

二维符号动力学与细胞自动机

摘 要

John von Neumann在1951年正式提出的细胞自动机是一种时间与空间都离散的数学模型,在型态表现上,是一个离散型的动力系统.通过设计不同的局部规则,细胞自动机可以展现无限的多样性和复杂性,产生复杂的动态交互和自我复制现象.即使是最简单的初等细胞自动机,不仅具有丰富的动力学行为,又具有适合超大规模集成上实现的并行信息处理结构.细胞自动机自产生以来,就被广泛运用于社会、经济、军事和科学等不同领域的研究.特别地,它为动力学系统理论中有关秩序、紊动、混沌、非对称、分形等系统整体行为与复杂现象的研究提供了一个有效的模型工具.

符号动力学是研究动力系统动力学行为的一个重要工具.近些年来,在生物、化学、工程和物理等研究领域提出的众多实际模型中,人们发现在刻画其复杂性时往往要涉及高维符号动力系统的理论与方法,首先特别是二维的.对于同一符号空间下不同的符号序列映射,如果能找到一个同胚映射使其建立起拓扑共轭关系则可实现这些映射的拓扑共轭分类,属于同一类下的不同映射具有相同的动力学性质,可以看作是同一个系统.

本文首先证明了二维符号空间上定义的8种移位映射是拓扑共轭的,进一步得到了二维符号动力系统与一维符号动力系统的拓扑半共轭关系.由此,第三章考虑了具有Neumann领域和状态集为 $\{0, 1\}$ 的二维细胞自动机的拓扑共轭分类.本章将二维细胞自动机与二维符号空间建立联系,定义了 $2^{2^5} = 4294967296$ 个全局映射,并利用四个同胚映射实现了所有全局映射的拓扑共轭分类,同时把此分类过程进行了程序设计.本文认为上述分类所得的共轭类数目是最小的.第四章则讨论了全局映射的动力学性质.本章首先从符号动力学的角度分析了初等细胞自动机规则18和56的复杂行为.随后,建立了二维细胞自动

机与初等细胞自动机之间的拓扑半共轭关系, 并通过两个半共轭映射得到了24个二维普适细胞自动机规则. 同时, 给出了它们的数字模拟结果, 发现其演化情况与著名的“生命游戏”大不相同. 本文的最后一章对全文作了总结, 展望进一步研究前景.

关键词: 细胞自动机 (CA), 二维符号动力学, 普适性 (universality), 拓扑共轭, Neumann领域, 全局映射

Two-Dimensional Symbolic Dynamics and Cellular Automata

Abstract

Key Words: cellular automata (CA), two-dimensional symbolic dynamics, universality, topologically conjugate, Neumann neighborhood, global map

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	III
目 录.....	V
一、 绪论.....	1
(一)、符号动力学的研究背景.....	1
1、符号动力学发展的简要回顾.....	1
2、二维符号动力学的研究现状.....	2
(二)、细胞自动机的定义及其基本理论.....	3
1、细胞自动机的研究与发展.....	3
2、细胞自动机的基本概念.....	5
(三)、论文的主要内容与结构.....	6
二、 二维符号动力学.....	9
(一)、一维符号动力学的若干内容.....	9
(二)、二维符号空间与移位映射.....	10
(三)、 σ_{01} 的拓扑熵与动力学性质.....	13
(四)、 σ_{01} 与 σ 的关系.....	16
三、 二维细胞自动机的分类.....	18
(一)、二维细胞自动机全局映射.....	18
(二)、全局映射的拓扑共轭分类.....	19
(三)、程序设计.....	22
四、 细胞自动机的动力学行为.....	26
(一)、初等细胞自动机的动力学性质.....	26
1、 H_{56} 的动力学性质.....	27
2、 H_{18} 的动力学性质.....	31
(二)、二维细胞自动机的动力学性质.....	33

(三)、普适细胞自动机规则.....	35
(四)、模拟.....	39
五、 总结与展望.....	44
(一)、总 结.....	44
(二)、展 望.....	44
参考文献.....	46
致谢.....	52
在学期间的研究成果及发表的论文.....	53

一、绪论

(一)、符号动力学的研究背景

1、符号动力学发展的简要回顾

符号动力学是研究符号动力系统的学科. 这种系统的状态均可表示为有限个符号的无穷序列, 而由任一状态点引出的运动轨道可由表示该状态的无穷序列通过简单的移位规则来确定. 许多复杂动态系统均可经过变换等价于这种系统, 从而可通过对比较简单的符号动力系统的分析来研究一般动力系统的行为. 这种方法在计算机科学、物理学、密码学、通讯等领域有着广泛应用, 特别在混沌等复杂行为研究中占有重要地位.

符号动力学起源于动力系统的抽象拓扑理论的研究. 早在1898年, Hadamard就将符号动力学技巧用于负曲率表面上的侧地线的研究^[1]. 1921年, Morse首先注意到符号动力学在动力系统研究中的重要性^[2]. 1927-1935年, Birkhoff开始应用符号动力学方法研究动力系统^[3]. 1938年, Morse和Hedlund发表了研究动力系统拓扑理论的论文, 题目就称为《符号动力学》^[4], 这代表了符号动力学作为一个独立学科的诞生. 而后, Levinson用符号动力学方法和思想研究了受迫VanderPol震动方程, 以致后来促使Smale获得了构造马蹄映射的灵感^[5]. 1960年代到1970年代, Smale, Bowen, Ruelle, Sinai等人在微分动力系统和遍历理论方面发展了符号动力学理论. 同时, Metropolis, M.Stein和P.Stein等人开始将符号动力学实用化^[6]. 然而, 在一些实际模型(如细胞自动机和细胞神经网络)的深入研究中发现由一维无穷序列构成的符号空间有着局限性^[7]. 于是, 符号动力系统的研究进一步向高维延伸与发展. 此间, Berger, Kastelyn和R.M. Robinson等人探讨了有关高维符号动力系统的几个问题, 尤其是有限型子移位拓扑熵的可计算性^[8-10]. 随后, Milnor和Thurston于1977年完成了讨论一维映射符号动力学的长篇预印本《揉捏理论》, 但过了十多年才正式发表^[11]. 另外, Guckenheimer, Collet, Eckmann等也着重从数学方面详尽地讨论了一维映射的符号动力学.

在1980年代, 由于混沌理论热潮的兴起, 使符号动力学得到了用武之地, 同时也使其得到了迅速发展. 1981年, J.Ford为一篇关于符号动力学的纯数学综述文章写了序言^[12], 强调了符号动力学方法对物理学基础研究的重要意义. 随后, Silnikov等人用符号动力学方法讨论了著名的Lorenz方程^[13]. 同样, 国内外众多数学、物理等工作者在符号动力系统的理论、应用和表示等多个领域作了富有成效的研究和探索, 取得了一系列重要的成果^[14-17]. 例如, 对于有限基数的一维符

号空间上的有限型子移位的研究已有很大进展,有的学者把有限基数扩大到无穷基数,并讨论了无穷基数的一维符号空间上的有限型子移位的混沌性状.与此同时,随着越来越多来自生物、化学、工程和物理等领域的数学模型的出现,人们发现在分析它们的动力学行为时往往要涉及高维符号动力系统的理论与方法,这极大地促使着高维符号动力学自身理论的不断发展与完善^[18–21].总之,由于符号动力系统在混沌理论研究和各种数学模型复杂性分析中的重要作用和特殊地位,在作为研究工具的同时,符号动力学自身的理论和方法也在不断的丰富和发展.

2、二维符号动力学的研究现状

一维符号动力学的相关概念可以非常自然地拓展到高维符号动力学,当然首先是二维的.在二维符号动力系统中,符号空间中的元素为双边无穷的矩阵,而非双边无穷的序列,这种系统更接近于铺砖式分片系统(tiling systems)和统计物理学(statistical mechanics)^[22].近些年来,在研究众多数学模型中,人们发现在讨论其复杂性时经常要借助于符号动力系统的有限型子移位的思想与方法.在一维符号动力系统中,有限型子移位得到了较系统的研究,有着完整的结果和广泛的应用^[15, 23–25].例如:强和弱拓扑混合性是一致的;拓扑熵等于其转移矩阵的谱半径;拓扑混合性蕴涵着正拓扑熵和混沌等等.然而,上述问题在高维的情况下变得异常困难,远比一维符号动力系统的情况要复杂与艰难.例如,在二维符号动力系统中,由两个转移矩阵决定的有限型子移位是否为空集的问题都是不可确定的(undecidable)^[21].

从1990年代以来,众多学者在二维符号动力系统的理论和应用等多个领域作了富有成效的研究和探索,取得了一系列重要的成果^[26–29].在大量的研究中,一个基本的问题是如何计算或估计有限型子移位的拓扑熵.首先,文[10]拓展了拓扑熵的概念,将二维有限型子移位的拓扑熵定义为 $ent(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |B_n(X)|}{n^2}$, 其中 $|B(X)|$ 为子移位 X 的 n 阶方阵的基数,并证明了此拓扑熵也为拓扑共轭不变量.然而对任意二维有限型子移位,要计算其拓扑熵非常困难.在众多由实际模型产生的二维有限型子移位中,文[30]得到了精确的冰模型(ice model)的拓扑熵.2005年,文[27]在二维有限型子移位上引进了系统结构(systematic scheme),即两个第 n 次转移矩阵 A_n 和 B_n ,这使得拓扑熵的计算转化为计算 A_n 或 B_n 最大特征值的增长率.同时还有许多关于拓扑熵计算和估计的研究^[18–20, 31–33].尽管如此,依然有许多有限型子移位的拓扑熵没有得到解决.例如当两个转移矩阵都为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 时,其有限型子移位的拓扑熵到目前还没解决.另外,文[34]证明了二维有限型子移位的最大拓扑熵的测度不唯一.由此,人们引入了各种统计测

度用以描述有限型子移位的动态复杂性. 这种统计测度包括强、弱最小排除系统熵(或增长率)^[35]、几乎最大熵^[26]、投射熵(projectional entropy)^[36]等等.

除了拓扑熵外, 混合性也是一个用来研究系统复杂性的工具. 我们知道在一维情况下, 混合性蕴涵着正拓扑熵, 但是这个结论在高维情况下就不再成立^[26]. 在高维中, 拓扑混合性是一个比较弱的性质. 例如, 在二维中, 存在拓扑混合的有限型子移位使得其拓扑熵为零^[37]. 正拓扑熵往往可通过加更强的混合性而得到. 关于混合性的研究, 已有一些确凿的结论^[38]. 例如, 混合性等价于两个第 n 次转移矩阵 A_n 和 B_n ($n \geq 2$)是原始的(primitive). 但在实际问题中, 要应用此结论却困难重重. 为此, 文[39]提供了一种可验证方案(checkable scheme), 使得对 A_n 和 B_n ($n \geq 2$)是否为原始的(primitive)的验证转化为只要验证 A_k 和 B_k ($k \leq 3$)是否为原始的(primitive), 由此来得到二维有限型子移位是否具有混合性. 另外, 文[26]研究了弱混合性与几乎最大熵之间的关系. 同时, 在上述研究中, 人们往往还借助遍历论的理论、思想与方法讨论子移位的动力学性质. 值得注意的是, 到目前为止, 人们对在二维符号动力系统中有限型子移位的研究还远不充分, 所获结果也显得零星. 当然, 在一维符号动力系统中, 目前也仍面临大量的有待解决的问题^[40], 尤其是一般性子移位的动力学性状的分析.

(二)、细胞自动机的定义及其基本理论

1、细胞自动机的研究与发展

细胞自动机(Cellular Automata, 简称CA)是一种特殊的有限状态机, 是与连续Cantor映射动力学系统相对应的离散动力学系统, 具有时间、空间和状态的离散性. 细胞自动机是由John von Neumann于1951年正式提出的, 但是其思想起源于Stanislaw Ulam. 1948年, Neumann在研究“什么逻辑组织结构的自动机具有图灵机一样的自我复制特性^[41]”的问题时, 在Stanislaw Ulam的建议下, 他采用具有29个状态的二维细胞空间建立了一个具有自我复制特性和通用计算能力的细胞自动机. 继Neumann之后, A.W.Burks开始了细胞自动机的理论研究^[42], 但他提出的细胞自动机的结构过于复杂, 这极大地限制了细胞自动机的应用. 因此, 从那以后关于细胞自动机的研究陷入了一个很长的休眠期. 但在1970年代, 随着计算机的普及, 以Conway的“生命游戏”^[43](game of life, 一种能够进行普适计算的非常简单的2个状态8个邻居的细胞自动机)为代表, 细胞自动机的研究再度兴起. 细胞自动机的拓扑动力学研究始于Hedlund^[44]. 1969年, Hedlund从符号动力学的角度把一维细胞自动机看作是符号空间上移位映射的自同态, 并刻画了所有满的和开的细胞自动机的动力学行为. 1980年代, Stephen Wolfram号召

对细胞自动机进行简化, 建议细胞自动机应具有简单规则性、局部连接性及高度并行性, 并且提出了状态数为2邻域半径为1的初等细胞自动机(Elementary Cellular Automata: ECA)^[45]. 简化后的细胞自动机不仅具有适合超大规模集成电路(VLSI)层次的简单规则结构和信息并行处理的局部互连结构, 而且具有复杂的动力学特性^[46-53]. Stephen Wolfram对初等本细胞自动机的性质进行了深入的研究, 提出了初等细胞自动机的规则及运用条件; 并在大量的计算机实验的基础上, 通过观察特定规则产生的行为将初等细胞自动机按行为模式分为如下四类^[54, 55]:

- (I)最终趋于一个空间平稳的状态, 这里空间平稳是指每一个细胞处于相同的状态(如图1-1所示);
- (II)状态最终转移进入简单的周期状态(如图1-2所示);
- (III)具有复杂的动力学行为, 状态转移进入混沌状态模式(如图1-3所示);
- (IV)状态演化为更加复杂的模式, 出现复杂的局部结构, 或者说是局部性的混沌, 其中有些会不规则的传播(如图1-4所示).

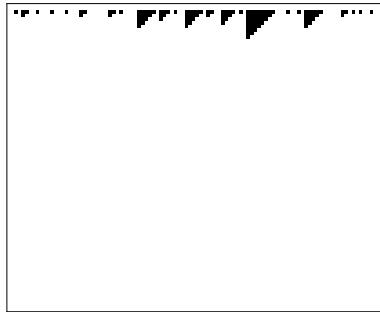


图1-1: ECA规则136的演化图.



图1-2: ECA规则56的演化图.

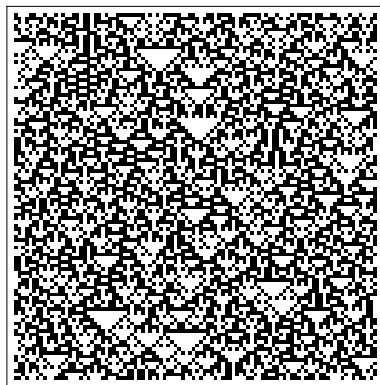


图1-3: ECA规则90的演化图.

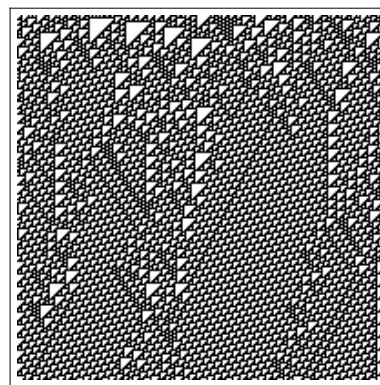


图1-4: ECA规则110的演化图.

Wolfram对细胞自动机的简化极大地推动了细胞自动机理论及应用的发展。他对细胞自动机的简化以及初等细胞自动机的提出,引起了数学家对细胞自动机的关注。当细胞自动机在电脑上模拟的时候,几乎可以复制出类似于自然界当中实际发生的动力系统运作,这使得细胞自动机成为了研究复杂系统行为的最初理论框架,因而Christopher Langton提出了“人工生命”(Artificial Life)这个名词,细胞自动机便是人工生命的第一个雏形^[56],并且变成复杂性科学,或者说是复杂适应性系统的其中一支。同时, Norman Packard和Christopher Langton在对细胞自动机深入研究的基础上提出了“混沌的边缘”(the edge of chaos)这个概念^[57]。这是当前复杂性科学研究的一个重要成果和标志性口号,也是圣塔菲(Santa Fee)学派的旗帜。另一方面,细胞自动机的数学理论研究在各方面得到了发展,成果比较丰富。例如,加性细胞自动机、等度连续的细胞自动机以及正扩张的细胞自动机的符号动力学性质有着比较完善的研究^[46, 50, 53, 58-60]。特别值得一提的是,2002年在大量的计算机模拟和经验观察的基础上, Wolfram创造性地称初等细胞自动机为一种新科学(A New Kind of Science)^[61]。而后, L.O.Chua等人结合他们的细胞神经网络的研究成果用非线性动力学的思想对Wolfram的计算机模拟结果给予了一系列数学上的刻画^[62-67],极大地推动了人们在理论上进一步对初等细胞自动机的研究。

细胞自动机自产生以来,被广泛地应用于社会学、生物学、生态学、信息科学、计算机科学、数学、物理学、化学、地理学、军事学等各个领域。例如:在物理学中,除了格子气细胞自动机在流体力学上的成功应用外,细胞自动机还应用于磁场、电场等场的模拟,以及热扩散、热传导和机械波的模拟以及用来模拟雪花等结晶的形成。在计算机科学中,细胞自动机可以被看作是并行计算机而用于并行计算的研究。另外,它还应用于计算机图形学的研究中。尤其在数学中,细胞自动机为动力学系统理论中有关秩序(ordering)、扰动(turbulence)、混沌(chaos)、分形(fractality)等系统整体行为与复杂现象的研究提供了一个有效的模型工具。因此,一方面细胞自动机的发展得益于相关理论的研究,如逻辑数学、离散数学、计算机中的自动机理论,图灵机思想等;另一方面,细胞自动机的发展也促进了一些相关学科和理论(如人工智能、非线性科学、复杂性科学)的发展,甚至还直接导致了人工生命科学的产生。另外,在表现上,细胞自动机模型还与一些理论方法存在着较大的相似性或相对性。

2、细胞自动机的基本概念

细胞自动是一种时间和空间都离散的数学模型,即其时间、空间变量乃至描述组成系统的单元—细胞的状态变量都是分立的。散步在规则网格中的每个

细胞取有限的离散状态, 遵循同样的作用规则, 依据确定的局部规则作同步更新. 因此, 构成细胞自动机有四个基本要素, 分别是: 细胞(cell)、网格(lattice)、领域(neighborhood)及规则(rule)^[68]. 最简单情况下细胞可以取0和1两个状态. 网格是指细胞活动的空间. 由此, 细胞自动机可以是一维的, 二维的, 三维的, 或更高维度. 领域一般指某个细胞自身及其直接相邻的细胞, 常见的领域有Neumann领域和Moore领域(见图1-5)^[61]. 规则则规定了细胞之间以何种方式相互作用.

