

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

高等代数习题解答

(北京大学丘维声教授编著的教材)

宿州学院数学系代数教研室

第 10 章: 具有度量的线性空间

书后习题.1. $P_{169}, Ex1$

证明: (1) 显然 f 是对称的, 所以只要验证单侧线性就可以了.

$$\begin{aligned} & \text{任意 } \alpha_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \alpha_2 = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T, k_1, k_2 \in K, \\ & f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2, \beta) \\ &= (k_1x_1 + k_2z_1)y_1 + (k_1x_2 + k_2z_2)y_2 + (k_1x_3 + k_2z_3)y_3 - (k_1x_4 + k_2z_4)y_4 \\ &= (k_1x_1y_1 + k_1x_2y_2 + k_1x_3y_3 - k_1x_4y_4) + (k_2z_1y_1 + k_2z_2y_2 + k_2z_3y_3 - k_2z_4y_4) \\ &= k_1(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4) + k_2(z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3 - z_4y_4) \\ &= k_1f(\alpha_1, \beta) + k_2f(\alpha_2, \beta), \end{aligned}$$

所以 f 是 K^4 上的双线性函数.

(2) 直接计算

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_i) = 1, i = 1, 2, 3,$$

$$f(\varepsilon_4, \varepsilon_4) = -1;$$

$$f(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j, \forall i, j = 1, 2, 3, 4.,$$

所以在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 之下的度量矩阵是:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) 由于 f 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 之下的度量矩阵是满秩矩阵, 所以 f 在 K^4 上的左根, 右根都是 0, 也就是: f 是非退化的.

(4) 由于 f 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 之下的度量矩阵是对称矩阵, 所以 f 是对称的.

(5) 取 $\alpha = (1, 0, 0, 1)^T$, 容易计算: $f(\alpha, \alpha) = 0$. □

书后习题.2. $P_{169}, Ex2$

证明: 只证明左根. 同理可证明右根.

取 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, f 在这个基下的度量矩阵为 A , 则 $rank_m f = rank A$. 任意的 $\alpha \in V$, 设 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 之下的坐标为 X , 则

$$\alpha \in rad_L V \Leftrightarrow f(\alpha, \beta) = 0, \text{ 对任意的 } \beta \in V$$

$$\Leftrightarrow X'AY = 0, \text{ 对任意的 } Y \in F^n$$

$$\Leftrightarrow X'A\varepsilon_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow X'A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow X'AI = 0$$

$$\Leftrightarrow X'A = 0$$

$$\Leftrightarrow A'X = 0$$

$$\Leftrightarrow X \text{ 属于齐次线性方程组 } A'X = 0 \text{ 的解空间,}$$

所以 $rad_L V \cong$ 齐次线性方程组 $A'X = 0$ 的解空间, 从而

$$dim rad_L V = dim V - rank A' = dim V - rank A = dim V - rank_m f. \quad \square$$

书后习题.3. $P_{169}, Ex3$

证明: (1) 由于 f 是 V 上的双线性函数, 所以 $\alpha_L \in V^*$, 是 V 上的线性函数. 且任意的 $\alpha, \gamma \in V$ 以及任意的 $\beta \in V, k \in F$, 都有

$$(\alpha + \gamma)_L(\beta) = f(\alpha + \gamma, \beta) = f(\alpha, \beta) + f(\gamma, \beta) = \alpha_L(\beta) + \gamma_L(\beta),$$

$$(k\alpha)_L(\beta) = f(k\alpha, \beta) = kf(\alpha, \beta) = k(\alpha_L(\beta)) = (k\alpha_L)(\beta),$$

所以 $(\alpha + \gamma)_L = \alpha_L + \gamma_L, (k\alpha)_L = k(\alpha_L)$. 从而

$$L_f(\alpha + \gamma) = (\alpha + \gamma)_L = \alpha_L + \gamma_L = L_f(\alpha) + L_f(\gamma),$$

$$L_f(k\alpha) = (k\alpha)_L = k(\alpha_L) = kL_f(\alpha).$$

所以 L_f 是 V 到 V^* 的线性映射.

同理可以证明: $R_f : \beta \mapsto \beta_R$ 是 V 到 V^* 的线性映射.

$$(2) \alpha \in Ker L_f \Leftrightarrow \alpha_L = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{任意的 } \beta \in V, \text{ 都有 } \alpha_L(\beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{任意的 } \beta \in V, \text{ 都有 } f(\alpha, \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in \text{rad}_L V.$$

所以 $\text{Ker} L_f = \text{rad}_L V$. 同理可以证明: $\text{Ker} R_f = \text{rad}_R V$.

(3) 利用维数公式以及 Ex2 的结论

$$\left. \begin{aligned} \dim \text{Ker} L_f + \text{rank} L_f &= \dim V \\ \dim \text{Ker} R_f + \text{rank} R_f &= \dim V \\ \dim \text{rad}_L V + \text{rank}_m f &= \dim V \\ \text{rad}_L V = \text{Ker} L_f &= \text{Ker} R_f \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{rank} L_f = \text{rank}_m f = \text{rank} R_f.$$

(4) 因为 $\dim V = \dim V^*$, 所以

L_f 是同构 $\Leftrightarrow \text{Ker} L_f = 0$

$$\Leftrightarrow \text{rad}_L V = 0$$

$\Leftrightarrow f$ 是非退化的. □

书后习题.4. $P_{169}, \text{Ex4}$

证明: 要证明 f 是非退化, 只要证明: $\text{rad}_L V = 0$.

