摘 要

在生态学的研究中，考察生物种群数量的发展已经成为一个重要的课题．而在种群发展的系统中时滞的影响是常常存在的．一般而言，含有时滞的模型有两类，一类是含有离散时滞的 Logistic 模型；另一类是含有无穷时滞的 Volterra 模型．我们在本文中所要考察的正是这两类模型．而和以前的研究者不同之处是我们更多关注了系统的渐近周期性，即当方程的系数发生周期性变化时，其相应初－边值问题的解从渐近形态上看是否收敛到某一个周期函数？

我们采用的是单调性方法，而最关键的是论证边值问题的周期解的存在唯一性．对于任意给定的时滞，以前的研究者们只得到周期拟解，却得不到周期解．我们由拟解出发，应用做差、积分、放缩估计的方法得到了关于周期解存在唯一的一些充分条件．当然在处理过程中依照边界条件的不同而有所不同．

而我们的研究又是基于 Hess. P 于 [39] 中给出的结果．我们所提的条件也是基于对 $-\triangle$ 的第一特征值与系数 $a(t,x)$ 进行比较得来的．相应的对于 Neumann 边界条件，其条件的提出更直观一些，也就是说边值问题的周期解存在唯一的条件只和方程的系数有关．从而只要方程的系数满足一定关系就可以保证系统的解产生有规律的周期性振荡。但是对于 Dirichlet 和 Robin 边界条件，处理起来就不那么容易了．经过深入的探讨，我们发现把事先得到的上、下周期函数和系数一同进行考察问题就解决了．虽然条件的提出不够直观，但是从理论上已经得到了完善．不仅如此，我们给出的数值模拟结果也很好的说明了这一点．另外一个方面，对于 Logistic 模型来说，时滞对系统到底会产生什么样的影响呢？时滞的大小对于系统的振荡性影响会有什么不同呢？我们就这些问题也做出了相应的探讨．

本文安排如下：第一章是序论部分．介绍问题的生物学背景；概述 Logistic 模型和 Volterra 模型的研究历程并提出我们的新研究课题；另外还给出了研究所需的基础理论。第二章是关于 Logistic 模型的渐近周期性问题．主要是论述相应边值问题周期解的存在唯一性以及时滞的影响估计．另外还给出了某些数值结果．第三章是关于 Volterra 模型的渐近周期性问题．先讨论边值问题周期拟解的存在性再考察周期解的存在性，另外还给出其相应渐近性的数值模拟结果．第四章给出了总结和思考，提出了一些可以进一步研究的新问题．

关键词： Logistic ,Volterra 周期性 渐近性 时滞 存在性 唯一性

模型 生态学模型

Abstract

In the study of ecology, to consider the population development of species is a very important subject. And in these systems there always exists the affection of time–delay. In common, the models with time–delay are of two types. One is the Logistic model with discrete delay, and another is the Volterra model with infinite delay. In this paper our main aim is to study these two models. What differ from that of the researchers in the past is the consideration of the asymptotic periodicity of the systems. That is, in the case that the coefficients of the equation vary periodically, if the solution of the initial–boundary value problem can close to a periodic function in the long run?

We adopt the monotone method in this paper, and the key step is to argue the existence and uniqueness of the periodic solutions of the boundary value problem. For every given time–delay, the researchers in the past can only obtain the periodic quasi-solutions, but they can't obtain the real periodic solutions. We start from dealing with the quasi-solutions, and get some sufficient conditions for the existence and uniqueness of the periodic solution by a suitable method—to subtract, to integrate, to zoom out and zoom in for estimation. Certainly, the detail methods will be different for the various boundary conditions.

Our basic ideas come from the results given by *Hess.P* in [39]. The conditions we get are based on the comparing of $a(t,x)$ and the first eigenvalue of $-\triangle$. Accordingly, the conditions for the Neumann boundary can be easily checked, this is, the conditions for the existence and uniqueness of periodic solutions in the boundary value problem is only related to the coefficients in the system. So if the coefficients satisfy some kind of conditions, the system may surge periodically. But for the Dirichlet and Robin boundary conditions, the problems are not easy to deal with. Fortunately, we can consider these problems by putting the upper and lower periodic functions into consideration.

Though the conditions can not be checked easily, it is sufficient in the theory. At the same time, our numerical simulations can also show the truth. Moreover, for the Logistic model, what effects do the time-delay put on the system? What effects do the size of time-delay put on the vibration of the system? In this paper, we also make our effort to solve them.

We arrange this paper as follows:

In Chapter 1, we introduce the biology background, talk about the history of the study in Logistic and Volterra models and give out the new subjects for further study. Moreover, we also line out the useful fundamental theorems.

In Chapter 2, we will study the asymptotic periodicity of the Logistic model. And the main aim is to reveal the existence and uniqueness of the periodic solutions to boundary value problem. Moreover, the affection of time-delay is also studied. In the end, we give some numerical results as application.

In Chapter 3, we will study the asymptotic periodicity of the Volterra model. And the main aim is to reveal the existence and uniqueness of quasi-solutions, furthermore, to reveal the existence and uniqueness of the periodic solutions to the boundary value problems. Moreover, we also give some numerical results for the simulation of asymptotic periodicity.

In Chapter 4, we give the summary and the thought, also set out some new problems for further study.

Key words: Logistic Volterra Periodicity Asymptotic
Time delay Existence Uniqueness

1 绪论

1.1 生物学背景

在生物科学的研究中生态学是一个重要的分支，它主要研究生物种群、群落和生物圈以及生物体的生存与环境的关系．而这种在一定环境下的生态系统往往可以通过一个数学的模型来描述．从实践中得出一个比较准确的数学模型，并能通过数学的计算和理论分析，我们就可以更好的了解生态系统并能达到人类对某些生态系统进行控制的目的．

鉴于生态系统的复杂性，首先产生的是单种群模型（参考 [1-5] ）．当然纯粹的单一种群是没有的，某一个种群在自然界中都属于某一个层次，常常存在着它的高一层次的捕食者，同一层次的竞争者和低一层次的食物供应者．但是我们可以把其它层次种群的存在和自然环境因素都归结于模型的参数，概括为其“内禀增长率”、“容纳量”等，这样使得问题简化，可以便于对基本原理的研究．特别地对于寿命比较长、世代重叠的种群，而且当其数量很大时，其数量随时间的变化常常可以近似地看成一个连续过程，从而可以引入微分方程模型来研究．对于这种连续时间的模型我们常常不是研究种群总数量的变化规律，而是研究其密度的变化规律．而这又分为两种情况：

（1） 如果所研究的种群在空间中的密度分布大致均匀，这时的数学模型将是一个常微分方程．

（2） 如果所研究的种群在空间中的密度分布是不均匀，而且种群可以由高密度向低密度流动，这时的数学模型将是一个偏微分方程．

1.2 研究状况

最早是英国科学家马尔萨斯（ Malthus 1766-1834 ）提出的人口发展模型：

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t) \tag{1.1}$$

$$p(t_0) = p_0, \tag{1.2}$$

其中常数 a 代表人口的净增长率，$p(t)$ 代表 t 时刻的人口密度. 相应得此常微分方程的解为 $p(t)=p_0e^{a(t-t_0)}$，它与 1700–1961 年的人口数目拟和的较好. 但此模型有明显的不足，即当 $t\to\infty$ 时，$p(t)\to+\infty$.

1837 年荷兰生物学家 Verhulst 指出 Malthus 模型的不足在于只考虑到繁衍增长而未看到种内竞争，他考虑到了单种群成员间的冲突乃至残害现象，并提出了单种群的 Logistic 模型：

$$\frac{dp(t)}{dt}=p(t)(a-bp(t)) \tag{1.3}$$

$$p(t_0)=p_0. \tag{1.4}$$

相应的此微分方程的解为

$$p(t)=\frac{ap_0e^{a(t-t_0)}}{a-bp_0+bp_0e^{a(t-t_0)}},$$

且有 $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\frac{a}{b}$. 据文献记载，美国、法国等都曾用此公式预报过人口，其结果比较符合实际. 此模型又可以写成如下形式：

$$\frac{du(t)}{dt}=au(t)(1-\frac{u(t)}{K}) \tag{1.5}$$

$$u(t_0)=u_0, \tag{1.6}$$

其中 a 为内在增长率，$u(t)(1-\frac{u(t)}{K})$ 称为有效增长率. 此方程有一个平衡点 $u(t)=K$，此即为因环境资源的有限性及相应种内的斗争而限制了种群数量的发展，此平衡点即为可容纳的最大种群密度.

Cushing.J.M 及 Kakutani.S & Markus.L 等人（参考 [6][7] ），研究了如下的时滞 Logistic 方程：

$$\frac{du(t)}{dt}=au(t)(1-\frac{u(t-\tau)}{K})\quad t\in(0,\infty) \tag{1.7}$$

$$u(t)=u_0,\quad t\in[-\tau,0], \tag{1.8}$$

其中时滞 τ 为某正常数，此模型考虑到了时间滞后性的因素. 而引起时滞的因素有很多，例如：鸟类的孵化周期、哺育动物的妊娠期以及食物供给的迟缓补充等.

以上都是常微分方程模型，但是在实际的生态环境中物种在空间上的密度分布往往不均衡. 在生物的动态行为中就空间上来说，一个物种（例如某种动物），当种群密度大的地方食物缺乏时，自然会有一些个体向种群密度小的地方迁移，而这种迁移也影响着本物种的种群数量发展，这便导致了偏微分方程模型. 假定一个物种在某个有界区域 Ω 上生存，则区域边界 $\partial\Omega$ 上的种群分布情况也影响着该物种种群密度的发展. 当此区域足够大以至于个体的迁移不会跑出该区域时，这便产生了 Neumann 边界条件： $\frac{\partial u}{\partial n}=0$, 其中 n 代表外法线方向；当在边界上没有个体存在时，便产生了 Dirichlet 边界条件： $u=0$; 或者能够确定出在边界上迁入和迁出个体的某种数量关系时，便产生了所谓的 Robin 边界条件： $\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma(x)u=h(t,x)$, 其中 γ 和 h 都是确定的函数.

基于以上考虑，在 Logistic 模型 (1.3)(1.4) 的基础上， Verhulst–Fisher 提出了如下的反应扩散模型：

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-D\Delta u(t,x)=u(t,x)[a-bu(t,x)],\ \ (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega, \tag{1.9}$$

$$B[u](t,x)=0, \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\partial\Omega, \tag{1.10}$$

$$u(0,x)=u_0(x), \qquad x\in\overline{\Omega}, \tag{1.11}$$

其中 D 为扩散系数， Δ 代表 Laplace 算子，边界条件 $B[u]$ 为以上提到的三类中的某一类.

后来的研究者们以 Logistic 模型为基础，遵循 Verhulst–Fisher 模型的研究方法，产生了众多的新模型，而这一些都统称为 Logistic 模型. 我们所关注的是既有扩散又有时滞影响的一类. 为便于研究取扩散系数为 1, 模型如下：

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}-\Delta u(t,x)=u(t,x)[a-bu(t,x)-cu(t-\tau,x)],\ \ (t,x)\in R^+\times\Omega, \tag{1.12}$$

$$B[u](t,x)=0, \qquad (t,x)\in R^+\times\partial\Omega, \tag{1.13}$$

$$u(t,x)=\phi(t,x), \qquad (t,x)\in[-\tau,0]\times\overline{\Omega}, \tag{1.14}$$

其中的系数 a, b, c 为常数. 对于这类模型近来的研究者们 [8][9]，考察了变系数情况下的解的渐近形态. 在 1996 年文 [8] 的作者考虑到了物种的出生率、死亡率、扩散率、相互

作用率以及环境的容受量等都可能随季节发生周期性的变化，从而可假设系数 a, b, c 为以 T 为周期的函数并以此考察了当时滞 τ 是 T 的整数倍时问题 (1.12)–(1.14) 的渐近周期性. 鉴于文 [8] 证明中的不足（实际上得不到渐近周期解）, 1999 年文 [9] 的作者考察了系数只随空间的变化而变化的情形，并得出了定态解的渐近稳定性的结果. 对于周期系数的时滞 Logistic 模型 (1.12)–(1.14) 来说，对于任意给定的时滞 τ, 是否存在唯一的渐近周期解？另外时滞对该系统会产生什么样的影响？这正是我们在后文中要阐述的问题.

我们的研究也得益于时滞扩散方程组的出现. 在方程组研究中用到的一些方法也为我们解决这类问题提供了不少帮助. 例如文献 [10–21] 等.

另外一类单种群数量发展模型便是著名的 Volterra 模型，最初是由 Volterra 在 1931 年于 [22] 中提出的. 模型如下：

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t)[\ a - bx(t) - \int_0^\infty K(\tau)x(t-\tau)d\tau\ ], \qquad t \in R^+, \tag{1.15}$$

$$x(t) = \phi(t) \geq 0, \qquad t \in R_0^-, \tag{1.16}$$

这儿 a, b 为正数， $R^+ = (0,\infty)$, $R_0^- = (-\infty, 0]$, 连续函数 K 为积分核. 其中积分项表示遗传等因素对物种的增长率的影响. Miller 于 1966 年在 [23] 中对该问题进行了研究并给出了如下结果：

定理 A 设 $K \in C(R^+) \cap L^1(R^+)$, 且 $b > \int_0^\infty |K(\tau)|d\tau$, 那么对 R_0^- 上的任意正的连续有界函数 ϕ, 柯西问题 (1.15)(1.16) 对 $t \in R^+$ 存在唯一的正解 $x(t)$, 而且此解满足：

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b + \int_0^\infty |K(\tau)|d\tau}. \tag{1.17}$$

后来大量的研究者发展了这一模型. 受扩散模型的影响， Redlinger 在 1985 年于 [24] 中研究了如下模型：

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) = u(t,x)[\ a - bu(t,x) - \int_0^\infty K(\tau)u(t-\tau,x)d\tau\ ],$$
$$(t,x) \in R^+ \times \Omega, \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}=0,\qquad (t,x)\in R^{+}\times\partial\Omega, \tag{1.19}$$

$$u(t,x)=\phi(t,x),\qquad (t,x)\in R_0^{-}\times\overline{\Omega}. \tag{1.20}$$

此处 ϕ 为一有界非负连续函数. Redlinger 经过研究给出了如下结果:

定理 B 对于每一个初值函数 ϕ, 初 - 边值问题 (1.18)-(1.20) 都有一个有界、非负正则解 $u(t,x)$. 另外, 如果 $\phi(0,\cdot)$ 不恒为零, 那么对 $(t,x)\in(0,\infty)\times\Omega$, 都有 $u(t,x)>0$, 并且

$$\lim_{t\to\infty}u(t,x)=\frac{a}{b+\int_0^\infty|K(\tau)|d\tau},\qquad x\in\overline{\Omega}. \tag{1.21}$$

另一方面, 考虑到增长率受物种本身进化的影响, 系数也会随时间发生变化, Gopalsamy 和 He 在 1995 年于 [25] 中对如下形式的 Volterra 方程做出了研究.

$$\frac{d}{dt}x(t)=x(t)[\,a(t)-b(t)\int_0^\infty K(\tau)x(t-\tau)d\tau\,],\qquad t\in R^{+}, \tag{1.22}$$

$$x(t)=\phi(t)\geq 0,\qquad t\in R_0^{-}, \tag{1.23}$$

其中 a, b 为定义在 R^+ 上的有界连续函数满足: $0<a_1\leq a(t)\leq a_2$, $0<b_1\leq b(t)\leq b_2$, $K:R^+\longrightarrow R^+$ 是连续函数满足 $\int_0^\infty K(\tau)d\tau=1$, 而且 $\sigma=\int_0^\infty \tau K(\tau)d\tau<\infty$, ϕ 是 R_0^- 上的连续非负有界函数. 对问题 (1.22)(1.23) 他们得到了如下的结论.

定理 C 设 $x(t)$ 是问题 (1.22)(1.23) 的解, 那么 $x(t)>0$. 此外 $\limsup_{t\to\infty}x(t)\leq M$. 若还成立: 对于任意 $\varepsilon_0>0$, 都有

$$\int_0^\infty K(\tau)e^{-(a_1-b_2M-\varepsilon_0)\tau}d\tau<\infty,$$

则 $\liminf_{t\to\infty}x(t)\geq m$.

定理 D 假设 $\int_0^\infty \tau^2K(\tau)d\tau<\infty$ 且 $b_2^2\sigma M<b_1$, 则问题 (1.22)(1.23) 的任意两个解都满足:

$$\lim_{t\to\infty}(x_1(t)-x_2(t))=0.$$

联合以上的研究结果，不难想到更为广泛的变系数的 Volterra 反应扩散模型：

$$Lu(t,x) = u(t,x)[\,a(t,x) - b(t,x)u(t,x) - c(t,x)\int_0^\infty u(t-\tau,x)d\mu(\tau)\,],$$
$$(t,x) \in R^+ \times \Omega, \quad (1.24)$$

$$B[u](t,x) = 0, \qquad (t,x) \in R^+ \times \partial\Omega, \tag{1.25}$$

$$u(t,x) = \phi(t,x), \qquad (t,x) \in R_0^- \times \overline{\Omega}. \tag{1.26}$$

其中算子 $L = \partial/\partial t - \Delta$, 系数 a, b, c 都是非负有界函数. 而 $\mu(\cdot)$ 是有界变差函数满足 $\mu(0) = 0$, $\phi \in C(R^- \times \overline{\Omega})$ 有界非负且不恒为零，另外有 $\phi(0,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega})$. 设 $M(t)$ 是 $\mu(\cdot)$ 在 $[0,t]$ 上的有界变差，令 $M^\pm(t) = (M(t) \pm \mu(t))/2$ $(\forall t \in R^+)$, 并记: $M_0^\pm = \lim\limits_{t\to\infty} M^\pm(t) < \infty$.