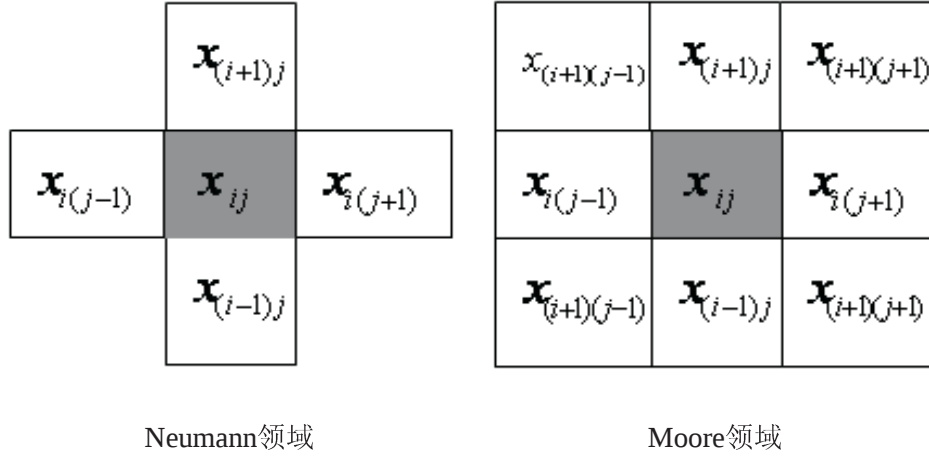


图1-5: 二维细胞自动机常见的两种领域.

本文选择了具有Neumann领域的以及只有两个状态数的二维细胞自动机作为研究对象. 如果用黑色方格代表状态“1”, 白色方格代表状态“0”, 则Neumann领域中5个细胞的所有状态组合共有32种. 假设当前考虑的细胞为 C_{ij} , 在某个时刻的状态为 x_{ij} , 其Neumann领域中四个邻居的状态分别为 $x_{i+1,j}$, $x_{i-1,j}$, $x_{i,j+1}$ 和 $x_{i,j-1}$. 则在下一时刻该细胞的状态 y_{ij} 可用函数表示为

$$y_{ij} = N(x_{i+1,j}, x_{i-1,j}, x_{ij}, x_{i,j+1}, x_{i,j-1}),$$

其中 $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $\forall (i, j) \in Z^2$. 易见, 上述过程可由一个布尔函数真值表表示, 见表1-1. 由此, 局部规则编号 N 可定义为 $N = \sum_{i=0}^{31} \beta_i \cdot 2^i$, 其中 $\beta_i \in S$, $i = 0, 1, \dots, 31$. 显然, 这样的局部规则共有 $2^{2^5} = 4294967296$ 个. 同时, 由于每个布尔函数真值表可转化为布尔表达式, 因此局部规则也可由布尔表达式所表示.

(三)、 论文的主要内容与结构

我们知道细胞神经网络(CNN)复杂性的分析往往需借助于符号动力学的思想和方法. 文[7]运用二维符号动力系统的思想与方法研究了无穷多个变量

的CNN系统,从符号动力学的角度刻画了CNN系统的二值输入-输出映射的动力学性质,特别是讨论了某些移位映射在全空间上的动力学性质.由此,本文首先进一步讨论二维符号空间上移位映射的性质,详细地研究了其动力学性质,尤其是证明了其拓扑熵为 ∞ .由此,本文将具有Neumann领域和状态集 $\{0,1\}$ 的二维细胞自动机作为研究对象.我们将二维细胞自动机与二维符号空间建立联系,定义了 $2^{2^5} = 4294967296$ 个全局映射.随后,我们根据Neumann领域的平面结构和细胞自动机的特点,构造了四个同胚映射 $\bar{T}$, T^{UD} , T^{LR} 和 T^D ,通过它们实现了所有全局映射的拓扑共轭分类.进一步,我们认为上述类所得的共轭类数目是最小的.由于本文讨论的全局映射个数较多,用人工地进行分类其所需的计算量相当之大.因此,我们把上述共轭分类进行了程序化设计,从而大大的提高了分类的效率.

表1-1: 二维细胞自动机规则的布尔函数真值表.

$x_{(i+1)j}$	$x_{i(j-1)}$	x_{ij}	$x_{i(j+1)}$	$x_{(i-1)j}$	y_{ij}	$x_{(i+1)j}$	$x_{i(j-1)}$	x_{ij}	$x_{i(j+1)}$	$x_{(i-1)j}$	y_{ij}
0	0	0	0	0	β_0	1	0	0	0	0	β_{16}
0	0	0	0	1	β_1	1	0	0	0	1	β_{17}
0	0	0	1	0	β_2	1	0	0	1	0	β_{18}
0	0	0	1	1	β_3	1	0	0	1	1	β_{19}
0	0	1	0	0	β_4	1	0	1	0	0	β_{20}
0	0	1	0	1	β_5	1	0	1	0	1	β_{21}
0	0	1	1	0	β_6	1	0	1	1	0	β_{22}
0	0	1	1	1	β_7	1	0	1	1	1	β_{23}
0	1	0	0	0	β_8	1	1	0	0	0	β_{24}
0	1	0	0	1	β_9	1	1	0	0	1	β_{25}
0	1	0	1	0	β_{10}	1	1	0	1	0	β_{26}
0	1	0	1	1	β_{11}	1	1	0	1	1	β_{27}
0	1	1	0	0	β_{12}	1	1	1	0	0	β_{28}
0	1	1	0	1	β_{13}	1	1	1	0	1	β_{29}
0	1	1	1	0	β_{14}	1	1	1	1	0	β_{30}
0	1	1	1	1	β_{15}	1	1	1	1	1	β_{31}

另一方面,本文建立了二维细胞自动机全局映射与初等细胞自动机全局映射之间的拓扑半共轭关系,从符号动力学角度证明了初等细胞自动机规则18和56的拥有混沌的动力学性状.虽然拓扑半共轭的两个紧致系统,其动力学行为可以大相径庭,但在拓扑半共轭的条件下也同样可以保持系统的某些拓扑不变性,尤其是扩充的拓扑熵不小于因子的.通过拓扑半共轭关系和已知的初等细胞自动机全局映射的动力学性质,本文粗略地估计了二维细胞自动机全局映射的动力学性质,特别是拓扑熵的估计.同时,文[69]证明了初等细胞自动机规则110是具有普适性的.借助上述拓扑半共轭映射,我们获得了24个二维普适细胞自动规则.我们知道生命游戏用了几条简单的规则,却产生了类似于生命演化过程中无比复杂的现象.其中,最著名的是“闪光灯”(blinker)现象和“滑翔机”(glider)现象,前者是一种细胞群在周期其状态(性状)的结构,而后者是一种除了会周期循环其状态(形状)之外,还会稳定地移动的结构.这些是Conway证明生命游戏具有普适性的关键现象,也是细胞自动机具有讯号储存与讯号传递的功能的重要特征.但是,在对

本文得到的普适细胞自动机规则进行数字模拟时,我们发现它们几乎不具有滑翔机和闪光灯现象.

本文的结构如下:第二章建立了二维符号空间上定义的8种移位映射之间的拓扑共轭关系以及二维符号动力系统与一维符号动力系统之间的拓扑半共轭关系,并证明了二维移位映射的拓扑熵为 ∞ .借助上述思想与方法,第三章通过构造4种同胚映射实现了二维细胞自动机全局映射的拓扑共轭分类,并把此分类过程进行了程序化设计.第四章从符号动力学的角度分析了初等细胞自动机规则18和56的复杂动力学行为,进而通过构造2个半共轭映射建立了二维细胞自动机全局映射与初等细胞自动机之间的拓扑半共轭关系.通过这2个半共轭映射,本章得到了24个二维普适细胞自动机规则,并对这些普适规则进行了数字模拟.最后一章则对全文作一扼要总结和进一步研究作一展望.

二、二维符号动力学

(一)、一维符号动力学的若干内容

任取 $k(k \geq 2)$ 个不同的符号,不妨设为 $0, 1, \dots, k-1$, 记 $S = \{0, 1, \dots, k-1\}$. 我们考虑所有 Z 到 S 的映射组成的集合, 记为

$$S^Z = \{x = (x_i) \mid x_i \in S, i \in Z\},$$

其中 Z 为全体整数的集合. 对于每个 $x = (x_i) \in S^Z$, 以记号 $*$ 表示第0个符号所在的位置. 在 S^Z 中定义距离为

$$\rho(x, y) = \max_{i \in Z} \left\{ \frac{1}{\max\{|i|\} + 1} \mid x_i \neq y_i \right\}. \quad (2.1)$$

显然上述定义是合理的. 从而, 度量空间 (S^Z, ρ) 是紧致的、完全的、完全不连通的Hausdorff空间, 并称 S^Z 为一维 k -符号序列空间, 简称一维符号空间. 设 $a = (a_0, \dots, a_{p-1})$ 是 S 上一个长度为 $p \geq 1$ 的有限序列, 简称长度为 p 的字. 设 $x \in S^Z$, $I = [i, j]$ 是一个整数区间, 则记 $x_{[i, j]} = (x_i, \dots, x_j)$ 和 $x_{[i, j)} = (x_i, \dots, x_{j-1})$, 如果存在 $m \in Z$, 使得 $x_{[m, m+p-1]} = a$, 则说“有限序列 a 出现在 x 内”或“ x 含有 a ”, 记作 $a \prec x$; 否则说“有限序列 a 没有出现在 x 内”, 记作 $a \not\prec x$. 对于 $\Lambda \subseteq S^Z$, 若存在 $x \in \Lambda$, 使得 $a \prec x$, 则说“ a 出现在 Λ 内”, 记为 $a \prec \Lambda$. 设 $m \in Z$, 则集合 $m[a_0, \dots, a_{p-1}] = \{x \in S^Z \mid x_{[m, m+p-1]} = a\}$ 叫做 S^Z 上的柱集. 易知, 柱集既是开又闭的. S^Z 上有由全体柱集构成的可数拓扑基, 那么 S^Z 的每一个开集均可写成可数个柱集的并.

在 S^Z 上定义移位映射:

$$\begin{aligned} \sigma : S^Z &\longrightarrow S^Z \\ (x_i) &\longmapsto (x_{i+1}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

则称拓扑动力系统 (S^Z, σ) 为 S 上的一维符号动力系统.

关于 (S^Z, σ) 的动力学性质, 有^[15]:

- (1) σ 有任何周期的周期点;
- (2) σ 的周期点在 S^Z 中稠密;
- (3) σ 拓扑混合 $\implies \sigma$ 拓扑传递和对初值敏感依赖的;
- (4) σ 的拓扑熵为 $\log k$, 其中 k 为符号集 S 的基数;

(5) σ 具有 Li-Yorke 混沌、Devaney 混沌和熊金城意义下的混沌.

众所周知, 在一维符号动力系统中, 有限型子移位的动力学行为已得到了较系统的研究, 有着完整而丰富的结论. 设 $\mathcal{A}$ 是 S 上有限序列的一个集合, 记其最长字的长度为 N , 则我们可把 $\mathcal{A}$ 中每个字的长度都扩充成为 N , 得到有限序列的集合 $\mathcal{A}$. 令 $\Lambda_{\mathcal{A}} = \{x \in S^{\mathbb{Z}} \mid x_{[i, i+n-1]} \in \mathcal{A}, \forall A \in \mathbb{Z}\}$, 易见 $(\Lambda_{\mathcal{A}}, \sigma)$ 为 $(S^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ 的子系统. 则称 $(\Lambda_{\mathcal{A}}, \sigma)$ 或 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 为 N 阶有限型子移位, 其中 $\mathcal{A}$ 为其决定系统.

命题 2.1^[15] 任何有限型子移位都与一个 2 阶有限型子移位拓扑共轭.

另一方面, 用于刻画 2 阶有限型子移位动力学行为的主要工具则是转移方阵, 其定义如下:

定义 2.1^[15] 如果

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \prec \Lambda \\ 0, & (i, j) \not\prec \Lambda, \end{cases}$$

则 $k \times k$ 阶 0, 1-方阵 $A = (a_{ij})$ 叫作子移位 Λ 的转移方阵, 其中 (i, j) 是 S 上的长度为 2 的字. 同时, 我们记 2 阶子移位 Λ 为 Λ_A 或 $\sigma_A : \Lambda_A \rightarrow \Lambda_A$.

注意, 若转移方阵的每一行和每一列都至少有一个 1, 则转移方阵和 2 阶有限型子移位是一一对应的, 即两者之间的相互决定是一一的. 这样, 关于 2 阶子移位 Λ_A 的动力学性质有:

命题 2.2^[15]

(1) σ_A 的拓扑熵为转移方阵 A 的谱半径;

(2) σ_A 是拓扑混合的当且仅当存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, A^n 中的每个元素都大于 0.

(二)、二维符号空间与移位映射

仍记 $S = \{0, 1, \dots, k-1\}$ 为 k 个符号组成的集合. 现考虑所有 $Z^2 = \{(i, j) \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ 到 S 的映射组成的集合, 记为

$$S^{Z^2} = \{x = (x_{ij}) \mid x_{ij} \in S, (i, j) \in Z^2\}.$$

对于每个 $x = (x_{ij}) \in S^{Z^2}$, 以记号 $*$ 表示第 $(0, 0)$ 个符号所在的位置. 为了在 S^{Z^2} 中讨论极限情况, 我们在 S^{Z^2} 中定义距离为

$$d(x, y) = \max_{(i, j) \in Z^2} \left\{ \frac{1}{\max\{|i|, |j|\} + 1} \mid x_{ij} \neq y_{ij} \right\}. \quad (2.3)$$

显然上述定义是合理的.

设 $a_{ij} \in S, |i| \leq N, |j| \leq N, N > 0$. 又设 $(m, n) \in Z^2$, 记

$$[a]_N = [a_{ij}]_{|i| \leq N, |j| \leq N} = \{x \in S^{Z^2} \mid x_{(i+m)(j+n)} = a_{ij}, |i| \leq N, |j| \leq N\}$$

叫作 S 上二维有限矩阵 $(a_{ij})_{|i| \leq N, |j| \leq N}$ 的柱形. 显然柱形是既开又闭的集合, 且全体柱形构成了 S^{Z^2} 的一组可数拓扑基, 即 S^{Z^2} 的每个开集可以写成柱形的并. 因此, S^{Z^2} 满足第二可数性公设. 文[7]证明了度量空间 (S^{Z^2}, d) 是紧致的、完全的、完全不连通的 *Hausdorff* 空间, 并称 S^{Z^2} 为二维 k -符号序列空间, 简称二维符号空间.

在 S^{Z^2} 上定义移位映射:

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} : S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ (x_{ij}) &\longmapsto (x_{(i+k)(j+l)}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中 $(k, l) \in Z^2$, 称为移位的步. 如果 $|k| \leq 1, |l| \leq 1$, 则由(2.4)可定义 $3^2 = 9$ 种移位映射:

$$\sigma_{00}, \sigma_{01}, \sigma_{0(-1)}, \sigma_{10}, \sigma_{-10}, \sigma_{11}, \sigma_{1(-1)}, \sigma_{-11}, \sigma_{-1(-1)}$$

其中 σ_{00} 为恒等映射. 注意, 下文提到的移位映射将不包括 σ_{00} . 显然每个 σ_{kl} 都可以由 σ_{k0} 与 σ_{0l} 复合而成, 其中 $(k, l) \neq (0, 0)$. 即

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{10} \circ \sigma_{01}, & \sigma_{-11} &= \sigma_{-10} \circ \sigma_{10}, \\ \sigma_{1(-1)} &= \sigma_{10} \circ \sigma_{0(-1)}, & \sigma_{-1(-1)} &= \sigma_{-10} \circ \sigma_{0(-1)}. \end{aligned}$$

因此为了讨论每个移位映射的动力学性质, 我们有必要先研究 σ_{k0} 与 σ_{0l} 的动力学性质. 事实上, 本节证明了 8 个移位映射 σ_{kl} 彼此是拓扑共轭的. 拓扑共轭保持系统的轨道结构, 因此拓扑共轭的系统可以看作同一个系统. 本章选取 (S^{Z^2}, σ_{01}) 作为研究对象.

定义 2.2

$$\begin{aligned} \sigma_{01} : S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ (x_{ij}) &\longmapsto (x_{i(j+1)}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

即 $[\sigma_{01}(x)]_{ij} = x_{i(j+1)}, \forall (i, j) \in Z^2$ 为二维水平移位映射, 简称移位映射.

