

习题解答

1. 利用对角线法则计算下列三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

解 (1) 原式 $= 2 \times (-4) \times 3 + 0 \times (-1) \times (-1) + 1 \times 1 \times 8 - 1 \times (-4) \times (-1) - 2 \times (-1) \times 8 - 0 \times 1 \times 3 = -4$;

(2) 原式 $= acb + bac + cba - c^3 - a^3 - b^3$
 $= 3abc - a^3 - b^3 - c^3$;

(3) 原式 $= 1 \cdot b \cdot c^2 + 1 \cdot c \cdot a^2 + 1 \cdot a \cdot b^2 - 1 \cdot b \cdot a^2 - 1 \cdot c \cdot b^2 - 1 \cdot a \cdot c^2$
 $= bc^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$

$$= c^2(b-a) + ab(b-a) - c(b^2-a^2) = (a-b)(b-c)(c-a);$$

(4) 原式 $= x(x+y)y + yx(x+y) + (x+y)yx - (x+y)^3 - x^3 - y^3$
 $= -2(x^3 + y^3).$

2. 按自然数从小到大为标准次序, 求下列各排列的逆序数:

(1) 1 2 3 4; (2) 4 1 3 2;

(3) 3 4 2 1; (4) 2 4 1 3;

(5) 1 3 $\cdots$ $(2n-1)$ 2 4 $\cdots$ $(2n)$;

(6) 1 3 $\cdots$ $(2n-1)$ $(2n)$ $(2n-2)$ $\cdots$ 2.

解 (1) 此排列为自然排列, 其逆序数为 0;

(2) 此排列的首位元素的逆序数为 0; 第 2 位元素 1 的逆序数为 1; 第 3 位元素 3 的逆序数为 1; 末位元素 2 的逆序数为 2, 故它的逆序数为 $0+1+1+2=4$;

(3) 此排列的前两位元素的逆序数均为 0; 第 3 位元素 2 的逆序数为 2; 末位元素 1 的逆序数为 3, 故它的逆序数为 $0+0+2+3=5$;

(4) 类似于上面, 此排列的从首位元素到末位元素的逆序数依次为 0, 0, 2, 1, 故它的逆序数为 $0+0+2+1=3$;

(5) 注意到这 $2n$ 个数的排列中, 前 n 位元素之间没有逆序对. 第 $n+1$ 位元素 2 与它前面的 $n-1$ 个数构成逆序对, 故它的逆序数为 $n-1$; 同理, 第 $n+2$ 位元素 4 的逆序数为 $n-2$; $\cdots$; 末位元素 $2n$ 的逆序数为 0. 故此排列的逆序数

为 $(n-1) + (n-2) + \cdots + 0 = \frac{1}{2}n(n-1)$;

(6) 与(5)相仿, 此排列的前 $n+1$ 位元素没有逆序对; 第 $n+2$ 位元素 $(2n-2)$ 的逆序数为 2; 第 $n+3$ 位元素 $2n-4$ 与它前面的 $2n-3, 2n-1, 2n, 2n-2$ 构成逆序对, 故它的逆序为 4; $\cdots$; 末位元素 2 的逆序数为 $2(n-1)$, 故此排列的逆序数为 $2+4+\cdots+2(n-1)=n(n-1)$.

3. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 由行列式定义知这项必还含有分别位于第 3 行和第 4 行的某两元素, 而它们又分别位于第 2 列和第 4 列, 即 a_{32} 和 a_{44} 或 a_{34} 和 a_{42} . 注意到排列 1324 与 1342 的逆序数分别为 1 与 2, 故此行列式中含有 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 与 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

4. 计算下列各行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}.$$

解 (1)

$$\begin{aligned} D &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 - 10r_1]{r_2 - 4r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4 + 7r_2]{r_3 + 15r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 & 85 \\ 0 & 0 & 9 & 45 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$= 0$ (因第 3、4 行成比例);

$$(2) D \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ (因有两行相同);}$$

$$(3) D \frac{r_1 \div a}{r_2 \div d} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} \frac{c_1 \div b}{c_2 \div c} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_1} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4abcdef;$$

$$(4) D \frac{r_1 + ar_2}{r_3 + dc_2} \begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 1+ab & a & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按 } r_3 \text{ 展开}} (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1+ab & a & ad \\ -1 & c & 1+cd \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1+ab)(1+cd) + ad.$$

5. 求解下列方程:

$$(1) \begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0; (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0, \text{ 其中 } a, b, c$$

互不相等.

$$\begin{aligned} \text{解 (1) 左式} & \frac{r_1 + r_2}{r_1 \div (x+3)} (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{c_2 - c_1} (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 \\ -1 & 2 & x+1 \end{vmatrix} \\ & = (x+3) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x+3)(x^2-3). \end{aligned}$$

于是方程的解为: $x_1 = -3, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3};$

(2) 注意到方程左式为 4 阶范德蒙德行列式, 由例 12 的结果得

$$(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)(a-c)(b-c)=0.$$

因 a, b, c 互不相等, 故方程的解为: $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$.

6. 证明:

$$(1) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3;$$

$$(2) \begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d);$$

$$(5) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

证 (1) 左式 $\xrightarrow[c_2-c_3]{c_1-c_3} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2(a-b) & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-2c_2} \begin{vmatrix} (a-b)^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 0 & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (a-b)^3 = \text{右式};$$

(2) 将左式按第 1 列拆开得

$$\text{左式} = \begin{vmatrix} ax & ay + bz & az + bx \\ ay & az + bx & ax + by \\ az & ax + by & ay + bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay + bz & az + bx \\ bz & az + bx & ax + by \\ bx & ax + by & ay + bz \end{vmatrix} = aD_1 + bD_2,$$

$$\text{其中 } D_1 = \begin{vmatrix} x & ay + bz & az + bx \\ y & az + bx & ax + by \\ z & ax + by & ay + bz \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3 \div a]{c_3 - bc_1} a \begin{vmatrix} x & ay + bz & z \\ y & az + bx & x \\ z & ax + by & y \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2 \div a]{c_2 - bc_3} a^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} y & ay + bz & az + bx \\ z & az + bx & ax + by \\ x & ax + by & ay + bz \end{vmatrix} \xrightarrow[c_2 \div b]{c_2 - ac_1} b \begin{vmatrix} y & z & az + bx \\ z & x & ax + by \\ x & y & ay + bz \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 \div b]{c_3 - ac_2} b^2 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_1]{c_3 \leftrightarrow c_2} b^2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix},$$

$$\text{于是 } D = aD_1 + bD_2 = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \text{右式}.$$

$$(3) \text{ 左式 } \xrightarrow[c_2 - c_1]{c_4 - c_3} \begin{vmatrix} a^2 & 2a + 1 & 2a + 3 & 2a + 5 \\ b^2 & 2b + 1 & 2b + 3 & 2b + 5 \\ c^2 & 2c + 1 & 2c + 3 & 2c + 5 \\ d^2 & 2d + 1 & 2d + 3 & 2d + 5 \end{vmatrix}$$

$$\frac{c_4 - c_3}{c_3 - c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{因有两列相同});$$

$$\begin{aligned} (4) \text{ 左式} &= \frac{r_4 - a^2 r_3}{r_3 - ar_2} \frac{r_3 - ar_2}{r_2 - ar_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}{\text{各列提取公因子}} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix} \\ &= \frac{r_3 - b(b+a)r_2}{r_2 - br_1} (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & x & y \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ x & y \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中: } x &= c^2(c+a) - (bc)(b+a) = c(c^2 + ac - b^2 - ab) = c(a+b+c)(c-b); \\ y &= d^2(d+a) - bd(b+a) = d(a+b+d)(d-b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ x & y \end{vmatrix} &= (c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c(a+b+c) & d(a+b+d) \end{vmatrix} \\ &= (c-b)(d-b)[d(a+b+d) - c(a+b+c)] \\ &= (c-b)(d-b)[(d-c)(a+b) + d^2 - c^2] \\ &= (c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d), \end{aligned}$$

因此, 左式 = $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$ = 右式.

(5) 证一 递推法. 按第 1 列展开, 以建立递推公式,

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= xD_n + (-1)^{n+2}a_0 \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ & * & & x & -1 \end{vmatrix} \\ &= xD_n + (-1)^{2n+2}a_0 = xD_n + a_0. \end{aligned}$$

又, 归纳基础为: $D_1 = a_n$ (注意不是 x), 于是

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= xD_n + a_0 \\ &= x(xD_{n-1} + a_1) + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 D_{n-1} + a_1 x + a_0 \\
&= \cdots \\
&= x^n D_1 + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.
\end{aligned}$$

证二 按最后一行展开得

$$D_{n+1} = \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j+2} a_j$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^n (-1)^{n+j+2+n-j} a_j x^j \\
&= \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.
\end{aligned}$$

7. 设 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$, 把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90° 、或依副对角线翻转, 依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1 = D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D, D_3 = D$.

证 (1) 先计算 D_1 , 为此通过交换行将 D_1 变换成 D , 从而找出 D_1 与 D 的关系.

D_1 的最后一行是 D 的第 1 行, 把它依次与前面的行交换, 直至换到第 1 行, 共进行 $n-1$ 次交换; 这时最后一行是 D 的第 2 行, 把它依次与前面的行交换, 直至换到第 2 行, 共进行 $n-2$ 次交换; $\cdots$, 直至最后一行是 D 的第 $n-1$ 行, 再通过一次交换将它换到第 $n-1$ 行, 这样就把 D_1 变换成 D , 共进行

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{1}{2} n(n-1)$$

次交换, 故 $D_1 = (-1)^{\frac{1}{2} n(n-1)} D$.

注 1° 上述交换行列式的行(列)的方法,在解题时,经常用到.它的特点是在把最后一行换到某一行的同时,保持其余 $n-1$ 个行之间原有的先后次序(但行的序号可能改变). 2° 同理把 D 左右翻转所得行列式为 $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D$.

(2) 计算 D_2 . 注意到 D_2 的第 $1, 2, \dots, n$ 行恰好依次是 D 的第 $n, n-1, \dots, 1$ 列,故若把 D_2 上下翻转得 $\tilde{D}_2$,则 $\tilde{D}_2$ 的第 $1, 2, \dots, n$ 行依次是 D 的第 $1, 2, \dots, n$ 列,即 $\tilde{D}_2 = D^T$. 于是由(1)

$$D_2 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tilde{D}_2 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D^T = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D.$$

(3) 计算 D_3 . 注意到若把 D_3 逆时针旋转 90° 得 $\tilde{D}_3$,则 $\tilde{D}_3$ 的第 $1, 2, \dots, n$ 列恰好是 D 的第 $n, n-1, \dots, 1$ 列,于是再把 $\tilde{D}_3$ 左右翻转就得到 D . 由(1)之注及(2),有

$$D_3 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \tilde{D}_3 = D.$$

注 本例的结论值得记取,即对行列式 D 作转置、依副对角线翻转、旋转 180° 所得行列式不变;作上下翻转、左右翻转、逆(顺)时针旋转 90° 所得行列式为 $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D$.

8. 计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式):

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}, \text{其中对角线上元素都是 } a, \text{未写出的元素都是 } 0;$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix};$$

$$(3) D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

提示:利用范德蒙德行列式的结果.

$$(4) D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_1 & b_1 & \\ & & c_1 & d_1 & \\ & \ddots & & & \ddots \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}, \text{其中未写出的元素都是 } 0;$$

(5) $D_n = \det(a_{ij})$, 其中 $a_{ij} = |i - j|$;

$$(6) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{ 其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0.$$

(1) 解一 把 D_n 按第一行展开得

$$D_n = a^n + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & a & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & a \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix}$$

按第一列展开

$$a^n + (-1)^{n+1+n} a^{n-2} = a^{n-2}(a^2 - 1).$$

解二

$$D_n \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_n} - \begin{vmatrix} a & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & & a \\ & & a & \\ & & & \ddots \\ & & & & a \\ 0 & a & & & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_n} \begin{vmatrix} a & 1 & & \\ 1 & a & & \\ & & a & \\ & & & \ddots \\ & & & & a \end{vmatrix}$$

由例 10

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{vmatrix} = a^{n-2}(a^2 - 1).$$

(2) 本题中 D_n 是教材例 8 中行列式的一般形式, 它是一个非常有用的行列式, 在以后各章中有不少应用.

解 利用各列的元素之和相同, 提取公因式.

$$D_n \xrightarrow{r_1 + r_2 + \cdots + r_n} \begin{vmatrix} x + (n-1)a & x + (n-1)a & \cdots & x + (n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[i=2, \dots, n]{c_i - ac_1} [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & x-a & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-a \end{vmatrix} \\ &= (x-a)^{n-1} [x + (n-1)a]. \end{aligned}$$

(3) 解 把所给行列式上下翻转, 即为范德蒙德行列式, 若再将它左右翻转, 由于上下翻转与左右翻转所用交换次数相等, 故行列式经上下翻转再左右翻转 (相当于转 180° , 参看题 7) 其值不变. 于是按范德蒙德行列式的结果, 可得

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a-n & a-n+1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a-n)^n & (a-n+1)^n & \cdots & a^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (i-j)$$

(4) 解 本题与例 11 相仿, 解法也大致相同, 用递推法.

$$D_{2n} \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_{2n}]{r_2 \leftrightarrow r_{2n}} \begin{vmatrix} a_n & b_n & 0 \\ c_n & d_n & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & D_{2(n-1)} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{由例 10}} (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)},$$

即有递推公式

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) D_{2(n-1)}.$$

另一方面, 归纳基础为 $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$, 利用这些结果, 递推得

$$D_{2n} = (a_n d_n - b_n c_n) \cdots (a_1 d_1 - b_1 c_1) = \prod_{k=1}^n (a_k d_k - b_k c_k).$$

(5) 解

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1]{\begin{matrix} r_n - r_{n-1} \\ r_{n-1} - r_{n-2} \\ \vdots \\ r_2 - r_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[c_2 + c_n]{\begin{matrix} c_1 + c_n \\ c_2 + c_n \\ \vdots \\ c_{n-1} + c_n \end{matrix}} \begin{vmatrix} n-1 & n & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}. \end{aligned}$$

(6) 解 将原行列式化为上三角形行列式. 为此, 从第 2 行起, 各行均减去第 1 行, 得与例 1.3 相仿的行列式

$$D_n \xrightarrow[r_2-r_1, \dots, r_n-r_1]{i=2, \dots, n} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a_1 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & \cdots & & a_n \end{vmatrix} \xrightarrow[c_1+\frac{a_1}{a_i}c_i]{i=2, \dots, n} \begin{vmatrix} b & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_n \end{vmatrix},$$

