

摘要

软土路基变形比较复杂，影响因素众多，从软土路基变形机理出发来建立模型，并对路基变形进行拟合和预测是困难的。本文从实测变形数据出发，利用数据中所蕴含许多信息，来建立沉降模型。

本文的主要内容如下：

(1) 介绍了软土路基稳定与变形的基本特性和机理，总结了软土路基变形预测的必要性，分析了软土路基变形预测的难点和存在的问题，简要介绍了时间序列的优缺点以及应用的广泛性。

(2) 详细阐明了时间序列的基本思想、几种常见的时间序列模型以及时间序列的动态特征，分析了如何利用自相关函数和偏相关函数来对模型进行判定，通过对时间序列的几种定阶准则的比较，确定一种好的定阶准则来建立模型，从而可以利用逆函数法进行预报。

(3) 介绍了混沌时间序列的研究意义，阐述了混沌时间序列的基本理论以及三种预测模式，确定了最大 Lyapunov 指数的计算步骤。

(4) 从路基实测变形数据出发，将时间序列非平稳性模型 (ARIMA 模型) 转化成时间序列平稳模型 (ARMA 模型)，通过模型识别、参数估计、模型验证等步骤来建立模型，从而进行路基动态变形预测，利用路基变形的控制标准对路基下一级填土的时间进行预测，优化了施工组织设计，节省了时间和资金。

(5) 路基超载完成后，在路基荷载稳定期间内，利用混沌时间序列中的最大 Lyapunov 指数和全域法进行长期预测，同时与一些比较成熟的变形预测方法进行对比，对工程中一些重点断面进行综合评判，确定一个较理想的预测结果，从而对路基超载进行卸载，使其满足工程设计要求。

时间序列预测方法虽广泛的应用于各行各业，并取得了比较好的效果，但是在预测高速公路路基变形方面应用较少，尤其是用于填土期间的变形预测罕见报道，本文作者在这方面作了一些开拓性的工作。

关键词：路基变形，时间序列，混沌，短期预测，长期预测

Abstract

The warp of soft soil foundation is much complicated and the factors affected are much more. It's difficult to fit and predict the warp of road foundation just from the model setted up from the warp principle itself. The thesis stars from the warp material got in the practice, and sets up the road warp model from the much information that affects the warp factors.

The main content of the thesis is as the following:

(1) It states the basic peculiarity and the principle of the steady of road foundation and the warp settlement, sums up the necessity of the predict of soft soil road foundation warp, analyses the difficulty and the questions unsolved existing in the predict of soft soil road foundation settlement, and simply introduces both the advantages and disadvantages and the wide utilization of time series.

(2) It explains the basic concept of time series, some kinds of the common time series models and the development characteristics of time series in detail. It analyses how to judge the model from the self-related function and the deviation related function. Determining a better standard to set up models from the comparison of some kinds of fixed step time series standards, then predicts utilizing the counter function.

(3) It introduces the study significance of chaotic the time series, explains the basic theory and three kinds of predict models of the chaotic time series, and makes sure the step that counts the biggest index number *Lyapunov*.

(4) The thesis converts unrest model (*ARIMA* model) of time series to the rest model (*ARMA* model) of time series. It sets up models acrossing some procedures, such as model identify, factor estimation, model check, ect, then predict the development short-term warp of road foundation. It predicts the time of the filling soil of the next grade utilizing the growth theory of the strength of the road foundation, assures that the working organization and design go smoothly during the filling work of road foundation and saves time and money.

(5) Another is the long-term predict utilizing the biggest index number *Lyapunov* in the chaotic time series and the whole space method during the steady period of the road foundation load, after the overload of the road foundation finished. Meanwhile, contrasts with some mature settlement predict methods, estimating some important section in the engineering synthetically, making sure an ideal outcome of the predict warp, then unload the overload of

road foundation and make it satisfy the design request.

Though the predict methods in the thesis are widely used in every field and acquire better consequence, but the methods using in the predict of the high way road foundation warp are little, especially reported little in the settlement predict during the period of filling soil. The author of the thesis does some pioneer study on it.

Keywords: road foundation warp, time series, chaotic, short-term predict, long-term predict.

第一章 绪 论

由于软土的高压缩性、低渗透性和低强度，修建在软土地基上的高速公路经常遇到变形问题和稳定问题^{[1][2]}。变形过大直接影响路基稳定，所以严格控制路基变形尤为必要。然而软基的变形比较复杂，主要影响因素有软土的物理力学性质、土层条件、荷载条件、处理方法及工期等。其中土层条件（如软土层的厚度和排水边界条件等），可以通过地质勘察较准确地探明。荷载条件、软基处理方法和工期等也较容易确定，软土的物理力学性质指标一般通过室内试验取得。由于现场取样、运输和制备试样过程的扰动，室内试验条件与现场条件的差异，试验设备与试验技能的影响等，室内试验得到的固结和变形指标往往与实际情况有较大的出入^[3]。正是由于许多参数的定量指标与实际状态存在较大的差异，因此，用通常结构分析方法建立岩土材料数学一力学本构模型，不仅是困难的，而且是不适宜的。许多学者从实测数据出发，来研究路基变形问题，取得了很大的进展。利用实测数据之间的变化规律来建立一些模型，模型中大都采用数学公式，如双曲线模型、“S型”模型、指数模型等。利用这些模型对变形数据进行拟合，从而实现对后期变形的预测；然而实测变形数据中带有确定性成分和随机性成分，这些模型只能对确定性成分进行分析，无法分析变形的随机性成分。

软基的变形可以分为填筑期间的变形和荷载稳定以后的工后沉降变形，填筑期间的变形影响因素复杂，路基填筑荷载不断变化，从而导致变形的形式复杂多变，常规的变形模型很难对其进行拟合预测。工后沉降变形指的是竣工后软基发生的变形，工程上往往采用双曲线模型、“S型”模型、指数模型等对工后沉降进行拟合预测，预测结果与实际相差较大，其原因是由于随机性成分当中还包含有一定的确定性成分^[4]。所以在填筑期间对各阶段的填土时的变形预测和工后沉降变形的预测都显得很重要。因此，有必要对影响填筑期间的变形和荷载稳定以后的工后沉降变的因素进行深入的分析、研究。

1.1 软基的稳定和变形

1.1.1 软基的稳定

软土路堤的稳定分析是路堤设计中重要工作之一。满足路堤的稳定并具有一定的安全储备是必要的。只有满足了路堤的稳定条件才能进行路基的变形计算。随着交通事业的高速化发展，路堤设计只满足稳定条件远远不够，在很多情况下往往以变形为控制条件。若变形不满足控制条件，则视为设计没有达到要求，稳定是必要条件。

软土路堤的纵向稳定分析是针对横行路堤进行的。然而在某种情况下，路堤的纵向稳定起着主导的作用。如在软土地基的桥台，若不注意路堤的纵向稳定并设法加以解决，则有可能由于台后填土的纵向推力，致使桥台基础发生较大的位移甚至破坏桥台基础。

1.1.2 软基的变形

在过去的工作中，软土路堤的设计偏重于稳定分析。认为只要满足稳定性要求，其他是次要的。因为不论在铁路或公路上行驶的车辆，大多以中低速行驶，对路堤沉降无须严格控制。如今高速铁（公）路的出现，对路基变形的要求非常突出。于是便得到一个共识，即由稳定控制转为变形控制。

(1) 软基变形的形式

软基变形通常只包括软土在垂直方向的压缩和水平方向的位移。在垂直方向的压缩包括主固结沉降和次固结沉降。在荷载的作用下，随着土中空隙水分的逐渐排出，空隙体积相应减少，土体逐渐压实而产生的沉降称为主固结沉降。它是由上部荷载和土的性质决定的，是造成沉降的主体。土中空隙水完全排出，土的主固结已经完成，由土骨架的蠕动变形所引起的沉降称为次固结沉降，主要决定于土类，持续时间长，可达数十年，一般不予考虑。只有当次固结份量占得多时才列入总沉降。在填土过程中由于受剪应力的作用，地基产生剪切变形，水平位移引起的沉降称为瞬时沉降。它持续的时间短，变化大，并随路堤的填高而增大。

(2) 路基变形的一般规律

路堤填筑过程中，地基沉降存在着一个明显变化点，即有一个临界的填

土高度。当填土低于此高度时，沉降速率很低；当超过此高度时，沉降速率明显增加。

沉降速率与加载速率有关。当加载速率提高时，地基的沉降速率也随之增加。因为除了主固结沉降增加外，由于侧向变形引起的瞬时沉降也大大增加。

软土层的厚度以及排水条件对沉降有明显的影响。一般情况下软土层越薄侧向变形越小，排水条件好，固结度高，沉降快，则剩余沉降少。

(3) 沉降速率

地基沉降速率不同就会出现不均匀沉降。不均匀沉降超过一定值时，会使建筑物受到损害。路堤横断面上过大的不均匀沉降会导致路拱变形和结构层的开裂。同样路堤在纵向上过大的不均匀沉降，也会导致上述现象发生而影响正常使用。目前对于控制和消除不均匀沉降，除了正确认识地基土的性质外，主要还是采用合理的计算方法，尽量消除由于差异引起的不均匀沉降，如软土的厚薄，处理与不处理，不同方法之间的差异，刚性与柔性之间的差异等。

在实际工作中，人们关心的是竣工后在一定的使用年限内是否会因地基的有限沉降而损坏道路结构，影响行车的平顺性。因此，应该确定在一年使用年限内允许发生的沉降量，即所谓工后沉降量。我国对高速公路一般为15年内工后沉降不超过30cm，桥台背后填土工后沉降不超过10cm。

为了适应国民经济快速发展的需要，并进一步促进其飞速发展，近几年我国高速公路发展迅速。高速公路路堤一般较高，且桥涵通道较多。高速公路上行车速度快，交通流量大。与一般公路相比较，高速公路对路基、路面的要求更高，而且常常需要穿越不良地基地段。高速公路不仅要求路堤稳定，而且对工后沉降有较高的要求，特别是需要严格控制工后不均匀沉降量。从我国已建软土地基上高速公路运行情况来看，工后沉降较大，所造成“桥头跳车”是目前存在的主要问题。桥涵一般采用桩基础，工后沉降很小，而路堤沉降很大，不均匀沉降造成“桥头跳车”，轻者影响车辆行车速度，重者导致交通事故。如何减小工后沉降？如何预估工后沉降？如何调整工后沉降？是软土地基上修建高速公路需要着重解决的课题。^{〔5〕}

