建构数学

1、两点间的距离公式

设空间两点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$，则 $d_{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

2、向量法在求异面直线间的距离

设分别以这两异面直线上任意两点为起点和终点的向量为 $\vec{a}$，与这两条异面直线都垂直的向量为 $\vec{n}$，则两异面直线间的距离是 $\vec{a}$ 在 $\vec{n}$ 方向上的正射影向量的模。$d=\frac{|\overrightarrow{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

4、向量法在求点到平面的距离中

（1）设分别以平面外一点 P 与平面内一点 M 为起点和终点的向量为 $\vec{a}$，平面的法向量为 $\vec{n}$，则 P 到平面的距离 d 等于 $\vec{a}$ 在 $\vec{n}$ 方向上正射影向量的模。$d=\frac{|\overrightarrow{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$

（2）先求出平面的方程，然后用点到平面的距离公式：点 P（x_0,y_0,z_0）到平面 $AX+BY+CZ+D=0$

的距离 d 为：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

三、数学运用

1、例 1 直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱 $AA_1=\sqrt{3}$，底面 ΔABC 中，$\angle C=90°$，$AC=BC=1$，求点 B_1 到平面 A_1BC 的距离。

解 1：如图建立空间直角坐标系，由已知得直棱柱各顶点坐标如下：

A（1,0,0），B（0,1,0），C（0,0,0）A_1（$1,0,\sqrt{3}$），B_1（$0,1,\sqrt{3}$），C_1（$0,0,\sqrt{3}$）

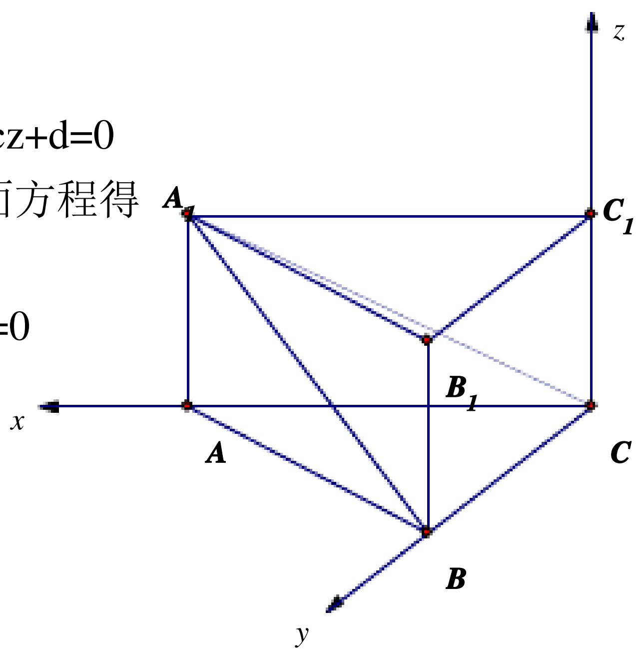
$\therefore \overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1C}=(-1,0,-\sqrt{3})$ $\overrightarrow{B_1A_1}=(1,-1,0)$

设平面 A_1BC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+y-\sqrt{3}z=0\\ -x-\sqrt{3}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\ y=0\\ z=1\end{cases}$$

即 $\vec{n}=(-\sqrt{3},0,1)$

所以，点 B_1 到平面 A_1BC 的距离 $d=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



解 2 建系设点同上（略），设平面 A_1BC 的方程为 $ax+by+cz+d=0$ (a,b,c,d 不全为零)，把点 A_1，B，C 三点坐标分别代入平面方程得

$$\begin{cases}d=0\\ b+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{3}c\\ b=0\end{cases}\Rightarrow \text{平面 } A_1BC \text{ 的方程为} \sqrt{3}\,x+z=0$$

又 B_1（$0,1,\sqrt{3}$）

设点 B_1 到平面 A_1BC 的距离为 d，则

$$d=\frac{|\sqrt{3}\,x_0+1\,x_0+\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

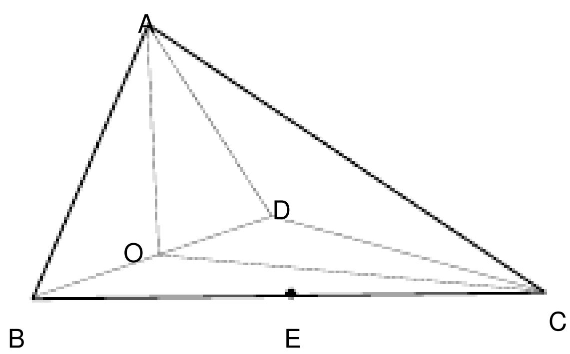
2、例 2（20XX 年福建卷）如图，四面体 ABCD 中，O、E 分别是 BD、BC 的中点，$CA=CB=CD=BD=2$

$AB=AD=\sqrt{2}$

（I）求证：$AO\perp$ 平面 BCD;

（II）求异面直线 AB 与 CD 所成角的大小;

（III）求点 E 到平面 ACD 的距离。

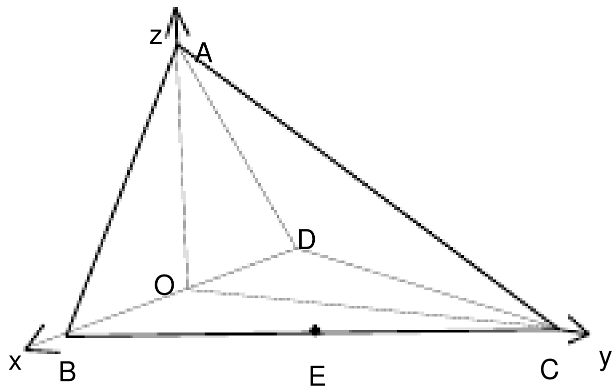


解:（I）略

（II）解：以 O 为原点，如图建立空间直角坐标系，

则 $B(1,0,0), D(-1,0,0),\ C(0,\sqrt{3},0),\ A(0,0,1), E(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0), \overrightarrow{BA}=(-1,0,1), \overrightarrow{CD}=(-1,-\sqrt{3},0).$

$$\therefore \cos<\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}>=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$



$\therefore$ 异面直线 AB 与 CD 所成角的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}.$

（III）解：设平面 ACD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z),$ 则

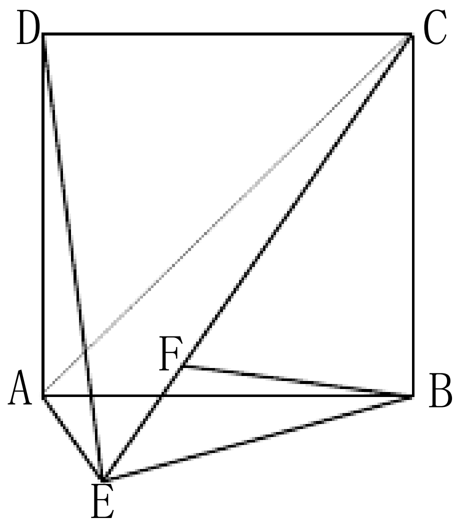
$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AD}=(x,y,z).(-1,0,-1)=0,\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=(x,y,z).(0,\sqrt{3},-1)=0,\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}x+z=0,\\ \sqrt{3}y-z=0.\end{cases}$$

令 $y=1,$ 得 $\vec{n}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$ 是平面 ACD 的一个法向量，又 $\overrightarrow{EC}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),$

$\therefore$ 点 E 到平面 ACD 的距离 $h=\frac{|\overrightarrow{EC}.\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$

3、例 3（2005 福建卷理第 20 题）如图，直二面角 D-AB-E 中，四边形 ABCD 是边长为 2 的正方形，AE＝EB，F 为 CE 上的点，且 BF⊥平面 ACE.



（Ⅰ）求证：AE⊥平面 BCE;

（Ⅱ）求二面角 B-AC-E 的大小;

（Ⅲ）求点 D 到平面 ACE 的距离。

解（Ⅰ）略

（Ⅱ）以线段 AB 的中点为原点 O，OE 所在直线为 x 轴，AB 所在直线为 y 轴，过 O 点平行于 AD 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系 O—xyz，如图.