引理 2.1^[7] 对于 $x, y \in S^{Z^2}$, 以及正整数 N , 有

$$d(x, y) < \frac{1}{N+1} \text{ 当且仅当 } \max\{|i|, |j|\} \leq N \text{ 有 } x_{ij} = y_{ij}.$$

由引理 2.1, 容易得到

命题 2.3 $\sigma_{01}, \sigma_{0(-1)}, \sigma_{10}, \sigma_{-10}, \sigma_{11}, \sigma_{1(-1)}, \sigma_{-11}, \sigma_{-1(-1)}$ 均为同胚映射.

因此, (S^{Z^2}, σ_{kl}) 都是紧致系统, 其中 $(k, l) \neq (0, 0)$.

定义 2.3^[15] 设 (X, f) 和 (Y, g) 是紧致系统, 如有存在同胚映射 $h : X \rightarrow Y$, 使得 $h \circ f = g \circ h$. 则称 f 和 g 是拓扑共轲.

命题 2.4 σ_{11} 与 σ_{01} 拓扑共轲.

证明: 要证明 σ_{11} 与 σ_{01} 拓扑共轲, 我们需要找一个同胚映射 h , 使得下图可交换

$$\begin{array}{ccc} S^{Z^2} & \xrightarrow{\sigma_{11}} & S^{Z^2} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ S^{Z^2} & \xrightarrow{\sigma_{01}} & S^{Z^2}. \end{array}$$

现定义

$$\begin{aligned} h : S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ (x_{ij}) &\longmapsto (x_{(i-j)j}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

(1) h 为满的. 对任意 $y = (y_{ij}) \in S^{Z^2}$, 则取 $x = (y_{(i+j)j}) \in S^{Z^2}$, 有

$$[h(x)]_{(i+j)j} = y_{ij}, \quad \forall (i, j) \in Z^2.$$

(2) h 为单的. 若 $h(x) = h(y)$, 即 $[h(x)]_{ij} = [h(y)]_{ij}, \forall (i, j) \in Z^2$, 从而有 $x_{(i-j)j} = y_{(i-j)j}, \forall (i, j) \in Z^2$. 因此 $x_{kl} = y_{kl}, \forall (k, l) \in Z^2$.

(3) h 为连续的. $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$, 取 $\delta = \frac{1}{2N+1}$. 则由引理2.1可知, $d(x, y) < \delta = \frac{1}{2N+1}$ 蕴涵当 $\max\{|i|, |j|\} \leq 2N$ 时, 有 $x_{ij} = y_{ij}$. 又由于

$$\begin{aligned} &\{(i, j) \in Z^2 \mid \max\{|i-j|, |j|\} \leq N\} \\ &\subset \{(i, j) \in Z^2 \mid \max\{|i|, |j|\} \leq 2N\}, \end{aligned}$$

再由引理2.1可知, 当 $\max\{|i-j|, |j|\} \leq N$ 时, $x_{(i-j)j} = y_{(i-j)j}$ 蕴涵

$$d(h(x), h(y)) = \max_{((i-j), j) \in Z^2} \left\{ \frac{1}{\max\{|i-j|, |j|\} + 1} \mid x_{(i-j)j} \neq y_{(i-j)j} \right\} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

由于 S^{Z^2} 为紧致的 $Hausdorff$ 空间, 因此 h^{-1} 也是连续的. 这样我们证明了 h 是一个同胚映射.

还须证明 $h \circ \sigma_{11} = \sigma_{01} \circ h$. 事实上, $\forall x \in S^{Z^2}$, 有 $[\sigma_{11}(x)]_{ij} = x_{(i+1)(j+1)}$, $[h(x)]_{ij} = x_{(i-j)j}$, $[\sigma_{01}(x)]_{ij} = x_{i(j+1)}$. 则对 $\forall (i, j) \in Z^2$, 有

$$[h(\sigma_{11}(x))]_{ij} = x_{(i-j)(j+1)},$$

$$[\sigma_{01}(h(x))]_{ij} = x_{(i-j)(j+1)}.$$

这样我们证明了 σ_{11} 与 σ_{01} 拓扑共轲.证毕.

命题 2.5 σ_{01} 与 σ_{10} 拓扑共轲.

证明： 要证明 σ_{01} 与 σ_{10} 拓扑共轲, 我们需要找一个同胚映射 h , 使得下图可交换

$$\begin{array}{ccc} S^{Z^2} & \xrightarrow{\sigma_{01}} & S^{Z^2} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ S^{Z^2} & \xrightarrow{\sigma_{10}} & S^{Z^2}. \end{array}$$

现定义

$$\begin{aligned} h : S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ (x_{ij}) &\longmapsto (x_{ji}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

类似于命题2.4的证明, 可得 h 是一个同胚映射. 另外, $\forall x \in S^{Z^2}$, 有 $[\sigma_{10}(x)]_{ij} = x_{(i+1)j}$, $[h(x)]_{ij} = x_{ji}$, $[\sigma_{01}(x)]_{ij} = x_{i(j+1)}$. 则对 $\forall (i, j) \in Z^2$, 有

$$[h(\sigma_{01}(x))]_{ij} = x_{(j+1)i},$$

$$[\sigma_{10}(h(x))]_{ij} = x_{(j+1)i}.$$

这样我们证明了 σ_{10} 与 σ_{01} 拓扑共轲.证毕.

由于8个移位映射 σ_{01} , $\sigma_{0(-1)}$, σ_{10} , σ_{-10} , σ_{11} , $\sigma_{1(-1)}$, σ_{-11} , $\sigma_{-1(-1)}$ 具有对称性, 并结合命题2.4和命题2.5, 有

定理 2.1 σ_{01} , $\sigma_{0(-1)}$, σ_{10} , σ_{-10} , σ_{11} , $\sigma_{1(-1)}$, σ_{-11} , $\sigma_{-1(-1)}$ 彼此拓扑共轲.

(三)、 σ_{01} 的拓扑熵与动力学性质

由命题2.3, (S^{Z^2}, σ_{01}) 是一个紧致系统. 对紧致系统而言, 拓扑熵的开覆盖定义与Bowen定义是一致的, 本节选取前者. 关于一维有限符号空间的移位映射, 已知其拓扑熵为 $\log k$, 其中 k 为 S 的符号基数. 对于二维符号空间上的移位映射 σ_{01} , 文[7]给出了其拓扑熵的下界估计值 $\log k$, 本节将证明其拓扑熵为 ∞ . 为此, 我们先给出相关定义^[15].

$\mathcal{A}$ 是紧致的度量空间 X 的一个开覆盖, 记

$$\text{diam}(\mathcal{A}) = \sup\{d(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

叫作 $\mathcal{A}$ 的直径, 其中 $d(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$. 令 $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \log \mathcal{N}(\mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ 为 $\mathcal{A}$ 的子覆盖的基数的下确界. 对 X 的两个开覆盖 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, 令 $f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A_i), A_i \in \mathcal{A}\}$ 和 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$. 显然 $f^{-1}(\mathcal{A})$ 和 $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ 都

是 X 的开覆盖. 通过分析可知以下极限

$$ent(f, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{H}(\mathcal{A} \bigvee f^{-1}(\mathcal{A}) \bigvee \cdots \bigvee f^{-(n-1)}(\mathcal{A}))$$

存在, 且非负. 这样, 紧致系统 (X, f) 的拓扑熵定义为:

定义 2.4

$$ent(f) = \sup_{\mathcal{A}} ent(f, \mathcal{A}) \quad (2.8)$$

其中 $\sup$ 是对所有 X 的开覆盖取上确界.

引理 2.2^[15] 设 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个开覆盖序列, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} diam\{\alpha_n\} = 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} ent\{f, \alpha_n\} = ent(f)$, 其中 $0 \leq ent(f) \leq \infty$.

定理 2.2 二维水平移位映射 σ_{01} 的拓扑熵为 ∞ .

证明: 由 $S^{\mathbb{Z}^2}$ 上定义的柱形可知, 二维有限矩阵

$$(a)_N = (a_{ij})_{|i| \leq N, |j| \leq N} = \begin{pmatrix} a_{N(-N)} & \cdots & a_{NN} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(-N)(-N)} & \cdots & a_{(-N)N} \end{pmatrix}$$

上的全体柱形构成 $S^{\mathbb{Z}^2}$ 的一个开覆盖, 记为 α_N , 即

$$\alpha_N = \{[a]_N \mid a_{ij} \in S, |i| \leq N, |j| \leq N\}.$$

因此 $\{\alpha_N\}_{N=1}^{\infty}$ 是 $S^{\mathbb{Z}^2}$ 的一个开覆盖序列, 且由 $S^{\mathbb{Z}^2}$ 上定义的距离公式(2.3)可知,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} diam\{\alpha_N\} = 0.$$

则由引理2.2得,

$$ent(\sigma_{01}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\alpha_N \bigvee \sigma_{01}^{-1}(\alpha_N) \bigvee \cdots \bigvee \sigma_{01}^{-(n-1)}(\alpha_N)\right). \quad (2.9)$$

下面计算 $\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma_{01}^{-i}(\alpha_N)$ 的基数.

如果 x 属于 $\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma_{01}^{-i}(\alpha_N)$ 中的某个元素, 那么 $x, \sigma_{01}(x), \cdots, \sigma_{01}^{n-1}(x)$ 在二维有限矩阵 $(a)_N$ 上的符号是完全确定的, 而且属于 $\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma_{01}^{-i}(\alpha_N)$ 中同个元素的元素, 在 $(a)_N$ 上确定的符号是完全一样的. 因此 $\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma_{01}^{-i}(\alpha_N)$ 的基数就是 σ_{01} 在迭代 $n-1$ 次后形成的上底为二维有限矩阵 $(a)_N$, 高度为 n 的不同的长方体的数目. 另一方

面, 由于 σ_{01} 是 S^{Z^2} 上的同胚自映射, 所以每个二维有限矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{N(-N)} & \cdots & a_{NN} & \cdots & a_{N(N+n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{0(-N)} & \cdots & a_{0N} & \cdots & a_{0(N+n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(-N)(-N)} & \cdots & a_{(-N)N} & \cdots & a_{(-N)(N+n-1)} \end{pmatrix}$$

在 σ_{01} 迭代 $n-1$ 次后都形成不同的上述长方体, 其中 $a_{ij} \in S$, $-N \leq i \leq N$, $-N \leq j \leq N+n-1$. 这样 $\bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma_{01}^{-i}(\alpha_N)$ 的基数为 $k^{(2N+1)[2N+1+(n-1)]}$, 因此

$$\text{ent}(\sigma_{01}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log k^{(2N+1)[2N+1+(n-1)]} = \infty.$$

证毕.

拓扑熵被认为是刻画动力系统复杂程度的一种度量, 也是动力系统拓扑共轭不变量, 因此我们有

命题 2.6 一维符号动力系统 (S^Z, σ) 与二维符号动力系统 (S^{Z^2}, σ_{01}) 不拓扑共轭.

值得指出的是, 在讨论二维符号空间上移位映射的拓扑熵时, 众多文献^[18-20, 31-33]都将其定义为

$$\text{ent}(\sigma_{01}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} H\left(\alpha_N \bigvee \sigma_{01}^{-1}(\alpha_N) \bigvee \cdots \bigvee \sigma_{01}^{-(n-1)}(\alpha_N)\right), \quad (2.10)$$

并证明了此拓扑熵也是拓扑共轭不变量. 由(2.10)我们可计算出 σ_{01} 的拓扑熵仍为 $\log k$.

另外, 文[7]详细的证明了 σ_{11} 的动力学性质, 由于 S^{Z^2} 上8个移位映射彼此拓扑共轭, 因此我们列举 σ_{01} 的基本动力学性质与混沌性状如下:

定理 2.3

- (1) σ_{01} 有任何周期的周期点;
- (2) σ_{01} 的周期点在 S^{Z^2} 中稠密;
- (3) σ_{01} 拓扑混合 $\implies$ σ_{01} 拓扑传递和对初值敏感依赖的;
- (4) σ_{01} 拓扑熵为 ∞ ;
- (5) σ_{01} 具有Li-Yorke混沌、Devaney混沌和熊金城意义下的混沌.

至此, 本节详细地刻画了二维符号空间 S^{Z^2} 上移位映射的动力学性质与混

沌性状, 并指出从动力系统角度看, 在 S^{Z^2} 上可以定义8个移位映射, 但本质上只有一个. 另外, 本节严格证明了经典的符号动力系统 (S^Z, σ) 与二维符号动力系统 (S^{Z^2}, σ_{01}) 不拓扑共轲, 因而 (S^Z, σ) 与 (S^{Z^2}, σ_{01}) 是两类本质不同的符号动力系统.

(四)、 σ_{01} 与 σ 的关系

命题2.6指出 σ_{01} 与 σ 不拓扑共轲, 本节将给出它们之间的一个拓扑半共轲关系. 为此先引入动力系统之间拓扑半共轲的定义.

定义 2.5^[15] 设 (X, f) 和 (Y, g) 是紧致系统, 如有存在连续满射 $h : X \rightarrow Y$, 使得 $h \circ f = g \circ h$. 则称 f 和 g 是拓扑半共轲.

定理 2.4 (S^{Z^2}, σ_{01}) 与 (S^Z, σ) 拓扑半共轲.

证明: 要证明 σ_{01} 与 σ 拓扑半共轲, 我们需要找一个满的连续映射 h , 使得下图可交换

$$\begin{array}{ccc} S^{Z^2} & \xrightarrow{\sigma_{01}} & S^{Z^2} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ S^Z & \xrightarrow{\sigma} & S^Z. \end{array}$$

我们建立 S^{Z^2} 到 S^Z 的映射如下:

$$\begin{aligned} h : S^{Z^2} &\longrightarrow S^Z \\ (x_{ij}) &\longmapsto (x_{0j}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

显然 h 为满射. 下证 h 连续. 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$, 则我们取 $\delta = \frac{1}{N+1}$. 从而对于 $x = (x_{ij}), y = (y_{ij}) \in S^{Z^2}$, 当 $d(x, y) < \delta = \frac{1}{N+1}$ 时, 由引理2.1, 当 $\max\{|i|, |j|\} \leq N$ 时, 有 $x_{ij} = y_{ij}$, 特别地 $x_{0j} = y_{0j}, \forall |j| \leq N$. 因此当 $\max\{|i|, |j|\} \leq N$ 时, 有 $[h(x)]_{ij} = [h(y)]_{ij}$. 故有

$$\rho(h(x), h(y)) = \max_j \left\{ \frac{1}{|j|+1} \mid x_{0j} \neq y_{0j} \right\} = \max_{|j| > N} \left\{ \frac{1}{|j|+1} \mid x_{0j} \neq y_{0j} \right\} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon,$$

其中 ρ 为(2.1)式定义在 S^Z 上的距离.

要证 h 为拓扑半共轲, 还须证 $\sigma_{01} \circ h = h \circ \sigma$. 事实上, 对 $\forall u = (u_{ij}) \in S^{Z^2}$, 有

$$h(\sigma_{01}(u_{ij})) = h(u_{i(j+1)}) = u_{0(j+1)} \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2,$$

$$\sigma(h(u_{ij})) = \sigma(u_{0j}) = u_{0(j+1)} \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

证毕.

由此, 我们指出 σ_{01} 是 σ 的扩充, 而 σ 是 σ_{01} 的因子. 拓扑半共轭的两个紧致系统, 其动力学性质可以是大相径庭. 在拓扑半共轭的情况下, 扩充(因子)的哪些动力学性质得以在因子(扩充)中被保持, 这是一个重要的问题. 随着此问题的不断深入探讨, 拓扑半共轭已成为由已知紧致系统来探究未知紧致系统的一个强有力的工具.

综上所述, 我们已建立了二维符号空间上8种移位映射的拓扑共轭关系和 $(S^{\mathbb{Z}^2}, \sigma_{01})$ 与 $(S^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ 的拓扑半共轭关系. 须强调的是, 在第二节中建立的共轭映射(2.6)与(2.7)将在第三章中对二维细胞自动机全局映射拓扑共轭分类起到关键作用. 在第三节中建立的半共轭映射(2.11)将在第四章中为找到二维普适细胞细胞自动机提供了灵感.

三、 二维细胞自动机的分类

(一)、 二维细胞自动机全局映射

考虑由两个符号组成的集合 $S = \{0, 1\}$, 及其生成的符号空间 S^{Z^2} . 由于本文采用Neumann领域和 $S = \{0, 1\}$, 则2维细胞自动机局部规则共有 $2^{2^5} = 4294967296$ 个. 进一步, 每个规则可由唯一的布尔函数真值表表示(见表1-1), 局部规定编号 N 定义为 $N = \sum_{i=0}^{31} \beta_i \cdot 2^i$, 其中 $\beta_i \in S, i = 0, 1, \dots, 31$. 为方便起见, 我们将上述布尔函数真值表简写为 $[\beta_0, \dots, \beta_{31}]$. 对每个局部规则而言, 我们可根据其真值表写出它的布尔表达式, 进而可在 S^{Z^2} 上诱导出规则 N 的全局映射 T_N .

实例 考虑局部规则 $N = 4210689285$, 其真值表为

$$[1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1],$$

则对 $\forall x_{ij} \in S, (i, j) \in Z^2$, 相应布尔表达式为

$$N(x_{ij}, x_{(i-1)j}, x_{(i+1)j}, x_{i(j-1)}, x_{i(j+1)}) = \bar{x}_{(i+1)j} \oplus x_{ij} \cdot x_{(i-1)j},$$

其中“ $\cdot$ ”, “ $\oplus$ ”和“ $-$ ”分别代表逻辑运算符“与”, “异或”和“非”. 为讨论方便, 记 $N_0 = 4210689285$, 则 局部规则 N_0 诱导的全局映射 T_{N_0} 定义为

$$\begin{aligned} T_{N_0} : \quad S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ x = (x_{ij}) &\longmapsto (\bar{x}_{(i+1)j} \oplus x_{ij} \cdot x_{(i-1)j}) \end{aligned}$$

即

$$[T_{N_0}(x)]_{ij} = \bar{x}_{(i+1)j} \oplus x_{ij} \cdot x_{(i-1)j}, \forall (i, j) \in Z^2,$$

其中 $[T_{N_0}(x)]_{ij}$ 为 $T_{N_0}(x)$ 的第 (i, j) 个位置的符号. 根据距离(2.3), 易见 T_{N_0} 是连续的, 则 (S^{Z^2}, T_{N_0}) 为紧致系统.

