

Y1908911

University of Science and Technology of China
A dissertation for master's degree

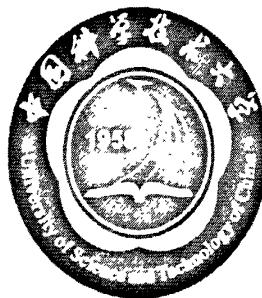


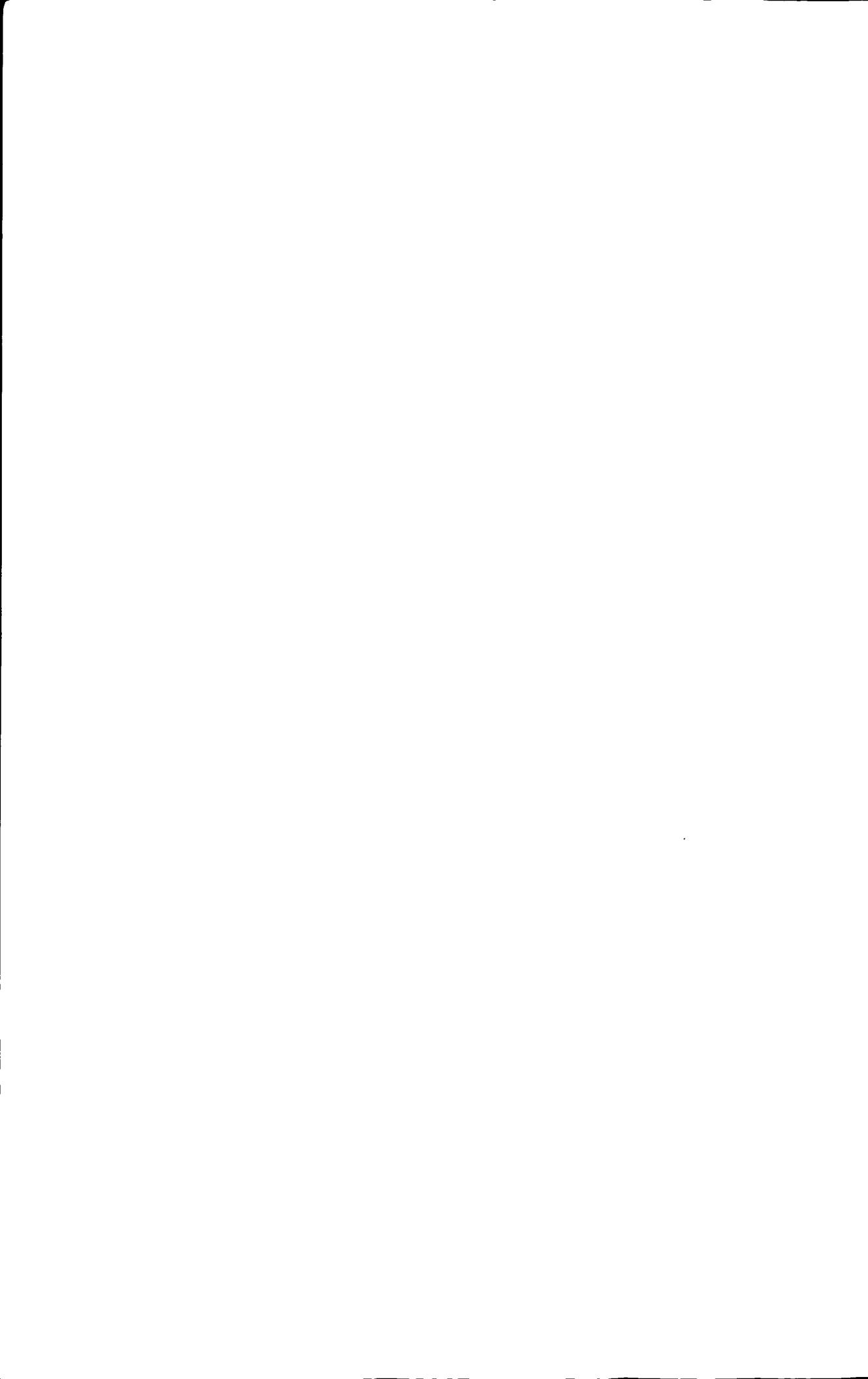
Image Denoising Based on Adaptive Directional Lifting Wavelet Transform

Author's Name: Quan LIU

Speciality: Signal and Information Processing

Supervisor: Associate Prof. Lin NI

Finished time: May, 2011



中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名: 刘林

签字日期: 2011.6.7

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

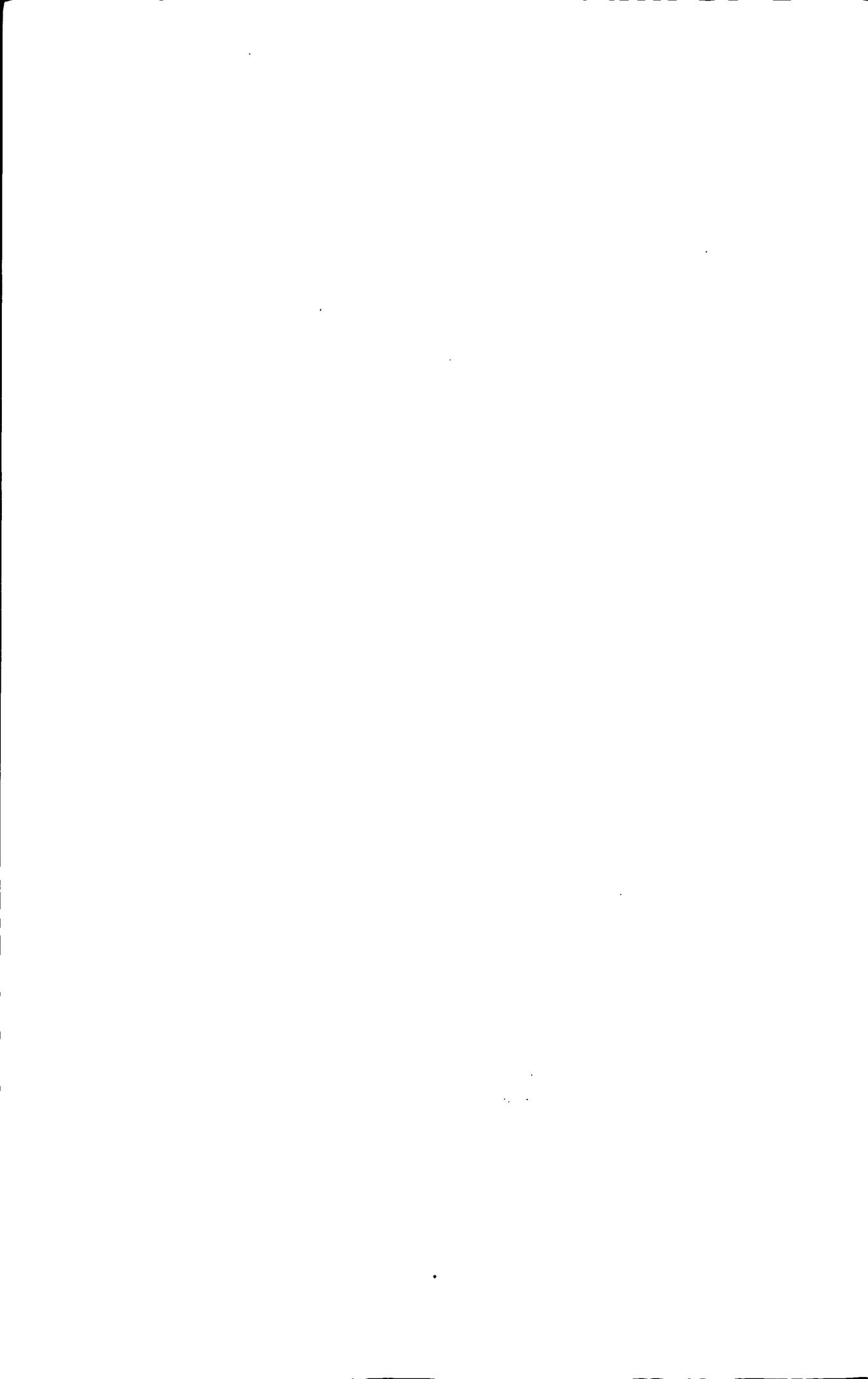
公开 保密(____年)

作者签名: 刘林

导师签名: 任林

签字日期: 2011.6.7

签字日期: 2011.6.7



摘要

噪声作为一种常态在数字信号中是普遍存在的。数字图像在采集、传输和储存的过程中会受到成像设备、外部环境噪声以及存储介质等因素的影响，造成图像被噪声污染。为了消除或者降低被污染图像中的噪声，便于人眼的识别或者对图像进行后继处理，图像去噪成为图像处理和分析中的一个不可缺少的重要环节。然而，如何对含噪图像在去除噪声的同时能够尽量好地保持其原有图像的纹理和边缘信息是一项具有挑战性的问题。

经典的去噪的方法主要包括空域去噪和变换域去噪。空域去噪是对整个图像进行某一种简单的运算处理，在处理过程中忽视了图像不同部分的特性，在去噪后会引起细节和边缘等高频部分的模糊；变换域去噪主要包括傅里叶变换去噪和小波去噪等，其中傅立叶变换去噪方法虽然能通过平滑抑制噪声，但同时也会使图像边缘信息受到损失，小波去噪法将含噪图像转换到小波域上，对小波系数进行处理达到去噪目的，因为该方法简单有效而被广泛应用。

普通小波只是沿水平和垂直方向对图像进行小波分解，因而不能很好地表现出非水平和非垂直方向的纹理信息。而自适应方向提升小波能够较好地表现出自然图像中通常包含的任意方向的重要边缘信息，在图像处理和分析中有其独特优势。本论文主要开展基于自适应方向提升小波的图像去噪方法研究。论文的主要研究成果和贡献如下：

- 1.回顾了从小波变换到提升小波变换的发展历程，总结了图像去噪现有的方法，对提升小波图像去噪进行了仿真实验，发现了其在去噪中存在的不足。
- 2.提出了基于自适应方向提升小波的图像去噪算法。自适应方向提升小波充分利用图像方向信息对图像进行稀疏表示，能有效消除图像方向上存在的空间冗余。与普通提升小波相比，自适应方向提升小波能够更好地逼近图像纹理，且可以用更少的高频系数表示图像。实验结果表明，基于自适应方向提升小波的图像去噪算法能够较好地保持图像纹理信息。
- 3.研究了不同阈值选取方法在自适应方向提升小波去噪中的效果。小波阈值去噪法中，阈值的选取直接影响去噪后重建图像的质量。通过对不同阈值方法的比较，研究得出 Bayesian Shrink 阈值在去噪中具有较好的表现，实验结果表明其具有较高的峰值信噪比。

关键词： 小波变换，提升小波，自适应方向提升，图像去噪，阈值



Abstract

Noise is widespread in digital signal. Digital images is often polluted by noise which from imaging equipment or the external environmental during sampling, transmission and storage. In order to remove or reduce the noise from the image so that the image can be identified by human eyes or subsequently processed easily, image denoising becomes the most important part of the image processing and analysis. However, it is a challenging problem to remove the noise in the noisy image while maintaining the image texture and edge information as much as possible.

Classical methods of image denoising include spatial domain denoising and transform domain denoising. Spatial domain denoising is the method of just taking a certain kind of simple computing for the whole image. The fact that it ignored the characteristics of different parts of the image will lead to that the edge and details are blurred after denoising. Transform domain denoising include Fourier transform denoising and wavelet denoising. Fourier transform denoising can suppression the noise but meanwhile make the loss of edge information. Wavelet denoising method is to transform the noise image to the wavelet domain, and then process the wavelet coefficients. This method is widely used since its simplicity and effectiveness.

The traditional wavelet is very efficient in representing vertical and horizontal edges, but it does not work well when the image edge is neither along vertical nor along horizontal. Adaptive directional lifting wavelet has an unique advantages in image processing and analysis as it could using the edge information with any direction contained in natural images. This dissertation mainly focuses on research of adaptive directional lifting wavelet based image denoising. The main achievements and contributions are as follows:

1. Review the history from wavelet transform to lifting wavelet transform, and summarize the method of image denoising. The simulation results base on lifting wavelet are given, and the shortcoming in image denoising is analysed.
2. Proposed an image denoising algorithm based on adaptive directional lifting wavelet. The spatial redundancy in directional attributes is further removed for the reason of that adaptive directional lifting wavelet makes full use of image texture and edge information. The simulation results show that this method can remove the

noise and protect the edge and texture information at the same time.

3. Research on the effects of different threshold selection methods in image denoising based on adaptive directional lifting wavelet. The threshold selection is very important in wavelet threshold denoising method, it influence the quality of the reconstructed image after denoising directly. By the comparison of different thresholds, the results show that the Bayesian Shrink denoising has a better performance and higher PSNR.

Keywords: wavelet transform, lifting scheme, adaptive directional lifting, image denoising, threshold

目 录

摘要	I
Abstract	III
第1章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 图像去噪的研究现状	2
1.3 论文的研究内容及工作安排	4
1.3.1 本文研究内容	4
1.3.2 本文结构安排	4
第2章 基本理论	7
2.1 小波变换基本理论	7
2.1.1 连续小波变换	8
2.1.2 离散小波变换	8
2.1.3 多分辨率分析和快速小波变换	9
2.1.4 小波变换在图像处理中的应用	16
2.2 图像去噪基本理论	18
2.2.1 常见噪声及分类	18
2.2.2 经典去噪方法	20
2.2.3 变换域去噪	21
2.3 图像的质量评价方法	23
2.4 本章小结	24
第3章 基于提升小波变换的图像去噪	25
3.1 提升小波	25
3.1.1 Haar小波	25
3.1.2 提升小波的分解过程	27
3.1.3 提升小波的重构过程	28

3.2 用提升格式来构造传统小波.....	29
3.2.1 从传统小波到提升小波.....	29
3.2.2 提升小波构造实现小波举例.....	32
3.3 基于提升小波的图像去噪实现.....	35
3.3.1 提升小波图像去噪算法.....	35
3.3.2 仿真实验及结果.....	38
3.4 本章小结.....	39
第 4 章 基于自适应方向提升小波的图像去噪	41
4.1 自适应方向提升小波.....	41
4.2 改进的自适应方向提升小波.....	43
4.3 基于自适应方向提升小波的图像去噪实现.....	46
4.3.1 自适应方向提升小波图像去噪算法.....	46
4.3.2 实验结果及分析.....	47
4.4 本章小结.....	51
第 5 章 总结与展望	53
5.1 本文工作总结.....	53
5.2 下一步工作.....	54
参考文献.....	55
致 谢	59
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	61

第1章 绪论

1.1 研究背景及意义

当今，随着多媒体技术和互联网的高速发展，数字化信息给人们的生活带来了越来越丰富的色彩，其中数字图像是人们获取信息的主要来源和方法之一。数字图像由数码照相机、摄像机等电子成像设备捕获得到，再经过存储、传输、处理以及显示等过程最终展现在我们眼前。然而，数字图像在采集、存储以及传输的过程中往往受到来自设备和外部环境等因素的干扰，形成噪声图像，为了对数字图像进行更好的后继处理或者易于人眼的识别和观察，必须对其进行去噪处理，使图像尽可能的恢复到原来的状态。因此，图像去噪是图像处理中极为重要的一个部分。

图像去噪的方法大体上可以分为两类：基于空间域的去噪方法和基于变换域的去噪方法。其中基于空间域的去噪方法有中值滤波法、均值滤波法等，基于变换域的去噪方法有基于傅里叶变换的去噪、基于小波变换的去噪等。

空域滤波在实现起来比较容易，它是通过对图像的像素灰度值直接进行运算后达到去噪目的，但是它只是对整个图像进行某一种简单的运算处理，在处理过程中忽视了图像不同部分的特性，在去噪后会引起细节和边缘等高频部分的模糊，而且它的去噪效果与处理时窗口的大小选择有关，当所取的窗口越大，噪声的去除一般会越好，但图像也越模糊。

基于傅里叶变换的去噪是将图像通过傅里叶变换转换到频域，然后通过低通滤波来实现对噪声的消除，然而噪声和图像的频谱往往是重叠的，因此该方法对包含在信号频带中的噪声无法去除，而且在选择分辨率和带宽两者上不能同时满足，如果将带宽选择过宽，那么就不能达到有效去除噪声的目的，如果将带宽选择过窄，那么在去除噪声的同时信号的高频部分也会受到损失。也就是说采用傅里叶变换去噪时，如果要滤除较多的噪声，那么同时会损失图像中的边缘和纹理等高频信息，而如果要较好保持图像的边缘纹理信息，那么就会有较多的噪声残留。

小波变换是在傅里叶变换基础上发展起来的一种具有多分辨率分析特点的时-频分析方法，其基本思想是通过伸缩和平移运算对信号进行多尺度分解，最终达到在高频处时间细分、在低频处频率细分的目的。小波变换具有多分辨率和去相关等特点，在频域和时域同时具备良好的局部化性质，并且对高频成分是采用逐步精细的时频取样步长，因此可以使其充分突出信号中的任何细节。

近20多年来,随着小波理论的不断发展和日臻完善,小波变换已经广泛地应用在图像处理、地质勘探、人工智能、生物工程等多个领域中,并取得了非常显著的成果。小波变换在图像处理中主要的应用包括图像压缩、图像去噪、图像增强以及边缘检测等方面,其中在图像噪声去除方面的应用取得了很好的效果。小波变换去噪是利用噪声和信号之间不同的特性对含有噪声的图像进行分时分频处理,通过在不同尺度下对图像进行去噪处理,它相比采用傅里叶变换去噪要更加的灵活,并且处理后图像的信噪比更高。采用小波变换进行图像去噪的基本过程是:首先将噪声图像进行小波分解,得到变换后的小波系数,然后对小波系数进行相应处理,最后将处理后的小波系数进行逆变换合成得到去噪后的图像,其中对小波系数进行处理是图像去噪的过程,也是应用小波变换去噪的研究重点。

提升格式是一种新的小波构造方法,其在构造过程中不依赖傅里叶变换,也被成为“二代小波”。Daubechies 和 Sweldens^[1, 2]证明了所有一代小波函数都可采用提升方法构造设计出来,这也将基于滤波器组的传统小波变换转化成基于提升结构的小波变换。与传统的小波变换相比,提升小波在具备了原有的多分辨率等特性外,还具有结构更加简单、变换速度更快、能够实现原位存储运算等特点,而且在图像处理时,采用提升小波图像恢复的质量和变换时采用的延拓方法没有关系。近年来,基于提升小波的图像处理技术得到了广泛研究,其中在图像去噪方面也取得了良好的效果。但是由于提升小波对二维图像的处理是通过对行和列分别进行一维提升,使得其在对非水平和垂直的方向上的边缘或纹理不能很好的表现,而自然图像一般都含有丰富的纹理,不是简单的水平或者垂直方向,如果忽视这些将会在高频部分造成很大的损失,即图像的细节表现失真会很严重,因此对含噪图像在去除噪声的同时能够尽量好的保持其原有图像的纹理和边缘信息是一项需要解决的问题。