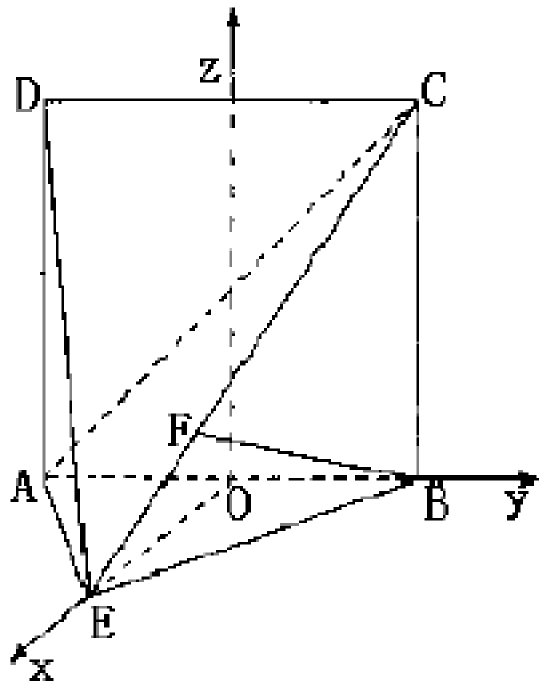
Θ $AE\perp$ 面 BCE，BE⊂面 BCE， $\therefore AE\perp BE$，

在 $Rt\Delta AEB$ 中, $AB=2, O$ 为 AB 的中点，

$\therefore OE=1 \quad \therefore A(0,-1,0), E(1,0,0), C(0,1,2).$

$\overrightarrow{AE}=(1,1,0),\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$. 设平面 AEC 的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+y=0,\\ 2y+2x=0.\end{cases}$解得$\begin{cases}y=-x,\\ z=x,\end{cases}$



令 $x=1$, 得$\vec{n}=(1,-1,1)$是平面 AEC 的一个法向量.

又平面 BAC 的一个法向量为$\vec{m}=(1,0,0)$，

$\therefore\cos(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\vec{m},\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

∴二面角 B—AC—E 的大小为$\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（III）∵AD//z 轴，AD=2，∴$\overrightarrow{AD}=(0,0,2)$，

∴点 D 到平面 ACE 的距离$d=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}.$

四、回顾总结

向量法求距离

五、布置作业

椭圆 椭圆及其标准方程

◆ 知识与技能目标

理解椭圆的概念，掌握椭圆的定义、会用椭圆的定义解决实际问题；理解椭圆标准方程的推导过程及化简无理方程的常用的方法；了解求椭圆的动点的伴随点的轨迹方程的一般方法.

◆ 过程与方法目标

（1）预习与引入过程

当变化的平面与圆锥轴所成的角在变化时，观察平面截圆锥的截口曲线（截面与圆锥侧面的交线）是什么图形？又是怎么样变化的？特别是当截面不与圆锥的轴线或圆锥的母线平行时，截口曲线是椭圆，再观察或操作了课件后，提出两个问题：第一、你能理解为什么把圆、椭圆、双曲线和抛物线叫做圆锥曲线；第二、你能举出现实生活中圆锥曲线的例子．当学生把上述两个问题回答清楚后，要引导学生一起探究 P_{41}页上的问题（同桌的两位同学准备无弹性的细绳子一条（约 10cm 长，两端各结一个套），教师准备无弹性细绳子一条（约 60cm，一端结个套，另一端是活动的），图钉两个）．当套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，画出的图形是椭

圆．启发性提问：在这一过程中，你能说出移动的笔小（动点）满足的几何条件是什么？〖板书〗2．1．1 椭圆及其标准方程．

（2）新课讲授过程

（i）由上述探究过程容易得到椭圆的定义．

〖板书〗把平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离之和等于常数（大于 $\left|F_1F_2\right|$）的点的轨迹叫做椭圆（ellipse）．其中这两个定点叫做椭圆的焦点，两定点间的距离叫做椭圆的焦距．即当动点设为 M 时，椭圆即为点集 $P=\left\{M\mid\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=2a\right\}$．

（ii）椭圆标准方程的推导过程

提问：已知图形，建立直角坐标系的一般性要求是什么？第一、充分利用图形的对称性；第二、注意图形的特殊性和一般性关系．

无理方程的化简过程是教学的难点，注意无理方程的两次移项、平方整理．

设参量 b 的意义：第一、便于写出椭圆的标准方程；第二、a,b,c 的关系有明显的几何意义．

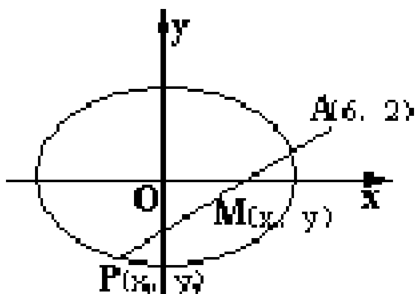
类比：写出焦点在 y 轴上，中心在原点的椭圆的标准方程 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$．

（iii）例题讲解与引申

例 1 已知椭圆两个焦点的坐标分别是 $\left(-2,0\right)$，$\left(2,0\right)$，并且经过点 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，求它的标准方程．

分析：由椭圆的标准方程的定义及给出的条件，容易求出 a,b,c．引导学生用其他方法来解．

另解：设椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，因点 $\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$ 在椭圆上，则 $\begin{cases}\dfrac{25}{4a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1\\ a^2-b^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{10}\\ b=\sqrt{6}\end{cases}$．



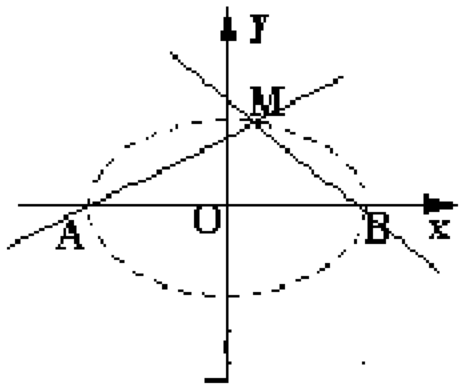
例 2 如图，在圆 $x^2+y^2=4$ 上任取一点 P，过点 P 作 x 轴的垂线段 PD，D 为垂足．当点 P 在圆上运动时，线段 PD 的中点 M 的轨迹是什么？

分析： 点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动，由点 P 移动引起点 M 的运动，则称点 M 是点 P 的伴随点，因点 M 为线段 PD 的中点，则点 M 的坐标可由点 P 来表示，从而能求点 M 的轨迹方程．

引申：设定点$A(6,2)$，P是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上动点，求线段$AP$中点$M$的轨迹方程.

解法剖析：①（代入法求伴随轨迹）设$M(x,y)$，$P(x_1,y_1)$；②（点与伴随点的关系）$\because M$为线段AP的中点，$\therefore \begin{cases} x_1=2x-6 \\ y_1=2y-2 \end{cases}$；③（代入已知轨迹求出伴随轨迹），$\because \frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{9}=1$，$\therefore$点$M$的轨迹方程为$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=\frac{1}{4}$；④伴随轨迹表示的范围.

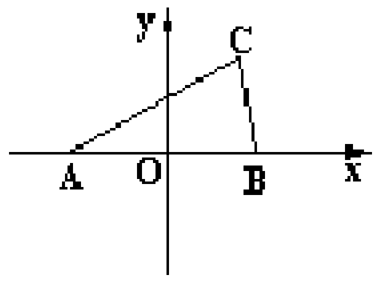
例 3 如图，设A，B的坐标分别为$(-5,0)$，$(5,0)$. 直线AM，BM相交于点M，且它们的斜率之积为$-\frac{4}{9}$，求点M的轨迹方程.



分析：若设点$M(x,y)$，则直线AM，BM的斜率就可以用含x,y的式子表示，由于直线AM，BM的斜率之积是$-\frac{4}{9}$，因此，可以求出x,y之间的关系式，即得到点M的轨迹方程.

解法剖析：设点$M(x,y)$，则$k_{AM}=\frac{y}{x+5}(x\neq -5)$，$k_{BM}=\frac{y}{x-5}(x\neq 5)$；代入点$M$的集合有$\frac{y}{x+5}\times\frac{y}{x-5}=-\frac{4}{9}$，化简即可得点$M$的轨迹方程.