其中 $b = 1 + a_1 + a_1 \sum_{i=2}^n \frac{1}{a_i} = a_1 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right)$. 于是

$$D_n = a_1 \cdots a_n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right).$$

9. 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, D 的 (i, j) 元的代数余子式记作 A_{ij} , 求

$$A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}.$$

解 与例 13 相仿, $A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34}$ 等于用 $1, 3, -2, 2$ 替换 D 的第 3 行对应元素所得行列式, 即

$$\begin{aligned} A_{31} + 3A_{32} - 2A_{33} + 2A_{34} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4+c_3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \div (-2)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 24. \end{aligned}$$

10. 用克拉默法则解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\text{解 (1) } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{r_2 - r_1}{r_3 - 2r_1} \\ \frac{r_4 - 3r_1}{} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{r_3 + 5r_2}{r_4 + 2r_2} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -13 & 8 \\ -5 & 14 \end{vmatrix} = -142;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{r_2 + r_1}{r_3 + r_1} \\ \frac{r_4 - 2r_1}{} \end{matrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & -4 \\ -10 & -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{按 } c_3 \text{ 展开} \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -4 \\ -10 & -1 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{r_1 + 3r_3}{r_2 - 2r_3} \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} -27 & 0 & 32 \\ 23 & 0 & -22 \\ -10 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -27 & 32 \\ 23 & -22 \end{vmatrix} = -142;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{r_2 - r_1}{r_3 - 2r_1} \\ \frac{r_4 - 3r_1}{} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & -12 & -3 & -7 \\ 0 & -15 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -12 & -3 & -7 \\ -15 & -1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \frac{r_1 - 2r_3}{r_2 - 3r_3} \\ \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} 23 & 0 & -13 \\ 33 & 0 & -31 \\ -15 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \text{按 } c_2 \text{ 展开} \end{matrix} \begin{vmatrix} 23 & -13 \\ 33 & -31 \end{vmatrix} = -284;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \frac{r_2 - r_1}{r_3 - 2r_1} \\ \frac{r_4 - 3r_1}{} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & -5 & -12 & -7 \\ 0 & -2 & -15 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{r_3 + 5r_2}{r_4 + 2r_2} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -47 & 8 \\ 0 & 0 & -29 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -47 & 8 \\ -29 & 14 \end{vmatrix} = -426;$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & -5 & -3 & -12 \\ 0 & -2 & -1 & -15 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+5r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -13 & -47 \\ 0 & 0 & -5 & -29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & -47 \\ -5 & -29 \end{vmatrix} = 142,$$

由克拉默法则,得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, x_3 = \frac{D_3}{D} = 3, x_4 = \frac{D_4}{D} = -1;$$

$$(2) D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} 5 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 65; \quad (*)$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 114,$$

于是 $D = 325 - 114 = 211;$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{由 } (*) \text{ 式}} 65 - 216 = -151;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_2 \text{ 展开}} - \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -19 + 180 = 161;$$

$$\begin{aligned}
D_3 &= \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_3 \text{ 展开}} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\
&= 5 - 114 = -109; \\
D_4 &= \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } c_4 \text{ 展开}} - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \\
&\quad \underline{\underline{\text{由(*)式}}} - 1 + 65 = 64.
\end{aligned}$$

由克拉默法则,得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{151}{211}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{161}{211}, x_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{109}{211}, x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{64}{211}.$$

11. 问 λ, μ 取何值时, 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

解 由定理 5', 此时方程组的系数行列式必须为 0.

$$\text{因 } D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 0 & \mu & 0 \end{vmatrix} = -\mu(\lambda - 1),$$

故只有当 $\mu = 0$ 或 $\lambda = 1$ 时, 方程组才可能有非零解.

当 $\mu = 0$, 原方程组成为

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \end{cases}$$

显然 $x_1 = 1, x_2 = 1 - \lambda, x_3 = -1$ 是它的一个非零解;

当 $\lambda = 1$, 原方程组成为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

显然, $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ 是它的一个非零解.

因此, 当 $\mu = 0$ 或 $\lambda = 1$ 时, 方程组有非零解.

注 定理 5 (或定理 5') 仅表明齐次线性方程组要有非零解, 它的系数行列

式必为零.至于这条件是否充分将在第三章中予以解决,目前还是应验证它有非零解.下题也是同样情形.

12. 问 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解?

解 若方程组有非零解,由定理 5', 它的系数行列式 $D=0$.

$$\begin{aligned} \text{因 } D &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-(1-\lambda)r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda-1 \\ 0 & -3+\lambda & 4-(1-\lambda)^2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 \\ -3+\lambda & 4-(1-\lambda)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2+c_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \lambda-3 & 3\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{c_3 \div \lambda \\ r_2 \div (\lambda-3)}} -\lambda(\lambda-3) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3). \end{aligned}$$

故 $D=0 \Rightarrow \lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 或 $\lambda=3$, 并且不难验证:

当 $\lambda=0$ 时, $x_1=-2, x_2=1, x_3=1$; 当 $\lambda=2$ 时, $x_1=-2, x_2=3, x_3=1$; 当 $\lambda=3$ 时, $x_1=-1, x_2=5, x_3=2$ 均是该方程组的非零解. 所以当 $\lambda=0, 2, 3$ 时方程组有非零解.

习题解答

1. 计算下列乘积:

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) (1, 2, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (-1, 2);$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(5) (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 } (1) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{pmatrix}_{3 \times 1};$$

$$(2) (1, 2, 3)_{1 \times 3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = (10)_{1 \times 1} = 10;$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} (-1, 2)_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{pmatrix}_{2 \times 3};$$

$$\begin{aligned} (5) (x_1, x_2, x_3)_{1 \times 3} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \\ = (x_1, x_2, x_3)_{1 \times 3} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \\ = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{12}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{13}x_3x_1 \\ + a_{23}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 \\ = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \end{aligned}$$

$$2. \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

求 $3AB - 2A$ 及 $A^T B$.

解

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } 3AB - 2A &= 3 \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 15 & 24 \\ 0 & -15 & 18 \\ 6 & 27 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

因 $A^T = A$, 即 A 为对称阵, 故

$$A^T B = AB = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

解 依次将两个线性变换写成矩阵形式:

$$X = AY, Y = BZ,$$

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ 分别为对应的系数矩阵; } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}. \text{ 在这些记号下, 从 } z_1, z_2, z_3 \text{ 到 } x_1, x_2, x_3 \text{ 的线性变换的矩}$$

阵形式为

$$X = AY = A(BZ) = (AB)Z = CZ,$$

这里矩阵

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix},$$

即有

$$\begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3 \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3. \end{cases}$$

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, 问:

(1) $AB = BA$ 吗?

(2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 吗?

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 吗?

$$\text{解 (1) 因 } AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \text{ 故 } AB \neq BA;$$

$$(2) (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2,$$

但由(1), $AB \neq BA$, 故 $AB + BA \neq 2AB$, 从而

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2;$$

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$, 但由(1), $AB \neq BA$, 故 $BA - AB \neq O$, 从而

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2.$$

5. 举反例说明下列命题是错误的:

(1) 若 $A^2 = O$, 则 $A = O$;

(2) 若 $A^2 = A$, 则 $A = O$ 或 $A = E$;

(3) 若 $AX = AY$, 且 $A \neq O$, 则 $X = Y$.

解 (1) 取 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 有 $A^2 = O$, 但 $A \neq O$;

(2) 取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 有 $A^2 = A$, 但 $A \neq O$ 且 $A \neq E$;

(3) 取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 有 $AX = AY$, 且 $A \neq O$,

但 $X \neq Y$.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, 求 $A^2, A^3, \dots, A^k$.

解 直接计算得 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

一般可得 $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\lambda & 1 \end{pmatrix}$, (2.3)

事实上, 当 $k=1$ 时, (2.3) 式显然成立;

设当 $k=n$ 时, (2.3) 式成立, 那么当 $k=n+1$ 时,

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

由归纳法, 知(2.3)式成立.

7. 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 求 A^n .

解 把 A 写成两个矩阵之和

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda E + B,$$

其中三阶矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 满足 $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^k = O$ ($k \geq 3$).

$$\begin{aligned} \text{于是 } A^n &= (\lambda E + B)^n = C_n^0 \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} B + \cdots + C_n^n B^n \\ &= C_n^0 \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} B + C_n^2 \lambda^{n-2} B^2 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} & C_n^2 \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix} = \lambda^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda^2 & n\lambda & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & \lambda^2 & n\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (n \geq 2).$$

8. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 A 为对称阵, 证明 $B^T A B$ 也是对称阵.

证 根据矩阵乘积的转置规则, 有

$$(B^T A B)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T A B \quad (\text{因 } A \text{ 为对称阵}),$$

故由定义, 知 $B^T A B$ 为对称阵.

9. 设 A, B 都是 n 阶对称阵, 证明 AB 是对称阵的充要条件是 $AB = BA$.

证 因 $A^T = A, B^T = B$, 故

$$\begin{aligned} AB \text{ 为对称阵} &\Leftrightarrow (AB)^T = AB \\ &\Leftrightarrow B^T A^T = AB \Leftrightarrow BA = AB. \end{aligned}$$

10. 求下列矩阵的逆阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix} \quad (a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0).$$

解 (1) 由二阶方阵的求逆公式(教材例 10)得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

$$(3) \text{ 因 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \text{ 故 } A \text{ 可逆, 并且}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -32, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -14, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

于是

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -13 & 6 & -1 \\ -32 & 14 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{pmatrix};$$

(4) 因 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 故 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 于是矩阵 $B = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)$ 是有意义的, 并且因

$$AB = \text{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right) \\ = \text{diag}(1, 1, \cdots, 1) = E_n,$$

由定理 1 的推论, 知 A 可逆, 且 $A^{-1} = B = \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right)$.

注 本题结论值得记取, 可当作公式用.

11. 解下列矩阵方程:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) X \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 因矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 的行列式 $= 1$, 不为零, 故它可逆, 从而用它的逆矩阵左乘方程两边, 得.

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

(2) 记矩阵方程为 $XA_{3 \times 3} = B_{2 \times 3}$, 因

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

故 A 可逆, 用 A^{-1} 右乘方程的两边得

$$X = BA^{-1}.$$

又,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } X &= BA^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ -8 & 15 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 则矩阵方程可写为

$$AXB = C.$$

因 $|A| = 6 \neq 0$, $|B| = 2 \neq 0$, 故 A, B 均可逆. 依次用 A^{-1} 和 B^{-1} 左乘和右乘方程两边得

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) 本题与(3)相仿. 因矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的行列式都是 -1 , 故

均是可逆阵, 并且

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \text{故得 } X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

12. 利用逆矩阵解下列线性方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解 将方程组写作矩阵形式

$$Ax = b,$$

这里, A 为系数矩阵, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ 为未知数矩阵, b 为常数矩阵.

$$(1) \text{ 因 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0, \text{ 故 } A \text{ 可逆, 于是}$$

$$\begin{aligned}
 x &= A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -23 & 13 & 4 \\ 13 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

即有

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0; \end{cases}$$

$$(2) \text{ 因 } |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0, \text{ 故 } A \text{ 可逆, 于是}$$

$$\begin{aligned}
 x &= A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

即有

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

13. 已知线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3, \\ x_2 = 3y_1 + y_2 + 5y_3, \\ x_3 = 3y_1 + 2y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

求从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

解 记 $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$, 则线性变换的矩阵形式为 $x =$

Ay , 其中 A 为它的系数矩阵. 因 $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, 故 A 是可逆阵, 于

是从变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的线性变换的矩阵形式为

$$y = A^{-1}x.$$

$$\text{又, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = A^* = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 9 \\ 6 & 3 & -7 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3, \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3, \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3. \end{cases}$$

14. 设 A 为三阶矩阵, $|A| = \frac{1}{2}$, 求 $|(2A)^{-1} - 5A^*|$.

解 因 $|A| = \frac{1}{2} \neq 0$, 故 A 可逆. 于是由

$$A^* = |A| A^{-1} = \frac{1}{2} A^{-1} \text{ 及 } (2A)^{-1} = \frac{1}{2} A^{-1},$$

得

$$(2A)^{-1} - 5A^* = \frac{1}{2} A^{-1} - \frac{5}{2} A^{-1} = -2A^{-1},$$

两端取行列式得

$$|(2A)^{-1} - 5A^*| = |-2A^{-1}| = (-2)^3 |A|^{-1} = -16.$$

注 先化简矩阵, 再取行列式, 往往使计算变得简单.

15. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $AB = A + 2B$, 求 B .

解 由 $AB = A + 2B \Rightarrow (A - 2E)B = A$.

因 $A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 它的行列式 $\det(A - 2E) = 2 \neq 0$, 故它是可逆阵.

用 $(A - 2E)^{-1}$ 左乘上式两边得

$$\begin{aligned} B &= (A - 2E)^{-1} A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

16. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $AB + E = A^2 + B$, 求 B .

解 由方程 $AB + E = A^2 + B$, 合并含有未知矩阵 B 的项, 得

$$(A - E)B = A^2 - E = (A - E)(A + E).$$

又, $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其行列式 $\det(A - E) = -1 \neq 0$, 故 $A - E$ 可逆, 用

$(A - E)^{-1}$ 左乘上式两边, 即得

$$B = A + E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

17. 设 $A = \text{diag}(1, -2, 1)$, $A^*BA = 2BA - 8E$, 求 B .

解 由于所给矩阵方程中含有 A 及其伴随阵 A^* , 因此仍从公式 $AA^* = |A|E$ 着手. 为此, 用 A 左乘所给方程两边, 得

$$AA^*BA = 2ABA - 8A,$$

又, $|A| = -2 \neq 0$, 故 A 是可逆矩阵, 用 A^{-1} 右乘上式两边, 得

$$|A|B = 2AB - 8E \Rightarrow (2A + 2E)B = 8E \Rightarrow (A + E)B = 4E.$$

注意到 $A + E = \text{diag}(1, -2, 1) + \text{diag}(1, 1, 1) = \text{diag}(2, -1, 2)$ 是可逆矩阵, 且

$$(A + E)^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right),$$

于是

$$B = 4(A + E)^{-1} = \text{diag}(2, -4, 2).$$

18. 已知矩阵 A 的伴随阵 $A^* = \text{diag}(1, 1, 1, 8)$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 求 B .