1.2 图像去噪的研究现状

1992年Mallat提出了小波变换的快速算法并将其成功运用到图像的分解与重构中,在此基础上他提出了模极大值去噪法^[3],该方法是根据信号与噪声在小波变换时各尺度上传播特性的不同,去除由噪声引起的模极大值点,而保留图像所对应的模极大值点,然后再利用余下的模极大值点来重构小波系数,最后得到去噪后的图像,但是该方法只利用了有限的模极大值点重构图像,存在误差较大和不稳定的缺点。Hsung 等人提出了一种基于奇异性检测的去噪方法^[4],该方法和模极大值去噪相似,不同点在于它不是进行模极大值的检测和处

理, 而是通过计算一个锥形影响域内小波系数模的极值得到信号的局部正则性估计, 从而对小波系数进行滤波, 达到去噪的目的。

1994年, Xu 等人提出了基于相关性去噪的 SSNF 法 (Spatially Selective Noise Filtration)^[5], 该方法根据信号同噪声在小波变换中不同尺度下的不同特点来去除噪声, 很大限度上保留了有用信号同时降低了噪声的干扰。

1994年, Donoho 和 Johnstone 提出了小波阈值去噪法^[6, 7], 并且给出了通用阈值的计算公式, 还从渐进的意义上证明了该方法的最优性, 此后小波阈值去噪法得到了广泛的应用, 但是该方法中给出的通用阈值计算方法不具备在尺度间的自适应性, 对小波系数存在“过扼杀”的现象, 因此许多学者就如何选取更加有效的阈值进行了深入研究。Gao 对阈值函数进行了改进, 提出了一种新的阈值函数^[8], 并且给出了阈值的方差和偏差的估计公式。Pan 等人提出了基于非正交小波变换的硬阈值去噪法^[9], 该方法去噪效果相比基于正交小波变换尺度间可变的硬阈值效果要好。Y.F.Wan 等人将阈值函数写成一个统一的表达式, 提出了广义分数幂模型^[10], 通过优化模型中的参数来确定阈值, 该方法在加性高斯噪声去除上取得了很好的效果。Chen 和 Bui 提出 Neigh Shrink 阈值法^[11], 该方法是根据邻域窗口中的小波系数平方和的大小来判断如何处理窗口中心的系数, 去噪效果较普通阈值要好。傅彩霞等人针对 Neigh Shrink 阈值法的不足, 提出了 enhancedNeigh Shrink 阈值法^[12], 该方法在去噪的同时对细节进行了增强, 取得了很好的视觉效果。Chang 等人在无噪图像小波系数服从广义高斯分布的情况下提出了 Bayesian Shrink 阈值法^[13], 它通过图像的原信号与噪声在分解后系数上的不同统计特性, 利用贝叶斯原理^[14]来得到一个最优的阈值, 取得很好的去噪效果。Hashemi M, Beheshti S^[15]等人还针对 Bayesian Shrink 阈值法中噪声的方差估计开展了研究, 从而能够得到偏差更小的 Bayesian Shrink 阈值。目前, 阈值去噪法研究仍然很活跃, 研究者现在将研究方向转为如何最大限度上获取信号的先验信息, 用这些信息来确定更加适合的阈值, 从而达到更高的去噪效率。

1999年 Candes 和 Donoho 提出了 Curvelet 变换, 在其启发下 2005 年 Minh N. Do 和 Martin Vetterli 提出了 Contourlet 变换^[16], 它们具备小波局部时频分析的能力, 同时还具有方向选择和辨识的能力, 能够对图像稀疏表达, 近年来研究者将其应用于图像去噪^[17-20], 取得了良好的效果。

1.3 论文的研究内容及工作安排

1.3.1 本文研究内容

提升小波图像去噪是按照水平和垂直两个方向进行提升分解，方向同性的特点使得提升小波在去噪的同时不能很好的保护图像的纹理边缘信息，同时采用提升小波阈值去噪的时候，不同的阈值选取方法对去噪的效果有很大的影响。针对以上问题，本文主要研究了基于自适应方向提升小波的图像去噪算法和阈值选取方法。具体的内容包括以下几个方面：

1. 回顾了小波变换的基本理论和图像去噪的现有方法。
2. 研究了基于自适应方向提升小波的图像去噪算法。针对提升小波在去噪时对图像纹理边缘保护上的不足，采用加权的自适应方向提升小波进行去噪，在提升分解时充分利用图像方向上的信息，有效消除图像方向上存在的空间冗余，进而提高图像去噪的质量。
3. 研究了不同阈值选取方法对自适应方向提升小波去噪性能的影响。自适应方向提升小波去噪时，阈值的选取直接影响去噪后图像重建的质量，本文通过仿真实验，对比分析了阈值选取方法对自适应方向提升小波去噪性能的影响。

1.3.2 本文结构安排

本论文主要研究基于自适应方向提升小波的图像去噪算法。具体章节安排如下：

第1章 绪论

本章首先给出了本论文的研究背景和图像去噪的研究现状，探讨了图像去噪面临的困难，最后简要介绍了本文的研究内容和论文的结构安排。

第2章 理论基础

本章首先介绍小波变换的基本理论，其中包括连续小波变换，离散小波变换、多分辨率分析、小波变换的快速算法以及小波变换在图像处理中的应用。然后阐述了图像噪声的分类和图像去噪的经典算法，其中对变换域去噪中的小波去噪做了比较详细的介绍。最后简要介绍了图像的质量评价方法。

第3章 基于提升小波变换的图像去噪

本章首先讨论了提升小波变换，对提升小波变换中的分解和重构的过程做出了详细的描述，并且给出了通过提升格式来构造传统小波的例子，然后研究了提升小波在图像去噪中的应用，通过仿真实验，发现了其在去噪中存在的不足。

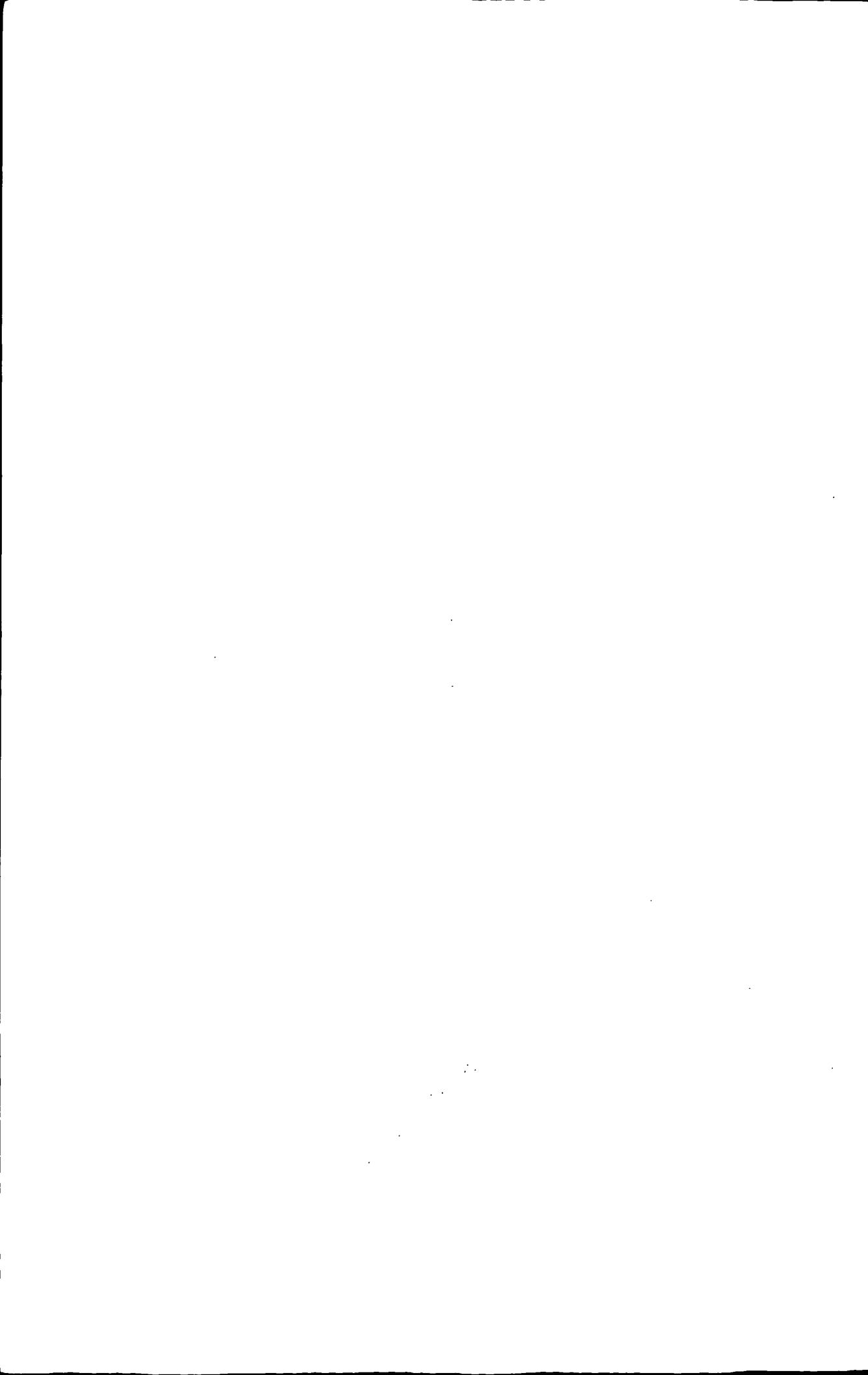
第4章 基于自适应方向提升小波的图像去噪

本章首先介绍了自适应方向提升小波和对其改进的加权自适应方向提升小波变换，然后详细介绍了基于自适应方向提升小波的图像去噪算法，给出了实验结果，该算法充分利用了图像的方向信息，与传统去噪算法相比，具有更好的去噪效果。

第5章 总结与展望

对本文的工作进行了总结，归纳了本文的研究成果和贡献，并且提出了有待进一步研究和改进的问题。

最后是本文的参考文献。



第2章 基本理论

2.1 小波变换基本理论

1822年, Fourier发表了“热传导解析理论”使得傅里叶变换成为信号处理中极其重要的一种工具, 它能够将信号从时域转换到频域, 对于很多信号在时域不能观察到的特性在转换后可以很明显的得到分辨。但是, 在傅里叶变换中每一频率分量在时域中是覆盖整个时间轴, 无法确定出某一个频率分量在时域中是在哪一个时刻发生的, 它不具备时间上的分辨率。在随后的研究中, 人们提出了短时傅里叶变换(STFT), 也被称为加窗傅里叶变换, 它通过信号加窗对某一段信号采用傅里叶变换, 使其包含了频率信息的同时还包括时间信息, 对傅里叶变换的缺陷有所克服。在STFT中, 要得到较高的时间分辨率需要将所加窗的宽度变窄, 而这样频域分辨率将有所下降, 也就是说, 窗口的选择上提高频率分辨率和空间分辨率是矛盾的, 同时STFT所采用的是固定窗口, 得到的时间分辨率也是固定的, 而实际信号一般是变化的, STFT不能针对不同信号特征自适应的调整窗口大小来得到高的分析效果。

小波变换是以傅里叶变换为基础, 经过发展而来的一种新的时频分析方法, 相对傅里叶变换和STFT, 小波变换通过平移和伸缩可以对信号进行多尺度的分析, 在保证精确的频域分辨率的同时能够提供精确的时域分辨率, 它继承了傅里叶分析的优点的同时也克服了傅里叶分析在局部分析能力不足的缺陷, 从而被广泛的应用到了模式识别、图像处理、信号处理等领域。小波变换的基本思想是来源于平移和伸缩, 其出现是由不同领域、学科的交流和交叉学科的发展而来的结果。早在1910年, Haar就提出了规范正交基的概念, 经过不同领域的研究发展, 在上世纪80年代法国地球物理学家Morlet在研究地震数据的时候提出了“小波”的概念, 并且利用小波对地质数据进行分析, 自此, 小波发展成为信号分析和表示领域中一个重要的工具, 在数学分析和信号处理领域都有许多构造小波的方法。在数学分析中, 小波起先是利用一个固定的函数的伸缩和平移来分析和表示地球物理信号的; 在信号处理中, 小波最初用来做子带编码。从数学分析角度来看, 小波变换给函数空间提供了一套有着不同逼近程度而且逐渐逼近于全空间的子空间, 能够用具有一系列不同分辨率和精度的函数来逼近原函数; 从信号处理角度来看, 小波变换提供了一种有效的时频局部化分析方法, 其时频窗在整个时频平面上移动的时候时宽和频宽能够随频率的不断变化自适应的进行变化。1987年, Mallat提出将多分辨率分析引入小波变换中使

两个领域的应用联系了起来，在金字塔算法的启发下他还提出了小波分解和重构的快速算法—Mallat 算法^[21, 22]，离散小波变换就此引出。1988 年，Daubechies 所构建的正交紧支小波方法证明了存在具有任意正则度的紧支集正交小波基^[23]。此后小波变换迅速发展。

2.1.1 连续小波变换

小波函数是由一个“母函数”通过平移和伸缩得到的一组函数。设 $\varphi(t)$ 为小波母函数，那么由它经过伸缩和平移得到的小波基函数为：

$$\varphi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (2-1)$$

其中 a 和 b 分别为尺度因子和平移因子，母函数是一个平方可积函数，其傅里叶变换必须满足可容许条件：

$$C_\varphi = \left| \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega \right| < \infty \quad (2-2)$$

平方可积函数 $f(t)$ 的连续小波变换表示为^[24-26]：

$$W_f(a, b) = \langle f(t), \varphi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\varphi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (2-3)$$

与傅里叶变换相比，连续小波变换中决定小波函数支撑长度的尺度因子 a 和对小波窗时间定位的平移因子 b 使得其具备“变焦”的特性：在信号的高频部分短支撑的小波函数起的作用较大，在信号的低频部分长支撑的小波函数起的作用较大。同傅里叶变换一样，小波变换也有逆变换，其表达式为：

$$f(t) = \frac{1}{C_\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \varphi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad a \neq 0 \quad f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2-4)$$

2.1.2 离散小波变换

连续小波变换的尺度因子和平移因子是连续变换的，在计算机处理时需要对这两个参数先进行采样，使其运算量很大，为了计算机快速进行处理和分析，将其转换为离散小波变换。离散小波变换就是把尺度因子 a 和平移因子 b 离散化，令 $a_0 > 1$ ， $b_0 > 0$ ，那么离散小波的表达式为：

$$\varphi_{m,n}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \varphi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (2-5)$$

一般情况下，要求 $\{\varphi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ 为 $L^2(\mathbb{R})$ 的正交基，因此不仅要选择合适的小

波母函数 $\varphi(t)$ 还要选择合适的离散方法。通常我们取 $a_0 = 2, b_0 = 1$ ，这样得到的离散小波能够满足完备、正交的要求，这样的小波也被称为二进小波。

函数 $f(x) \in L^2(R)$ 的离散小波变换表达式为：

$$f(x) = \sum_{m,n} c_{m,n} \varphi_{m,n}(x) \quad c_{m,n} = \langle f, \varphi_{m,n} \rangle; m, n \in \mathbb{Z} \quad (2-6)$$

2.1.3 多分辨率分析和快速小波变换

2.1.3.1 多分辨率分析

多分辨率分析是把 $L^2(R)$ 函数空间按某种关系分割成一系列嵌套的子空间，将整个 $L^2(R)$ 函数空间中的小波基构造问题转化成为其中的一个子空间里的基函数构造问题，给小波基的构造提供了适当的 $L^2(R)$ 的分解方式。

设嵌套的 $L^2(R)$ 子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 满足以下条件：

1、 $\cdots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \cdots$ ；

2、 $CLOS_{L^2}(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j) = L^2(R)$ ；

3、 $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ；

4、 $V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad j \in \mathbb{Z}$

5、 $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j-1}, \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x + \frac{1}{2^j}) \in V_j, \quad j \in \mathbb{Z}$

那么，称 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为 $L^2(R)$ 的多分辨率分析，其中 V_j 被称为尺度空间， W_j 被称为小波空间， W_j 是 V_j 在 V_{j-1} 中的正交补集，且有 $W_i \perp W_j \quad i \neq j, \quad W_j \perp V_j$ 。
 V_j 可以表示为：

$$V_j = \cdots \oplus W_{j+2} \oplus W_{j+1} \quad (2-7)$$

那么 $L^2(R)$ 则可以用 W_j 的直和来表示：

$$L^2(R) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \cdots \oplus W_1 \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus \cdots \quad (2-8)$$

相应地，对任意函数 $f(x) \in L^2(R)$ ，存在唯一的一种分解

$$f(x) = \cdots + g_{-1}(x) + g_0(x) + g_1(x) + \cdots \quad g_j(x) \in W_j \quad (2-9)$$

2.1.3.2 快速小波变换

对任意 $f \in L^2(R)$ ，有 $Q_j f \in W_j, \quad P_j f \in V_j$ ，那么称 Q_j 是小波空间投影算子， P_j 是尺度空间的投影算子，根据多分辨率分析的定义有：

$$P_{j-1} f = P_j f + Q_j f \quad (2-10)$$

假设一多分辨率分析尺度函数 $\phi(t)$, 离散序列 $c^0 \in l^2(Z)$, 它的构造函数为 $f(t) = \sum_n c_n^0 \phi(t-n)$ 。那么有 $f(t) \in V_0$, 因为 $V_0 = V_1 \oplus W_1$, 所以 $f = P_1 f + Q_1 f$ 。又因为 $P_1 f \in V_1$, $Q_1 f \in W_1$, 则 $P_1 f = \sum_k c_k^1 \phi_{1k}$, $Q_1 f = \sum_k d_k^1 \varphi_{1k}$, 其中 $\phi_{jk} = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t-k)$, $\varphi_{jk} = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}t-k)$ 。定义内积 $\langle f(t), g(t) \rangle = \int f(t) * \tilde{g}(t) dt$, 则有

$$c_k^1 = \sum_n c_n^0 \langle \phi_{1k}, \phi_{0n} \rangle$$

其中 $\langle \phi_{1k}, \phi_{0n} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \int \phi\left(\frac{1}{2}t-k\right) \phi(t-n) dt = 2^{-\frac{1}{2}} \int \phi\left(\frac{1}{2}t\right) \phi(t-(n-2k)) dt$, 令 $h(n) = 2^{-\frac{1}{2}} \int \phi\left(\frac{1}{2}t\right) \phi(t-n) dt$, 则有

$$c_k^1 = \sum_n h(n-2k) C_n^0$$

同样的,

$$d_k^1 = \langle \varphi_{1k}, Q_1 f \rangle = \langle \varphi_{1k}, f \rangle = \sum_n c_n^0 \langle \varphi_{1k}, \phi_{0n} \rangle$$

其中 $\langle \varphi_{1k}, \phi_{0n} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \int \varphi\left(\frac{1}{2}t\right) \phi(t-(n-2k)) dt$, 令 $g(n) = 2^{-\frac{1}{2}} \int \varphi\left(\frac{1}{2}t\right) \phi(t-n) dt$, 则