引申：如图，设△ABC的两个顶点$A(-a,0)$，$B(a,0)$，顶点C在移动，且$k_{AC}\times k_{BC}=k$，且$k<0$，试求动点C的轨迹方程.



引申目的有两点：①让学生明白题目涉及问题的一般情形；②当k值在变化时，线段AB的角色也是从椭圆的长轴→圆的直径→椭圆的短轴.

椭圆 椭圆的简单几何性质

◆ 知识与技能目标

了解用方程的方法研究图形的对称性；理解椭圆的范围、对称性及对称轴，对称中心、离心率、顶点的概念；掌握椭圆的标准方程、会用椭圆的定义解决实际问题；通过例题了解椭圆的第二定义，准线及焦半径的概念，利用信息技术初步了解椭圆的第二定义.

◆ 过程与方法目标

（1）复习与引入过程

引导学生复习由函数的解析式研究函数的性质或其图像的特点，在本节中不仅要注意通过对椭圆的标准方程的讨论，研究椭圆的几何性质的理解和应用，而且还注意对这种研究方法的培养．①由椭圆的标准方程和非负实数的概念能得到椭圆的范围；②由方程的性质得到椭圆的对称性；③先定义圆锥曲线顶点的概念，容易得出椭圆的顶点的坐标及长轴、短轴的概念；④通过P_{48}的思考问题，探究椭圆的扁平程度量椭圆的离心率．〖板书〗§2．1．2椭圆的简单几何性质．

（2）新课讲授过程

（i）通过复习和预习，知道对椭圆的标准方程的讨论来研究椭圆的几何性质．

提问：研究曲线的几何特征有什么意义？从哪些方面来研究？

通过对曲线的范围、对称性及特殊点的讨论，可以从整体上把握曲线的形状、大小和位置．要从范围、对称性、顶点及其他特征性质来研究曲线的几何性质．

（ii）椭圆的简单几何性质

①范围：由椭圆的标准方程可得，$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\geq 0$，进一步得：$-a\leq x\leq a$，同理可得：$-b\leq y\leq b$，即椭圆位于直线$x=\pm a$和$y=\pm b$所围成的矩形框图里；

②对称性：由以$-x$代x，以$-y$代y和$-x$代x，且以$-y$代y这三个方面来研究椭圆的标准方程发生变化没有，从而得到椭圆是以x轴和y轴为对称轴，原点为对称中心；

③顶点：先给出圆锥曲线的顶点的统一定义，即圆锥曲线的对称轴与圆锥曲线的交点叫做圆锥曲线的顶点．因此椭圆有四个顶点，由于椭圆的对称轴有长短之分，较长的对称轴叫做长轴，较短的叫做短轴；

④离心率： 椭圆的焦距与长轴长的比$e=\frac{c}{a}$叫做椭圆的离心率（$0<e<1$），

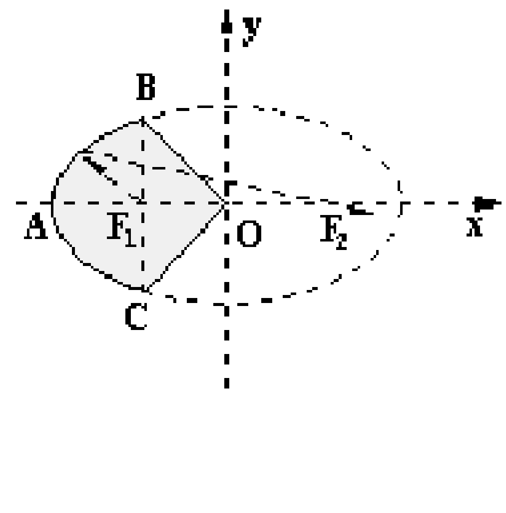
$\begin{cases}\text{当}e\to 1\text{时，c }\to a,\text{，b}\to 0\\ \text{椭圆图形越扁}\end{cases}$；$\begin{cases}\text{当}e\to 0\text{时，c }\to 0,\text{ b }\to a\\ \text{椭圆越接近于圆}\end{cases}$．

（iii）例题讲解与引申、扩展

例4 求椭圆$16x^2+25y^2=400$的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点的坐标．

分析：由椭圆的方程化为标准方程，容易求出a,b,c．引导学生用椭圆的长轴、短轴、离心率、焦点和顶点的定义即可求相关量．

扩展：已知椭圆$mx^2+5y^2=5m\left(m>0\right)$的离心率为$e=\frac{\sqrt{10}}{5}$，求$m$的值．

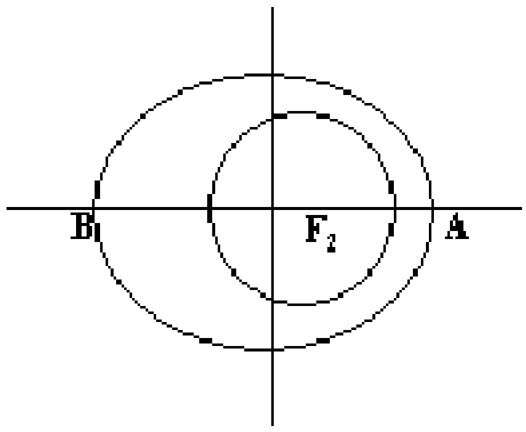


解法剖析：依题意，$m>0, m\neq 5$，但椭圆的焦点位置没有确定，应分类讨论：①当焦点在 x 轴上，即 $0<m<5$ 时，有 $a=\sqrt{5}, b=\sqrt{m}, c=\sqrt{5-m}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{5-m}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$，得 $m=3$；②当焦点在 y 轴上，即 $m>5$ 时，有 $a=\sqrt{m}, b=\sqrt{5}, c=\sqrt{m-5}$，$\therefore$ $\dfrac{\sqrt{m-5}}{\sqrt{m}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\Rightarrow m=\dfrac{25}{3}$.

例 5 ，如图，一种电影放映灯的反射镜面是旋转椭圆面的一部分．过对对称的截口 BAC 是椭圆的一部分，灯丝位于椭圆的一个焦点 F_1 上，片门位于另一个焦点 F_2 上，由椭圆一个焦点 F_1 发出 的光线，经过旋转椭圆 面反射后集中到另一个 焦点 F_2．已知 $BC\perp F_1F_2$，$|F_1B|=2.8cm$，$|F_1F_2|=4.5cm$．建立适当的坐标系，求截口 BAC 所在椭圆的方程.

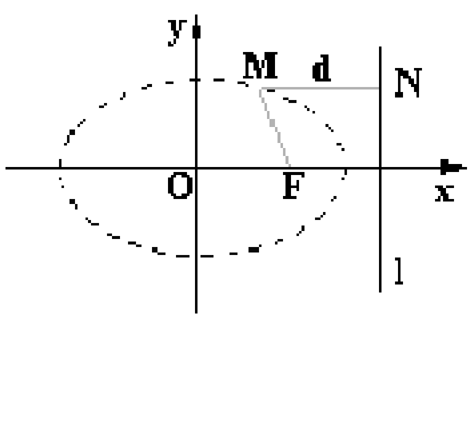
解法剖析：建立适当的直角坐标系，设椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，算出 a,b,c 的值；此题应注意两点：①注意建立直角坐标系的两个原则；②关于 a,b,c 的近似值，原则上在没有注意精确度时，看题中其他量给定的有效数字来决定.

引申：如图所示，“神舟”截人飞船发射升空，进入预定轨道开始巡天飞行，其轨道是以地球的中心 F_2 为一个焦点的椭圆，近地点 A 距地面 $200km$，远地点 B 距地面 $350km$，已知地球的半径 $R=6371km$．建立适当的直角坐标系，求出椭圆的轨迹方程.



例 6 如图，设 $M(x,y)$ 与定点 $F(4,0)$ 的距离和它到直线 l：$x=\dfrac{25}{4}$ 的距离的比是常数 $\dfrac{4}{5}$，求点 M 的轨迹方程.