任意的 $A \in \text{rad}_L V$, 则对任意的 $B \in M_n(F)$, 都有 $f(A, B) = \text{tr}(AB) = 0$. 记 $A = (a_{ij})_n$, 则对任意的 $1 \leq i, j \leq n$, 矩阵单位 E_{ij} , 都有

$$\text{tr}(AE_{ij}) = a_{ji} = 0.$$

由 i, j 的任意性, 所以 $A = 0$. 即 $\text{rad}_L V = 0$. □

书后习题.5. $P_{169}, \text{Ex5}$

证明: (1) 因为 f 是复数域 C 上的线性空间 V 上的对称双线性函数, 所以存在 V 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 使得 f 在这个基下的度量矩阵是:

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

如果 $r < n$, 结论显然成立.

如果 $r = n$, 取 $\xi = \alpha_1 + i\alpha_2$, 则

$$\begin{aligned} f(\xi, \xi) &= f(\alpha_1 + i\alpha_2, \alpha_1 + i\alpha_2) \\ &= f(\alpha_1, \alpha_1) + f(\alpha_1, i\alpha_2) + f(i\alpha_2, \alpha_1) + f(i\alpha_2, i\alpha_2) \\ &= f(\alpha_1, \alpha_1) - f(\alpha_2, \alpha_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) 因为 f 是非退化的, 所以存在一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 使得 f 在这个基下的度量矩阵是: I .

$$\begin{aligned}
& \text{取 } \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2, \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2, \text{ 则} \\
& f(\xi, \eta) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2\right) \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}f(\alpha_1, \alpha_1) - \frac{1}{\sqrt{2}}i\frac{1}{\sqrt{2}}f(\alpha_1, \alpha_2) + \frac{1}{\sqrt{2}}i\frac{1}{\sqrt{2}}f(\alpha_2, \alpha_1) - \frac{1}{\sqrt{2}}i\frac{1}{\sqrt{2}}f(\alpha_2, \alpha_2) \\
& = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \\
& f(\xi, \xi) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2\right) \\
& = 0, \\
& f(\eta, \eta) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}i\alpha_2\right) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

□

书后习题.6. $P_{169}, Ex6$

证明: 假设 f 是 V 上的斜对称双线性函数, 则任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$, 从而任意的 $\alpha \in V$, 都有 $f(\alpha, \alpha) = -f(\alpha, \alpha), 2f(\alpha, \alpha) = 0$, 又因为 $\text{char} F \neq 2$, 所以 $f(\alpha, \alpha) = 0$.

假设对任意的 $\alpha \in V$, 都有 $f(\alpha, \alpha) = 0$, 从而对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $0 = f(\alpha + \beta, \alpha + \beta)$
 $= f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta)$
 $= f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)$,
 所以 $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$. f 是 V 上的斜对称双线性函数.

□

书后习题.7. $P_{169}, Ex7$

证明: 直接验证.

首先, $0 \in W^\perp$;

$\forall \alpha, \beta \in W^\perp, k \in F$, 则对任意的 $\gamma \in W$, 都有 $f(\alpha, \gamma) = f(\beta, \gamma) = 0$, 所以 $f(\alpha + \beta, \gamma) = f(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma) = 0$, $f(k\alpha, \gamma) = kf(\alpha, \gamma) = 0$, 所以 $\alpha + \beta, k\alpha \in W^\perp$.

从而 $W^\perp$ 是 V 的子空间.

□

书后习题.8. $P_{169}, Ex8$

证明: (1) 因为 W 是 V 的子空间, 取 W 的一个基 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, 将其扩充为 V 的一个基 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$. 假设在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$ 之下

f 的度量矩阵为 A . 那么对任意的 $\alpha, \beta \in V$,

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)X, \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)Y$, 都有

$$f(\alpha, \beta) = X'AY.$$

且由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 是 W 的基, 所以

$$\alpha \in W^\perp \Leftrightarrow f(\alpha, \alpha_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow X' A \varepsilon_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\Leftrightarrow X' A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix})' X = 0$$

$$\Leftrightarrow X \text{ 属于齐次线性方程组 } (A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix})' X = 0 \text{ 解空间.}$$

所以 $W^\perp \cong$ 齐次线性方程组 $(A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix})' X = 0$ 解空间.

又因为 f 是非退化的, 所以 A 是可逆矩阵, 从而
 $\text{rank}((A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix})') = m$, 从而齐次线性方程组 $(A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix})' X = 0$ 解空间的维数是 $\dim V - m$.

所以 $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.

(2) 由定义, $(W^\perp)^\perp = \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W^\perp\}$.

因为 $\forall \gamma \in W, \forall \alpha \in W^\perp$, 都有 $f(\gamma, \alpha) = 0$, 所以 $\gamma \in (W^\perp)^\perp$. $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.

又因为 $\dim W + \dim W^\perp = \dim V = \dim W^\perp + \dim (W^\perp)^\perp$, 所以 $\dim W = \dim (W^\perp)^\perp$.

所以 $W = (W^\perp)^\perp$. □

书后习题.9. $P_{175}, Ex1$

解: 容易验证: (α, β) 是 R^2 上的双线性函数;

取 R^2 中的一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 则 (α, β) 这个基下的度量矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

是一个对称正定矩阵, 所以 (α, β) 是 R^2 上的一个内积. □

书后习题.10. $P_{175}, Ex2$

解: 在 $M_n(R)$ 中, 取 $A = E_{ij}$, $i \neq j$, 则 $A^2 = E_{ij}E_{ij} = 0$.