Shi Bao 与 Y. Chen 在 2001 年于 [26] 中研究了问题 (1.24)-(1.26) . 他们利用与常微分方程相比较的方法对其解给出了如下先验估计结果.

定理 E 若 $b_1 > c_1 M_0^-$, $a_1 - a_2 c_2 M_0^+/(b_1 - c_1 M_0^-) > 0$, 则

$$\alpha \le \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\overline{\Omega}} u(t,x) \le \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\overline{\Omega}} u(t,x) \le \beta,$$

其中正常数 α, β 满足下列方程组:

$$b_2\alpha = a_1 - c_2 M_0^+ \beta + c_1 M_0^- \alpha, \tag{1.27}$$

$$b_1\beta = a_2 + c_1 M_0^- \beta - c_2 M_0^+ \alpha. \tag{1.28}$$

尽管对问题 (1.24)-(1.26) 的解有了一个先验的界，但是就其解的渐近形态来说我们并不清楚. 考虑到与 Logistic 模型 (1.12)-(1.14) 同样的情况，此问题中的系数也可能发生周期性的变化. 所以探讨这种含有无穷时滞的 Volterra 方程的渐近周期性是完全有必要的. 对此我们将在后文中展开论述.

1.3 基本原理

1.3.1 基本约定与函数空间

(参考 [27][28] ）令

$$L_0u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (x \in \Omega), \tag{1.29}$$

$$B_0u = a\frac{\partial u}{\partial n} + b(x)u \quad (x \in \partial\Omega). \tag{1.30}$$

这里 $\Omega \subset R^n$ 是有界光滑的开区域（例如边界 $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$), $a_{ij}, b_i \in C(\overline{\Omega})$, $-L$ 是 Ω 上的一致椭圆算子. a, b 是

（ 1 ） $a = 0, b = 1$; 或（ 2 ） $a = 1, b(x) \geq 0$. $b(x) \in C(\partial\Omega)$. n 是 $\partial\Omega$ 的外法向.

记

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{1.31}$$

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + Au, \tag{1.32}$$

$$Q_T = (0,T] \times \Omega, \quad S_T = (0,T] \times \partial\Omega,$$

$$Q_\infty = (0,+\infty) \times \Omega, \quad S_\infty = (0,+\infty) \times \partial\Omega.$$

其中 $a_{ij}(t,x), b_i(t,x) \in C(\overline{Q}_T)$, $-L$ 是 Q_T 上的抛物算子.

$$Bu = a\frac{\partial u}{\partial n} + b(t,x)u \quad (t,x) \in S_T. \tag{1.33}$$

其中 a ， b ： （ 1 ） $a=0$ ， $b=1$ ； 或（ 2 ） $a=1$ ， $b(t,x) \geq 0$.

以下引入几个 Banach 空间（参考 [29-33]). 记 $l = (l_1, \cdots, l_n)$, $|l| = \sum_{i=1}^{n} l_i$, 其中 l_i 为非负整数. 广义导数

$$D_x^l u = \frac{\partial^{|l|} u}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}.$$

（ 1 ） **Hölder 空间**

设 $0 < \alpha < 1$. 指数为 α 的 Hölder 系数

$$H_\alpha(u) = \sup_{x,\, y\in\Omega, x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \qquad C^\alpha(\overline{\Omega}) = \{u(x) | H_\alpha(u) < \infty\}, \tag{1.34}$$

$C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ 中的范数为:

$$|u|_{\alpha} = H_{\alpha}(u) + \max_{\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

设 k 为正整数,

$$C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u(x)|u \in C^{k}(\overline{\Omega}), H_{\alpha}(D^{l}u) < +\infty, |l| = k\}, \tag{1.35}$$

其相应的范数为:

$$|u|_{k+\alpha} = \sum_{|l|\le k} \max_{\overline{\Omega}} |D^{l}u(x)| + \sum_{|l|=k} H_{\alpha}(D^{l}u).$$

$$C^{k,\,2k}(\overline{Q}_T) = \{u(t,x)|D_t^r D_x^s u \in C(\overline{Q}_T),\ 2r + |s| \le 2k\}, \tag{1.36}$$

其相应的范数为:

$$|u|^{(2k)}_{\overline{Q}_T} = \sum_{0\le 2r+|s|\le 2k} \max_{\overline{Q}_T} |D_t^r D_x^s u|.$$

$$C^{k+\alpha/2,\,2k+\alpha}(\overline{Q}_T) = \{u(t,x)|u \in C^{k,2k}(\overline{Q}_T),\ H_{\alpha/2,\alpha}(D_t^r D_x^s u) < \infty, 2r + |s| = 2k\},$$

其相应的范数为:

$$|u|^{(2k+\alpha)}_{\overline{Q}_T} = \sum_{0\le 2r+|s|\le 2k} \max_{\overline{Q}_T} |D_t^r D_x^s u| + \sum_{2r+|s|=2k} H_{\alpha/2,\alpha}(D_t^r D_x^s u), \tag{1.37}$$

其中

$$H_{\alpha/2,\alpha}(u) = \sup\{\frac{|u(t,x) - u(s,y)|}{|t-s|^{\alpha/2} + |x-y|^{\alpha}}\ |t,s \in (0,T),\ x,y \in \Omega,\ (t,x) \ne (s,y)\}.$$

（2）可积空间

设 $u(x)$ 为可测函数且 $p \ge 1$，则 p 次可积空间为:

$$L^{p}(\Omega) = \{u(x)\ |\ \int_{\Omega} |u(x)|^{p} dx < \infty\}, \tag{1.38}$$

其上的范数为:

$$\|u\|_{p} = (\int_{\Omega} |u(x)|^{p} dx)^{\frac{1}{p}}.$$

$$W^{k,p}(\Omega)=\{u(x)\,|u\in L^p(\Omega),D^lu\in L^p(\Omega),|l|\le k\},\tag{1.39}$$

其上的范数为：

$$\|u\|_{k,p}=\sum_{|l|\le k}(\int_\Omega|D^lu|^pdx)^{\frac{1}{p}}.$$

1.3.2 线性抛物方程的正则性

对于下列线性抛物方程的初边值问题：

$$\begin{aligned}&Lu+c(t,x)u=f(t,x),\quad ((t,x)\in Q_T),\\&Bu=g(t,x),\quad (t,x)\in S_T,\\&u(0,x)=\varphi(x),\quad x\in\Omega.\end{aligned}\tag{1.40}$$

正则性定理(参考 [32–34])：设 $a_{ij},b_i,c\in C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q}_T)$, $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$. 对于 Robin 边界条件还要求 $b(t,x)|_{S_T}\ge 0$, $b(t,x)$ 可延拓为 $C^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_T)$ 中的函数．若对任意 $f\in C^{\alpha/2,\alpha}(\overline{Q}_T)$, $\varphi\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, g 可以延拓为 $C^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_T)$ 中的函数 g_0, 且满足相应的相容性条件，则问题 (1.40) 存在唯一解 $u(t,x)\in C^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_T)$.

1.3.3 上、下解方法 — 初边值问题解的存在唯一性

比较引理 (参考 [32–35])：设 $h(t,x)$ 在 Q_T 上有界．$u(t,x)$ 满足：

$$Lu+h(t,x)u\ge 0,\quad (t,x)\in Q_T,\tag{1.41}$$

$$Bu\ge 0,\quad (t,x)\in S_T,\tag{1.42}$$

$$u(0,x)\ge 0,\quad x\in\Omega.\tag{1.43}$$

$u(t,x)$ 与相应的抛物方程的初边值问题的古典解有相同的光滑性，当 Bu 中 $a=1$ 时又设 $\partial\Omega$ 有内切球性质．则 $u(t,x)\ge 0$ $((t,x)\in Q_T)$. 又若 $u(0,x)\not\equiv 0$ $(x\in\Omega)$, 则 $u(t,x)>0$ $((t,x)\in Q_T)$.

对于下列初边值问题:

$$
\begin{aligned}
&Lu = f(t,x,u), \quad ((t,x) \in Q_T), \\
&Bu = g(t,x), \quad (t,x) \in S_T, \\
&u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}.
\end{aligned} \tag{1.44}
$$

我们总假定上述“正则性定理”的条件满足. 另外对某常数 $M > m$, 当 $(t,x),(s,y) \in \overline{Q}_T$, $u \in [m, M]$ 时, 要求 $f(t,x,u)$ 对 u 的偏导数满足 $f_u \in C(\overline{Q}_T \times [m, M])$, 而且存在正常数 K 使得:

$$
|f(t,x,u) - f(s,y,u)| \le K[\,|t-s|^{\frac{\alpha}{2}} + |x-y|^{\alpha}\,]. \tag{1.45}
$$

定义 (上下解): $\overline{u}(t,x), \underline{u}(t,x) \in C^{1,2}(\overline{Q}_T)$ 分别叫做问题 (1.44) 的上、下解若

$$
\begin{aligned}
&L\overline{u} \ge f(t,x,\overline{u}), \quad (t,x) \in Q_T, \\
&L\underline{u} \le f(t,x,\underline{u}), \quad (t,x) \in Q_T, \\
&B\overline{u} \ge g(t,x) \ge B\underline{u}, \quad (t,x) \in S_T, \\
&\overline{u}(0,x) \ge \varphi(x) \ge \underline{u}(0,x), \quad x \in \Omega.
\end{aligned} \tag{1.46}
$$

解的存在唯一性定理 (参考 [32][35—37]): 设 $\overline{u}(t,x), \underline{u}(t,x)$ 分别是问题 (1.44) 的上、下解, $\underline{u}(t,x) \le \overline{u}(t,x)$, $m = \min_{\overline{Q}_T} \underline{u} < M = \max_{\overline{Q}_T} \overline{u}$, f 在 $\overline{Q}_T \times [m, M]$ 上满足前述条件, 则问题 (1.44) 在 $\overline{Q}_T$ 上存在唯一解 $u(t,x)$, 并且满足 $\underline{u}(t,x) \le u(t,x) \le \overline{u}(t,x)$.

2 时滞 Logistic 模型的渐近周期性

2.1 问题概述

在这一章中我们主要研究如下的关于单种群数量发展的 Logistic 模型:

$$Lu(t,x)=u(t,x)[a(t,x)-b(t,x)u(t,x)-c(t,x)u(t-\tau,x)],\ \ (t,x)\in R^+\times\Omega \tag{2.1}$$

$$B[u](t,x)=0, \qquad (t,x)\in R^+\times\partial\Omega, \tag{2.2}$$

$$u(t,x)=\phi(t,x), \qquad (t,x)\in[-\tau,0]\times\overline{\Omega}, \tag{2.3}$$

我们给出如下的基本假设:

(H_1) Ω 是 R^n 中的有界区域, 并带有光滑边界 $\partial\Omega$, 算子 L 定义为: $L=\partial/\partial t-\triangle$, 这儿 $\triangle$ 表示 Laplace 算子. 边界条件由下式给出:

$$B[u]=u \qquad \text{或} \qquad B[u]=\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma(x)u.$$

$\gamma(x)\in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ 而且在 $\partial\Omega$ 上 $\gamma(x)\geq 0$, $\partial/\partial n$ 表示 $\partial\Omega$ 上的外法向导数, $R^+=(0,\infty)$.

(H_2) 系数 $a(t,x)$, $b(t,x)$,$c(t,x)$ 关于 t 都是以 T 为周期的而且在 $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上是 Hölder 连续的。此外还要求 $a(t,x)>0$; $b(t,x)>0$; $c(t,x)\geq 0$. 分别记 a_1,b_1,c_1 以及 a_2,b_2,c_2 为 a, b, c 在 $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上的最小值和最大值, 并要求 $c_2>0$.

(H_3) 时滞 τ 是正常数. $\phi\in C([-\tau,0]\times\overline{\Omega})$ 是有界非负函数并满足相容性条件: $B[\phi(0,x)]=0$.

引理 2.1.1 若存在一对光滑函数 $\overline{u}$, $\underline{u}$ $\in C^{1,2}(R^+\times\Omega)\bigcap C([-\tau,\ \infty)\times\overline{\Omega})$ (称为问题 (2.1)-(2.3) 的上、下解) 在 $[-\tau,\infty)\times\overline{\Omega}$ 上满足 $\overline{u}\geq\underline{u}$ 并且下列的不等式成立

$$\begin{aligned}L\overline{u}(t,x)&\geq\overline{u}(t,x)[a(t,x)-b(t,x)\overline{u}(t,x)-c(t,x)\underline{u}(t-\tau,x)],\\ L\underline{u}(t,x)&\leq\underline{u}(t,x)[a(t,x)-b(t,x)\underline{u}(t,x)-c(t,x)\overline{u}(t-\tau,x)],\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$(t,x) \in R^+ \times \Omega,$$

$$B[\overline{u}](t,x) \geq 0 \geq B[\underline{u}](t,x), \qquad (t,x) \in R^+ \times \partial\Omega, \tag{2.5}$$

$$\overline{u}(t,x) \geq \phi(t,x) \geq \underline{u}(t,x), \qquad (t,x) \in [-\tau, 0] \times \overline{\Omega}, \tag{2.6}$$

那么初边值问题 (2.1)-(2.3) 存在唯一解 $u \in C^{1,2}(R^+ \times \Omega) \bigcap C([-\tau, \infty) \times \overline{\Omega})$ 并且在 $[-\tau, \infty) \times \overline{\Omega}$ 上 $\overline{u} \geq u \geq \underline{u}$.

当 $\overline{u}$, $\underline{u}$ 在 $R^+ \times \overline{\Omega}$ 满足 (2.4)(2.5) 以及序关系 $\overline{u} \geq \underline{u}$ 我们也称 $\overline{u}$, $\underline{u}$ 为问题 (2.1)(2.2) 的一对上下解. 引理 *2.1.1* 可以由前面的 "解的存在唯一性定理" 来保证 (也可以参考 [37][38]) . 易见 a_2/b_1 和 0 是 (2.1)-(2.3) 的一对上下解, 那么由 引理 *2.1.1* 知问题 (2.1)-(2.3) 当 $\phi \geq 0$ 时存在唯一解 $u \in C^{1,2}(R^+ \times \Omega) \bigcap C([-\tau, \infty) \times \overline{\Omega})$.

为了研究问题 (2.1)-(2.3) 的渐近周期性我们引入 Hess [39] 关于下述问题的一个结果.

$$Lu(t,x) = u(t,x)[e(t,x) - b(t,x)u(t,x)], \qquad (t,x) \in R^+ \times \Omega,$$

$$B[u] = 0, \qquad (t,x) \in R^+ \times \partial\Omega, \tag{2.7}$$

其中系数 $e(t,x)$, $b(t,x)$ 关于 t 是 T 周期的, $b(t,x) > 0$, 其它的条件与问题 (2.1)(2.2) 中的相同.

命题 2.1.1(参考 [39] 第 92 页定理 28.1) 对于下面的特征值问题:

$$L\varphi(t,x) - e(t,x)\varphi(t,x) = \sigma\varphi(t,x), \qquad (t,x) \in R^+ \times \Omega,$$

$$B[u] = 0, \qquad (t,x) \in R^+ \times \partial\Omega, \tag{2.8}$$

(其中 φ 关于 t 是 T- 周期的) 存在一个具有正特征向量的主特征值 $\sigma(e)$.

(1) 若 $\sigma(e) \geq 0$, 那么对于每一个非负初值, 问题 (2.7) 的平凡解 0 是全局渐近稳定的.

(2) 若 $\sigma(e) < 0$, 那么对于每一个非负非平凡初值, 问题 (2.7) 在 $\Omega \times R$ 上存在唯一全局渐近稳定的正周期解 $\theta(t,x)$(周期为 T) .

取 $e(t,x)=a(t,x)$ ，若 (2.8) 的主特征值 $\sigma(a)<0$ ，则由 命题 *2.1.1* 知相应问题 (2.7) 便可以取得一个正 T- 周期解 $\theta_0(t,x)$. 设 $\theta^*(t,x)=c(t,x)\theta_0(t-\tau,x)$, 在 (2.7) 中取 $e(t,x)=a(t,x)-\theta^*(t,x)$, 若 $\sigma(a-\theta^*)<0$ ，则问题 (2.7) 又可以取得一个正 T- 周期解 $\Theta(t,x)$. 容易验证 θ_0 是问题 (2.1)(2.2) 的一个 T- 周期上解而 Θ 是一个 T- 周期下解. 所以通过单调迭代方法，并参考 [12][13] 中的结论，我们可以得到下面的结果.

定理 2.1.1 设 $(H_1)-(H_3)$ 成立.

(1) 若 $\sigma(a)\geq 0$, 那么对于每一个非负初始函数 $\phi(t,x)$ ，问题 (2.1)-(2.3) 的平凡解 0 是全局渐近稳定的.

(2) 若 $\sigma(a)<0$ 以及 $\sigma(a-\theta^*)<0$ 成立，那么问题 (2.1)(2.2) 就能取得一对上、下 T- 周期拟解 $\overline{\theta}$, $\underline{\theta}\in C^{1,2}(R^+\times\Omega)$ ，并且它们满足关系 $\Theta\leq\underline{\theta}\leq\overline{\theta}\leq\theta_0$. 另外，对于每一个非负非平凡初始函数 $\phi(t,x)$ ，问题 (2.1)-(2.3) 的解都满足如下关系：

$$\liminf_{t\to\infty}[u(t,x)-\underline{\theta}(t,x)]\geq 0\geq\limsup_{t\to\infty}[u(t,x)-\overline{\theta}(t,x)],\quad\forall\, x\in\overline{\Omega}. \tag{2.9}$$

注： (1) 若 $\overline{\theta}\equiv\underline{\theta}$, 那么 T- 周期拟解 $\overline{\theta}$ (或 $\underline{\theta}$) 就是问题 (2.1)(2.2) 的周期解。

(2) 如果将算子 $L=\partial/\partial t-\triangle$ 中的 Laplace 算子 $\triangle$ 换成一致强椭圆算子，则 定理 *2.1.1* 仍然成立.