分析：若设点 $M(x,y)$，则 $|MF|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，到直线 l：$x=\dfrac{25}{4}$ 的距离 $d=\left|x-\dfrac{25}{4}\right|$，则容易得点 M 的轨迹方程.



引申：（用《几何画板》探究）若点$M\left(x,y\right)$与定点$F\left(c,0\right)$的距离和它到定直线l：$x=\frac{a^2}{c}$的距离比是常数$e=\frac{c}{a}\left(a>c>0\right)$，则点$M$的轨迹方程是椭圆．其中定点$F\left(c,0\right)$是焦点，定直线$l$：$x=\frac{a^2}{c}$相应于$F$的准线；由椭圆的对称性，另一焦点$F'\left(-c,0\right)$，相应于$F'$的准线$l'$：$x=-\frac{a^2}{c}$．

抛物线及标准方程

知识与技能目标

使学生掌握抛物线的定义、抛物线的标准方程及其推导过程．

要求学生进一步熟练掌握解析几何的基本思想方法，提高分析、对比、概括、转化等方面的能力．

过程与方法目标

情感，态度与价值观目标

（1）培养学生用对称的美学思维来体现数学的和谐美。

（2）培养学生观察，实验，探究与交流的数学活动能力。

能力目标：（1）重视基础知识的教学、基本技能的训练和能力的培养；

（2）启发学生能够发现问题和提出问题，善于独立思考，学会分析问题和创造地解决问题；

（3）通过教师指导发现知识结论，培养学生抽象概括能力和逻辑思维能力

（1） 复习与引入过程

回忆平面内与一个定点F的距离和一条定直线l的距离的比是常数e的轨迹，当0＜e＜1时是椭圆，当e＞1时是双曲线，那么当e=1时，它又是什么曲线？

2．简单实验

如图2-29，把一根直尺固定在画图板内直线l的位置上，一块三角板的一条直角边紧靠直尺的边缘；把一条绳子的一端固定于三角板另一条直角边上的点A，截取绳子的长等于A到直线l的距离AC，并且把绳子另一端固定在图板上的一点F；用一支铅笔扣着绳子，紧靠着三角板的这条直角边把绳子绷紧，然后使三角板紧靠着直尺左右滑动，这样铅笔就描出一条曲线，这条曲线叫做抛物线．反复演示后，请同学们来归纳抛物线的定义，教师总结．

（2） 新课讲授过程

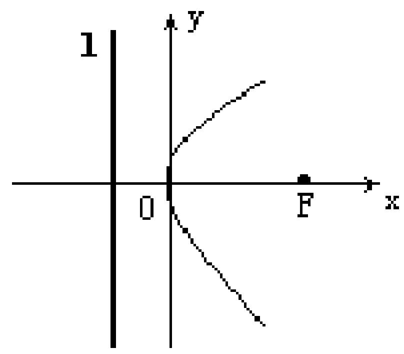
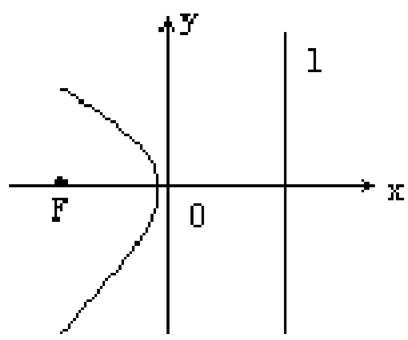
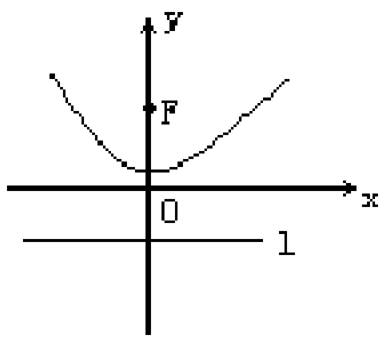
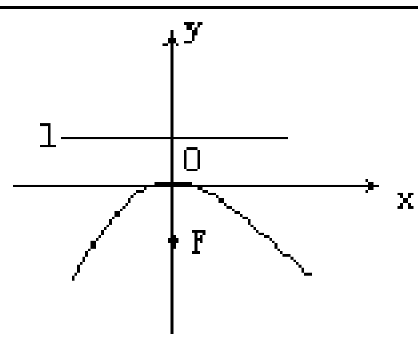
（i）由上面的探究过程得出抛物线的定义

《板书》平面内与一定点F和一条定直线l的距离相等的点的轨迹叫做抛物线(定点F不在定直线l上)．定点F叫做抛物线的焦点，定直线l叫做抛物线的准线.

(ii) 抛物线标准方程的推导过程

引导学生分析出：方案3中得出的方程作为抛物线的标准方程．这是因为这个方程不仅具有较简的形式，而方程中的系数有明确的几何意义：一次项系数是焦点到准线距离的2倍．

由于焦点和准线在坐标系下的不同分布情况，抛物线的标准方程有四种情形(列表如下)：

方程	焦点	准线	图形
$y^2=2px(p>0)$	$F(\frac{p}{2},0)$	$x=-\frac{p}{2}$	
$y^2=-2px(p>0)$	$F(-\frac{p}{2},0)$	$x=\frac{p}{2}$	
$x^2=2py(p>0)$	$F(0,\frac{p}{2})$	$y=-\frac{p}{2}$	
$x^2=-2py(p>0)$	$F(0,-\frac{p}{2})$	$y=\frac{p}{2}$	

将上表画在黑板上，并讲清为什么会出现四种不同的情形，四种情形中P＞0；并指出图形的位置特征和方程的形式应结合起来记忆．即：当对称轴为x轴时，方程等号右端为±2px，相应地左端为y2；当对称轴为y轴时，方程等号的右端为±2py，相应地左端为x2．同时注意：当焦点在正半轴上时，取正号；当焦点在负半轴上时，取负号．

(iii)例题讲解与引申

例1　已知抛物线的标准方程是 $y^2=6x$，求它的焦点坐标和准线方程

已知抛物线的焦点是 $F(0,-2)$，求它的标准方程

解　因为 $p=3$，所以抛物线的焦点坐标是（3/2,0）准线方程是 $x=-3/2$

因为抛物线的焦点在轴的负半轴上，且 $p/2=2$，$p=4$，所以抛物线的标准方程是 $x^2=-8y$

例 2 一种卫星接收天线的轴截面如图所示。卫星拨束近似平行状态社如轴截面为抛物线的接受天线，经反射聚焦到焦点处。已知接收天线的口径为4.8m 深度为 0.5m，求抛物线的标准方程和焦点坐标。

解；设抛物线的标准方程是 $y^2=2px$　(p>0)。有已知条件可得，点 A 的坐标是（0.5，2.4）代入方程，得 2.4=2p*0.5 即=5.76

所以，抛物线的标准方程是 $y^2=11.52x$，焦点坐标是（2.88，0）

抛物线的几何性质

知识与技能目标

使学生理解并掌握抛物线的几何性质，并能从抛物线的标准方程出发，推导这些性质．

从抛物线的标准方程出发，推导抛物线的性质，从而培养学生分析、归纳、推理等能力

过程与方法目标

复习与引入过程

1．抛物线的定义是什么？

请一同学回答．应为：“平面内与一个定点F 和一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹叫做抛物线．”

2．抛物线的标准方程是什么？

再请一同学回答．应为：抛物线的标准方程是 $y^2=2px(p>0)$，$y^2=-2px(p>0)$，$x^2=2py(p>0)$和 $x^2=-2py(p>0)$．

下面我们类比椭圆、双曲线的几何性质，从抛物线的标准方程 $y^2=2px(p>0)$出发来研究它的几何性质．《板书》抛物线的几何性质

（2）新课讲授过程

（i）抛物线的几何性质

通过和椭圆、双曲线的几何性质相比，抛物线的几何性质有什么特点？

学生和教师共同小结：

(1)抛物线只位于半个坐标平面内，虽然它也可以无限延伸，但是没有渐近线．

(2)抛物线只有一条对称轴，这条对称轴垂直于抛物线的准线或与顶点和焦点的连线重合，抛物线没有中心．

(3)抛物线只有一个顶点，它是焦点和焦点在准线上射影的中点．

(4)抛物线的离心率要联系椭圆、双曲线的第二定义，并和抛物线的定义作比较．其结果是应规定抛物线的离心率为 1．注意：这样不仅引入了抛物线离心率的概念，而且把圆锥曲线作为点的轨迹统一起来了

（ii）例题讲解与引申

例题 3 已知抛物线的顶点在原点，对称轴是 x 轴，抛物线上的点 M(-3，m)到焦点的距离等于 5，求抛物线的方程和 m 的值．

解法一：由焦半径关系，设抛物线方程为 $y^2=-2px(p>0)$，则准线方程是$x=\frac{p}{2}$.