解 先由 A^* 来确定 $|A|$. 由题意知 A^{-1} 存在, 有 $A^* = |A|A^{-1}$, 得 $|A^*| = |A|^4|A^{-1}| = |A|^3$, 而 $|A^*| = 8$, 故 $|A| = 2$. 再化简所给矩阵方程

$$\begin{aligned} ABA^{-1} &= BA^{-1} + 3E \\ \Rightarrow (A - E)BA^{-1} &= 3E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (A - E)B = 3A$$

$$\Rightarrow (E - A^{-1})B = 3E.$$

由 $|A| = 2$, 知 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{2}\text{diag}(1, 1, 1, 8) = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4\right)$,

$$E - A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -3\right).$$

得

$$(E - A^{-1})^{-1} = \text{diag}\left(2, 2, 2, -\frac{1}{3}\right).$$

于是 $B = 3(E - A^{-1})^{-1} = 3\text{diag}\left(2, 2, 2, -\frac{1}{3}\right) = \text{diag}(6, 6, 6, -1).$

19. 设 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 $P = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求 A^{11} .

解 本题与教材例 13 相仿. 因 $P^{-1}AP = \Lambda$, 故 $A = P\Lambda P^{-1}$.

于是 $A^{11} = P\Lambda^{11}P^{-1}$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{11} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2^{13} & 4+2^{13} \\ -1-2^{11} & -4-2^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2731 & 2732 \\ -683 & -684 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

20. 设 $AP = P\Lambda$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$,

求 $\varphi(A) = A^8(5E - 6A + A^2)$.

解 因 $|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, 故 P 是可逆阵. 于是, 由 $AP = P\Lambda$

得 $A = P\Lambda P^{-1}$, 并且记多项式 $\varphi(x) = x^8(5 - 6x + x^2)$, 有

$$\varphi(A) = P\varphi(\Lambda)P^{-1}.$$

因 Λ 是三阶对角阵, 故

$$\varphi(\Lambda) = \text{diag}(\varphi(-1), \varphi(1), \varphi(5)) = \text{diag}(12, 0, 0).$$

于是 $\varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}P^*\right)$

$$= -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

注, 由于 $\varphi(A)$ 除 $(1,1)$ 元外均是 0, 故在求 P^* 时, 只需计算 P 的 $(1,1)$ 元、 $(2,1)$ 元、 $(3,1)$ 元的代数余子式 A_{11}, A_{21} 和 A_{31} .

21. 设 $A^k = O$ (k 为正整数), 证明 $E - A$ 可逆, 并且其逆矩阵 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

证 由 $(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) = E + A + \cdots + A^{k-1} - A - A^2 - \cdots - A^k$
 $= E - O = E,$

由定理 2 之推论知 $E - A$ 可逆, 且其逆矩阵 $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$.

注 判断矩阵 B 是否为 A 的逆矩阵, 最直接、最简单的方法就是验证 AB (或者 BA) 是否等于单位矩阵, 就像判断 3 是否为 $\frac{1}{3}$ 的逆只需验证 $\frac{1}{3} \times 3$ 是否等于 1 一样. 下一题及例 2.1 都是这一思想的应用.

22. 设方阵 A 满足

$$A^2 - A - 2E = O, \quad (2.4)$$

证明 A 及 $A + 2E$ 都可逆, 并求 A^{-1} 及 $(A + 2E)^{-1}$.

解 先证 A 可逆. 由 (2.4) 式得

$$A(A - E) = 2E;$$

也就是

$$A \left(\frac{1}{2}(A - E) \right) = E.$$

由定理 2 之推论知 A 是可逆的, 且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E)$;

再证 $A + 2E$ 可逆. 用例 2.1 的解法, 由

$$(A + 2E)(A - 3E) = A^2 - A - 6E = 2E - 6E = -4E,$$

即 $(A + 2E) \left[\frac{1}{4}(3E - A) \right] = E,$

同理, 知 $A + 2E$ 可逆, 且 $(A + 2E)^{-1} = \frac{1}{4}(3E - A)$.

23. 设矩阵 A 可逆, 证明其伴随阵 A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

证 因 $AA^* = |A|E$ 及 $|A| \neq 0$, 由定理 2 的推论知 A^* 可逆, 且

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A,$$

另一方面, 因 $A^{-1}(A^{-1})^* = |A^{-1}|E$.

用 A 左乘此式两边得

$$(A^{-1})^* = |A^{-1}|A = \frac{1}{|A|}A,$$

比较上面两个式子, 即知结论成立.

24. 设 n 阶矩阵 A 的伴随阵为 A^* , 证明:

(1) 若 $|A| = 0$, 则 $|A^*| = 0$;

(2) $|A^*| = |A|^{n-1}$.

证 (1) 因

$$A^* A = |A| E, \quad (2.5)$$

当 $|A| = 0$ 时, 上式成为 $A^* A = O$.

要证 $|A^*| = 0$, 用反证法: 设 $|A^*| \neq 0$, 由矩阵可逆的充要条件知, A^* 是可逆矩阵, 用 $(A^*)^{-1}$ 左乘上式等号两边, 得 $A = O$. 于是推得 A 的所有 $n-1$ 阶子式, 亦即 A^* 的所有元素均为零. 这导致 $A^* = O$. 此与 A^* 为可逆矩阵矛盾. 这一矛盾说明, 当 $|A| = 0$ 时, $|A^*| = 0$.

(2) 分两种情形:

情形 1: $|A| = 0$. 由 (1), $|A^*| = 0 = |A|^{n-1}$, 结论成立;

情形 2: $|A| \neq 0$. 在 (2.5) 式的两边取行列式, 得

$$|A^*| |A| = |A^* A| = ||A| E_n| = |A|^n.$$

于是 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

注 本题 (2) 的结果值得记取.

$$25. \text{ 计算 } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

解 与教材例 15 相同, 本题练习分块矩阵乘法. 记

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; B_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

则

$$\text{原式} = \begin{pmatrix} A_{11} & E_2 \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & B_{12} \\ O & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11} B_{12} + B_{22} \\ O & A_{22} B_{22} \end{pmatrix}.$$

又

$$\begin{aligned} A_{11} B_{12} + B_{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}; \\ A_{22} B_{22} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

故

$$\text{原式} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$26. \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 求 } |A^8| \text{ 及 } A^4.$$

解 若记 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, 则 A 成为一

个分块对角矩阵. 于是

$$|A^8| = |A|^8 = (|A_1| |A_2|)^8 = |A_1|^8 |A_2|^8 = 10^{16};$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} A_1^4 & O \\ O & A_2^4 \end{pmatrix}.$$

因 $A_1^2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = 25E$, 故 $A_1^4 = 5^4 E$; $A_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 故 $A_2^4 = 2^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (可参看习题 6). 代入即得

$$A^4 = \begin{pmatrix} 5^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

27. 设 n 阶矩阵 A 与 s 阶矩阵 B 都可逆, 求

$$(1) \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1}; \quad (2) \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}.$$

解 (1) 因 A 和 B 均可逆, 作分块阵 $\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$, 由分块矩阵乘法规则,

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = E_{n+s}.$$

于是 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 可逆, 且 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}.$

(2) 求 $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$ 的逆阵, 就是求 $n+s$ 阶方阵 X , 使

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} X = E_{n+s}. \quad (2.6)$$

为此, 根据原矩阵的分块情况, 对 X 作一样的分块,

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ 是未知矩阵 (为明确起见, 它们依次是 $n \times n, n \times s, s \times n, s \times s$ 矩阵). 把上式代入 (2.6) 式得到

$$\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_{11} & AX_{12} \\ CX_{11} + BX_{21} & CX_{12} + BX_{22} \end{pmatrix}.$$

比较上式两端两个矩阵, 有

$$AX_{11} = E_n \Rightarrow X_{11} = A^{-1};$$

$$AX_{12} = O \Rightarrow X_{12} = O;$$

$$CX_{12} + BX_{22} = E_s \Rightarrow BX_{22} = E_s \Rightarrow X_{22} = B^{-1};$$

$$CX_{11} + BX_{21} = O \Rightarrow BX_{21} = -CX_{11} = -CA^{-1} \Rightarrow X_{21} = -B^{-1}CA^{-1}.$$

于是得

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = X = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

28. 求下列矩阵的逆阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

解 (1) 将 A 分块为 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, 因 $|A_1| = 1, |A_2| = 1$, 故它们均可逆. 于是由分块对角矩阵的性质, 有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix};$$

(2) 记 $A = \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 因 $|B| = 2, |C| = 12$, 故 B, C 均是可逆阵. 由 27 题(2)的结论, 得

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B & O \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix},$$

由 $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C^{-1}DB^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, 得

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

习题解答

1. 用初等行变换把下列矩阵化为行最简形矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} r_2 \times (-1) \\ \hline r_1 - 2r_2 \\ r_3 + 2r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 (2) \quad & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_2 - r_1 \\ \hline r_3 - 2r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c} r_2 - 2r_1 \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_2 \times (-1) \\ \hline r_1 + r_2 \\ r_3 + r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_2 - r_1 \\ \hline r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c} r_1 - 3r_2 \\ \hline r_3 + 3r_2 \\ r_4 + 5r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_2 - 2r_1 \\ \hline r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c} r_2 \times (-1) \\ \hline r_1 - 2r_2 \\ r_3 + 8r_2 \\ r_4 + 7r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_2 + r_3 \\ \hline r_4 - r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 求一个可逆阵 P , 使 PA 为行最简形.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } (A, E) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_2 - 2r_1 \\ \hline r_3 - 5r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c} r_2 \times (-1) \\ \hline r_1 - 2r_2 \\ r_3 + 6r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -6 & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

故 $P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, 并且 A 的行最简形为 $PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 设 $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, (1) 求一个可逆阵 P , 使 PA 为行最简形;

(2) 求一个可逆阵 Q , 使 QA^T 为行最简形.

解 (1) $(A, E) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

于是 $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 且 $PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ 为 A 的行最简形;

$$(2) (A^T, E) = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 1 \end{pmatrix},$$

于是 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$, 并且 $QA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为 A^T 的行最简形.

4. 试利用矩阵的初等变换, 求下列方阵的逆阵:

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

解 记所给的矩阵为 A .

$$(1) (A, E) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1-2r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+4r_3]{r_3 \div (-2)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{r_1 \div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

因 $A \sim E$, 由定理 1 之推论, 知 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$(2) (A, E) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\begin{matrix} r_1 \leftrightarrow r_3 \\ r_2 \leftrightarrow r_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\begin{matrix} r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\begin{matrix} r_1 + 2r_2 \\ r_3 - 4r_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\begin{matrix} r_1 - r_3 \\ r_2 - 2r_3 \\ r_4 + 2r_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\begin{matrix} r_1 + r_4 \\ r_2 + r_4 \\ r_3 - r_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix},$$

因 $A \sim E$, 由定理 1 之推论, 知 A 可逆, 并且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

5. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, 求 X 使 $AX = B$;

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, 求 X 使 $XA = B$.

解 (1) 与教材例 3 相仿, 若 A 是可逆矩阵, 则可求得矩阵方程的解为 $X = A^{-1}B$, 而判断 A 是否可逆和求解可通过 (A, B) 的行最简形一起解决: 即若 $A \sim E$, 则 A 可逆, 并且初等行变换把 A 变为 E 的同时, 把 B 变为 $A^{-1}B$.

$$\begin{aligned} (A, B) &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_2]{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -12 & -4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_2 - 2r_3]{r_3 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

于是 A 可逆, 且 $X = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) 可以仿照教材中的方法, 用初等列变换求 BA^{-1} , 但通常习惯用初等行变换求 X .

因 $XA = B \Rightarrow A^T X^T = B^T \Rightarrow X^T = (A^T)^{-1} B^T$, 与题(1)相同, 可用初等行变换先求得 X^T , 从而得 X . 计算如下:

$$(A^T, B^T) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - 2r_1]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 11 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{r_2+4r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_2]{r_1-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_1-r_3, r_2-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是 $X^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, 从而 $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AX = 2X + A$, 求 X .

解 $AX = 2X + A \Rightarrow (A - 2E)X = A$. 欲解此方程, 需要(i)判断 $A - 2E$ 为可逆矩阵;(ii)进一步求 $X = (A - 2E)^{-1}A$. 这两件事可由 $(A - 2E, A)$ 的行最简形一起解决.

$$\begin{aligned} (A - 2E, A) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_1 \times (-1), r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_3 \div (-2), r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

上述结果表明 $A - 2E \sim E$, 故 $A - 2E$ 可逆, 且

$$X = (A - 2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. 在秩是 r 的矩阵中, 有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式? 有没有等于 0 的 r 阶子式?

解 在秩是 r 的矩阵中等于 0 的 $r-1$ 阶子式可能有, 也可能没有; 等于 0 的 r 阶子式可能有, 也可能没有. 例如:

(i) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 有等于 0 的 1 阶子式(简称 1 阶零子式, 下同), 但没有 2 阶零子式;

(ii) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 没有 1 阶零子式, 也没有 2 阶零子式;

(iii) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 有 1 阶零子式, 也有 2 阶零子式;

(iv) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 没有 1 阶零子式, 但有 2 阶零子式.

8. 从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B , 问 A, B 的秩的关系怎样?

解 由矩阵秩的性质⑤, 有

$$R(A) - 1 \leq R(B) \leq R(A).$$

9. 求作一个秩是 4 的方阵, 它的两个行向量是

$$(1, 0, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0, 0).$$

解 因 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩为 2, 故满足要求的方阵可以是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. 求下列矩阵的秩, 并求一个最高阶非零子式:

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

故它的秩为 2, 并且它的第 1、2 行和第 1、2 列构成最高阶非零子式.

$$(2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 - r_2 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 7r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & -21 & 33 & 27 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3 - 3r_2 \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 11 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

于是它的秩为 3, 且它的第 1、2、3 行和第 1、2、5 列构成最高阶非零子式.

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_4 \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2 - 2r_1 \\ \hline r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2 \leftrightarrow r_4 \\ \hline r_3 + 2r_2 \\ r_4 + 3r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3 \div 14 \\ \hline r_4 - 16r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是它的秩为 3. 由于 3 个非零行的非零首元位于第 1、2、5 列, 故在第 1、2、5 列

所构成的矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 中寻找 3 阶非零子式. 容易看出

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

11. 设 A, B 都是 $m \times n$ 矩阵, 证明 $A \sim B$ 的充要条件是 $R(A) = R(B)$.

证 必要性即定理 2, 故只需证明充分性. 设 $R(A) = R(B) = r$, 那么矩阵 A, B 有相同的标准形

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

于是 $A \sim F, B \sim F$, 从而由等价关系的对称性和传递性, 知 $A \sim B$.

12. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$, 问 k 为何值, 可使

(1) $R(A)=1$; (2) $R(A)=2$; (3) $R(A)=3$.

解一 因 A 为 3 阶方阵, 故 $R(A)=3 \Leftrightarrow |A| \neq 0$. 因

$$|A| = -6(k-1)^2(k+2),$$

所以当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时, $R(A)=3$.

当 $k = -2$ 时, $R(A) \leq 2$, 又 A 的左上角二阶子式不为零, 故 $R(A) \geq 2$, 于是 $R(A)=2$;

当 $k=1$ 时, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

知 $R(A)=1$.

解二 对 A 作初等行变换.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - kr_1]{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1) \\ 0 & 2(k-1) & -3(k^2-1) \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ 0 & 2(k-1) & 3(k-1) \\ 0 & 0 & -3(k-1)(k+2) \end{pmatrix},$$

于是, (1) 当 $k=1$ 时, $R(A)=1$; (2) 当 $k=-2$ 时, $R(A)=2$; (3) 当 $k \neq 1$ 且 $k \neq -2$ 时, $R(A)=3$.

13. 求解下列齐次线性方程组:

$$\begin{aligned} (1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases} & (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases} \\ (3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0; \end{cases} & (4) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

解 对系数矩阵 A 进行初等行变换, 化为行最简形.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \div (-3)]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

于是 $R(A)=3$, 故方程组有 $4-R(A)=1$ 个自由未知数; 与原方程组同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_4 = 0, \\ x_3 - \frac{4}{3}x_4 = 0, \end{cases}$$

取 x_4 为自由未知数, 得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -3 \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+4r_2]{r_2 \div (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取 x_2 和 x_4 为自由未知数, 得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -7 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 7 & -13 & 8 \\ 0 & 9 & -23 & 26 \\ 0 & 7 & -11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} r_3 - r_2 \\ \hline r_4 - r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 7 & -13 & 8 \\ 0 & 2 & -10 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_2 \leftrightarrow r_3 \\ \hline r_2 \div 2 \\ r_1 + 2r_2 \\ r_3 - 7r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 22 & -55 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{c} r_3 \div 22 \\ \hline r_1 + 5r_3 \\ r_2 + 5r_3 \\ r_4 - 2r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

取 x_4 为自由未知数, 得

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = \frac{7}{2}x_4, \\ x_3 = \frac{5}{2}x_4, \end{cases}$$

于是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

$$\begin{array}{l}
 (4) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_1 - r_2 \\ \hline r_3 - r_2 \\ r_4 - 3r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{c} r_2 - 2r_1 \\ \hline r_3 - 4r_1 \\ r_4 - 7r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -17 & 19 & -20 \\ 0 & -51 & 57 & -60 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_3 - r_2 \\ \hline r_4 - 3r_2 \\ r_2 \div (-17) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -8 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\widetilde{r_1 - 7r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{17} & \frac{13}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{19}{17} & \frac{20}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

取 x_3 和 x_4 为自由未知数, 得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4, \\ x_2 = \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4, \end{cases}$$

即得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{17} \\ \frac{19}{17} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{17} \\ -\frac{20}{17} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

14. 求解下列非齐次线性方程组:

$$(1) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 4, \\ x - 2y + 4z = -5, \\ 3x + 8y - 2z = 13, \\ 4x - y + 9z = -6; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 4x + 2y - 2z + w = 2, \\ 2x + y - z - w = 1; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} 2x + y - z + w = 1, \\ 3x - 2y + z - 3w = 4, \\ x + 4y - 3z + 5w = -2. \end{cases}$$

解 本题中分别以 A 和 B 表示方程组的系数矩阵和增广矩阵.

$$(1) B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 11r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & -30 & 33 & 96 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

因 $R(A) = 2, R(B) = 3, R(A) \neq R(B)$, 知方程组无解;

$$(2) B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 4r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 14 & -14 & 28 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_2 \div 7 \\ r_3 - 14r_2 \\ r_4 - 7r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{c} r_1 + 2r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

因 $R(A) = R(B) = 2 < 3$, 故方程组有无穷多解, 并且有 $3 - R(A) = 1$ 个自由未知数. 选 z 为自由未知数, 得到同解方程组:

$$\begin{cases} x + 2z = -1, \\ y - z = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = z + 2, \end{cases}$$

即得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R});$$

$$(3) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} r_1 + r_2 \\ r_3 - 2r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_1 \div 2 \\ r_2 \times (-1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

选 y, z 为自由未知数, 得到同解方程组

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}, \\ w = 0, \end{cases}$$

即得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R});$$

$$(4) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_1 \leftrightarrow r_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & -14 & 10 & -18 & 10 \\ 0 & -7 & 5 & -9 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} r_3 - \frac{1}{2}r_2 \\ r_2 \div (-14) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \\
 \begin{array}{c} r_1 - 4r_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

选 z, w 为自由未知数, 得同解方程组:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}z + \frac{1}{7}w + \frac{6}{7}, \\ y = \frac{5}{7}z - \frac{9}{7}w - \frac{5}{7}, \end{cases}$$

即得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ -\frac{5}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

15. 写出一个以

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

为通解的齐次线性方程组.

解 把(3.3)式改写为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 - 2c_2 \\ -3c_1 + 4c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{以 } c_1 = x_3, \\ c_2 = x_4 \text{ 代入}}]{\quad} \begin{pmatrix} 2x_3 - 2x_4 \\ -3x_3 + 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

由此知所求方程组有 2 个自由未知数 x_3, x_4 , 且对应的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 4x_4, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

它以(3.3)式为通解.

注 (1) 有无限多个齐次方程组以(3.3)式为通解表示式, 这里给出比较简

单的一个,即系数矩阵为行最简形.

(2) 本题与习题四题 22 相仿,是同一问题的两种提法.

16. λ 取何值时,非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有惟一解;(2) 无解;(3) 有无穷多解?

解 仿照教材例 13,本题也有两种解法,且以行列式解法较为简单,故这里只用此法解之.

系数矩阵 A 的行列式为(可参看习题一题 8(2))

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1 \div (\lambda+2)]{r_1+r_2+r_3} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2). \end{aligned}$$

当 $|A| \neq 0$ 时,即当 $\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$ 时, $R(A) = 3$, 方程组有惟一解;

当 $\lambda = 1$ 时,增广矩阵成为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_1, r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见, $R(A) = R(B) = 1 < 3$, 于是方程组有无穷多解;

当 $\lambda = -2$ 时,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_3 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

可见 $R(A) = 2, R(B) = 3, R(A) \neq R(B)$, 于是方程组无解.

17. 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

当 λ 取何值时有解? 并求出它的通解.

解 这里系数矩阵 A 是方阵,但 A 中不含参数,故以对增广矩阵作初等行变换为宜,求解如下:

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2 + 2\lambda \\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + 3r_2]{r_2 \div (-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3}(1 - \lambda) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

因 $R(A) = 2$, 故当 $R(B) = 2$, 即当 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -2$ 时, 方程组有解.

当 $\lambda = 1$ 时,

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

选 x_3 为自由未知数, 得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 1, \\ x_2 = x_3, \end{cases}$$

得通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R});$$

当 $\lambda = -2$ 时,

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

选 x_3 为自由未知数, 得

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 2, \\ x_2 = x_3 + 2, \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

18. 设

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + (5 - \lambda)x_2 - 4x_3 = 2, \\ -2x_1 - 4x_2 + (5 - \lambda)x_3 = -(\lambda + 1), \end{cases}$$

问 λ 为何值时, 此方程组有惟一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

解 由于系数矩阵是方阵,其行列式

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3+c_2]{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 2(1-\lambda) \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3-2c_2} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & 5-\lambda & \lambda-9 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 2 & \lambda-9 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10), \end{aligned}$$

当 $|A| \neq 0$, 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 10$ 时, 方程组有惟一解.

当 $\lambda = 10$ 时, 增广矩阵成为

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & -5 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2+4r_1]{r_1 \leftrightarrow r_2, r_3+r_1} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -18 & -18 & 9 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可见 $R(A)=2, R(B)=3, R(A) \neq R(B)$, 方程组无解;

当 $\lambda = 1$ 时, 增广矩阵成为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

知 $R(A)=R(B)=1$, 方程组有无穷多解, 且其通解为

$$x = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

19. 证明 $R(A)=1$ 的充分必要条件是存在非零列向量 a 和非零行向量 b^T , 使 $A=ab^T$.

证 先证充分性. 设 $a=(a_1, a_2, \dots, a_m)^T, b=(b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 并不妨设 $a_1 b_1 \neq 0$.

按矩阵秩的性质⑦, 由 $A=ab^T$ 有 $R(A) \leq R(a)=1$; 另一方面, A 的 $(1,1)$ 元 $a_1 b_1 \neq 0$, 知 $R(A) \geq 1$. 于是 $R(A)=1$.

再证必要性. 设 $A=(a_{ij})_{m \times n}, R(A)=1$, 并不妨设 $a_{kl} \neq 0$.

因 $R(A)=1$, 知 A 的所有二阶子式均为零, 故对 A 的任一元 $a_{ij} (i \neq k, j \neq l)$ 有

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{vmatrix} = 0, \text{ 即 } a_{kl} a_{ij} = a_{il} a_{kj}.$$

上式当 $i = k$ 或 $j = l$ 时也显然成立. 于是

$$\begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{ml} \end{pmatrix} (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}) = (a_{il}a_{kj})_{m \times n} = (a_{kl}a_{ij})_{m \times n} = a_{kl}A.$$

$$\text{令 } a = \frac{1}{a_{kl}} \begin{pmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{ml} \end{pmatrix}, b^T = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), \text{ 则因 } a_{kl} \neq 0, \text{ 故 } a, b^T \text{ 分别是非零}$$

列向量和非零行向量, 且有 $A = ab^T$.

20. 设 A 为列满秩矩阵, $AB = C$, 证明方程 $Bx = 0$ 与 $Cx = 0$ 同解.

证 若 x 满足 $Bx = 0$, 则 $ABx = 0$, 即 $Cx = 0$.

若 x 满足 $Cx = 0$, 即 $ABx = 0$, 因 A 为列满秩矩阵, 由定理 4 知方程 $Ay = 0$ 只有零解, 故 $Bx = 0$.

综上即知方程 $Bx = 0$ 与 $Cx = 0$ 同解.

21. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 证明方程 $AX = E_m$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = m$.

证 按定理 6 知, 方程 $AX = E_m$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = R(A, E_m)$, 而 (A, E_m) 含 m 行, 有 $R(A, E_m) \leq m$; 又 $R(A, E_m) \geq R(E_m) = m$, 因此 $R(A, E_m) = m$. 所以

方程 $AX = E_m$ 有解 $\Leftrightarrow R(A) = m$.

习题解答

1. 已知向量组

$$A: a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; B: b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

证明 B 组能由 A 组线性表示, 但 A 组不能由 B 组线性表示.

证 B 组能由 A 组线性表示 $\Leftrightarrow R(A, B) = R(A)$;

A 组不能由 B 组线性表示 $\Leftrightarrow R(B, A) > R(B)$;

于是, B 组能由 A 组线性表示, 且 A 组不能由 B 组线性表示 $\Leftrightarrow R(B, A) = R(A) > R(B)$. 具体计算如下:

$$(B, A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $R(B)=2, R(B, A)=3$, 并且上式右端矩阵的后三列所构成矩阵与矩阵 A 行等价, 继续对它作初等行变换, 得

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 $R(A)=3$. 合起来有 $R(B, A)=R(A)=3 > R(B)=2$.

2. 已知向量组

$$A: a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; B: b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

证明 A 组与 B 组等价.

证 记矩阵 $A=(a_1, a_2), B=(b_1, b_2, b_3)$. 因 A 组与 B 组等价 $\Leftrightarrow R(A)=R(B)=R(A, B)$ (或 $R(B, A)$), 故求矩阵 (B, A) 的行阶梯形以计算 3 个矩阵的秩.

$$(B, A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即知 $R(B)=R(B, A)=2$, 且 $R(A) \leq 2$. 又 a_1 与 a_2 不成比例, 故 $R(A)=2$. 因此, 向量组 A 与 B 等价.

3. 已知 $R(a_1, a_2, a_3)=2, R(a_2, a_3, a_4)=3$, 证明

(1) a_1 能由 a_2, a_3 线性表示;

(2) a_4 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

证一 (1) 由 $R(a_2, a_3) \geq R(a_2, a_3, a_4) - 1 = 3 - 1 = 2$, 知 $R(a_2, a_3)=2$. 又已知 $R(a_1, a_2, a_3)=2$, 故 $R(a_2, a_3, a_1)=R(a_1, a_2, a_3)=R(a_2, a_3)$, 由定理 1 知 a_1 能由 a_2, a_3 线性表示;

(2) $R(a_1, a_2, a_3, a_4) \geq R(a_2, a_3, a_4)=3 > R(a_1, a_2, a_3)$, 由定理 1 知 a_4 不能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

证二 (1) $R(a_2, a_3, a_4)=3 \Rightarrow$ 向量组 a_2, a_3, a_4 线性无关 $\Rightarrow a_2, a_3$ 线性无关 (整体无关则部分无关); 又,

$$R(a_1, a_2, a_3)=2 < 3 \Rightarrow \text{向量组 } a_1, a_2, a_3 \text{ 线性相关}.$$

于是, 由定理 5, a_1 必能由 a_2, a_3 (惟一地) 线性表示.

(2) 反证法: 若 a_4 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 而由 (1), a_1 可由 a_2, a_3 线性表示. 这样, a_4 也就能由 a_2, a_3 线性表示, 从而可知 a_2, a_3, a_4 线性相关. 于是 $R(a_2, a_3, a_4) < 3$, 此与 $R(a_2, a_3, a_4)=3$ 相矛盾.

4. 判定下列向量组是线性相关还是线性无关:

$$(1) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

解 记 (1)、(2) 中向量所构成的矩阵为 A .

$$(1) \det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow R(A) < 3 = \text{向量的个数}$

$\Rightarrow$ 向量组(1)线性相关(由定理4);

$$(2) \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$$

$\Rightarrow R(A) = 3 = \text{向量的个数}$

$\Rightarrow$ 向量组(2)线性无关 (由定理4).

5. 问 a 取什么值时下列向量组线性相关?

$$a_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}.$$

解 记 $A = (a_1, a_2, a_3)$, 则

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & a+1 & 0 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{c_1-c_2} \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2). \end{aligned}$$

于是当 $a = -1$ 或 $a = 2$ 时, $\det A = 0$, 即 $R(A) < 3$. 由定理4知此时向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关.