2.2 关于边值问题周期解的存在唯一性

要揭示问题 (2.1)(2.2) 周期解的存在性，只要说明 $\overline{\theta}\equiv\underline{\theta}$ 就可以了. 在后文中我们总假设条件 $\sigma(a)<0$ 及 $\sigma(a-\theta^*)<0$ 成立. 从 定理 *2.1.1* 得知， $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 这一对上、下周期拟解满足下面的关系：

$$\begin{aligned}
&\overline{\theta}_t-\triangle\overline{\theta}=\overline{\theta}(a-b\overline{\theta}-c\underline{\theta}_\tau), && (t,x)\in R^+\times\Omega,\\
&\underline{\theta}_t-\triangle\underline{\theta}=\underline{\theta}(a-b\underline{\theta}-c\overline{\theta}_\tau), && (t,x)\in R^+\times\Omega,\\
&B[\overline{\theta}]=B[\underline{\theta}]=0, && (t,x)\in R^+\times\partial\Omega,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中 $\overline{\theta}_t\equiv\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t}$ ， $\underline{\theta}_t\equiv\frac{\partial\underline{\theta}}{\partial t}$ ， $\overline{\theta}_\tau\equiv\overline{\theta}(t-\tau,x)$ ， $\underline{\theta}_\tau\equiv\underline{\theta}(t-\tau,x)$.

在 (2.10) 中把前两个方程作差后可以得到下面的关系式:

$$(\overline{\theta}_t-\underline{\theta}_t)-\Delta(\overline{\theta}-\underline{\theta})=a(\overline{\theta}-\underline{\theta})-b(\overline{\theta}^2-\underline{\theta}^2)-c(\overline{\theta}\underline{\theta}_\tau-\underline{\theta}\overline{\theta}_\tau) \tag{2.11}$$

下面我们针对不同的边界条件寻求使得 $\overline{\theta}\equiv\underline{\theta}$ 的成立的条件.

Part A　Dirichlet 边界条件

对于 Dirichlet 边界条件 $\overline{\theta}=\underline{\theta}=0$ (在 $\partial\Omega$ 上), 考虑到 $\overline{\theta}-\underline{\theta}\geq 0$, 对方程式 (2.11) 两边同乘以 $(\overline{\theta}-\underline{\theta})$, 并关于 x 在 Ω 上积分, 则方程式的左边 I 和右边 II 可以写成如下的形式:

$$\begin{aligned}
I &= \int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})(\overline{\theta}_t-\underline{\theta}_t)dx-\int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})\Delta(\overline{\theta}-\underline{\theta})dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})^2dx+\int_\Omega|\nabla(\overline{\theta}-\underline{\theta})|^2dx, \qquad (2.12)\\
II &= \int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})[a\,(\overline{\theta}-\underline{\theta})-b\,(\overline{\theta}+\underline{\theta})(\overline{\theta}-\underline{\theta})-c\,(\overline{\theta}\underline{\theta}_\tau-\underline{\theta}\,\underline{\theta}_\tau+\underline{\theta}\,\underline{\theta}_\tau-\underline{\theta}\overline{\theta}_\tau)]dx \\
&= \int_\Omega[a-b\,(\overline{\theta}+\underline{\theta})-c\,\underline{\theta}_\tau](\overline{\theta}-\underline{\theta})^2dx+\int_\Omega c\,\underline{\theta}(\overline{\theta}-\underline{\theta})(\overline{\theta}_\tau-\underline{\theta}_\tau)dx. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

由 Poincaré 不等式 (参考 [35]),

$$\int_\Omega|\nabla(\overline{\theta}-\underline{\theta})|^2dx\geq\lambda_1\int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})^2dx,$$

其中 λ_1 是 Ω 上相应于零 Dirichlet 边界条件的 $-\Delta$ 的主特征值. 记 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ (简记 $\|\cdot\|$) 为 Ω 上的 L^2 范数, 那么

$$I\geq\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+\lambda_1\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2. \tag{2.14}$$

如果设

$$M=\sup_{x\in\Omega,\,0\leq t\leq T}(a-2b\,\Theta-c\,\Theta_\tau),\qquad N=\sup_{x\in\Omega,\,0\leq t\leq T}(c\,\theta_0), \tag{2.15}$$

那么由 (2.13) 式及 Hölder 不等式, 并且考虑到 $\Theta\leq\underline{\theta}\leq\overline{\theta}\leq\theta_0$, 我们得到:

$$\begin{aligned}
II &\leq \int_\Omega[a-2b\,\Theta-c\,\Theta_\tau](\overline{\theta}-\underline{\theta})^2dx+\int_\Omega c\,\theta_0(\overline{\theta}-\underline{\theta})(\overline{\theta}_\tau-\underline{\theta}_\tau)dx \\
&\leq M\int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})^2dx+N\int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})(\overline{\theta}_\tau-\underline{\theta}_\tau)dx \\
&\leq M\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+N\|\overline{\theta}_\tau-\underline{\theta}_\tau\|\cdot\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

由 (2.14) 式和 (2.16) 式有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 &\leq (M-\lambda_1)\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+N\|\overline{\theta}_\tau-\underline{\theta}_\tau\|\cdot\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\| \\ &\leq (M+\frac{N}{2}-\lambda_1)\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+\frac{N}{2}\|\overline{\theta}_\tau-\underline{\theta}_\tau\|^2. \qquad (2.17)\end{aligned}$$

对 (2.17) 式关于 t 在 $[0,T]$ 上积分，并考虑到 $\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2$ 是关于 t 是 T- 周期的，

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^T[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2]dt \\ &\leq (M+\frac{N}{2}-\lambda_1)\int_0^T\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2dt+\frac{N}{2}\int_0^T\|\overline{\theta}_\tau-\underline{\theta}_\tau\|^2dt \\ &= (M+N-\lambda_1)\int_0^T\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2dt. \qquad (2.18)\end{aligned}$$

如果不等式 $M+N-\lambda_1<0$ 满足，那么由 (2.18) 式可以得到

$$\int_0^T\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2dt\equiv 0,$$

从而在 $R^+\times\overline{\Omega}$ 上 $\overline{\theta}\equiv\underline{\theta}$.

现在说明解的唯一性. 若 θ^1 是满足 $\Theta\leq\theta^1\leq\theta_0$ 的另外的一个解，那么 θ^1 和 $\underline{\theta}$ 也是问题 (2.1)(2.2) 的一对上、下解，并且满足 (2.10) 中的关系式. 同前面关于 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 的推导过程一样，我们可以得到 $\theta^1\equiv\underline{\theta}$. 从而问题 (2.1)(2.2) 的周期解也是唯一的.

为了保证 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 的存在性,还需要满足条件 $\sigma(a-\theta^*)<0$,而这只要 $a-\theta^*>\lambda_1$ ，即 $a-c\,\theta_{0\,\tau}>\lambda_1$ 满足.

从而由以上论述，我们可以得到问题 (2.1)(2.2) 周期解存在唯一的充分条件如下：

$$\begin{aligned}&\text{(i)}\quad a-c\,\theta_{0\,\tau}>\lambda_1,\\ &\text{(ii)}\quad \sup_{x\in\Omega,\,0\leq t\leq T}(a-2b\,\Theta-c\,\Theta_\tau)+\sup_{x\in\Omega,\,0\leq t\leq T}(c\,\theta_0)<\lambda_1. \qquad (2.19)\end{aligned}$$

定理 2.2.1 在假设 $(H_1)-(H_3)$ 成立的前提下，对于 Dirichlet 边界条件，若 (2.19) 中的条件满足，那么问题 (2.1)(2.2) 在 $\overline{\Omega}$ 上存在唯一的 T- 周期光滑解 θ . 另外，对于满

足 $\Theta \le \phi \le \theta_0$ 的任意初始函数 $\phi(t,x)$，问题 (2.1)-(2.3) 的解 $u(t,x)$ 满足如下的渐近性：

$$\lim_{t\to\infty}[u(t,x)-\theta(t,x)]=0 \qquad \forall\, x\in\overline{\Omega}.$$

Part B　Neumann 边界条件

当 $\gamma(x)\equiv 0$（在 $\partial\Omega$ 上）时，就是所谓的 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial n}=\frac{\partial\underline{\theta}}{\partial n}=0.$$

在这种情况下我们寻求只与系数有关的条件使得问题 (2.1)(2.2) 存在唯一的解. 在 [40] 中我们给出了关于解的存在唯一的一种充分条件，在这里我们寻求另一种充分条件. 对照 (2.4) 式和 (2.5) 式，我们可以由下面的方程组得到问题 (2.1)(2.2) 的一对上下解 k_2 和 k_1：

$$\begin{aligned} &k_2(a_2-b_1k_2-c_1k_1)=0,\\ &k_1(a_1-b_2k_1-c_2k_2)=0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

若 $b_1b_2>c_1c_2$ 且 $a_1b_1>a_2c_2$，则可以由 (2.20) 解得：

$$k_2=\frac{a_2b_2-a_1c_1}{b_1b_2-c_1c_2},\qquad k_1=\frac{a_1b_1-a_2c_2}{b_1b_2-c_1c_2}, \tag{2.21}$$

而且易验 $0<k_1\le\Theta\le\underline{\theta}\le\overline{\theta}\le\theta_0\le k_2\le a_2/b_1$.

由 (2.15) 可得

$$\begin{aligned} M&=\sup_{x\in\Omega,0\le t\le T}(a-2b\,\Theta-c\,\Theta_\tau)\le[a_2-(2b_1+c_1)k_1],\\ N&=\sup_{x\in\Omega,0\le t\le T}(c\,\theta_0)\le c_2k_2, \end{aligned} \tag{2.22}$$

其中 Θ 和 θ_0 是相应于 Neumann 边界条件的上下周期解. 由 *Part A* 中的方法我们可以得到如下关系式：

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+\|\nabla(\overline{\theta}-\underline{\theta})\|^2\le(M+\frac{N}{2})\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+\frac{N}{2}\|\overline{\theta}_\tau-\underline{\theta}_\tau\|^2. \tag{2.23}$$

对 (2.23) 式关于 t 在 $[0,T]$ 积分，并考虑到 $\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2$ 关于 t 是 $T-$ 周期的，

$$\begin{aligned} 0+\int_0^T \|\nabla(\overline{\theta}-\underline{\theta})\|^2 dt &\le (M+\frac{N}{2})\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt+\frac{N}{2}\int_0^T \|\overline{\theta}_\tau-\underline{\theta}_\tau\|^2 dt \\ &= (M+N)\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt \\ &\le [a_2-(2b_1+c_1)k_1+c_2k_2]\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt. \end{aligned} \tag{2.24}$$

从而如果 $a_2-(2b_1+c_1)k_1+c_2k_2<0$，由关系式 (2.24) 易得

$$\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt \equiv 0,$$

而这蕴含着 $\overline{\theta}\equiv\underline{\theta}$．同时易知这时问题 (2.1)(2.2) 的 $T-$ 周期解也是唯一的．

因为带有 0-Neumann 边界条件的 $-\triangle$ 算子在 Ω 上的主特征值是 $\lambda_1=0$，为了保证 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 的存在性这需要 $\sigma(a-\theta^*)<0$，只要 $a(t,x)-c(t,x)\ \theta_0(t-\tau,x)>\lambda_1=0$．因为 $a(t,x)-c(t,x)\ \theta_0(t-\tau,x)\ge a_1-c_2k_2$，从而只需要 $a_1-c_2k_2>0$．容易验证 $a_1b_1>a_2c_2$ 蕴含着 $b_1b_2>c_1c_2$ 及 $a_1-c_2k_2>0$．

从而由以上的论述得知，问题 (2.1)(2.2) 存在唯一周期解的充分条件是：

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\quad a_1b_1>a_2c_2, \\ &\text{(ii)}\quad a_2-(2b_1+c_1)k_1+c_2k_2<0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

其中 k_2 和 k_1 由 (2.21) 式给出．

定理 2.2.2 在假设 $(H_1)-(H_3)$ 成立的前提下，对于 Neumann 边界条件，若 (2.25) 中的条件满足，那么问题 (2.1)(2.2) 在 $\overline{\Omega}$ 上存在唯一的 $T-$ 周期光滑解 θ．另外，对于在 $[k_1,k_2]$ 中取值的任意初始函数 $\phi(t,x)$，问题 (2.1)-(2.3) 的解 $u(t,x)$ 满足如下的渐近性：

$$\lim_{t\to\infty}[u(t,x)-\theta(t,x)]=0 \qquad \forall\, x\in\overline{\Omega}.$$

Part C Robin 边界条件

对于如下的 Robin 边界条件

$$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial n} + \gamma\,\overline{\theta} = 0, \qquad \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial n} + \gamma\,\underline{\theta} = 0 \ \text{ on } R^+ \times \partial\Omega,$$

用 *Part A* 中的方法，并考虑到在 $\partial\Omega$ 上 $\gamma(x) \geq 0$ ，我们可以得到：

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega (\overline{\theta} - \underline{\theta})(\overline{\theta}_t - \underline{\theta}_t)dx - \int_\Omega (\overline{\theta} - \underline{\theta})\Delta(\overline{\theta} - \underline{\theta})dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (\overline{\theta} - \underline{\theta})^2 dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(s)(\overline{\theta} - \underline{\theta})^2 ds + \int_\Omega |\nabla(\overline{\theta} - \underline{\theta})|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{\theta} - \underline{\theta}\|^2 + \|\nabla(\overline{\theta} - \underline{\theta})\|^2. \end{aligned} \tag{2.26}$$

如 *Part B* 中一样的计算可以知道 (2.23) 对于 Robin 边界条件同样成立. 从而保证问题 (2.1)(2.2) 存在唯一解的条件是 $M + N < 0$ ，即

$$\sup_{x\in\Omega,\, 0\leq t\leq T} (a - 2b\,\Theta - c\,\Theta_\tau) + \sup_{x\in\Omega,\, 0\leq t\leq T} (c\,\theta_0) < 0. \tag{2.27}$$

其中 θ_0 和 Θ 是相应于 Robin 边界条件的上下周期解.

定理 2.2.3 在假设 $(H_1) - (H_3)$ 成立的前提下, 对于 Robin 边界条件, 若 $\sigma(a - \theta^*) < 0$ 以及 (2.27) 中的不等式满足，那么问题 (2.1)(2.2) 在 $\overline{\Omega}$ 上存在唯一的 T- 周期解 θ . 另外，对于在 $[0, a_2/b_1]$ 中取值的任意初始函数 $\phi(t,x)$ ，问题 (2.1)-(2.3) 的解 $u(t,x)$ 满足如下的渐近性：

$$\lim_{t\to\infty}[u(t,x) - \theta(t,x)] = 0 \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

2.3 时滞的影响估计

在这一节中，我们总假设 $\sigma(a) < 0$ ，边界条件也设为 Dirichlet 型. 进而研究时滞对于问题 (2.1)-(2.3) 的解 $u(t,x)$ 的影响. 设函数 $\theta(t,x)$ 为下列非时滞方程的 $T-$ 周期解

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta = \theta\,[a - (b + c)\,\theta], \qquad (t,x) \in R^+ \times \Omega, \tag{2.28}$$

$$\theta = 0, \qquad (t,x) \in R^+ \times \partial\Omega. \tag{2.29}$$

从前面的论述得知 $u(t,x)$ 和 $\theta(t,x)$ 在 $R^+\times\overline{\Omega}$ 上是非负非平凡的. 由 (2.1) 式和 (2.28) 式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(u-\theta)-\Delta(u-\theta)\\
=\ & a(u-\theta)-b(u^2-\theta^2)-c(uu_\tau-\theta^2)\\
=\ & a(u-\theta)-b(u+\theta)(u-\theta)-c[(uu_\tau-\theta u_\tau)+(\theta u_\tau-\theta^2)]\\
=\ & [a-b(u+\theta)-cu_\tau](u-\theta)-c\theta(u_\tau-\theta).
\end{aligned}\tag{2.30}$$

对 (2.30) 式乘以 $(u-\theta)$，并关于 x 在 Ω 上积分，同时应用 Poincaré 不等式，则其左端可以写成:

$$\begin{aligned}
I &= \int_\Omega[\frac{\partial}{\partial t}(u-\theta)-\Delta(u-\theta)](u-\theta)dx\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(u-\theta)^2dx+\int_\Omega|\nabla(u-\theta)|^2dx\\
&\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-\theta\|^2+\lambda_1\|u-\theta\|^2,
\end{aligned}\tag{2.31}$$

其中 λ_1 是 $-\Delta$ 关于 0-Dirichlet 边界条件的主特征值. 为了估计右端我们给出下列记号

$$M=\sup_{x\in\Omega,\ 0\leq t\leq T}(a-b\,\theta),\quad N=\sup_{x\in\Omega,\ 0\leq t\leq T}(c\,\theta),\quad K(\tau)=\sup_{0\leq t\leq T}\|c\theta(\theta_\tau-\theta)\|^2.\tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
II &= \int_\Omega[a-b(u+\theta)-cu_\tau](u-\theta)^2dx-\int_\Omega c\theta(u_\tau-\theta)(u-\theta)dx\\
&\leq \int_\Omega(a-b\theta)(u-\theta)^2dx+\int_\Omega|c\theta(u_\tau-\theta)|\cdot|u-\theta|dx\\
&\leq M\|u-\theta\|^2+\|c\theta(u_\tau-\theta)\|\cdot\|u-\theta\|\\
&\leq M\|u-\theta\|^2+(\|c\theta(u_\tau-\theta_\tau)\|+\|c\theta(\theta_\tau-\theta)\|)\cdot\|u-\theta\|\\
&\leq M\|u-\theta\|^2+N\|u-\theta\|\cdot\|u_\tau-\theta_\tau\|+\|c\theta(\theta_\tau-\theta)\|\cdot\|u-\theta\|\\
&\leq (M+\frac{N}{2}+\frac{1}{2})\|u-\theta\|^2+\frac{N}{2}\|u_\tau-\theta_\tau\|^2+\frac{1}{2}K(\tau).
\end{aligned}\tag{2.33}$$