至此, 我们已定义了所有局部规则诱导的全局映射, 且每个 (S^{Z^2}, T_N) 都是紧致系统. 在细胞自动机动力学行为的研究中, 加性细胞自动机规则因其布尔表达式是线性的而得到了优先关注.

定义 3.1 细胞自动机只由领域内的细胞通过“异或”或者“非异或”运算来实现的称为加性细胞自动机.

这样本文考虑的二维细胞自动机共有64个加性细胞自动机. 为了清楚的阐述, 这里列举了所有加性细胞自动机局部规则的布尔表达式(见表3-1). 由于部分

局部规则的编号较大, 故表3-1中采用记号 f_i 来代替全局映射 T_N .

表3-1: 64个加性细胞自动机的布尔表达式.

全局映射	布尔表达式	全局映射	布尔表达式
f_0	0	f_{63}	1
f_1	x_{ij}	f_{62}	$\overline{x_{ij}}$
f_2	$x_{(i+1)j}$	f_{61}	$\overline{x_{(i+1)j}}$
f_3	$x_{(i-1)j}$	f_{60}	$\overline{x_{(i-1)j}}$
f_4	$x_{i(j-1)}$	f_{59}	$\overline{x_{i(j-1)}}$
f_5	$x_{i(j+1)}$	f_{58}	$\overline{x_{i(j+1)}}$
f_6	$x_{(i+1)j} \oplus x_{ij}$	f_{57}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{ij}}$
f_7	$x_{(i-1)j} \oplus x_{ij}$	f_{56}	$\overline{x_{(i-1)j} \oplus x_{ij}}$
f_8	$x_{ij} \oplus x_{(i-1)j}$	f_{55}	$\overline{x_{ij} \oplus x_{(i-1)j}}$
f_9	$x_{ij} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{54}	$\overline{x_{ij} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{10}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)}$	f_{53}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)}}$
f_{11}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{(i-1)j}$	f_{52}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{(i-1)j}}$
f_{12}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{51}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{13}	$x_{i(j-1)} \oplus x_{(i-1)j}$	f_{50}	$\overline{x_{i(j-1)} \oplus x_{(i-1)j}}$
f_{14}	$x_{i(j-1)} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{49}	$\overline{x_{i(j-1)} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{15}	$x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{48}	$\overline{x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{16}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{ij}$	f_{47}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{ij}}$
f_{17}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{(i-1)j}$	f_{46}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{(i-1)j}}$
f_{18}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{45}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{19}	$x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j}$	f_{44}	$\overline{x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j}}$
f_{20}	$x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{43}	$\overline{x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{21}	$x_{ij} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{42}	$\overline{x_{ij} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{22}	$x_{i(j-1)} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{41}	$\overline{x_{i(j-1)} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{23}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{40}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{24}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{ij} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{39}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{ij} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{25}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j}$	f_{38}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j}}$
f_{26}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j}$	f_{37}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j}}$
f_{27}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{36}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{28}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{35}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{29}	$x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{34}	$\overline{x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{30}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{33}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}}$
f_{31}	$x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}$	f_{32}	$\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{i(j-1)} \oplus x_{ij} \oplus x_{(i-1)j} \oplus x_{i(j+1)}}$

(二)、全局映射的拓扑共轭分类

本节我们将讨论二维细胞自动机全局映射的拓扑共轭分类. 为此, 构造4个映射如下:

$$\begin{aligned} \overline{T}: \quad S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ x = (x_{ij}) &\longmapsto (\bar{x}_{ij}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

即

$$[\overline{T}(x)]_{ij} = \bar{x}_{ij}, \forall (i, j) \in Z^2.$$

$$\begin{aligned} T^{UD}: \quad S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ x = (x_{ij}) &\longmapsto (x_{(-i)j}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

即

$$[T^{UD}(x)]_{ij} = x_{(-i)j}, \forall (i, j) \in Z^2.$$

$$\begin{aligned} T^{LR} : \quad S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ x = (x_{ij}) &\longmapsto (x_{i(-j)}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

即

$$[T^{LR}(x)]_{ij} = x_{i(-j)}, \forall (i, j) \in Z^2.$$

$$\begin{aligned} T^D : \quad S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ x = (x_{ij}) &\longmapsto (x_{ji}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

即

$$[T^D(x)]_{ij} = x_{ji}, \forall (i, j) \in Z^2.$$

由构造易见映射 $\bar{T}$, T^{UD} , T^{LR} 和 T^D 是连续的一一映射, 则其逆映射也是连续的. 因此有

命题 3.1 映射 $\bar{T}$, T^{UD} , T^{LR} 和 T^D 为同胚映射.

由于加性细胞自动机全局映射的拓扑共轭分类具有封闭性, 为便于讨论, 这里仍将选择加性细胞自动机进行共轭分类.

定理 3.1 由二维细胞自动机局部规则定义在符号空间 S^{Z^2} 上的64个加性细胞自动机全局映射, 可由同胚映射 $\bar{T}$, T^{UD} , T^{LR} 和 T^D 分成18个拓扑共轭等价类(见表3-2). 每一类中的全局映射具有相同的动力学性质.

证明: 由于每个拓扑共轭等价类的证明类似, 故这里代表性地选择属于同一等价类下的全局映射 $f_6, f_7, f_8, f_9, f_{54}, f_{55}, f_{56}$ 和 f_{57} 作为讨论对象. 对 $\forall x = (x_{ij}) \in S^{Z^2}$, 上述全局映射可表示为

$$[f_6(x)]_{ij} = x_{ij} \oplus x_{(i+1)j}, \quad \forall (i, j) \in Z^2;$$

$$[f_7(x)]_{ij} = x_{ij} \oplus x_{i(j-1)}, \quad \forall (i, j) \in Z^2;$$

$$[f_8(x)]_{ij} = x_{ij} \oplus x_{(i-1)j}, \quad \forall (i, j) \in Z^2;$$

$$[f_9(x)]_{ij} = x_{ij} \oplus x_{i(j+1)}, \quad \forall (i, j) \in Z^2;$$

$$[f_{54}(x)]_{ij} = \overline{x_{ij} \oplus x_{i(j+1)}}, \quad \forall (i, j) \in Z^2;$$

$$[f_{55}(x)]_{ij} = \overline{x_{ij} \oplus x_{(i-1)j}}, \quad \forall (i, j) \in Z^2;$$

$$[f_{56}(x)]_{ij} = \overline{x_{ij} \oplus x_{i(j-1)}}, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2;$$

$$[f_{57}(x)]_{ij} = \overline{x_{ij} \oplus x_{(i+1)j}}, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

则有

(a) 映射 f_8 和 f_6 是拓扑共轲的. 利用同胚映射 T^{UD} , 对 $\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2$,

$$[T^{UD} \circ f_6(x)]_{ij} = x_{(-i)j} \oplus x_{(-i-1)j},$$

$$[f_8 \circ T^{UD}(x)]_{ij} = x_{(-i)j} \oplus x_{(-i-1)j}.$$

由 x 的任意性有 $T^{UD} \circ f_6 = f_8 \circ T^{UD}$. 因此全局映射 f_8 和 f_6 是拓扑共轲的.

(b) 映射 f_6 和 f_{57} 是拓扑共轲的. 利用同胚映射 $\overline{T}$, 对 $\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2$,

$$[\overline{T} \circ f_{57}(x)]_{ij} = x_{(i+1)j} \oplus x_{ij},$$

$$[f_6 \circ \overline{T}(x)]_{ij} = \overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{ij}}.$$

由于 $\overline{x_{(i+1)j} \oplus x_{ij}} = x_{(i+1)j} \oplus x_{ij}$, 则 $\overline{T} \circ f_{57} = f_6 \circ \overline{T}$. 因此全局映射 f_{57} 和 f_6 是拓扑共轲的.

(c) 映射 f_7 和 f_9 是拓扑共轲的. 利用同胚映射 T^{LR} , 对 $\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2$,

$$[T^{LR} \circ f_7(x)]_{ij} = x_{i(-j)} \oplus x_{i(-j+1)},$$

$$[f_9 \circ T^{LR}(x)]_{ij} = x_{i(-j)} \oplus x_{i(-j+1)}.$$

由 x 的任意性有 $T^{LR} \circ f_7 = f_9 \circ T^{LR}$. 因此全局映射 f_7 和 f_9 是拓扑共轲的.

(d) 映射 f_{57} 和 f_{54} 是拓扑共轲的. 利用同胚映射 T^D , 对 $\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2$,

$$[f_{57} \circ T^D(x)]_{ij} = \overline{x_{ji} \oplus x_{(j+1)i}},$$

$$[T^D \circ f_{54}(x)]_{ij} = \overline{x_{ji} \oplus x_{(j+1)i}}.$$

由 x 的任意性有 $T^D \circ f_{54} = f_{57} \circ T^D$. 因此全局映射 f_{54} 和 f_{57} 是拓扑共轲的.

类似地, 利用 $\overline{T}$ 得 f_7 和 f_{56} , f_9 和 f_{54} , f_8 和 f_{55} 分别是拓扑共轲的. 综上所述有以下交换图成立.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{\overline{T}} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{T^{LR}} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{\overline{T}} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{T^D} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{\overline{T}} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{T^{UD}} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{\overline{T}} & S^{\mathbb{Z}^2} \\
 f_{56} \downarrow & & f_7 \downarrow & & f_9 \downarrow & & f_{54} \downarrow & & f_{57} \downarrow & & f_6 \downarrow & & f_8 \downarrow & & f_{55} \downarrow \\
 S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{\overline{T}} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{T^{LR}} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{\overline{T}} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{T^D} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{\overline{T}} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{T^{UD}} & S^{\mathbb{Z}^2} & \xrightarrow{\overline{T}} & S^{\mathbb{Z}^2}
 \end{array}$$

因此 $f_6, f_7, f_8, f_9, f_{54}, f_{55}, f_{56}$ 和 f_{57} 属于同一拓扑共轭等价类. 证毕.

表3-2: 64个加性全局映射的18个拓扑共轭等价类.

编号	等价类下的全局映射	等价类下的全局映射	编号
1	$f_0 \ f_{63}$	f_1	2
3	f_{62}	$f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5$	4
5	$f_{58} \ f_{59} \ f_{60} \ f_{61}$	$f_6 \ f_7 \ f_8 \ f_9 \ f_{54} \ f_{55} \ f_{56} \ f_{57}$	6
7	$f_{10} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{15} \ f_{48} \ f_{50} \ f_{51} \ f_{53}$	$f_{11} \ f_{14} \ f_{49} \ f_{52}$	8
9	$f_{16} \ f_{19} \ f_{21} \ f_{24}$	$f_{47} \ f_{44} \ f_{42} \ f_{39}$	10
11	$f_{20} \ f_{25}$	$f_{38} \ f_{43}$	12
13	$f_{17} \ f_{18} \ f_{22} \ f_{23}$	$f_{40} \ f_{41} \ f_{45} \ f_{46}$	14
15	$f_{26} \ f_{27} \ f_{29} \ f_{30} \ f_{33} \ f_{34} \ f_{36} \ f_{37}$	$f_{28} \ f_{35}$	16
17	f_{31}	f_{32}	18

上述四个同胚映射 $\bar{T}, T^{UD}, T^{LR}$ 和 T^D 不仅可对加性细胞自动机全局映射进行拓扑共轭分类, 而且对非加性二维细胞自动机全局映射也是适用的. 对初等细胞自动机而言, 文[70]已通过两个同胚映射将256个全局映射分为88个拓扑共轭等价类, 且此等价类数目为最小的. 事实上, 我们发现在有限长度和周期边界条件下, 只要取长度为4, 就可把256个规则分为88类了. 同样, 我们指出本节得到的共轭等价类的数目也是最小的. 当然, 我们可通过其他共轭映射来完成同样的分类效果, 但由Neumann领域的平面结构以及 $\bar{T}, T^{UD}, T^{LR}$ 和 T^D 的几何意义可知本节构造的四个映射是本质的.

(三)、 程序设计

已知通过同胚映射 $\bar{T}, T^{UD}, T^{LR}$ 和 T^D 可将所有二维细胞自动机全局映射进行拓扑共轭分类. 然而, 本文讨论的细胞自动机规则数目有4294967296个, 这是一个较大的数, 用定理3.1的方法人工地进行分类, 其所需的计算量相当之大. 特别地, 对给定的一个局部规则, 我们如何能快速的找到与其等价的规则呢? 为此, 本节将对拓扑共轭分类进行程序设计, 达到快捷而有效的分类.

对任意给定的规则 N , 其布尔函数真值表为 $[\beta_0, \dots, \beta_{30}, \beta_{31}]$. 则存在规则 N' , 使全局映射 T_N 和 $T_{N'}$ 可通过共轭映射(不妨设为 $\bar{T}$)建立起拓扑共轭关系. 则有 $\bar{T} \circ T_{N'} = T_N \circ \bar{T}$, 从而 $T_{N'} = (\bar{T})^{-1} \circ T_N \circ \bar{T}$. 这样, 我们可由 N 的真值表得到 N' 的真值表为 $[\bar{\beta}_{31}, \bar{\beta}_{30}, \dots, \bar{\beta}_0]$, 其中 $N' = \sum_{i=0}^{31} \bar{\beta}_{31-i} \cdot 2^i$. 即

$$[\beta_0, \dots, \beta_{30}, \beta_{31}] \xrightarrow{\bar{T}} [\bar{\beta}_{31}, \bar{\beta}_{30}, \dots, \bar{\beta}_0]. \quad (3.5)$$

同理

$$[\beta_0, \dots, \beta_{30}, \beta_{31}] \xrightarrow{T^{UD}} [\beta_{i_0}, \beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_{31}}], \quad (3.6)$$

其中 $[i_0, i_1, \dots, i_{31}] = [0, 16, 2, 18, 4, 20, 6, 22, 8, 24, 10, 26, 12, 28, 14, 30, 1, 17, 3, 19, 5, 21, 7, 23, 9, 25, 11, 27, 13, 29, 15, 31]$.

$$[\beta_0, \dots, \beta_{30}, \beta_{31}] \xrightarrow{T^{LR}} [\beta_{i_0}, \beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_{31}}], \quad (3.7)$$

其中 $[i_0, i_1, \dots, i_{31}] = [0, 1, 8, 9, 4, 5, 12, 13, 2, 3, 10, 11, 6, 7, 14, 15, 16, 17, 24, 25, 20, 21, 28, 29, 18, 19, 26, 27, 22, 23, 30, 31]$.

$$[\beta_0, \dots, \beta_{30}, \beta_{31}] \xrightarrow{T^D} [\beta_{i_0}, \beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_{31}}], \quad (3.8)$$

其中 $[i_0, i_1, \dots, i_{31}] = [0, 8, 16, 24, 4, 12, 20, 28, 1, 9, 17, 25, 5, 13, 21, 29, 2, 10, 18, 26, 6, 14, 22, 30, 3, 11, 19, 27, 7, 15, 23, 31]$.

关于四个同胚映射之间的关系与性质, 我们有

命题 3.2

(1) 对任何 $T \in \{\bar{T}, T^{UD}, T^{LR}, T^D\}$, 有 $T^2 = Id$, $T^{-1} = T$, 以及 $\bar{T} \circ T = T \circ \bar{T}$, 其中 Id 为恒等映射;

(2) $T^{UD} \circ T^{LR} = T^{LR} \circ T^{UD}$, $T^{UD} \circ T^D = T^D \circ T^{LR}$, $T^{LR} \circ T^D = T^D \circ T^{UD}$.

证明: 由四个同胚映射的定义可知(1)与(2)都成立. 证毕.

我们注意到四个同胚映射之间只有 $T^{UD}(T^{LR})$ 与 T^D 不可交换. 同时, 由于 $T^{UD} \circ T^D = T^D \circ T^{LR}$ 与 $T^{LR} \circ T^D = T^D \circ T^{UD}$ 成立, 所以充分应用这些关系式, 容易验证

命题 3.3 $Id, \bar{T}, T^{UD}, T^{LR}$ 和 T^D 可通过函数符合运算生成一个群, 其元素个数为 16.

在此, 我们列出这个群的所有元素, 分别为: $g_0 = Id$, $g_1 = \bar{T}$, $g_2 = T^{UD}$, $g_3 = T^{LR}$, $g_4 = T^D$, $g_5 = \bar{T} \circ T^{UD}$, $g_6 = \bar{T} \circ T^{LR}$, $g_7 = \bar{T} \circ T^D$, $g_8 = T^{UD} \circ T^{LR}$, $g_9 = T^{UD} \circ T^D$, $g_{10} = T^{LR} \circ T^D$, $g_{11} = \bar{T} \circ T^{UD} \circ T^{LR}$, $g_{12} = \bar{T} \circ T^{UD} \circ T^D$, $g_{13} = \bar{T} \circ T^{LR} \circ T^D$, $g_{14} = T^{UD} \circ T^{LR} \circ T^D$, $g_{15} = \bar{T} \circ T^{UD} \circ T^{LR} \circ T^D$. 于是等价类中元素个数的特征如下:

定理 3.2 由同胚映射 $\bar{T}, T^{UD}, T^{LR}$ 和 T^D 对二维细胞自动机局部规则定义在符号空间 S^{Z^2} 上的全局映射拓扑共轭分类, 每个等价类中的元素个数为 16, 8, 4, 2 或 1.