6. 设 a_1, a_2 线性无关, $a_1 + b, a_2 + b$ 线性相关, 求向量 b 用 a_1, a_2 线性表示的表示式.

解一 因 $a_1 + b, a_2 + b$ 线性相关, 故存在不全为零的常数 k_1, k_2 , 使

$$k_1(a_1 + b) + k_2(a_2 + b) = 0 \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow (k_1 + k_2)b = -k_1a_1 - k_2a_2.$$

因 a_1, a_2 线性无关, 故 $k_1 + k_2 \neq 0$, 不然, 由上式得

$$k_1a_1 + k_2a_2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0,$$

这与 k_1, k_2 不全为零矛盾. 于是由(4.5)式, 得

$$b = -\frac{k_1}{k_1 + k_2}a_1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2}a_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, k_1 + k_2 \neq 0.$$

解二 因 $a_1 + b, a_2 + b$ 线性相关, 故 $(a_1 + b) - (a_2 + b), a_2 + b$ 线性相

关,即 $a_1 - a_2, a_2 + b$ 线性相关. 又因 a_1, a_2 线性无关,故 $a_1 - a_2 \neq 0$,于是存在 λ 使

$$\begin{aligned} a_2 + b &= \lambda(a_1 - a_2) \\ \Rightarrow b &= \lambda a_1 - (\lambda + 1)a_2, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

这与解一的结果相同.

7. 设 a_1, a_2 线性相关, b_1, b_2 也线性相关,问 $a_1 + b_1, a_2 + b_2$ 是否一定线性相关? 试举例说明之.

解 向量组 $a_1 + b_1, a_2 + b_2$ 不一定线性相关. 例如令

$$\text{向量组 I: } a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{向量组 II: } b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

则这两向量组均线性相关,但向量组 $a_1 + b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 + b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 线性无关.

8. 举例说明下列各命题是错误的:

(1) 若向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关,则 a_1 可由 $a_2, \dots, a_m$ 线性表示.

(2) 若有不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_m b_m = 0$$

成立,则 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关, $b_1, b_2, \dots, b_m$ 亦线性相关.

(3) 若只有当 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 全为零时,等式

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = 0$$

才能成立,则 $a_1, \dots, a_m$ 线性无关, $b_1, \dots, b_m$ 亦线性无关.

(4) 若 $a_1, \dots, a_m$ 线性相关, $b_1, \dots, b_m$ 亦线性相关,则有不全为零的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, 使

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0; \quad \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = 0$$

同时成立.

答 命题(1)是错误的,反例:取向量 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则向量组 a_1, a_2 线性相关,因它含有零向量,但 a_1 并不能由 a_2 线性表示.

注 向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量能由其余向量线性表示,但并不指明是哪一个向量,更不是说任一个向量可由其余向量线性表示.

命题(2)是错误的,反例:取 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; 再取 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 则有

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0$$

成立,但 a_1, a_2 线性无关, b_1, b_2 也线性无关.

注 关系式 $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = 0$ (λ_i 不全为 0) 只能说明向量组 $a_1 + b_1, \cdots, a_m + b_m$ 线性相关.

命题(3)是错误的,反例:取 $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 此时若有

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0$$

成立,只有 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,但向量组 a_1, a_2 和向量组 b_1, b_2 都线性相关.

注 题设条件只能说明 $a_1 + b_1, \cdots, a_m + b_m$ 线性无关.

命题(4)是错误的,反例:取 $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 则向量组 a_1, a_2 和向量组 b_1, b_2 均线性相关. 但对此两向量组不存在不全为零的数 λ_1, λ_2 , 使

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0, \quad \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0$$

同时成立,因由上面第一式可得

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

于是, $\lambda_2 = 0$, 同理由第二式得 $\lambda_1 = 0$.

注 题设条件是齐次方程 $(a_1, \cdots, a_m)x = 0$ 及 $(b_1, \cdots, b_m)x = 0$ 都有非零解, 而结论则是这两个齐次方程有公共的非零解.

9. 设 $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, b_4 = a_4 + a_1$, 证明向量组 b_1, b_2, b_3, b_4 线性相关.

证一 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4$

$$= (a_1 + a_2) - (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) - (a_4 + a_1) = 0,$$

由定义,知向量组 b_1, b_2, b_3, b_4 线性相关.

证二 两向量组线性表示的矩阵形式为:

$$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4)K,$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{因 } \det K = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按 } r_1 \text{ 展开}} 1 - 1 = 0, \text{ 故 } R(K) < 4.$$

由矩阵秩的性质 7 知

$$R(b_1, b_2, b_3, b_4) \leq R(K) < 4,$$

由定理 4, 向量组 b_1, b_2, b_3, b_4 线性相关.

注 从证明可见, 不管 a_1, a_2, a_3, a_4 是否线性相关, b_1, b_2, b_3, b_4 总是线性相关的(参看例 4.1).

10. 设 $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \dots, b_r = a_1 + a_2 + \dots + a_r$, 且向量组 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关, 证明向量组 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 线性无关.

证 先把向量组 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 由向量组 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性表示的关系式写成矩阵形式:

$$(b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_2, \dots, a_r) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \\ = (a_1, a_2, \dots, a_r) K.$$

因 $\det K = 1$, 故 K 是可逆阵, 由矩阵秩的性质 4, 知

$$R(b_1, b_2, \dots, b_r) = R(a_1, a_2, \dots, a_r).$$

又因 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关, 由定理 4 知 $R(a_1, a_2, \dots, a_r) = r$, 从而有 $R(b_1, b_2, \dots, b_r) = r$. 再次运用定理 4 知向量组 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 线性无关.

11. 求下列向量组的秩, 并求一个最大无关组:

$$(1) a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 100 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$(2) a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 对 $A = (a_1, a_2, a_3)$ 作初等行变换, 求它的行阶梯形:

$$A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 2 & 100 & -4 \\ -1 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 4r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 82 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由此可知 $R(a_1, a_2, a_3) = 2$, 并且 a_1, a_2 是它的一个最大无关组.

$$(2) A = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -18 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知 $R(a_1, a_2, a_3) = 2$, 并且 a_1, a_2 是它的一个最大无关组.

12. 利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组, 并把其余列向量用最大无关组线性表示:

$$(1) \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 记 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_4 - r_1 \\ r_3 - r_2 \\ r_2 - 3r_1}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_4 - r_2 \\ r_4 - r_3}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 - 17r_3 \\ r_2 - 2r_3}} \begin{pmatrix} 25 & 31 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_1 - 31r_2} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \div 25} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

从 A 的行最简形可知: a_1, a_2, a_3 是 A 的列向量组的一个最大无关组; 而

$$a_4 = \frac{8}{5}a_1 - a_2 + 2a_3.$$

(2) 记 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - r_1]{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_1 - r_2]{r_2 \div 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

从上面 A 的行最简形可知: a_1, a_2, a_3 是 A 的列向量组的一个最大无关线; 而

$$a_4 = a_1 + 3a_2 - a_3, \quad a_5 = -a_2 + a_3.$$

13. 设向量组

$$a_1 = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

的秩为 2, 求 a, b .

解 对含参数 a 和 b 的矩阵 (a_3, a_4, a_1, a_2) 作初等行变换, 以求其行阶梯形.

$$\begin{aligned} (a_3, a_4, a_1, a_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & 3 & 3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 - 2a & b - 4 \\ 0 & -1 & 1 - a & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 - 2a & b - 4 \\ 0 & 0 & a - 2 & 5 - b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

于是

$$R(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$$

$$\Leftrightarrow R(a_3, a_4, a_1, a_2) = 2 \Leftrightarrow a = 2 \text{ 且 } b = 5.$$

注 把含参数的列放在不含参数的列后面, 常可简化计算.

14. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是一组 n 维向量, 已知 n 维单位坐标向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 能由它们线性表示, 证明 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性无关.

证 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 可由 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性表示

$$\Rightarrow n = R(e_1, e_2, \dots, e_n) \leq R(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n \quad (\text{由定理 3})$$

$$\Rightarrow R(a_1, a_2, \dots, a_n) = n$$

$\Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性无关 (由定理 4).

15. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是一组 n 维向量, 证明它们线性无关的充要条件是: 任一 n 维向量都可由它线性表示.

证 必要性: 任给 n 维向量 b , 则 n 维向量组 $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ 线性相关 (因它所含向量个数大于向量的维数). 又因 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性无关, 由定理 5(3), 可知向量 b 必可由 $a_1, a_2, \dots, a_n$ (惟一地) 线性表示.

充分性: 设任一 n 维向量能由 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性表示, 特别, n 维单位坐标向量 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 能由 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性表示, 由习题 14 知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性无关.

16. 设向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关, 且 $a_1 \neq 0$, 证明存在某个向量 a_k ($2 \leq k \leq m$), 使 a_k 能由 $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ 线性表示.

证一 因为向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关, 由定义知, 存在不全为零的数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m = 0. \quad (4.6)$$

按足标从大到小考察上式中系数 λ_i . 设其第一个不为零的数为 λ_k , 也即 $\lambda_k \neq 0$, 但 $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_m = 0$. 此足标 $k \geq 2$. 如若不然, 该式成为 $\lambda_1 a_1 = 0$. 由 $a_1 \neq 0$ 知 $\lambda_1 = 0$, 此与这些系数不全为零矛盾. 这时 (4.6) 式成为

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0, \text{ 且 } \lambda_k \neq 0, k \geq 2$$

$$\Rightarrow a_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} a_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} a_{k-1},$$

于是上述向量 a_k 即满足要求.

证二 记 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. 由题设, A 的列向量组线性相关, 故 $R(A) < m$. 设 $\tilde{A}$ 是 A 的行阶梯形, 则 $\tilde{A}$ 中一定存在不含非零首元的列 $\tilde{a}_k$. 注意到 $\tilde{A}$ 的第 1 列是含非零首元的, 故 $k \geq 2$. 因 $\tilde{a}_k$ 能由 $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{k-1}$ 线性表示, 故 A 中对应的 a_k 也能由 $a_1, \dots, a_{k-1}$ 线性表示.

17. 设向量组 $B: b_1, b_2, \dots, b_r$ 能由向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性表示为

$$(b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_2, \dots, a_s) K,$$

其中 K 为 $s \times r$ 矩阵, 且 A 组线性无关. 证明 B 组线性无关的充要条件是矩阵

K 的秩 $R(K) = r$.

证一 记 $A = (a_1, a_2, \dots, a_s), B = (b_1, b_2, \dots, b_r)$, 则有

$$B = AK. \quad (4.7)$$

必要性: 设向量组 B 线性无关, 知 $R(B) = r$. 又由 $B = AK$, 知 $R(K) \geq R(B)$. 但 K 含 r 列, 有 $R(K) \leq r$, 于是

$$r = R(B) \leq R(K) \leq r, \text{ 即 } R(K) = r.$$

充分性: 设 $R(K) = r$. 要证 B 组线性无关. 由于

$$Bx = 0 \Leftrightarrow AKx = 0$$

$$\Rightarrow Kx = 0 \quad (\text{因 } R(A) = s, \text{ 根据上章定理 4})$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad (\text{因 } R(K) = r, \text{ 根据上章定理 4}),$$

因此, 向量组 B 线性无关.

证二 由(4.7)式, 因 $R(A) = s$, A 为列满秩矩阵, 根据上章例 9 知 $R(B) = R(K)$. 于是

$$B \text{ 组线性无关} \Leftrightarrow R(B) = r \Leftrightarrow R(K) = r.$$

18. 设

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n, \\ \dots\dots\dots \\ \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}, \end{cases}$$

证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 等价.

证 列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 依次构成矩阵 A 和 B , 于是有

$$B = AK, \quad (4.8)$$

其中系数矩阵 K 为

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其行列式 $|K| = (n-1)(-1)^{n-1} \neq 0$ ($n \geq 2$) (见第一章习题 8(2)), 故 K 可逆.

由(4.8)式即得 $A = BK^{-1}$, 此表明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 能由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示 (其表示的系数矩阵为 K^{-1}), 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 等价.

注 当 $|K| = 0$ 时, 不能得出 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 不等价的结论.

19. 已知 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 x 满足 $A^3x = 3Ax - A^2x$, 且向量组 x, Ax, A^2x 线性无关.

(1) 记 $y = Ax, z = Ay, P = (x, y, z)$, 求三阶矩阵 B , 使 $AP = PB$;

(2) 求 $|A|$.

解 (1) 因矩阵 P 的列向量组线性无关, 故 P 可逆, 从而 $B = P^{-1}AP$. 本题的困难在于没有具体给出 A 和 P 的元素, 而是它们之间的一些关系式. 下面就利用这些关系式来计算 B .

$$AP = A(x, y, z) = (Ax, Ay, Az).$$

因 $Ax = y, Ay = z, Az = A^3x = 3Ax - A^2x = 3y - z$, 故

$$AP = (y, z, 3y - z)$$

$$= (x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

于是

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(其实, 矩阵 B 就是向量组 Ax, Ay, Az 由向量组 x, y, z 线性表示的系数矩阵).

(2) 由 $B = P^{-1}AP$, 两边取行列式, 便有 $|A| = |B| = 0$.

20. 求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$(3) nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n = 0.$$

解 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & -24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + 8r_2]{r_2 \div (-5)} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可知原方程的同解方程为

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 0, \\ -4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4x_3, \\ x_4 = 4x_2 - 3x_3. \end{cases}$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 8 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \\ 14 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[r_3+2r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} -19 & 0 & -2 & 1 \\ -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可得同解方程

$$\begin{cases} -19x_1 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 7x_1, \\ x_4 = 19x_1 + 2x_3. \end{cases}$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

注 解本题时, 矩阵的初等行变换与第三章中的比较, 已有了一些变化, 要求概念掌握得更加清晰, 初等变换运用得更加娴熟.

(3) $A = (n, n-1, \dots, 1)$, 可见 $R(A) = 1$, 从而有 $n - R(A) = n - 1$ 个线性无关的解构成此方程的基础解系, 并且由

$$x_n = -nx_1 - (n-1)x_2 - \dots - 2x_{n-1},$$

分别取

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

代入上式就得到基础解系:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -n \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ -(n-1) \end{pmatrix}, \dots, \xi_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

21. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, 求一个 4×2 矩阵 B , 使 $AB = O$, 且 $R(B) = 2$.

解 设 B 按列分块为 $B = (b_1, b_2)$. 因 $R(B) = 2$, 故 b_1, b_2 线性无关.