所以由 (2.31) 式和 (2.33) 式知

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u-\theta\|^2\leq(M+\frac{N}{2}+\frac{1}{2}-\lambda_1)\|u-\theta\|^2+\frac{N}{2}\|u_\tau-\theta_\tau\|^2+\frac{1}{2}K(\tau),\tag{2.34}$$

从而

$$\frac{d}{dt}\|u-\theta\|^2 \le (2M+N+1-2\lambda_1)\|u-\theta\|^2 + N\|u_\tau-\theta_\tau\|^2 + K(\tau). \tag{2.35}$$

若记 $y(t)=\|u(t,\cdot)-\theta(t,\cdot)\|^2$ ，则 (2.35) 式又可以写为:

$$\frac{d}{dt}y(t) \le (2M+N+1-2\lambda_1)y(t) + Ny(t-\tau) + K(\tau). \tag{2.36}$$

若 $2M+2N+1-2\lambda_1 \neq 0$ ，令 $\varepsilon(\tau)=K(\tau)/(2\lambda_1-2M-2N-1)$ ，则 $\xi(t)=y(t)-\varepsilon(\tau)$ 满足

$$\frac{d}{dt}\xi(t) \le (2M+N+1-2\lambda_1)\xi(t) + N\xi(t-\tau). \tag{2.37}$$

其相应的常微分方程为

$$\frac{d}{dt}\xi_1(t) = (2M+N+1-2\lambda_1)\xi_1(t) + N\xi_1(t-\tau). \tag{2.38}$$

而 (2.38) 所对应的特征方程是

$$\mu = (2M+N+1-2\lambda_1) + Ne^{-\tau\mu}. \tag{2.39}$$

由 (2.32) 式知 $N>0$ ，参考 [41] 中的 *Hayes* 定理 及 [42] 中的结论，若 $2M+2N+1-2\lambda_1<0$ ，则特征方程 (2.39) 所有的特征根都具有负实部即 $\mathrm{Re}\mu<0$ ，从而方程 (2.38) 的零解是渐近稳定的，即:

$$\lim_{t\to\infty}\xi_1(t)=0. \tag{2.40}$$

比较 (2.37) 和 (2.38) 可得 $\xi(t)\le\xi_1(t)$ ，并考虑到 $y(t)=\xi(t)+\varepsilon(\tau)$ ，我们可以得到如下的关系:

$$y(t)\le\xi_1(t)+\varepsilon(\tau). \tag{2.41}$$

另外，为了保证问题 (2.28)(2.29) 的周期解 $\theta(t,x)$ 的存在性需满足 $\sigma(a)<0$ ，而这只要 $a(t,x)>\lambda_1$. 从而我们可以得到如下的结论.

定理 2.3.1 在假设 $(H_1)-(H_3)$ 成立的前提下，对于每一个固定的 $\tau>0$ ，若不等式 $a(t,x)>\lambda_1$ 和 $M+N+\frac{1}{2}<\lambda_1$ 都满足，那么时滞问题 (2.1)-(2.3) 的解 $u(t,x)$ 和非时滞问题 (2.28)(2.29) 的 $T-$ 周期解 $\theta(t,x)$ 满足如下的关系：

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t,\cdot)-\theta(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\le\frac{K(\tau)}{2(\lambda_1-M-N)-1},\tag{2.42}$$

其中 M, N, $K(\tau)$ 由 (2.32) 给出.

考虑到

$$\begin{aligned}\varepsilon(\tau) &= \frac{K(\tau)}{2(\lambda_1-M-N)-1}\\ &= \frac{1}{2(\lambda_1-M-N)-1}\sup_{0\le t\le T}\|c\theta(\theta_\tau-\theta)\|^2\\ &\le \frac{1}{2(\lambda_1-M-N)-1}\sup_{0\le t\le T,\,x\in\Omega}(c\theta)^2\cdot\sup_{0\le t\le T}\|\theta_\tau-\theta\|^2\\ &= \frac{N^2}{2(\lambda_1-M-N)-1}\sup_{0\le t\le T}\|\theta_\tau-\theta\|^2\\ &\le \frac{N^2G}{2(\lambda_1-M-N)-1},\quad\forall\,\tau>0,\end{aligned}\tag{2.43}$$

在这里 $G=\|\sup_{0\le t\le T}\theta(t,\cdot)-\inf_{0\le t\le T}\theta(t,\cdot)\|^2$. 因为 $\theta(t,x)$ 在 $[0,T]\times\Omega$ 上是有界光滑函数，那么对于每一个 $\tau>0$ ，都存在 $t_0\in[0,T]$ 使得

$$\sup_{0\le t\le T}\|\theta_\tau-\theta\|^2=\|\theta(t_0-\tau,\cdot)-\theta(t_0,\cdot)\|^2.$$

则由 (2.43) 式可得

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to 0}\varepsilon(\tau) &\le \lim_{\tau\to 0}\frac{N^2}{2(\lambda_1-M-N)-1}\sup_{0\le t\le T}\|\theta_\tau-\theta\|^2\\ &= \frac{N^2}{2(\lambda_1-M-N)-1}\lim_{\tau\to 0}\|\theta(t_0-\tau,\cdot)-\theta(t_0,\cdot)\|^2\\ &= \frac{N^2}{2(\lambda_1-M-N)-1}\|\lim_{\tau\to 0}(\theta_\tau-\theta)\|^2=0.\end{aligned}\tag{2.44}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\|u(t,\cdot)-\theta(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)} &\ge |\Omega|^{-\frac{1}{2}}\cdot\lim_{t\to\infty}\|u(t,\cdot)-\theta(t,\cdot)\|_{L^1(\Omega)}\\ &= |\Omega|^{-\frac{1}{2}}\cdot\int_\Omega\lim_{t\to\infty}|u(t,x)-\theta(t,x)|dx,\end{aligned}\tag{2.45}$$

其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的测度. 联合 (2.42)-(2.45) 并由 定理 *2.3.1* 可得如下的推论.

推论 2.3.1 在假设 $(H_1)-(H_3)$ 成立的前提下，若不等式 $a(t,x)>\lambda_1$ 和 $M+N+\frac{1}{2}<\lambda_1$ 都满足，对于每一个固定的 $\tau>0$，

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t,\cdot)-\theta(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\le\frac{N^2G}{2(\lambda_1-M-N)-1},\tag{2.46}$$

其中 $G=\|\sup_{0\le t\le T}\theta(t,\cdot)-\inf_{0\le t\le T}\theta(t,\cdot)\|^2$，且 M, N 由 (2.32) 给出. 另外,

$$\lim_{t\to\infty}[u(t,x)-\theta(t,x)]=0\quad(\text{当 }\tau\to 0\text{时})\quad\forall\, x\in\overline{\Omega}.\tag{2.47}$$

注: 若把 Dirichlet 边界条件换成 Neumann 或 Robin 边界条件我们可以得到类似的结论.

2.4 应用及数值模拟

在这一节中，我们将给出关于时滞扩散 Logistic 方程 (2.1)-(2.3) 的渐近周期性的一些数值结果。为方便说明我们取一维空间 $\Omega=(0,1)$.

例一：我们考察如下带有 Dirichlet 边界条件的初 - 边值问题

$$\partial u(t,x)/\partial t-\Delta u(t,x)=u(t,x)[a(t,x)-b(t,x)u(t,x)-c(t,x)u(t-\frac{1}{2},x)],$$
$$(t,x)\in(0,+\infty)\times(0,1),\tag{2.48}$$

$$u(t,0)=u(t,1)=0,\qquad t\in[0,+\infty),\tag{2.49}$$

$$u(t,x)=\phi(t,x);\qquad (t,x)\in[-\frac{1}{2},0]\times[0,1].\tag{2.50}$$

因为带有 0-Dirichlet 边界条件的 $-\Delta$ 算子在 $\Omega=(0,1)$ 上的主特征是 $\lambda_1=\pi^2$，并考虑到 $\theta_0\le a_2/b_1$，为使 (2.19) 中的 (i) 满足，只要

$$a-c\,\theta_{0\,\tau}\ge a_1-c_2\times\frac{a_2}{b_1}>\lambda_1=\pi^2$$
$$\text{即:}\quad a_1-\frac{a_2c_2}{b_1}>\pi^2.\tag{2.51}$$

对于 (2.19) 中的条件 (ii)

$$\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(a-2b\,\Theta-c\,\Theta_\tau)+\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(c\,\theta_0)<\pi^2, \tag{2.52}$$

就不那么容易验证了，原因是 θ_0 和 Θ 不能被直接表示出来.

下面我们对此作一些分析. 给定 $a(t,x)>\pi^2$ 和任意 $b(t,x)>0$ ，我们总可以选出适当小的 $c(t,x)$ 使它满足不等式 (2.51) . 由问题 (2.7) 我们知道 θ_0 只由系数 $e(t,x)=a(t,x)$ 和 $b(t,x)$ 来决定. 若 $c^{'}(t,x)\le c(t,x)$ ，则

$$a-c^{'}\,\theta_{0\,\tau}\ge a-c\,\theta_{0\,\tau}, \tag{2.53}$$

$$u[a-c^{'}\,\theta_{0\tau}-bu]\ge u[a-c\,\theta_{0\tau}-bu], \tag{2.54}$$

这说明 $c^{'}(t,x)$ 也满足 (2.51) ，而且还说明 $\Theta^{'}(t,x)\ge\Theta(t,x)$ ，其中 $\Theta^{'}$ 是问题 (2.7) 的相应于 $e(t,x)=a-c^{'}\,\theta_{0\tau}$ 的 T- 周期解. 从而

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(a-2b\,\Theta^{'}-c^{'}\,\Theta_\tau^{'})+\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(c^{'}\,\theta_0)\\ \le\;&\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(a-2b\,\Theta^{'})+\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(c^{'}\,\theta_0)\\ \le\;&\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(a-2b\,\Theta)+\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(c\,\theta_0).\end{aligned} \tag{2.55}$$

在这种意义下，若系数 $c(t,x)$ 取的越小则

$$\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(a-2b\,\Theta)+\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(c\,\theta_0)$$

也会跟着变得越小. 所以选取一个充分小的 $c(t,x)$ 使不等式 (2.52) 满足是完全有可能的. 在此例中我们选取

$$\begin{aligned}&a(t,x)=20+4\sin(2\pi t), &&b(t,x)=10,\\ &c(t,x)=1+\cos(2\pi t), &&\phi(t,x)=\sin(\pi x).\end{aligned} \tag{2.56}$$

对问题 (2.48)-(2.50) 的数值模拟图形 Fig-1 正说明了 定理 *2.2.1* 是正确的，并且其相应的渐近性为:

$$\lim_{t\to\infty}[u(t,x)-\theta(t,x)]=0\qquad\forall\,x\in[0,1]. \tag{2.57}$$

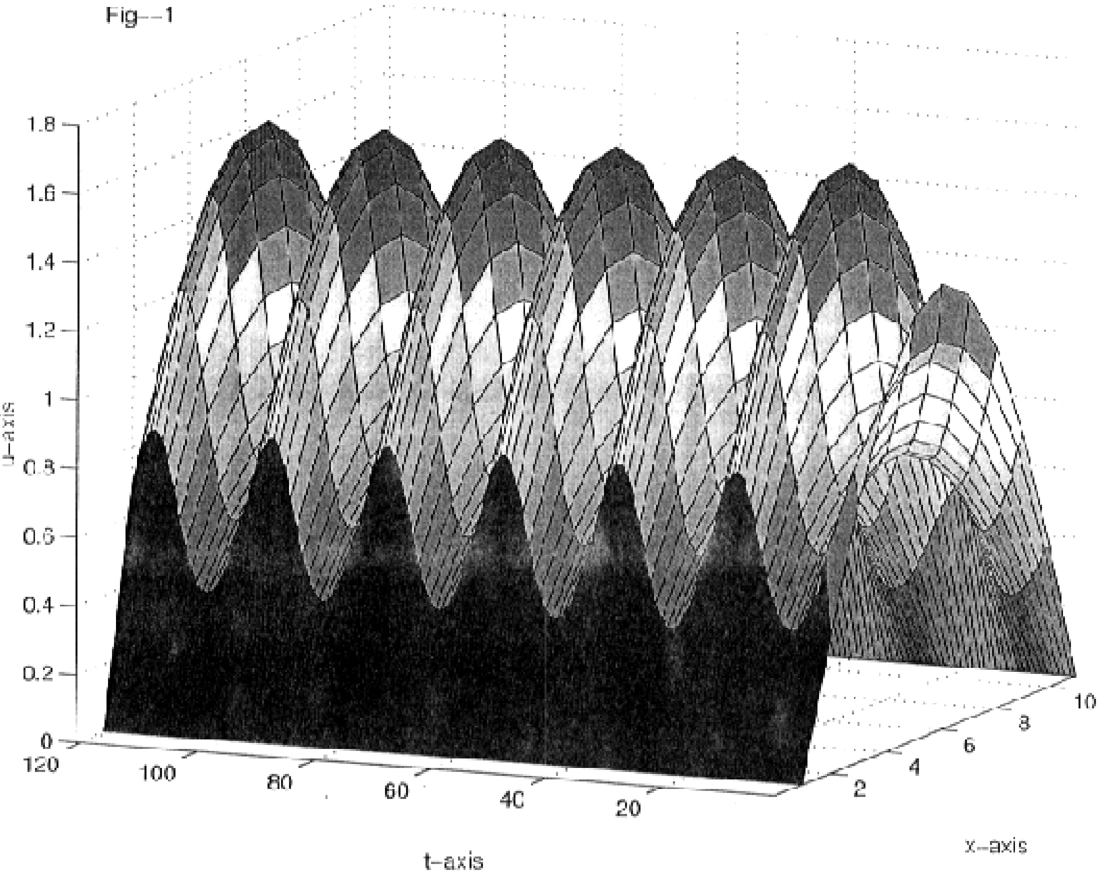


Fig--1
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
u-axis
120
100
80
60
40
20
t-axis
2
4
6
8
10
x-axis

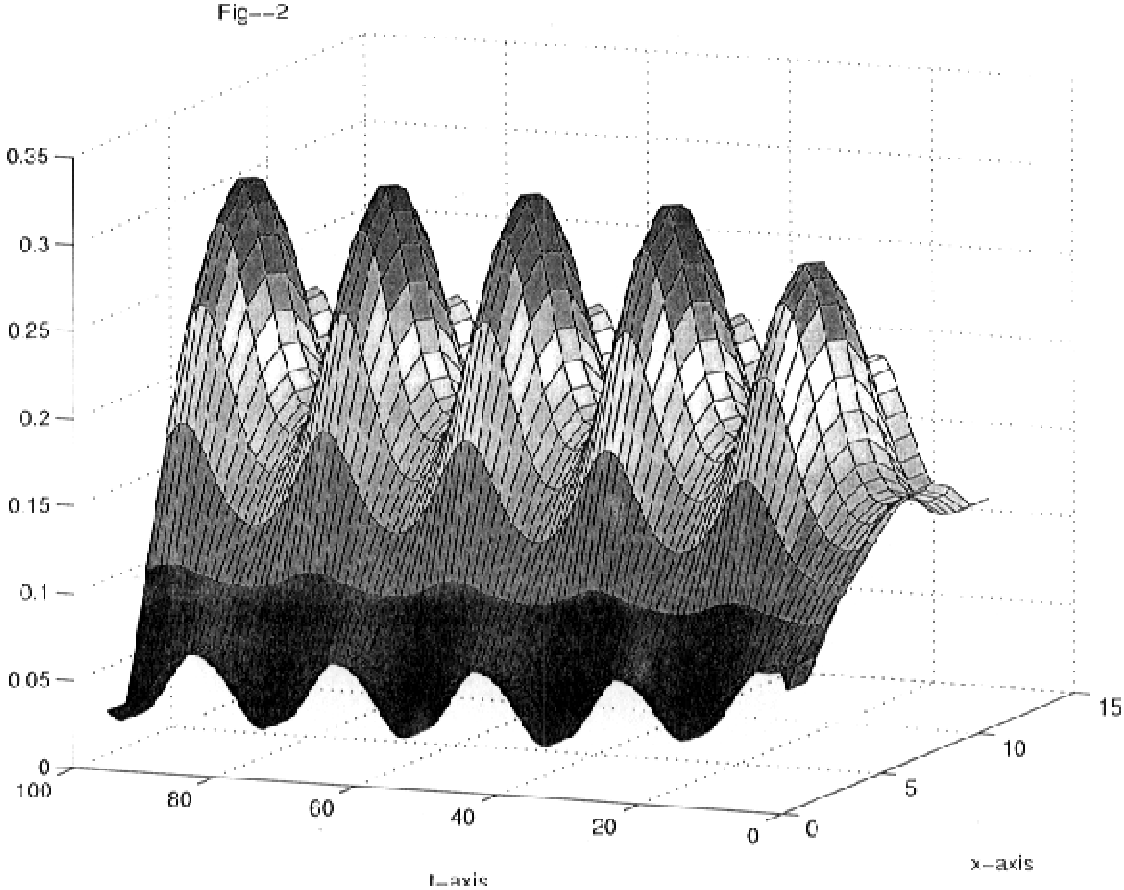


Fig--2
0.35
0.3
0.25
0.2
u-axis
0.15
0.1
0.05
0
100
80
60
40
20
0
t-axis
0
5
10
15
x-axis

例二：我们考察带有 Neumann 边界条件的初 - 边值问题如下：

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)-\Delta u(t,x)=u(t,x)[a(t,x)-b(t,x)u(t,x)-c(t,x)u(t-\frac{1}{2},x)],$$
$$(t,x)\in(0,\infty)\times(0,1), \qquad (2.58)$$
$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=\frac{\partial u(t,1)}{\partial x}=0, \qquad t\in[0,\infty), \qquad (2.59)$$
$$u(t,x)=\phi(t,x), \qquad (t,x)\in[-\frac{1}{2},0]\times[0,1]. \qquad (2.60)$$

如果设

$$a(t,x)=14+2\sin(2\pi t), \quad b(t,x)=30,$$
$$c(t,x)=1+\cos(2\pi t), \quad \phi(t,x)=\frac{1}{3}[\sin(\pi t)+1.2],$$

那么 $a_1=12,\ a_2=16,\ b_1=b_2=30,\ c_1=0,\ c_2=2$ ，并有 $\phi(0,x)=0.4$ 且其满足相容性条件.