1.2 高速公路沉降预测的必要性

1.2.1 路堤填筑速率的确定

对软粘土地基而言,确定合理的填筑速率是至关重要的。过快的填筑速率会破坏结构性,加大沉降量。因此,要控制外荷填筑速率,使之与地基固结速率(也是土的强度增长速率)相适应,尽量减少附加沉降。填筑速率应以填土临界高度为界,采取不同的数值,填土高度较低时采取较高的填筑速率,高度越大填筑速率越小。

1.2.2 地基预压时间的确定

确定预压时间的目的是要在满足工后沉降量要求的前提下确定路面施工的时间,所以,要从施工期及部分预压期间已发生的沉降量,推测将要发生的沉降量,此值应低于设计允许的工后沉降量。准确地确定地基预压时间对确保工程质量、加快施工进度有重要意义。

1.2.3 卸载时间的确定

通过对已经监测到的沉降数据来判断卸载的时间也是一个比较关键性的问题,超载是否达到预期的要求,什么时候达到预期的要求?准确地确定卸载时间有利于提高高速公路的施工进度。

1.2.4 工后沉降的预测

工后沉降是高速公路建设关键性的问题,是衡量一条高速公路质量优劣的标准,是保证高速公路稳定与行车安全、舒适的首要因素。通过对工后沉降预测还可以反算地基的固结度,地基的固结系数等问题。在预测工后沉降的问题上有多种方法,比较常见的有双曲线方法、指数曲线法及近年来发展起来的灰色模型预测等,随着近代计算机的发展,有限元的反分析方法得到了发展。这种方法在理论上较为严密,但是受到数学方法及前、后期处理比较烦琐等原因的限制,在实际工程中并没有得到广泛的应用^{[6][7]}。寻求一种准确预测高速公路工后沉降的方法是很重要的问题。

1.2.5 填筑高度的确定

高速公路路基填筑高度的确定是试探性的。每一级填土完成后,经过对

这级填土所产生的沉降进行观测来预测后期沉降，通过沉降的预测来反算地层参数，从而确定路基强度的增长来确定后一级的填筑高度。所以说软基路堤填筑施工控制是试探性的，必须根据施工现场监控反馈的信息进行控制，是个动态过程。

1.3 时间序列预测的优缺点

路基工程是以岩土体为工程材料，以岩土体天然或人工结构为工程结构。由于岩土体的不均匀性、不连续性和地质条件的复杂性，使得其力学参数和力学现象具有很强的随机性和不确定性。以沉降 $\{x_i\}$ 监测数据采集为例，考虑其随机性和不确定性，从统计学角度出发，采集到的数据 $\{x_i\}$ 应被认为是一随机过程的样本实现，而不应被认为是其简单的固有变化。通过对随机过程的分析，很自然地引入了随机系统研究方法，时间序列分析就是其中之一。时间序列分析法避开岩土工程系统复杂的机理分析，通过现场测试到的能反应系统性态的数据序列，建立动态数据模型，以此不仅能对岩土工程进行预报和控制等，而且能进一步认识系统本身的特性。同时时间序列分析是一种处理随时间变化而又相互关联的数据的数学方法，或者是一种处理动态数据的参数化分析方法。时间序列数据的特点说明了观测值排列顺序的重要性，数据的顺序、大小反映了数据内部的相互联系。事实上，所获得的数据最为重要和最有用的特性就是观测值之间的相关性，正是这种相关性表征了这些数据的现象、过程、系统的“动态”或“记忆”。这种相关性一旦被定量描述出来，就可以用过去值预测其将来值。

然而一般的时间序列分析要求的数据序列是等间隔的，即采样间隔是等时的，这一点在岩土工程实践中很难保证的，因而给时序分析建模带来了困难。通常的作法是先补充数据，本文数据的补充根据路基沉降的基本规律，采用多项式插值进行内插^[9]，从而保证监测数据序列是等时间间隔；同时考虑尽可能的保留实测的原始数据，使在荷载作用下数据包含的信息予以保留。

1.4 时间序列应用的广泛性

按时间顺序排列的一组随机数据称为随机时间序列^[10]。在实际问题中，经常会遇到各种随机时间序列，如经济中的年国民生产总值序列^{[11][12]}、气象中的月平均气温序列^[13]、医学上的脑电波序列、结构系统的振动序列^[14]、市场上某些商品的年销售额序列^{[15][16]}等等。利用时间序列对它们进行预测可取得比较理想的结果。

在岩土工程中，时间序列也得到了广泛应用，通过时间序列来预测边坡的位移^{[17][18]}，建筑地基的沉降量^[19]，隧道变形^{[20][21]}，基坑支撑轴力^[22]也有较广泛的应用。近十几年来，混沌时间序列预测得到一定的发展，但是很多还处于理论研究阶段，离实际应用还有相当长的一段距离。

1.5 本文研究思路和方法

1.5.1 时间序列对路基加载的短期预报

当系统的内部规律还不掌握或不完全掌握的情况下，通常用系统辨识的方法来建立数学模型。时序分析系统辨识建模方法步骤如下：

(1) 模型识别，即确定 n 阶的值。根据样本自相关、偏相关函数的统计特性，可初步判断时间序列 $\{x_i\}$ 所适合的自回归、滑动平均的阶数。常用的方法有：残差方差图法、偏相关函数法、F 检验法、FPE、AIC、BIC 准则法、隅角法^[23]。

(2) 参数估计，即确定 a_i, b_i 等值，其方法很多如：距估计、最小二乘估计、极大似然估计和极大熵谱估计。

(3) 模型验证，即对辨识出的模型进行各种统计检验，使之对各种不同的工作情况都具有期望的精度。

(4) 在确定出相应模型及参数后，就可以对未来可能出现的结果进行预报。采用的标准是预报值与可能出现的值的误差均方值达到最小，即平稳线性最小方差预报。常用的方法有：格林函数法、逆函数法和预报矢量法^[18]。

路基沉降往往具有明显的增长，属于非平稳序列，不能用时间序列模型直接进行描述，但是经某种处理后可产生新的平稳序列，这种处理方法称为差分运算^[24]。设 $\{Z_i\}$ 为非平稳序列，令

$$w_t = \nabla Z_t = (1 - B)Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

式中 $\{w_t\}$ 为平稳序列, $\{Z_t\}$ 为经一次差分运算后平稳的准平稳序列, ∇ 为差分算子。有些序列需经多次差分才能平稳。

1.5.2. 混沌时间序列对路基卸载的长期预报

路基受多种因素影响而发展演化的耗散的非线性动力系统, 各种因素的共同作用下, 系统演化过程可视为一种具有混沌特征的动力系统, 在重构相空间中, 其运动轨迹收缩到奇异吸引子, 由于混沌系统具有内在规律性和对初值的敏感依赖性, 可以根据路基变形的历史数据记录, 对混沌时间序列在路基沉降进行初步探讨, 利用分维数和关联维数, 对记录的时间序列进行相空间重构, 计算最大 Lyapunov 指数, 判断记录数据的混沌行为, 利用最大 Lyapunov 指数和全域法对路基工后沉降进行较长期的预测。

1.5.3 本文的创新点

(1) 在填筑期间, 路基沉降的形式复杂多变, 用常规的拟合方法对路基沉降进行拟合是困难的, 而且是不实用的。本文利用数据之间的关系, 通过时间序列建模来对路基沉降进行拟合。

(2) 利用时间序列模型的建立来对未来沉降进行预测, 利用加载的控制标准来对下一级填土时间进行确定, 从而对路基填土实现动态化信息法施工。

(3) 在超载前和超载时, 利用混沌时间序列理论计算最大 Lyapunov 指数, 判断记录数据的混沌行为。

(4) 通过最大 Lyapunov 指数和全域法对路基工后沉降进行较长期的预测。为路基最终沉降预测评估增加了两种判别方法, 使路基最终沉降预测与实际更加接近。

第二章 时间序列的基本形式和动态特征

2.1 基本思想^{【25】~【30】}

时间序列分析的主要思想是认为同一变量在现在时刻的观测值，在时间上同以前的观测值是有联系的，当然在新的时刻会出现未预料的新情况。因此，若记 $x_t (t = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ 是一个时间上无限延伸的序列，则我们可提出一种描述该序列的模型是

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) + a_t \quad (2-1)$$

模型 (2-1) 中 f 把现在的情况同以前的情况联系起来，而 a_t 为时刻 t 出现的新情况，假定它是同 t 时刻以前的情况无关的随机因素。

模型 (2-1) 的线性表达形式为

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + a_t \quad (2-2)$$

通常假定 a_t 是正态的白噪声序列，其均值为常数，不妨假定为 0，这样

$$E(a_t) = 0 \quad E(a_t a_{t-k}) = \sigma_a^2 \delta_k \quad (2-3)$$

式 (2-3) 中， δ_k 是 Kronecker 函数。当 $k = 0$ 时， $\delta_k = 1$ ；当 $k \neq 0$ 时， $\delta_k = 0$ ；显然 σ_a^2 是 a_t 的方差。(式 (2-3) 表明，白噪声序列中的各个随机变量彼此不相关，没有任何统计联系。)

用 B 表示后移算子，即 $Bx_t = x_{t-1}$ ， $B^k x_t = x_{t-k}$ 则式 (2-2) 可以写成

$$(1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p) x_t = a_t \quad (2-4)$$

简记为 $\varphi(B)x_t = a_t$ (2-5)

如果把算子 $\varphi(B)$ 的逆算子记为 $\theta(B) = \varphi^{-1}(B)$

则得 $x_t = \theta(B)a_t$ (2-6)

同理 $\theta(B)$ 可以写成

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad (2-7)$$

则式(2-6)可写成

$$x_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \quad (2-8)$$

式(2-8)表明一个时间序列 $\{x_t\}$ 可以认为是由一个互相独立的白噪声序列 $\{a_t\}$ 通过一个线性滤波器 $\theta(B)$ 而产生, 也即时间序列 $\{x_t\}$ 变成了不相关或独立白噪声输入的一个现实。

2.2 常用的几种时间序列模型

2.2.1 自回归(AR)模型

时间序列模型

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \cdots + \varphi_p x_{t-p} + a_t \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (2-9)$$