从而 $f(E_{ij}, E_{ij}) = \text{tr}(E_{ij}^2) = 0$, 所以 f 不满足正定性. f 不是 $M_n(R)$ 上的内积. □

书后习题.11. $P_{175}, Ex5$

解: 取 $R[x]_3$ 中一个基 $1, x, x^2$. 对其实施施密特正交化.

$$\beta_1 = 1;$$

$$\beta_2 = x - \frac{(x, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 = x;$$

$$\beta_3 = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1, 1)} \cdot 1 - \frac{(x^2, x)}{(x, x)} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3};$$

将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 单位化:

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|} \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|} \beta_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} x;$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{|\beta_3|} \beta_3 = \frac{3\sqrt{10}}{4} x^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是 $R[x]_3$ 的一个标准正交基. □

书后习题.12. $P_{175}, Ex6$

解: 先将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 正交化.

$$\beta_1 = \alpha_1;$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \alpha_2;$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \alpha_3 - \frac{1}{1} \alpha_1 - \frac{-2}{10} \alpha_2$$

$$= \alpha_3 - \alpha_1 + \frac{1}{5} \alpha_2;$$

再将它们单位化:

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|} \beta_1 = \alpha_1;$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|} \beta_2 = \frac{\sqrt{10}}{10} \alpha_2;$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{|\beta_3|} \beta_3 = -\frac{\sqrt{15}}{3} \alpha_1 + \frac{\sqrt{15}}{15} \alpha_2 + \frac{\sqrt{15}}{3} \alpha_3;$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是 V 的一组标准正交基. □

书后习题.13. $P_{176}, Ex7$

证明: 因为 η_1, η_2, η_3 是 V 的一个标准正交基, 且 η_1, η_2, η_3 到 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

且

$$A'A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = I,$$

所以矩阵 A 是正交矩阵, 从而 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 仍是 V 的一个标准正交基.

本题也可以直接计算 (β_i, β_j) 而得出结论. □

书后习题.14. $P_{176}, Ex8$

解: (1) 由于 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ 是 V 的一个标准正交基, 且已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 在标准正交基下的坐标, 所以

$$(\alpha_1, \alpha_1) = 1 \times 1 + 2 \times 2 + (-1) \times (-1) = 6;$$

$$(\alpha_2, \alpha_2) = 1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 1 = 3;$$

$$(\alpha_3, \alpha_3) = 1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 4;$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2, \alpha_1) = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times 1 + (-1) \times 0 = -2;$$

$$(\alpha_1, \alpha_3) = (\alpha_3, \alpha_1) = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 2 \times (1) + 0 \times 0 + (-1) \times 1 = 1;$$

$$(\alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_3, \alpha_2) = 0 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times (1) + 1 \times 0 + 0 \times 1 = -2;$$

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 实施施密特正交化:

$$\beta_1 = \alpha_1;$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \frac{1}{3} \alpha_1 + \alpha_2;$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 = \frac{1}{14} \alpha_1 + \frac{5}{7} \alpha_2 + \alpha_3.$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是 V 的一个正交基. □

书后习题.15. $P_{176}, Ex9$

解: $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

是 V 的一个基, 也是标准内积的欧氏空间 R^2 的标准正交基. 由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 在 V 中进行正交化, 得:

$$\beta_1 = \varepsilon_1;$$

$$\beta_2 = \varepsilon_2 - \frac{(\varepsilon_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 = \varepsilon_2;$$

再单位化, 得

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|} \beta_1 = \beta_1 = \varepsilon_1;$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|} \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_2;$$

则 γ_1, γ_2 是 V 的一个标准正交基.

$\forall \alpha \in V$, 设 $\alpha = x_1 \gamma_1 + x_2 \gamma_2$, 定义

$$\sigma: V \rightarrow R^2, \quad \alpha \mapsto x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2,$$

则容易验证: σ 是 $V \rightarrow R^2$ 的欧氏空间的同构.

事实上, 只要验证: 内积保持即可. 而注意到标准正交基下, 向量的内积等于它们在标准正交基下的坐标对应分量乘积的和, 结论即显然. $\square$

书后习题.16. $P_{179}, Ex1$

解: U 是 R^4 的一个 2 维子空间, 所以 $U^\perp$ 是 2 维的.

又因为 $U = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, α_1, α_2 是 U 的一个基. 任取 $\beta \in R^4$, 则 $\beta \in U^\perp \Leftrightarrow (\alpha_1, \beta) = (\alpha_2, \beta) = 0$. 设 $\beta = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, 则

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + \quad \quad - \quad \quad 2x_4 = 0 \end{cases}$$

有基础解系 $\beta_1 = (0, -2, 1, 0), \beta_2 = (2, -3, 0, 1)$, 它是 $U^\perp$ 的一个基, 将其正交化, 得

$$\gamma_1 = (0, -2, 1, 0);$$

$$\gamma_2 = \beta_2 - \frac{(\beta_2, \gamma_1)}{(\gamma_1, \gamma_1)} \gamma_1 = (2, -3, 0, 1) - \frac{6}{5}(0, -2, 1, 0) = (2, -\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1);$$

γ_1, γ_2 是 $U^\perp$ 的一个正交基. $\square$

书后习题.17. $P_{179}, Ex2$

解: 利用维数关系 $\dim \langle \alpha \rangle + \dim \langle \alpha \rangle^\perp = \dim V$, 则有:

$$\dim \langle \alpha \rangle^\perp = n - 1. \quad \square$$

书后习题.18. $P_{179}, Ex3$

证明: 由定义 $(U^\perp)^\perp = \{\alpha \in V | (\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in U^\perp\}$,
而 $\forall \gamma \in U, \forall \beta \in U^\perp$, 都有 $(\gamma, \beta) = 0$, 所以 $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.

再由维数关系: $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$; $\dim (U^\perp)^\perp + \dim U^\perp = \dim V$;
所以 $\dim U = \dim (U^\perp)^\perp$.

所以 $U = (U^\perp)^\perp$. □

书后习题.19. $P_{179}, Ex4$

证明: 在欧氏空间 R^n 中, U 是 R^n 的一个子空间, 则 $R^n = U \oplus U^\perp$.