有

$$d_k^1 = \sum_n g(n-2k) C_n^0$$

同理, 通过反复分解可以得到快速小波变换算法, 也就是著名的 Mallat 算法:

$$c_k^j = \sum_n h(n-2k) C_n^{j-1} \quad (2-11)$$

$$d_k^j = \sum_n g(n-2k) C_n^{j-1} \quad (2-12)$$

由于

$$P_{j-1} f = \sum_n C_n^{j-1} \phi_{j-1n} = P_j f + Q_j f = \sum_k c_k^j \phi_{jk} + \sum_k d_k^j \varphi_{jk}$$

于是有:

$$C_n^{j-1} = \langle \phi_{j-1n}, P_{j-1} f \rangle = \sum_k c_k^j \langle \phi_{j-1n}, \phi_{jk} \rangle + \sum_k d_k^j \langle \phi_{j-1n}, \varphi_{jk} \rangle = \sum_k h(n-2k) C_k^j + \sum_k g(n-2k) D_k^j$$

其中 c^j 为平滑分量也就是低频分量, d^j 为差值分量也就是高频分量, h 和 g 是

对应的小波滤波器。Mallat 算法的一维小波分解与重构过程如图 2.1 所示。

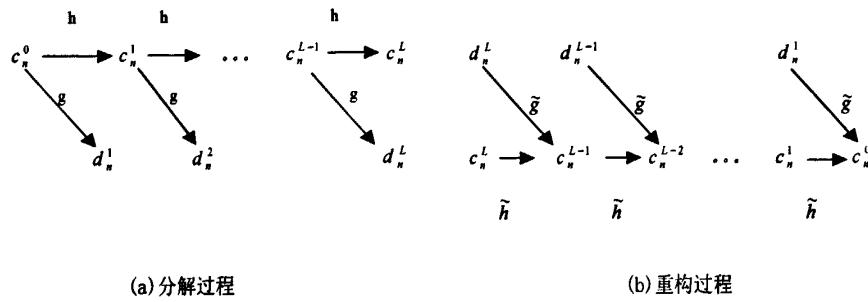


图 2.1 Mallat 算法的分解和重构过程

图 2.2 和 2.3 为一维 Mallat 算法的例子，其中图 2.2 的树形结构表示分解过程。图 2.3 中的原始信号为是一维信号，其中的 a_i 和 d_i 分别表示在第 i 尺度上的低频分量和高频分量。

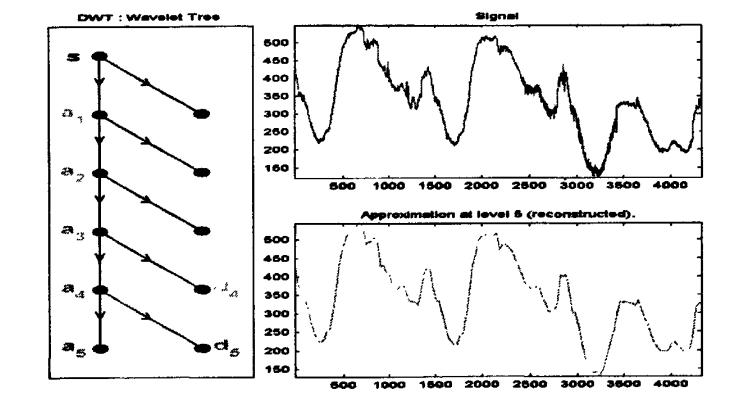


图 2.2 原始信号和 Mallat 算法树形分解过程

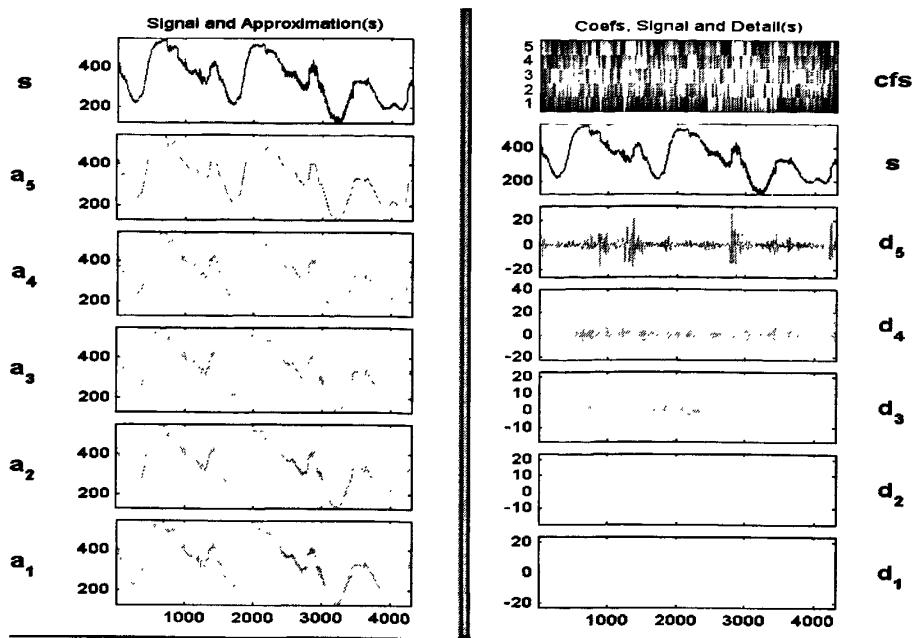
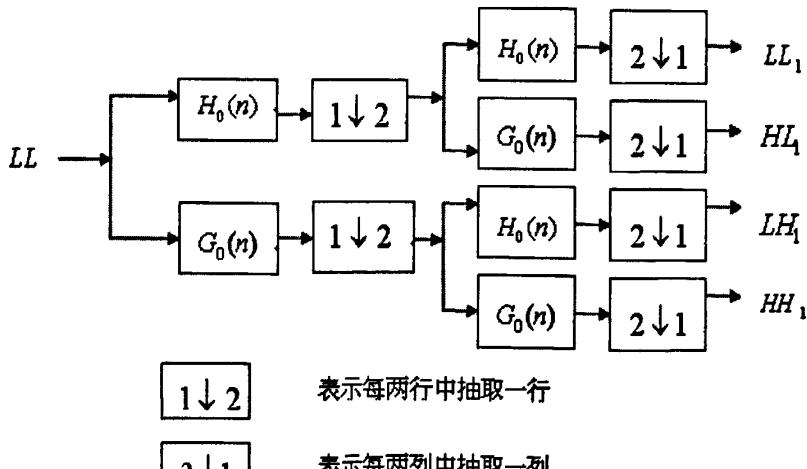


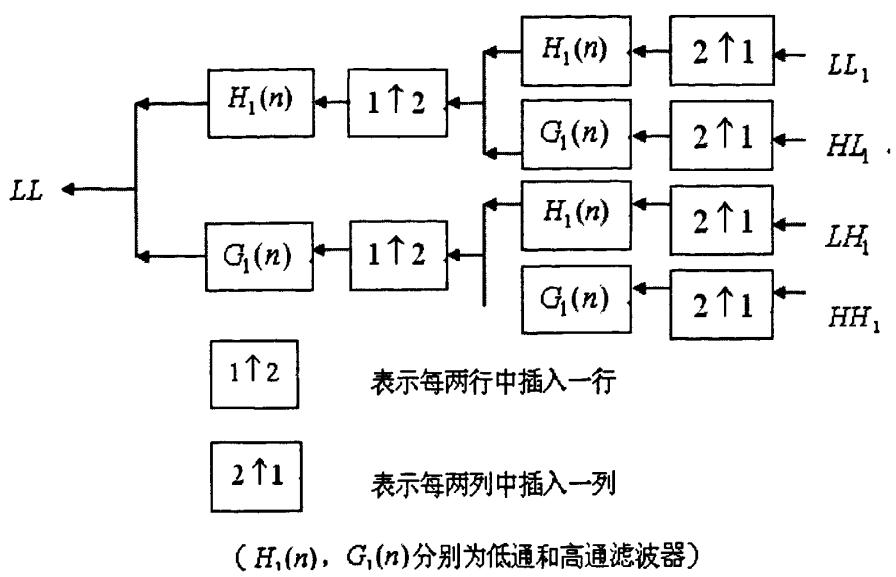
图 2.3 小波分解在各尺度下的低频分量和高频分量

对于二维图像的小波变换实质上就是对图像的水平和垂直方向各自独立地进行一次一维小波变换。Mallat 算法的二维小波分解和重构过程如图 2.4 所示。



($H_0(n)$, $G_0(n)$ 分别为低通和高通滤波器)

(a) 分解过程



(b) 重构过程

图 2.4 Mallat 算法的二维小波分解和重构过程

图像经过小波分解后的示意图如图 2.5 所示, 图 2.6 为 Barbara 图像经过二级小波分解图。

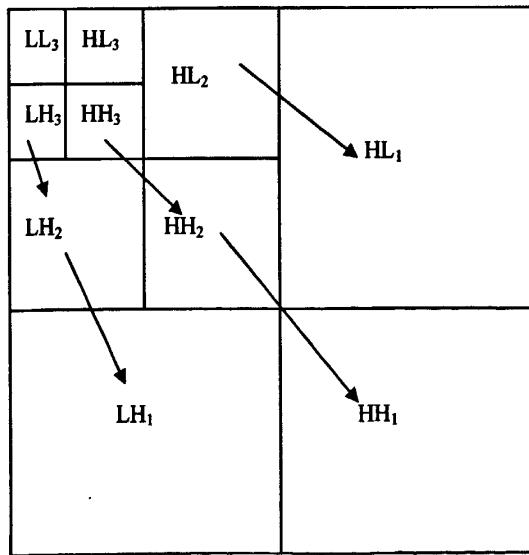


图 2.5 图像三级小波分解示意图



图 2.6 Barbara 二级小波分解图

二维图像经过小波变换，可以得到良好的空间—频率多分辨率表示，具有以下主要特征^[24, 25, 27]：

- (1) 在保持原图像的空间特性的同时能对图像的高频信息很好的提取。在高频处的空间选择性很好，在低频处的频率特性很好；
- (2) 小波分量分包括水平、垂直和斜方向，不同方向的子图相应的频率不同，具有方向上的选择性，该特性与人类的视觉特性吻合。
- (3) 图像的能量主要是集中在低频子带，高频子带能量很少；
- (4) 相同方向的不同尺度子图之间以及不同方向的不同尺度子图之间都具有相关性。

在实际应用中，无论是一维信号还是二维信号一般都是有限的，因而在采用 Mallat 算法时，需要考虑如何处理信号边缘。比较常用的边缘处理方法^[25, 28]包括：连续延拓、周期延拓、对称延拓、补零延拓等。

- (1) 连续延拓。连续延拓的表达式为：

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n < N \\ x(N-1) & n \geq N \\ x(0) & n < 0 \end{cases}$$

二维图像连续延拓的效果如图 2.7 所示：

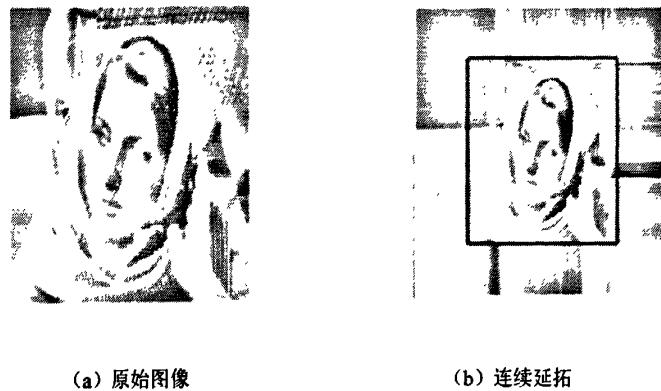


图 2.7 二维图像边界连续延拓

(2) 周期延拓。周期延拓的表达式为:

$$\begin{cases} x(-k) = x(N-k) & k = 1, 2, 3, \dots, L/2 \\ x(N+k) = x(k) & k = 0, 1, 2, 3, \dots, L/2 - 1 \end{cases}$$

二维图像周期延拓的效果如图 2.8 所示:

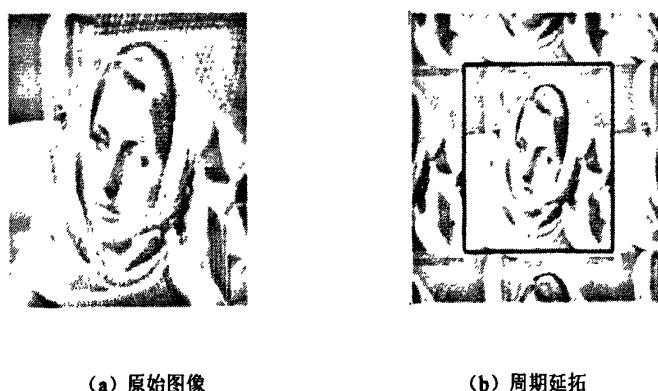


图 2.8 二维图像边界周期延拓

(3) 补零延拓。补零延拓的表达式为:

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{边界} \end{cases}$$

二维图像补零延拓的效果如图 2.9 所示:

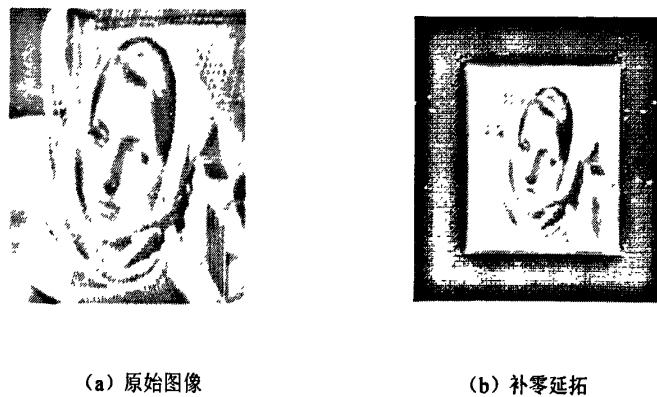


图 2.9 二维图像边界补零延拓

(4) 对称延拓。对称延拓的表达式为：

$$\begin{cases} x(-k) = x(k) & k = 1, 2, 3, \dots, L/2 \\ x(N+k) = x(N-k) & k = 1, 2, 3, \dots, L/2-1 \end{cases}$$

二维图像对称延拓的效果如图 2.10 所示：

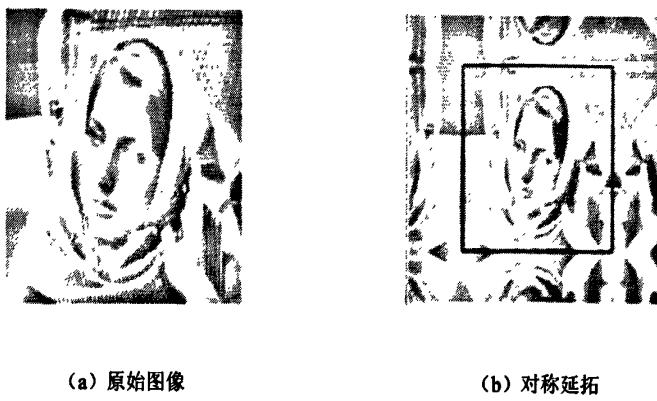


图 2.10 二维图像边界对称延拓

2.1.4 小波变换在图像处理中的应用

小波变换作为一种有力的时频分析方法，在图像处理中得到了广泛应用^[29, 30]，比如图像压缩^[31]、图像增强^[32]、图像去噪^[33]、图像分割^[34]、数字图像水印、边缘检测^[34]等方面。

2.1.4.1 小波变换在图像压缩中的应用

在 2.1.3 节中我们谈到二维图像经过小波变换，将原图像分别通过水平和垂

直分解后得到 LL、LH、HL 和 HH 四个子带，其中图像的能量主要是集中在 LL 子带也就是低频子带，高频子带能量很少，也就是说高频子带的数据大部分为零或者是接近于零，同时经过多级小波变换后，各尺度上对应子带之间存在很强的相关性，利用这些特性对小波变换后的系数进行有效的编码会有效的提高图像压缩的效率。其中嵌入式零树小波编码（EZW）算法^[35]、多级数集合分裂（SPIHT）算法^[36]和 EBCOT 算法^[37]等就是利用小波系数的特性，获得了良好的图像压缩效果。JPEG 组织提出的 JPEG2000 就是基于离散小波的一种高效的图像压缩标准。

2.1.4.2 小波变换在图像增强中的应用

图像增强是通过对图像进行处理，使某一部分能够比原图像更加突出，而对某些信息进行削弱或剔除，达到凸显特定特征，能够有利于人的识别。也就是说图像增强的目的就是要对图像中感兴趣的结构的对比度进行放大，增强其可理解性，同时抑制图像中的噪声。图像增强分为基于空域和基于频域两类方法。基于小波变换的图像增强方法是利用图像信号经小波分解后得到的子带不同频率，采用冗余或非冗余可逆小波变换分解，通过不同方法来增强不同频率子带的细节分量，突出不同尺度的细节来改善图像，达到增强图像层次感的效果。基于小波变换的图像增强主要包括四种方法^[38-41]：子带增强法、反锐化掩膜法、自适应增益法和梯度增强法。

2.1.4.3 小波变换在边缘检测中的应用

图像的边缘特征是图像中高频最为密集的部分，它具有方向和强度两个特性。由于光照及物理等原因，不同图像的边缘经常在不同的尺度范围，从而形成不同的边缘，如果用单一的边缘检测方法很难有效检测出所有边缘，而小波的多尺度特性，对不同尺度的边缘分别进行处理，在小尺度上，对边缘的细节进行提取，大尺度上，对平滑的边缘链进行提取，从而能够准确地获得边缘信息。

2.1.4.4 小波变换在图像去噪中的应用

图像去噪是图像处理中一个重要的内容，图像的噪声去除包括时域和变换域的方法，小波变换以其多分辨率、去相关性、低熵性和选基灵活等特点在图像去噪方面得到了广泛的应用，尤其在去除白噪声方面有着很好的效果。图像经过小波变换将有用信号集中在低频部分，而白噪声一般是均匀分布在各个频带的，通过选取适当的阈值可以达到去噪的目的。本文主要研究小波在图像去噪中的应用。

2.2 图像去噪基本理论

随着计算机科学和图像处理技术的迅速发展，数字图像在多媒体应用、模式识别、医学成像等方面取得了广泛应用。但是图像在采集、传输、压缩、存储和恢复时常常会被噪声污染，而且有些图像的噪声非常严重，因此，需要对数字图像进行去噪处理，图像去噪最直接的目标就是希望最大程度的去除图像中噪声信号并尽可能的完整保留图像中细节信息信号，也就是要在去除噪声的同时能够尽可能的保持图像的特征，以便于更高层次的图像分析与理解或者人眼的识别。图像去噪是图像处理中一个热门的问题，研究者也在不断的努力，采用各种方法试图去更好的恢复被噪声污染的图像回到原来的样子。图像去噪需要先建立图像的噪声模型^[42, 43]，一般情况下假设噪声图像 $g(x,y)$ 由原图像 $f(x,y)$ 和噪声 $n(x,y)$ 相叠加而组成，也就是