下面我们检验 (2.25) 中的条件 (i)(ii) 是满足的. 因为 $a_1b_1=12\times30=360$ ，$a_2c_2=16\times2=32$ ，所以条件 (i) 满足. 由 (2.21) 式知 $k_2=8/15$ ， $k_1=82/225$ ，并且

$$a_2-(2b_1+c_1)k_1+c_2k_2=16-60\times\frac{82}{225}+\frac{16}{15}\approx-4.8<0,$$

所以条件 (ii) 也满足. 依照 定理 *2.2.2* ，问题 (2.58)(2.59) 在 $(0,\infty)\times[0,1]$ 上就能取得一个 1- 周期解 $\theta(t,x)$. 并且初边值问题 (2.58)-(2.60) 的解 $u(t,x)$ 有如下的渐近性

$$\lim_{t\to\infty}[u(t,x)-\theta(t,x)]=0 \qquad \forall\, x\in[0,1].$$

相应地，我们对于问题 (2.58)-(2.60) 的数值模拟结果由图形 Fig-2 给出.

3 时滞 Volterra 模型的渐近周期性

3.1 问题概述

在这一章中我们主要研究在绪论中提到的含有无穷时滞的 Volterra 模型如下：

$$Lu(t,x) = u(t,x)[\, a(t,x) - b(t,x)u(t,x) - c(t,x)\int_0^\infty u(t-\tau,x)d\mu(\tau)\,],$$
$$(t,x) \in R^+ \times \Omega, \quad (3.1)$$

$$B[u](t,x) = 0, \qquad (t,x) \in R^+ \times \partial\Omega, \quad (3.2)$$

$$u(t,x) = \phi(t,x), \qquad (t,x) \in R_0^- \times \overline{\Omega}. \quad (3.3)$$

我们给出比 [26] 中更广泛的假设如下：

(H_1) Ω 为 R^n 中的有界区域，且其边界 $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$ $(0<\alpha<1)$．微分算子 L 定义为 $L = \partial/\partial t + A$，在这里

$$Af(x) = -\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n \beta_j(t,x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_j},$$

其中所有的系数 α_{ij}, β_j 关于 t 和 x 都是 Hölder 连续的，关于 t 是以 T 为周期的(T 是一个正常数)．并且 A 是强一致椭圆型的，即存在常数 $\delta > 0$，使得对于 $(t,x) \in [0,T]\times\Omega$ 及 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in R^n$ 有

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \ge \delta \sum_{j=1}^n \xi_j^2.$$

边界条件由下式给出

$$B[u] = u \qquad 或 \qquad B[u] = \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma(x)u.$$

其中 $\gamma \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$ 且在 $\partial\Omega$ 上 $\gamma(x) \ge 0$， $\partial/\partial n$ 表示 $\partial\Omega$ 上的外法向导数．

(H_2) 系数 $a(t,x), b(t,x), c(t,x)$ 关于 t 是 T- 周期的而且在 $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上是 Hölder 连续的．$b(t,x) > 0$, $c(t,x) \ge 0$．我们还记 a_1, b_1, c_1 和 a_2, b_2, c_2 分别为 $a(t,x), b(t,x)$, $c(t,x)$ 在 $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上的最小值和最大值，并要求 $c_2 > 0$．

(H_3) $\phi \in C(R_0^- \times \overline{\Omega})$ 是非负有界函数. $\mu(\cdot)$ 是有界变差函数, $\mu(0)=0$. 记 $M(t)$ 为 $\mu(\cdot)$ 在 $[0,t]$ 上的全变差. 并假设

$$M_0 = \lim_{t\to\infty} M(t) < \infty, \quad \mu_0 = \lim_{t\to\infty} \mu(t) < \infty.$$

由 (H_3) 可知, 若设 $M^{\pm}(t) = (M(t) \pm \mu(t))/2$ ($t \in R^+$), 则易知 $M(t)$ 和 $M^{\pm}(t)$ 在 R^+ 上是非负非降函数. 记 $M_0^{\pm} = \lim_{t\to\infty} M^{\pm}(t) < \infty$, 则有

$$M_0^+ + M_0^- = M_0, \qquad M_0^+ - M_0^- = \mu_0. \tag{3.4}$$

(H_4) 假设 $a_2 > 0$, $b_1 > c_2 M_0^-$.

在以上的基本假设下我们来研究问题 (3.1)–(3.3) 的渐近周期性.

3.2 关于边值问题周期拟解的存在性

引理 3.2.1 如果存在一对函数 $\overline{u}$ 、 $\underline{u}$ (被称为上、下解) 在 $R\times\overline{\Omega}$ 上满足 $\overline{u} \geq \underline{u}$, 并且它们满足下面的不等式:

$$\begin{aligned}
L\overline{u}(t,x) \geq \overline{u}(t,x)[\, a(t,x) - b(t,x)\overline{u}(t,x) + c(t,x)\int_0^\infty \overline{u}(t-\tau,x)dM^-(\tau) \\
-c(t,x)\int_0^\infty \underline{u}(t-\tau,x)dM^+(\tau)\,], \qquad (t,x)\in R^+\times\Omega, \\
L\underline{u}(t,x) \leq \underline{u}(t,x)[a(t,x) - b(t,x)\underline{u}(t,x) + c(t,x)\int_0^\infty \underline{u}(t-\tau,x)dM^-(\tau) \\
-c(t,x)\int_0^\infty \overline{u}(t-\tau,x)dM^+(\tau)\,], \qquad (t,x)\in R^+\times\Omega, \\
B[\overline{u}](t,x) \geq 0 \geq B[\underline{u}](t,x), \qquad (t,x)\in R^+\times\partial\Omega, \\
\overline{u}(t,x) \geq \phi(t,x) \geq \underline{u}(t,x), \qquad (t,x)\in R_0^-\times\overline{\Omega},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

那么初 – 边值问题 (3.1)–(3.3) 有唯一解 u , 且在 $R\times\overline{\Omega}$ 上 $\overline{u} \geq u \geq \underline{u}$.

因为 $\mu(\tau) = M^+(\tau) - M^-(\tau)$, 所以

$$\int_0^\infty u(t-\tau,x)d\mu(\tau) = \int_0^\infty u(t-\tau,x)dM^+(\tau) - \int_0^\infty u(t-\tau,x)dM^-(\tau).$$

由于 $M^+(\cdot)$ 和 $M^-(\cdot)$ 都是非负非降的，则对于 $0 \le u_1 \le u_2$ 下述不等式成立：

$$0 \le \int_0^\infty u_1(t-\tau,x)dM^+(\tau) \le \int_0^\infty u_2(t-\tau,x)dM^+(\tau),$$
$$0 \le \int_0^\infty u_1(t-\tau,x)dM^-(\tau) \le \int_0^\infty u_2(t-\tau,x)dM^-(\tau). \tag{3.6}$$

所以由单调性方法知 引理 *3.2.1* 是成立的 (参考 [15, 37]).

易于验证 0 是问题 (3.1)-(3.3) 的下解. 相应地我们可以寻求正常数上解如下：

$$P[\, a(t,x) - b(t,x)P + c(t,x)\int_0^\infty PdM^-(\tau) - c(t,x)\int_0^\infty 0dM^+(\tau)\,] \le 0,$$
$$\text{i.e.}\quad a(t,x) - b(t,x)P + c(t,x)M_0^- P \le 0,$$
$$\text{i.e.}\quad P \ge \frac{a(t,x)}{b(t,x) - c(t,x)M_0^-}.$$

由于 $a_1 \le a(t,x) \le a_2$ ， $b_1 \le b(t,x) \le b_2$ ， $c_1 \le c(t,x) \le c_2$ ，并注意到假设 (H_4) ，我们可以选取 $P = a_2/(b_1 - c_2 M_0^-)$.

从而由 引理 *3.2.1* 知, 若初始函数 $\phi(t,x)$ 满足 $0 \le \phi(t,x) \le P$, 则问题 (3.1)-(3.3) 在 $R \times \overline{\Omega}$ 上存在唯一解 $u(t,x)$ ，并且它满足 $0 \le u(t,x) \le P$.

定理 3.2.1 在基本假设 (H_1)-(H_4) 之下，若 $\sigma(a(t,x) + PM_0^- c(t,x)) \ge 0$ ，则对于取值于 $[0,P]$ 的任何非负初始函数 $\phi(t,x)$ ，问题 (3.1)-(3.3) 的平凡解 0 是全局渐近稳定的.

证明：设 $U(t,x)$ 为下列抛物方程的解

$$LU(t,x) = U(t,x)[\, a(t,x) + PM_0^- c(t,x) - b(t,x)U(t,x)\,], \qquad (t,x) \in R^+ \times \Omega,$$
$$B[U](t,x) = 0, \qquad (t,x) \in R^+ \times \partial\Omega,$$
$$U(0,x) = \phi(0,x), \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.7}$$

因为在 $\overline{\Omega}$ 上 $\phi(0,x) \ge 0$ ，所以易知在 $R^+ \times \overline{\Omega}$ 上 $U(t,x) \ge 0$. 定义函数 $\tilde{U}(t,x)$ 使之在 $R_0^- \times \overline{\Omega}$ 上 $\tilde{U}(t,x) = \phi(t,x)$ ；在 $R^+ \times \overline{\Omega}$ 上 $\tilde{U}(t,x) = U(t,x)$. 则 $\tilde{U}$ 和 0 就是问题 (3.1)-(3.3) 的一对上下解. 所以由 引理 *3.2.1* ，问题 (3.1)-(3.3) 在 $R \times \overline{\Omega}$ 上就存在唯一解 u ，且 $0 \le u \le \tilde{U}$.

在 (2.7) 中选取 $e(t,x)=a(t,x)+PM_0^-c(t,x)$ ，则

$$\sigma(e(t,x))=\sigma(a(t,x)+PM_0^-c(t,x))\geq 0,$$

从而由 命题 *2.1.1* 可知

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t,\cdot)\|_{C(\overline{\Omega})}\leq\lim_{t\to\infty}\|\tilde{U}(t,\cdot)\|_{C(\overline{\Omega})}=\lim_{t\to\infty}\|U(t,\cdot)\|_{C(\overline{\Omega})}=0.$$

定理 *3.2.1* 证毕. □

若 $\sigma(a(t,x)+PM_0^-c(t,x))<0$ ，令 $e(t,x)=a(t,x)+PM_0^-c(t,x)$ ，则由 命题 *2.1.1* ，边值问题 (2.7) 可以取得周期解 $\theta_0(t,x)$ ．记

$$\theta^*(t,x)\equiv c(t,x)\int_0^\infty\theta_0(t-\tau,x)dM^+(\tau).$$

我们考察如下的方程组:

$$\begin{aligned}
L\theta_1(t,x) &= \theta_1(t,x)[\,a(t,x)-b(t,x)\theta_1(t,x)+c(t,x)\int_0^\infty\theta_1(t-\tau,x)dM^-(\tau)\\
&\quad -c(t,x)\int_0^\infty\theta_2(t-\tau,x)dM^+(\tau)\,], \qquad (t,x)\in R^+\times\Omega,\\
L\theta_2(t,x) &= \theta_2(t,x)[\,a(t,x)-b(t,x)\theta_2(t,x)+c(t,x)\int_0^\infty\theta_2(t-\tau,x)dM^-(\tau)\\
&\quad -c(t,x)\int_0^\infty\theta_1(t-\tau,x)dM^+(\tau)\,], \qquad (t,x)\in R^+\times\Omega,\\
B[\theta_1](t,x) &= B[\theta_2](t,x)=0, \qquad (t,x)\in R\times\partial\Omega.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

由于在 $R^+\times\Omega$ 上 $\theta_0(t,x)>0$ ， $c(t,x)\geq 0$ ，易知

$$\theta^*(t,x)=c(t,x)\int_0^\infty\theta_0(t-\tau,x)dM^+(\tau)\geq 0.$$

可以验证 $\theta^*(t,x)$ 也是 T- 周期的，事实上，

$$\begin{aligned}
\theta^*(t+T,x) &= c(t+T,x)\int_0^\infty\theta_0(t+T-\tau,x)dM^+(\tau)\\
&= c(t,x)\int_0^\infty\theta_0(t-\tau,x)dM^+(\tau)=\theta^*(t,x).
\end{aligned}$$

从而我们可以设 $\Theta(t,x)$ 即为如下问题的 T- 周期解

$$
\begin{aligned}
&Lv(t,x) = v(t,x)[a(t,x) - \theta^*(t,x) - b(t,x)v(t,x)], \qquad (t,x) \in R^+ \times \Omega,\\
&B[v](t,x) = 0, \qquad (t,x) \in R \times \partial\Omega,\\
&v(t,x) \text{ 关于 } t \text{ 是 } T\text{- 周期的.} \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

对照 (3.5) 式易验 θ_0 和 Θ 是边值问题 (3.1)(3.2) 的一对上、下解. 另外 (θ_0, θ_0) 和 (Θ, Θ) 也可以看成是方程组 (3.8) 的上、下解.

定理 3.2.2 在基本假设 (H_1)-(H_4) 之下, 如果 $\sigma(a(t,x)+PM_0^- c(t,x)) < 0$，$\sigma(a(t,x)-\theta^*(t,x)) < 0$，则问题 (3.1)(3.2) 存在一对 T- 周期的上、下拟解 $\overline{\theta}$, $\underline{\theta}$ 满足方程组 (3.8)，而且在 $R\times\overline{\Omega}$ 上 $\Theta \le \underline{\theta} \le \overline{\theta} \le \theta_0$. 另外, 对于每一个在 $[0,P]$ 中取值的非负非平凡函数初始函数 $\phi(t,x)$，问题 (3.1)-(3.3) 的解 $u(t,x)$ 都满足

$$
\liminf_{t\to\infty}[u(t,x) - \underline{\theta}(t,x)] \ge 0 \ge \limsup_{t\to\infty}[u(t,x) - \overline{\theta}(t,x)] \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{3.10}
$$

证明：对于特征方程 (2.8)，若取 $e(t,x) = a(t,x) + PM_0^- c(t,x)$，而又由于 $\sigma(a(t,x)+PM_0^- c(t,x)) < 0$，且有 $0 \le u \le \tilde{U}$，则由 *命题 2.1.1* 可知对于任意 $x\in\overline{\Omega}$,

$$
\limsup_{t\to\infty}[u(t,x) - \theta_0(t,x)] \le \lim_{t\to\infty}[\tilde{U}(t,x) - \theta_0(t,x)] = \lim_{t\to\infty}[U(t,x) - \theta_0(t,x)] = 0, \tag{3.11}
$$

其中 U 和 $\tilde{U}$ 都是在 *定理 3.2.1* 的证明中提到的函数. 关系式 (3.11) 蕴含着: 对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $t_1 > 0$，当 $t > t_1$ 时,

$$
u(t,x) \le U(t,x) \le \theta_0(t,x) + \varepsilon/(2c_2M_0^+).
$$

而由 $\lim\limits_{t\to\infty} M^+(t) = M_0^+$ 可知对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $t_2 > 0$，当 $t > t_2$ 时,

$$
M_0^+ - M^+(t) \le \varepsilon/(2c_2P).
$$

记 $T_\varepsilon = max\{t_1, t_2\}$，则上述两个不等式对于 $t \ge 2T_\varepsilon$ 是都能满足的. 从而

$$
c(t,x)\int_0^\infty u(t-\tau,x)dM^+(\tau)
$$

$$
\begin{aligned}
&= c(t,x)[\int_0^{T_\varepsilon} u(t-\tau,x)dM^+(\tau) + \int_{T_\varepsilon}^\infty u(t-\tau,x)dM^+(\tau)] \\
&\leq c(t,x)\{\int_0^{T_\varepsilon}[\theta_0(t-\tau,x)+\varepsilon/2c_2M_0^+]dM^+(\tau) + P[M_0^+ - M^+(T_\varepsilon)]\} \\
&\leq c(t,x)\int_0^\infty \theta_0(t-\tau,x)dM^+(\tau) + c(t,x)\cdot\frac{\varepsilon}{2c_2M_0^+}\cdot M_0^+ + c(t,x)P\cdot\frac{\varepsilon}{2c_2P} \\
&\leq \theta^*(t,x)+\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

因此对于 $(t,x)\in(2T_\varepsilon,\infty)\times\Omega$,

$$
\begin{aligned}
&Lu = u[\, a - bu + c\int_0^\infty u(t-\tau,x)dM^-(\tau) - c\int_0^\infty u(t-\tau,x)dM^+(\tau)\,] \\
&\geq u[\, a - bu - c\int_0^\infty u(t-\tau,x)dM^+(\tau)\,] \\
&\geq u[\, a - bu - \varepsilon - \theta^*\,].
\end{aligned}
$$

由比较原则知在 $[2T_\varepsilon,\infty)\times\overline{\Omega}$ 上 $u(t,x)\geq V(t,x)$ ，其中 $V(t,x)$ 是下列初 - 边值问题的解.

$$
\begin{aligned}
&LV(t,x) = V(t,x)[\,(a(t,x)-\varepsilon-\theta^*(t,x)) - b(t,x)V(t,x)\,], \\
&\qquad\qquad (t,x)\in(2T_\varepsilon,\infty)\times\Omega, \\
&B[V](t,x)=0, \qquad (t,x)\in(2T_\varepsilon,\infty)\times\partial\Omega, \\
&V(2T_\varepsilon,x)=u(2T_\varepsilon,x), \qquad x\in\Omega.
\end{aligned}
$$

对照问题 (3.9)，考虑到 ε 的任意性由 命题 *2.1.1* 知

$$
\liminf_{t\to\infty}[u(t,x)-\Theta(t,x)] \geq \lim_{t\to\infty}[V(t,x)-\Theta(t,x)] = 0 \quad \forall\, x\in\overline{\Omega}. \tag{3.13}
$$

设 $\overline{\theta}^{(0)}=\theta_0$ ， $\underline{\theta}^{(0)}=\Theta$ ，那么由 (3.11) 和 (3.13) 得知

$$
\liminf_{t\to\infty}[u(t,x)-\underline{\theta}^{(0)}(t,x)]\geq 0;\quad \limsup_{t\to\infty}[u(t,x)-\overline{\theta}^{(0)}(t,x)]\leq 0 \quad \forall\, x\in\overline{\Omega}. \tag{3.14}
$$

关系式 (3.14) 也蕴含着在 $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上 $\overline{\theta}^{(0)}\geq\underline{\theta}^{(0)}$.