取 U 的一个基 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $U^\perp$ 的一个基 $\beta_1, \dots, \beta_s$, 则 $m + s = n$ 且
 $(\beta_i, \alpha_j) = 0, i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, m$.

以 $\beta'_1, \dots, \beta'_s$ 为行向量构造矩阵 A , 则 A 的秩为 s , 从而齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系中含 $n - s = m$ 个解. 又因为 $(\beta_i, \alpha_j) = 0, i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, m$, 所以 $A\alpha_j = 0, j = 1, \dots, m$. 即 $\alpha_j = 0, j = 1, \dots, m$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的 m 个线性无关的解. 所以 $\alpha_j = 0, j = 1, \dots, m$ 是 $AX = 0$ 的基础解系.

从而 U 是 $AX = 0$ 的解空间. □

书后习题.20. $P_{179}, Ex5$

证明: 取 $U^\perp$ 的一个标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$. 因为 $V = U \oplus U^\perp$, 且
 $(\eta_i, \xi_j) = 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, s$, 所以 $\eta_1, \dots, \eta_m, \xi_1, \dots, \xi_s$ 是 V 的一个标准正交基.

$$\forall \alpha \in V, \text{ 则 } \alpha = \sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i) \eta_i + \sum_{j=1}^s (\alpha, \xi_j) \xi_j,$$

$$\sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i) \eta_i \in U; \sum_{j=1}^s (\alpha, \xi_j) \xi_j \in U^\perp,$$

所以 $\sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i) \eta_i$ 是 α 在 U 上的正交投影. □

书后习题.21. $P_{179}, Ex6$

解: 将 U 的基 γ_1, γ_2 进行标准正交化. 先正交化:

$$\alpha_1 = \gamma_1;$$

$$\alpha_2 = \gamma_2 - \frac{(\gamma_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \alpha_1 = \left(\frac{7}{6}, \frac{2}{6}, -\frac{11}{6}\right);$$

单位化得:

$$\eta_1 = \frac{1}{|\alpha_1|} \alpha_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$

$$\eta_2 = \frac{1}{|\alpha_2|}\alpha_2 = \left(\frac{7}{\sqrt{174}}, \frac{2}{\sqrt{174}}, -\frac{11}{\sqrt{174}}\right);$$

利用 Ex5 的结论, α 在 U 上的正交投影是

$$\alpha_1 = (\alpha, \eta_1)\eta_1 + (\alpha, \eta_2)\eta_2 = \left(-\frac{23}{29}, -\frac{48}{29}, -\frac{26}{29}\right).$$

□

书后习题.22. $P_{180}, Ex7$

证明: 取 U 的一个标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$, 把它扩充为 V 的一个标准正交基 $\eta_1, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}, \dots, \eta_n$, 则

$$\alpha = \sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i)\eta_i + \sum_{j=m+1}^n (\alpha, \eta_j)\eta_j;$$

$$\beta = \sum_{i=1}^m (\beta, \eta_i)\eta_i + \sum_{j=m+1}^n (\beta, \eta_j)\eta_j;$$

$$\mathbf{P}\alpha = \sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i)\eta_i;$$

$$\mathbf{P}\beta = \sum_{i=1}^m (\beta, \eta_i)\eta_i;$$

从而

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}\alpha, \beta) &= \left(\sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i)\eta_i, \sum_{i=1}^m (\beta, \eta_i)\eta_i + \sum_{j=m+1}^n (\beta, \eta_j)\eta_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i) \sum_{j=1}^n (\beta, \eta_j)(\eta_i, \eta_j) \\ &= \sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i) \sum_{i=1}^m (\beta, \eta_i); \\ (\alpha, \mathbf{P}\beta) &= \left(\sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i)\eta_i + \sum_{j=m+1}^n (\alpha, \eta_j)\eta_j, \sum_{i=1}^m (\beta, \eta_i)\eta_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha, \eta_i) \sum_{j=1}^m (\beta, \eta_j)(\eta_i, \eta_j) \\ &= \sum_{i=1}^m (\alpha, \eta_i) \sum_{i=1}^m (\beta, \eta_i); \end{aligned}$$

$$\text{所以 } (\mathbf{P}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathbf{P}\beta).$$

□

书后习题.23. $P_{180}, Ex8$

证明: 由于 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ 是 V 的一个标准正交向量组, 记 $W = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \rangle$, 则

$V = W \oplus W^\perp$, 且

$\forall \alpha \in V$, 存在唯一的 $\alpha_1 \in W, \alpha_2 \in W^\perp$, 使得

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; α_1 是 α 在 W 上的正交投影.

利用勾股定理, $|\alpha|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 \geq |\alpha_1|^2$,
且等号成立 $\Leftrightarrow \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \alpha_1$.

$$\text{而 } \alpha_1 = \sum_{i=1}^m (\alpha, \varepsilon_i) \varepsilon_i,$$

$$|\alpha_1|^2 = \sum_{i=1}^m (\alpha, \varepsilon_i)^2,$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^m (\alpha, \varepsilon_i)^2 \leq |\alpha|^2, \text{ 且等号成立 } \Leftrightarrow \alpha = \alpha_1 = \sum_{i=1}^m (\alpha, \varepsilon_i) \varepsilon_i. \quad \square$$

书后习题.24. $P_{180}, Ex9$

解: $R[x]_4$ 是 4 维欧氏空间, $W = \langle 1 \rangle$ 是 $R[x]_4$ 的一个 1 维子空间,
而 $R[x]_4 = W \oplus$, 所以 $W^\perp$ 是 3 维的, 且 $f(x) \in W^\perp \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 0$.