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y)$$

其框图如 2.11 所示，去噪的目的就是减小或者消除噪声 $n(x,y)$ 的干扰，尽可能的使得到的图像 $g(x,y)$ 逼近原图像 $f(x,y)$ 。

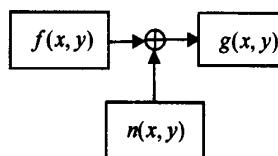


图 2.11 噪声图像模型

2.2.1 常见噪声及分类

2.2.1.1 常见噪声

一般情况下，图像主要受到的噪声包括以下几种^[43]：

1、脉冲噪声（椒盐噪声）：脉冲噪声的概率密度函数可以由下式给出：

$$p(z) = \begin{cases} p_a & z = a \\ p_b & z = b \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2-13)$$

如果 $a > b$ ，那么灰度值 a 将在图像中显示成为一个暗点，反之则灰度值 b 会在图像中显示成为一个亮点，如果 P_a 或 P_b 为零，那么称为单极脉冲，如果均不为零，特别是当 P_a 和 P_b 近似相等的时候，脉冲噪声会显示为类似随机分布于图像上的盐粒和胡椒，因此通常情况下称脉冲噪声为椒盐噪声。

2、泊松噪声：泊松噪声的概率密度函数可以由下式给出：

$$p(k, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad (2-14)$$

其中 k 表示单位时间内随机事件的个数, λ 是均值同时也是方差。

3、瑞利噪声: 瑞利噪声的概率密度函数可以由下式给出:

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (2-15)$$

其中 PDF 的方差和均值由

$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$$

和

$$\mu = a + \sqrt{\pi b / 4}$$

给出。

4、斑点噪声: 斑点噪声可以看作是非相关的乘性噪声模型, 其可以表示为

$$f = f_0 \cdot n_0 \quad (2-16)$$

其中 f 为噪声图像, f_0 为原图像, n_0 是均值为 1, 方差为 σ^2 的斑点噪声。

5、高斯噪声: 高斯随机变量的概率密度函数可以由下式给出:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-\mu)^2 / 2\sigma^2} \quad (2-17)$$

其中, z 表示灰度值, μ 表示 z 的期望值或平均值, σ 表示 z 的标准差。高斯噪声是概率密度函数基于正态分布的一种噪声, 因为其在数学上容易处理, 包含所有频率成分, 同时还具有恒定的功率谱, 因此在空间域和频域中这种噪声模型作为一种最具有代表性的噪声模型经常被使用。在本文中主要研究图像受到高斯白噪声时的去噪效果。

2.2.1.2 噪声的分类

噪声根据不同的侧重点有着不同的分类^[44], 其中比较经典的分类方法列举如下:

(1) 内部噪声和外部噪声。该方法是按照噪声的来源进行分类的, 其中外部噪声是指由系统外部的干扰引起的噪声。内部噪声是指由系统内部在信号的采集处理时带来的噪声。

(2) 非平稳噪声和平稳噪声。该方法是从统计理论的观点上进行分类的, 其中非平稳噪声指其统计特性是随着时间的变化而变化的, 平稳噪声指其统计特性不会随时间的变化而变化。

(3) 确定性噪声和随机噪声。某些噪声的类型是可知的被称为确定性噪声，有些噪声是没有准确波形的，这种无法进行预测的噪声被称为随机噪声。而随机噪声还可以分为单频噪声、脉冲噪声和起伏噪声等。

(4) 加性噪声和乘性噪声。该方法是从噪声和信号之间的结合方式上进行分类的，其中加性噪声是指它和信号是相加的关系，无论有无信号噪声都是存在的，而乘性噪声和信号是相乘的关系，它是由信道的不理想引起的，信号存在它就存在，信号不存在它也就消失。一般情况下将加性噪声看作系统的背景噪声，乘性噪声看成系统的非线性性或时变性所带来的。本文中所说的噪声一般是指加性噪声。

2.2.2 经典去噪方法

图像去噪大体上可以分为两类^[43]：空间域去噪和变换域去噪。经典的空间域去噪方法包括：中值滤波法、均值滤波法等，变换域去噪方法包括：基于傅里叶变换的去噪、基于小波变换的去噪等。

2.2.2.1 空域去噪

当图像中存在加性噪声，空域去噪是一种比较直接的去噪方法，它直接对图像的像素操作，其原理是空间域滤波器 $h(x,y)$ 对图像 $g(x,y)$ 进行卷积得到去噪后的图像 $\hat{f}(x,y)$ 。当采用不同的滤波器 $h(x,y)$ 可以得到不同的去噪效果。经典的空域去噪滤波器包括均值滤波器和中值滤波器。

(1) 均值滤波器

均值滤波去噪包括算术均值滤波器、几何均值滤波器、谐波均值滤波器。

算术均值滤波器：算术均值滤波器去噪就是在噪声图像中取大小为 $a \times b$ 的子窗口区域 $S(x,y)$ ，计算区域内包含所有点的平均值 \hat{f} 作为该区域中心点 $g(x,y)$ 的值，即

$$\hat{f}(x,y) = \frac{1}{ab} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s,t) \quad (2-18)$$

算术均值滤波是对图像做了局部化处理，去除了噪声的同时也使图像边缘变的模糊。

几何均值滤波器：几何均值滤波器去噪是在噪声图像中取大小为 $a \times b$ 的子窗口区域 $S(x,y)$ ，该区域中心点 $g(x,y)$ 的值由子窗口中像素的乘积并自乘到 $1/mn$ 次幂得到，即

$$\hat{f}(x,y) = \left[\prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s,t) \right]^{\frac{1}{mn}} \quad (2-19)$$

与算术均值滤波器相比, 几何均值滤波器在滤波时丢失的细节较少。

谐波均值滤波器: 谐波均值滤波器对高斯噪声有比较好的效果, 对椒盐噪声中的“盐”噪声表现较好, 但对“胡椒”噪声表现不理想, 其表达式如下

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s, t)}} \quad (2-20)$$

(2) 中值滤波器

中值滤波器是一种统计滤波, 它是在噪声图像中取大小为 $a \times b$ 的子窗口区域 $S(x, y)$, 对子窗口内的所有像素值进行排序, 然后用中间的值来代替该区域中心点 $g(x, y)$ 的值, 中值滤波对随机噪声具有良好的去噪效果, 尤其对椒盐噪声的效果明显。

2.2.2.2 变换域去噪

(1) 傅里叶变换去噪

傅里叶变换去噪是将图像通过二维离散傅里叶变换转换到频域, 根据一般图像频率集中于低频部分, 噪声频率集中于高频部分的特性, 选用低通滤波器滤除高频部分来达到去噪的目的。傅里叶变换去噪的框图如图 2.12 所示。

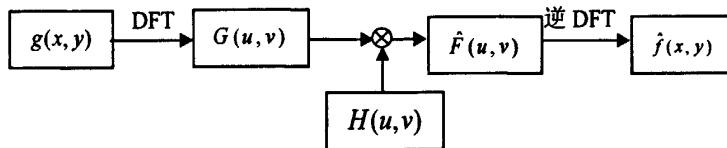


图 2.12 傅里叶变换去噪

由于图像纹理等特征一般也会在高频分布, 所以傅里叶变换去噪在去除高频后将噪声去除的同时也带来图像边缘模糊、细节损失的问题。

(2) 小波变换去噪

小波变换去噪是将图像通过离散小波变换转换到小波域, 根据图像和噪声在小波系数分布特点的不同来达到去噪目的。小波变换去噪的框图如图 2.13 所示。

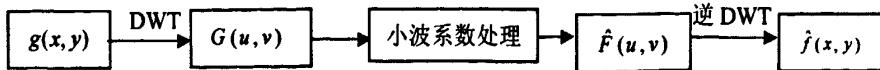


图 2.13 小波变换去噪

小波变换去噪经典算法大体可以分为三类^[42], 分别是基于小波变换模极大值原理去噪法、相关性去噪法和阈值去噪法。

(1) 基于小波变换模极大值原理去噪方法

模极大值去噪^[3]由 Mallat 提出, 它将小波变换后的小波系数模的局部极大值同 Lipschitz 指数联系起来, 通过极大值在不同尺度上的衰减速度来衡量信号的局部奇异性, 由于噪声与信号在小波域各尺度上传播特性有所不同从而来保留图像对应模极大值点, 去除由噪声产生的模极大值点, 然后利用剩余的模极大值点重构小波系数最后恢复原图像。在小波域上, 不同尺度下信号和噪声的模极大值传播特性相反, 信号的模极大值随着尺度的增大而增大, 噪声的模极大值随着尺度的增大而减小, 因此, 模极大值法去噪法过程为: 对图像进行多级小波变换, 在每个尺度上找出小波系数的模极大值, 并设置阈值去掉噪声的模极大值, 所保留的为图像信号的模极大值, 然后进行小波逆变换得到去噪后的图像。模极大值法对含有白噪声且有较多奇异点的图像能够获得比较好的信噪比, 但是它进行小波系数重构的时候要用运算复杂的交替投影法进行, 计算速度非常慢, 而且存在不稳定的现象。

(2) 基于相关性去噪的方法

含噪图像的小波变换在不同尺度下信号和噪声的传播特性是不同的, 信号在经过小波变换后各个尺度间具有较强的相关性, 并且在边缘处会有更强的相关性, 而噪声在经过小波变换后各个尺度间相关性很小, 并且主要集中在比较小的尺度层次中。因此可以根据信号同噪声在小波变换中不同尺度下的不同特点来去除噪声, 这种方法可以很大限度的保留有用信号同时降低噪声的干扰。Xu 等人提出的 SSNF (Spatially Selective Noise Filtration) 法^[5]是比较典型的利用信号和噪声小波变换后相关性不同的特点来去噪的算法。SSNF 法是先对含噪图像做多层 DWT, 然后把多层小波变换后相邻尺度上同一位置的系数相关量构成一个相关量图, 再将其适当伸缩后同原系数相比, 对于相关量大于原小波系数幅值的划归为边缘信号的系数进行保留在之后进行逆变换, 对于相关量小于原小波系数的则划归为噪声系数予以删除。

在尺度 j 下, 将点 n 处的相关系数定义为:

$$Cor(j, n) = W_{2^j} f(n) \cdot W_{2^{j-1}} f(n)$$

将相关系数 $NCor(j, n)$ 规范化:

$$NCor(j, n) = Cor(j, n) \sqrt{PW(j) / PCor(j)}$$

其中, $PW(j) = \sum_n (W_{2^j} f(n))^2$ 和 $PCor(j) = \sum_n Cor(j, n)^2$ 分别表示的是对应尺度 j 的小波系数和相关系数的能量。在尺度 j 下, 规范化系数与小波系数有着相同的能量, 为其之间提供了可行性。SSNF 法是一个迭代的过程, 其终止的条件是所剩余系数的能量和噪声能量的逼近程度, 该方法的缺点是计算量比较大。

(3) 基于小波阈值去噪的方法

小波阈值去噪是由 Donoho 在 1994 年提出的，它是小波去噪方法中研究最为广泛的一种方法。它根据含噪图像在经过小波分解后，图像的主要信息都集中在低频部分，图像的边缘纹理分布在高频部分，而且边缘纹理信息是集中在大的小波系数中，噪声是均匀分布的在整个小波域内的。因此，可以以某一个幅值来作为阈值，对于大于阈值的认为是图像信号系数，对于小于阈值的认为是噪声系数，然后对图像信号系数予以保留，对噪声系数予以抑制达到去噪的目的。

2.3 图像的质量评价方法

图像的质量评价是比较不同图像处理算法之间性能优劣的一项重要指标，在图像的采集、处理和传输等方面都有重要的意义。图像的质量评价方法主要分为两种：主观评价和客观评价。

图像的主观质量评价是依据实验人眼观察，对图像处理后的质量优劣做出主观的评定，然后将评分进行统计平均得出评价结果，图像质量的主观评价方法和观察者自身特性和观察时的条件有密切的关系，同时需要对测试的图像进行多人次的或反复多次试验，这种方法效率比较低而且操作较难，评价的结果也因为评价者主观差异因素的影响具有不确定性，但它能反映出人眼真实的感受。

相对于主观评价来说图像的客观质量评价具有易于操作、容易实现等特点，适用于一些希望能够对图像的质量有定量的评价的研究场合。

常用的客观质量评价标准有信噪比 (SNR)、峰值信噪比 (PSNR) 和结构相似性 (SSIM)。

(1) 信噪比 (SNR): SNR 的表达式为：

$$SNR = 10 \ln \left[\frac{\sum_n x_{i,j}^2}{\sum_n [x_{i,j} - \hat{x}_{i,j}]^2} \right] \quad (2-27)$$

(2) 峰值信噪比 (PSNR): PSNR 的表达式为：

$$PSNR = 10 \log_{10} \left[\frac{255^2}{\frac{1}{m \times n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [x_{i,j} - \hat{x}_{i,j}]^2} \right] \quad (2-28)$$

其中 $x_{i,j}$ 为原图像在点 (i,j) 处的像素值， $\hat{x}_{i,j}$ 为经过处理后待评价的图像在点 (i,j) 处的像素值， m 和 n 分别为图像的长和宽。计算得到的 PSNR，当数值

越大表示处理后的图像与原始的图像差别越小，其图像的质量也越好。

(3) 结构相似性(SSIM): SSIM 是一种用以衡量两张图像相似程度的指标。当两张图像其中一张为无失真图像，另一张为失真后的图像时，二者的结构相似性可以看成是失真图像的品质衡量指标。给定两个信号 x 和 y ，两者的结构相似性定义为：

$$SSIM(x, y) = [l(x, y)]^\alpha [c(x, y)]^\beta [s(x, y)]^\gamma, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0 \quad (2-29)$$

$$l(x, y) = \frac{2\mu_x\mu_y + C_1}{\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1}, c(x, y) = \frac{2\sigma_x\sigma_y + C_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2}, s(x, y) = \frac{2\sigma_{xy} + C_3}{\sigma_x\sigma_y + C_3} \quad (2-30)$$

其中 $l(x, y)$ 比较 x 和 y 的亮度， $c(x, y)$ 比较 x 和 y 的对比度， $s(x, y)$ 比较 x 和 y 的结构， α 、 β 、 γ 为调整 $l(x, y)$ 、 $c(x, y)$ 、 $s(x, y)$ 相对重要性的参数， μ_x 及 μ_y 、 σ_x 及 σ_y 分别是图像 x 和 y 的平均值和标准差， σ_{xy} 为 x 和 y 的协方差， C_1 、 C_2 、 C_3 为常数，用以维持 $l(x, y)$ 、 $c(x, y)$ 、 $s(x, y)$ 的稳定。

实际使用时，为了简化起见，一般将参数设为 $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ， $C_3 = C_2/2$ ，由此有：

$$SSIM(x, y) = \frac{2(\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)} \quad (2-31)$$

PSNR 是客观评价标准中最为常用的一种标准，在本文中我们选用 PSNR 作为客观评价的标准。

2.4 本章小结

本章主要分为两个部分：

第一部分介绍了小波变换的基本理论。首先介绍了连续小波和离散小波变换的基本概念；其次对多分辨率分析进行了阐述；然后对应用多分辨率分析在快速小波变换的应用进行了比较详细的介绍；最后简要介绍了小波变换在图像处理领域中的典型应用。

第二部分就图像的噪声基本理论进行了介绍。首先介绍了最常见的噪声模型；其次对噪声从不同角度进行分类做了简要叙述；随后主要就图像噪声去除的方法进行了阐述，其中概要介绍了空域去噪和傅里叶变换去噪，较详细的介绍了小波去噪；最后介绍了对图像进行评价的方法。

第3章 基于提升小波变换的图像去噪

传统小波变换是在傅里叶变换的基础上提出的，它受到傅里叶变换的约束。1995年Sweldens提出一种新的构造小波的方法—提升小波（Lifting Scheme）^[2, 45]，它不依赖于傅里叶变换，被称为二代小波变换。它在保持传统小波特点的同时，还具有许多优良的特性：不依赖傅里叶变换使其避免了传统小波中的卷积计算，降低了计算的复杂度；可以原位存储（in-place）运算，减少了对存储器的需求；分解和重构的硬件结构是相同的，重构只是将正变换进行反向操作。这些优良特性使得提升小波得到了广泛的研究和应用。

3.1 提升小波

3.1.1 Haar小波

在介绍提升小波之前，首先介绍 Haar 小波变换^[46]。设在一个信号序列中有两个相邻样本分别为 a 和 b ，采用线性变换得到平均值 s 和两个样本值之差 d 来代替 a 和 b ：

$$s = (a + b) / 2$$

$$d = b - a$$

如果 a 和 b 是高度相关的，那么两个样本之差 d 就会非常的小，这样就会只占有很少的 bit 位。当 $a=b$ 时， d 则为 0。我们可以不丢失任何信息，因为当给定 s 和 d 时总是可以恢复出 a 和 b ：

$$a = s - d / 2$$

$$b = s + d / 2$$

该重建公式可以由相反的 2×2 矩阵得到。

以上所描述的就是 Haar 小波变换的核心。假设一个包含有 2^n 个样本的信号 s_n ，值为 $s_{n,j}$ ：

$$s_n = \{s_{n,j} \mid 0 \leq j \leq 2^n\}$$

用平均值和差值来替换所有的 $a=s_{2l}$ 和 $b=s_{2l+1}$ ，那么将会得到 2^{n-1} 对值：

$$s_{n-1,1} = (s_{n,2l} + s_{n,2l+1}) / 2$$

$$d_{n-1,l} = s_{n,2l+1} - s_{n,2l}$$

由此，输入信号 s_n 分裂成两个信号：包含 2^{n-1} 个平均值 $s_{n-1,1}$ 的 s_{n-1} 和包含

2^{n-1} 个差值 $s_{n-1,j}$ 的 d_{n-1} 。当给定平均值 $s_{n-1,j}$ 和差值 d_{n-1} 时可以重建原始信号 s_n 。当完成一级分解后，可以对低频分量也就是平均值样本集 s_{n-1} 进行同样的分解，得到一个包含有 2^{n-2} 个样本的 s_{n-2} 和 d_{n-2} ，重复 n 次以上的步骤，直到得到 n 个高频分量集也就是差值样本集 d_j ($0 \leq j \leq n-1$) 和一个低频分量 s_0 也就是原始信号所有样本的平均值 $s_{0,0}$ (如图 3.1 所示)。由 s_0 和 d_j ($0 \leq j \leq n-1$) 通过反变换可以无损的重建原始信号 s_n (如图 3.2 所示)。

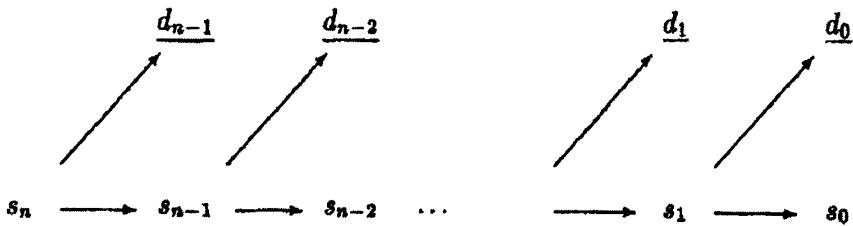


图 3.1 Haar 小波变换分解

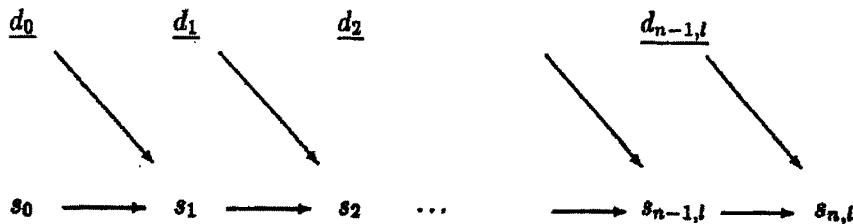


图 3.2 Haar 小波重建

为了降低存储量，Haar 小波变换可以在原位用 s 和 d 替代 a 和 b ，也就是 in-place 运算，具体步骤如下：

- 第一步，计算差值 $d=b-a$ ，并将 d 存储在 b 的位置。
- 第二步，用 a 和 d 来计算均值 s ， $s=a+d/2$ ，并将 s 存储在 a 的位置。该式同之前计算的结果是相同的，因为 $a+d/2=a+(b-a)/2=(a+b)/2$ 。