称为自回归(Autoregressive)模型, 其中 p 为模型的阶, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ 为自回归系数, a_t 是均值为零, 方差为 σ_a^2 的正态分布白噪声, 即 $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, 符号 N 表示独立正态分布, 此模型记为 $AR(p)$ 。

该模型与多元回归模型不同, 多元回归模型是一种静态数学模型, 它描述的只是一个变量与另外一组变量在同一时刻的静态相关。而模型(2-9)中, x_t 和 $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$ 同属于时间序列 $\{x_t\}$, 是序列中不同时刻的随机变量, 它们彼此之间有一定的相关关系, 因而是一种动态模型。该模型所描述的 $\{x_t\}$ 是对其自身的过去的数值进行回归故称之为自回归模型。

$AR(p)$ 模型对于 a_t 有两个假定: 一是 $\{a_t\}$ 作为随机序列, 在不同时刻互不相关, 二是 a_t 和有时刻的序列观测值 $x_k (k < t)$ 不相关。如果用 $AR(p)$ 模型去拟合某序列 $\{x_t\}$, 则残差序列 $\{a_t\}$ 不符合上述假定, 即 $\{a_t\}$ 不是白噪声序列, 那么用 $AR(p)$ 描述该序列是不适合的。

2.2.2 滑动平均(MA)模型

时间序列模型

$$x_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \cdots + \theta_q a_{t-q} \quad (2-10)$$

称为滑动平均(Moving Average)模型, 其中 q 为模型的阶; $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ 为滑动平均系数; $\{a_t\}$ 是白噪声序列, a_t 是均值为零, 方差为 σ_a^2 , 此模型记为 $MA(q)$, $MA(q)$ 模型中包含有 $q+1$ 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ 和 σ_a^2 , 这些未知参数必须利用观测数据进行估计。

2.2.3 自回归滑动平均(ARMA)模型

为了使模型在拟合实际数据时具有更大的灵活性,有时在模型中既包含有自回归部分也包含有滑动平均部分,这就是自回归滑动平均(Autoregressive Moving Average)模型,其表达式为

$$x_t - \varphi_1 x_{t-1} - \cdots - \varphi_p x_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q} \quad (2-11)$$

简记为 ARMA(p, q)。其中 p 和 q 分别是自回归部分和滑动平均部分的阶; φ_i ($i = 1, 2, \dots, p$), θ_j ($j = 1, 2, \dots, q$) 分别是自回归系数和滑动平均系数。ARMA(p, q)模型含有 $p + q + 1$ 个未知参数 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ 和 σ^2_a , 这些未知参数要利用观测数据进行估计。

2.3 时间序列模型的动态特性

模型的动态特性主要由格林函数、逆函数、自相关函数和偏相关函数来描述,它们亦可用来分析系统的平稳性和可逆性以及进行模型识别。

2.3.1 格林函数

由式(2-2)和式(2-8)可得 $\varphi(B)x_t = \theta(B)a_t$, 所以 $x_t = \frac{\theta(B)}{\varphi(B)}a_t$

$$x_t = (1 + G_1 B + G_2 B^2 + \cdots) a_t \quad (2-12)$$

式(2-12)可写成

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}, \quad G_0 = 1 \quad (2-13)$$

式(2-13)中的系数 G_j 称为格林函数,它把 x_t 表示成 a_t 及既往的 a_{t-j} 的线性组合,说明了 a_t 及其既往值是如何影响着响应值 x_t 的。

格林函数的物理意义有两种解释。首先,从式(2-13)明显看出 G_j 称 j 个时间单位以前加入系统的冲击或扰动 a_{t-j} 对现在响应的权重;其次,格林函数表示了系统对冲击 a_{t-j} 有多大的记忆。或者说表征系统对任一特定 a_t 的动态响应衰减的快慢。我们把 a_t 看作系统时间的输入,式(2-13)表示了系统的输出(在变形分析中)不仅受观测因素的影响,而且还受观测前时间输入

$(a_{t-1}, a_{t-2}, \dots)$ 的影响, 格林函数是对序列动态性的一种描述。

2.3.2 可逆函数

格林函数表示了时间序列的动态性质, 而在式 $x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) + a_t$ 所表示的时间序列分析设想中, 时间序列的动态性则是通过将 x_t 表示为既往的 x_i 的函数, 当用既往的 x_i 的线性组合来表示 x_t 时, 这种系数称做为逆函数, 记作 I_j 即

$$x_t = \sum_{j=1}^{\infty} I_j x_{t-j} + a_t \quad (2-14)$$

$$\text{或 } a_t = x_t - \sum_{j=1}^{\infty} I_j x_{t-j} \quad (2-15)$$

式 (2-13) 将系统的输出 $\{x_t\}$ 表示成输入 $\{a_t\}$ 的加权 $\{G_j\}$ 之和, 而 (2-15) 则将系数的输入 $\{a_t\}$ 表示成输出 $\{x_t\}$ 的加权 $\{I_j\}$ 之和, 从这个意义上, 同理 $\{I_j\}$ 称作逆函数的原因。

格林函数和逆函数分别用不同的方法描述了时间序列的动态特征。

2.3.3 自相关函数

自相关函数是时间序列模型识别的基本分析工具。

【定义 1】 $\{x_t\}$ 的滞后为 k 的自协方差函数为

$$r_k = E(x_t x_{t-k}) = E(x_t x_{t+k}) = r_{-k} \quad (2-16)$$

当 $k = 0$ 时, 即得到 $\{x_t\}$ 的方差 $r_0 = \sigma_x^2$

【定义 2】 用 r_k 除以主差 r_0 便得滞后 k 时的自相关函数

$$\rho_k = r_k / r_0 \quad (2-17)$$

注意 $\rho = 1$, r_k 或 ρ_k 表示 x_t 对 x_{t-k} 的相关性, r_k 或 ρ_k 又称为理论自协方差和理论自相关函数, 当我们根据一个样本的数据 x_1, x_2, \dots, x_n 去求 r_k 或 ρ_k 的估计值时, 则有如下定义

【定义 3】

$$\hat{r}_k = \hat{r}_{-k} = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-18)$$

称为样本自协方差函数。其中 x_t 是减掉均值以后的观测数据。

【定义 4】

$$\hat{\rho}_k = \hat{r}_k / r_0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-19)$$

称为样本的自相关函数。

自相关函数可以用样本的观测数据估计而无需知道模型形式。但是，样本的自相关函数 $\hat{\rho}_k$ 是对理论自相关函数 ρ_k 的一个很差的估计，通常只用它进行模型识别，而不用它来建立模型。

(1) AR 过程的自相关函数

用 x_{t-k} 同时乘以式 (2-9) 两边

$$\text{得 } x_{t-k}x_t = \varphi_1 x_{t-1}x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2}x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p}x_{t-p} + x_{t-k}a_t \quad (2-20)$$

对上式取数学期望，可得差分方程

$$r_t = \varphi_1 r_{t-1} + \varphi_2 r_{t-2} + \dots + \varphi_p r_{t-p}, k > 0 \quad (2-21)$$

当 $k < 0$ 时， x_{t-k} 与 a_t 不相关，所以 $E[x_{t-k}a_t] = 0$

用 r_0 除上式两边，得

$$\rho_t = \varphi_1 \rho_{t-1} + \varphi_2 \rho_{t-2} + \dots + \varphi_p \rho_{t-p}, (k > 0) \quad (2-22)$$

式 (2-20) 和式 (2-22) 可看出，自协方差函数与自相关函数具有相同形式的差分方程。

当 $k > 0$ 时，因为 $E[x_t a_t] = E[a_t^2] = \sigma_a^2$ ，因此由式 (2-20) 可以得 AR (p) 过程的差分方程为：

$$r_0 = \varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2 + \dots + \varphi_p r_p + \sigma_a^2 \quad (2-23)$$

而 $r_0 = \sigma_x^2$ ，用 r_0 除式 (2-24) 式的各项

$$\sigma_x^2 = \sigma_0^2 (1 - \rho_1 \varphi_1 - \rho_2 \varphi_2 - \dots - \rho_p \varphi_p)^{-1} \quad (2-24)$$

现在式 (2-20) 式写成

$$\varphi(B) \rho_k = 0 \quad k > 0 \quad (2-25)$$

其中 $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_p B^p$ ，注意这里 B 是对 k 而不是对 t 进行计算的。

算。如果 $\varphi(B)$ 能分解成

$$\varphi(B) = \prod_{i=1}^p (1 - \omega_i B) \quad (2-26)$$

则式 (2-26) 的通解为 (当 ω_i 互异时)

$$\rho_k = C_1 \omega_1^{-k} + C_2 \omega_2^{-k} + \cdots + C_p \omega_p^{-k}, \quad k > p \quad (2-27)$$

其中 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ 是 $\varphi(\omega) = 0$ 的根, 系数 C_1, C_2, \dots, C_p 由 p 个初始值来定。

一般来说, 平稳时间序列的自相关函数 ρ_k 是由指数衰减和衰减正弦波组成, 既 ρ_k 的尾部不可能在延迟某步之后等于零, 而是按负指数规律衰减, 因此, 序列 ρ_k 具有拖尾的特性。

(2) MA 过程的自相关函数

用 x_{t-k} 乘以式 (2-10) 两边并取期望, 得

$$r_k = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \cdots - \theta_q a_{t-k-q})] \quad (2-28)$$

因为每一个 a_t 都假定是由同一白噪声过程产生的, 所以 $E[a_t] = 0, E[a_t^2] = \sigma_a^2$

以及在 $k \neq 0$ 的情况下, $E(a_t a_{t-k}) = 0$ 。因此, 该过程的方差为

$$r_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2) \sigma_a^2, \quad k = 0 \quad (2-29)$$

其协方差函数为

$$r_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2) \sigma_a^2 & k = 0 \\ (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \cdots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2 & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (2-30)$$

因而相关函数为

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2} & k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad (2-31)$$

式 (2-30) 和式 (2-31) 两式说明, MA 序列的自协方差 (或自相关) 函数 r_k (或 ρ_k) 从 $k > q$ 以后全部为零。称这一性质为“截尾”。反之, 可以证明, 若一平稳时间序列的自协方差 (或自相关) 函数为截尾, 那么它必定是 MA