证明: 对任意二维细胞自动机局部规则 N , 其布尔函数真值表为 $y = [\beta_0, \dots, \beta_{30}, \beta_{31}]$, 记 $\mathcal{N}$ 为规则 N 的共轭等价类, $|\mathcal{N}|$ 为 $\mathcal{N}$ 中元素的个数. 显然, $g_0(y) = y$. 若对 $\forall i \in \{0, 1, \dots, 15\}$, $g_i(y)$ 互不相等, 则 $|\mathcal{N}| = 16$. 不然, 则存在 $i, j \in \{0, 1, \dots, 15\}$ 使得 $g_i(y) = g_j(y)$. 这样我们需要考虑 C_{16}^2 个等式, 借助(3.5)—(3.8)我

们可设计程序完成此证明过程. 下面我们选择四个代表性的等式给出证明.

(a) 若 $g_1(y) = y$, 则由命题3.2得 $g_2(y) = g_5(y)$, $g_3(y) = g_6(y)$, $g_4(y) = g_7(y)$, $g_8(y) = g_{11}(y)$, $g_9(y) = g_{12}(y)$, $g_{10}(y) = g_{13}(y)$, $g_{14}(y) = g_{15}(y)$. 这意味着 $\mathcal{N}$ 中的元素将减少8个. 类似地可以证明, 若 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ 使得 $g_i(y) = y$, 则 $\mathcal{N}$ 都将减少8个.

(b) 若 $g_5(y) = y$, 则 $g_1(y) = g_2(y)$. 从而充分利用命题3.2中的等式, 有 $g_6(y) = g_8(y)$, $g_7(y) = g_{10}(y)$, $g_9(y) = g_{15}(y)$, $g_3(y) = g_{11}(y)$, $g_{12}(y) = g_{14}(y)$, $g_4(y) = g_{13}(y)$. 这样 $\mathcal{N}$ 中的元素也将减少8个. 类似地可以证明, 若 $i \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 使得 $g_i(y) = y$, 则 $\mathcal{N}$ 都将减少8个.

(c) 若 $g_{11}(y) = y$, 则 $g_1(y) = g_8(y)$. 由命题3.2得 $g_5(y) = g_3(y)$, $g_6(y) = g_2(y)$, $g_7(y) = g_{14}(y)$, $g_{12}(y) = g_{10}(y)$, $g_{13}(y) = g_9(y)$, $g_{15}(y) = g_4(y)$. 则 $\mathcal{N}$ 中的元素将减少8个. 类似地可以证明, 若 $i \in \{11, 12, 13, 14\}$ 使得 $g_i(y) = y$, 则 $\mathcal{N}$ 都将减少8个.

(d) 若 $g_{15}(y) = y$, 则 $g_{14}(y) = g_1(y)$. 从而有 $g_{13}(y) = g_2(y)$, $g_{12}(y) = g_3(y)$, $g_{11}(y) = g_4(y)$, $g_7(y) = g_8(y)$, $g_6(y) = g_9(y)$, $g_5(y) = g_{10}(y)$. 则 $\mathcal{N}$ 中的元素将减少8个.

这样, 如果有一对 $i, j \in \{0, 1, \dots, 15\}$ 使得 $g_i(y) = g_j(y)$, 则 $\mathcal{N}$ 中的元素将减少8个. 进而, 若还存在另一对 i', j' 使得 $g_{i'}(y) = g_{j'}(y)$, 则 $\mathcal{N}$ 中的元素将进一步减少4个, 以此类推. 终上所述, 我们可知 $|\mathcal{N}|$ 为16, 8, 4, 2, 或1. 证毕.

实例 现考虑本章第一节的局部规则 $N_0 = 4210689285$, 其布尔函数真值表为 $y = [1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1]$. 则有 $g_3(y) = y$, 从而得 $g_6(y) = g_1(y)$, $g_8(y) = g_2(y)$, $g_{10}(y) = g_{14}(y)$, $g_5(y) = g_{11}(y)$, $g_7(y) = g_{12}(y)$, $g_9(y) = g_4(y)$, $g_{13}(y) = g_{15}(y)$. 这样, 与 N_0 拓扑共轭等价的规则有8个, 其布尔函数真值表分别为:

$$g_1(y) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0];$$

$$g_2(y) = [1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1];$$

$$g_3(y) = [1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1];$$

$$g_4(y) = [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1];$$

$$g_5(y) = [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0];$$

$$g_7(y) = [0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0];$$

$$g_{10}(y) = [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1];$$

$$g_{13}(y) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0].$$

四、细胞自动机的动力学行为

(一)、初等细胞自动机的动力学性质

对一维细胞自动机而言, 当我们取状态集为 $S = \{0, 1\}$, 其邻域半径 $r = 1$ 时, 则称为初等细胞自动机. 因此, 每个规则的布尔函数真值表可表示为表4-1. 从而定义初等细胞自动机的局部规则编号为 $N = \sum_{j=0}^7 \alpha_j \cdot 2^j$, $\alpha_j \in \{0, 1\}$, $j = 0, 1, \dots, 7$. 显然, 共有 $2^8 = 256$ 个局部规则. 这样由真值表4-1可定义256个全局映射. 为便于讨论, 记 H_N 为初等细胞自动机规则 N 的全局映射. 例如, 规则56定义的全局映射 H_{56} 为^[70]: 对 $\forall x \in S^Z$,

$$[H_{56}(x)]_i = x_{i-1} \cdot \bar{x}_i \oplus \bar{x}_{i-1} \cdot x_i \cdot x_{i+1}, \forall i \in Z. \quad (4.1)$$

表4-1. 初等细胞自动机规则的布尔函数真值表.

x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	y_i
0	0	0	α_0
0	0	1	α_1
0	1	0	α_2
0	1	1	α_3
1	0	0	α_4
1	0	1	α_5
1	1	0	α_6
1	1	1	α_7

初等细胞自动机全局映射的符号动力学行为的研究在各方面得到了发展, 成果比较丰富. 例如, 关于加性的、满的、等度连续的、正扩张的以及置换的(permutative)细胞自动机的动力学行为分析相对比较完整^[46, 50, 53, 58–60]. 但是, 仍然有许多全局映射的符号动力学行为还知之甚少, 尤其是那些具有普适性的细胞自动机. 特别值得一提的是, 自2002年以来, L.O. Chua教授等人结合他们的细胞神经网络的研究成果用非线性动力学的思想对Wolfram的计算机模拟结果给予了一系列数学上的刻画^[62–67], 极大地推动了人们在理论上进一步对初等细胞自动机的研究. 在此基础上, 文[71-75]从符号动力学的角度详细地刻画了Bernoulli规则的动力学性质和混沌性状. 下面列出了部分已知的结论, 为方便起见, 以下将只选择属于同一等价类中的某个全局映射进行阐述.

命题 4.1^[70] 256个初等细胞自动机全局映射可分为88个拓扑共轭等价类.

命题 4.2^[51–53] 对于初等细胞自动机规则15, 30, 45, 60, 90, 105, 106, 150, 154和170, 其定义的全局映射在 S^Z 上拓扑混合, 且拓扑熵大于0.

命题 4.3^[71–75] Bernoulli规则2, 3, 11, 37, 42和56其定义的全局映射在 S^Z 上拥有混沌的子系统.

下面, 我们详细地刻画Bernoulli规则56和复杂Bernoulli规则 (Complex Bernoulli rule^[65])18在符号空间 S^Z 上的动力学行为.

1、 H_{56} 的动力学性质

在有限长度和周期边界条件下, 文[63]引入了细胞自动机特征函数(characteristic function)的概念对256个规则进行了数字模拟, 从大量的计算机模拟结果得到规则56具有两个鲁棒性Bernoulli-shift吸引子. 为了形象地说明规则56的Bernoulli-shift特征, 我们给出了其时空演化图(见图4-1、图4-2、图4-3和图4-4). 本节将在双边无穷的条件下证明此结论, 并刻画 H_{56} 的动力学性质.

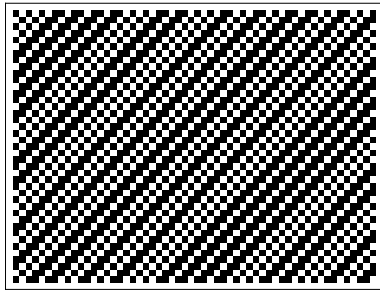


图4-1: 规则56作用一次细胞序列向左移动一位.

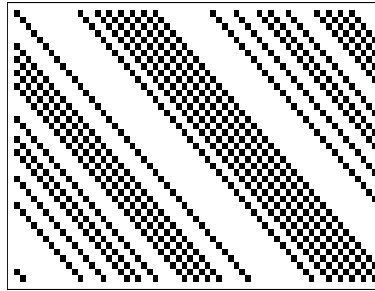


图4-2: 规则56作用一次细胞序列向右移动一位.

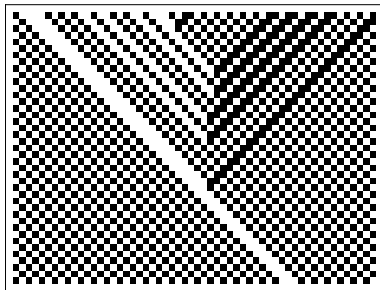


图4-3: 在规则56作用下, 左右移位相互碰撞并导致字(1, 1)的消失.

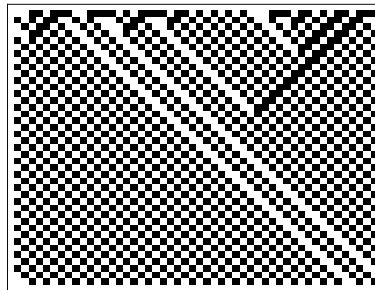


图4-4: 规则56作用随机选择的细胞序列的演化图.

命题 4.4 对于全局映射 H_{56} , 存在一个子集合 $\Lambda \subset S^Z$, 使得当 $\forall x \in \Lambda$,

$T_{56}(x) = \sigma(x)$ 当且仅当 $\forall x \in \Lambda, \forall i \in Z$ 有

$$x_{[i-1, i+1]} \in \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}.$$

证明: (必要性) 假设存在 $\Lambda \subset S^Z$ 使得 $x \in \Lambda$ 有 $H_{56}(x) = \sigma(x)$, 即 $[H_{56}(x)]_i = [\sigma(x)]_i = x_{i+1}, \forall i \in Z$. 则由(4.1)可知 $x_{i-1} \cdot \bar{x}_i \oplus \bar{x}_{i-1} \cdot x_i \cdot x_{i+1} = x_{i+1}, \forall i \in Z$. 如果 $x_i = 0$, 则 $x_{i-1} = x_{i+1}$; 如果 $x_i = 1$, 则 $x_{i-1} \cdot x_{i+1} = 0$. 因此, $x_{[i-1, i+1]} \in \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}, \forall i \in Z$.

(充分性) 假设存在 $\Lambda \subset S^Z$ 使得 $\forall x \in \Lambda, \forall i \in Z$, 有 $x_{[i-1, i+1]} \in \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$. 从而, 由规则56的布尔函数真值表可得 $[H_{56}(x)]_i = x_{i+1}, \forall i \in Z$. 因此, $[H_{56}(x)]_i = [\sigma(x)]_i = x_{i+1}, \forall i \in Z$. 即 $H_{56}(x) = \sigma(x), \forall x \in \Lambda$. 证毕.

类似讨论可得:

命题 4.5 对于全局映射 H_{56} , 存在一个子集合 $\tilde{\Lambda} \subset S^Z$, 使得当 $\forall x \in \tilde{\Lambda}$, $H_{56}(x) = \tilde{\sigma}(x)$ 当且仅当 $\forall x \in \tilde{\Lambda}, \forall i \in Z$ 有

$$x_{[i-1, i+1]} \in \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\},$$

其中 $[\tilde{\sigma}(x)]_i = x_{i-1}$ 为右移位映射.

由命题4.4和命题4.5可得

定理 4.1 $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{A}}$ 和 $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{\mathcal{B}}$ 都是有限型子移位, 其中

$$\mathcal{A} = \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$$

和

$$\mathcal{B} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$$

分别是它们的决定系统.

我们记 $\mathcal{C} = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$, 则由规则56的布尔函数真值表可知

引理 4.1

- (1) $\Lambda_{\mathcal{A}} \cup \Lambda_{\mathcal{B}} \subseteq \Lambda_{\mathcal{C}}$;
- (2) 对任何 $x \in S^Z$, $H_{56}(x) \in \Lambda_{\mathcal{C}}$;
- (3) 对任何 $x \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, 若 $(0, 0) \not\prec x$, 则 $x \in \Lambda_{\mathcal{A}}$; 若 $(1, 1) \not\prec x$, 则 $x \in \Lambda_{\mathcal{B}}$.

由规则56的时空演化图4-3和图4-4可知

定理 4.2 $\Lambda_{\mathcal{A}} \cup \Lambda_{\mathcal{B}}$ 是 H_{56} 的全局吸引子, 即 $\bigcap_{n \geq 0} H_{56}^n(S^Z) = \Lambda_{\mathcal{A}} \cup \Lambda_{\mathcal{B}}$.

证明: 由引理4.1可知, 要证 $\Lambda_{\mathcal{A}} \cup \Lambda_{\mathcal{B}}$ 是 H_{56} 的全局吸引子, 我们只须证对任何 $x \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, 若 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 都是 x 的字, 则 x 在 H_{56} 的作用下将趋向于 $\Lambda_{\mathcal{A}} \cup \Lambda_{\mathcal{B}}$. 现分两种情况考虑:

(a) $(0, 0)$ 是第一个出现在 $(1, 1)$ 左边的字. 不失一般性, 假设

$$x_{[1, 2n+4]} = (0, 0, \underbrace{1, 0, \dots, 1, 0}_{2n}, 1, 1).$$

据命题4.4和命题4.5, 容易验证

$$[H_{56}(x)]_{[k, k+1]} = \begin{cases} (0, 0), & \text{若 } k = 2; \\ (1, 0), & \text{若 } k = 3, \dots, 2n+1; \\ (1, 1), & \text{若 } k = 2n+2. \end{cases}$$

因此, 我们有 $(1, 1) \not\prec [H_{56}^n(x)]_{[1, 2n+4]}$.

(b) $(0, 0)$ 是第一个出现在 $(1, 1)$ 右边的字. 同样可设

$$x_{[1, 2m+4]} = (1, 1, \underbrace{0, 1, \dots, 0, 1}_{2m}, 0, 0),$$

则有 $[H_{56}(x)]_{[k, k+1]} = (0, 1), k = 2, \dots, 2m+3$. 从而有 $(1, 1) \not\prec [H_{56}^n(x)]_{[3-n, 2m+2+n]}$. 这意味着 $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{56}^n(x) \in \Lambda_{\mathcal{A}} \cup \Lambda_{\mathcal{B}}$.

同时结合引理4.1(2), 我们有对任何 $x \in S^Z$, $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{56}^n(x) \in \Lambda_{\mathcal{A}} \cup \Lambda_{\mathcal{B}}$. 证毕.

由于 H_{56} 在 Λ 和 $\tilde{\Lambda}$ 上动力学行为分别等价于有限型子移位 $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{A}}$ 和 $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{\mathcal{B}}$ 的动力学行为, 所以下面我们通过这两个有限型子移位的动力学性质来刻画 H_{56} 在 Λ 和 $\tilde{\Lambda}$ 上动力学性质.

命题 4.6

(1) 与 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 拓扑共轲的2阶子移位的转移方阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

(2) H_{56} 在 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 上不拓扑混合;

(3) H_{56} 在 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 上的拓扑熵为 $\log \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 0.4812$.

证明: (1) 由转移矩阵的定义2.1不难得到与 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 拓扑共轭的2阶子移位的转移方阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2) 易见, 对任意正整数 n 有 A^n 的第一行始终是 $(1, 0, 0, 0, 0)$, 则据命题2.2(2)得 H_{56} 在 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 上不拓扑混合.

(3) 由于两个拓扑共轭的紧致系统具有相同的拓扑熵, 同时矩阵 A 的模最大的特征值为 $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, 据命题2.2(1)得有限型子移位 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 的拓扑熵为 $\log \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. 从而, 由命题4.4和定理4.1得 H_{56} 在 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 上的拓扑熵为 $\log \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 0.4812$. 证毕.

根据命题4.6, H_{56} 在 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 上不拓扑混合. 但若在集合 $\Lambda_{\mathcal{A}}$ 中去掉点 $\underline{(0)}$ 后, 则 H_{56} 是拓扑混合的, 其中 $\underline{(0)} = (\cdots, 0, 0, 0, \cdots)$. 事实上, $\Lambda_{\mathcal{A}'} = \Lambda_{\mathcal{A}} \setminus \{\underline{(0)}\}$, 其中 $\mathcal{A}' = \{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$. 而与子移位 $\Lambda_{\mathcal{A}'}$ 拓扑共轭的2阶子移位的转移

矩阵为 $A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. 易见, 当 $n \geq 6$ 时, $(A')^n$ 中的每个元素都非负. 同时,

子移位 $\Lambda_{\mathcal{A}'}$ 的拓扑熵依旧等于 $\log \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

同理有

命题 4.7

(1) 与 $\Lambda_{\mathcal{B}}$ 拓扑共轭的2阶子移位的转移方阵为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

(2) H_{56} 在 $\Lambda_{\mathcal{B}}$ 上拓扑混合;

(3) H_{56} 在 $\Lambda_{\mathcal{B}}$ 上的拓扑熵为 $\log \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 0.4812$.

结合命题4.6与命题4.7, 我们可知

定理 4.3

- (1) H_{56} 在其全局吸引子上不拓扑混合;
- (2) H_{56} 在其全局吸引子上的拓扑熵大于0.