这两步用 C 语言来表示，计算公式为：

$$b-=a; \quad a+=b/2;$$

这样分解的优点是我们可以在原位用 d 来覆盖 b ，用 s 来覆盖 a ，节省了存储空间。该分解的反变换 C 语言计算公式为：

$$a-=b; \quad b+=a;$$

也就是说在重建的过程中， a 和 b 也是在原位覆盖 s 和 d 的。这个引例就是提升小波的一个简单实例。

3.1.2 提升小波的分解过程

假设一个含有 2^j 个采样点的信号 S_j , 要将其分解为低频信号 S_{j-1} 和细节信号 d_{j-1} , 那么采用提升小波分解需要三个步骤来完成: 分裂、预测和更新。

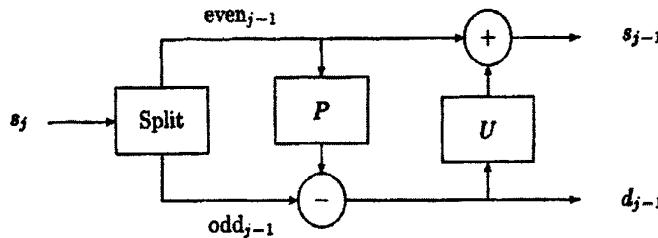


图 3.3 提升小波的分解过程

(1) 分裂 (Split): 在分裂步骤中, 将信号 S_j 分解成两个正交集, 一般情况下采用惰性小波变换, 也就是把信号分为奇数集 S_{2l+1} 和偶数集 S_{2l} , 偶数集和奇数集各含有一半原始信号的样本。分解的数学表达式为:

$$(\text{even}_{j-1}, \text{odd}_{j-1}) := \text{Split}(S_j) \quad (3-1)$$

(2) 预测 (Predict): 在预测步骤中, 是利用信号偶数样本与奇数样本之间的相关性, 用其中的一个样本集 (一般用偶数集样本) 来预测另一个样本集 (一般是奇数集样本), 用 $d_{j-1,l}$ 来表示奇数集和偶数集的差值, 也就是两个样本之间的逼近程度, 它对应着原信号 S_j 的高频分量部分, 通常被称为细节系数。一般情况下在提升过程中, 奇数样本是有偶数样本的一个组合预测得到的, 定义 P 为预测算子, 则预测的表达式为:

$$d_{j-1} = \text{odd}_{j-1} - P(\text{even}_{j-1}) \quad (3-2)$$

其中预测算子 P 可以根据情况选择不同的函数, 在 Haar 小波变换中, P 就是偶数样本本身, 奇数样本 $S_{j,2l+1}$ 是由左侧相邻的偶数样本 $S_{j,2l}$ 预测得到的:

$$d_{j-1,l} = S_{j,2l+1} - S_{j,2l}$$

(3) 更新 (Update): 经过分裂后得到的子集在某些特征 (例如均值) 可能和原信号不一致, 低频信号 S_{n-1} 的一个重要特征是要保持原信号 S_n 的平均值, 定义 U 为更新算子, 则更新的表达式为:

$$S_{j-1} = \text{even}_{j-1} + U(d_{j-1}) \quad (3-3)$$

和预测算子一样, 更新算子也可以根据情况选择不同的函数, 在 Haar 小波变换中, 更新算子为 $d_{j-1,l}/2$, 其步骤为:

$$S_{j-1,l} = S_{j,2l} + d_{j-1,l}/2$$

以上三个步骤的框图如图 3.3 所示。同样, 这三个步骤可以采用 in-place 运算, 将平均值覆盖偶数位, 差值覆盖奇数位, 表达式为:

$$(\text{odd}_{j-1}, \text{even}_{j-1}) := \text{Split}(s_j);$$

$$\text{odd}_{j-1} := P(\text{even}_{j-1});$$

$$\text{even}_{j-1} += U(\text{odd}_{j-1});$$

经过提升小波变换以后, 原信号 s_j 被分解为低频子集 S_{j-1} 和高频子集 d_{j-1} , 将低频子集 S_{j-1} 重复进行以上三个步骤, 经过 n 次分解后得到其小波分解系数集为 $\{S_{j-n}, d_{j-1}, d_{j-n+1}, \dots, d_{j-1}\}$, 其中 S_{j-n} 为信号的低频分量, $\{d_{j-1}, d_{j-n+1}, \dots, d_{j-1}\}$ 为信号的自低到高的高频分量。

3.1.3 提升小波的重构过程

提升小波的重构过程框图如图 3.4 所示, 由反更新、反预测和融合三个步骤完成。

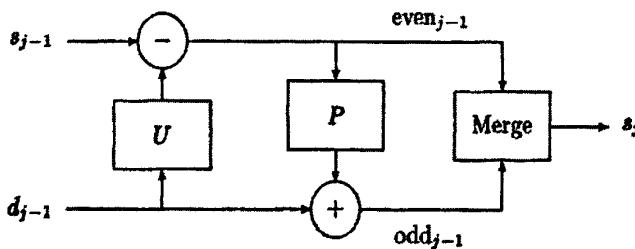


图 3.4 提升小波的重构过程

(1) 反更新 (Undo update): 给定 d_j 和 s_j 可以由下式得到偶数子集:

$$\text{even}_{j-1} = s_{j-1} - U(d_{j-1}) \quad (3-4)$$

在 Haar 小波中, 该步为:

$$s_{j,2l} = s_{j-1,l} - d_{j-1,l} / 2$$

(2) 反提升 (Undo predict): 给定 d_{j-1} 和由上一步得到 even_{j-1} , 可以重建奇数样本:

$$\text{odd}_{j-1} = d_{j-1} + P(\text{even}_{j-1}) \quad (3-5)$$

在 Haar 小波中, 这一步为:

$$s_{j,2l+1} = d_{j-1,l} + s_{j,2l}$$

(3) 融合 (Merge): 得到了偶数样本和奇数样本, 通过融合就可以得到原信号。对于惰性小波, 融合的表达式为:

$$s_j = \text{Merge}(\text{even}_{j-1}, \text{odd}_{j-1}) \quad (3-6)$$

同样的, 以上三个步骤可以采用 in-place 运算, 表达式为:

$$\text{even}_{j-1} = U(\text{odd}_{j-1});$$

$$\text{odd}_{j-1} += P(\text{even}_{j-1});$$

$$s_j := \text{Merge}(\text{odd}_{j-1}, \text{even}_{j-1})$$

对于二维图像信号 $x(m, n)$ 的小波分解，一般来说，是先沿着竖直(水平)方向进行一维小波变换得到高频和低频子带，之后再沿着水平(竖直)方向进行变换。在分裂阶段，所有的像素被分裂成偶数行(列) $x_e(m, n)$ 和奇数行(列) $x_o(m, n)$ ，其中 $x_e(m, n) = x(m, 2n)$ ， $x_o(m, n) = x(m, 2n+1)$ 。在预测阶段，细节系数为： $d(m, n) = x_o(m, n) - p_e(m, n)$ ；在更新阶段，偶数行(列)中的整数点被取代为 $l(m, n) = x_e(m, n) + u_d(m, n)$ 。同样，这三个步骤是可逆的，当知道了 $l(m, n)$ 和 $d(m, n)$ 就可以精确地重建原来的 2-D 图像。

3.2 用提升格式来构造传统小波

3.2.1 从传统小波到提升小波

3.2.1.1 传统小波的多相位表示

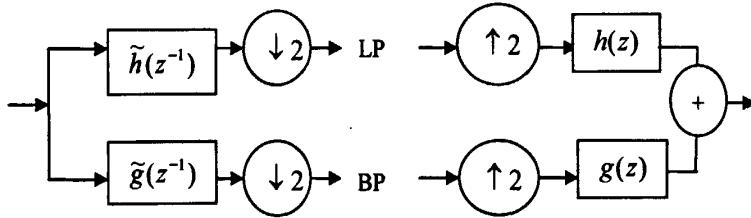


图 3.5 离散小波变换

离散小波变换可以由一个滤波器组来实现^[1, 47]。离散小波变换的框图如图 3.5 所示，其正变换是使用了两个分析滤波器 \tilde{h} (低通) 和 \tilde{g} (高通) 对信号进行滤波，之后进行下采样，得到低频信号 LP 和高频信号 BP；在反变换中首先进行上采样，然后使用两个对称滤波器 h (低通) 和 g (高通)，将滤波的信号相加得到原信号。这里我们仅考虑在小波变换中四个滤波器 \tilde{h} 、 \tilde{g} 、 h 和 g 均为 FIR 滤波器。要进行完全重构的条件为：

$$h(z)\tilde{h}(z^{-1}) + g(z)\tilde{g}(z^{-1}) = 2 \quad (3-7)$$

$$h(z)\tilde{h}(-z^{-1}) + g(z)\tilde{g}(-z^{-1}) = 0 \quad (3-8)$$

定义调制矩阵 $M(z)$ 为：

$$M(z) = \begin{bmatrix} h(z) & h(-z) \\ g(z) & g(-z) \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

那么完全重构条件可以写成：

$$\tilde{M}(z^{-1})' M(z) = 2I \quad (3-10)$$

这里 I 是一个 2×2 的单位矩阵。特别地, 当正交小波变换中 $h = \tilde{h}$ 和 $g = \tilde{g}$ 时, 则有 $M(z) = \tilde{M}(z)$ 为 $\sqrt{2}$ 的酉矩阵。滤波器 h 的 z 变换的多相位表示为:

$$h(z) = h_e(z^2) + z^{-1}h_o(z^2) \quad (3-11)$$

其中 h_e 为偶系数, h_o 为奇系数:

$$h_e(z) = \sum_k h_{2k} z^{-k}$$

$$h_o(z) = \sum_k h_{2k+1} z^{-k}$$

或者

$$h_e(z^2) = \frac{h(z) + h(-z)}{2}$$

$$h_o(z^2) = \frac{h(z) - h(-z)}{2z^{-1}}$$

设多相位矩阵 P 为:

$$P(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix}$$

那么有

$$P(z^2)' = \frac{1}{2} M(z) \begin{bmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

从而完全重构条件可以写成

$$P(z) \tilde{P}(z^{-1})' = I \quad (3-13)$$

离散小波变换可以表示为图 3.6。

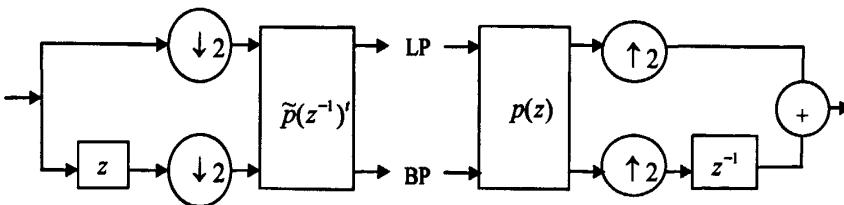


图 3.6 小波变换的多相位表示

由公式 3-13 可以看出, $\det P(z)$ 和它的倒数都是 Laurent 多项式, 假设 $\det P(z) = 1$, 可以得出 $\det P(z)$ 是一个关于 z 的单项式, 也就是 $\det P(z) = Cz^l$ 。因此对于给定的滤波器 h , 总可以通过对滤波器 g 进行伸缩和平移使得多相位矩阵的行列式为 1。从而 FIR 小波变换就可以转换为寻找一个行列式为 1 的矩阵 $P(z)$ 。一旦我们得到了这个矩阵, 就可以得到小波变换中的 $\tilde{P}(z)$ 和四个滤波器。根据公式 3-13 以及克莱姆法则可以得到:

$$\tilde{h}_e(z) = g_o(z^{-1}), \quad h_o d(z) = -g_e(z^{-1}), \quad \tilde{g}_e(z) = -h_o(z^{-1}), \quad \tilde{g}_o(z) = h_e(z^{-1})$$

也就是说

$$\tilde{g}(z) = z^{-1}h(-z^{-1}) \text{ 和 } \tilde{h}(z) = -z^{-1}g(-z^{-1})$$

最简单的一个例子是矩阵 $P(z) = I$ ，也就是说 $h(z) = \tilde{h}(z) = 1$ 和 $g(z) = \tilde{g}(z) = z^{-1}$ ，这样小波变换就是对信号分别对偶数集和奇数集进行采样，也就是前面提到的惰性小波分解。

3.2.1.2 多相位矩阵的分解算法

提升小波是寻找具有同样的低通或者高通滤波器的完全重构滤波器组 (h, g) 的一个过程。如果多相位矩阵 $P(z)$ 的行列式为 1，那么滤波器对 (h, g) 就是互补的。因此我们有：当 (h, g) 是互补的，那么 h 的其他有限长滤波器补 $g^{new}(z)$ 为：

$$g^{new}(z) = g(z) + h(z)s(z^2) \quad (3-14)$$

其中 $s(z)$ 是 Laurent 多项式。反过来，上式中的滤波器也都和 h 互补。提升结构的滤波器形式的框图如图 3.7 所示。

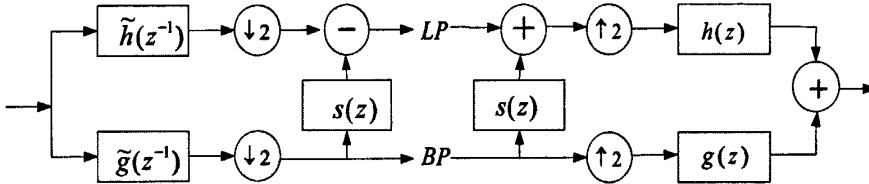


图 3.7 提升结构的滤波器表示

同样地，我们可以通过对偶提升来得到提升结构。设滤波器对 (h, g) 是互补的，那么 g 的其他有限长滤波器补 $h^{new}(z)$ 为：

$$h^{new}(z) = h(z) + g(z)t(z^2) \quad (3-15)$$

其中 $t(z)$ 是 Laurent 多项式。反过来，上式中的滤波器也都和 g 互补。图 3.8 给出了对偶提升结构的滤波器形式的框图。

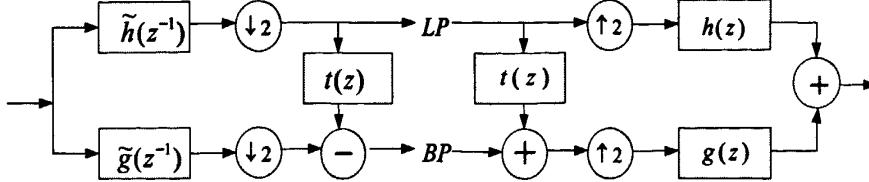


图 3.8 对偶提升结构的滤波器表示

根据欧几里得算法，对多项式向量

$$\begin{bmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{bmatrix}$$

进行分解, 可以得到

$$\begin{bmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

当 $|h_o(z)| > |h_e(z)|$ 时, $q_i(z)$ 为零, 其中假设 n 为偶数。给定一个滤波器 h , 构造一个多项式矩阵 $p^0(z)$

$$p^0(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e^0(z) \\ h_o(z) & g_o^0(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}$$

可以找到一个互补的滤波器 g^0 。这里的对角矩阵的行列式为 1, n 为偶数。对 $p^0(z)$ 进行整理, 由于

$$\begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_i(z) & 1 \end{bmatrix}$$

可以得到

$$P_0(z) = \prod_{i=1}^{n/2} \begin{bmatrix} 1 & q_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{2i}(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}$$

又因为

$$P(z) = P^0(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

结合以上公式我们可以得到: 给定互补的滤波器对 (h, g) , 总存在 Laurent 多项式 $s_i(z)$ 和 $t_i(z)$ 当 $1 \leq i \leq n$ 和非零常数 K 时有:

$$P(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 & s_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

也就是说, 每个有限长滤波器小波变换可以通过惰性小波变换经 m 次提升和对偶提升以及伸缩得到。

3.2.2 提升小波构造实现小波举例

这里我们介绍几个常见小波的提升格式实现, 包括前面介绍的 Haar 小波, Db4 小波、9/7 小波等。

3.2.2.1 Haar 小波

在 Haar 小波的滤波器系数有 $h(z) = 1 + z^{-1}$, $g(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}$,

$\tilde{h}(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}$ 和 $\tilde{g}(z) = 1 + z^{-1}$ 。使用欧几里得算法可以得到多相位矩阵:

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从而我们有:

$$P(z)^{-1} = \tilde{P}(1/z) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

这个对应于提升方法中的正变换:

$$\begin{aligned} s_l(0) &= x_{2l} \\ d_l^{(0)} &= x_{2l+1} \\ d_l &= d_l^{(0)} - s_l^{(0)} \\ s_l &= s_l^{(0)} + \frac{1}{2}d_l \end{aligned}$$

同时得到反变换为:

$$s_l^{(0)} = s_l - \frac{1}{2}d_l$$

$$d_l^0 = d_l + s_l^{(0)}$$

$$x_{2l+1} = d_l^{(0)}$$

$$x_{2l} = s_l^{(0)}$$

3.2.2.2 db4 小波

db4 小波的滤波器 h 和 g 为:

$$\begin{aligned} h(z) &= h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} \\ g(z) &= -h_3 z^2 + h_2 z^1 - h_1 + h_0 z^{-1} \end{aligned}$$

式中 $h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ 。可以得到多相位矩阵为:

$$P(z) = \tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}-2}{4} & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$\tilde{P}(1/z)^t$ 可以分解为:

$$\tilde{P}(1/z)^l = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}-2}{4}z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

由此可以得到其对应的提升格式的正变换:

$$\begin{aligned} d_l^{(1)} &= x_{2l+1} - \sqrt{3}x_{2l} \\ s_l^{(1)} &= x_{2l} + \sqrt{3}/4d_l^{(1)} + (\sqrt{3}-2)/4d_{l+1}^{(1)} \\ d_l^{(2)} &= d_l^{(1)} + s_{l-1}^{(1)} \\ s_l &= (\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}s_l^{(1)} \\ d_l &= (\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}d_l^{(2)} \end{aligned}$$

反变换为:

$$\begin{aligned} d_l^{(2)} &= (\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}d_l \\ s_l^{(1)} &= (\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}s_l \\ d_l^{(1)} &= d_l^{(2)} - s_{l-1}^{(1)} \\ x_{2l} &= s_l^{(1)} - \sqrt{3}/4d_l^{(1)} - (\sqrt{3}-2)/4d_{l+1}^{(1)} \\ x_{2l+1} &= d_l^{(1)} + \sqrt{3}x_{2l} \end{aligned}$$