(q) 序列。

(3) ARMA 过程的自相关函数

用 x_{t-k} 乘以式 (2-11) 两边, 并取期望, 得

$$\begin{aligned} r_k &= \varphi_1 r_{k-1} + \varphi_2 r_{k-2} + \cdots + \varphi_p r_{k-p} + r_k(x, a) \\ &\quad - \theta_1 r_{k-1}(x, a) - \cdots - \theta_q r_{k-q}(x, a) \end{aligned} \quad (2-32)$$

$r_k(x, a)$ 是 x 与 a 之间交叉协方差, 其定义为

$$r_k(x, a) = E[x_{t-k} a_t] \quad (2-33)$$

由于 x_{t-k} 只受时刻 $t-k$ 以前的扰动项的影响, 所以

$$r_k(x, a) = 0, k > 0; r_k(x, a) \neq 0, k \leq 0 \quad (2-34)$$

由式 (2-32) 得

$$r_k = \varphi_1 r_{k-1} + \varphi_2 r_{k-2} + \cdots + \varphi_p r_{k-p}, k \geq q+1 \quad (2-35)$$

因此其自相关函数为

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \varphi_p \rho_{k-p}, k \geq q+1 \quad (2-36)$$

$$\text{或 } \varphi(B) \rho_k = 0, \quad k \geq q+1 \quad (2-37)$$

由式 (2-36) 可以看出, q 为 ARMA (p, q) 模型中滑动平均的记忆部分。在 $k \geq q+1$ 时, 其自相关函数显示出纯自回归过程的特征, 因此 $k > q$ 时, 滑动平均部分就不起作用了, 因此, ARMA (p, q) 模型的自相关函数 ρ_k 和自协方差函数 r_k 也具有拖尾性。

当 $k = 0$ 时, ARMA (p, q) 的方差为

$$r_0 = \varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2 + \cdots + \varphi_p r_p + \sigma_a^2 - \theta_1 r_1(x, a) - \cdots - \theta_q r_q(x, a) \quad (2-38)$$

与式 (2-32) 的方程 ($k = 1, 2, \dots, p$) 一起联立求解, 可以求出 r_0, r_1, \dots, r_p 。

各类模型的 $\{r_k\}$ 和 $\{\rho_k\}$ 的性质归纳如下:

当 $p = 0$ 时, ARMA (p, q) 序列退化为 MA (q) 序列, $\{r_k\}$ 和 $\{\rho_k\}$ 是 q 步截尾的; 当 $q = 0$ 时, ARMA (p, q) 序列退化为 AR (p) 序列, $\{r_k\}$ 和 $\{\rho_k\}$ 是拖尾的, 且当 $k > 0$ 时, 满足差分方程 $\varphi(B) \rho_k = 0$ 及 $\varphi(B) r_k = 0$; 而当 p 和 q

均不等于零时, $\{r_k\}$ 和 $\{\rho_k\}$ 也是拖尾的, 且当 $k > q$ 时, 满足上述差分方程。

2.3.4 偏相关函数

由上节可知, MA (q) 过程的自相关函数在 q 步之后就截止为零; 截尾性是 MA 序列的特有标志, 据此可推测出 MA (q) 模型的阶数。对于 AR (p) 过程没有这样的, 因为它的自相关函数没有截尾点, 拖尾性是 AR 和 ARMA 序列的共同特性。AR (p) 过程可由偏相关函数的特性来判断。

设 $\{x_t\}$ 为平稳, 零均值序列, 考虑 $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k}$ 是对 x_t 的线性最小方差估计, 即选择系数 $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \dots, \varphi_{kk}$ 使得

$$\delta = E[x_t - \sum_{j=1}^k \varphi_{kj} x_{t-j}]^2 = r_0 - 2 \sum_{j=1}^k \varphi_{kj} r_j + \sum_{j=1}^k \varphi_{kj} \varphi_{kj} r_j \quad (2-39)$$

达到极小。为此目的, 对 δ 的右端分别求偏导数 $\frac{\partial \delta}{\partial \varphi_{kj}}$, $j = 1, 2, \dots, k$, 并令其为零, 便得到 φ_{kj} 应该满足的线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \vdots \\ \varphi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix} \quad (2-40)$$

上式就是著名的 yule-walker 方程, 系数阵为 Toeplitz 矩阵。

(1) AR (p) 的偏相关函数

将 AR (p) 模型 (2-9)

写成 $x_t = \sum_{j=1}^p \varphi_j x_{t-j} + a_t$ 代入 (2-39) 得

$$\begin{aligned} \delta &= E(a_t^2) + 2E(a_t \left[\sum_{j=1}^p (\varphi_j - \varphi_{kj}) x_{t-j} - \sum_{j=p+1}^k \varphi_{kj} x_{t-j} \right]) \\ &+ E \left(\left[\sum_{j=1}^p (\varphi_j - \varphi_{kj}) x_{t-j} - \sum_{j=p+1}^k \varphi_{kj} x_{t-j} \right]^2 \right) \end{aligned} \quad (2-41)$$

因为 $E(a_s x_t) = 0$ (当 $s > t$ 时), 所以式(2-41)第二项必为零; $E(a_t^2)$ 与 $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \dots, \varphi_{kk}$ 无关, 要使 δ 达到最小值, 应使第三项为零。

$$\begin{cases} \varphi_{kj} = \varphi_j & \text{当 } 1 \leq j \leq p \\ \varphi_{kj} = 0 & \text{当 } j = p+1, p = 2, \dots, k \end{cases} \quad (2-42)$$

所以, 当 $k > p$ 时, 必有 $\varphi_{kk} = 0$; 也就是说 AR (p) 的偏相关函数是“截尾”的, 而且它“截尾”处的 k 值即为模型阶数。

偏相关函数“截尾”是 AR (p) 模型的特性, 可以证明: 如果一个平稳序列的偏相关函数“截尾”, 则它一定是一个平稳自回归序列。

(2) 偏相关函数的计算

由式 (2-40) 式可得

$$\begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \vdots \\ \varphi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix} \quad (2-43)$$

式(2-43)说明: 由自相关函数 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ 的值, 可以求出偏相关函数的值 (φ_{kk}), 从这里还可看出, 为了求出 φ_{kk} , 每次都必须求出 $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \dots, \varphi_{k,k-1}$ 。因此, 用这种方法来求 φ_{kk} 的值, 工作量较大。

偏相关函数的递推算法:

式 (2-43) 可写成

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \vdots \\ \varphi_{kk} \end{pmatrix} \quad (2-44)$$

在式 (2-44) 中, 令 $k = 1$ 有

$$\rho_1 = \varphi_{11}$$

令 $k = 2$ 有

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix} \quad (2-45)$$

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{21} + \rho_1 \varphi_{22} \\ \rho_1 \varphi_{21} + \varphi_{22} \end{pmatrix} \quad (2-46)$$

将 $\rho_1 = \varphi_{11}$ 代入式 (2-46), 得

$$\varphi_{11} = \varphi_{21} + \varphi_{11} \varphi_{22} \quad (2-47)$$

即式 (2-47) 代入式 (2-46), 得

$$\rho_2 = \varphi_{11}(\varphi_{11} - \varphi_{11} \varphi_{22}) + \varphi_{22} \quad (2-48)$$

由 (2-48) 可求出

$$\varphi_{22} = \frac{\rho_2 - \varphi_{11}^2}{1 - \varphi_{11}^2} \quad (2-49)$$

再令 $k = 3$, 如此继续下去, 可得出一般的递推公式

$$\varphi_{11} = \rho_1 \quad (2-50a)$$

$$\varphi_{k+1,k+1} = \left(\rho_{k+1} - \sum_{j=1}^k \rho_{k+1-j} \varphi_{kj} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^k \rho_j \varphi_{kj} \right)^{-1} \quad (2-50b)$$

$$\varphi_{k+1,j} = \varphi_{kj} - \varphi_{k+1,k+1} \cdot \varphi_{k,k-j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2-50c)$$

按上式计算可节约内存, 加快计算速度。

2.4 小结

1. 当 $q=0$ 时, ARMA (p, q) 模型就成为 AR (p) 模型, 当 $p=0$, ARMA (p, q) 模型就成为 MA (q) 模型。
2. 时间序列的基本思想是利用数据之间的连续来建立模型, 模型究竟是那种形式可以通过自相关函数和偏相关函数来判定。
3. 总结时间序列的几种模型的基本形式和动态特征如下:

表 1 ARMA 序列的分类性质一览表

模 型 类 别	$AR(p)$	$MA(q)$	$ARMA(p,q)$
模型方程	$\varphi(B)w_t = a_t$	$w_t = \theta(B)a_t$	$\varphi(B)w_t = \theta(B)a_t$
平稳条件	$\varphi(w) = 0$ 的根之模	无条件	$\varphi(w) = 0$ 的根之模 > 1
可逆条件	无条件	$\varphi(w) = 0$ 的根之模	$\varphi(w) = 0$ 的根之模 > 1
传递形式	$w_t = \varphi^{-1}(B)a_t$	$w_t = \theta(B)a_t$	$w_t = \varphi^{-1}(B)\theta(B)a_t$
逆转形式	$a_t = \varphi(B)w_t$	$a_t = \theta^{-1}(B)w_t$	$a_t = \theta^{-1}(B)\varphi(B)w_t$
自相关函数	拖尾	截尾	拖尾
偏相关函数	截尾	拖尾	拖尾

第三章 模型识别与阶次判定及其预测

建立一个时间序列的数据模型，首先要根据系统性质的先验知识，以及所提供的时间序列的数据概貌，提出一个相适应的模型类别。其次就要根据实际的观测数据具体地确定该数据模型所包含地项目以及各项系数的数值。前者叫做模型识别，后者叫做模型的定阶及参数估计。

假定我们并不知道构造观测数据的模型，如何根据它们的一段样本 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，对它们应属的模型类别进行判断，这就是模型识别。

3.1 平稳性数据识别

平稳数据的主要特点是它的一阶和二阶统计性质不随时间改变，即均值和方差为常数。

模型识别的任务就是究竟在什么情况下应该使用 AR 模型?MA 模型？或 ARMA 混合模型？各模型的阶数又将如何确定？下面就来回答这些问题。

(1) 依据：简单说就是根据样本自相关函数及样本偏相关函数的形态来识别模型类别。如果 $\{x_t\}$ 为样本自相关函数 ρ_k 在 $k > q$ 后截尾，则判断 $\{x_t\}$ 是 MA(q) 序列；如果偏相关函数 φ_{kk} 在 $k > q$ 后截尾，则判断 $\{x_t\}$ 是 AR(p) 序列；如果 ρ_k 和 φ_{kk} 都不截尾，只是按负指数衰减趋于零（即拖尾的），则应判断其为 ARMA 序列但尚不能判定阶次。