又因 $AB = O \Rightarrow A(b_1, b_2) = (0, 0) \Rightarrow Ab_1 = 0$ 且 $Ab_2 = 0 \Rightarrow b_1, b_2$ 是方程

$$Ax = 0 \quad (4.9)$$

的解; 并且这方程的系数矩阵 A 的秩 $R(A) = 2$. 于是可知 b_1, b_2 是它的一个基础解系.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 9 & -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

得

$$\begin{cases} x_2 = 5x_1 + 2x_4, \\ x_3 = 8x_1 + x_4, \end{cases}$$

分别取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得此方程的一个基础解系为

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是, 令

$$B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ 8 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

就满足题目的要求.

22. 求一个齐次线性方程, 使它的基础解系为

$$\xi_1 = (0, 1, 2, 3)^T, \quad \xi_2 = (3, 2, 1, 0)^T.$$

解 设所求齐次线性方程为

$$Ax = 0.$$

首先考虑此方程有多少个未知数? 有多少个方程? 因 ξ_1 是 4 维的, 故方程有 4 个未知数, 即矩阵 A 的列数等于 4. 另一方面, 因基础解系含 2 个向量, 故由定理 7 知 $R(A) = 4 - 2 = 2$, 因此方程的个数 $m \geq 2$ 个. 这样, 我们只需构造一个满足题设要求而行数最少的矩阵 A , 也即 A 取 2×4 矩阵, 且 $R(A) = 2$.

记 $B = (\xi_1, \xi_2)$, 那么

ξ_1, ξ_2 是方程 $Ax = 0$ 的基础解系

$$\Leftrightarrow AB = O, \text{ 且 } R(A) = 2$$

$$\Leftrightarrow B^T A^T = O, \text{ 且 } R(A^T) = 2.$$

$$\Leftrightarrow A^T \text{ 的两个列向量是 } B^T x = 0 \text{ 的一个基础解系 (因 } R(B) = 2).$$

$$\text{由 } B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

得基础解系为

$$\eta_1 = (1, -2, 1, 0)^T, \quad \eta_2 = (2, -3, 0, 1)^T,$$

故 A 可取为

$$A = \begin{pmatrix} \eta_1^T \\ \eta_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对应齐次线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

23. 设四元齐次方程组

$$\text{I: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \end{cases} \quad \text{II: } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

求(1) 方程组 I 与 II 的基础解系; (2) I 与 II 的公共解.

解 (1) 求方程组 I 的基础解系: 系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其基础解系可取为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

求方程组 II 的基础解系: 系数矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 故可取其基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 为 I 与 II 的公共解, 下面用两种方法求 x 的一

般表达式.

方法一 x 是 I 与 II 的公共解 $\Leftrightarrow x$ 是方程组 III 的解, 这里方程组 III 为 I 与 II 合起来的方程组, 即

$$\text{III:} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

其系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

取其基础解系为 $(-1, 1, 2, 1)^T$, 于是 I 与 II 的公共解为

$$x = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

方法二 以 I 的通解 $x = (-c_1, c_1, c_2, c_1)^T$ 代入 II 得

$$\begin{cases} -c_1 - c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 - c_2 + c_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow c_2 = 2c_1.$$

这表明 I 的解中所有形如 $(-c_1, c_1, 2c_1, c_1)^T$ 的解也是 II 的解, 从而是 I 和 II 的公共解. 于是 I 和 II 的公共解为

$$x = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

24. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = A$, E 为 n 阶单位矩阵, 证明

$$R(A) + R(A - E) = n.$$

提示: 利用矩阵秩的性质⑥和⑧.

证

$$A^2 = A$$

$$\Rightarrow A(A - E) = O$$

$$\Rightarrow R(A) + R(A - E) \leq n \quad (\text{矩阵秩的性质⑧}).$$

另一方面, 由矩阵秩的性质⑥, 知

$$R(A) + R(E - A) \geq R(A + (E - A)) = R(E) = n,$$

因 $R(E - A) = R(A - E)$, 故由以上两个不等式知, $R(A) + R(A - E) = n$.

25. 设 A 为 n 阶 ($n \geq 2$) 矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 证明

$$R(A^*) = \begin{cases} n, & \text{当 } R(A) = n, \\ 1, & \text{当 } R(A) = n - 1, \\ 0, & \text{当 } R(A) \leq n - 2. \end{cases}$$

证 (1) 当 $R(A) = n$ 时, $|A| \neq 0$. 由习题二题 24, 得

$$|A^*| = |A|^{n-1} \neq 0,$$

从而

$$R(A^*) = n;$$

(2) 当 $R(A) \leq n - 2$ 时, 由矩阵秩的定义知 A 的所有 $n - 1$ 阶子式即 A^* 的任一元素均为零, 即 $A^* = O$, 从而 $R(A^*) = 0$;

(3) 当 $R(A) = n - 1$ 时, 由矩阵秩的定义, A 中至少有一个 $n - 1$ 阶子式不为零, 也即 A^* 中至少有一个元素不为零, 故 $R(A^*) \geq 1$.

另一方面, 因 $R(A) = n - 1$, 有 $|A| = 0$. 由 $AA^* = |A|E$ 知,

$$AA^* = O.$$

由矩阵秩的性质⑧得

$$R(A) + R(A^*) \leq n,$$

把 $R(A) = n - 1$ 代入上式, 得 $R(A^*) \leq 1$. 综合以上两个关于 $R(A^*)$ 的不等式, 便有 $R(A^*) = 1$.

注 本题的结论很有用, 值得记取.

26. 求下列非齐次方程组的一个解及对应的齐次方程组的基础解系:

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$$

解 (1) 增广矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -22 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 + 2r_2]{r_2 \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + 2r_3]{r_3 \div (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

据此, 得原方程组的同解方程

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 8, \\ x_2 = x_3 + 13, \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

取 $x_3 = 0$ 得特解 $\eta = \begin{pmatrix} -8 \\ 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; 取 $x_3 = 1$ 得对应齐次方程基础解系 $\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) 增广矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 5r_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & -56 \\ 0 & 14 & -2 & 7 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + 2r_2]{r_2 \div (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & -7 & 1 & -\frac{7}{2} & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_4 = -17, \\ -7x_2 + x_3 - \frac{7}{2}x_4 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -9x_2 - 4x_4 - 17, \\ x_3 = 7x_2 + \frac{7}{2}x_4 + 14. \end{cases}$$

令 $x_2 = x_4 = 0$ 得特解 $\eta = \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$, 分别令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得对应齐次方

程的基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

27. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量, 且

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

求该方程组的通解.

解 记该非齐次方程组为 $Ax = b$, 对应齐次方程为

$$Ax = 0.$$

因 $R(A)=3$, 由定理 7 知此齐次方程的基础解系由 1 个非零解构成, 也即它的任一非零解都是它的基础解系. 另一方面, 记向量 $\xi=2\eta_1-(\eta_2+\eta_3)$, 则

$$\begin{aligned} A\xi &= A(2\eta_1 - \eta_2 - \eta_3) \\ &= 2A\eta_1 - A\eta_2 - A\eta_3 = 2b - b - b = 0, \end{aligned}$$

且直接计算得 $\xi=(3,4,5,6)^T \neq 0$. 这样, ξ 就是它的一个基础解系. 根据非齐次方程组解的结构知, 原方程组的通解为

$$x = k\xi + \eta_1 = k \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

28. 设有向量组 $A: a_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ 及向量 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ -1 \end{pmatrix}$,

问 α, β 为何值时

- (1) 向量 b 不能由向量组 A 线性表示;
- (2) 向量 b 能由向量组 A 线性表示, 且表示式惟一;
- (3) 向量 b 能由向量组 A 线性表示, 且表示式不惟一, 并求一般表示式.

解 记矩阵 $A=(a_1, a_2, a_3)$, 那么方程

$$Ax = b \tag{4.10}$$

有解 $\Leftrightarrow b$ 可由向量组 A 线性表示, 因而本题可以归结为含参数的非齐次线性方程的求解(可参看第三章相关习题).

(1) 当方程(4.10)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 即 } \alpha \neq -4 \text{ 时}$$

方程(4.10)有惟一解, 从而向量 b 能由向量组 A 线性表示, 且表示式惟一;

(2) 当 $\alpha = -4$ 时, 增广矩阵

$$\begin{aligned} (A, b) &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \beta \\ 10 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_1 \leftrightarrow r_2, r_2+2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1+2\beta \\ 0 & 0 & -1 & -1-5\beta \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[r_1-r_2]{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1-\beta \\ 0 & 0 & 1 & 1+2\beta \\ 0 & 0 & 0 & -3\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

于是当 $\beta \neq 0$ 时, 方程(4.10)无解, 从而向量 b 不能由向量组 A 线性表示; 当

$\beta=0$ 时,

$$(A, b) \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$R(A) = R(A, b) = 2 < 3$, 方程(4.10)有无穷多解, 从而向量 b 可由向量组 A 线性表示, 且表示式不惟一.

(3) 因方程(4.10)的通解为

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -(2c+1) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

故 b 由向量组 A 线性表示的一般表示式为

$$\begin{aligned} b &= Ax = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} c \\ -(2c+1) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= ca_1 - (2c+1)a_2 + a_3, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

29. 设

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

证明三直线

$$\begin{cases} l_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ l_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad (a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i=1, 2, 3) \\ l_3: a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

相交于一点的充要条件为向量组 a, b 线性无关, 且向量组 a, b, c 线性相关.

证

三直线 l_1, l_2, l_3 相交于一点

$$\Leftrightarrow \text{非齐次方程 } (a, b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -c \text{ 有惟一解}$$

$$\Leftrightarrow R(a, b) = R(a, b, c) = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{向量组 } a, b \text{ 线性无关, 且向量组 } a, b, c \text{ 线性相关.}$$

30. 设矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, 其中 a_2, a_3, a_4 线性无关, $a_1 = 2a_2 - a_3$. 向量 $b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, 求方程 $Ax = b$ 的通解.

解 显然, 这是一个四元方程. 先决定系数矩阵 A 的秩. 因 a_2, a_3, a_4 线性无关, 故 $R(A) \geq 3$. 又

a_1 能由 a_2, a_3 线性表示

$\Rightarrow a_1, a_2, a_3$ 线性相关

$\Rightarrow a_1, a_2, a_3, a_4$ 线性相关(部分相关则整体相关)

$\Rightarrow R(A) \leq 3$.

综合上面两个不等式,有 $R(A) = 3$, 从而原方程的基础解系所含向量个数为 $4 - 3 = 1$. 进一步,

$$a_1 = 2a_2 - a_3 \Leftrightarrow a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$$

$\Leftrightarrow x = (1, -2, 1, 0)^T$ 是方程 $Ax = 0$ 的解

$\Rightarrow x = (1, -2, 1, 0)^T$ 是它的基础解系,

又

$$b = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$\Leftrightarrow x = (1, 1, 1, 1)^T$ 是方程 $Ax = b$ 的解,

于是由非齐次线性方程解的结构,原方程的通解为

$$x = c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}.$$

31. 设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 证明

(1) $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

证 (1) 设有关系式

$$k_0 \eta^* + k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} = 0, \quad (4.11)$$

用矩阵 A 左乘上式两边, 并注意题设条件, 得

$$\begin{aligned} 0 &= A(k_0 \eta^* + k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}) \\ &= k_0 A\eta^* + k_1 A\xi_1 + \dots + k_{n-r} A\xi_{n-r} = k_0 b, \end{aligned}$$

但 $b \neq 0$, 由上式知 $k_0 = 0$, 于是, (4.11) 式成为

$$k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} = 0.$$

因向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是对应齐次方程的基础解系, 从而线性无关, 于是 $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-r} = 0$, 由定义知 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关.

(2) 设有关系式

$$\lambda_0 \eta^* + \lambda_1 (\eta^* + \xi_1) + \dots + \lambda_{n-r} (\eta^* + \xi_{n-r}) = 0,$$

也即

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r}) \eta^* + \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_{n-r} \xi_{n-r} = 0.$$

由(1), 向量组 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关, 故 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$ 并且 $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-r} = 0$, 于是, λ_0 也等于 0, 故所给向量组线性无关.

注 显然,因 $A(\eta^* + \xi_i) = A\eta^* + A\xi_i = b$, 故 $\eta^* + \xi_i$ 是原方程 $Ax = b$ 的解. 于是本题的意义在于: 若有解的非齐次线性方程的系数矩阵的秩为 r , 则它有 $n - r + 1$ 个线性无关的解. 而习题 33 则进一步揭示它恰好有 $n - r + 1$ 个线性无关的解, 并且它的任一解都可由它们线性表示.

32. 设 $\eta_1, \dots, \eta_s$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的 s 个解, $k_1, \dots, k_s$ 为实数, 满足 $k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1$. 证明

$$x = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_s \eta_s$$

也是它的解.

$$\begin{aligned} \text{证 因 } Ax &= A(k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_s \eta_s) \\ &= k_1 (A\eta_1) + k_2 (A\eta_2) + \dots + k_s (A\eta_s) \\ &= k_1 b + k_2 b + \dots + k_s b = (k_1 + k_2 + \dots + k_s) b = b, \end{aligned}$$

故 $x = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_s \eta_s$ 也是方程 $Ax = b$ 的解.

33. 设非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵的秩为 r , 向量 $\eta_1, \dots, \eta_{n-r+1}$ 是它的 $n - r + 1$ 个线性无关的解 (见 31 题之注). 试证它的任一解可表示为

$$x = k_1 \eta_1 + \dots + k_{n-r+1} \eta_{n-r+1} \quad (\text{其中 } k_1 + \dots + k_{n-r+1} = 1).$$

证 首先, 由 32 题可知, 上式向量 x 满足所给方程.

另一方面, 设向量 β 是原方程的任一解, 记向量 $\xi_i = \eta_i - \eta_{n-r+1}$, $i = 1, 2, \dots, n - r$, 则 ξ_i 是对应齐次方程的解, 且向量组 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关 (其理由与习题 31 的证明完全类似, 读者可作为练习), 于是, 它就是对应齐次方程的一个基础解系. 这样, 向量 β 就可由此基础解系和原方程的特解 η_{n-r+1} 线性表示, 即存在数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-r}$, 使

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda_1 \xi_1 + \dots + \lambda_{n-r} \xi_{n-r} + \eta_{n-r+1} \\ &= \lambda_1 (\eta_1 - \eta_{n-r+1}) + \dots + \lambda_{n-r} (\eta_{n-r} - \eta_{n-r+1}) + \eta_{n-r+1} \\ &= \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r} + (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-r}) \eta_{n-r+1} \\ &= \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_{n-r} \eta_{n-r} + \lambda_{n-r+1} \eta_{n-r+1}, \end{aligned}$$

上式中, $\lambda_{n-r+1} \stackrel{\Delta}{=} 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-r}$, 即 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-r+1} = 1$.