3.2.2.3 9/7 小波

9/7 小波是因其分析滤波器 \tilde{h} 有 9 个系数和合成滤波器 h 有 7 个系数而得名。其中两个高通滤波器 g 和 \tilde{g} 都有 4 个消失距。通过对分析滤波器的分解算法, 可以得到:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_e(z) &= h_4(z^2 + z^{-2}) + h_2(z + z^{-1}) + h_0 \\ \tilde{h}_o(z) &= h_3(z^2 + z^{-1}) + h_1(z + 1) \end{aligned}$$

其余系数可以计算为:

$$\begin{aligned} r_0 &= h_0 - 2h_4h_1/h_3 \\ r_1 &= h_2 - h_4 - h_4h_1/h_3 \\ s_0 &= h_1 - h_3 - h_3r_0/r_1 \\ t_0 &= r_0 - 2r_1 \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned} \alpha &= h_4/h_3 \approx -1.586134342 \\ \beta &= h_3/r_1 \approx -0.05298011854 \\ \gamma &= r_1/s_0 \approx 0.8829110762 \\ \delta &= s_0/t_0 \approx 0.4435068522 \\ \zeta &= t_0 = r_0 - 2r_1 \approx 1.149604398 \end{aligned}$$

可以得到

$$\tilde{P}(z) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \beta(1+z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma(1+z^{-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta(1+z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 1/\zeta \end{bmatrix}$$

由此可以得到提升格式的算法为

$$\begin{aligned} s_l^0 &= x_{2l} \\ d_l^{(0)} &= x_{2l+1} \\ d_l^{(1)} &= d_l^{(0)} + \alpha(s_l^{(0)} + s_{l+1}^{(0)}) \\ s_l^{(1)} &= s_l^{(0)} + \beta(d_l^{(1)} + d_{l-1}^{(1)}) \\ d_l^{(2)} &= d_l^{(1)} + \gamma(s_l^{(1)} + s_{l+1}^{(1)}) \\ s_l^{(2)} &= s_l^{(1)} + \delta(d_l^{(2)} + d_{l-1}^{(2)}) \\ s_l &= \zeta s_l^{(2)} \\ d_l &= d_l^{(2)} / \zeta \end{aligned}$$

3.3 基于提升小波的图像去噪实现

3.3.1 提升小波图像去噪算法

一般情况下，提升小波去噪算法的步骤为：

- (1) 把含噪图像进行提升小波分解，因为图像信息主要都集中在低频带，所以对低频带的小波系数保留不变；
- (2) 设定阈值，将高频带小于阈值的小波系数置零，大于阈值的保持不变或者进行相应的阈值处理；
- (3) 对经过阈值处理后的小波系数进行逆变换得到去噪后的图像。

提升小波图像去噪流程如图 3.9 所示。

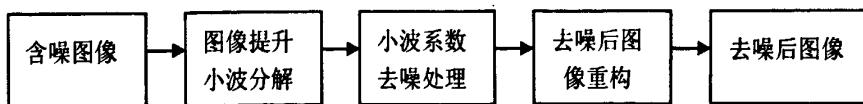


图 3.9 提升小波图像去噪流程

在小波阈值去噪方法中，阈值函数的选择是决定如何处理低于阈值或高于阈值系数的策略，常用的阈值处理方法有两种：硬阈值法和软阈值法。对于小波系数 X ，令 \hat{X} 为经过阈值处理后的系数， T 为阈值，则硬阈值处理就是将小于阈值的小波系数置零，把大于阈值的小波系数予以保留，其表达式为：

$$\hat{X} = \begin{cases} X & |X| > T \\ 0 & |X| \leq T \end{cases} \quad (3-18)$$

软阈值处理是将小于阈值的小波系数置零，而把大于阈值的小波系数取绝对值后减去阈值以消除噪声，其表达式为：

$$\hat{X} = \begin{cases} \text{sign}(X)(|X| - T) & |X| > T \\ 0 & |X| \leq T \end{cases} \quad (3-19)$$

小波阈值去噪的方法计算量小，实现简单，而且对噪声的抑制效果也比较好，因此得到了广泛的应用，但是该方法也存在不足之处，硬阈值方法可以很好地保留图像边缘等局部特征，但重构后的图像会出现振铃和伪吉布斯效应等视觉上的失真，而软阈值方法处理结果则要相对平滑，连续性比较好，但是处理后的系数和原系数存在有恒定的偏差，所以一定程度上会影响去噪后图像与原图像的逼近程度。相比之下，软阈值较硬阈值的视觉效果要好，因此一般选用软阈值处理较多。

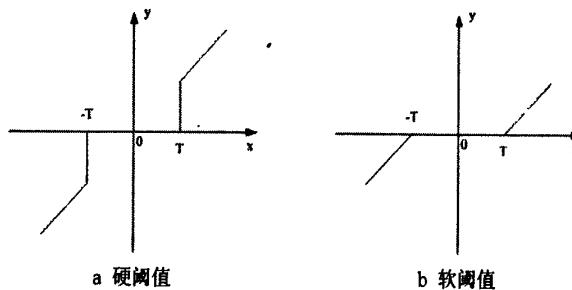


图 3.10 硬阈值和软阈值法

在小波阈值法去噪的方法中，阈值的选取是一个重要步骤，它直接影响去噪后重建图像的质量。如果阈值选取太小，那么噪声不能有效的去除，去噪后的图像还会有较多的残留噪声；如果阈值选取太大，那么会将图像的有用信号也当作噪声去除，硬阈值处理后重建的图像会出现伪边缘，软阈值处理后重建的图像会变得模糊。目前，常用的阈值选取方法有：

(1) Visu Shrink 阈值法，它是由斯坦福大学的 Donoho 和 Johnstone 教授提出来，也称作“wavelet shrinkage”，既阈值萎缩方法，其阈值表达式为：

$$T = \sigma \sqrt{2 \ln N} \quad (3-20)$$

其中 σ 为原图像噪声信号的标准方差， N 为图像的总像素数。由于在实际应用中噪声方差很难事先知道，Donoho 等人又提出了估计公式 $\hat{\sigma}^2 = \text{MAD} / 0.16745$ ，由此来估计噪声标准方差，其中 MAD 是 HH 子带小波系数幅度的中值。

(2) Sure Shrink^[6] 是一种基于 Stein 无偏似然估计的自适应阈值法。假设 $y = x + \varepsilon$ ，其中 x 是原图像， y 是添加了零均值方差为 σ_n^2 的高斯白噪声 ε 的含

噪图像, 设其相应的小波系数为 $Y = X + V$ 。设 $\hat{X} = \hat{X}(Y)$ 是 X 的一个估计:

$$\hat{X}(Y) = Y + g(Y)$$

Stein 给出了 $\|\hat{X} - X\|^2$ 的无偏估计:

$$E_X \|\hat{X}(Y) - X\|^2 = N + E_X \{\|g(Y)\|^2 + 2\nabla g(Y)\}$$

其中 $\nabla g(Y) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} g_i$ 。对于给定阈值 T , 用软阈值函数方法来估计 X , 也

就是:

$$\hat{X}_i(T) = n_T(X_i) = \text{sgn}(X_i) \max(|X_i| - T, 0)$$

用 Stein 得到风险函数为:

$$SURE(T, Y) = N - 2\#\{i : |y_i| \leq T\} + \sum_{i=1}^N (|y_i| \wedge T)^2$$

其中 $\#(\bullet)$ 是满足条件的元素的个数, “ \wedge ”表示取两个中的小的值。由此得到的 SURE 阈值为:

$$T = \arg \min_{T \geq 0} SURE(T, Y) \quad (3-21)$$

(3) Neigh Shrink 阈值法^[11]是由 Chen 和 Bui 提出的邻域阈值萎缩法, 它是根据邻域窗口中的小波系数平方和的大小来判断如何处理窗口中心的系数。

假设原图像大小为 $M \times N$, 经过小波变换后, 以每一个小波系数 $X_{i,j}$ 为中心大小为 $L \times L$ 的邻域窗口 $W_{i,j}$ (L 取奇数 3, 5, 7, …), 有:

$$S_{i,j}^2 = \sum_{i,k \in W_{i,j}} X_{i,k}^2$$

那么经过收缩后的小波系数为:

$$\hat{X}_{i,j} = \beta_{i,j} \cdot X_{i,j} \quad (3-22)$$

其中收缩因子 $\beta_{i,j}$ 的定义为:

$$\beta_{i,j} = (1 - \frac{T^2}{S_{i,j}^2})$$

阈值 T 的求法同上:

$$T = \sigma \sqrt{2 \ln(N)}$$

其中 N 为图像的总像素数, σ 为原图像噪声信号的标准方差, 也由估计公式 $\hat{\sigma}^2 = \text{MAD} / 0.16745$ 得到。

(4) Bayesian Shrink 阈值^[13]是一个行之有效的阈值方法, 它通过图像的原信号与噪声在分解后系数上的不同统计特性, 利用贝叶斯原理来得到一个最优

的阈值。

假设 x 是原图像, y 是添加了零均值方差为 σ_n^2 的高斯白噪声 ϵ 的含噪图像, 则有

$$y = x + \epsilon$$

当经过小波变换后, 由于噪声服从独立同分布, 它的均值和方差还分别是 0 和 σ_n^2 。当图像系数服从高斯分布时, Bayesian Shrink 阈值为:

$$T = \frac{\sigma_n^2}{\sigma} \quad (3-23)$$

其中 σ_n^2 为噪声方差, 由 HH_1 的中值估计得到, σ^2 为原图像小波系数的方差。

$$\sigma_n^2 = \frac{\text{Median}(|Y_{i,j}|)}{0.6745} \quad Y_{i,j} \in \text{Subband } HH_1$$

$$\sigma = \sqrt{\max(\sigma_y^2 - \sigma_n^2, 0)}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j}^n Y_{i,j}^2 \quad \sigma_y^2 : \text{ 噪声图像方差}$$

3.3.2 仿真实验及结果

我们对含有标准差分别为 10、20 和 30 的高斯白噪声 Lena 和 peppers 图像都采用普通 5/3 提升小波分解后进行阈值去噪, 阈值分别选取 Visu Shrink 阈值法和 Bayesian Shrink 阈值法, 表 3.1 给出了去噪后的 PSNR。图 3.12 和 3.13 分别给出了 Lena 图像采用 Visu Shrink 阈值法和 Bayesian Shrink 阈值法的去噪效果。

表 3.1 提升小波去噪 PSNR (单位: dB)

	σ_n	含噪图像	Visu Shrink	Bayesian Shrink
Lena	10	28.23	31.86	31.68
	20	22.16	26.76	27.72
	30	18.73	23.62	24.99
peppers	10	28.27	31.13	31.19
	20	22.21	26.24	26.47
	30	18.79	23.14	23.61



图 3.11 Lena 原图像



图 3.12 噪声方差为 30 的 Lena 图像

图 3.13 5/3 提升小波去噪
(Visu Shrink 阈值法)图 3.14 5/3 提升小波去噪
(Bayesian Shrink 阈值法)

由表 3.1 中可以看出, 当图像受噪声污染比较严重时, 同样的提升方法, Bayesian Shrink 要比 Visu Shrink 去噪效果好, 由图 3.13 和图 3.14 可以看出两种不同的阈值方法中 Bayesian Shrink 去噪后视觉效果相比前者要好。同时我们可以看出, 采用普通提升方法在去除噪声的同时, 图像的边缘纹理也变得比较模糊, 也就是说去噪的同时对图像原来纹理的保护存在不足。

3.4 本章小结

本章以 Haar 小波为例, 首先分析了提升小波的基本思想, 其次介绍了提升小波的分解和重构过程, 然后从小波变换的滤波器表示和完全重构公式得出它的多相位表示。研究了多相位矩阵的分解算法, 即如何用提升方法构造传统小

波, 其后列举了用提升方法构造常见 Haar 小波、db4 小波和 9/7 小波的过程。最后对普通提升小波阈值去噪法进行了仿真试验, 并且进行了比较分析。

第4章 基于自适应方向提升小波的图像去噪

4.1 自适应方向提升小波

普通的 2-D 提升小波使用的是图像像素相邻的水平或垂直的像素（如图 4.1），但是自然图像通常包含有一些任意方向的重要边缘信息，这些信息是既非水平方向也非垂直方向，因此传统的 2-D 提升方法对这些纹理信息不能很好的利用，如果能够预先知道图像自身的几何方向特征，并且充分利用这些特征，那么就会很大程度上减少图像小波变换后高频子带的信息量。为了解决这个问题，出现了很多图像自适应分解的方法。2007 年，丁文鹏等人提出了一种基于提升变换的自适应方向提升小波^[48, 49]，它能够有效利用图像方向信息对图像进行稀疏表示，通过先对方向的预测再进行提升，有效的消除了方向上存在的空间冗余。

基于自适应方向提升小波的 2-D 小波变换同普通提升方法一样，也是将图像分别对行和列进行一维提升，不同之处在于行（或列）提升时，奇数样本不是简单由水平（或垂直）的相邻像素预测，而是由相邻最佳方向上的像素来预测，通过预测得到各个区域的纹理方向并沿着这些方向对图像做提升变换，从而将纹理区域更多的能量压缩到低频子带进而获得较小的高频系数。

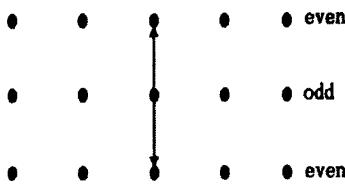


图 4.1 普通提升小波

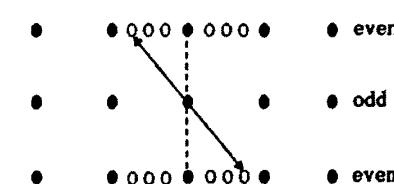


图 4.2 自适应方向提升小波

图 4.1 给出了普通提升小波变换在提升时预测像素的选取方法，图 4.2 给出了自适应方向提升小波变换时预测像素的选取方法。它可以使用诸如 5/3 小波、9/7 小波等 1-D 的滤波器来对 2-D 的图像进行分解。假设在 $x_o[m, n]$ 点的列 θ 方向为最佳方向，则预测算子就要修正为沿 θ 方向，即预测算子 $P(\cdot)$ 为

$$P_{x_o}(m, n) = \sum p_i x_e(m + sign(i-1)tg(\theta), n + i) \quad (4-1)$$

其中 p_i 由相应的高通滤波器的系数得到。当 $x \geq 0$ 时 $sign(x) = 1$ ， $x < 0$ 时 $sign(x) = 0$ 。由于在大多数图像中更新时的角度是同预测时的角度一致的，同样在

更新步骤中更新算子 $U(\cdot)$ 也要修正为沿 θ 方向, 即

$$U_d(m, n) = \sum_j u_j d(m + \text{sign}(j) \tan(\theta), n + j) \quad (4-2)$$

其中 u_j 由相应的低通滤波器的系数得到。由于 ADL 变换能够有效地利用纹理或边缘的角度信息进行编码, 因此同普通提升小波变换相比, 它减少了图像在小波分解后高频系数的能量信息分布, 将图像信息主要集中在了低频子带。

由于纹理方向不一定是在整数像素位置上, 所以在用 ADL 进行提升小波变换时需要通过插值来得到分数位置上的像素值, ADL 中是采用 SINC 插值的方法得到分数位置的点, 原则上预测角度 θ 是一个任意角度的, 但是在实际中发现九个均匀离散的角度 θ_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ 能够满足 ADL 所需的角度, 也就是说插值可以达到在四分之一像素的空间分辨率, 由此, 预测算子 $P(\cdot)$ 可以修改为:

$$P_d(m, n) = \sum_i p_i x_i(m + (-1)^{i-1} \frac{d-5}{4}, n + i) \quad d = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \quad (4-3)$$

其中当 $d=2, 3, 4, 6, 7, 8$ 时, $x_i(\cdot)$ 是在分数位置上, 其值通过 SINC 插值计算出来。

同样的, 更新算子 $U(\cdot)$ 也修改为:

$$U_d(m, n) = \sum_j u_j d(m + (-1)^{j-1} \frac{d-5}{4}, n + j) \quad d = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \quad (4-4)$$

另外, 由于自适应方向提升小波在行提升和列提升时的角度 θ_h 和 θ_v , 因此行提升和列提升并不一定是垂直的, 也就是说行提升和列提升时沿着各自最佳方向进行的。而提升后图像也会和普通小波一样分为 LL、LH、HL 和 HH 四个子带, 对 LL 可以再次进行下一级的提升分解。图 4.3 至图 4.6 分别为采用普通提升小波和自适应方向提升小波对 Barbara 和 goldhill 两幅图像进行一级分解后的图像。可以看出, 在高频部分自适应方向提升小波要明显比普通提升小波信息能量少, 也就是说图像大部分信息都集中在了 LL 频带, 具有更好的稀疏性。



图 4.3 普通提升小波



图 4.4 自适应方向提升小波

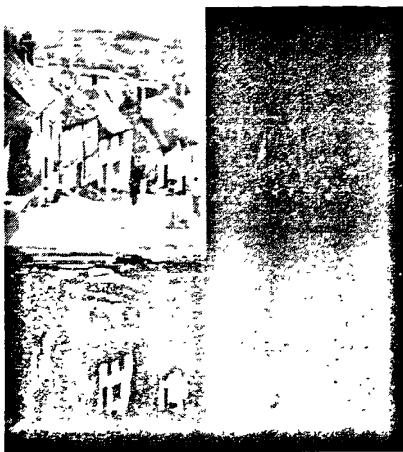


图 4.5 普通提升小波



图 4.6 自适应方向提升小波

由上面可以看出，自适应方向提升小波相对普通提升小波具有以下特点^[7]：

(1) 在预测和更新步骤中，自适应方向提升小波是沿着图像的边缘或者纹理结构进行的，而不是固定的按照水平方向或垂直方向进行，从而减少了分解后高频子带的能量，改善了预测的效果。

(2) 自适应方向提升小波对二维图像通过两个一维变换来完成，即一个水平方向上的自适应方向提升和一个垂直方向上的自适应方向提升，因为是沿着图像边缘或纹理结构进行的，所以两个一维提升变换的方向并不一定垂直的。但是因为自适应方向提升小波同普通提升方法一样也是沿着水平和垂直的方向来进行下采样的，因而分解后同样得到 LL、LH、HL 和 HH 四个子带，各个子带也是沿水平或垂直方向的。

(3) 为了得到更精确的预测方向，在自适应方向提升小波中采用了 SINC 插值，将空间分辨率提高到了四分之一像素。同时考虑到要完全重构，在插值时选择的参考点处于整数位置。

(4) 为了达到较好的提升效果，在自适应方向提升小波变换前采用四叉树的分割方法对图像进行分块，以得到分块内的边缘或纹理方向是大体一致的。

4.2 改进的自适应方向提升小波

在自适应方向提升小波中，由于 SINC 插值只是在水平或垂直方向上进行，可能会使原图像的方向特性产生损失，为解决这个问题，Yu Liu 等人提出了 Weighted adaptive directional lifting (WADL)^[50]，通过加权提升最大程度上保持了预测和更新阶段的一致性，同时也保证了更好的重建。