(2) ARMA 模型的定阶：如果对 $\{x_t\}$ 相关特性进行判断的结果是 ρ_k 和 φ_{kk} 都不是截尾，只是负指数衰减（拖尾），那么可认为 $\{x_t\}$ 属于 ARMA 混合模型。识别 p, q 的办法可以从低阶到高阶逐个取 (p, q) 为 $(1, 1), (1, 2), (2, 1) \dots$ 等值试探。所谓试探是先认定 (p, q) 为某值（如 $(1, 1)$ ），然后进行下一步的参数估计，定出估计模型，再用检验方法检验该估计模型是否可被接受，也就是与实际序列拟合得好与不好。若不被接受，就调整 (p, q) 的试探值，重新进行参数估计和模型检验，直到被接受为止。显然这个方法过于繁琐，好在实际应用中，ARMA 模型的阶数 (p, q) 一般都比较低。

3.2 常用的时间序列定阶准则

3.2.1 F 检验的定阶准则

对于已知的观测数据 $\{x_t, t = 1, 2, \dots, N\}$ 所拟合的 AR(p) 或 ARMA (p, q) 模型的残差平方和

$$R_{ss} = S(n) = \sum_{t=n+1}^N a_t^2 \quad (3-1)$$

是阶数 $n = p$ 或 $n = p + q$ 的递减函数, $S(n)$ 随着阶数的增加而减少。因此, 确定阶次最简单的方法就是由低阶开始依次 $n = 1, 2, \dots$ 的一系列模型按最小二乘法估计出参数值及相应的残差函数 $S(n)$, 然后选择使 $S(n)$ 减小不显著时的那个 n 作为模型的最佳阶次。

为了判定当模型的阶数改变时, 相应的残差平方和的变化是否显著, 我们引入检验的统计量

$$t = \frac{S(n_1) - S(n_2)}{S(n_2)} \frac{N - n_2}{n_2 - n_1} \quad (3-2)$$

式中: $S(n_1)$ ——参数个数为 n_1 模型的残差平方和; $S(n_2)$ ——参数个数为 n_2 模型的残差平方和; N ——观测数据数目。

数理统计的结论表明, 当 N 足够大时, 统计量 t 渐近地服从 $F(n_2 - n_1, N - n_2)$ 分布, 而 F 分布的自由度为 $(n_2 - n_1, N - n_2)$ 。

根据以上原理, 我们得出了 ARMA (p, q) 模型定阶的 F 检验准则。

记 S_0 为 (高阶) 模型 ARMA (p, q) 的残差平方和, S_1 为 (低阶) 模型 ARMA ($p-1, q-1$) 的残差平方和, 而两模型参数个数的差为 2。当 N 充分大时, 对于比较 ARMA ($p-1, q-1$) 与 ARMA (p, q) 而言, 近似地有

$$F = \frac{S_1 - S_0}{S_0} \frac{N - (p + q)}{2} \sim F(2, N - (p + q)). \quad (3-3)$$

给定显著性水平 α (例如 $\alpha = 0.05, 0.01$), 查 F 分布表可得临界值 F_α 。

若 $F < F_\alpha$, 则 ARMA ($p-1, q-1$) 是合适的 (F 检验不显著);

若 $F \geq F_\alpha$, 则 ARMA ($p-1, q-1$) 是不合适的 (F 检验显著),

说明需要增加阶数，进行往高阶识别。

同理，对于 $AR(p)$ 模型的定阶的 F 检验准则是

$$F = \frac{S_1 - S_0}{S_0} \frac{N - p}{2} \sim F(1, N - p). \quad (3-4)$$

其中 $S_0 = AR(p)$ 的残差平方和； $S_1 = AR(p+1)$ 的残差平方和； N — 观测数据数目。

给定显著性水平 α ，查 F 分布表可得临界值 F_α 。

若 $F < F_\alpha$ ，则 $AR(p-1)$ 是合适的（ F 检验不显著）；

若 $F \geq F_\alpha$ ，则 $AR(p-1)$ 是不合适的（ F 检验显著）。

假定真实模型的阶次是 p ，可由低阶开始递增地建立 $AR(1)$, $AR(2)$, $AR(3)$, ..., $AR(p)$, $AR(p+1)$ ，且在相邻两个模型间用上述 F 检验法，直到找到合适的阶数 p 为止，一共只需建立 $(p+1)$ 个 AR 模型。

3.2.2 FPE 定阶准则

1971 年日本学者赤池 (Akaike) 提出了一种识别 AR 模型阶数的准则，称为最小最终预报误差准则，简称为最小 FPE (Final Prediction Error) 准则。其基本思想是根据模型的预报误差来判明自回归模型的阶数是否合适。这种作法在直观上是很自然的。如果某个适用的自回归模型是由某一序列拟合得来的，则利用该模型对该序列进行一步预测，所得的预测误差必定是最小的。因此，预报效果的好坏，反过来也可作为模型拟合优劣的检验准则。

事实上，当用 $AR(n)$ 模型来拟合某一个观测过程时，总有某一阶数的模型 AR 拟合得最好，这时的阶数 n_0 是最佳的。当模型的阶数低于此最佳阶数 ($n < n_0$ ，缺参数拟合) 时，就如同用一个低阶曲线去拟合一高阶曲线，会产生平滑的结果；而当模型的阶数高于此最佳阶数 ($n > n_0$ ，超参数拟合) 时，则如同用一高阶曲线去拟合低阶曲线，会产生急剧变化和振荡的结果。不论是缺参数还是超参数拟合，都会使 AR 模型预报误差的方差增大。为了找到合理的 AR 模型阶数，以平衡超参数或缺参数拟合造成的误差，最简单的办法就是寻求使一步预报误差方差达到极小的最佳 AR 模型阶数。这就形成了 FPE 定阶准则。

设 $\{x_t; 1 \leq t \leq N\}$ 所适合的真实模型为 AR(n)

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \cdots + \varphi_n x_{t-n} + a_t, \quad (3-5)$$

其中 $E(a_t) = 0$, $E(a_t^2) = \sigma_a^2$, 设 φ_i 的估计值为 $\hat{\varphi}_i$, $1 \leq i \leq n$, 用 \hat{x}_{t-1} 表示 $t-1$ 时刻一步预报值, 即对 t 时刻的预报值, 应有

$$\hat{x}_{t-1} = \hat{\varphi}_1 x_{t-1} + \hat{\varphi}_2 x_{t-2} + \cdots + \hat{\varphi}_n x_{t-n} \quad (3-6)$$

可以证明, 一步预报误差的方差为

$$E[x_t - \hat{x}_{t-1}]^2 \approx (1+n/N)\sigma_a^2 \quad (3-7)$$

用 $\hat{\sigma}_a^2$ 表示以 $\hat{\varphi}_i$, $1 \leq i \leq n$ 为参数的拟合模型残差的方差, 当 N 充分大时有

$$E[\hat{\sigma}_a^2]^2 \approx (1-n/N)\sigma_a^2 \quad (3-8)$$

换言之, 当 N 充分大时, $\hat{\sigma}_a^2/(1-n/N)$ 是 σ_a^2 的无偏估计。在式 (3-7) 中, 用无偏估计代替 σ_a^2 , 便得到

$$E[x_t - \hat{x}_{t-1}] \approx (1+n/N)(1-n/N)^{-1}\sigma_a^2 \quad (3-9)$$

对于以 $\hat{\varphi}_i$, $1 \leq i \leq n$ 为参数的 AR(n) 模型应有

$$\hat{\sigma}_a^2 = r_0 - \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j r_j \quad (3-10)$$

其中 r_0, r_1, \dots, r_n 是数据序列的样本协方差函数在不同迟后时的值。

由上可知, 以 $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_n$ 为参数的 AR(n) 模型, 其最终预报误差定义为

$$FPE(n) = (1+n/N)(1-n/N)^{-1}(\hat{r}_0 - \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j \hat{r}_j) \quad (3-11)$$

$$\text{或 } FPE(n) = (1+n/N)(1-n/N)^{-1} \cdot \hat{\sigma}_a^2 \quad (3-12)$$

式 (3-11) 和 (3-12) 表明: 系数 $(N+n)/(N-n)$ 随着 n 的增大而增大, 而 $\hat{\sigma}_a^2 = r_0 - \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j r_j$ 开头是随着 n 的增大而减小, 但当 n 超过序列 $\{x_t\}$ 的真正模型阶数 n_0 之后, 理论上它就不会减小了。不难想到, 使 $FPE(n)$ 取最小的那个 n 就可判定为模型的最佳阶次, 即

$$FPE(n_0) = \min_{0 \leq n \leq n_0} FPE(n) \quad (3-13)$$

式(3-13)中 n_h 是阶数的上界。通常 n_h 按经验来取, 当样本点数 $N = 100 \sim 200$ 时, 取 $n_h = 2N/\ln 2N$; 当 $N = 50 \sim 100$ 时, 取 $n_h = N/3 - N/2$ 。

归纳起来, 用 FPE 准则进行 AR 模型的阶数的判定和参数估计的步骤如下:

- ① 取依适应的阶数上界值 n_h , 一般不超过 $\frac{1}{3}N - \frac{2}{3}N$ 。
- ② 求序列 $\{x_t\}$ 的样本自协方差函数 $\{\hat{r}_0, \hat{r}_1, \dots, \hat{r}_n\}$ 。
- ③ 对 $n = 1, 2, \dots, n_h$, 依次递推计算 $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n$, $r_0 - \sum_{j=1}^n \hat{\phi}_j r_j$, 并代入式(3-14)

计算 $\text{FPE}(n)$ 。

- ④ 找出 $\text{FPE}(n)$ 的最小值相应的 n 作为 AR 模型的阶数, 相应的 $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_n$ 就是自回归参数的估计值, 相应的 $r_0 - \sum_{j=1}^n \hat{\phi}_j r_j$ 就是一步预报误差。