又 $f(x), g(x) \in R[x]_4$ 的次数不同, 则它们一定线性无关, 所以我们为了
求 $W^\perp$ 的基, 可以分别考虑 $f(x) = x + a, x^2 + b, x^3 + c$ 的情形.

又因 $\int_0^1 (x+a) dx = \frac{1}{2} + a, \int_0^1 (x^2+b) dx = \frac{1}{3} + b, \int_0^1 (x^3+c) dx = \frac{1}{4} + c$,
所以 $x - \frac{1}{2}, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{1}{4} \in W^\perp$ 是 $W^\perp$ 的一个基. $\square$

书后习题.25. $P_{180}, Ex10$

解: 显然 $\dim W = n$, 且 E_{ii} 是 W 的一个标准正交基, 这是因为 $(E_{ii}, E_{ii}) =$
 $\text{tr}(E_{ii}E'_{ii}) = 1, i = 1, 2, \dots, n,$
 $(E_{ii}, E_{jj}) = \text{tr}(E_{ii}E'_{jj}) = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n.$

又因为在 $i \neq j$ 时,

$$\begin{aligned} (E_{kk}, E_{ij}) &= \text{tr}(E_{kk}E'_{ij}) = \text{tr}(E_{kk}E_{ji}) \\ &= \begin{cases} \text{tr}(E_{ki}) & k = j \\ \text{tr}(0) & k \neq j \end{cases} = 0; \end{aligned}$$

所以 $i \neq j$ 时, $E_{ij} \in W^\perp$.

又因为 $(E_{ij}, E_{ij}) = \text{tr}(E_{ij}E'_{ij}) = \text{tr}(E_{ii}) = 1;$

而在 $i \neq k$ 或 $j \neq l$ 时,

$$\begin{aligned} (E_{ij}, E_{kl}) &= \text{tr}(E_{ij}E'_{kl}) = \text{tr}(E_{ij}E_{lk}) \\ &= \begin{cases} \text{tr}(E_{ik}) & j = l \\ \text{tr}(0) & j \neq l \end{cases} = 0, \end{aligned}$$

所以 $i \neq j$ 时, $\{E_{ij} | i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 是 $W^\perp$ 一组标准正交向量
组, 从而是 $W^\perp$ 一个标准正交基.

所以 $W^\perp = \{(a_{ij}) | (a_{ij}) \in M_n(R) \text{ 且 } a_{ii} = 0\}$.

□

书后习题.26. $P_{182}, Ex1$

证明: $\mathbf{A}$ 是实内积空间 V 上的正交变换, 所以任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = (\alpha, \beta)$.

假设 $\mathbf{A}$ 有特征值 λ , α 是属于特征值 λ 的特征向量, 则 $\mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha$, 从而 $(\alpha, \alpha) = (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) = (\lambda\alpha, \lambda\alpha) = \lambda^2(\alpha, \alpha)$,

且 $(\alpha, \alpha) > 0$, 所以, $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$.

□

书后习题.27. $P_{183}, Ex2$

证明: 取 $\langle \eta \rangle^\perp$ 的一个标准正交基 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$, 则 $\eta, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ 是 V 的一个标准正交基, 且 $\forall \alpha, \beta \in V$, $\mathbf{P}\alpha = (\alpha, \eta)\eta$, $\mathbf{P}\beta = (\beta, \eta)\eta$, 这时

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) &= (\alpha - 2\mathbf{P}\alpha, \beta - 2\mathbf{P}\beta) \\ &= (\alpha, \beta) - 2(\mathbf{p}\alpha, \beta) - 2(\alpha, \mathbf{p}\beta) + 4(\mathbf{p}\alpha, \mathbf{p}\beta) \\ &= (\alpha, \beta) - 2(\alpha, \eta)(\eta, \beta) - 2(\beta, \eta)(\alpha, \eta) + 4(\alpha, \eta)(\beta, \eta)(\eta, \eta) \\ &= (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{A}$ 是正交变换.

计算 $\mathbf{A}$ 在标准正交基 $\eta, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ 之下的矩阵:

$$\mathbf{A}\eta = \eta - 2\mathbf{P}\eta = -\eta$$

$$\mathbf{A}\eta_i = \eta_i - 2\mathbf{P}\eta_i = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

所以 $\mathbf{A}$ 在标准正交基 $\eta, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ 之下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

$|A| = -1$, 所以 $\mathbf{A}$ 是第二类型的.

□

书后习题.28. $P_{183}, Ex3$

证明: 因为 1 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值, 且属于特征值 1 的特征子空间 V_1 是 $n-1$ 维的, 所以 V_1 有标准正交基 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$, 且 $(V_1)^\perp$ 是 1 维的, 取 $(V_1)^\perp$ 中的一个单位向量 η , 则 $\eta, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ 是 V 的一个标准正交基. 记 $\mathbf{P}$ 是 V 在 $\langle \eta \rangle$ 上的正交投影, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\eta_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \mathbf{P}\eta = \eta; \\ \mathbf{A}\eta_i &= \eta_i = (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})\eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \end{aligned}$$

而 $\mathbf{A}$ 是 V 上的正交变换, 所以

$$(\mathbf{A}\eta, \eta_i) = (\mathbf{A}\eta, \mathbf{A}\eta_i) = (\eta, \eta_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

从而 $\mathbf{A}\eta \in \langle V_1 \rangle^\perp = \langle \eta \rangle$, 所以 $\mathbf{A}\eta = k\eta$. 又因为

$$(\eta, \eta) = (\mathbf{A}\eta, \mathbf{A}\eta) = (k\eta, k\eta) = k^2(\eta, \eta), \text{ 所以}$$