1、加权的提升方法

WADL 在预测阶段奇数像素是由周围更多的偶数像素通过加权函数来预测得到的, 这样比 ADL 中只用一个像素来预测得到的结果要好, 其中加权函数表示为:

$$f_i(x_e) = \sum_k w_{i,k} x_e[m + \Delta m_{i,k}, n + \Delta n_{i,k}] \quad (4-5)$$

$w_{i,k}$ 是偶数像素子集 $x_e[m + \Delta m_{i,k}, n + \Delta n_{i,k}]$ 的加权系数, $(\Delta m_{i,k}, \Delta n_{i,k})$ 是加权像素和像素 $x_e(m, n)$ 的矢量距离, 并且有 $\sum_k w_{i,k} = 1$ 。当方向预测时位移是在整数像素点上时, 整数点像素的加权函数定义为:

$$f_i(x_e) = \sum_k w_{i,k} x_e[m + \Delta m_{i,k}, n + \Delta n_{i,k}] = x_e[m + i, n + a] \quad (w_{i,k=a} = 1, w_{i,k \neq a} = 0) \quad (4-6)$$

其中 a 是整数点的位置, $\Delta m_{i,k=a} = i, \Delta n_{i,k=a} = a$ 。当方向预测是在分数像素点上时, 分数点像素的加权函数定义为:

$$f_i(x_e) = \sum_k w_{i,k} x_e[m + \Delta m_{i,k}, n + \Delta n_{i,k}] = \sum_k \alpha_{i,k} x_e[m + \Delta m_{i,k}, n + \Delta n_{i,k}] \quad (w_{i,k} = \alpha_{i,k}) \quad (4-7)$$

其中 $\alpha_{i,k}$ 是插值滤波器的系数, 并且 $\sum_k \alpha_{i,k} = 1$ 。这样得到的高通系数 $d[m, n]$ 为:

$$d[m, n] = x_o[m, n] + \sum_{i=0}^1 p_i \sum_k w_{i,k} x_e[m + \Delta m_{i,k}, n + \Delta n_{i,k}] \quad (4-8)$$

其中 $w_{i,k}$ 是通过 4-7 和 4-8 式得到的位置精度来确定的加权系数。低通系数 $c[m, n]$ 为:

$$c[m, n] = x_e[m, n] + \sum_{j=-1}^0 u_j \sum_l w_{j,l} d[m + \Delta m_{j,l}, n + \Delta n_{j,l}] \quad (4-9)$$

由上所述可见, WADL 基本思想是在更新阶段用到的高通系数是和在预测阶段时计算得到的高频系数位置的分布是相同的。

2、插值方法的改进

在公式 4-1 和 4-2 中, $\tan \theta$ 不一定是整数, 因此需要通过插值来得到亚像素点上的值, 在自适应方向提升小波中采取的是 SINC 插值算法, 该算法是以 SINC 函数为基础来定义的。其中 SINC 函数的定义为:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad (4-10)$$

SINC 插值是用待插值像素点周围八个相邻的像素点来获得插值点的像素值, 在实际过程中, θ 取九个角度 θ_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, 插值后的空间分辨率为四分之一像素, 在计算插值后两整数像素间 $1/4, 2/4, 3/4$ 的值时, 所用到周围八个像素点的权重值是不同的, 具体如表 4.1 所示。

表 4.1 亚像素点 SINC 插值权重系数

	1	2	3	4	5	6	7	8
1/4 像素	-0.0053	0.0233	-0.0812	0.2777	0.895	-0.1437	0.0452	-0.011
2/4 像素	-0.0105	0.0465	-0.1525	0.6165	0.6165	-0.1525	0.0465	-0.0105
3/4 像素	-0.011	0.0452	-0.1437	0.895	0.2777	-0.0812	0.0233	-0.0158

由上面可以看出，在自适应方向提升小波中亚像素都是沿着水平或者垂直方向进行 SINC 插值得到的，而且在计算亚像素点时的权重系数也是固定的，这样得到的亚像素点没有很好的考虑图像的纹理和边缘的方向特性，从而对插值点的值带来误差。在 WADL 中对插值算法进行了改进，其插值时获得亚像素点值时不是仅仅通过水平或者垂直方向上的像素来得到，而是沿着自适应方向提升时备选的方向来进行，从而能够更好的符合图像纹理边缘方向。

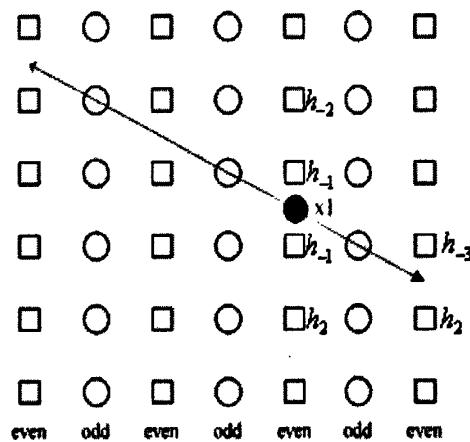


图 4.7 方向插值

如图 4.7 所示，该插值方法在插值的时候，对不同分数点位置所使用的是不同整数点作为参考点来插值，插值和预测的方向相关。例如要对 x_1 点进行插值，不仅需要用到 $\{h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2\}$ 四个点，还要用到该方向上 $\{h_{-3}, h_3\}$ 两点。亚像素点上的插值由一个方向插值滤波器组来得到，该方向插值滤波器组由双线性滤波器(Bilinear filter)，Telenor4-tap 滤波器和 2-tap 滤波器构造而成，在方向插值的过程中， $\{h_{-3}, h_3\}$ 作为双线性滤波器的输入， $\{h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2\}$ 作为 Telenor4-tap 滤波器的输入，将这两个滤波器的输出作为 2-tap 滤波器的输入，得到的结果就是分数像素点的值，方向插值滤波器的组成框图如图 4.8 所示。

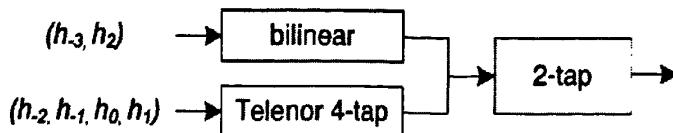


图 4.8 方向插值过程框图

表 4.2 给出了在 1/4、1/2、3/4 处该滤波器组中各滤波器的系数。实际上，该方向滤波器组等效于表 4.3 给出的滤波器效果。该插值方法可以沿着纹理方向进行，保证了在插值过程中用到的点同需要插入的分数点有着较大的相关性，减小了方向信息的损失，同时使得预测的高频分量更加稀疏。

表 4.2 方向插值滤波器中各滤波器不同位置系数

滤波器	位置	滤波器系数
双线性滤波器	1/4	(3,1)/4
	1/2	(2,2)/4
	3/4	(1,3)/4
Telenor4-tap 滤波器	1/4	(-1,13,5,-1)/16
	1/2	(-2,10,10,-2)/16
	3/4	(-1,5,13,-1)/16
2-tap 滤波器	N/A	(-1,5)/4

表 4.3 方向滤波器

位置	滤波器系数
1/4	(-4,15,65,25, -5, -12) /64
1/2	(-8, -10,50,50, -10, -8) /64
3/4	(-12, -5,25,65, -5, -4) /64

4.3 基于自适应方向提升小波的图像去噪实现

4.3.1 自适应方向提升小波图像去噪算法

由于在噪声图像中直接采用改进的自适应方向提升小波时，在平滑区域方向对噪声比较敏感，并且计算量较大，因此我们采取文献[51]中的方法，首先对噪声图像的像素进行分类，然后对噪声图像进行分割并根据分割后图像块中像素的分类情况确定使用的提升方法。

噪声图像的像素进行分类是将噪声图像中每一个像素进行划分，将其归类为平滑区域或纹理区域。我们首先估计图像中噪声的方差，然后计算噪声图像以每一个像素为中心的 9×9 大小块的方差，设定阈值，用每一点得到的方差和噪声估计的方差比值与设定的阈值比较，比值大于该阈值的，则将该像素划归

为纹理区域，设定标签 flag 为 1，否则属于平滑区域，设定标签 flag 为 0，标签 flag 组成的图像就是平滑和纹理区域。

噪声图像分割采用固定分块的方法将图像分成 16×16 大小的块，将 flag 组成的图像同样分割成 16×16 的块。如果对应的 flag 块全为 0，那么我们认为该噪声图像块是属于平滑区域，采用普通提升的方法；如果对应的 flag 块不全为 0，那么我们认为该噪声图像块是属于纹理密集区域，采用改进的自适应方向提升方法。提升分解后采用小波阈值法进行去噪。

因此，采用改进的自适应方向提升小波进行图像去噪的步骤总结为：

- (1) 首先对图像的像素进行判别，然后分割图像并对分割的图像划分为平滑区域或者是纹理区域；
- (2) 平滑区域采用普通提升小波分解，纹理区域采用改进的自适应方向提升小波分解；
- (3) 小波系数萎缩。小波系数萎缩也就是对分解所得到的小波系数进行阈值处理。
- (4) 萎缩小波系数的合成。

4.3.2 实验结果及分析

(1) 对含有高斯白噪声图像去噪

高斯白噪声因为其包含所有频率成分，同时还具有恒定的功率谱，因此是一种最具有代表性的噪声模型。我们对 Lena、peppers 和 goldhill 三幅图像分别加入标准差为 20 和 30 的高斯白噪声作为含噪图像，都分别采用普通 $5/3$ 提升小波和我们提出的方法进行去噪处理。图 4.9 为采用我们提出的方法进行去噪时，对添加噪声标准差为 20 的三幅图像像素分类后的结果。



(a) Lena 噪声图像

(b) Lena 像素分类图像

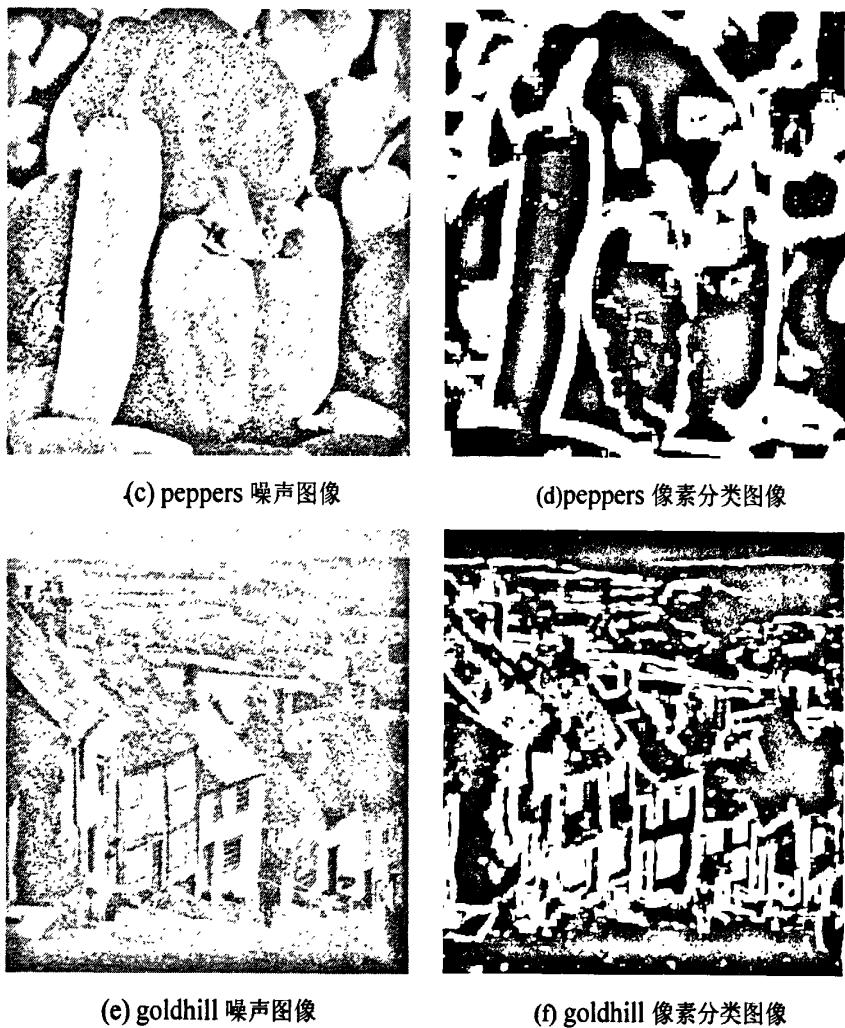


图 4.9 噪声图像像素分类

表 4.4 去噪图像 PSNR 对比 (单位: dB)

	σ_n	含噪图像	普通 5/3 (Visu Shrink)	普通 5/3 (Bayesian Shrink)	改进 ADL5/3 (Visu Shrink)	改进 ADL5/3 (Bayesian Shrink)
Lena	20	22.16	26.76	27.72	28.12	28.73
	30	18.73	24.62	24.99	25.69	26.52
peppers	20	22.21	26.24	26.47	27.45	27.78
	30	18.79	23.14	23.61	25.81	25.91
goldhill	20	22.18	26.41	26.87	28.19	28.31
	30	18.74	23.44	24.64	26.18	26.81



图4.10 Lena图像去噪结果对比

表 4.4 给出了采用普通提升小波去噪和改进的方法得到的峰值信噪比比较。图 4.10 是对添加了标准差为 20 高斯白噪声的 Lena 图像分别采用普通提升小波去噪和采用本文提出的方法在 Bayesian Shrink 阈值时去噪的结果。从实验仿真结果可以看出, 采用本文提出的方法比普通 $5/3$ 提升小波进行去噪处理有明显改善, 而选用 Bayesian shrink 阈值较 Visu Shrink 阈值在去噪后的图像质量要好。但是由于采用我们所提出的方法进行去噪时首先要对图像进行判别, 其计算量大于直接进行小波阈值去噪, 所以在处理速度上比直接采用普通提升小波去噪所需要的时间要长, 因此在采用了该方法时如何能够提高处理速度是一个值得下一步研究的问题。

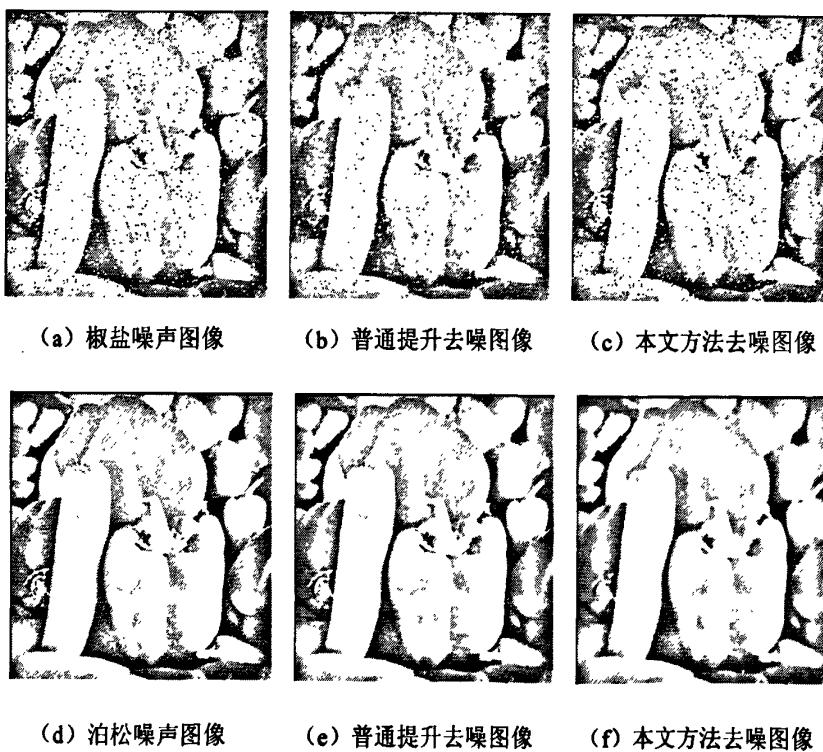
(2) 对其他噪声图像去噪

我们对 Lena 和 peppers 两幅图像分别加入噪声密度为 0.05 的椒盐噪声、泊

松噪声和方差为 50 的斑点噪声作为含噪图像，都分别采用普通 5/3 提升小波和我们提出的方法进行去噪处理，其中阈值选用 Bayesian Shrink 阈值。图 4.11 给出了加入三种噪声后采用我们提出的方法进行去噪时 peppers 图像像素分类后的结果，可以看出，对不同噪声像素分类后 flag 图像有较大的差别。图 4.12 给出了 peppers 图像添加三种不同噪声后采用普通 5/3 提升小波和我们提出的方法进行去噪处理的结果。表 4.5 给出了两种方法去噪后的峰值信噪比。