若 $\text{FPE}(n)$ 的数值从 $n = 1$ 就开始上升, 则可判定模型阶数 $n = 1$; 若其值随 n 增加而一直下降, 则很可能是由于实际测量序列不应采用 AR 模型来描述; 若在某一 n 的 $\text{FPE}(n)$ 值下降很快, 以后又有缓慢地下降, 那么, 我们可把这个 n 值作为模型的阶; 若随 n 的增加 $\text{FPE}(n)$ 的值上下剧烈跳动, 看不出最小值, 这很可能是由于样本长度 N 太小引起的, 可增大样本长度后再进行定阶。

3.2.3 AIC 准则

AIC 准则又称 Akaike 信息准则, 是由日本统计学家 Akaike 于 1974 年提出的, AIC 准则是信息论与统计学的重要研究成果, 具有重要意义。

AIC 准则起源于 Kullback-Lelibrler 信息量。设 X 是随机向量, 它的概率密度是 $f(x)$, 其中含有 k 个未知参数, 社未知参数向量为 $\beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_k^0)^T$. $f(x)$ 属于分布族 $g(x/\beta)$, 其中 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)^T$. 显然 $f(x) = g(x/\beta^0)$. (3-14)

K-L 信息量可以用来刻画 $g(x/\beta)$ 与 $f(x)$ 的接近程度, 其定义为

$$I(f(\cdot), g(\cdot/\beta)) = \int f(x) \ln \frac{f(x)}{g(x/\beta)} dx, \quad (3-15)$$

则有 $I(f(\cdot), g(\cdot/\beta)) \geq 0$, 且

$$I(f(\cdot), g(\cdot/\beta))|_{\beta=\beta_0} = 0. \quad (3-16)$$

K-L 信息量即寻求最接近于 $f(x)$ 的参数概率密度 $g(x/\beta)$, 使得

$$I(f(\cdot), g(\cdot/\beta)) = \min. \quad (3-17)$$

经过理论分析, 当给定样本观测值 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (它是容量为 n 的样本), 设 ${}_k \hat{\beta}^{(m)}$ 是模型参数 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)^T$ (未知参数个数是 k , k 为未知) 的最大似然估计, 这里标出左标 “ k ” 是为了强调未知参数个数 k 是未知的, 是需要估计的。设 $\ln(L(\beta))$ 是其对数似然函数。AIC 信息准则是: 使式 (3-18) 中的 k (k 确定后, ${}_k \hat{\beta}^{(m)}$ 就确定) 满足

$$AIC(k) = -2\ln(L({}_k \hat{\beta}^{(m)})) + 2k = \min \quad (3-18)$$

当 n 较大时, ML 估计, ULS 估计, CLS 估计是近似相等的, 故式(3-18)中的 ${}_k \hat{\beta}^{(m)}$ 也可以 CLS 估计 ${}_k \hat{\beta}^{(L)}$, ULS 估计 ${}_k \hat{\beta}^{*(L)}$ 代替。设 x_t 是平稳时间序列 ARMA(p, q), 其中未知参数的个数是 $k = p + q + 1$ 个, 包括自回归参数 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)^T$, 这个准则的优点, 在于它是借助信息论而提出的一个完全客观的定阶准则, 利用这个准则不要求建模人员再加入主观判断。而 F 检验方法, 则要求建模人员主观地选择置信度。然而对于 AIC 准则地使用注意以下几个问题。

(1) 用 AIC 准则时, 仍然需要人为地预先框定阶数地最大范围, 从经验来看, 阶数上限取 $\sqrt{N}, N/10, \log N$ 均可。在比较 AIC 值大小的过程中, 如果已接近阶数上限仍不能确定 AIC 的极小点, 则应加大上限, 继续进行比较。

(2) AIC 准则要求参数由极大似然法估计。当序列不服从正态时, 计算实践表明此准则对于最小二乘法估计也仍然使用。

AIC 准则虽然为时序模型地定阶带来许多方便, 然而 AIC 准则也有不足之处, 有人从理论上证明 AIC 方法不能给出相容估计。也就是说, 当样本长度 $N \rightarrow \infty$ 时, 用 AIC 定出的模型阶数估计值, 并不能依概率收敛到真值。

3.3 时间序列模型定阶准则的改进方法 (T-F 定阶法)

模型的定阶准则大致归纳为三个方面的问题：

(1) 检验模型是否适用最根本的一条应该是检验残差 a_t 是否为白噪声。因此，从理论上讲，应在时域上检验残差是否为独立序列，即自相关函数 ρ_a 是否为零。但是，在实际中存在着很大困难。因为模型参数只能得到估计值 $\hat{\varphi}_j, \hat{\theta}_j$ ，从而由模型计算出来的残差自相关函数也是估计值 $\hat{\rho}_a$ ，它一般偏离真值较远，是劣估计。所以无论是直接采用 $\hat{\rho}_a$ 进行检验或采用 χ^2 检验，在实际应用中都存在一定的困难。

(2) 采用过拟合方法，即将模型逐步升阶，将高阶模型与低阶模型按某一准则进行比较，以检验低阶模型是否适用。这方面的准则如 F 检验。它用来检验高阶模型的残差平方和 R_{ss} 或残差方差 σ_a^2 是否比低阶模型有显著下降？如果答案肯定，则低阶模型不适用；反之，适用。

检验定阶准则也用来检验高阶模型中新增加的参数是否近乎于 0？参数的置信区间是否含 0？如答案肯定，则低阶模型适用；反之，不适用。

但是，这种检验准则存在一个根本性问题，对于 ARMA 模型而言， R_{ss} 或 σ_a^2 都不一定是模型参数的凸函数，因此，存在局部的极小值，与此相应的高阶模型的 R_{ss} 或 σ_a^2 就比一定比低阶模型的 R_{ss} 或 σ_a^2 小，甚至适用模型的 R_{ss} 或 σ_a^2 就不一定比低阶模型的 R_{ss} 或 σ_a^2 小。对于采用 F 检验准则，还存在一个问题，因为 F 检验的前提应是两个模型中有一个是适用的，如果两个模型的适用性均未知时，采用 F 检验准则低阶模型的适用性时没有意义的。

(3) 综合考虑模型阶数增高的利弊来确定模型阶数，检验模型的适用性。从理论上讲，高阶模型包含了低阶模型，高阶模型能比低阶模型更加精确地反映时序特性，描述产生时序的系统，即 σ_a^2 应较小。但实际上，高阶模型的参数数目比低阶模型的参数数目多，参数又均为估值，从而在应用时统计计算误差也较大。显然，这就存在着一个适合阶数的模型。无论 FPE 准则、AIC 准则、BIC 准则以及类似的其它准则，实质上都是计及了这两方面。但是，这些准则在理论上并不能保证模型阶数是一致估计，适用中有时也偏离应有的阶数，例如，实际使用表明，采用 FPE 准则、AIC 准则时，所得到的阶数

往往偏低。

3.4 逆函数预报

所谓逆函数进行预报，就是用现在和过去的观测数据以及逆函数，按照公式 $\hat{x}_i(l) = \sum_{j=1}^{l-1} I_j \hat{x}_i(l-j) + \sum_{j=1}^{\infty} I_j x_{i+l-j}$ 对未来值作预报。逆函数可按照

$$I_i = -\varphi_i - \sum_{j=1}^i \theta_j I_{i-j} \quad \text{其中}$$

$$\varphi_j = \begin{cases} \varphi_j & 1 \leq j \leq p \\ 0 & j > n \end{cases} \quad \theta_j = \begin{cases} \theta_j & 1 \leq j \leq q \\ 0 & j > q \end{cases}$$

在此逆函数进行预报是在平稳序列的前提下进行的，对于较复杂的情况，如 ARIMA(p, d, q)模型、季节模型、含确定性趋势的组合模型等，必需对原始数据进行适当地变换处理，使之平稳化，才能进行平稳预报。与此相应，如果在预报前对数据进行了平稳化处理，平稳预报后，一定要将预报值还原成与序列相应地值，这样才能得到对原来地预报值。

3.5 小结

建立时间序列的模型首先要对模型进行识别，看它究竟是属于那种模型，模型的识别方法很多，也各由不同的优缺点。FPE 准则实用于 AR(p)模型；AIC 准则实用 AR(p 模型，ARMA(p, q)模型，但模型识别时，认为的因素过大，确定出来的模型阶数往往偏离实际应有的阶数；F 检验定阶准则实用 AR(p)模型，ARMA(p, q)模型，但是计算繁琐。现代计算机的高速发展，F 检验定阶准则逐渐体现出它的优越性，通过计算机的编程，只有输入 p, q 值，就可以计算出结果来。模型识别后就可以利用逆函数预报法对未来数据进行预测。

第四章 混沌时间序列的基本性质及其预测

80年代以来,混沌科学与其它科学相互渗透,得到了长足的发展。混沌具有对初始敏感、映射有正的Lyapunov指数、有奇异吸引子和分数维、测度熵大于0等特征,可以用来描述非线性动力学系统所发现出来的复杂行为。

4.1. 混沌研究的意义

通过对混沌的研究,极大地扩展了人们的视野,活跃了人们的思维。过去被人们认为是确定论的和可逆的某些力学方程,却具有内在的随机性和不可逆性。确定论的方程可以得出不确定的结果,这就打破了确定论和随机这两套描述体系之间的鸿沟,给传统科学以很大的冲击,在某种意义上使传统科学被改造,这必将促进其他学科进一步发展。混沌与确定性状态的区别如下表4-1:

表4-1 混沌和其它状态的基本特征

系统	吸引子	维数	Lyapunov指数
稳定定态	点	0	小于0
周期运动	闭曲线	1	小于等于0
混沌	奇异	非整数	$\lambda_1 > 0$ 其余 $\lambda_i \leq 0$

4.2 相空间重构技术

通常,对于一个复杂的系统,我们只能得到观察到的数据,即时间序列。根据相空间重构理论^[31,35]对于时间序列 $x(t_i) (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ 用一定的时间滞后 τ 和一定的嵌入维数 m , 可建立起一个多维的相空间 Y 。其具体做法是对实际测得的一组时间序列 $x(t_i) (i = 0, 1, 2, \dots, N)$, 如果嵌入维为 m , 则相空间中点的个数 $n = N - (m - 1) \cdot \tau$, 构造出的相空间向量 $Y_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= (x(t_1), x(t_1 + \tau), \dots, x(t_1 + (m-1) \cdot \tau)) \\
 Y_2 &= (x(t_2), x(t_2 + \tau), \dots, x(t_2 + (m-1) \cdot \tau)) \\
 &\dots \\
 Y_n &= (x(t_n), x(t_n + \tau), \dots, x(t_n + (m-1) \cdot \tau))
 \end{aligned} \tag{4-1}$$