设 $\{\overline{\theta}^{(k)}\}$ 和 $\{\underline{\theta}^{(k)}\}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 是将在后面定义的两个 T- 周期序列. 且定义 $\overline{\theta}_+^{(k)}$, $\underline{\theta}_+^{(k)}$, $\overline{\theta}_-^{(k)}$, $\underline{\theta}_-^{(k)}$, $(k=0,1,2,\cdots)$ 如下:

$$
\overline{\theta}_+^{(k)}(t,x) = c(t,x)\int_0^\infty \overline{\theta}^{(k)}(t-\tau,x)dM^+(\tau);
$$

$$\underline{\theta}_{+}^{(k)}(t,x)=c(t,x)\int_0^{\infty}\underline{\theta}^{(k)}(t-\tau,x)dM^{+}(\tau);$$
$$\overline{\theta}_{-}^{(k)}(t,x)=c(t,x)\int_0^{\infty}\overline{\theta}^{(k)}(t-\tau,x)dM^{-}(\tau);$$
$$\underline{\theta}_{-}^{(k)}(t,x)=c(t,x)\int_0^{\infty}\underline{\theta}^{(k)}(t-\tau,x)dM^{-}(\tau).$$

我们将由下式构造序列:

$$\begin{aligned}
&L\overline{\theta}^{(k)}(t,x)=\overline{\theta}^{(k)}(t,x)[a(t,x)-b(t,x)\overline{\theta}^{(k)}(t,x)+\overline{\theta}_{-}^{(k-1)}(t,x)-\underline{\theta}_{+}^{(k-1)}(t,x)],\\
&\qquad\qquad (t,x)\in R^{+}\times\Omega,\\
&L\underline{\theta}^{(k)}(t,x)=\underline{\theta}^{(k)}(t,x)[a(t,x)-b(t,x)\underline{\theta}^{(k)}(t,x)+\underline{\theta}_{-}^{(k-1)}(t,x)-\overline{\theta}_{+}^{(k-1)}(t,x)],\\
&\qquad\qquad (t,x)\in R^{+}\times\Omega,\\
&B[\overline{\theta}^{(k)}](t,x)=B[\underline{\theta}^{(k)}](t,x)=0,\qquad (t,x)\in R\times\partial\Omega,
\end{aligned}\tag{3.15}$$

其中 $\overline{\theta}^{(k)}$ 和 $\underline{\theta}^{(k)}$ 都是 T- 周期的（ $k=1,2,\cdots$ ）.

引理 3.2.2 由 (3.15) 给出的序列 $\{\overline{\theta}^{(k)}\}$ 和 $\{\underline{\theta}^{(k)}\}$($k=0,1,2,\cdots$) 是恰当定义的，而且它们满足如下的单调性:

$$\theta_0=\overline{\theta}^{(0)}\geq\overline{\theta}^{(k)}\geq\overline{\theta}^{(k+1)}\geq\underline{\theta}^{(k+1)}\geq\underline{\theta}^{(k)}\geq\underline{\theta}^{(0)}=\Theta,\quad (t,x)\in[0,T]\times\overline{\Omega}.\tag{3.16}$$

另外，对于每一个正整数 k ,

$$\liminf_{t\to\infty}[u(t,x)-\underline{\theta}^{(k)}(t,x)]\geq 0;\quad \limsup_{t\to\infty}[u(t,x)-\overline{\theta}^{(k)}(t,x)]\leq 0,\quad \forall\, x\in\overline{\Omega}.\tag{3.17}$$

证明 对于正则性的论述我们可以参考 [37, 38]. 下面我们证明关系式 (3.16) 和 (3.17) 是成立的. 首先我们考察 $k=1$ 的情况.

第一步：证明 $\overline{\theta}^{(0)}\geq\overline{\theta}^{(1)}$.

考虑到在 $R^{+}\times\Omega$ 上,

$$\underline{\theta}_{+}^{(0)}(t,x)=c(t,x)\int_0^{\infty}\Theta(t-\tau,x)dM^{+}(\tau)\geq 0,$$
$$\overline{\theta}_{-}^{(0)}(t,x)=c(t,x)\int_0^{\infty}\theta_0(t-\tau,x)dM^{-}(\tau)\leq PM_0^{-}c(t,x),$$

由迭代关系式 (3.15)，对于 $(t,x)\in R^+\times\Omega$，

$$\begin{aligned}L\overline{\theta}^{(1)}(t,x)&=\overline{\theta}^{(1)}(t,x)[a(t,x)-b(t,x)\overline{\theta}^{(1)}(t,x)+\overline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x)]\\&\le\overline{\theta}^{(1)}(t,x)[a(t,x)-b(t,x)\overline{\theta}^{(1)}(t,x)+PM_0^-c(t,x)].\end{aligned}$$

并且对于 $(t,x)\in R\times\partial\Omega$ 有 $B[\overline{\theta}^{(1)}]=0$，则 $\overline{\theta}^{(1)}$ 是边值问题 (2.7) 当 $e(t,x)=a(t,x)+PM_0^-c(t,x)$ 时的一个下解，从而 $\overline{\theta}^{(1)}\le\overline{\theta}^{(0)}$．

第二步：证明 $\underline{\theta}^{(1)}\ge\underline{\theta}^{(0)}$．

由 (3.15) 式可得

$$\begin{aligned}L\underline{\theta}^{(1)}(t,x)&=\underline{\theta}^{(1)}(t,x)[a(t,x)-b(t,x)\underline{\theta}^{(1)}(t,x)+\underline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\overline{\theta}_+^{(0)}(t,x)]\\&\ge\underline{\theta}^{(1)}(t,x)[a(t,x)-b(t,x)\underline{\theta}^{(1)}(t,x)-\overline{\theta}_+^{(0)}(t,x)],\end{aligned}$$

所以 $\underline{\theta}^{(1)}$ 是问题 (3.9) 的一个上解，从而 $\underline{\theta}^{(1)}\ge\underline{\theta}^{(0)}=\Theta.$

第三步：证明 $\underline{\theta}^{(1)}\le\overline{\theta}^{(1)}$，

$$\liminf_{t\to\infty}[u(t,x)-\underline{\theta}^{(1)}(t,x)]\ge0\ge\limsup_{t\to\infty}[u(t,x)-\overline{\theta}^{(1)}(t,x)],\quad\forall\,x\in\overline{\Omega}.$$

因为在 $R\times\Omega$ 上 $\theta_0(t,x)\ge\Theta(t,x)$，

$$\begin{aligned}&[\overline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x)]-[\underline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\overline{\theta}_+^{(0)}(t,x)]\\&=[\overline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\underline{\theta}_-^{(0)}(t,x)]+[\overline{\theta}_+^{(0)}(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x)]\\&=c(t,x)\{\int_0^\infty[\theta_0(t-\tau,x)-\Theta(t-\tau,x)]dM^-(\tau)\\&\quad+\int_0^\infty[\theta_0(t-\tau,x)-\Theta(t-\tau,x)]dM^+(\tau)\}\ge0,\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}Lu(t,x)&=u(t,x)[a(t,x)-b(t,x)u(t,x)+\overline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x)]\\&\ge u(t,x)[a(t,x)-b(t,x)u(t,x)+\underline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\overline{\theta}_+^{(0)}(t,x)],\end{aligned}$$

并联系到 (3.15)，由比较原则可得 $\overline{\theta}^{(1)}(t,x) \geq \underline{\theta}^{(1)}(t,x)$．

在 (3.12) 中用 $M^-(\tau)$ 代替 $M^+(\tau)$，则对每一个 $\varepsilon > 0$，总存在 $t_3 > 0$，当 $t > t_3$ 时,

$$\begin{aligned} & c(t,x)\int_0^\infty u(t-\tau,x)dM^-(\tau) \leq c(t,x)\int_0^\infty \theta_0(t-\tau,x)dM^-(\tau) + \varepsilon \\ & = \overline{\theta}_-^{(0)}(t,x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 (3.13) 可知，对于以上的 ε 及任意 $x \in \overline{\Omega}$, 存在 $t_4 > 0$，当 $t > t_4$ 时,

$$u(t,x) \geq V(t,x) \geq \underline{\theta}^{(0)}(t,x) - \varepsilon/(2c_2 M_0^+).$$

考虑到 $\underline{\theta}^{(0)}(t,x)$ 关于 t 是 T- 周期的，而且在 $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上也是连续的，若设

$$\underline{\theta}_M = \max_{[0,T]\times\overline{\Omega}} \underline{\theta}^{(0)}(t,x),$$

并注意到 $\lim\limits_{t\to\infty} M^+(t) = M_0^+$，对于以上的 ε，存在 $t_5 > 0$，当 $t > t_5$ 时,

$$M_0^+ - M^+(t) \leq \varepsilon/(2c_2\underline{\theta}_M).$$

记 $\delta = max\{t_3, t_4, t_5\}$，则上述三个不等式对于 $t \geq 2\delta$ 是都能满足的．考虑到

$$\int_\delta^\infty u(t-\tau,x)dM^+(\tau) \geq 0,$$

我们可以得到如下的关系式:

$$\begin{aligned} & c(t,x)\int_0^\infty u(t-\tau,x)dM^+(\tau) \\ & \geq c(t,x)\{\int_0^\delta [\underline{\theta}^{(0)}(t-\tau,x) - \varepsilon/2c_2M_0^+]dM^+(\tau) + \int_\delta^\infty u(t-\tau,x)dM^+(\tau)\} \\ & \geq c(t,x)\{\int_0^\infty \underline{\theta}^{(0)}(t-\tau,x)dM^+(\tau) - \int_\delta^\infty \underline{\theta}^{(0)}(t-\tau,x)dM^+(\tau) - \frac{\varepsilon}{2c_2M_0^+}\cdot M_0^+\} \\ & \geq \underline{\theta}_+^{(0)}(t,x) - c(t,x)[\underline{\theta}_M(M_0^+ - M(t-\delta)) + \frac{\varepsilon}{2c_2}] \\ & \geq \underline{\theta}_+^{(0)}(t,x) - c(t,x)[\underline{\theta}_M\cdot\frac{\varepsilon}{2c_2\underline{\theta}_M} + \frac{\varepsilon}{2c_2}] \\ & \geq \underline{\theta}_+^{(0)} - \varepsilon. \end{aligned}$$

进而可得到

$$\begin{aligned} Lu(t,x) &= u(t,x)[a(t,x)-b(t,x)u(t,x)+c(t,x)\int_0^\infty u(t-\tau,x)dM^-(\tau) \\ &\quad -c(t,x)\int_0^\infty u(t-\tau,x)dM^+(\tau)] \\ &\le u(t,x)\{[a(t,x)+\overline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x)+2\varepsilon]-b(t,x)u(t,x)\}. \end{aligned}$$

由比较原则可知在 $[2\delta,\infty)\times\overline{\Omega}$ 上 $u(t,x)\le\overline{U}(t,x)$，其中 $\overline{U}$ 是下述问题的解

$$\begin{aligned} &L\overline{U}(t,x)=\overline{U}(t,x)\{[a(t,x)+\overline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x)+2\varepsilon]-b(t,x)\overline{U}(t,x)\}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t,x)\in(2\delta,\infty)\times\Omega, \\ &B[\overline{U}](t,x)=0,\quad (t,x)\in(2\delta,\infty)\times\partial\Omega, \\ &\overline{U}(2\delta,x)=u(2\delta,x),\quad x\in\overline{\Omega}. \end{aligned}\tag{3.18}$$

由于 $a(t,x)+\overline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x)\ge a(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x)\ge a(t,x)-\theta^*$，从而

$$\sigma(a(t,x)+\overline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x))\le\sigma(a(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x))\le\sigma(a(t,x)-\theta^*)<0,$$

并由 ε 的任意性依照 *命题 2.1.1* 可得

$$\limsup_{t\to\infty}[u(t,x)-\overline{\theta}^{(1)}(t,x)]\le\lim_{t\to\infty}[\overline{U}(t,x)-\overline{\theta}^{(1)}(t,x)]=0,\quad \forall\, x\in\overline{\Omega},\tag{3.19}$$

在这里 $\overline{\theta}^{(1)}$ 是下述问题的 T- 周期解

$$\begin{aligned} &Lu(t,x)=u(t,x)[a(t,x)+\overline{\theta}_-^{(0)}(t,x)-\underline{\theta}_+^{(0)}(t,x)-b(t,x)u(t,x)],\quad (t,x)\in R^+\times\Omega, \\ &B[u](t,x)=0,\quad (t,x)\in R\times\partial\Omega. \end{aligned}$$

通过同样的论述过程可得

$$\liminf_{t\to\infty}[u(t,x)-\underline{\theta}^{(1)}(t,x)]\ge 0,\quad \forall\, x\in\overline{\Omega}.\tag{3.20}$$

因此，由以上三步的论述可知关系式 (3.16) 和 (3.17) 对于 $k=1$ 是成立的.

若关系式 (3.16) 对整数 $k-1$ 成立，则依照关系式 (3.6)，

$$\theta^* = \overline{\theta}_+^{(0)} \geq \overline{\theta}_+^{(k-1)} \geq \overline{\theta}_+^{(k)} \geq \underline{\theta}_+^{(k)} \geq \underline{\theta}_+^{(k-1)} \geq \underline{\theta}_+^{(0)},$$

$$\overline{\theta}_-^{(0)} \geq \overline{\theta}_-^{(k-1)} \geq \overline{\theta}_-^{(k)} \geq \underline{\theta}_-^{(k)} \geq \underline{\theta}_-^{(k-1)} \geq \underline{\theta}_-^{(0)},$$

且

$$a + \underline{\theta}_-^{(k)} - \overline{\theta}_+^{(k)} \geq a + \underline{\theta}_-^{(k-1)} - \overline{\theta}_+^{(k-1)} \geq a + \underline{\theta}_-^{(k-1)} - \theta^* \geq a - \theta^*,$$

$$a + \overline{\theta}_-^{(k)} - \underline{\theta}_+^{(k)} \geq a - \underline{\theta}_+^{(k)} \geq a - \overline{\theta}_+^{(0)} = a - \theta^*.$$

从而

$$\sigma(a + \underline{\theta}_-^{(k)} - \overline{\theta}_+^{(k)}) \leq \sigma(a - \theta^*) < 0,$$

$$\sigma(a + \overline{\theta}_-^{(k)} - \underline{\theta}_+^{(k)}) \leq \sigma(a - \theta^*) < 0.$$

则 命题 *2.1.1* 中的条件满足，从而迭代过程可以继续下去．由上述同样的方法可知关系式 (3.16) 和 (3.17) 对每个正整数 k 是成立的 (参考 [12, 13, 15])．

从而 引理 *3.2.2* 证毕． □

因为单调有界序列存在极限， 引理 *3.2.2* 说明序列 $\{\overline{\theta}^{(k)}\}$ 和 $\{\underline{\theta}^{(k)}\}$ 分别存在极限:

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\theta}^{(k)}(t,x) = \overline{\theta}(t,x); \quad \lim_{k\to\infty} \underline{\theta}^{(k)} = \underline{\theta}(t,x), (t,x) \in [0,T] \times \overline{\Omega}, \tag{3.21}$$

其中 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 是正 T- 周期函数，且在 $[0,T]\times\overline{\Omega}$ 上 $\overline{\theta} \geq \underline{\theta}$．

在 [37, 39] 中的正则性论述说明 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 在 $R^+ \times \overline{\Omega}$ 上是 Hölder 连续的．在 (3.15) 中令 $k \to \infty$，则 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 也满足方程组 (3.8)，即:

$$\begin{aligned}
L\overline{\theta}(t,x) &= \overline{\theta}(t,x)[a(t,x) - b(t,x)\overline{\theta}(t,x) + c(t,x)\int_0^\infty \overline{\theta}(t-\tau,x)dM^-(\tau) \\
&\quad -c(t,x)\int_0^\infty \underline{\theta}(t-\tau,x)dM^+(\tau)], \qquad (t,x) \in R^+ \times \Omega, \\
L\underline{\theta}(t,x) &= \underline{\theta}(t,x)[a(t,x) - b(t,x)\underline{\theta}(t,x) + c(t,x)\int_0^\infty \underline{\theta}(t-\tau,x)dM^-(\tau) \\
&\quad -c(t,x)\int_0^\infty \overline{\theta}(t-\tau,x)dM^+(\tau)], \qquad (t,x) \in R^+ \times \Omega, \\
B[\overline{\theta}](t,x) &= B[\underline{\theta}](t,x) = 0, \quad (t,x) \in R \times \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

另外，易验 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 是问题 (3.1)(3.2) 的一对上、下解. 对于关系式 (3.17)，令 $k\to\infty$ 则

$$\liminf_{t\to\infty}[u(t,x)-\underline{\theta}(t,x)]\geq 0;\quad \limsup_{t\to\infty}[u(t,x)-\overline{\theta}(t,x)]\leq 0 \qquad \forall\, x\in\overline{\Omega}.$$

从而 定理 *3.2.2* 证毕. □

3.3 关于边值问题周期解的存在唯一性

为了研究边值问题 (3.1)(3.2) 的周期解的存在性，这只要说明 $\overline{\theta}\equiv\underline{\theta}$. 为了便于讨论我们取 $L=\partial/\partial t-\Delta$，其中 Δ 表示 Laplace 算子. 记

$$\begin{aligned}
&\overline{\theta}_t=\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial t},\quad \underline{\theta}_t=\frac{\partial\underline{\theta}}{\partial t},\\
&\theta_{0-}(t,x)=\int_0^\infty\theta_0(t-\tau,x)dM^-(\tau),\quad \Theta_+(t,x)=\int_0^\infty\Theta(t-\tau,x)dM^+(\tau),\\
&\overline{\theta}_+(t,x)=\int_0^\infty\overline{\theta}(t-\tau,x)dM^+(\tau),\quad \underline{\theta}_+(t,x)=\int_0^\infty\underline{\theta}(t-\tau,x)dM^+(\tau),\\
&\overline{\theta}_-(t,x)=\int_0^\infty\overline{\theta}(t-\tau,x)dM^-(\tau),\quad \underline{\theta}_-(t,x)=\int_0^\infty\underline{\theta}(t-\tau,x)dM^-(\tau),\\
&(\overline{\theta}-\underline{\theta})_M=\int_0^\infty[\overline{\theta}(t-\tau,x)-\underline{\theta}(t-\tau,x)]dM(\tau).
\end{aligned}\tag{3.23}$$

由 (3.22) 我们可得如下关系:

$$\begin{aligned}
&(\overline{\theta}_t-\underline{\theta}_t)-\Delta(\overline{\theta}-\underline{\theta})\\
&=a(\overline{\theta}-\underline{\theta})-b(\overline{\theta}^2-\underline{\theta}^2)+c(\overline{\theta}\,\overline{\theta}_--\underline{\theta}\,\underline{\theta}_-)-c(\overline{\theta}\underline{\theta}_+-\underline{\theta}\overline{\theta}_+)\\
&=[a-b(\overline{\theta}+\underline{\theta})+c(\overline{\theta}_--\underline{\theta}_+)](\overline{\theta}-\underline{\theta})+c\underline{\theta}(\overline{\theta}-\underline{\theta})_M.
\end{aligned}\tag{3.24}$$

以下我们将针对不同的边界条件分别讨论问题 (3.1)(3.2) 周期解的存在性.