$k^2 = 1$, $k = \pm 1$, 注意到 η 不是属于特征值 1 的特征向量, 所以

$k = -1$, 所以

$$\mathbf{A}\eta = -\eta = (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})\eta.$$

所以 $\mathbf{A} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}$. $\mathbf{A}$ 是镜面反射变换. □

书后习题.29. $P_{183}, Ex4$

证明: 假设 $\mathbf{A}$ 是 V 上的正交变换, 所以对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有

$$(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = (\alpha, \beta), \text{ 从而 } \forall \alpha \in V, \text{ 有}$$

$$|\mathbf{A}\alpha|^2 = (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) = (\alpha, \alpha) = |\alpha|^2,$$

所以 $|\mathbf{A}\alpha| = |\alpha|$;

假设 $\mathbf{A}$ 是 V 到自身的满的线性变换, 且保持向量长度不变. 对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 则

$$|\mathbf{A}\alpha| = |\alpha|; |\mathbf{A}\beta| = |\beta|; |\mathbf{A}(\alpha + \beta)| = |(\alpha + \beta)|, \text{ 即}$$

$$(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) = (\alpha, \alpha); (\mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\beta) = (\beta, \beta);$$

$$(\mathbf{A}(\alpha + \beta), \mathbf{A}(\alpha + \beta)) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta),$$

又由于

$$(\mathbf{A}(\alpha + \beta), \mathbf{A}(\alpha + \beta)) = (\mathbf{A}\alpha + \mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\alpha + \mathbf{A}\beta)$$

$$= (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) + (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) + (\mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\alpha) + (\mathbf{A}\beta, \mathbf{A}\beta)$$

$$= (\alpha, \alpha) + 2(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) + (\beta, \beta);$$

$$(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta);$$

所以 $(\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\beta) = (\alpha, \beta)$, $\mathbf{A}$ 是 V 上的正交变换. □

书后习题.30. $P_{183}, Ex5$

证明: 任取二维欧氏空间的一个标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 则正交变换 $\mathbf{A}$ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 下的矩阵是正交矩阵 A , 设为 $A = (a_{ij})$. 记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in R^2; \text{ 则}$$

α, β 是 R^2 中的标准正交向量组. 也就是, 在平面直角坐标系中, 点 $P(a_{11}, a_{21})$,

$Q(a_{12}, a_{22})$ 在单位圆上, 且 OP, OQ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$. 记

$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ 与 X 轴正向的夹角分别为 θ, φ , 则

$(a_{11}, a_{21}) = (\cos \theta, \sin \theta); (a_{12}, a_{22}) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, 且 $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$ 或 $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$. 从而

$$(a_{12}, a_{22}) = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-\sin \theta, \cos \theta) \text{ 或}$$

$$(a_{12}, a_{22}) = (\cos(\theta - \frac{\pi}{2}), \sin(\theta - \frac{\pi}{2})) = (\sin \theta, -\cos \theta).$$

所以

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

□

书后习题.31. $P_{183}, Ex6$

证明: 假设有镜面反射变换 $\mathbf{A} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{P})\alpha = \alpha - 2\mathbf{P}\alpha$, 使得 $\mathbf{A}\alpha = \beta$, 即 $\mathbf{P}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, 则正交投影 $\mathbf{P}$ 与 $\alpha - \beta$ 相关.

取 $\eta = \frac{1}{|\alpha - \beta|}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\sqrt{2-2(\alpha, \beta)}}(\alpha - \beta)$, 并记 $\mathbf{P}$ 是 V 在 $\langle \eta \rangle$ 上的正交投影, 则

$$\mathbf{P}\alpha = (\alpha, \eta)\eta = (\alpha, \frac{1}{\sqrt{2-2(\alpha, \beta)}}(\alpha - \beta))\frac{1}{\sqrt{2-2(\alpha, \beta)}}(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{1}{2-2(\alpha, \beta)}(\alpha, \alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

取 $\mathbf{A} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}$ 是关于超平面 $\langle \eta \rangle^\perp$ 的镜面反射变换, 则

$$\mathbf{A}\alpha = \mathbf{I}\alpha - 2\mathbf{P}\alpha = \alpha - (\alpha - \beta) = \beta.$$

□

书后习题.32. $P_{183}, Ex7$

证明: 设 A 是一个正交矩阵, 在复数域上有特征值 λ_0 , α 是属于特征值 λ_0 特征向量, 则 $A\alpha = \lambda_0\alpha$, 所以 $(\overline{A\alpha})' = (\overline{\lambda_0\alpha})'$, 即 $\alpha^*A' = \overline{\lambda_0}\alpha^*$, 所以 $\alpha^*\alpha = \alpha^*A'A\alpha = \overline{\lambda_0}\lambda_0\alpha^*\alpha$, $|\lambda_0| = 1$.

所以 λ_0 是 1 或 -1 或 $\cos \theta \pm i \sin \theta, \theta \in R, 0 < \theta < 2\pi$.

□

书后习题.33. $P_{183}, Ex8$

证明: 假设存在 V 中的一个标准正交基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, 使得 $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵是对角矩阵 $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$, 则 $\mathbf{A}\varepsilon_i = d_i\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$.

$$(\mathbf{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = d_i\delta_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

任意的 $\alpha, \beta \in V$, 可设

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n;$$

$$\beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \dots + y_n\varepsilon_n, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}\alpha, \beta) &= (x_1\mathbf{A}\varepsilon_1 + x_2\mathbf{A}\varepsilon_2 + \dots + x_n\mathbf{A}\varepsilon_n, y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \dots + y_n\varepsilon_n) \\
&= x_1d_1y_1 + x_2d_2y_2 + \dots + x_nd_ny_n. \\
(\alpha, \mathbf{A}\beta) &= (x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n, y_1\mathbf{A}\varepsilon_1 + y_2\mathbf{A}\varepsilon_2 + \dots + y_n\mathbf{A}\varepsilon_n) \\
&= x_1d_1y_1 + x_2d_2y_2 + \dots + x_nd_ny_n.
\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{A}$ 是 V 上的一个对称变换.