4.3 关联维的基本原理

时间序列关联维的提取，使得混沌吸引子有可能从混沌时间序列中恢复出来，并在一个合适的相空间将其展开，而在这个相空间内，最有可能正确地才找出吸引子的规律。关联维的目的在于：不管一维时间序列所包含相空间的维数是多少，通过时间序列来测算它最后收缩到那个子空间的维数，这样可以获得要描述这样一个复杂系统至少需要几个实质性状态变量。

设一等间隔时间序列为： $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$ 可以用这些数据支起一个 m 维子相空间。取头 m 个数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ ，在 m 维空间中确定出第一个点，把它记作 r_1 ；然后去掉 x_1 ，再依次取 m 个数据 $x_2, x_3, x_4, \dots, x_{m+1}$ ，这组数据在 m 维空间中表现为第二个点，记为 r_2 ；依次可以构造其余点：

$$\begin{cases} r_3: (x_3, x_4, x_5, \dots, x_{m+2}) \\ r_4: (x_4, x_5, x_6, \dots, x_{m+3}) \\ \dots \quad \dots \end{cases} \tag{4-2}$$

把这些点依次连起来就是轨迹。关联维的确定是从这些点之间的相互关系着眼来考察轨迹的维数。设由时间序列在 m 维空间共生成 N 个点 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i, \dots, r_N$ ，给定一个数 r ，然后求出有多少点对 $(r_i - r_j)$ 小于 r 。把距离小于 r 的点对个数占总点对个数 N^2 的比例记作 $C(r)$ ，它可以表示为：

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \theta(r - |r_i - r_j|) \tag{4-3}$$

其中， $\theta(x)$ 是阶跃函数： $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

当 r 取得太大时，所有的点对的距离都不会超过它；由式 (4-3) 可得 $C(r) = 1$ ，则 $\ln C(r) = 0$ ，这样的 r 测量不出点之间的关联信息；适当缩小测量尺度 r ，可能在 r 的一段区间内有：

$$C(r) = r^d \quad (4-4)$$

如果这种关系存在，那么 d 是一种维数，称为关联维。

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r} \quad (4-5)$$

一个时间序列关联维的成功提取，不仅意味着系统的混沌特征得到描述；而且保证了由这个序列决定的吸引子在什么样的高维空间可以被恢复。也就是说，在多少维的相空间才能“看得清”吸引子，而在这个空间中，吸引子的规律如果被获得，那么整个时间序列的预测也就成为可能。

若嵌入空间的维数未知，可以对不同的维数 m 分别计算 $C(r)$ ；若系统是混沌的，在 $\log C(r) - \log r$ 图上，曲线的斜率将随 m 的增大而收敛到 γ 。这是因为，当维数太低时，数据将充满整个状态空间，于是曲线的斜率等于 m 。当 m 达到 Takens 定理中的维数极限时，曲线中直线段部分的斜率就会达到 d 并饱和。实际上，如果所研究的时间序列是来自已知方程的模拟数据，可以通过调整 $\log r$ 的尺度来发现其中的标度律。在 $\log r$ 的上边界处，所有的 $\log C(r)$ 曲线都趋向于 0；在下边界处都趋向于负无穷；直线斜率刚刚开始收敛时的嵌入空间维数也可以作为重构相空间时的嵌入空间维数的估计。

4.4 Lyapunov 指数

在混沌理论之前就有 Lyapunov 指数的概念，当时是用来判断线性和非线性系统的稳定性的，Lyapunov 指数被定义为

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log |\lambda_{\max}(A_i)| \quad (4-6)$$

这里 A_i 是函数 f 在点 x_i 处的局部线性化系统的转换矩阵。即 $f(x) = A_i x_i + f'(x_i)(x - x_i) \cdot \lambda_{\max}$ 。负的 Lyapunov 指数意味着局部收敛的平均速度，而正的 Lyapunov 指数则意味着局部发散的平均速度。由于局部混沌的出现，Lyapunov 指数谱可以用来度量动力系统对初始条件的依赖程度。Lyapunov 指数的这个功能与其传统作用不同。另外，需要注意的是正的和负的 Lyapunov 指数可以在同一个耗散系统中并存，这种耗散系统就是混沌系统。由 Lyapunov 指数的定义可知，它独立于初始条件和轨迹的选择。所以是吸引

子的一个不变量。实际上，如果能够得到完整的 Lyapunov 指数谱，吸引子的另外两个不变量—Kolmogorov 塞和 Lyapunov 指数也可以确定下来。Kolmogorov 塞就是状态信息随时间而丢失的速度，它等于正的 Lyapunov 指数之和，而 Lyapunov 维数由下式给出

$$d_L = j + \sum_{x=1}^j \lambda_x / |\lambda_{j+1}| \quad (4-7)$$

这里 j 满足 $\sum_{x=1}^j \lambda_x > 0$ 但 $\sum_{x=1}^{j+1} \lambda_x < 0$ ，且 Lyapunov 指数 λ_x 按从大到小的顺序排列。

d_L 与前面介绍的维数值很接近。对实际问题而言，由于系统都是有界的，所以只要发现其中 Lyapunov 指数大于零，就可判定系统是混沌的。所以最大 Lyapunov 指数的计算有着重要意义。

从时间序列提取 Lyapunov 指数，其意义为^[32]：

- ① 说明了该系统的动力行为是否混沌。
- ② 说明了该系统的动力行为在某方向上是指数辐射或收敛的。
- ③ 给出了该系统的最大可预报的时间尺度。

4.5 最大 Lyapunov 指数的计算

计算步骤^[33]：

① 对时间序列 $\{x_i\} (i = 1, 2, \dots, N)$ 进行 FFT 变换，计算出时间延迟 τ 和平均周期 P ；

- ② 计算出关联维数 d ，再由 $m \geq d+1$ 确定嵌入维数 m ；
- ③ 根据时间延迟 τ 和嵌入维数 m 重构相空间 $\{Y_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ ；
- ④ 找相空间中每个点 Y_j 的最近邻点 $Y_{\hat{j}}$ ；

$$\text{即 } d_j(0) = \min_j \|Y_j - Y_{\hat{j}}\|, |j - \hat{j}| > P$$

- ⑤ 对相空间中每一个点 Y_j ，计算出邻点对的 i 个离散时间前后的距离 $d_j(i)$ 。

$$d_j(i) = |Y_{j+i} - Y_{j-i}| \quad i = 1, 2, \dots, \min(M - j, M - \hat{j})$$

$$⑥ \text{ 对每个 } i \text{ 求出所有 } j \text{ 的 } \ln d_j(i) \text{ 平均 } Y(i), \text{ 即 } Y(i) = \frac{1}{q\Delta t} \sum_{j=1}^q \ln d_j(i)$$

其中 q 是非零 $d_j(i)$ 的数目，并用最小二乘法作出归直线，该直线斜率就是最大 Lyapunov 指数 λ_1 。

4.6 延迟时间 τ 的选择

选择合适的 τ ，自然要求线性独立，即选取自相关函数的第一零点。后来 M.T.Rosenstein 等人^[34]在实验中提出用自相关函数下降到初始值的 $1 - \frac{1}{e}$ 的滞时作为延迟时间 τ 。

4.7 最大可预测时间尺度

Lyapunov 指数表征了系统邻近轨道的发散程度。邻近轨道的发散与否，意味着对初始信息的遗忘或保留，即与可预测问题有关。因此可以用 Lyapunov 指数来解决可预测性期限定量度量的问题。在混沌时间序列中，定义最大可预测时间尺度为系统最大 Lyapunov 指数的倒数，即 $T_{mf} = 1/\lambda_1$ ，它表示状态误差增加一倍所需要的最长时间，并以此作为预测可靠度的指标之一。

4.8 预测

4.8.1 全域法预测

用相空间重构来预测时间序列有多种方法，根据拟合相空间中吸引子的方式分全域法和局域法两种。所谓全域法是将轨迹中的全部点作为拟合对象，找出其规律，即得 $f(\cdot)$ 。由此预测轨迹的走向，这种方法在理论上是可行的，但是实际数据总是有限的以及相空间轨迹可能很复杂，从而不可能求出真正的映射 f 。通常是根据给定的数据构造映射 $\hat{f}: R^m \rightarrow R^m$ ，得到 \hat{f} 逼近理论的 f ，即

$$\sum_{t=0}^N [y(t+1) - \hat{f}(y(t))]^2 \quad (4-8)$$

得到最小值的 $\hat{f}: R^m \rightarrow R^m$ ，当然，具体计算中要规定 \hat{f} 的具体形式。

4.8.2 局域法预测

混沌时间序列预测的基础是状态空间的重构理论^[31,35]。首先按上述方法重构 d 维空间，然后建立当前值 X_i 与预测值 X'_i 的关系式，我们希望找到合适的预测算子 f_i ，使得 $X'_i = f_i(X_i)$ ，其中 X_i 为 d 维向量。对混沌时间序列，通常采用基于邻近点状态的局部预测法。局域预测方法就是要 X_i 在的 k 个邻近似和一个线性映射。假设任何邻近点 X_i 与它的未来状态点 X'_i 有下面的线性关系。

$$X'_i[t] = f_i(X_i[t]) = AX_i[t] + b \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4-9)$$

式 (4-9) 中： A 为元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, d$) 的常量矩阵； b 为元素 b_j ($j = 1, 2, \dots, d$) 的常向量，再确定矩阵 A 和元素 b ，可以把关系式 $X'_i = AX_i + b$ 作为预测函数。要预测的值为 $x'_{i+d-1} = a_{d1}x_i + a_{d2}x_{i+1} + \dots + a_{dd}x_{i+d-1} + b_d$ 为了得到 x'_{i+d-1} ，只要确定系数 a_{di} ($i = 1, 2, \dots, d$) 和 b_d 即可。