图4.11 peppers不同噪声像素分类图像



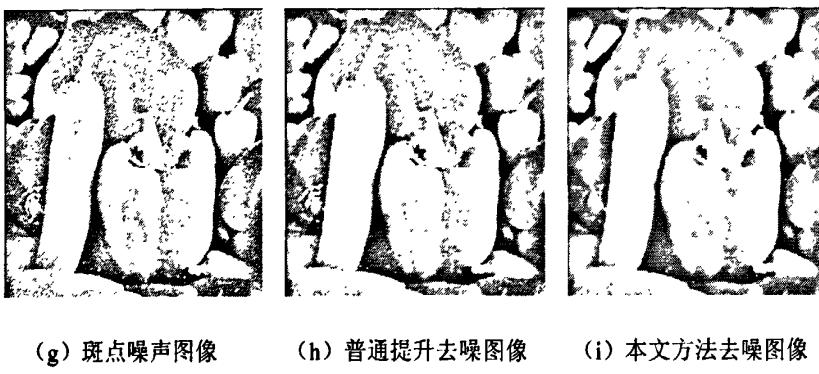


图4.12 图像去噪结果对比

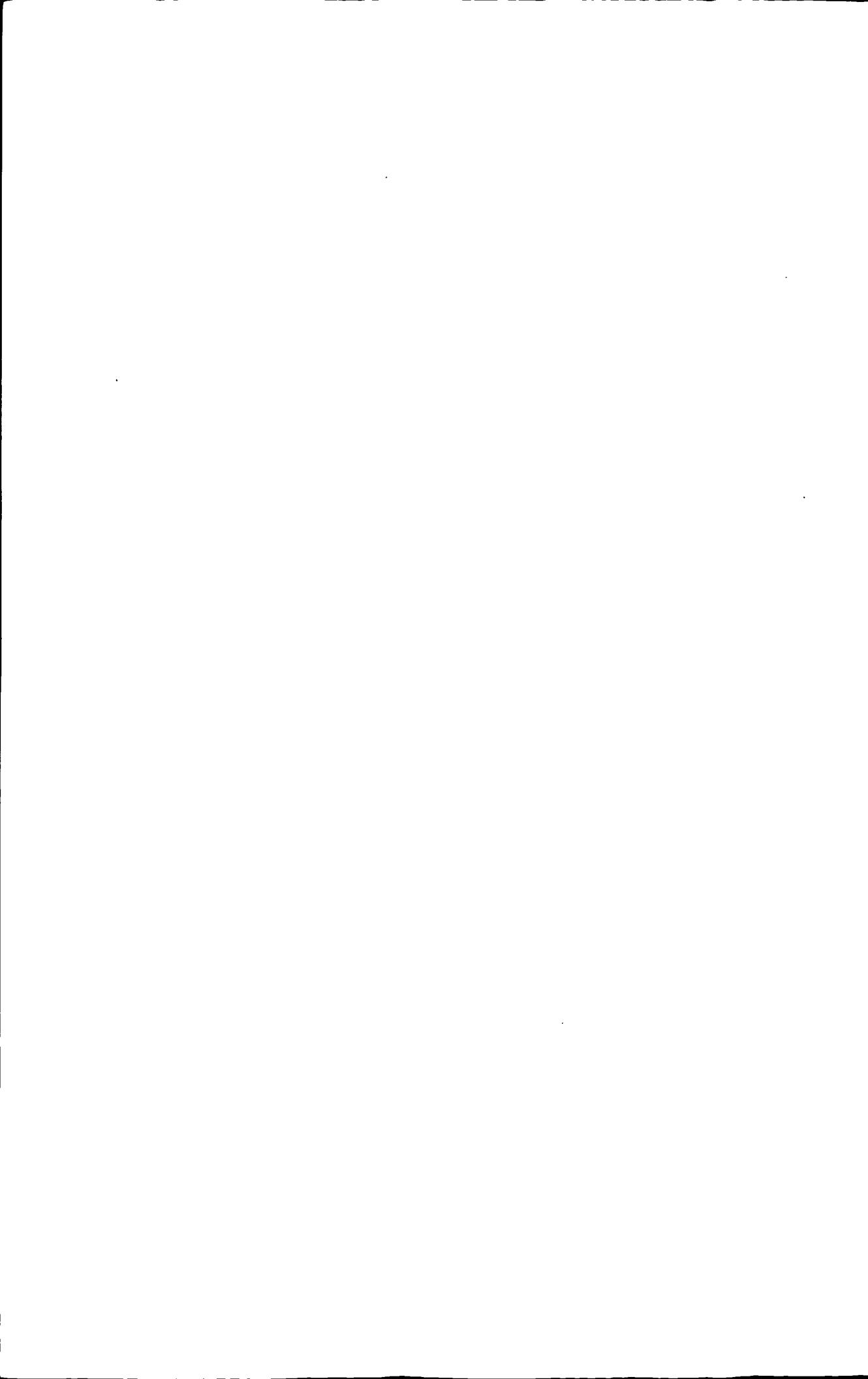
表 4.5 去噪图像 PSNR 对比 (单位: dB)

	噪声类型	含噪图像	普通 5/3	改进 ADL5/3
Lena	椒盐噪声	18.39	18.98	18.81
	泊松噪声	27.17	31.14	31.65
	斑点噪声	18.84	24.64	25.15
peppers	椒盐噪声	18.36	18.63	18.71
	泊松噪声	27.21	30.35	30.80
	斑点噪声	18.72	23.37	24.03

由表 4.5 可以看出, 对于泊松噪声和斑点噪声, 采用本文提出的方法比普通 5/3 提升小波进行去噪处理效果有所改善, 但是对含有椒盐噪声的图像两种方法去噪后在视觉效果和 PSNR 上都显示效果都比较差。

4.4 本章小结

本章阐述了提升小波在图像分解中存在的不足, 即没有考虑图像边缘纹理的方向特征, 不能很好的逼近不同方向的图像纹理, 介绍了自适应方向提升小波, 研究了对自适应方向提升小波的改进, 通过加权和选取不同插值方法得到更好的提升效果, 并且把它应用到图像去噪上, 通过实验仿真, 对含有高斯白噪声的图像取得了良好的去噪效果。



第5章 总结与展望

5.1 本文工作总结

随着计算机和互联网的疾速发展，多媒体技术成为一大热点，而在其中有着广泛应用的数字图像占有很重要地位。如何有效消除图像在采集、传输和存储等环节中带来的噪声污染成为人们迫切需要解决的一个问题。

传统的去噪方法中，空域去噪只是对整个图像进行某一种简单的运算处理，在处理过程中忽视了图像不同部分的特性，在去噪后会引起细节和边缘等高频部分的模糊；傅里叶变换去噪虽然能通过低通滤波来平滑抑制噪声，但是噪声和图像的频谱往往是重叠的，因此对包含在信号频带中的噪声无法去除。

小波变换具有良好的时频特性、多分辨率分析和去相关等特性，而提升小波能通过提升方法构造出传统小波，而且构造简单、运算速度快、易于实现，在图像处理方面得到了广泛应用，其中在图像去噪方面是主要应用之一。然而普通提升小波只是沿水平和垂直方向对图像进行小波分解，不能很好地表现出非水平和非垂直方向的纹理信息。自适应方向提升小波能够较好地表现出自然图像中通常包含的任意方向的重要边缘信息，在图像处理和分析中有其独特优势。本论文主要研究基于自适应方向提升小波的图像去噪方法。论文的主要研究内容和贡献如下：

1. 对小波变换的基本理论和在图像处理上的应用情况、图像噪声基本类型和经典的去噪方法以及图像质量评价方法进行了回顾。探讨了提升小波的分解和重构过程以及如何通过对提升滤波器对的 Laurent 多项式采用欧几里德算法进行多相位因子分解来构建提升小波的方法，分析了提升小波和传统小波的内在联系及如何用提升方法灵活的构造传统小波，对采用提升小波图像去噪进行了实验仿真，分析了其在去噪中存在的不足。

2. 提出了基于自适应方向提升小波的图像去噪算法。自适应方向提升小波充分利用图像方向信息对图像进行稀疏表示，能有效消除图像方向上存在的空间冗余。与普通提升小波相比，自适应方向提升小波能够更好地逼近图像纹理，且可以用更少的高频系数表示图像。试验结果表明，基于自适应方向提升小波的图像去噪算法能够较好的保持图像纹理信息。

3. 通过实验仿真，对比分析了阈值选取方法对自适应方向提升小波去噪性能的影响。小波阈值去噪法中，阈值的选取直接影响去噪后重建图像的质量，实验结果表明，采用 Bayesian Shrink 阈值的图像去噪性能最好。

5.2 下一步工作

由于水平和时间有限，本文的研究内容还有有待完善之处，在今后的研究工作中需要进一步研究和改进的有：

- 1、基于自适应方向提升小波的图像去噪算法在对图像进行提升分解前需要进行像素判别和图像分块，较普通小波执行速度要慢，如何改进执行速度有待进一步研究。
- 2、在本文中主要针对噪声模型为高斯白噪声，对于其他类型的噪声模型如何能针对特点很好的去噪有必要继续研究。
- 3、方向滤波器在自适应方向提升小波的改进研究上有新的进展，如何结合方向滤波器对图像进行提升小波变换然后去噪，以达到更好的去噪效果值得研究和尝试。

参考文献

- [1] Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transforms into lifting steps[J]. *Journal of Fourier Analysis And Applications*, 1998,4(3):247-269.
- [2] Sweldens W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets[J]. *Applied And Computational Harmonic Analysis*, 1996,3(2):186-200.
- [3] Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets[J]. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 1992,38(2):617-643.
- [4] Hsung C T, Lun D, Siu C W. Denoising by singularity detection[J]. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 1999,47(11):3139-3144.
- [5] Yansun X, Weaver J B, Healy D M, et al. Wavelet transform domain filters: a spatially selective noise filtration technique[J]. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 1994,3(6):747-758.
- [6] Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. *Journal of The American Statistical Association*, 1995,90(432):1200-1224.
- [7] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage[J]. *Biometrika*, 1994,81(3):425-455.
- [8] H G. Wavelet Shrinkage Denoising Using the Non-negative garrote[J]. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 1998,7(4):469-490.
- [9] Quan P, Lei Z, Guanzhong D, et al. Two denoising methods by wavelet transform[J]. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 1999,47(12):3401-3406.
- [10] Wan F Y, Yuan Z D. Optimization problem of shrinkage and thresholding policies in wavelet and the application to image processing: Intelligent Control and Automation, 2000. *Proceedings of the 3rd World Congress on*, 2000[C].
- [11] Chen G Y, Bui T D, Krzyzak A. Image denoising using neighbouring wavelet coefficients: *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2004. Proceedings. (ICASSP '04). IEEE International Conference on*, 2004[C].
- [12] 傅彩霞, 杨光. 一种新的具有增强效果的小波域图像去噪方法[J]. *中国图象图形学报*, 2007(1):51-55.
- [13] Chang S G, Bin Y, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[J]. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 2000,9(9):1532-1546.
- [14] RichardO 美. 模式分类[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003.
- [15] Hashemi M, Beheshti S. Adaptive Noise Variance Estimation in BayesShrink[J]. *Signal*

- Processing Letters, IEEE, 2010,17(1):12-15.
- [16] Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation[J]. Image Processing, IEEE Transactions on, 2005,14(12):2091-2106.
- [17] Jean-Luc S, Candes E J, Donoho D L. The curvelet transform for image denoising[J]. Image Processing, IEEE Transactions on, 2002,11(6):670-684.
- [18] 肖小奎, 黎绍发. 加强边缘保护的Curvelet图像去噪方法[J]. 通信学报, 2004,25(2):7.
- [19] Eslami R, Radha H. Translation-Invariant Contourlet Transform and Its Application to Image Denoising[J]. Image Processing, IEEE Transactions on, 2006,15(11):3362-3374.
- [20] 戴维, 于盛林, 孙栓, 等. 基于Contourlet变换自适应阈值的图像去噪算法[J]. 电子学报, 2007,35(10):5.
- [21] Mallat S. Multiresolution Approximations and Wavelet Orthogonal Bases of $L_2(\mathbb{R})$ [J]. IEEE Transactions on AMS, 1989,315(1):68-87.
- [22] Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation[J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, 1989,11(7):674-693.
- [23] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets .2. variations on a theme[J]. SIAM Journal on mathematical analysis, 1993,24(2):499-519.
- [24] 孙延奎编著. 小波分析及其应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [25] 倪林编著. 小波变换与图像处理[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.
- [26] 张德丰著. MATLAB小波分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- [27] 矫恒浩. 自适应方向提升小波图像去噪及其实现[D]. 西安电子科技大学, 2009.
- [28] 于枝伶. 基于边缘检测的小波图像去噪[D]. 西安理工大学, 2007.
- [29] 斯士利. 基于小波变换的自适应图像去噪方法的研究[D]. 青岛大学, 2010.
- [30] 杨滨. 基于自适应阈值的小波图像降噪[D]. 青岛大学, 2009.
- [31] 桂乐. 小波分析理论及其在图像压缩中的应用[D]. 西北大学, 2003.
- [32] 刘鑫森. 基于提升系统的小波多分辨率分析图像增强及应用研究[D]. 宁夏大学, 2009.
- [33] Buades A, Coll B, Morel J M. A review of image denoising algorithms, with a new one[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2005,4(2):490-530.
- [34] 林勇平, 程正兴. 小波分析在图像处理中的应用[J]. 工程数学学报, 2001,18(5):57-86.
- [35] SHAPIRO J M. Embedded image-coding using zerotrees of wavelet coefficient[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993,41(12):3445-3462.
- [36] Said A, Pearlman W A. A new, fast, and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees[J]. Circuits and Systems for Video Technology, IEEE Transactions on, 1996,6(3):243-250.
- [37] Taubman D. High performance scalable image compression with EBCOT[J]. Image

- Processing, IEEE Transactions on, 2000,9(7):1158-1170.
- [38] Reeves T H, Jernigan M E. Multiscale-based Image Enhancement[J]. IEEE Electrical and Computer Engineering, 1997,2(5).
- [39] KennyC. Peer Group Image Enhancement[J]. IEEE Transactions On Image Processing, 2001,10(2):326-334.
- [40] Hatam S, Hosseini R, Kamarei M. Wavelet Based Fingerprint Image Enhancement[J]. IEEE Circuits & Systems, 2005(5):4610-4613.
- [41] 何锦平. 基于小波多分辨率分析的图像增强及其应用研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2003.
- [42] 艾泽潭, 石庚辰. 小波变换在图像去噪中的应用[J]. 科技导报, 2010(1):102-106.
- [43] RafaelC 美. 数字图像处理[M]. 北京: 电子工业出版社, 2007.
- [44] 孙轶. 基于自适应提升小波的信号去噪技术研究[D]. 中国科学技术大学, 2008.
- [45] Sweldens W. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1998,29(2):511-546.
- [46] Sweldens W, Schroder P. Building your own wavelets at home[M]//BERLIN: SPRINGER-VERLAG BERLIN, 2000:72-130.
- [47] Vetterli M, Herley C. Wavelets and filter banks: theory and design[J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 1992,40(9):2207-2232.
- [48] Ding W P, Wu F, Wu X L, et al. Adaptive directional lifting-based wavelet transform for image coding[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007,16(2):416-427.
- [49] 丁文鹏. 自适应方向提升小波变换及应用[D]. 中国科学技术大学, 2009.
- [50] Yu L, King N N. Weighted Adaptive Lifting-Based Wavelet Transform for Image Coding[J]. Image Processing, IEEE Transactions on, 2008,17(4):500-511.
- [51] Xiao-tian W, Guang-ming S, Yi N. Image denoising based on improved adaptive directional lifting wavelet transform: Signal Processing, 2008. ICSP 2008. 9th International Conference on, 2008[C].



致 谢

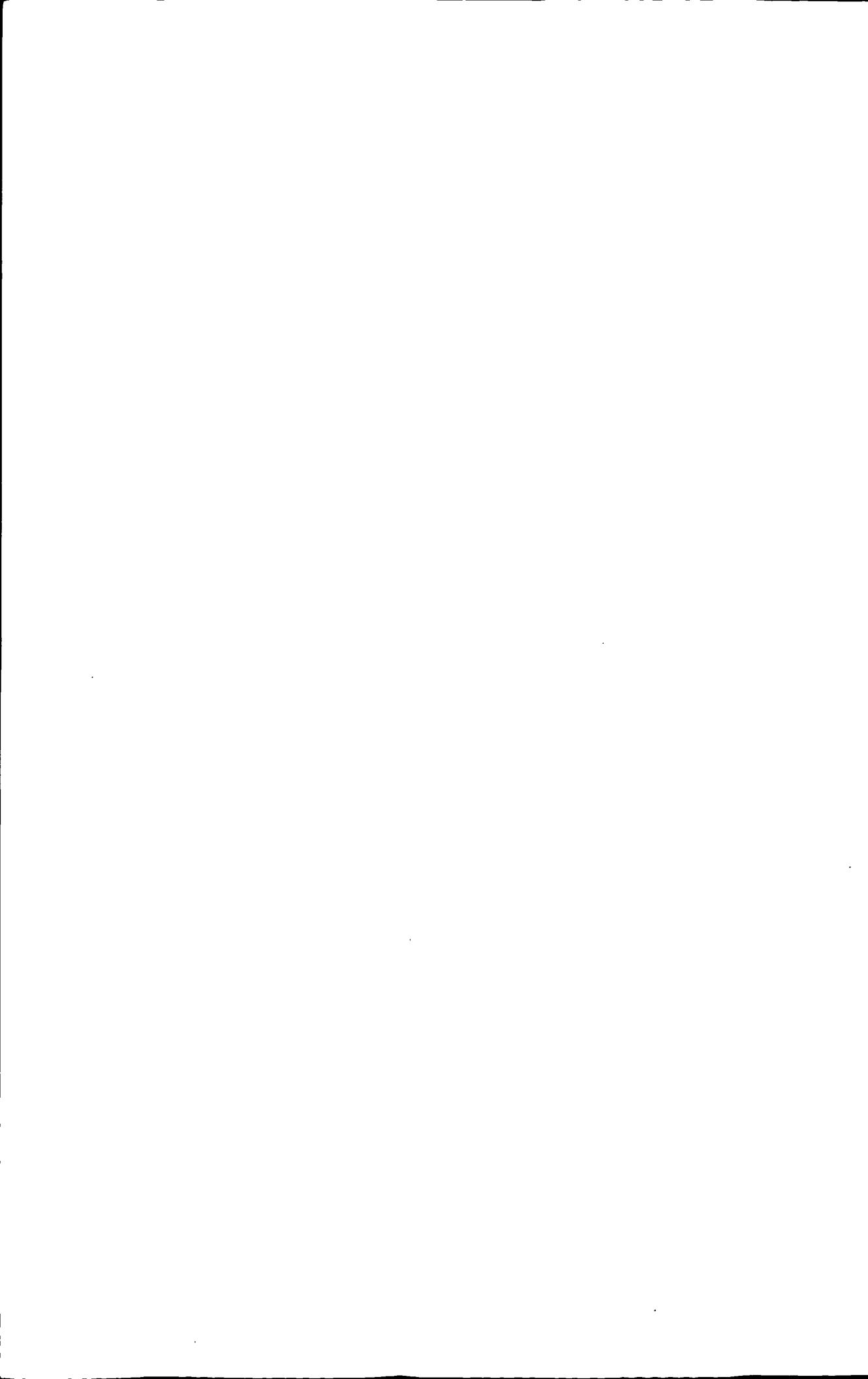
时光如水，岁月如歌，转眼间在科大三年的学习生活即将结束。三年的时光，无限的回忆，在这里留下了学习时辛苦的汗水，留下了欢聚时的笑声，留下了放松时优美的照片，这一切的一切将成为我人生中最美的记忆！在科大，让我感受到了浓厚的学术气氛和严谨的科研作风，让我领略了无数大牛的博学多才，同时也让我结识了许多的挚友。在此，我首先要感谢我的导师倪林老师，在三年的学习中，倪林老师给予了我悉心的指导。

感谢我所选课程的任教老师，他们认真负责的教学态度使我了解和掌握了很多知识，为开展科研工作打下了坚实的基础，也为我课题研究的顺利完成起到了很大的帮助作用。感谢在开题、中期检查中的各位评审老师为我更好的完成课题提出的宝贵意见，感谢在百忙中抽出宝贵时间来评审我论文的各位评审老师，感谢耐心给我指导和修改毕业论文的俞能海老师！

感谢 308 实验室的王初晓、黄莹、高铭徽、吕倩、林娜、吴巧玲和何德龙等同学对我学习、生活上的帮助和支持。感谢同宿舍的林玉川、解大鹏、潘演雄以及其他几个强军的兄弟，和他们欢聚的日子总是这么快乐，和睦融洽的气氛给我的学习生活增加了很多的欢乐。

特别感谢我的妻子王旭辉和女儿，在我三年学习和生活中妻子的关心、支持和鼓舞给予我克服一切困难的勇气和力量。

最后，衷心的感谢生我养我的父母，他们对我的爱和无尽的关怀是我不断前行的动力！



在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已经发表的论文:

[1] 刘权, 林娜, 吕倩. 基于加权自适应方向提升小波的图像去噪研究[J]. 电子技术
2010,12(37)4-7

[2] Quan LIU, Lin NI. Image Denoising Using Bayesian Shrink Threshold Based on Weighted
Adaptive Directional Lifting Wavelet Transform[C]. International Conference on Signal
and Information Processing2010: 470-473

科研工作:

1. 2009.09-2010.1 社区警务搜索平台项目, 主要成员