因为抛物线上的点 M(-3，m)到焦点的距离|MF|与到准线的距离|MK|(K为M到准线的垂足)相等，所以|MF|=|MK|，即$5=|-3|+\frac{p}{2}$ 由此得 p=4.

因此，所求抛物线方程为 $y^2=-8x$.

又点 M(-3，m)在此抛物线上，故 $m^2=-8(-3)$.

$\therefore m=2\sqrt{6}$或$m=-2\sqrt{6}$.

解法二：由题设列两个方程，可求得 p 和 m．由学生演板．由题意知抛物线的方程为$y^2=-2px(p>0)$，则焦点是$F(-\frac{p}{2}，0)$，因点M(-3，m)在抛物线上且|MF|=5，故

$$\begin{cases} m^2=6p \\ \sqrt{(-3+\frac{p}{2})^2+m^2}=5 \end{cases}$$

解之得：$\begin{cases} p=4 \\ m=2\sqrt{6} \end{cases}$或$\begin{cases} p=4 \\ m=-2\sqrt{6} \end{cases}$

因此，抛物线方程为$y^2=-8x$，m的值为$2\sqrt{6}$或$-2\sqrt{6}$.

例 4　过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的一条直线与这抛物线相交于 A、B 两点，且 A(x_1，y_1)、B(x_2，y_2)(图 2-34).

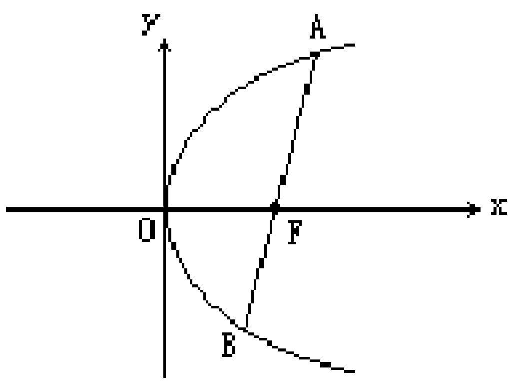


图2-34

求证：$y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$.

证明：

$\because$ 焦点F为$(\dfrac{p}{2}，0)$.

(1)当 AB 与 x 轴不垂直时，设 AB 方程为：

$y=k(x-\dfrac{p}{2})(k\neq 0)$

由$\begin{cases} y=k(x-\dfrac{p}{2}) \\ y^2=2px \end{cases}$ 得：$ky^2-2py-kp^2=0$.

此方程的两根 y1、y2 分别是 A、B 两点的纵坐标，则有 y1y2=-p2.

(2)当AB⊥x轴时，因为直线AB的方程为$x=\dfrac{p}{2}$，所以$y_1=p$，$y_2=-p$

或 y1=-p，y2=p，故 y1y2=-p2.

综合上述有 y1y2=-p2

又∵A(x1，y1)、B(x2，y2)是抛物线上的两点，

$\therefore y_1^2=2px_1$，且$y_2^2=2px_2$.

从而有$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=\dfrac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\dfrac{p^2}{4}$.

$\therefore x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$.

双曲线 双曲线及其标准方程

◆ 知识与技能目标

理解双曲线的概念，掌握双曲线的定义、会用双曲线的定义解决实际问题；理解双曲线标

准方程的推导过程及化简无理方程的常用的方法；了解借助信息技术探究动点轨迹的《几何画板》的制作或操作方法．

◆ 过程与方法目标

（1）预习与引入过程

预习教科书，当变化的平面与圆锥轴所成的角在变化时，观察平面截圆锥的截口曲线（截面与圆锥侧面的交线）是什么图形？又是怎么样变化的？特别是当截面与圆锥的轴线或平行时，截口曲线是双曲线，待观察或操作了课件后，提出两个问题：第一、你能理解为什么此时的截口曲线是双曲线而不是两条抛物线；第二、你能举出现实生活中双曲线的例子．当学生把上述两个问题回答清楚后，要引导学生一起思考与探究 P_{56} 页上的问题（同桌的两位同学准备无弹性的细绳子两条（一条约 10cm 长，另一条约 6cm 每条一端结一个套）和笔尖带小环的铅笔一枝，教师准备无弹性细绳子两条（一条约 20cm，另一条约 12cm，一端结个套，另一端是活动的），图钉两个）．当把绳子按同一方向穿入笔尖的环中，把绳子的另一端重合在一起，拉紧绳子，移动笔尖，画出的图形是双曲线．启发性提问：在这一过程中，你能说出移动的笔小（动点）满足的几何条件是什么？〖板书〗§2．2．1 双曲线及其标准方程．

（2）新课讲授过程

（i）由上述探究过程容易得到双曲线的定义．

〖板书〗把平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值等于常数（小于 $|F_1F_2|$）的点的轨迹叫做双曲线（hyperbola）．其中这两个定点叫做双曲线的焦点，两定点间的距离叫做双曲线的焦距．即当动点设为 M 时，双曲线即为点集 $P=\{M\,\|\,|MF_1|-|MF_2|\,|=2a\}$．

（ii）双曲线标准方程的推导过程

提问：已知椭圆的图形，是怎么样建立直角坐标系的？类比求椭圆标准方程的方法由学生来建立直角坐标系．

无理方程的化简过程仍是教学的难点，让学生实际掌握无理方程的两次移项、平方整理的数学活动过程．

类比椭圆：设参量 b 的意义：第一、便于写出双曲线的标准方程；第二、a,b,c 的关系有明显的几何意义．

类比：写出焦点在 y 轴上，中心在原点的双曲线的标准方程 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\left(a>0,b>0\right)$．

（iii）例题讲解、引申与补充

例 1 已知双曲线两个焦点分别为 $F_1\left(-5,0\right)$，$F_2\left(5,0\right)$，双曲线上一点 P 到 F_1，F_2 距离差的绝对值等于 6，求双曲线的标准方程．

分析：由双曲线的标准方程的定义及给出的条件，容易求出 a,b,c．

补充：求下列动圆的圆心M的轨迹方程：① 与⊙C：$(x+2)^2+y^2=2$内切，且过点$A(2,0)$；② 与⊙C_1：$x^2+(y-1)^2=1$和⊙C_2：$x^2+(y-1)^2=4$都外切；③ 与⊙C_1：$(x+3)^2+y^2=9$外切，且与⊙C_2：$(x-3)^2+y^2=1$内切.

解题剖析：这表面上看是圆与圆相切的问题，实际上是双曲线的定义问题. 具体解：设动圆M的半径为r.

① ∵⊙C与⊙M内切，点A在⊙C外，∴$|MC|=r-\sqrt{2}$，$|MA|=r$，因此有$|MA|-|MC|=\sqrt{2}$，∴点M的轨迹是以C、A为焦点的双曲线的左支，即M的轨迹方程是

$2x^2-\dfrac{2y^2}{7}=1\left(x\le-\sqrt{2}\right)$；

② ∵⊙M与⊙C_1、⊙C_2均外切，∴$|MC_1|=r+1$，$|MC_2|=r+2$，因此有$|MC_2|-|MC_1|=1$，∴点M的轨迹是以C_2、C_1为焦点的双曲线的上支，∴M的轨迹方程是

$4y^2-\dfrac{4x^2}{3}=1\left(y\ge\dfrac{3}{4}\right)$；

③ ∵e M与e C_1外切，且e M与e C_2内切，∴$|MC_1|=r+3$，$|MC_2|=r-1$，因此$|MC_1|-|MC_2|=4$，∴点M的轨迹是以C_1、C_2为焦点的双曲线的右支，∴M的轨迹方程

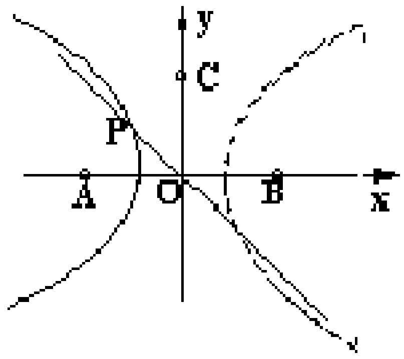
是$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1(x\ge2)$.