由于正拓扑熵蕴涵着Li-Yorke意义下的混沌, 而拓扑混合性蕴涵着多种意义下的混沌, 如Devaney意义下的混沌, 熊金城意义下的混沌等等. 终上所述, 我们有

定理 4.4 H_{56} 在子系统 $\Lambda_{\mathcal{A}'}$ 和 $\Lambda_{\mathcal{B}}$ 上既具有Li-Yorke意义下的混沌, 又具有Devaney意义下的混沌. 同时, H_{56} 在其全局吸引子上具有Li-Yorke意义下的混沌.

2、 H_{18} 的动力学性质

初等细胞自动机规则18定义的全局映射 H_{18} 如下^[70]: 对 $\forall x \in S^Z$,

$$[H_{18}(x)]_i = \bar{x}_i \cdot (x_{i+1} \oplus x_{i-1}), \forall i \in Z. \quad (4.2)$$

命题 4.8

- (1) 对 $\forall y \in S^Z$, 若 $(1, 1, 1) \prec y$, 则在 H_{18} 下 y 没有原象;
- (2) 对 $\forall y \in S^Z$, 若存在整数区间 $I = [i, j]$ 使得 $y_{[i,j]} = (0, 1, 1, 0, \dots, 0, 1, 1, 0)$, 则在 H_{18} 下 y 没有原象, 其中 $\sum_{k=i+4}^{j-4} y_k \pmod{2} = 1$.

证明: 由规则18的布尔函数真值表得(1)成立. 下面我们将用反证法得到(2)也成立.

假设 $x \in S^Z$ 就是 y 的原象. 不失一般性, 设 $I = [0, n]$, 则 $y_{[0,3]} = y_{[n-3,n]} = (0, 1, 1, 0)$ 和 $\sum_{k=4}^{n-4} y_k \pmod{2} = 1$. 由规则18的真值表得 $x_{[0,3]} = x_{[n-3,n]} = (1, 0, 0, 1)$. 同时, 由(4.2)得

$$\begin{cases} y_2 = \bar{x}_2 \cdot x_1 \oplus \bar{x}_2 \cdot x_3 \\ y_3 = \bar{x}_3 \cdot x_2 \oplus \bar{x}_3 \cdot x_4 \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-3} = \bar{x}_{n-3} \cdot x_{n-2} \oplus \bar{x}_{n-3} \cdot x_{n-4} \\ y_{n-2} = \bar{x}_{n-2} \cdot x_{n-3} \oplus \bar{x}_{n-2} \cdot x_{n-1}. \end{cases} \quad (4.3)$$

因此, 我们有 $\sum_{k=2}^{n-2} y_k \pmod{2} = \sum_{k=4}^{n-4} y_k \pmod{2} = 1$. 注意到 $\bar{x}_i \cdot x_j \oplus \bar{x}_j \cdot x_i = x_i \oplus x_j$ 和 $x_i \oplus x_i = 0$, 把方程组(4.3)的右边全部相加得 $\bar{x}_2 \cdot x_1 \oplus x_2 \oplus x_{n-2} \oplus \bar{x}_{n-2} \cdot x_{n-1} = 0$, 这导致了矛盾. 证毕.

命题 4.9 对 $\forall y \in S^Z$, 若 $(1, 1) \not\prec y$, 则在 H_{18} 下 y 存在一个原象 $x \in S^Z$ 使得 $(1, 1, 1) \not\prec x$.

证明: 由于 $(1, 1) \not\prec y$, 所以 $y_i = 1$ 意味着 $y_{i-1} = y_{i+1} = 0$. 从而, 有 $x_{[i-1, i+1]} = (1, 0, 0)$ 或 $(0, 0, 1)$. 不失一般性, 我们假设 $y_{[0, n+1]} = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_n, 1)$, $n \geq 1$. 显然, $x_{[-1, 1]} = (1, 0, 0)$ 当且仅当 $x_{[n, n+2]} = (0, 0, 1)$. 现分别考虑:

(a) 若 $x_{[-1, 1]} = (1, 0, 0)$. 易见, 存在唯一的 $x_{[-1, n+2]} = (1, 0, \dots, 0, 1)$ 使得 $[H_{18}(x)]_{[0, n+1]} = y_{[0, n+1]}$.

(b) 若 $x_{[-1, 1]} = (0, 0, 1)$. 令 $x_{[2, n-1]}$ 使得字 $(1, 1)$ 和 $(0, 0)$ 都不出现, 则可验证 $[H_{18}(x)]_{[0, n+1]} = y_{[0, n+1]}$. 进而, 在上述两种情况中, $(1, 1, 1) \not\prec x_{[-1, n+2]}$. 证毕.

为讨论方便, 记 Δ 为命题 4.8 得到的所有没有原象的点组成的集合. 据命题 4.9 可知, 若 $(1, 1) \not\prec y$, 则在 H_{18} 下 y 的原象有很多, 尤其是可以得到一个由字 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 构成的原象 x , 使得 $x \in \Delta$. 在本节下面的讨论中, 记 $\Lambda = S^Z - \Delta$. 由于 Δ 是一个开集, 则 Λ 是闭的. 从而有

定理 4.5 $H_{18}(S^Z) = \Lambda$, 即 Λ 是 H_{18} 的全局吸引子.

另外, 文[76]指出若对细胞序列作变换

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow (0, 0) \\ 1 \longrightarrow (1, 0), \end{cases} \quad (4.4)$$

则规则 18 作用此序列两次得到的结果恰到等于加性规则 90 作用一次. 为此, 我们先构造新的符号空间 $\tilde{S}^Z$, 并在此空间上定义距离为 (2.1), 其中 $\tilde{S} = \{00, 10\}$. 令 Λ' 为满足下列条件的所有双边序列 $z \in S^Z$ 组成的集合: $\forall i \in Z$,

$$\begin{cases} z_i = 1 \implies z_{i+1} = 0 \\ z_i = 0 \implies z_{i+1} = 0. \end{cases}$$

则由命题 4.9 得

命题 4.10 (Λ', H_{18}) 为 (S^Z, H_{18}) 的子系统.

我们定义块映射 B 和释放映射 R 如下:

$$\begin{aligned} B: S^Z &\longrightarrow \tilde{S}^Z \\ x &\longmapsto y \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中 $y_i = [B(x)]_i = \begin{cases} 00, & \text{若 } x_i = 0 \\ 10, & \text{若 } x_i = 1. \end{cases}$

$$\begin{aligned} R: \tilde{S}^Z &\longrightarrow \Lambda' \\ y &\longmapsto z \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中 $z_i = [R(y)]_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } i \text{ 为偶数且 } y_{\frac{i}{2}} = 10 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 且 $\Lambda' = R(\tilde{S}^Z) \subseteq S^Z$.

易见映射 B 和 R 都是同胚映射. 同时, 由变换(4.3)可知

命题 4.11 下图可交换

$$\begin{array}{ccccc} S^Z & \xrightarrow{B} & \tilde{S}^Z & \xrightarrow{R} & \Lambda' \\ H_{90} \downarrow & & & & \downarrow H_{18}^2 \\ S^Z & \xrightarrow{B} & \tilde{S}^Z & \xrightarrow{R} & \Lambda'. \end{array}$$

从而有

定理 4.6 (Λ', H_{18}^2) 与 (S^Z, H_{90}) 拓扑共轲.

由于 H_{90} 的动力学行为已得到深入的研究, 已到了许多漂亮的结论, 从而结合命题(4.2)可知

定理 4.7

- (1) H_{18} 在 Λ' 上拓扑混合;
- (2) H_{18} 在 Λ' 上的拓扑熵等于 $\log 2$;
- (3) H_{18} 在全局吸引子 Λ 上的拓扑熵不小于 $\log 2$.

(二)、二维细胞自动机的动力学性质

由定理2.4可知二维符号动力系统 (S^{Z^2}, σ_{01}) 与一维符号动力系统 (S^Z, σ) 之间是拓扑半共轲的, 基于此思想与方法, 本节将建立二维细胞自动机全局映射与初等细胞自动机全局映射之间的拓扑半共轲的关系. 为此, 我们定义映射如下:

$$\begin{aligned} h_1: S^{Z^2} &\longrightarrow S^Z \\ (x_{ij}) &\longmapsto (x_{0j}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

和

$$\begin{aligned} h_2: S^{Z^2} &\longrightarrow S^Z \\ (x_{ij}) &\longmapsto (x_{0(j-i)}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

定理 4.8 二维细胞自动机全局映射与初等细胞自动机全局映射可通过 h_1 或 h_2 建立拓扑半共轭关系.

证明: 首先, 通过类似于定理2.4中的证明方法可知 h_1 和 h_2 都是连续的满射. 下证: 对任何二维细胞自动机全局映射 T_i , 可通过 h_1 和 h_2 分别定义一个初等细胞自动机全局映射. 事实上, 对 $\forall y \in S^Z$, 由于 h_1 为满射, 则存在 $x \in S^{Z^2}$, 使得 $y = h_1(x)$. 则定义全局映射 H 为:

$$\begin{aligned} H: S^Z &\longrightarrow S^Z \\ y &\longmapsto h_1 \circ T_i(x) \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 $y_j = [h_1 \circ T_i(x)]_j, \forall j \in Z$.

由于本文采用Neumann领域, 所以由(4.9)定义的映射 H 即为某个初等细胞自动机局部规则诱导的全局映射. 从而, 下图可交换.

$$\begin{array}{ccc} S^{Z^2} & \xrightarrow{T_i} & S^{Z^2} \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ S^Z & \xrightarrow{H} & S^Z. \end{array}$$

证毕.

这样二维细胞自动机为初等细胞自动机的扩充, 而初等细胞自动机则是二维细胞自动机的因子. 众所周知, 动力系统的核心问题是轨道的渐近性质或拓扑结构, 而轨道渐近性质由 ω -极限集描述. 一个点在生成它的 ω -极限集的同时, 也生成它极小吸引中心和系统的不变测度. 虽然拓扑半共轭的两个紧致系统, 其动力学行为可以大不一样, 但在拓扑半共轭的条件下也同样可以保持系统的某些拓扑不变性. 例如, 扩充的拓扑熵不小于因子的; 文[77]引进了极小覆盖的概念, 使得可以在扩充中找到某个子系统, 它与因子在性质上更相近; 文[78]也详细地讨论了拓扑半共轭的动力系统的不动点集, 周期点集, 几乎周期点集, ω -极限集, 非游荡点集等之间的关系. 这样, 据定理4.8, 上述结论都可应用到对二维细胞自动机全局映射的研究中. 特别地, 由于大部分初等细胞自动机全局映射的拓扑熵已得到计算或估计, 这给估计二维细胞自动机全局映射的拓扑熵带来了极大的方便.

若我们将拓扑半共轭映射 h_1 和 h_2 限制在某个集合上, 则可得 h_1 和 h_2 为拓扑共轭映射. 为此, 定义 S^{Z^2} 的子集如下:

$$\Lambda_1 = \{x = (x_{ij}) \in S^{Z^2} \mid x_{ij} = x_{0j}, \forall (i, j) \in Z^2\}; \quad (4.10)$$

$$\Lambda_2 = \{x = (x_{ij}) \in S^{Z^2} \mid x_{ij} = x_{0(j-i)}, \forall (i, j) \in Z^2\}. \quad (4.11)$$

那么有

命题 4.12 $h_1|_{\Lambda_1}$ 和 $h_2|_{\Lambda_2}$ 都是同胚映射.

至此, 我们就可通过初等细胞自动机全局映射的动力学性质粗略的得到二维细胞自动机全局映射的动力学性质.

实例 考虑初等细胞自动机规则18, 由定理4.8可知全局映射

$$\begin{aligned} T_1 : S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ (x_{ij}) &\longmapsto (\bar{x}_{ij} \cdot (x_{(i+1)j} \oplus x_{(i-1)j})) \end{aligned} \quad (4.12)$$

和

$$\begin{aligned} T_2 : S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ (x_{ij}) &\longmapsto (\bar{x}_{ij} \cdot (x_{i(j+1)} \oplus x_{i(j-1)})) \end{aligned} \quad (4.13)$$

都是与 H_{18} 拓扑半共轭的. 据命题4.12得 (Λ_1, T_1) 和 (Λ_2, T_2) 分别与 (S^Z, H_{18}) 是拓扑共轭的. 这样定理4.7中的结论在 (Λ_1, T_1) 和 (Λ_2, T_2) 中也完全成立. 特别地, (S^{Z^2}, T_1) 与 (S^{Z^2}, T_2) 的拓扑熵不小于 $\log 2$.

(三)、普适细胞自动机规则

早在上个世纪30年代的时候, 人们就发现了各种计算系统之间由于可以相互模拟所带来的等价性. 于是, 人们猜想, 也许自然中的一切计算都不会超过人们发明的各种计算模型所能及的范围. 这个猜想被称为丘奇、图灵论题(**Church-Turing Thesis**)^[79, 80], 即: 任何一种可有效计算过程就是图灵机可计算的过程. 反过来说, 图灵机可计算性就是有效计算的定义. 因为任何一个计算过程都可以用图灵机来计算, 所以人们又称图灵机是一类具有普适计算性, 简称普适性的系统. 那么, 任何一类可模拟所有图灵机的计算系统也是一类具有普适性的系统(**universal computation**). 普适性是一个非常重要的概念, 它意味着各个不同系统之间的某种本质上的等价关系.

在细胞自动机这个大类里面, 也存在着普适细胞自动机, 它具有普适图灵机的计算能力, 与图灵机等价, 也就是说给定适当的初始条件, 它能够模拟任何一种计算机. 其中, 最著名的普适细胞自动机为Conway于1970年提出的生命游戏^[43](**game of life**), 它是一个二维细胞自动机. 生命游戏是具有产生动态图案和动态结构能力的元胞自动机模型, 它能产生丰富的、有趣的图案. 这些图案包含着3类基本结构:

第一类: 在迭代过程中, 细胞群不会改变其状态(形状);

第二类: 在迭代过程中, 细胞群会在有限的迭代次数内周期循环其状态(形状), 最著名的代表就是所谓的“闪光灯”(blinker);(见图4-5)

第三类: 是第二类的延伸, 除了会周期循环其状态(形状)之外, 还会稳定地移动, 最有名的代表就是所谓的“滑翔机”(glider).(见图4-6)

像滑翔机这种会移动并维持形态的结构, 似乎能够在生命游戏中扮演传递讯号的角色. 能够产生滑翔机的生命游戏, 代表着它具有讯号储存与讯号传递的功能, 而讯号的储存与传递是生物演化机制的重要特征, 也是建构一台电脑的必要条件. 同样地, **Conway**也指出, 飞行的滑翔机可以想像成川流不息的位元, 滑翔机若能与其他滑翔机做巧妙的结合, 便可以做符号运算. 例如滑翔机的碰撞相当于逻辑闸, 入射机群为输入, 而碰撞后的碎片为输出, **Conway**用数学去证明生命游戏在逻辑上, 足以涵盖多用途数位电脑的全部功能.

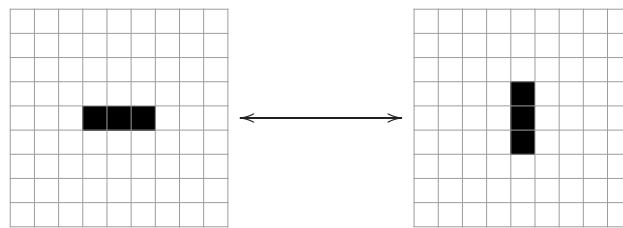


图4-5: 生命游戏演化中一种闪光灯, 即为周期2的循环形状.

另外, 在初等细胞自动机中, **Wolfram**的助手**Mathew Cook**证明了规则110是具有普适性的, 这是目前为止最简单的支持普适计算的系统. 值得注意的是: 证明规则110是普适的方法非常奇特. 它并不像其它证明普适性的方法那样从底层规则做起, 而是通过观察110细胞自动机涌现出的花纹上的规律出发的. 因此, 这是一种异常艰难的, 从图形出发的证明方法. 下面展示了规则110在一个随机的初始条件下的演化情况, 见图4-7. 从其演化图中可以看出它拥有大量的类似“滑翔机”(glider-like)的结构, 从符号动力学角度讲就是一种移位. 这些滑翔机在同一个“以太”(ether)上进行移动, 其中大部分向左移动. 由于它们移动的方向和速度不尽相同, 所以会出现很多碰撞(collision). 这些碰撞有的导致新滑翔机的生成, 有的则消失于以太中了. 另外, 局部的细胞群会相互作用而产生滑翔机或者新的结构——“滑翔枪”(glider gun). 这样, 规则110的演化不像ECA规则90那样混乱一片, 也不像ECA规则56那样只有左右两种移位.

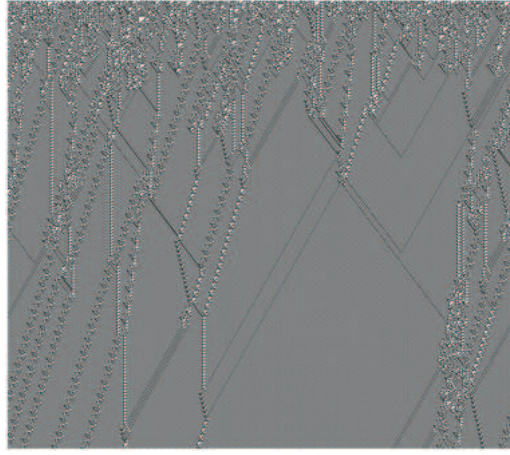


图4-7: ECA规则110作用在随机选择的细胞序列的演化图.