Part A Dirichlet 边界条件

对于 Dirichlet 边界条件: $\overline{\theta}=\underline{\theta}=0$（在 $\partial\Omega$ 上），考虑到 $\overline{\theta}-\underline{\theta}\geq 0$，用 $(\overline{\theta}-\underline{\theta})$ 乘以 (3.24) 两端，并关于 x 在 Ω 上积分，则其左边 I 和右边 II 可以写成:

$$I\ =\ \int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})(\overline{\theta}_t-\underline{\theta}_t)dx-\int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})\Delta(\overline{\theta}-\underline{\theta})dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})^2dx+\int_\Omega|\nabla(\overline{\theta}-\underline{\theta})|^2dx, \tag{3.25}$$

$$II = \int_\Omega[a-b(\overline{\theta}+\underline{\theta})+c(\overline{\theta}_- - \underline{\theta}_+)](\overline{\theta}-\underline{\theta})^2dx+\int_\Omega c\underline{\theta}(\overline{\theta}-\underline{\theta})(\overline{\theta}-\underline{\theta})_M dx. \tag{3.26}$$

由 Poincaré 不等式（参考 [35] ），

$$\int_\Omega|\nabla(\overline{\theta}-\underline{\theta})|^2dx \ge \lambda_1\int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})^2dx,$$

其中 λ_1 是 Ω 上相应于零 Dirichlet 边界条件的 $-\triangle$ 的主特征. 则

$$I \ge \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+\lambda_1\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2. \tag{3.27}$$

若设

$$G=\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}[a-2b\Theta+c(\theta_{0-}-\Theta_+)], \qquad H=\sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(c\theta_0), \tag{3.28}$$

那么由 (3.26) 式，并考虑到 $\Theta\le\underline{\theta}\le\overline{\theta}\le\theta_0$ ，

$$\begin{aligned}
II &\le \int_\Omega[a-2b\Theta+c(\theta_{0-}-\Theta_+)](\overline{\theta}-\underline{\theta})^2dx+\int_\Omega c\theta_0(\overline{\theta}-\underline{\theta})(\overline{\theta}-\underline{\theta})_M dx\\
&\le G\int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})^2dx+H\int_\Omega(\overline{\theta}-\underline{\theta})(\overline{\theta}-\underline{\theta})_M dx\\
&= G\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+H\int_\Omega[\overline{\theta}(t,x)-\underline{\theta}(t,x)]\int_0^\infty[\overline{\theta}(t-\tau,x)-\underline{\theta}(t-\tau,x)]dM(\tau)dx\\
&\le G\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+H\int_0^\infty\|\overline{\theta}(t,\cdot)-\underline{\theta}(t,\cdot)\|\cdot\|\overline{\theta}(t-\tau,\cdot)-\underline{\theta}(t-\tau,\cdot)\|dM(\tau)\\
&\le G\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+\frac{H}{2}\int_0^\infty\{\|\overline{\theta}(t,\cdot)-\underline{\theta}(t,\cdot)\|^2+\|\overline{\theta}(t-\tau,\cdot)-\underline{\theta}(t-\tau,\cdot)\|^2\}dM(\tau)\\
&= (G+\frac{HM_0}{2})\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+\frac{H}{2}\int_0^\infty\|\overline{\theta}(t-\tau,\cdot)-\underline{\theta}(t-\tau,\cdot)\|^2dM(\tau).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

从而由 (3.27) 和 (3.29) 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2\le(G+\frac{HM_0}{2}-\lambda_1)\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2+\frac{H}{2}\int_0^\infty\|\overline{\theta}(t-\tau,\cdot)-\underline{\theta}(t-\tau,\cdot)\|^2dM(\tau). \tag{3.30}$$

对 (3.30) 式关于 t 在 $[0,T]$ 上积分，并考虑到 $\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2$ 是 T- 周期的，

$$0 = \int_0^T[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2]dt$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (G+\frac{HM_0}{2}-\lambda_1)\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt \\
&\quad +\frac{H}{2}\int_0^\infty\int_0^T \|\overline{\theta}(t-\tau,x)-\underline{\theta}(t-\tau,x)\|^2 dt\, dM(\tau) \\
&= (G+\frac{HM_0}{2}-\lambda_1)\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt+\frac{H}{2}\int_0^\infty\int_0^T \|\overline{\theta}(t,x)-\underline{\theta}(t,x)\|^2 dt\, dM(\tau) \\
&= (G+HM_0-\lambda_1)\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt. \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

若 $G+HM_0-\lambda_1<0$ ，则由 (3.31) 式知

$$\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt \equiv 0,$$

这说明在 $R^+\times\overline{\Omega}$ 上 $\overline{\theta}\equiv\underline{\theta}$. 从而问题 (3.1)(3.2) 的周期解是存在的.

现在说明周期解的唯一性. 若 θ^1 是满足 $\Theta\leq\theta^1\leq\theta_0$ 的另外的一个解，那么 θ^1 和 $\underline{\theta}$ 也是问题 (3.1)(3.2) 的一对上、下解，并且满足 (3.22) 中的关系式. 同前面关于 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 的推导过程一样，我们可以得到 $\theta^1\equiv\underline{\theta}$. 从而问题 (3.1)(3.2) 的周期解也是唯一的.

另外，为了保证 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 的存在性，需要满足不等式 $\sigma(a(t,x)+PM_0^-c(t,x))<0$ 和 $\sigma(a-\theta^*)<0$ ，而这只需 $a-\theta^*>\lambda_1$. 所以由以上论述可知问题 (3.1)(3.2) 存在唯一周期解的充分条件是:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad a-\theta^*>\lambda_1, \\
&\text{(ii)} \quad G+HM_0<\lambda_1, \qquad (3.32)
\end{aligned}
$$

其中 G 和 H 由 (3.28) 式给出.

定理 3.3.1 在假设 $(H_1)-(H_4)$ 成立的前提下，对于 Dirichlet 边界条件，若 (3.32) 中的条件满足，那么问题 (3.1)(3.2) 在 $\overline{\Omega}$ 上存在唯一的 T- 周期光滑解 θ . 另外，对于满足取值于 $[0,P]$ 的任意初始函数 $\phi(t,x)$ ，问题 (3.1)-(3.3) 的解 $u(t,x)$ 满足如下的渐近性:

$$\lim_{t\to\infty}[u(t,x)-\theta(t,x)]=0 \qquad \forall\, x\in\overline{\Omega}.$$

Part B　Neumann 边界条件

当在 $\partial\Omega$ 上 $\gamma(x) \equiv 0$ 时，这就是 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial n} = \frac{\partial\underline{\theta}}{\partial n} = 0.$$

在这种情况下，我们由下式给出正常数上、下解 k_2 和 k_1 .

$$\begin{aligned} &k_2(a_2 - b_1k_2 + c_2M_0^- k_2 - c_1M_0^+ k_1) = 0, \\ &k_1(a_1 - b_2k_1 + c_1M_0^- k_1 - c_2M_0^+ k_2) = 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

若 $(b_1 - c_2M_0^-)(b_2 - c_1M_0^-) > c_1c_2M_0^{+2}$ 且 $a_1(b_1 - c_2M_0^-) > a_2c_2M_0^+$ ，那么可由以上方程组解得:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{a_1(b_1 - c_2M_0^-) - a_2c_2M_0^+}{(b_1 - c_2M_0^-)(b_2 - c_1M_0^-) - c_1c_2M_0^{+2}}, \\ k_2 &= \frac{a_2(b_2 - c_1M_0^-) - a_1c_1M_0^+}{(b_1 - c_2M_0^-)(b_2 - c_1M_0^-) - c_1c_2M_0^{+2}}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

易验 $0 < k_1 \le \Theta \le \underline{\theta} \le \overline{\theta} \le \theta_0 \le k_2 \le P$. 由 (3.28) 式可知

$$\begin{aligned} G &= \sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}[a - 2b\Theta + c(\theta_{0-} - \Theta_+)] \\ &\le a_2 - 2b_1k_1 + c_2M_0^- k_2 - c_1M_0^+ k_1 \\ &= a_2 - (2b_1 + c_1M_0^+)k_1 + c_2M_0^- k_2, \\ H &= \sup_{x\in\Omega,\,0\le t\le T}(c\theta_0) \le c_2k_2. \end{aligned} \tag{3.35}$$

应用同 *Part A* 中一样的方法可得:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{\theta} - \underline{\theta}\|^2 + \|\nabla(\overline{\theta} - \underline{\theta})\|^2 \\ \le\ &(G + \frac{HM_0}{2})\|\overline{\theta} - \underline{\theta}\|^2 + \frac{H}{2}\int_0^\infty \|\overline{\theta}(t-\tau,\cdot) - \underline{\theta}(t-\tau,\cdot)\|^2 dM(\tau). \end{aligned} \tag{3.36}$$

对 (3.36) 式关于 t 在 $[0,T]$ 上积分，并考虑到 $\|\overline{\theta} - \underline{\theta}\|^2$ 关于 t 是 T- 周期的，

$$0 + \int_0^T \|\nabla(\overline{\theta} - \underline{\theta})\|^2 dt$$

$$
\begin{aligned}
&\le (G+\frac{HM_0}{2})\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt+\frac{H}{2}\int_0^\infty\int_0^T \|\overline{\theta}(t-\tau,\cdot)-\underline{\theta}(t-\tau,\cdot)\|^2 dt\, dM(\tau)\\
&= (G+HM_0)\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt\\
&\le [a_2-(2b_1+c_1M_0^+)k_1+c_2M_0^-k_2+c_2k_2M_0]\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt. \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

从而若 $a_2-(2b_1+c_1M_0^+)k_1+(M_0^-+M_0)c_2k_2<0$, 由 (3.37) 式可得

$$\int_0^T \|\overline{\theta}-\underline{\theta}\|^2 dt\equiv 0,$$

这说明 $\overline{\theta}\equiv\underline{\theta}$. 因此问题 (3.1)(3.2) 的周期解就是存在的了. 同 *Part A* 中的证明可知其周期解也是唯一的.

因为带有 0-Neumann 边界条件的 $-\triangle$ 算子在 Ω 上的主特征是 $\lambda_1=0$ ，为了保证 $\overline{\theta}$ 和 $\underline{\theta}$ 的存在性这需要 $\sigma(a(t,x)+PM_0^-c(t,x))<0$ 及 $\sigma(a-\theta^*)<0$ ，而这只需 $a_1-c_2M_0^+k_2>0$. 而且易验 $a_1(b_1-c_2M_0^-)>a_2c_2M_0^+$ 蕴含着 $a_1-c_2M_0^+k_2>0$. 从而可得如下条件:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)}\quad (b_1-c_2M_0^-)(b_2-c_1M_0^-)>c_1c_2M_0^{+2},\quad a_1(b_1-c_2M_0^-)>a_2c_2M_0^+,\\
&\text{(ii)}\quad a_2-(2b_1+c_1M_0^+)k_1+(M_0^-+M_0)c_2k_2<0. \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

其中 k_1 和 k_2 由 (3.34) 式给出.

定理 3.3.2 在假设 $(H_1)-(H_4)$ 成立的前提下，对于 Neumann 边界条件，若 (3.38) 中的条件满足，那么问题 (3.1)(3.2) 在 $\overline{\Omega}$ 上存在唯一的 $T-$ 周期光滑解 θ . 另外，对于在 $[k_1,k_2]$ 中取值的任意初始函数 $\phi(t,x)$ ，问题 (3.1)-(3.3) 的解 $u(t,x)$ 满足如下的渐近性:

$$\lim_{t\to\infty}[u(t,x)-\theta(t,x)]=0\qquad \forall\, x\in\overline{\Omega}.$$

注: 对于 Robin 边界条件，我们可以得到类似的结果.

3.4 应用及数值模拟

在这一节中，我们将给出有关时滞 Volterra 模型的一些数值结果．相应的空间区域取为 $\Omega=(0,1)$ ．

例一：我们考虑如下问题

$$\partial u(t,x)/\partial t-\Delta u(t,x)=u(t,x)[a(t,x)-b(t,x)u(t,x)$$
$$-c(t,x)\int_0^{\infty}u(t-\tau,x)d\mu(\tau)],\qquad (t,x)\in(0,+\infty)\times(0,1),\quad (3.39)$$

$$u(t,0)=u(t,1)=0,\qquad t\in(0,+\infty),\qquad (3.40)$$

$$u(t,x)=\phi(t,x),\qquad (t,x)\in(-\infty,0]\times[0,1].\qquad (3.41)$$

由于带有零 Dirichlet 边界条件的 $-\Delta$ 算子在 $\Omega=(0,1)$ 上的主特征是 $\lambda_1=\pi^2$ ，若取

$$a(t,x)=7.5+2\sin(2\pi t);\quad b(t,x)=5+\sin(2\pi t);\quad c(t,x)=1;$$
$$\mu(\tau)=\frac{\tau}{(\tau+1)};\quad \phi(t,x)=\sin(\pi x),$$

则 $M^+(\tau)=\frac{\tau}{(\tau+1)}$ ， $M^-(\tau)=0$ ，且 $T=1$ ．

由于

$$P=a_2/(b_1-c_2M_0^-)=\frac{9.5}{(4-0)}=2.375,$$

$$a(t,x)+c(t,x)PM_0^-\leq a_2+c_2PM_0^-=9.5+1\times2.375\times0=9.5<\pi^2,$$

从而 $\sigma(a(t,x)+c(t,x)PM_0^-)>0$ ．依照 定理 *3.3.1* ，问题 (3.39)-(3.41) 的平凡解 0 是全局渐近稳定的（见图形 Fig-1 ）．

例二：为了便于数值模拟，我们考察问题 (3.1)-(3.3) 的一种特例 — 在这种情况下时滞不再变化．模型如下：

$$\partial u(t,x)/\partial t-\Delta u(t,x)=u(t,x)[a(t,x)-b(t,x)u(t,x)-c(t,x)u(t-\frac{1}{2},x)],$$
$$(t,x)\in(0,+\infty)\times(0,1),\qquad (3.42)$$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = 0, \qquad t \in (0,+\infty), \tag{3.43}$$

$$u(t,x) = \phi(t,x), \qquad (t,x) \in [-\frac{1}{2},0] \times [0,1]. \tag{3.44}$$

与例一中的问题 (3.39)-(3.41) 相对照可知此时 $M_0^+ = 1$ ， $M_0^- = 0$ ，如果取

$$a(t,x) = 14 + 2\sin(2\pi t); \qquad b(t,x) = 30;$$

$$c(t,x) = 1 + \cos(2\pi t); \qquad \phi(t,x) = \frac{1}{3}[\sin(\pi x) + 1.2],$$

则 $a_1 = 12,\ a_2 = 16,\ b_1 = b_2 = 30,\ c_1 = 0,\ c_2 = 2$ ，而且

$$(b_1 - c_2M_0^-)(b_2 - c_1M_0^-) - c_1c_2M_0^{+2} = (30-0)(30-0) - 0 = 900 > 0,$$

$$a_1(b_1 - c_2M_0^-) - a_2c_2M_0^+ = 12 \times (30-0) - 16 \times 2 = 328 > 0,$$