注 此题事实上给出了非齐次线性方程组的通解的另一表达式.

34. 设 $V_1 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1 + \dots + x_n = 0\}$,
 $V_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ 满足 } x_1 + \dots + x_n = 1\}$,

问 V_1, V_2 是不是向量空间? 为什么?

解 (1) V_1 是向量空间, 理由是

(i) V_1 非空: $(0, 0, \dots, 0)^T \in V_1$;

(ii) V_1 对于向量的加法和数乘封闭. 事实上,

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in V_1,$$

则有 $(x+y) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)^T, \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)^T$.

$$\text{因} \quad \sum_{k=1}^n (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k = 0 + 0 = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=1}^n x_k = \lambda \cdot 0 = 0,$$

故 $x+y \in V_1, \quad \lambda x \in V_1$.

(2) V_2 不是向量空间. 事实上, 取

$$a = (1, 0, \dots, 0)^T, \quad b = (0, 1, \dots, 0)^T \in V_2,$$

那么 $a+b = (1, 1, \dots, 0)^T \notin V_2$, 即 V_2 对向量加法不封闭.

35. 试证: 由 $a_1 = (0, 1, 1)^T, a_2 = (1, 0, 1)^T, a_3 = (1, 1, 0)^T$ 所生成的向量空间就是 $\mathbb{R}^3$.

证 所生成的向量空间记作 L , 显然 $L \subset \mathbb{R}^3$. 另一方面, $\forall b \in \mathbb{R}^3$, 则因 $\det(a_1, a_2, a_3) = 2 \neq 0$, 故 a_1, a_2, a_3 线性无关. 但由定理 5, 向量组 a_1, a_2, a_3, b 线性相关, 于是 b 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 也即 $b \in L$. 所以 $\mathbb{R}^3 \subset L$. 综上知 $L = \mathbb{R}^3$.

36. 由 $a_1 = (1, 1, 0, 0)^T, a_2 = (1, 0, 1, 1)^T$ 所生成的向量空间记作 L_1 , 由 $b_1 = (2, -1, 3, 3)^T, b_2 = (0, 1, -1, -1)^T$ 所生成的向量空间记作 L_2 , 试证 $L_1 = L_2$.

证 因对应分量不成比例, 故 a_1, a_2 线性无关, b_1, b_2 也线性无关. 又因

$$(a_1, a_2, b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_2]{r_2 - r_1, r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $R(a_1, a_2) = R(b_1, b_2) = R(a_1, a_2, b_1, b_2) = 2$, 由定理 2 之推论, 知向量组 a_1, a_2 与 b_1, b_2 等价, 从而

$$L_1 = L_2.$$

37. 验证 $a_1 = (1, -1, 0)^T, a_2 = (2, 1, 3)^T, a_3 = (3, 1, 2)^T$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基, 并把 $v_1 = (5, 0, 7)^T, v_2 = (-9, -8, -13)^T$ 用这个基线性表示.

解 本题本质上就是例 11 及习题 12. 只不过是向量空间的语言来叙述. 因

$$(a_1, a_2, a_3, v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & -17 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}$$

第五章 相似矩阵及二次型

1. 试用施密特法把下列向量组正交化:

$$(1) (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix};$$

解 根据施密特正交化方法,

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 根据施密特正交化方法,

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. 下列矩阵是不是正交阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix};$$

解 此矩阵的第一个行向量非单位向量, 故不是正交阵.

$$(2) \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

解 该方阵每一个行向量均是单位向量, 且两两正交, 故为正交阵.

3. 设 x 为 n 维列向量, $x^T x = 1$, 令 $H = E - 2xx^T$, 证明 H 是对称的正交阵.

证明 因为

$$\begin{aligned} H^T &= (E - 2xx^T)^T = E - 2(xx^T)^T = E - 2(xx^T)^T \\ &= E - 2(x^T)^T x^T = E - 2xx^T, \end{aligned}$$

所以 H 是对称矩阵.

因为

$$\begin{aligned} H^T H &= H H = (E - 2xx^T)(E - 2xx^T) \\ &= E - 2xx^T - 2xx^T + (2xx^T)(2xx^T) \\ &= E - 4xx^T + 4x(x^T x)x^T \\ &= E - 4xx^T + 4xx^T \\ &= E, \end{aligned}$$

所以 H 是正交矩阵.

4. 设 A 与 B 都是 n 阶正交阵, 证明 AB 也是正交阵.

证明 因为 A, B 是 n 阶正交阵, 故 $A^{-1} = A^T, B^{-1} = B^T$,

$$(AB)^T(AB)=B^T A^T AB=B^{-1} A^{-1} AB=E,$$

故 AB 也是正交阵.

5. 求下列矩阵的特征值和特征向量:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{解 } |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3,$$

故 A 的特征值为 $\lambda=-1$ (三重).

对于特征值 $\lambda=-1$, 由

$$A+E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A+E)x=0$ 的基础解系 $p_1=(1, 1, -1)^T$, 向量 p_1 就是对应于特征值 $\lambda=-1$ 的特征值向量.

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{解 } |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-9),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=-1, \lambda_3=9$.

对于特征值 $\lambda_1=0$, 由

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $Ax=0$ 的基础解系 $p_1=(-1, -1, 1)^T$, 向量 p_1 是对应于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征值向量.

对于特征值 $\lambda_2=-1$, 由

$$A+E=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A+E)x=0$ 的基础解系 $p_2=(-1, 1, 0)^T$, 向量 p_2 就是对应于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征值向量.

对于特征值 $\lambda_3=9$, 由

$$A-9E=\begin{pmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A-9E)x=0$ 的基础解系 $p_3=(1/2, 1/2, 1)^T$, 向量 p_3 就是对应于特征值 $\lambda_3=9$ 的特征值向量.

$$(3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{解 } |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2,$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=\lambda_4=1$.

对于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, 由

$$A+E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A+E)x=0$ 的基础解系 $p_1=(1, 0, 0, -1)^T$, $p_2=(0, 1, -1, 0)^T$, 向量 p_1 和 p_2 是对应于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的线性无关特征值向量.

对于特征值 $\lambda_3=\lambda_4=1$, 由

$$A-E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得方程 $(A-E)x=0$ 的基础解系 $p_3=(1, 0, 0, 1)^T$, $p_4=(0, 1, 1, 0)^T$, 向量 p_3 和 p_4 是对应于特征值 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 的线性无关特征向量.

6. 设 A 为 n 阶矩阵, 证明 A^T 与 A 的特征值相同.

证明 因为

$$|A^T - \lambda E| = |(A - \lambda E)^T| = |A - \lambda E|^T = |A - \lambda E|,$$

所以 A^T 与 A 的特征多项式相同, 从而 A^T 与 A 的特征值相同.

7. 设 n 阶矩阵 A, B 满足 $R(A)+R(B)<n$, 证明 A 与 B 有公共的特征值, 有公共的特征向量.

证明 设 $R(A)=r, R(B)=t$, 则 $r+t<n$.

若 $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 显然它们是 A 的对应于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

类似地, 设 $b_1, b_2, \dots, b_{n-t}$ 是齐次方程组 $Bx=0$ 的基础解系, 则它们是 B 的对应于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

由于 $(n-r)+(n-t)=n+(n-r-t)>n$, 故 $a_1, a_2, \dots, a_{n-r}, b_1, b_2, \dots, b_{n-t}$ 必线性相关. 于是有不全为 0 的数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}, l_1, l_2, \dots, l_{n-t}$, 使

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{n-r} a_{n-r} + l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_{n-t} b_{n-t} = 0.$$

记 $\gamma = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{n-r} a_{n-r} = -(l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_{n-t} b_{n-t})$,

则 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 不全为 0, 否则 $l_1, l_2, \dots, l_{n-t}$ 不全为 0, 而

$$l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_{n-t} b_{n-t} = 0,$$

与 $b_1, b_2, \dots, b_{n-t}$ 线性无关相矛盾.

因此, $\gamma \neq 0$, γ 是 A 的也是 B 的关于 $\lambda=0$ 的特征向量, 所以 A 与 B

有公共的特征值, 有公共的特征向量.

8. 设 $A^2-3A+2E=O$, 证明 A 的特征值只能取 1 或 2.

证明 设 λ 是 A 的任意一个特征值, x 是 A 的对应于 λ 的特征向量, 则

$$(A^2-3A+2E)x=\lambda^2x-3\lambda x+2x=(\lambda^2-3\lambda+2)x=0.$$

因为 $x \neq 0$, 所以 $\lambda^2-3\lambda+2=0$, 即 λ 是方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ 的根, 也就是说 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$.

9. 设 A 为正交阵, 且 $|A|=-1$, 证明 $\lambda=-1$ 是 A 的特征值.

证明 因为 A 为正交矩阵, 所以 A 的特征值为 -1 或 1 .

因为 $|A|$ 等于所有特征值之积, 又 $|A|=-1$, 所以必有奇数个特征值为 -1 , 即 $\lambda=-1$ 是 A 的特征值.

10. 设 $\lambda \neq 0$ 是 m 阶矩阵 $A_{m \times n} B_{n \times m}$ 的特征值, 证明 λ 也是 n 阶矩阵 BA 的特征值.

证明 设 x 是 AB 的对应于 $\lambda \neq 0$ 的特征向量, 则有

$$(AB)x=\lambda x,$$

于是 $B(AB)x=B(\lambda x),$

或 $BA(Bx)=\lambda(Bx),$

从而 λ 是 BA 的特征值, 且 Bx 是 BA 的对应于 λ 的特征向量.

11. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 求 $|A^3-5A^2+7A|$.

解 令 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda$, 则 $\varphi(1)=3, \varphi(2)=2, \varphi(3)=3$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值, 故

$$|A^3-5A^2+7A|=|\varphi(A)|=\varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdot \varphi(3)=3 \times 2 \times 3=18.$$

12. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, -3 , 求 $|A^*+3A+2E|$.

解 因为 $|A|=1 \times 2 \times (-3) = -6 \neq 0$, 所以 A 可逆, 故

$$A^* = |A|A^{-1} = -6A^{-1},$$

$$A^* + 3A + 2E = -6A^{-1} + 3A + 2E.$$

令 $\varphi(\lambda) = -6\lambda^{-1} + 3\lambda^2 + 2$, 则 $\varphi(1) = -1$, $\varphi(2) = 5$, $\varphi(-3) = -5$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值, 故

$$\begin{aligned}|A^* + 3A + 2E| &= |-6A^{-1} + 3A + 2E| = |\varphi(A)| \\ &= \varphi(1) \cdot \varphi(2) \cdot \varphi(-3) = -1 \times 5 \times (-5) = 25.\end{aligned}$$

13. 设 A 、 B 都是 n 阶矩阵, 且 A 可逆, 证明 AB 与 BA 相似.

证明 取 $P=A$, 则

$$P^{-1}ABP = A^{-1}ABA = BA,$$

即 AB 与 BA 相似.

14. 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 可相似对角化, 求 x .

解 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & x \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-6),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

因为 A 可相似对角化, 所以对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$, 齐次线性方程组 $(A-E)x=0$ 有两个线性无关的解, 因此 $R(A-E)=1$. 由

$$(A-E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & x \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知当 $x=3$ 时 $R(A-E)=1$, 即 $x=3$ 为所求.

15. 已知 $p=(1, 1, -1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 求参数 a, b 及特征向量 p 所对应的特征值;

解 设 λ 是特征向量 p 所对应的特征值, 则

$$(A-\lambda E)p=0, \text{ 即 } \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & a-\lambda & 3 \\ -1 & b & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

解之得 $\lambda=-1, a=-3, b=0$.

(2) 问 A 能不能相似对角化? 并说明理由.

解 由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$.

由

$$A-E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $R(A-E)=2$, 所以齐次线性方程组 $(A-E)x=0$ 的基础解系只有一个解向量. 因此 A 不能相似对角化.

16. 试求一个正交的相似变换矩阵, 将下列对称阵化为对角阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

解 将所给矩阵记为 A . 由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+2),$$

得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-2, \lambda_2=1, \lambda_3=4$.

对于 $\lambda_1=-2$, 解方程 $(A+2E)x=0$, 即

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得特征向量 $(1, 2, 2)^T$, 单位化得 $p_1=(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$.

对于 $\lambda_2=1$, 解方程 $(A-E)x=0$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得特征向量 $(2, 1, -2)^T$, 单位化得 $p_2=(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})^T$.

对于 $\lambda_3=4$, 解方程 $(A-4E)x=0$, 即

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

得特征向量 $(2, -2, 1)^T$, 单位化得 $p_3=(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$.

于是有正交阵 $P=(p_1, p_2, p_3)$, 使 $P^{-1}AP=\text{diag}(-2, 1, 4)$.

$$(2) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

解 将所给矩阵记为 A . 由

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

得矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=10$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$, 解方程 $(A-E)x=0$, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得线性无关特征向量 $(-2, 1, 0)^T$ 和 $(2, 0, 1)^T$, 将它们正交化、单位化得

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T, \quad p_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, 4, 5)^T.$$

对于 $\lambda_3=10$, 解方程 $(A-10E)x=0$, 即

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $(-1, -2, 2)^T$, 单位化得 $p_3 = \frac{1}{3}(-1, -2, 2)^T$.

于是有正交阵 $P=(p_1, p_2, p_3)$, 使 $P^{-1}AP=\text{diag}(1, 1, 10)$.

17. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{pmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{pmatrix}$ 相似, 求 x, y , 并求

一个正交阵 P , 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

解 已知相似矩阵有相同的特征值. 显然 $\lambda=5, \lambda=-4, \lambda=y$ 是 Λ 的特征值, 故它们也是 A 的特征值. 因为 $\lambda=-4$ 是 A 的特征值, 所以

$$|A+4E| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & x+4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 9(x-4) = 0,$$

解之得 $x=4$.

已知相似矩阵的行列式相同, 因为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -100, \quad |\Lambda| = \begin{vmatrix} 5 & & \\ & -4 & \\ & & y \end{vmatrix} = -20y,$$

所以 $-20y=-100, y=5$.