例 2 已知A，B两地相距$800m$，在A地听到炮弹爆炸声比在B地晚$2s$，且声速为$340m/s$，求炮弹爆炸点的轨迹方程.

分析：首先要判断轨迹的形状，由声学原理：由声速及A，B两地听到爆炸声的时间差，即可知A，B两地与爆炸点的距离差为定值．由双曲线的定义可求出炮弹爆炸点的轨迹方程.

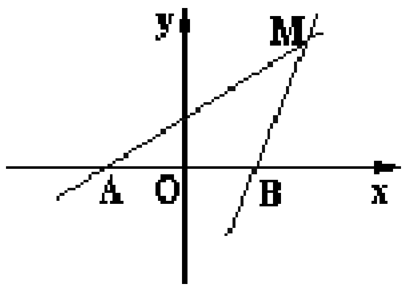
扩展：某中心接到其正东、正西、正北方向三个观察点的报告：正西、正北两个观察点同时听到了一声巨响，正东观察点听到该巨响的时间比其他两个观察点晚$4s$．已知各观察点到该中心的距离都是$1020m$．试确定该巨响发生的位置（假定当时声音传播的速度为$340m/s$；相关点均在同一平面内）.

解法剖析：因正西、正北同时听到巨响，则巨响应发生在西北方向或东南方向，以因正东比正西晚$4s$，则巨响应在以这两个观察点为焦点的双曲线上.



如图，以接报中心为原点O，正东、正北方向分别为x轴、y轴方向，建立直角坐标系，设A、B、C分别是西、东、北观察点，则$A(-1020,0)$，$B(1020,0)$，$C(0,1020)$.

设$P(x,y)$为巨响发生点，$\because A$、C同时听到巨响，$\therefore OP$所在直线为$y=-x$……①，又因B点比A点晚$4s$听到巨响声，$\therefore$ $|PB|-|PA|=4\times 340=1360(m)$．由双曲线定义知，$a=680$，$c=1020$，$\therefore$ $b=340\sqrt{5}$，$\therefore$ P点在双曲线方程为$\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{5\times 340^2}=1$ $(x\le -680)$……②．联立①、②求出P点坐标为$P(-680\sqrt{5},680\sqrt{5})$．即巨响在正西北方向$680\sqrt{10}m$处.



探究：如图，设A，B的坐标分别为$(-5,0)$，$(5,0)$．直线AM，BM相交于点M，且它们的斜率之积为$\frac{4}{9}$，求点M的轨迹方程，并与§2．1．例 3 比较，有什么发现？

探究方法：若设点$M(x,y)$，则直线AM，BM的斜率就可以用含x,y的式子表示，由于直线AM，BM的斜率之积是$\frac{4}{9}$，因此，可以求出x,y之间的关系式，即得到点M的轨迹方程.

双曲线 双曲线的简单几何性质

◆ 知识与技能目标

了解平面解析几何研究的主要问题：（1）根据条件，求出表示曲线的方程；（2）通过方程，研究曲线的性质．理解双曲线的范围、对称性及对称轴，对称中心、离心率、顶点、渐近线的概念；掌握双曲线的标准方程、会用双曲线的定义解决实际问题；通过例题和探究了解双曲线的第二定义，准线及焦半径的概念，利用信息技术进一步见识圆锥曲线的统一定义.

◆ 过程与方法目标

（1）复习与引入过程

引导学生复习得到椭圆的简单的几何性质的方法，在本节课中不仅要注意通过对双曲线的标准方程的讨论，研究双曲线的几何性质的理解和应用，而且还注意对这种研究方法的进一步地培养．①由双曲线的标准方程和非负实数的概念能得到双曲线的范围；②由方程的性质得到双曲线的对称性；③由圆锥曲线顶点的统一定义，容易得出双曲线的顶点的坐标及实轴、虚轴的概念；④应用信息技术的《几何画板》探究双曲线的渐近线问题；⑤类比椭圆通过P_{56}的思考问题，探究双曲线的扁平程度量椭圆的离心率．〖板书〗§2．2．2 双曲线的简单几何性质．

（2）新课讲授过程

（i）通过复习和预习，对双曲线的标准方程的讨论来研究双曲线的几何性质．

提问：研究双曲线的几何特征有什么意义？从哪些方面来研究？

通过对双曲线的范围、对称性及特殊点的讨论，可以从整体上把握曲线的形状、大小和位置．要从范围、对称性、顶点、渐近线及其他特征性质来研究曲线的几何性质．

（ii）双曲线的简单几何性质

①范围：由双曲线的标准方程得，$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\geq 0$，进一步得：$x\leq -a$，或$x\geq a$．这说明双曲线在不等式$x\leq -a$，或$x\geq a$所表示的区域；

②对称性：由以$-x$代x，以$-y$代y和$-x$代x，且以$-y$代y这三个方面来研究双曲线的标准方程发生变化没有，从而得到双曲线是以x轴和y轴为对称轴，原点为对称中心；

③顶点：圆锥曲线的顶点的统一定义，即圆锥曲线的对称轴与圆锥曲线的交点叫做圆锥曲线的顶点．因此双曲线有两个顶点，由于双曲线的对称轴有实虚之分，焦点所在的对称轴叫做实轴，焦点不在的对称轴叫做虚轴；

④渐近线：直线$y=\pm\frac{b}{a}x$叫做双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线；

⑤离心率： 双曲线的焦距与实轴长的比$e=\frac{c}{a}$叫做双曲线的离心率（$e>1$）．

（iii）例题讲解与引申、扩展

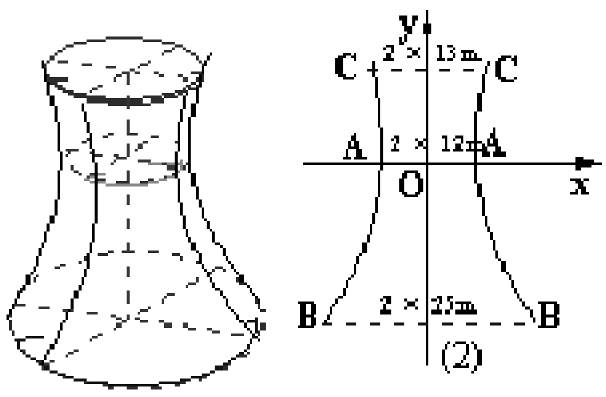
例 3 求双曲线$9y^2-16x^2=144$的实半轴长和虚半轴长、焦点的坐标、离心率、渐近线方程．

分析：由双曲线的方程化为标准方程，容易求出a,b,c．引导学生用双曲线的实半轴长、虚半轴长、离心率、焦点和渐近线的定义即可求相关量或式子，但要注意焦点在y轴上的渐近线是$y=\pm\frac{a}{b}x$．

扩展：求与双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$共渐近线，且经过$A\left(2\sqrt{3},-3\right)$点的双曲线的标准方及离心率．

解法剖析：双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x$．①焦点在$x$轴上时，设所求的双曲线为$\frac{x^2}{16k^2}-\frac{y^2}{9k^2}=1$，$\because A\left(2\sqrt{3},-3\right)$点在双曲线上，$\therefore k^2=-\frac{1}{4}$，无解；②焦点在$y$轴上时，设所求的双曲线为$-\frac{x^2}{16k^2}+\frac{y^2}{9k^2}=1$，$\because A\left(2\sqrt{3},-3\right)$点在双曲线上，$\therefore k^2=\frac{1}{4}$，因此，所求双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{\frac{9}{4}}-\frac{x^2}{4}=1$，离心率$e=\frac{5}{3}$．这个要进行分类讨论，但只有一种情形有解，事实上，可直接设所求的双曲线的方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=m\left(m\in R,m\neq 0\right)$.