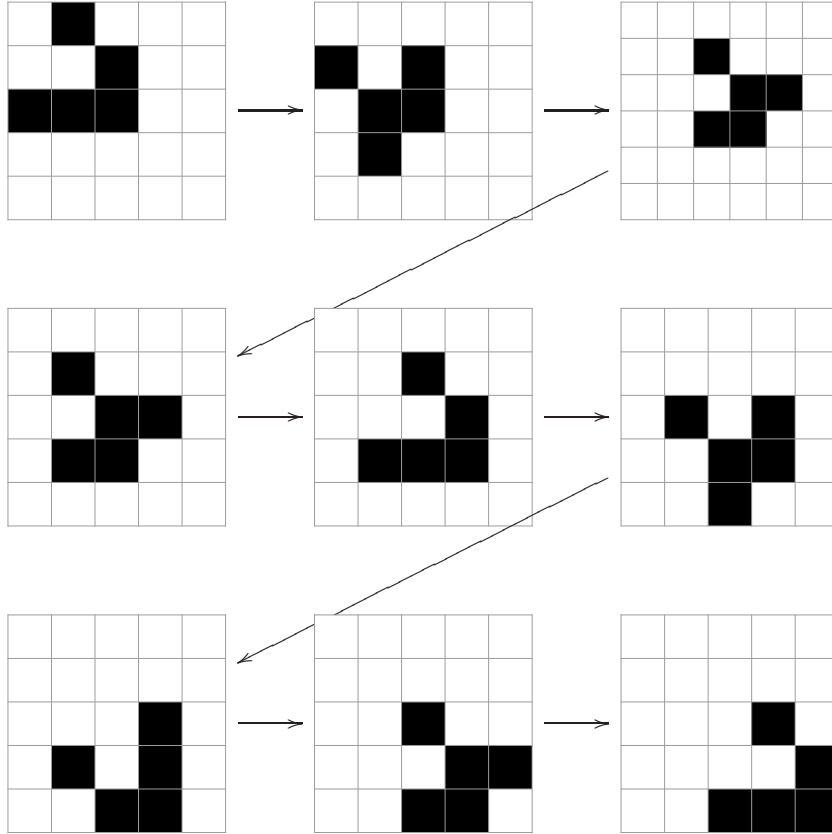


图4-6: 生命游戏演化中一种滑翔机, 即为周期20的循环形状, 同时向方格的右下角进行滑翔.

命题4.13^[69] 初等细胞自动机规则110具有普适性.

已知规则110的全局映射为 $[H_{110}(x)]_i = x_i \oplus x_{i+1} \oplus x_i \cdot x_{i+1} \oplus x_{i-1} \cdot x_i \cdot x_{i+1}$, $\forall x \in S^Z, \forall i \in Z$. 由定理4.8可知, 在二维细胞自动机中我们可以找到规则 N , 使

得 T_N 与 H_{110} 拓扑半共轭. 进一步, 我们构造二维细胞自动机全局映射如下:

$$\begin{aligned} T : S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ x &\longmapsto T(x) \end{aligned} \quad (4.14)$$

其中 $[T(x)]_{ij} = x_{ij} \oplus x_{i(j+1)} \oplus x_{ij} \cdot x_{i(j+1)} \oplus x_{i(j-1)} \cdot x_{ij} \cdot x_{i(j+1)}, \forall (i, j) \in Z^2$.

$$\begin{aligned} T' : S^{Z^2} &\longrightarrow S^{Z^2} \\ x &\longmapsto T'(x) \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中 $[T'(x)]_{ij} = x_{ij} \oplus x_{i(j+1)} \oplus x_{ij} \cdot x_{i(j+1)} \oplus x_{(i+1)j} \cdot x_{ij} \cdot x_{i(j+1)}, \forall (i, j) \in Z^2$.

由(4.14)和(4.15)可知, 全局映射 T 和 T' 的布尔函数真值表分别为:

$$b_T = [0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0]$$

和

$$b_{T'} = [0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0],$$

则相应的规则编号为 $N_T = 1023163644$ 和 $N_{T'} = 1010629884$.

定理 4.9 二维细胞自动机 $N_T = 1023163644$ 和 $N_{T'} = 1010629884$ 都是普适细胞自动机.

证明: 由命题4.11和命题4.12可得, (Λ_1, h_i) 与 (S^Z, H_{110}) 是拓扑共轭的, 其中 $i = 1, 2$. 由于拓扑共轭的两个系统可以看作同一个系统, 因此二维细胞自动机规则 $N_T = 1023163644$ 和 $N_{T'} = 1010629884$ 都具有普适性. 证毕.

类似于第三章第三节中实例的办法, 通过同胚映射 $\bar{T}$, T^{UD} , T^{LR} 和 T^D 我们可以找到与上述普适细胞自动机规则拓扑共轭的规则. 具体地, 这2个拓扑共轭等价类为

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 = \{ &\underline{1023163644}, 1072709616, 1515911930, 1600123120, \\ &2694882725, 3234054339, 4026789891, 4042261765 \} \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 = \{ &267452400, 268431600, \underline{1010629884}, 1061155056, \\ &1526356730, 1609588720, 2054847098, 2088533116, \\ &2695209125, 2711724449, 3233858499, 3250700737, \end{aligned}$$

4026593295, 4026920965, 4042260495, 4042261251}

定理 4.10 等价类 $\mathcal{S}_1$ 与 $\mathcal{S}_2$ 中的规则都是二维普适细胞自动机规则, 共24个.

(四)、模拟

本节将选取普适细胞自动机规则 $N_T = 1023163644$, 对其演化进行数字模拟, 选用的数学软件为 $Mathematica$ 6.0. 为讨论方便, 我们先给出以下记号. 二维细胞自动机满足周期边界条件, 有 $m \times n$ 个细胞组成, 每个细胞记为 C_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$). 所以, 在形式上此细胞自动机每步的演化状态都是一个 $m \times n$ 阶矩阵, 记为 $C = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$, 其中 α_i 是 m 维行向量, $i = 1, \dots, n$. 我们用黑色方格代表状态“1”, 白色方格代表状态“0” (见图4-8). 每个图中箭头上的“ $\tau = k$ ”意味着从初始状态到箭头所指状态所需迭代的次数, 其中 k 为正整数.

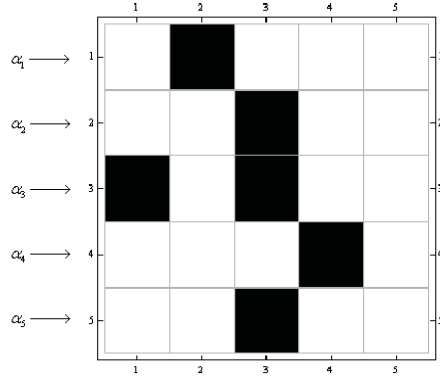


图4-8: 二维细胞自动机的一个演化状态.

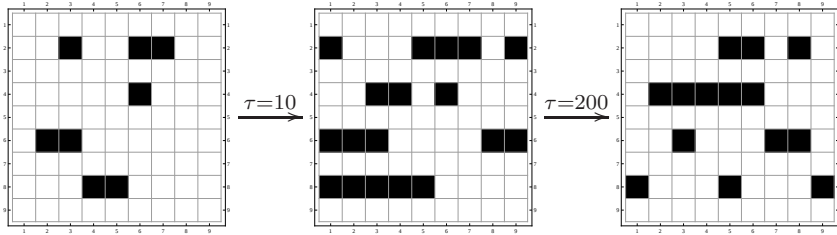


图4-9: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9$ 之间互相独立进行演化, 互不干扰.

观察1 规则演化在垂直方向上独立.

由(4.14)可知, 细胞 C_{ij} 在下一时刻的取值只取决于其左、右两个邻居 $C_{i(j-1)}$ 与 $C_{i(j+1)}$ 在此刻的取值, 而与其上、下两个邻居无关. 这意味着 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是相互独立的. 如果我们把每个 α_i 看作是讯号, 则此规则只能向水平方向传递讯号, 而垂直

方向上无干扰(见图4-9). 这样, 由于ECA规则110是普适的, 即等价于普适图灵机, 则一个二维细胞自动机规则 N_T 可定义 m 个独立的普适图灵机. 这或许为并行信息处理和并行计算等提供了些许帮助.

观察2 几乎没有固定结构的细胞群.

在初等细胞自动机中, 规则110的不动点为每个细胞都取状态“0”. 由观察1知, 在规则 N_T 的迭代过程中, 只有每个细胞都是白色才能使得其形态不发生改变. 同时, 当我们考察初始状态 C 中某个细胞群时, 其演化会类似蠕动的毛毛虫, 不断向水平方向延伸(见图4-10). 从而, 要形成类似与生命游戏的闪光灯和滑翔机只能考虑整个水平方向上的细胞, 而不可能是局部的某个细胞群.

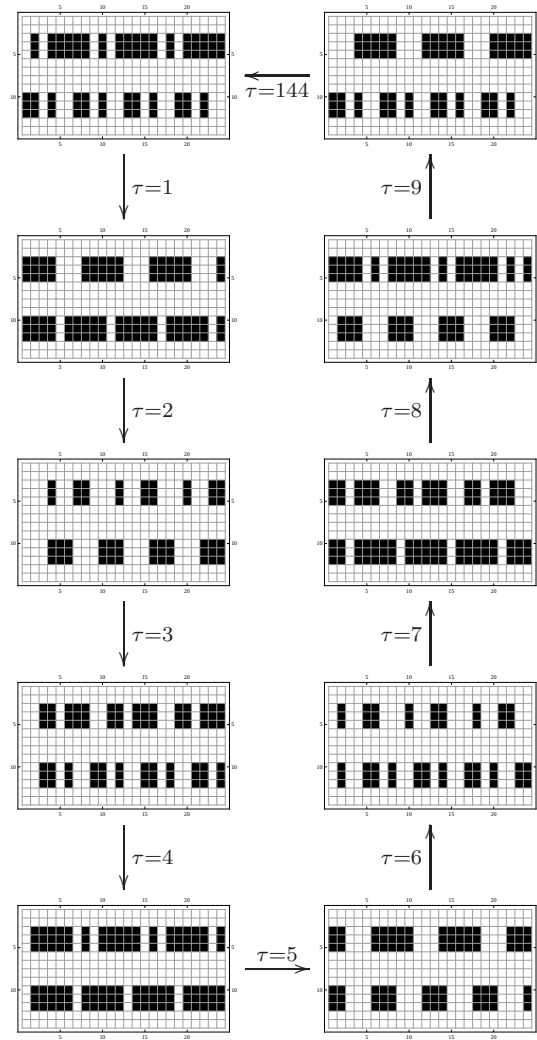


图4-10: 规则 N_T 作用于某个初始状态, 其演化图类似于蠕动的毛毛虫, 不断向水平方向延伸; 实质上此过程为周期144的循环结构.

观察3 共振现象.

在初始状态 C 中, 若 α_i 与 α_j 属于两棵不同的吸引树, 则 C 的周期将有可能取到这两棵吸引树周期的最大公倍数(见图4-13). 另外, ECA规则110的周期是服从幂律的, 则规则 N_T 的周期也将服从幂律.

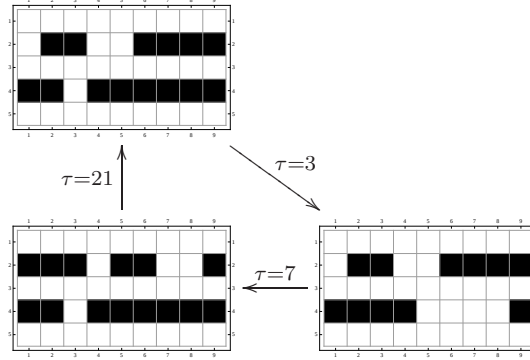


图4-13: 在ECA规则110作用下, α_2 的周期为3, α_4 的周期为7, 从而初始状态 C 在规则 N_T 作用下周期为21.

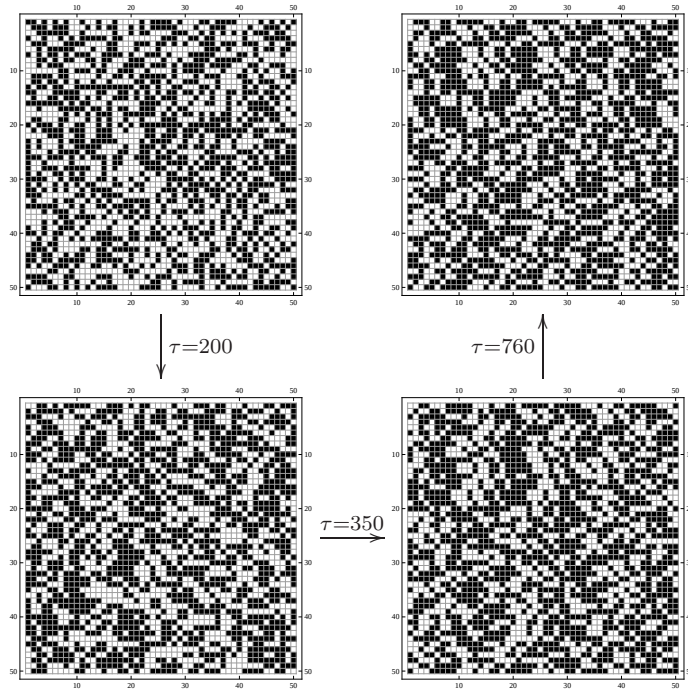


图4-14: 规则 N_T 在随机初始条件下的演化图.

这里, 我们还将给出生命游戏和规则 N_T 在随机初始条件下的演化图(见图4-14和图4-15). 对于生命游戏, 如果用心注视, 电脑屏幕上活跃著各种动作, 就好像用显微镜观察一滴池塘水所见到的微生物一样. 开始的时候, 可以让屏幕上随意散布著活细胞(黑色方格), 然后就会看到它们自我组织成各式各样连贯性的结构.

有的会滚动, 有的好像野兽呼吸一般来回震荡, 有某个群活细胞以固定的速度滑过屏幕, 还有某些细胞群会稳定的发射出新的滑翔机, 以及其他结构不动声色的把滑翔机吃掉. 但是在规则 N_T 条件下, 我们只会看到整个屏幕不停的闪烁着, 杂乱得几乎没有任何周期的演化现象. 从全局来看, 在迭代过程中, 整个细胞自动机都水平的往左移动.

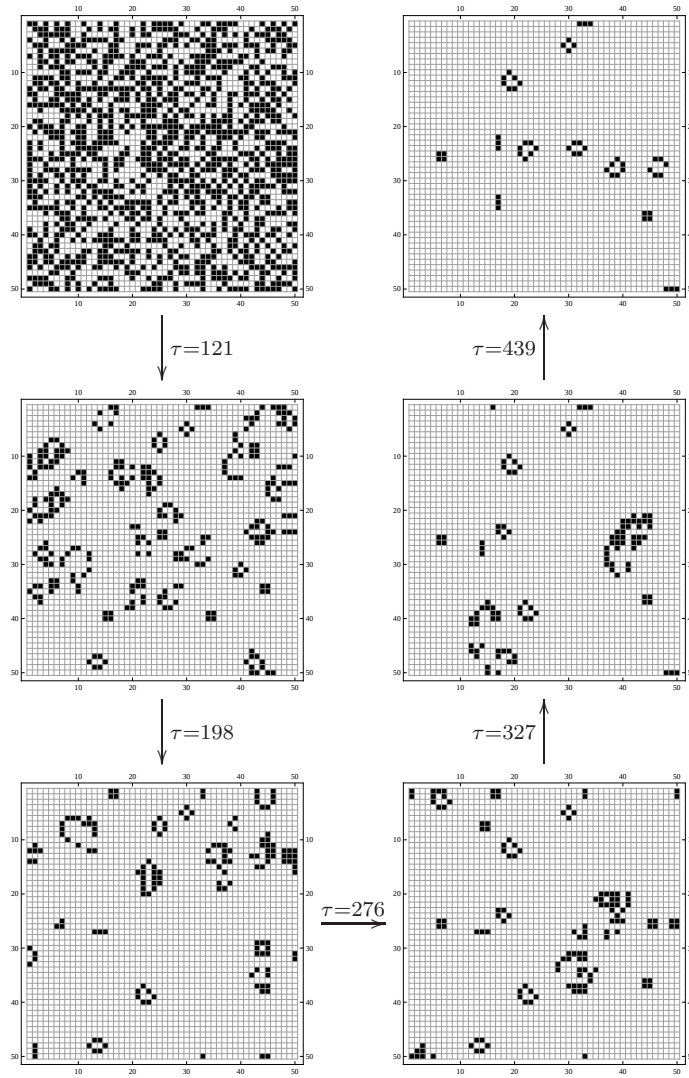


图4-15: 生命游戏在随机初始条件下的演化图.

五、 总结与展望

(一)、 总结

本文借助二维符号动力系统的思想和方法研究了二维细胞自动机的拓扑共轭分类与普适细胞自动机的构造. 在第一章绪论中, 我们简要回顾了符号动力学和细胞自动机的基本理论和研究现状. 随后, 在第二章中, 我们建立了二维符号动力系统中8种移位映射之间的拓扑共轭关系, 详细地研究了其动力学性质, 尤其是证明了其拓扑熵为 ∞ . 由此证明 二维符号动力系统与一维符号动力系统是两类本质不同的符号动力系统. 同时, 我们也证明了这两类系统之间的半共轭关系. 基于以上思想和结论, 我们将具有Neumann领域和状态集 $\{0, 1\}$ 的二维细胞自动机选作研究对象. 在第三章中, 我们首先将二维细胞自动机与二维符号空间建立联系, 定义了 $2^{2^5} = 4294967296$ 个全局映射. 随后, 我们根据Neumann领域的平面结构和细胞自动机的特点, 构造了四个同胚映射 $\bar{T}$, T^{UD} , T^{LR} 和 T^D , 通过它们实现了所有全局映射的拓扑共轭分类. 进一步, 我们认为上述类所得的共轭类数目是最小的. 由于本文讨论的全局映射个数较多, 用人工地进行分类其所需的计算量相当之大. 因此, 在第三节我们把上述共轭分类进行了程序化设计, 从而大大的提高了分类的效率. 特别地, 我们可以十分快捷的找到与给定规则属于同一共轭类的全部元素. 在第四章中, 我们考虑了全局映射的动力学性质. 本章首先列举了关于初等细胞自动机的部分结论, 并从符号动力学的角度分析了初等细胞自动机规则56和18的动力学性质. 进而, 我们建立了二维细胞自动机与初等细胞自动机之间的拓扑半共轭关系. 虽然拓扑半共轭的两个紧致系统, 其动力学行为可以大相径庭, 但在拓扑半共轭的条件下也同样可以保持系统的某些拓扑不变性, 尤其是扩充的拓扑熵不小于因子的. 另一方面, 由于大部分初等细胞自动机全局映射的拓扑熵已得到计算或估计, 这样就给估计二维细胞自动机全局映射的拓扑熵带来了极大的方便. 在此, 我们还借用半共轭的思想, 通过两个半共轭映射得到了24个二维普适细胞自动机规则. 同时, 我们 给出了其中一个普适规则的数字模拟结果, 发现其演化情况与著名的“生命游戏”大不相同.