假设 $\mathbf{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的一个对称变换. 则存在标准正交基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, 使得 $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵是对称矩阵, 所以 $\mathbf{A}$ 存在特征值.

下面对 $\mathbf{A}$ 的维数进行归纳.

$n = 1$ 时, 结论显然成立.

假设对 $n - 1$ 维欧氏空间上的对称变换 $\mathbf{A}$, 存在一个标准正交基, 使得它的矩阵为对角阵.

对 n 为欧氏空间 V , 假设 $\mathbf{A}$ 是 V 上的一个对称变换, 则 $\mathbf{A}$ 有特征值. 取 $\mathbf{A}$ 的一个特征值 λ_1 , 并设 η_1 是对称变换 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ_1 的长度为 1 的特征向量. 则

$V = \langle \eta_1 \rangle \oplus \langle \eta_1 \rangle^\perp$. 且 $\langle \eta_1 \rangle^\perp$ 是 $n - 1$ 维的, 如果 $\langle \eta_1 \rangle^\perp$ 是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间, 则 $\mathbf{A}$ 仍是 $\langle \eta_1 \rangle^\perp$ 上的对称变换, 而 $\langle \eta_1 \rangle^\perp$ 是 $n - 1$ 维的, 由归纳假定, 存在 $\langle \eta_1 \rangle^\perp$ 的标准正交基 $\eta_2, \dots, \eta_n$, 使得 $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵是对角矩阵. 从而取 $V = \langle \eta_1 \rangle \oplus \langle \eta_1 \rangle^\perp$ 的标准正交基 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵是对角矩阵.

所以下只要证明: $\langle \eta_1 \rangle^\perp$ 是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间.

事实上, $\beta \in \langle \eta_1 \rangle^\perp \Leftrightarrow (\eta_1, \beta) = 0$, 而 $\forall \alpha \in \langle \eta_1 \rangle^\perp$, 有

$0 = (\lambda_1\eta_1, \alpha) = (\mathbf{A}\eta_1, \alpha) = (\eta_1, \mathbf{A}\alpha)$, 所以 $\mathbf{A}\alpha \in \langle \eta_1 \rangle^\perp$. 即 $\langle \eta_1 \rangle^\perp$ 是 $\mathbf{A}$ 的不变子空间. □

书后习题.34. $P_{187}, Ex2$

解: 先正交化. 取

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1; \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right);
\end{aligned}$$

再单位化. 取

$$\gamma_1 = \frac{1}{|\beta_1|}\beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{|\beta_2|}\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

γ_1, γ_2 是与 α_1, α_2 等价的标准正交基. □

书后习题.35. $P_{187}, Ex4$

解: 设 1 级酉矩阵 $A = (a)$, 则 $A^*A = (\bar{a}a) = (1)$, $\bar{a}a = 1$. 所以 $a = \cos \theta + i \sin \theta$, $\theta \in R$ 是任意实数. □

书后习题.36. $P_{187}, Ex5$

证明: 设矩阵 A 是酉矩阵, 则 $A^*A = I$, 所以 $|A^*||A| = 1$. 而 $|A^*| = |\bar{A}| = \overline{|A|}$, 所以 $|\det A|^2 = 1$. □

书后习题.37. $P_{187}, Ex6$

证明: 设 $\mathbf{A}$ 是酉空间 V 上的一个酉变换, λ 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值, α 是属于特征值 λ 的一个特征向量. 即 $\mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha$.

由于 $\mathbf{A}$ 是酉变换, 所以 $(\alpha, \alpha) = (\mathbf{A}\alpha, \mathbf{A}\alpha) = (\lambda\alpha, \lambda\alpha) = \lambda\bar{\lambda}(\alpha, \alpha)$, 所以 $\lambda\bar{\lambda} = 1$, $|\lambda| = 1$. □

书后习题.38. $P_{187}, Ex8$

证明: 假设 $\mathbf{A}$ 是酉空间 V 上的一个 Hermite 变换. 任取 V 的一个标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, $\mathbf{A}$ 在这个基下的矩阵是 $A = (a_{ij})$. 则

a_{ij} 是 $\mathbf{A}\varepsilon_j$ 被基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 表出的第 i 个分量. 即

$$a_{ij} = (\mathbf{A}\varepsilon_j, \varepsilon_i), \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

a_{ji} 是 $\mathbf{A}\varepsilon_i$ 被基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 表出的第 j 个分量. 即

$$a_{ji} = (\mathbf{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j), \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

又因为 $\mathbf{A}$ 是 Hermite 变换, 所以

$$a_{ij} = (\mathbf{A}\varepsilon_j, \varepsilon_i) = (\varepsilon_j, \mathbf{A}\varepsilon_i) = \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j)} = \overline{a_{ji}}, \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

所以 A 是 Hermite 矩阵.