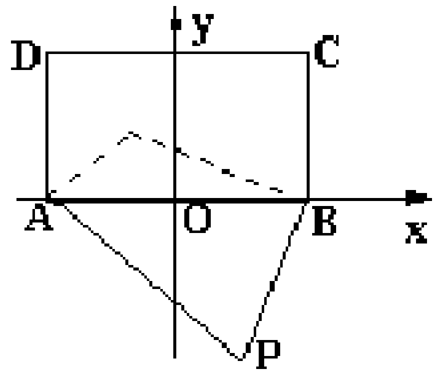
例 4 双曲线型冷却塔的外形，是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面如图（1），它的最小半径为$12m$，上口半径为$13m$，下口半径为$25m$，高为$55m$．试选择适当的坐标系，求出双曲线的方程（各长度量精确到$1m$）.



(1) (2)

解法剖析：建立适当的直角坐标系，设双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，算出$a,b,c$的值；此题应注意两点：①注意建立直角坐标系的两个原则；②关于a,b,c的近似值，原则上在没有注意精确度时，看题中其他量给定的有效数字来决定．

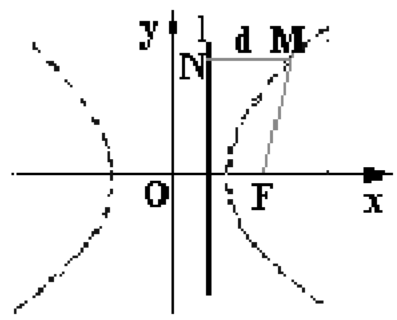
引申：如图所示，在P处堆放着刚购买的草皮，现要把这些草皮沿着道路PA或PB送到呈矩形的足球场$ABCD$中去铺垫，已知$\left|AP\right|=150m$，$\left|BP\right|=100m$，$\left|BC\right|=60m$，$\angle APB=60^\circ$．能否在足球场上画一条“等距离”线，在“等距离”线的两侧的区域应该选择怎样的线路？说明理由．



解题剖析：设M为“等距离”线上任意一点，则$\left|PA\right|+\left|AM\right|=\left|PB\right|+\left|BM\right|$，即

$\left|BM\right|-\left|AM\right|=\left|AP\right|-\left|BP\right|=50$（定值），∴“等距离”线是以$A$、$B$为焦点的双曲线的左支上的一部分，容易“等距离”线方程为$\frac{x^2}{625}-\frac{y^2}{3750}=1\left(-35\le x\le -25,0\le y\le 60\right)$. 理由略.

例 5 如图，设$M\left(x,y\right)$与定点$F\left(5,0\right)$的距离和它到直线l：$x=\frac{16}{5}$的距离的比是常数$\frac{5}{4}$，求点M的轨迹方程.



分析：若设点$M\left(x,y\right)$，则$\left|MF\right|=\sqrt{(x-5)^2+y^2}$，到直线$l$：$x=\frac{16}{5}$的距离$d=\left|x-\frac{16}{5}\right|$，则容易得点$M$的轨迹方程.

引申：用《几何画板》探究点的轨迹：双曲线

若点$M\left(x,y\right)$与定点$F\left(c,0\right)$的距离和它到定直线l：$x=\frac{a^2}{c}$的距离比是常数$e=\frac{c}{a}\left(c>a>0\right)$，则点$M$的轨迹方程是双曲线.其中定点$F\left(c,0\right)$是焦点，定直线$l$：$x=\frac{a^2}{c}$相应于$F$的准线；另一焦点$F'\left(-c,0\right)$，相应于$F'$的准线$l'$：$x=-\frac{a^2}{c}$.

曲线与方程

教学目标

1．了解曲线方程的概念；

2．根据曲线方程的概念解决一些简单问题.

教学重点，难点

教学重点：曲线方程的概念

教学难点：曲线方程概念的理解.

教学过程

一．问题情境

1．情境： 在学习圆的方程时，有这样的叙述：“以$C(a,b)$为圆心，r为半径的圆的方程是$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$”.

2．问题： 怎样理解这个表述？

二．学生活动

在学习圆的方程时，有这样的叙述：“以 $C(a,b)$ 为圆心，r 为半径的圆的方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$”．这句话的含义是，圆 C 上的点的坐标 (x,y) 都是方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的解，且以方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的解为坐标的点都在圆 C 上．

三．建构数学

一般地，如果曲线 C 上点的坐标 (x,y) 都是方程 $f(x,y)=0$ 的解且以方程 $f(x,y)=0$ 的解 (x,y) 为坐标的点都在曲线 C 上，那么方程 $f(x,y)=0$ 叫做曲线 C 的方程，曲线 C 叫做**方程 $f(x,y)=0$ 的曲线**．

四．数学运用

1．例题：

例 1．判断点 $(2,2\sqrt{3})$，$(3,1)$ 是否是圆 $x^2+y^2=16$ 上．

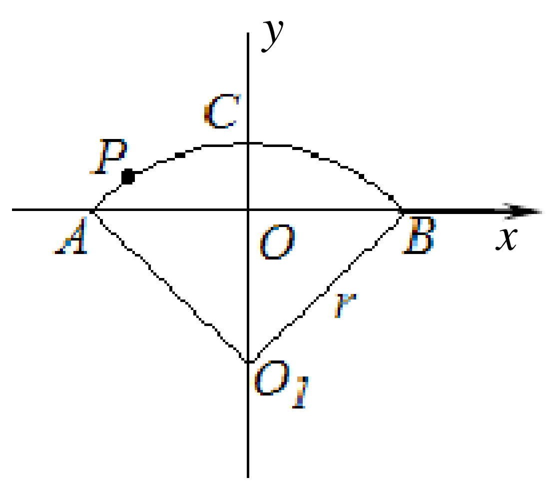
分析：判断点是否在曲线上，就看该点的坐标是否是这个曲线方程的解，即点坐标是否满足曲线方程．

解：$\because 2^2+(2\sqrt{3})^2=4+12=16$，即点 $(2,2\sqrt{3})$ 的坐标是方程 $x^2+y^2=16$ 的解，所以该点在圆上．

$\because 3^2+1^2=10\neq 16$，即点 $(3,1)$ 的坐标不是圆方程 $x^2+y^2=16$ 的解，所以该点不在这个圆上．

例 2．已知一座圆拱桥的跨度是 $36m$，圆拱高为 $6m$，以圆拱所对的弦 AB 所在的直线为 x 轴，AB 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系 xOy（如图所示），求圆拱的方程．

解：依据题意，圆拱桥所在圆的圆心在 y 轴上，可设为 $O_1(0,b)$，设圆拱所在圆的半径为 r，那么圆上任意一点 $P(x,y)$ 应满足 $O_1P=r$，即



$\sqrt{(x-0)^2+(y-b)^2}=r$ 即 $(x-0)^2+(y-b)^2=r^2$

$\because$ 点 $B(18,0),C(0,6)$ 的圆上，

$\therefore \begin{cases}(18-0)^2+(0-b)^2=r^2\\(0-0)^2+(6-b)^2=r^2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-24\\r=30\end{cases}$

由于圆拱只是它所在的圆位于 x 轴上方的一部分（包括 x 轴上的点），所以，圆拱的方程是 $x^2+(y+24)^2=30^2(0\le y\le 6)$

例 3．画出方程的曲线：$\log_x y-\log_y x=0$．

解：由 $\log_x y - \log_y x = 0$，得：$\begin{cases} \lg y = \pm \lg x \\ x \neq 1 \\ y \neq 1 \end{cases}$，

即原方程的曲线等价于 $y = \dfrac{1}{x}(x > 0, x \neq 1)$ 或 $y = x(x > 0, x \neq 1)$，（图略）.

说明：（1）围绕曲线的方程和方程的曲线说明；

（2）方程的变形要做到同解变形。

五．回顾小结：

1．掌握曲线的方程与方程的曲线的概念；

2．会作曲线的图象。

圆锥曲线

教学目标

（1）通过用平面截圆锥面,经历从具体情境中抽象出椭圆、抛物线模型的过程，掌握它们的定义；

（2）通过用平面截圆锥面,感受、了解双曲线的定义；

（3）能用数学符号或自然语言描述双曲线的定义.