(二)、 展望

相对于一维符号动力系统, 人们对二维符号动力系统的动力学性质的研究还远不充分, 所获结果也显得零星, 其理论还有待建立. 本文的结果还是初步的, 尚有大量的值得进一步研究的课题, 尤其是有限型子移位拓扑熵的计算或估计. 例

如, 当两个转移矩阵都为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 时, 由其决定的有限型子移位的拓扑熵到目前还没解决. 值得注意的是, 在二维符号动力系统中提出的很多问题都是非常困难的, 远比一维的情况要复杂与艰难. 当然, 在一维符号动力系统中, 目前也仍面临大量的有待解决的问题, 尤其是一般性子转移的动力学性质的刻画.

本文实现了所有全局映射的拓扑共轭分类, 并通过初等细胞自动机全局映射的动力学性质粗略得估计了二维细胞自动机全局映射的动力学性质. 但是, 从符号动力系统角度, 全面、细致地刻画二维细胞自动机全局映射动力学行为的结论很少. 同时, 在初等细胞自动机中, 还有部分全局映射的动力学性状有待解决. 例如, 普适规则110, 其符号动力学性状还远没解决. 因此, 如何进一步挖掘这些全局映射的动力学性质(如周期点、拓扑熵、混沌性状等等)无疑是一个非常有意义的且又是极具挑战性的课题. 另外, 本文得到了24个普适细胞自动机, 并进行了数字模拟. 我们发现规则 $N_T = 1023163644$ 具有并行信息处理的能力, 但是如何将理论应用于实际模型还有待进一步深入研究.

参考文献

- [1] Wiggins S. Global bifurcations and chaos: analytical methods [M]. Springer-Verlag, 1988.
- [2] Morse M. Trans. Amer. Math. Soc., 1921, 22: 84.
- [3] Birkhoff G. D. Dynamical systems [M]. Amer. Math. Soc. publications, 1927. Reprinted 1966.
- [4] Morse M., Hedlund G. A. Symbolic dynamics [J]. Am. J. Math., 1938, 60: 815.
- [5] Smale S. Diffeomorphisms with many periodic points, in “Differential and Combinatorial Topology” [C]. Princeton university press, 1964: 63-80.
- [6] Metropolis N., Stein M. L., Stein P. R. Finite limit sets for transformations on the unit interval [J]. J. Comb. Theory, 1973, 15(1): 25-43.
- [7] Chen F. Y. CNN symbolic dynamical systems [D]. Shanghai: Shanghai university, 2004. (In Chinese)
- [8] Robinson R. M. Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane [J]. Inventiones mathematicae, 1971, 12: 177-209.
- [9] Kastelyn P. W. The statistics of dimers on a lattice [J]. Physica A, 1961, 27: 1209-1255.
- [10] Berger R. The undecidability of the domino problem [J]. Memiors of the Amer. Math. Soc., 1966, 66: 1-72.
- [11] Milnor J., Thurston W. On iterated maps of the interval [J] (Lecture notes in mathematics, No. 1342). Springer, 1988.
- [12] Alekseev V. M., Yakobson M. V. Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems [J]. Physics reports, 1981, 75(5): 290-325.
- [13] Sparrow C. The Lorenz equations: bifurcations, chaos and strange attractors [M]. Springer-Verlag, 1982.
- [14] Haenggi M. Java CNN simulator. <http://www.isi.ee.ethz.ch>.

- [15] 周作领. 符号动力系统 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1997.
- [16] 郑伟谋, 郝柏林. 实用符号动力学 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994.
- [17] 傅新楚, 周焕文, 许凯华. 分叉、混沌、符号动力学 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1993.
- [18] Lind D. Multidimensional symbolic dynamics [J]. Proc. Symp. Appl. Math., 2004, 40: 61-79.
- [19] Robinson E. A. Symbolic dynamics and tilings of R^d [J]. Proceedings of symposia in applied mathematics, 2004, 60: 81-119.
- [20] Hochman M., Meyerovitch T. A characterization of the entropies of multidimensional shifts of finite type [J]. Preprint, 2007.
- [21] Johnson A. S. A., Madden K. M. The decomposition theorem for two-dimensional shifts of finite type [J]. Proceedings of the Amer. Math. Soc., 1999, 127: 1533-1543.
- [22] Baxter R. J. Exactly solved models in statistical mechanics [M]. London: academic press Inc., 1989.
- [23] Walters P. Symbolic dynamics and its applications [M]. Amer. Math. Soc., 1992.
- [24] Williams S. G. Symbolic dynamics and its applications [M]. Amer. Math. Soc., 2004.
- [25] Kitchens B. Symbolic dynamics: one-sided, two-sided and countable state Markov shifts [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [26] Robinson E. A. Jr., Sahin A. A. Mixing properties of nearly maximal entropy measures for Z^d shifts of finite type [J]. Colloq. Math., 2000, 84/85: part 1, 43-50.
- [27] Ban J. C., Lin S. S. Patterns generation and transition matrices in multi-dimensional lattice models [J]. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2005, 13: 637-658.
- [28] Mallet P. J., Chow S. N. Pattern formation and spatial chaos in lattice dynamical systems II [J]. IEEE Trans. Cir. Sys., 1996, 9: 1605-1621.

- [29] Anthony N. Q., Paul B. T. Subshifts of multi-dimensional shifts of finite type [J]. *Ergod. Theor. Dynam. Sys.*, 2000, 20: 859-874.
- [30] Lieb E. H. Exact solution of the problem of the entropy of two-dimensional ice [J]. *Phys. Rev. Lett.*, 1967, 18: 692-694.
- [31] Angela D. Subsystem entropies for Z^d sofic systems [J]. *Indagationes mathematicae*, 2006, 17(3): 353-359.
- [32] Shmuel F. On the entropy of Z^d subshifts of finite type [J]. *Linear Alge. Appl.*, 1997, 252: 199-220.
- [33] Jakob G. S. On the computability of the topological entropy of subshifts [J]. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 2006, 8(1): 83-95.
- [34] Burton R. M., Steif J. E. Non-uniqueness of measures of maximal entropy for subshifts of finite type [J]. *Ergod. Theor. Dynam. Sys.*, 1994, 14(2): 213-235.
- [35] Beal M. P., Fiorenzi F. Minimal forbidden patterns of multi-dimensional shifts. *Inter. Jour. Alge. Comput.*, 2005, 15(1): 73-93.
- [36] Johnson A., Kass S., Madden K. Projectional entropy in higher dimensional shifts of finite type [J]. *Complex systems*, 2007, 17: 243-257.
- [37] Mozes S. A zero entropy, mixing of all orders tiling system, symbolic dynamics and its applications [J]. *Amer. Math. Soc.*, 1992, 135: 319-325.
- [38] Schmidt K. *Dynamical systems of algebraic origin* [M]. Basel: Birkhauser-Verlag, 1995.
- [39] Ban J. C., Lin S. S., Lin Y. H. Primitivity of subshifts of finite type in two-dimensional lattice models [J]. Preprint, 2005.
- [40] Boyle M. Open problems in symbolic dynamics [J]. *Contemporary mathematics*, 2008, 469: 69-118.
- [41] Neumann J. V. *Theory of self-reproducing automata* [M]. (Edited and completed by Burks A. W.) University of Illinois press, 1966.
- [42] Burks A. W. *Essays on cellular automata* [M]. University of Illinois press, 1970.

- [43] Gardner, M. The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game 'life' [J]. Scientific American, 1970, 223: 120-123.
- [44] Hedlund G. A. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system [J]. Math. Sys. Theo., 1969, 3(4): 320-375.
- [45] Wolfram S. Statistical mechanics of cellular automata [J]. Review modern physics, 1983, 55(3): 601-644.
- [46] Akin H. The topological entropy of n-th iteration of an additive cellular automata [J]. Applied mathematics and computation, 2006, 174: 1427-1437.
- [47] Courbage M., Yasmineh S. Wavelengths distribution of chaotic travelling waves in some cellular automata [J]. Physica D, 2001, 150: 63-83.
- [48] Ohi F. Chaotic properties of the elementary cellular automata rule 40 in Wolfram's class I [J]. Complex systems, 2007, 17: 295-308.
- [49] Ohi F. Chaotic properties of the elementary cellular automata rule 168 in Wolfram's class I [C]. AUTOMATA-2008: theory and applications of cellular automata, 2008: 196-207.
- [50] Favati P., Lotti G., Margara L. Additive one-dimensional cellular automata are chaotic according to Devaney's definition of chaos [J]. Theor. Comput. Sci., 1997, 174: 157-170.
- [51] Cattaneo G., Finelli M., Margara L. Investigating topological chaos by elementary cellular automata dynamics [J]. Theor. Comput. Sci., 2000, 244: 219-241.
- [52] Kari J. Theory of cellular automata: A survey [J]. Theor. Comput. Sci., 2005, 334: 3-33.
- [53] Shereshevsky M. A. Ergodic properties of certain surjective cellular automata [J]. Monatsh. Math., 1992, 2: 305-316.
- [54] Wolfram S. Universality and complexity in cellular automata [J]. Physica D, 1984, 10(1): 1-35.
- [55] Wolfram S. Theory and application of cellular automata [M]. Singapore: Word Scientific, 1986.

- [56] Langton C. G. Studying artificial life with cellular automata [J]. *Physica D*, 1986, 22: 120-149.
- [57] Langton C. G. Comutation at the edge of chaos: phase transitions and emergent computation [J]. *Physica D*, 1990, 42: 12-37.
- [58] Culik K., Hurd L. P., Yu S. Computation theoretic aspects of cellular automata [J]. *Physica D*, 1990, 45: 357-378.
- [59] Kurka P. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata [J]. *Ergo. Theo. Dynam. Sys.*, 1997, 17: 417-433.
- [60] Allouche J. P., Skordev G. Remarks on permutive cellular automata [J]. *Journal of computer and system sciences*, 2007, 67: 174- 182.
- [61] Wolfram S. A new kind of science [M]. Wolfram Media, 2002.
- [62] Chua L. O., Sbitnev V. I., Yoon S. A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part III: Predicting the unpredictable [J]. *International journal of bifurcation and chaos*, 2004, 14(11): 3689-3820.
- [63] Chua L. O., Sbitnev V. I., Yoon S. A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part IV: From bernoulli shift to $1/f$ spectrum [J]. *International journal of bifurcation and chaos*, 2005a, 15(4): 1045-1183.
- [64] Chua L. O., Sbitnev V. I., Yoon S. A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part VI: From time-reversible attractors to the arrows of time [J]. *International journal of bifurcation and chaos*, 2006, 16(5): 1097-1373.
- [65] Chua L. O., Guan J. B., Valery I. S., et al. A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part VII: Isle of Eden [J]. *International journal of bifurcation and chaos*, 2007a, 17(9): 2839-3012.
- [66] Chua L. O., Karacs K., Sbitnev V. I., et al. A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part VIII: More isles of Eden [J]. *International journal of bifurcation and chaos*, 2007b, 17(11): 3741-3894.
- [67] Chua L. O., Pazienza G. E., Orzo L., et al. A nonlinear dynamics perspective of Wolfram's new kind of science. Part IX: Quasi-Ergodicity [J]. *International journal of bifurcation and chaos*, 2008, 18(9): 2487-2642.

- [68] Codd E. F. Cellular automata [M]. New York: academic press, 1968.
- [69] Cook Matthew. Universality in elementary cellular automata [J]. Complex system, 2004, 15: 1-40.
- [70] Guan J. B., Shen S. W., Tang C. B., et al. Extending Chua's global equivalence theorem on Wolfram's new kind of science [J]. International journal of bifurcation and chaos, 2007, 17(12): 4245-4259.
- [71] Jin W. F., Chen F. Y., Chen G. R., et al. Extending the symbolic dynamics of Chua's Bernoulli-shift rule 56 [J]. Journal of cellular automata, 2009. (In press)
- [72] Chen F. F., Chen F. Y., Jin W. F., et al. Topological entropy and complexity of one class of cellular automata rules [C]. International workshop on chaos-fractals theories and applications, 2008: 2863-2867.
- [73] Chen L., Chen F. Y., Chen F. F., et al. Complex symbolic dynamics of Bernoulli-shift cellular automata rule [C]. International workshop on chaos-fractals theories and applications, 2008: 2868-2873.
- [74] Chen F. Y., Jin W. F., Chen G. R., et al. Complex symbolic dynamics of Chua's period-2 rule 37 [J]. Journal of cellular automata, 2009. (Accepted)
- [75] Chen F. Y., Jin W. F., Chen G. R., et al. Chaos of elementary cellular automata rule 42 of Wolfram's class II [J]. Chaos, 2009. (Accepted)
- [76] Grassberger P. Long-range effects in an elementary cellular automaton [J]. Journal of statistical physics, 1986, 45: 27-39.
- [77] 周作领, 何伟弘. 轨道结构的层次和拓扑半共轭 [J]. 中国科学 (A辑), 1995, 25(5): 457-464.
- [78] 刘新和. 拓扑半共轭的动力系统之间的若干性质 [J]. 广西工学院学报, 1998, 9(1): 7-10.
- [79] Church A. A note on the Entscheidungsproblem [J]. Journal of symbolic logic, 1936, 1(1): 40-41.
- [80] Turing A. M. On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem [J]. Proceedings of the London mathematical society, 1936, 2(42): 230-265.

致 谢

首先我要深深的感谢我尊敬的导师陈芳跃教授,感谢陈老师以严肃的科学态度,严谨的治学精神,精益求精的工作作风和朴实正直的人格魅力对我硕士研究生学习期间的教诲和照顾.陈老师对本文的选题、开题以及定稿各个环节付出了大量的心血.陈老师主持的系列讨论班,给我们创造了良好的学习环境和营造了浓厚的学术氛围.三年来,陈老师言传身教,不仅在学业上给我以精心指导,同时还在思想、生活上给我以无微不至的关怀,这些必将使我终身受益,也必将激励我不断求知和创新.值此论文完成之际,向陈老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意!

我还要感谢CNN的创始人、美国Berkely加州大学的L. O. Chua教授,感谢他和他的团队结合他们的细胞神经网络的研究成果用非线性动力学的思想对Wolfram的计算机模拟结果给予了一系列数学上的刻画.正是在此基础上,我们找到了从符号动力学角度刻画初等细胞自动机动力学行为的思路与方法,并取得了良好的效果.同时,我也要感谢香港城市大学陈关荣教授对我的帮助和给予我访问香港城市大学的机会.这是一次难能可贵的经历,不仅让我学到了很多知识,也使我增长了见识.

感谢李继彬教授、赵晓华教授和傅新楚教授,正是他们的严谨的教学态度、渊博的知识、良好的教学方法、诲人不倦的教育精神,不仅让我学到了丰富的专业知识,也让我学到了如何治学的方法、如何为人处世的态度.感谢陈琳同学和陈方方同学,正是由于和她们一起不断进行讨论、交流,才使我们产生了论文选题的灵感.同窗之谊,终生难忘.感谢我已毕业的师兄和师姐们、我的师妹们和动力系统研究所的全体同学,正是和他们一起学习、共同探讨、共同进步,使我无忧无虑的度过了三年美好的研究生生活.

最后,我要感谢含辛茹苦培育我长大的父母,养育之恩,无以回报,铭记永生.感谢各位评审专家以及所有关心和帮助过我的人!

在学期间的研究成果及发表的论文

- [1] Weifeng Jin, Fangyue Chen, Guanrong Chen, Lin Chen, Fangfang Chen. Extending the symbolic dynamics of Chua's Bernoulli-shift rule 56. *Journal of Cellular Automata*, 2009. (In press) (SCI)
- [2] Fang-Yue Chen, Wei-Feng Jin, Guan-Rong Chen, Fang-Fang Chen, Lin Chen. Chaos of elementary cellular automata rule 42 of Wolfram's class II, *Chaos*, 2009. (Accepted) (SCI)
- [3] Fangyue Chen, Weifeng Jin, Guanrong Chen, Lin Chen, Fangfang Chen. Complex symbolic dynamics of Chua's period-2 rule 37, *Journal of Cellular Automata*, 2009. (Accepted) (SCI)
- [4] Fangfang Chen, Fangyue Chen, Weifeng Jin, Lin Chen. Topological entropy and complexity of one class of cellular automata rules. *International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications 2008*, pages: 2863-2867. 此论文被会议组委会评选为优秀论文(**Best Paper**). (EI)
- [5] Lin Chen, Fangyue Chen, Fangfang Chen, Weifeng Jin. Complex symbolic dynamics of Bernoulli—shift cellular automata rule, *International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications 2008*, pages: 2868-2873. (EI)