假设酉空间 V 上的线性变换 $\mathbf{A}$ 在标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 之下的矩阵是 Hermite 矩阵 $A = (a_{ij})$. 则

$$a_{ij} = (\mathbf{A}\varepsilon_j, \varepsilon_i), \forall 1 \leq i, j \leq n,$$

$$a_{ji} = (\mathbf{A}\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \overline{a_{ij}}, \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 设

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n; \quad \beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \dots + y_n\varepsilon_n. \quad \text{则}$$

$$(\mathbf{A}\alpha, \beta) = (x_1\mathbf{A}\varepsilon_1 + x_2\mathbf{A}\varepsilon_2 + \dots + x_n\mathbf{A}\varepsilon_n, y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \dots + y_n\varepsilon_n)$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} (\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_1) & (\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \cdots & (\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ (\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_1) & (\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_2) & \cdots & (\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_1) & (\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \cdots & (\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}.$$

$$(\alpha, \mathbf{A}\beta) = (x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n, y_1\mathbf{A}\varepsilon_1 + y_2\mathbf{A}\varepsilon_2 + \dots + y_n\mathbf{A}\varepsilon_n)$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} (\varepsilon_1, \mathbf{A}\varepsilon_1) & (\varepsilon_1, \mathbf{A}\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1, \mathbf{A}\varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2, \mathbf{A}\varepsilon_1) & (\varepsilon_2, \mathbf{A}\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2, \mathbf{A}\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varepsilon_n, \mathbf{A}\varepsilon_1) & (\varepsilon_n, \mathbf{A}\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n, \mathbf{A}\varepsilon_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_1)} & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_1)} & \cdots & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_1)} \\ \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_2)} & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_2)} & \cdots & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_1, \varepsilon_n)} & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_2, \varepsilon_n)} & \cdots & \overline{(\mathbf{A}\varepsilon_n, \varepsilon_n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) \overline{A'} \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n) A^* \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}.$$

又因为 A 是 Hermite 矩阵, 所以 $A = A^*$. 从而 $(\mathbf{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathbf{A}\beta)$.

所以 $\mathbf{A}$ 是酉空间 V 上的 Hermite 变换. □

书后习题.39. $P_{188}, Ex9$

证明: 设 $\mathbf{A}$ 是酉空间 V 上的一个 Hermite 变换, λ 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值, η 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的一个特征向量. 即 $\mathbf{A}\eta = \lambda\eta$. 所以 $\lambda(\eta, \eta) = (\lambda\eta, \eta) = (\mathbf{A}\eta, \eta) = (\eta, \mathbf{A}\eta) = (\eta, \lambda\eta) = \bar{\lambda}(\eta, \eta)$, 从而 $\lambda = \bar{\lambda}$, λ 是实数. □

书后习题.40. $P_{191}, Ex1$

证明: (1) f 显然是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个双线性函数, 且在基

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的度量矩阵

$$A = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ f(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

是一个非退化矩阵, 即 f 是 $\mathbf{R}^2$ 上的非退化双线性函数, 所以 $(\mathbf{R}^2, f)$ 是一个正则的正交空间.

(2,3) f 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 之下的度量矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

所以 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 $(\mathbf{R}^2, f)$ 的一个标准正交基.

(4) 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 之下, 线性变换 $\mathbf{T}$ 的矩阵为 T , 所以

$$\begin{cases} \mathbf{T}\varepsilon_1 = \sqrt{2}\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \mathbf{T}\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \sqrt{2}\varepsilon_2 \end{cases}$$

任意的 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^2$, 设

$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2, \beta = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2$, 则

$$\mathbf{T}\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 + x_2 \\ x_1 + \sqrt{2}x_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}\beta = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}y_1 + y_2 \\ y_1 + \sqrt{2}y_2 \end{pmatrix},$$

所以

$$f(\alpha, \beta) = x_1y_1 - x_2y_2;$$

$$f(\mathbf{T}\alpha, \mathbf{T}\beta) = (\sqrt{2}x_1 + x_2)(\sqrt{2}y_1 + y_2) - (x_1 + \sqrt{2}x_2)(y_1 + \sqrt{2}y_2)$$

$$= x_1 y_1 - x_2 y_2.$$

所以 $\mathbf{T}$ 保持正交空间 $(\mathbf{R}^2, f)$ 的内积不变, $\mathbf{T}$ 是正交变换.

(5) 因为 $\mathbf{T}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 之下的矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

所以 $\mathbf{T}$ 有两个特征值 $\lambda_1 = \sqrt{2} + 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2} - 1$. 且容易求出:

属于特征值 $\lambda_1 = \sqrt{2} + 1$ 的所有特征向量为 $\alpha = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbf{R}$,

属于特征值 $\lambda_2 = \sqrt{2} - 1$ 的所有特征向量为 $\beta = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$, $k \in \mathbf{R}$,

而显然 $f(\alpha, \alpha) = 0$, $f(\beta, \beta) = 0$.

所以 $\mathbf{T}$ 的特征向量都是迷向向量. □

书后习题.41. $P_{192}, Ex2$

证明: 设 $\beta = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$, 注意到 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是正交基, 所以 $f(\beta, \alpha_i) = x_i f(\alpha_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 由于 (V, f) 是正则的, 所以可以取 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为非迷向向量组成的正交基, 从而有 $f(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. 所以 $x_i = \frac{f(\beta, \alpha_i)}{f(\alpha_i, \alpha_i)}$, 即公式成立. □

书后习题.42. $P_{192}, Ex3$

证明: 因为 (V, f) 是有限维正则辛空间, 所以 f 在辛基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-r}$ 下的度量矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix},$$

对任意的 $\alpha, \beta \in V$.

设 $\alpha = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-r})X$, $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-r})Y$. 则

$\mathbf{B}\alpha = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-r})BX$, $\mathbf{B}\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-r})BY$,

$f(\alpha, \beta) = X'AY$

$f(\mathbf{B}\alpha, \mathbf{B}\beta) = (BX)'A(BY) = X'(B'AB)Y$.

所以线性变换 $\mathbf{B}$ 是辛变换 $\Leftrightarrow f(\mathbf{B}\alpha, \mathbf{B}\beta) = f(\alpha, \beta)$

$\Leftrightarrow X'(B'AB)Y = X'AY \Leftrightarrow B'AB = A$. □