教学重点，难点

（1）椭圆、抛物线、双曲线的定义；

（2）用数学符号或自然语言描述三种曲线的定义.

教学过程

一．问题情境

1．情境：

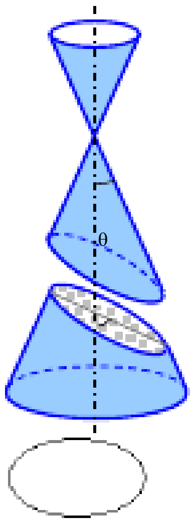
我们知道，用一个平面截一个圆锥面，当平面经过圆锥面的顶点时，可得到两条相交直线，当平面与圆锥面的轴垂直时，截得的图形是一个圆，试改变平面的位置，观察截得的图形的变化情况。提出问题：

2．问题：

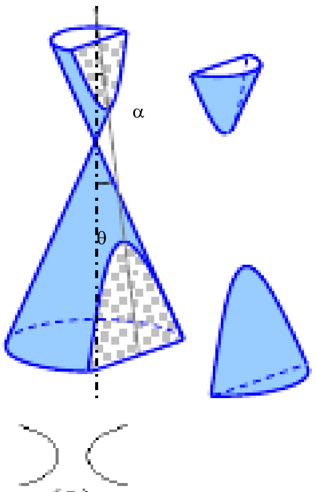
用平面去截圆锥面能得到哪些曲线？这些曲线具有哪些几何特征？

二．学生活动

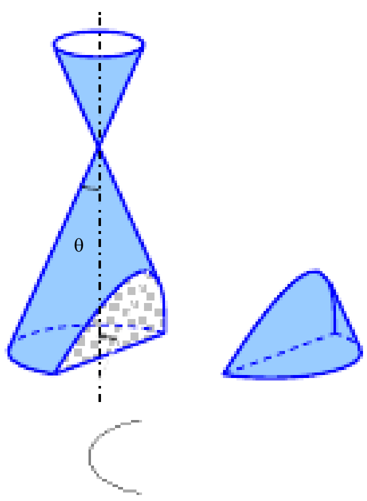
学生讨论上述问题，通过观察,可以得到以下三种不同的曲线：



(1)



(2)



(3)

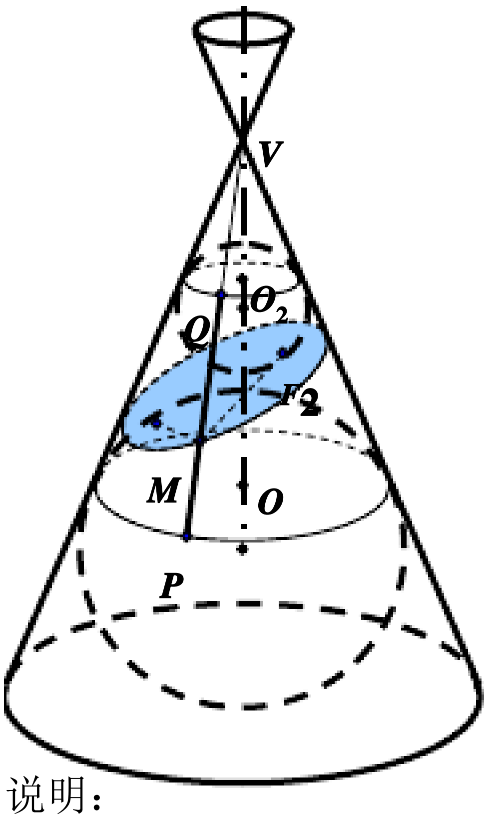


图2−1−2

对于第一种情况，可在圆锥截面的两侧分别放置一球，使它们都与截面相切（切点分别为F_1，F_2），且与圆锥面的侧面相切，两球与圆锥面的侧面的公共点分别构成圆O_1和圆O_2．（图$2-1-2$）

设点M是平面与圆锥面的截线上任意一点，过M点作圆锥面的一条母线，分别交圆O_1，圆O_2与P，Q两点，则MP和MF_1，MQ和MF_2分别是上下两球的切线．因为过球外一点作球的切线长相等，所以$MF_1=MP$，$MF_2=MQ$，

所以$MF_1+MF_2=MP+MQ=PQ$．

因为$PQ=VP-VQ$，而VP，VQ是常数，所以PQ是一个常数．即截线上任意一点到两个定点F_1，F_2的距离的和等于常数．

说明：

对用Dandelin双球理论发现椭圆的特性，可直接给出放进双球后的图形，再由学生发现＂到两点距离之和为定值＂的特征，可以直接演示说明，不必花费过多时间和精力，只要让学生感知、认同即可．

三．建构数学

1．椭圆的定义：

平面内到两定点F_1，F_2的距离和等于常数（大于F_1F_2）的点的轨迹叫做椭圆，两个定点F_1，F_2叫做椭圆的焦点，两焦点间的距离叫做椭圆的焦距．

说明：

（1）定义中的定值要大于F_1F_2，否则不是椭圆．若定值等于F_1F_2，则点的轨迹是线段F_1F_2；若定值小于F_1F_2，则点的轨迹不存在．

（2）建议对与Dandelin双球理论可作简单介绍，主要利用把细绳两个端点分别固定在F_1，F_2点，用笔尖把绳子拉紧，使笔尖在图板上移动，画出椭圆，来帮助学生理解椭圆的定义．

2．双曲线的定义：(类比椭圆的定义)

平面内到两定点F_1，F_2的距离的差的绝对值等于常数（大于0，小于F_1F_2）的点的轨迹叫做双曲线，两个定点F_1，F_2叫做双曲线的焦点，两焦点间的距离叫做双曲线的焦距．

说明：定义中的定值要小于F_1F_2，否则不是双曲线．若定值等于0，则点的轨迹为线段F_1F_2的中垂线；若定值等于F_1F_2，则点的轨迹是两条射线；若定值大于F_1F_2，则点的轨迹不存在．

3．抛物线的定义：

平面内到一个定点F和一条定直线l（F不在l上）的距离相等的点轨迹叫做抛物线，定点叫做抛物线的焦点，定直线l叫做抛物线的准线．

说明：（1）F不在l上，若F在l上，则点的轨迹为过F与l垂直的直线．

（2）我们常利用下面的三条关系式来判断动点M的轨迹是什么：

椭圆：动点M满足的式子：$MF_1+MF_2=2a$（$2a>F_1F_2$的常数)；

双曲线：动点M满足的式子：$\left|MF_1-MF_2\right|=2a$（$0<2a<F_1F_2$的常数)；

抛物线：动点M满足的式子：$MF=d$（d为动点M到直线L的距离）.

四．数学运用

1．例题：

例 1．试用适当的方法作出以两个定点F_1，F_2为焦点的一个椭圆.

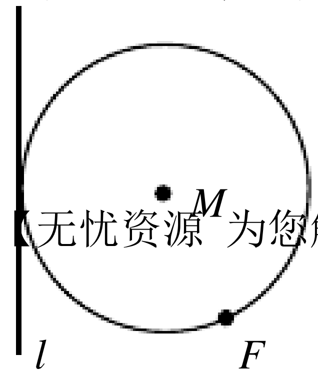
解：细绳两个端点分别固定在F_1，F_2点，用笔尖把绳子拉紧，使笔尖在图板上移动，画出椭圆.

思考：在椭圆的定义中，如果这个常数小于或等于F_1F_2，动点的轨迹又如何呢？

例 2．已知B，C是两个定点，$BC=4$, 且ΔABC的周长等于10，求证：定点A在一个椭圆上.

证明：由题意可知：$AB+AC=6>BC$，所以定点A在一个椭圆上.

例 3．已知定点F和定直线l，F不在直线l上，动圆M过F且与直线l相切，求证：圆心M的轨迹是一条抛物线.



证明：由题意可知：因为动圆M过F且与直线l相切，所以圆心M到点F的距离等于圆心M到直线l的距离，所以圆心M的轨迹是一条抛物线.

五．回顾小结：

1．椭圆、抛物线、双曲线的定义；

2．用数学符号或自然语言描述三种曲线的定义.