从而 (3.38) 中的条件 (i) 满足．由 (3.34) 式可得

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{a_1(b_1 - c_2M_0^-) - a_2c_2M_0^+}{(b_1 - c_2M_0^-)(b_2 - c_1M_0^-) - c_1c_2M_0^{+2}} \\ &= \frac{12 \times (30-0) - 16 \times 2}{(30-0) \times (30-0) - 0} = \frac{328}{900}; \\ k_2 &= \frac{a_2(b_2 - c_1M_0^-) - a_1c_1M_0^+}{(b_1 - c_2M_0^-)(b_2 - c_1M_0^-) - c_1c_2M_0^{+2}} \\ &= \frac{16 \times (30-0) - 0}{(30-0) \times (30-0) - 0} = \frac{16}{30}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

因此我们同样可以验证 (3.38) 中的条件 (ii) 也满足．

$$\begin{aligned} & a_2 - (2b_1 + c_1M_0^+)k_1 + (M_0^- + M_0)c_2k_2 \\ & = 16 - (2 \times 30 + 0) \times \frac{328}{900} + (0+1) \times 2 \times \frac{16}{30} \\ & = 16 - 24 + \frac{96}{30} = -4.8 < 0. \end{aligned} \tag{3.46}$$

从而依照 定理 *3.3.2* ，边值问题 (3.42)(3.43) 在 $[0,+\infty) \times [0,1]$ 上存在唯一的周期解 θ（周期为 1 ）．而且对于初 - 边值问题 (3.42)-(3.44) 的解 $u(t,x)$ 有如下的渐近性（见图形 Fig-2 ）:

$$\lim_{t\to\infty}[u(t,x) - \theta(t,x)] = 0 \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

4 总结与思考

对于生物种群数量发展的模型，其种群密度的变化不仅受环境变化的影响，也会受时滞的影响．一般而言，时滞对系统会带来振荡性影响，而时变系数相当于是给系统加的强迫力，也会使系统产生振荡．对于含有离散时滞的 Logistic 方程 (2.1)–(2.3)，我们得到的渐近周期性的结果，其基本思想是对其系数加以控制．当系数发生周期性变化时，这相当于系统受周期性强迫力的影响而产生周期性振荡．尤其是当系数 $c(t,x)$ 相对于 $a(t,x)$ 和 $b(t,x)$ 很小的时候，时滞的振荡影响就会比较小，从而就慢慢地被强迫振荡掩盖掉了，因此导致了整个系统从渐近形态上看就趋向了强迫振荡的周期．

基于以上考虑，不难想到另外的一个方面，那就是系数 $c(t,x)$ 并不小，时滞的影响不可忽视，那么在什么条件下时滞引起的振荡性会掩盖外界的强迫振荡？

当然我们的这种通过先求拟解，再做差来估计不等式而得到周期解存在性的方法，是可以应用到解决相应的方程组问题的．这样就可以解决一大类问题了，譬如各种 Lotka-Volterra 方程组等．

对于 Logistic 模型，问题的研究是基于 Hess.P [39] 中的结论．其条件的提出是基于 $a(t,x)$ 和 $-\Delta$ 第一特征值的比较，从而 $-\Delta$ 的第一特征值就是一个容易产生分岐的地方．所以我们也可以继续研究有关 Hopf 分岐问题．

又如对于与年龄阶段有关的时滞 Logistic 模型也可以进行研究．其生物学基础是未成年的个体不参与生育，而成年的个体影响着种群数量的增长．在一定条件下，该系统的种群密度发生周期性变化也是可能的．

又例如与癌变和药物作用相关的 Logistic 模型，其基本问题是定期对癌变实行药物医治，考察在什么条件下此癌变会得到治愈？而什么情况下癌变会复发？

再如含非局部边界条件的时滞 Logistic 模型，其基本生物学背景是其区域边界上的种群密度变化受该区域上的种群总量的影响．在这种情况下，我们也可以考察该种群的生存与灭绝问题．

另外，当时滞 Logistic 模型中含有脉冲的影响时，其基本生物学背景是间断性放

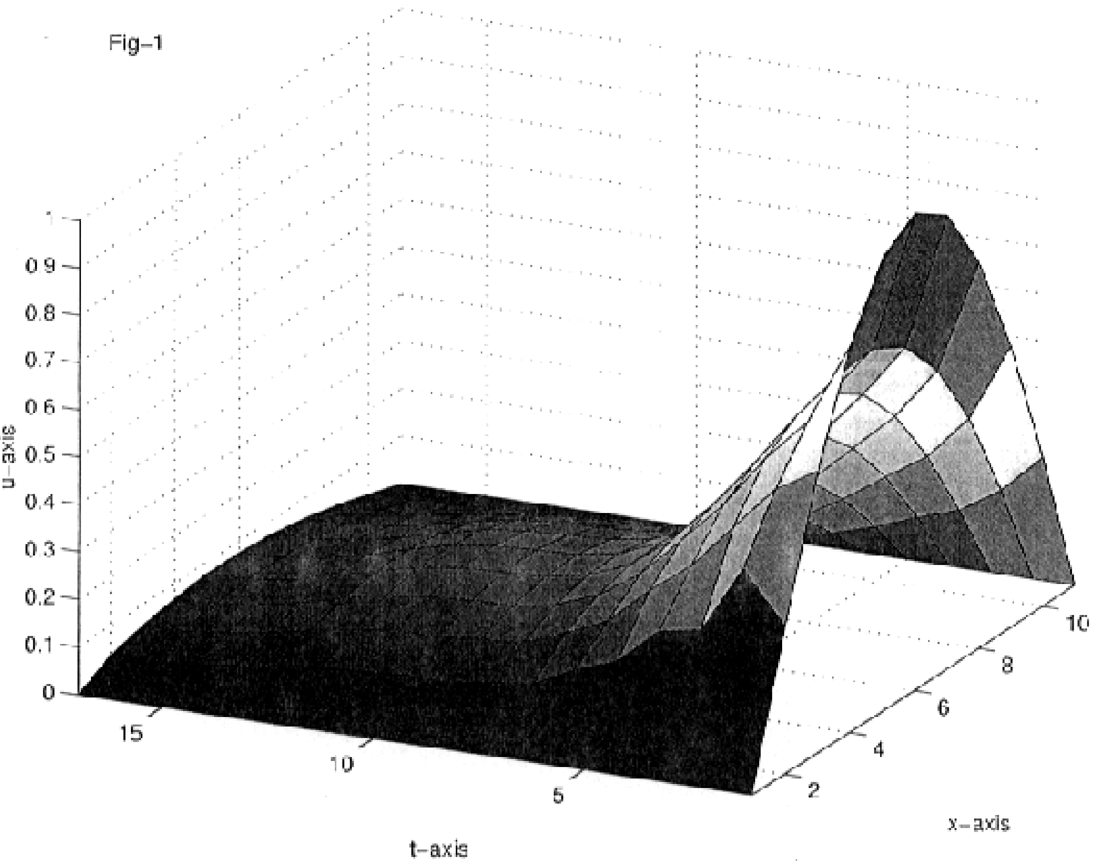
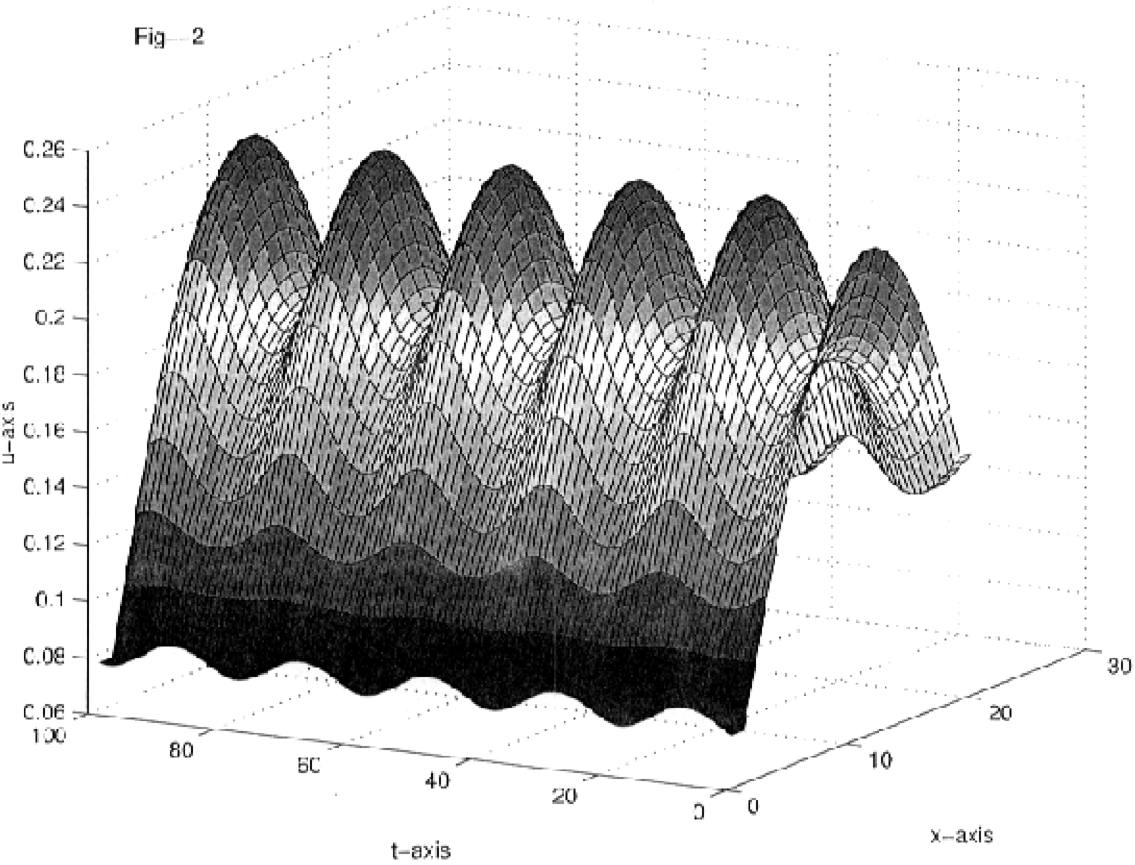


Fig-1
u-axis
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
15
10
5
t-axis
2
4
6
8
10
x-axis


Fig—2
0.26
0.24
0.22
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
u-axis
100
80
60
40
20
0
t-axis
0
10
20
30
x-axis

养和捕获．它与连续模型不同之处就是含有了第一类间断点．一般的研究是关注其系统发生振荡性与否．但是到底是如何振荡的却并不清楚，就此我们也可以进行深入研究．

参考文献

[1] 陈兰荪等，生物数学引论，科学出版社， 1988.5．

[2] E. C. 皮洛，数学生态学，科学出版社， 1978.8．

[3] 陈兰荪等，数学生态学模型与研究方法，科学出版社， 1988.9．

[4] 丁岩钦，昆虫种群数学生态学原理与应用，科学出版社， 1980.10．

[5] J. H. M. 索恩利，植物生理的数学模型，科学出版社， 1983.8．

[6] Cushing. J. M, Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics, Lecture notes in Biomath, No.**20**, Spring, New York.

[7] Kakutani. S and Markus. L, On the nonlinear differential equation in contributions to the theory of nonlinear oscillations, Annals of Mathematics Studies, No.**41(4)**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1958.

[8] Feng Wei, Lu Xin, Asymptotic Periodicity in Diffusive Logistic Equations with Discrete Delays, *Nonlinear Analysis*, **26** (1996), 171-178.

[9] Zhou Li, Fu Yiping, Stability and Hopf Bifurcation of Stationary Solution of a Delay Equation, *Jounal of Partial Differential Equations* **13** (2000), 59–74.

[10] Luckhaus, Global boundedness for a delay differential equation, *Trans. Am. Math. Scoc.* **294(2)**, 767–774.

[11] AHMAD. S and LAZER. A. C, Asymptotic behavior of solutions of periodic competition systems,*Nonlinear Analysis*, **13**1989, 263–283.

[12] Xin LU, Periodic solution and oscillation in a competition model with diffusion and distributed delay effects, *Nonlinear Analysis*, Vol. **27**, No. 6, 1996, 699-709.

[13] Li Zhou, Yiping Fu, Existence and Stability of Periodic Quasisolutions in Nonlinear Parabolic Systems with Discrete Delays, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **250** (2000), 139-161.

[14] C. V. Pao, Periodic Solutions of parabolic systems with time delays, *Journal of*

Mathematical Analysis and Applications, **251**, 251–263(2000).

[15] C. V. Pao, Coupled nonlinear parabolic systems with time delays, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **196**, 237–265(1995).

[16] C. V. Pao, Parobolic systems in unbounded domains I. existence and dynamics, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **217**, 129–160(1998).

[17] C. V. Pao, Systems of parabolic equations with continuous and discrete delays, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **205**, 157–185(1997).

[18] C. V. Pao, Quasisolutions and global attractor of reaction–diffusion systems, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* 1996 Vol.**26**, No.**12**, 1889–1903.

[19] C. V. Pao, Periodic solutions of systems of parabolic equations in unbounded domains, *Nonlinear Analysis*, **40**(2000), 523–535.

[20] C. V. Pao, Dynamics of nonlinear parabolic systems with time delays, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **198**,751–779(1996).

[21] Fu Shengmao and Ma Ruyun, Existence of a globel coexistence state for periodic competition diffusion systems, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 1997, Vol. 28, No.**7**, 1265–1271.

[22] V. Volterra, Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie, Gauthier–Villars, Paris, 1931.

[23] R. K. Miller, Volterra's population equation, *SIAM. J. Appl. Math.* **14**(1966), 446–452.

[24] R. Redlinger, On Volterra's population equation with diffusion, *SIAM. J. Math. Anal.*, **16**(1), 1985, 135–142.

[25] K. Gopalsamy, X. Z. He, Dynamics of an almost periodic Logistic integrodifferential equation, *Methods Appl. Anal.*, **2**(1) (1995), 38–66.

[26] B. Shi, Y. Chen, A prior bounds and stability of solutions for a Volterra reaction-

diffusion equation with infinite delay, *Nonlinear Analysis*, **44** (2001), 97–121.

[27] 陈亚浙，吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组. 北京：科学出版社， 1997.

[28] Gilbarg, D. and Trudinger,N. S, Elliptic partial differentiaL equation of second order, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[29] 张恭庆，林源渠. 泛函分析讲义 (上册). 北京：北京大学出版社， 1987.

[30] 定光桂. 巴拿赫空间引论. 北京：科学出版社， 1984.

[31] R. A. Adams. 叶其孝，王耀东等译. 索伯列夫空间. 北京：人民教育出版社，1983

[32] 叶其孝，李正元，反应扩散方程引论，科学出版社， 1994 .

[33] 辜联昆，二阶抛物型偏微分方程，厦门大学出版社， 1995 .

[34] A. Friedman. Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice–Hall, Inc.,1964

[35] Smoller. J, Shock waves and reaction-deffusion equations, Springer, 1983.

[36] Paul C. Fife, Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1979.

[37] Pao. C. V, Nonlinear parabolic and Elliptic Equations, Plenum Press, New York (1992).

[38] J. Wu, Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, Springer, New York, 1996.

[39] Hess. P, Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. **247**, Pitman, New York, 1991.

[40] Wang Jinliang, Zhou Li, Asymptotic Periodicity of Diffusive Logistic Equation with Discrete Delay, *Mathematica Applicata*, **15**(supplement), 2002, 106–110.

[41] 秦元勋，时滞动力系统的运动稳定性，科学出版社，北京， 1989 .

[42] Jack Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer, New York, 1977.

致 谢

在此首先向我的恩师周笠教授表示感谢！在周老师的悉心指导和亲切关怀下，我的文章才得以完成．这三年来也是在周老师的谆谆教导下，我才慢慢懂得了做研究的基本方法和治学的一般道理．刚刚来的时候我老是毛毛躁躁的，而且好高骛远，无知而浅薄．在周老师的耳濡目染下，我的这些缺点都得到了不同程度的改善，如今也能静下心来做些研究工作了．周老师虽然已是满头银发，却仍然博学多思，勤学不辍，而且严谨治问，一丝不苟．虽然没有严厉的批评，但我时时都有种鞭策的动力，希望自己做得更好一些．周老师在做人方面也值得我们学习．尽管前两年一些突然的变故影响了我，但也曾暴露了我不少的缺陷，我非常感激周老师的批评和教诲！生活中的周老师是和蔼可亲的，我觉得遇上这样的恩师是我的幸运，以后无论我走到哪里，都会铭记这份师恩的．另外也非常感谢慈祥的师母李老师．

在此也非常感谢汤燕斌老师！汤老师为人谦和大度，不拘小节．我的几篇文章都是在汤老师的热心帮助下完成的，汤老师算得上是良师益友，在此表示由衷的谢意！也非常感谢杨茵老师、李用声老师、张显文老师、段志文老师的长期的教诲和热心帮助．很感谢师姐韩淑霞的关怀，也很感谢朝夕相处的师妹李景、关美娇、罗琳、吴娥子，师弟赵才地、秦晓红、董柏青．我们的讨论班使我们聚在一起，即能教学相长，也能时时聆听各位老师的教诲，为我们以后的发展打下了良好的基础．

我将永远怀念这些可亲可敬的人们！

王 金 良

二零零三年四月

附录：主要研究成果

[1] Wang Jinliang, Zhou Li, Asymptotic Periodicity of Diffusive Logistic Equation with Discrete Delay, 应用数学, **15**(s), 2002, 106–110.

[2] Wang Jinliang, Zhou Li, Existence and Uniqueness of Periodic Solution of Delayed Logistic Equation and It's Asymptotic Behavior, for " *Journal of Partial Differential Equations* " （审阅中）.

[3] Jinliang Wang, Li Zhou, Yanbin Tang, Asymptotic Periodicity of Volterra Equation with Infinite Delay, for " *Nonlinear Analysis* " （审阅中）.

[4] Jinliang Wang, Li Zhou, Asymptotic Periodicity of Food-limited Diffusive Population Model with Time-Delay, will be sent for " *Journal of Mathematical Analysis and Applications* ".