对于 $\lambda=5$, 解方程 $(A-5E)x=0$, 得两个线性无关的特征向量 $(1, 0, -1)^T, (1, -2, 0)^T$. 将它们正交化、单位化得

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T, \quad p_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, -4, 1)^T.$$

对于 $\lambda=-4$, 解方程 $(A+4E)x=0$, 得特征向量 $(2, 1, 2)^T$, 单位化得

$$p_3 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)^T.$$

于是有正交矩阵 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

18. 设3阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-2, \lambda_3=1$; 对应的特征向量依次为 $p_1=(0, 1, 1)^T, p_2=(1, 1, 1)^T, p_3=(1, 1, 0)^T$, 求 A .

解 令 $P=(p_1, p_2, p_3)$, 则 $P^{-1}AP = \text{diag}(2, -2, 1) = \Lambda, A = P\Lambda P^{-1}$.

因为

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

所以 $A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$

19. 设3阶对称阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=0$; 对应 λ_1, λ_2 的特征向量依次为 $p_1=(1, 2, 2)^T, p_2=(2, 1, -2)^T$, 求 A .

解 设 $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$, 则 $Ap_1=2p_1, Ap_2=-2p_2$, 即

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_3 + 2x_5 + 2x_6 = 2 \end{cases}, \text{---①}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_2 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ 2x_3 + x_5 - 2x_6 = 2 \end{cases}, \text{---②}$$

再由特征值的性质, 有

$$x_1+x_4+x_6=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0. \text{ ---③}$$

由①②③解得

$$x_1=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x_6, \quad x_2=\frac{1}{2}x_6, \quad x_3=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}x_6,$$

$$x_4=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}x_6, \quad x_5=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}x_6.$$

令 $x_6=0$, 得 $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{2}{3}$, $x_4=\frac{1}{3}$, $x_5=\frac{2}{3}$.

因此
$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

20. 设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=6$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=3$, 与特征值 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $p_1=(1, 1, 1)^T$, 求 A .

解 设
$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}.$$

因为 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $p_1=(1, 1, 1)^T$, 所以有

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_2+x_4+x_5=6 \\ x_3+x_5+x_6=6 \end{cases} \text{ ---①.}$$

$\lambda_2=\lambda_3=3$ 是 A 的二重特征值, 根据实对称矩阵的性质定理知

$R(A-3E)=1$. 利用①可推出

$$A-3E=\begin{pmatrix} x_1-3 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4-3 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_4-3 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6-3 \end{pmatrix}.$$

因为 $R(A-3E)=1$, 所以 $x_2=x_4-3=x_5$ 且 $x_3=x_5=x_6-3$, 解之得

$$x_2=x_3=x_5=1, \quad x_1=x_4=x_6=4.$$

因此
$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

21. 设 $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $a_1 \neq 0$, $A=aa^T$.

(1)证明 $\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值;

证明 设 λ 是 A 的任意一个特征值, x 是 A 的对应于 λ 的特征向量, 则有

$$Ax=\lambda x,$$

$$\lambda^2 x = A^2 x = aa^T aa^T x = a^T a Ax = \lambda a^T a x,$$

于是可得 $\lambda^2 = \lambda a^T a$, 从而 $\lambda=0$ 或 $\lambda=a^T a$.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的所有特征值, 因为 $A=aa^T$ 的主对角线上元素为 $a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2$, 所以

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a^T a = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

这说明在 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 中有且只有一个等于 $a^T a$, 而其余 $n-1$ 个全为 0, 即 $\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值.

(2)求 A 的非零特征值及 n 个线性无关的特征向量.

解 设 $\lambda_1=a^T a, \lambda_2=\dots=\lambda_n=0$.

因为 $Aa=aa^T a=(a^T a)a=\lambda_1 a$, 所以 $p_1=a$ 是对应于 $\lambda_1=a^T a$ 的特征向量

对于 $\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$, 解方程 $Ax=0$, 即 $aa^T x=0$. 因为 $a \neq 0$, 所以 $a^T x=0$, 即 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$, 其线性无关解为

$$p_2 = (-a_2, a_1, 0, \dots, 0)^T,$$

$$p_3 = (-a_3, 0, a_1, \dots, 0)^T,$$

$$\dots,$$

$$p_n = (-a_n, 0, 0, \dots, a_1)^T.$$

因此 n 个线性无关特征向量构成的矩阵为

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

22. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 求 A^{100} .

解 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=5, \lambda_3=-5$.

对于 $\lambda_1=1$, 解方程 $(A-E)x=0$, 得特征向量 $p_1=(1, 0, 0)^T$.

对于 $\lambda_2=5$, 解方程 $(A-5E)x=0$, 得特征向量 $p_2=(2, 1, 2)^T$.

对于 $\lambda_3=-5$, 解方程 $(A+5E)x=0$, 得特征向量 $p_3=(1, -2, 1)^T$.

令 $P=(p_1, p_2, p_3)$, 则

$$P^{-1}AP = \text{diag}(1, 5, -5) = \Lambda,$$

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

$$A^{100} = P\Lambda^{100}P^{-1}.$$

因为

$$\Lambda^{100} = \text{diag}(1, 5^{100}, 5^{100}),$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} A^{100} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5^{100} & \\ & & 5^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^{100}-1 \\ 0 & 5^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

23. 在某国, 每年有比例为 p 的农村居民移居城镇, 有比例为 q 的城镇居民移居农村, 假设该国总人口数不变, 且上述人口迁移的规

律也不变. 把 n 年后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 $y_n (x_n + y_n = 1)$.

(1) 求关系式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 中的矩阵 A ;

解 由题意知

$$x_{n+1} = x_n + qy_n - px_n = (1-p)x_n + qy_n,$$

$$y_{n+1} = y_n + px_n - qy_n = px_n + (1-q)y_n,$$

可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

因此 $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等, 即 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$, 求 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

解 由 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 可知 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-1+p+q),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=r$, 其中 $r=1-p-q$.

对于 $\lambda_1=1$, 解方程 $(A-E)x=0$, 得特征向量 $p_1=(q, p)^T$.

对于 $\lambda_2=r$, 解方程 $(A-rE)x=0$, 得特征向量 $p_2=(-1, 1)^T$.

令 $P=(p_1, p_2)=\begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP = \text{diag}(1, r) = \Lambda,$$

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1}.$$

于是 $A^n = \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & -1 \\ p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -p & q \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+pr'' & q-qr'' \\ p-pr'' & p+qr'' \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+pr'' & q-qr'' \\ p-pr'' & p+qr'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2(p+q)} \begin{pmatrix} 2q+(p-q)r'' \\ 2p+(q-p)r'' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

24. (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, **求** $\varphi(A) = A^{10} - 5A^9$;

解 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-5),$$

得 A **的特征值为** $\lambda_1=1, \lambda_2=5$.

对于 $\lambda_1=1$, **解方程** $(A-E)x=0$, **得单位特征向量** $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

对于 $\lambda_2=5$, **解方程** $(A-5E)x=0$, **得单位特征向量** $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$.

于是有正交矩阵 $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, **使得** $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 5) = \Lambda$,

从而 $A = P\Lambda P^{-1}, A^k = P\Lambda^k P^{-1}$. **因此**

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= P\varphi(\Lambda)P^{-1} = P(\Lambda^{10} - 5\Lambda^9)P^{-1} \\
&= P[\text{diag}(1, 5^{10}) - 5\text{diag}(1, 5^9)]P^{-1} \\
&= P\text{diag}(-4, 0)P^{-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, **求** $\varphi(A) = A^{10} - 6A^9 + 5A^8$.

解 求得正交矩阵为

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

使得 $P^{-1}AP = \text{diag}(-1, 1, 5) = \Lambda$, $A = P\Lambda P^{-1}$. 于是

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= P\varphi(\Lambda)P^{-1} = P(\Lambda^{10} - 6\Lambda^9 + 5\Lambda^8)P^{-1} \\ &= P[\Lambda^8(\Lambda - E)(\Lambda - 5E)]P^{-1} \\ &= P\text{diag}(1, 1, 5^8)\text{diag}(-2, 0, 4)\text{diag}(-6, -4, 0)P^{-1} \\ &= P\text{diag}(12, 0, 0)P^{-1} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

25. 用矩阵记号表示下列二次型:

(1) $f = x^2 + 4xy + 4y^2 + 2xz + z^2 + 4yz$,

解 $f = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

(2) $f = x^2 + y^2 - 7z^2 - 2xy - 4xz - 4yz$,

解 $f = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

(3) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_4$.

解 $f = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$

26. 写出下列二次型的矩阵:

(1) $f(x) = x^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x$;

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(2) f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

27. 求一个正交变换将下列二次型化成标准形:

$$(1) f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3;$$

解 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. 由

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda),$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=5, \lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=2$ 时, 解方程 $(A-2E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $(1, 0, 0)^T$. 取 $\mathbf{p}_1 = (1, 0, 0)^T$.

当 $\lambda_2=5$ 时, 解方程 $(A-5E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-5E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $(0, 1, 1)^T$. 取 $\mathbf{p}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

当 $\lambda_3=1$ 时, 解方程 $(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 由

$$A-E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得特征向量 $(0, -1, 1)^T$. 取 $p_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$.

于是有正交矩阵 $T=(p_1, p_2, p_3)$ 和正交变换 $x=Ty$, 使

$$f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2.$$

$$(2) f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4.$$

解 二次型矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-1)^2,$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1=-1, \lambda_2=3, \lambda_3=\lambda_4=1$.

当 $\lambda_1=-1$ 时, 可得单位特征向量 $p_1=(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

当 $\lambda_2=3$ 时, 可得单位特征向量 $p_2=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$.

当 $\lambda_3=\lambda_4=1$ 时, 可得线性无关的单位特征向量

$$p_3=(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T, \quad p_4=(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

于是有正交矩阵 $T=(p_1, p_2, p_3, p_4)$ 和正交变换 $x=Ty$, 使

$$f=-y_1^2+3y_2^2+y_3^2+y_4^2.$$

28. 求一个正交变换把二次曲面的方程

$$3x^2+5y^2+5z^2+4xy-4xz-10yz=1$$

化成标准方程.

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -5 \\ -2 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$, 得 A 的特征值为

$\lambda_1=2, \lambda_2=11, \lambda_3=0, .$

对于 $\lambda_1=2$, 解方程 $(A-2E)x=0$, 得特征向量 $(4, -1, 1)^T$, 单位化得

$$p_1 = \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right).$$

对于 $\lambda_2=11$, 解方程 $(A-11E)x=0$, 得特征向量 $(1, 2, -2)^T$, 单位化得 $p_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right).$

对于 $\lambda_3=0$, 解方程 $Ax=0$, 得特征向量 $(0, 1, 1)^T$, 单位化得

$$p_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

于是有正交矩阵 $P=(p_1, p_2, p_3)$, 使 $P^{-1}AP=\text{diag}(2, 11, 0)$, 从而有正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

使原二次方程变为标准方程 $2u^2+11v^2=1$.

29. 明: 二次型 $f=x^T Ax$ 在 $\|x\|=1$ 时的最大值为矩阵 A 的最大特征值.

证明 A 为实对称矩阵, 则有一正交矩阵 T , 使得

$$TAT^{-1}=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)=\Lambda$$

成立, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的特征值, 不妨设 λ_1 最大.

作正交变换 $y=Tx$, 即 $x=T^T y$, 注意到 $T^{-1}=T^T$, 有

$$f=x^T Ax=y^T TAT^T y=y^T \Lambda y=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2.$$

因为 $y=Tx$ 正交变换, 所以当 $\|x\|=1$ 时, 有

$$\|y\|=\|x\|=1, \text{ 即 } y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1.$$

因此

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2\leq\lambda_1,$$

又当 $y_1=1, y_2=y_3=\cdots=y_n=0$ 时 $f=\lambda_1$, 所以 $f_{\max}=\lambda_1$.

30. 用配方法化下列二次形成规范形, 并写出所用变换的矩阵.

$$(1) f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3;$$

$$\text{解 } f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$$

$$=(x_1+x_2-2x_3)^2+4x_2x_3+2x_2^2+x_3^2$$

$$=(x_1+x_2-2x_3)^2-2x_2^2+(2x_2+x_3)^2.$$

$$\text{令 } \begin{cases} y_1=x_1+x_2-2x_3 \\ y_2=\sqrt{2}x_2 \\ y_3=2x_2+x_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1=y_1-\frac{5}{\sqrt{2}}y_2+2y_3 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_3=-\sqrt{2}y_2+y_3 \end{cases},$$

二次型化为规范形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3;$$

$$\text{解 } f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+2x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

$$=(x_1+x_3)^2+x_3^2+2x_2x_3;$$

$$=(x_1+x_3)^2-x_2^2+(x_2+x_3)^2.$$

$$\text{令 } \begin{cases} y_1=x_1+x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_2+x_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1=y_1+y_2-y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=-y_2+y_3 \end{cases},$$

二次型化为规范形

$$f=x_1^2-x_2^2+x_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(3) f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3.$$

$$\text{解 } f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3.$$

$$=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{1}{2}x_2^2+4x_3^2-2x_2x_3$$

$$=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{1}{2}(x_2-2x_3)^2+2x_3^2.$$

$$\text{令 } \begin{cases} y_1=\sqrt{2}\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right) \\ y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2-2x_3) \\ y_3=\sqrt{2}x_3 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_2=\sqrt{2}y_2+\frac{2}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \end{cases},$$

二次型化为规范形

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$

所用的变换矩阵为

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

31. 设

$$f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

为正定二次型, 求 a .

$$\text{解 } \text{二次型的矩阵为 } A=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ 其主子式为}$$

$$a_{11}=1, \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix}=1-a^2, \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-a(5a+4).$$

因为 f 为正主二次型, 所以必有 $1-a^2>0$ 且 $-a(5a+4)>0$, 解之得 $-\frac{4}{5}<a<0$.

32. 判别下列二次型的正定性:

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$;

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. 因为

$$a_{11}=-2<0, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=11>0, |A|=-38<0,$$

所以 f 为负定.

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$.

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{pmatrix}$. 因为

$$a_{11}=1>0, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=4>0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}=6>0, |A|=24>0,$$

所以 f 为正定.

33. 证明对称阵 A 为正定的充分必要条件是: 存在可逆矩阵 U , 使 $A=U^T U$, 即 A 与单位阵 E 合同.

证明 因为对称阵 A 为正定的, 所以存在正交矩阵 P 使

$$P^T A P = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \Lambda, \text{ 即 } A = P \Lambda P^T,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均为正数. 令 $\Lambda_1 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, 则

$\Lambda = \Lambda_1 \Lambda_1^T, A = P \Lambda_1 \Lambda_1^T P^T$. 再令 $U = \Lambda_1^T P^T$, 则 U 可逆, 且 $A = U^T U$.