4.8.3 基于 Lyapunov 指数的预测模式

根据混沌理论，Lyapunov 指数可以用来表征系统的混沌行为，系统在相空间中相邻轨迹的指数发散，它刻画了相空间中相体积收缩和膨胀的几何特性。因此，Lyapunov 指数是很好的预报参数，其预报模式如下式 (4-10)

$$2^{R\lambda_1} = \frac{\|Y(t_m + T) - Y_{nbt}(t + T)\|}{\|Y(t_m) - Y_{nbt}(t)\|} \quad (4-10)$$

其中， $M = N - (m - 1) * \tau$ ， R 为步长， T 为系统提前预报的时间。 $Y(t_m + T)$ 是中心点 $Y(t_m)$ 经时间 T 后的演化值， $Y_{nbt}(t + T)$ 是 $Y_{nbt}(t)$ 的最邻近点，即有下式成立

$$Y_{nbt}(t + T) = \left\{ Y(t_i) \mid \min \left\| Y(t_m) - Y(t_i) \right\| \right\} \quad i = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (4-11)$$

显然，只要 $T \leq \tau$ ，则 $Y(t_m + T)$ 中只有一个分量。 $x(t_N + T)$ 是未知的，而其余 $(m - 1)$ 个分量都是已知的，有上式即可解出预测值 $x(t_N + T)$ 。

4.9 小结

我们遇到的观测数据中，许多具有确定性成分，同时又具有随机性成分，混沌为确定性论与随机性论架起了连接的桥梁。混沌具有对初值的敏感性，通过关联维数的提取使得混沌吸引子在什么样的高维空间可以被恢复；通过 Lyapunov 指数计算来判断系统的混沌行为，混沌行为确定后，就利用 Lyapunov 指数、局域法预测和全域法进行预测。但局域法预测较全域法和 Lyapunov 指数预测复杂，而且预测的结果较接近。所以实际应用中偏重于全域法和 Lyapunov 指数预测。

第五章 应用时间序列对路基稳定与沉降进行预测

在修建高速公路（尤其是软土路基）时，往往是通过当天的沉降来指导施工，工程的施工进度往往显得很被动。如何确定超载强度，如何较早的知道填筑的时间、填土的厚度，预估预压期时间，如何知道最佳卸载时机，将直接影响到公路的质量、工期、造价等。准确地预测这一时机，这便是短期预报的问题。查阅大量的文献显示，以前的学者在路堤沉降的短期预报上所作的工作较少。有些学者虽通过沉降的规律出发提出各种沉降模型，但是并不能真正反映路基沉降的规律。作者从实测沉降数据出发，利用数据与数据之间的关系，充来建立数据模型。

5.1 工程概况

广梧高速公路马安至河口段起点位于高要市马安镇鸡肾岗（接广肇高速终点 k61+412.5），经马安、白诸、思劳、安塘，终于云浮市河口镇田心村，全长 37.312km，路线基本上东西向。该路线行政区划属肇庆市高要市和云浮市，全线共分为六个合同段，分别为第一合同段 GZK61+412.5 ~ GZK61+975.539、K0+000 ~ K0+620、第二合同段 K0+620 ~ K9+080、第三合同段 K9+080 ~ K18+100、第四合同段 K18+100 ~ K24+150、第五合同段 K24+150 ~ K30+160、第六合同段 K30+160 ~ K36+760。广梧高速公路马安至河口段软土分布广，空间分布非常不均匀，软土性质较差，有机质含量高，在路基高度较大的情况下，会产生较严重的稳定问题、不均匀沉降问题、沉降完成缓慢等问题。本项目主要对第二、三合同段的重点监测断面及某些普通断面的监测资料进行分析和研究。

按照省、集团等要求，该段高速公路工期缩短至 18 个月左右。而且软土地基分布较多，如何确保软基路段和深路堑快速稳定的施工是确保，以及工程完工后路基沉降对路面及行车舒适安全等问题是该条高速公路按期、优质地完成的关键因素之一。

5.1.1 K11+560 设计情况

设计高程 19.088 m, 地面高程 12.870 m, 路基填土高度 $H_t=6.22$ m。路基的处理方式采用袋装砂井+土工格栅一层, 路基左侧反压。袋装砂井的直径为 7 cm, 间距 $S=1.8$ m, 打入土层的深度 $L=18.1$ m; 砂垫层的厚度 0.3 m, 宽出路基 1.5 m。

K11+560 是桥头与软土路基的连接部分, 对于路基沉降的要求严格。在工程中对这一地段采用管桩对地基进行加固处理。管桩应用在高速公路上比较少见, 没有工程实践经验可供借鉴, 而且软土地质情况复杂, 从理论上(包括规范上的双曲线预测法、三点法、沉降速率法还有星野法等)都很难较准确的预测各时期的沉降。实测数据能够直接反映路基沉降规律, 通过对数据进行处理可以得到较理想的预测效果。

5.1.2 K11+560 断面地质情况

①、素填土: 0~2.3 m, 上部 0~0.5 m 由中砂组成, 浅黄色, 稍湿, 松散; 下部 0.5~2.3 m 由亚粘土组成, 稍湿~很湿, 稍经压实。

②、淤泥质粉细砂: 2.3~11.0 m, 灰色, 局部灰黄色, 饱和, 含少量粉细砂、粘粒及腐殖质。

③、亚粘土: 11.0~14.0 m, 浅黄~浅黄色, 饱和, 软可塑, 具砂感, 土质粘, 粘性较强。

5.1.3 K11+560 沉降的形式与数据

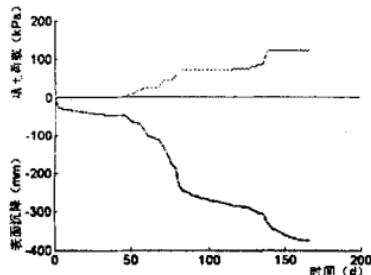


图 5-1 表面沉降、荷载随时间的变化关系

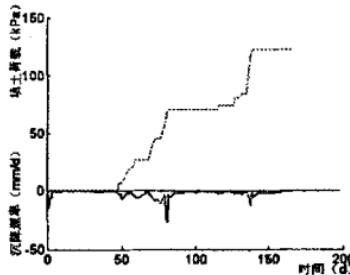


图 5-2 沉降速率、荷载随时间的变化关系

表 5-1 K11+560 的沉降资料 (填土期间) *

观测日期	本期沉降 (mm)	累计沉降 (mm)	沉降速率 (mm/d)	累计填土 (m)	累计荷载 (kPa)	观测日期	本期沉降 (mm)	累计沉降 (mm)	沉降速率 (mm/d)	累计填土 (m)	累计荷载 (kPa)
2003-7-1	3	45	1	0	0	2003-9-3	3	275	1	3.7	70.5
2003-7-4	2	47	0.67	0	0	2003-9-6	2	277	0.667	3.7	70.5
2003-7-7	6	53	2	0.3	6.2	2003-9-9	3	280	1	3.7	70.5
2003-7-10	10	63	3.33	0.3	6.2	2003-9-12	3	283	1	3.7	70.5
2003-7-13	4	67	1.33	1	18.1	2003-9-15	3	286	1	3.9	74.4
2003-7-16	3	70	1	1	18.1	2003-9-18	1	287	0.333	3.9	74.4
2003-7-19	18	88	6	1.4	26	2003-9-21	1	288	0.333	3.9	74.4
2003-7-22	13	101	4.33	1.4	26	2003-9-24	3	291	1	3.9	74.4
2003-7-25	9	110	3	1.4	26	2003-9-27	6	297	2	4.2	80.5
2003-7-28	4	114	1.33	1.4	26	2003-9-30	7	304	2.333	4.4	84.5
2003-8-1	26	140	8.67	2.4	44.8	2003-10-3	0	304	0	4.4	84.5
2003-8-4	24	164	8	2.4	44.8	2003-10-6	26	329	8.667	6.1	116
2003-8-7	19	183	6.33	3	57.2	2003-10-9	12	341	4	6.4	122
2003-8-10	52	235	17.3	3.7	70.5	2003-10-12	8	349	2.667	6.4	122
2003-8-13	8	243	2.67	3.7	70.5	2003-10-15	7	356	2.333	6.4	122
2003-8-16	7	250	2.33	3.7	70.5	2003-10-18	5	361	1.667	6.4	122
2003-8-19	9	259	3	3.7	70.5	2003-10-21	4	365	1.333	6.4	122
2003-8-22	4	263	1.33	3.7	70.5	2003-10-24	3	368	1	6.4	122
2003-8-25	2	265	0.67	3.7	70.5	2003-10-27	2	370	0.667	6.4	122
2003-8-28	3	268	1	3.7	70.5	2003-10-30	2	372	0.667	6.4	122
2003-9-0	4	272	1.33	3.7	70.5	2003-11-3	3	376	1	6.4	122

(*注: 资料来源于广梧高速公路监测报告, 广东省航盛工程有限公司)

从沉降—时间曲线图 5-1、图 5-2 可知, 填土初期, 在路基在初始荷载作用下有一个瞬时沉降, 但在荷载变化不大的情况下, 沉降很快稳定。随着填土高度的增加, 沉降量迅速增大: 在静载期, 沉降速率减小, 逐渐稳定下来。在静载期尤其是在底基层或精加工完成以后, 外部荷载比较稳定, 变化幅度不是很大的情况下, 沉降量随时间的变化呈现出了一定的规律, 表面沉降—时间曲线也有了一定的特性。当填土荷载累计在 3m 左右的时候, 沉降速率就会出现一个较大值。

5.2 利用时间序列对 K11+560 沉降进行分析

很多学者对沉降—时间曲线作了深入的研究，多数人认为沉降量随时间的变化呈双曲线关系或指数关系；但也有人认为呈其他特性，如泊松曲线、对数曲线、抛物线。也有学者把整个沉降—时间曲线利用不同的函数形式分段进行拟合；然而并不能很好反映沉降与时间的变化规律。

利用时间序列对 K11+560 沉降进行分析，从图 5-1 来看表面沉降来明显有着增长的趋势，可以有两种方法来对它进行处理。一种是采用差分处理；第二种是采用叠合模型进行处理。

5.2.1 采用差分处理的方法

路基表面沉降不具有平稳性，时间序列建模时要求模型是具有平稳的，非平稳性通过转化可得平稳性。用一次差分把表面沉降转化为沉降速率问题，经分析沉降速率具有平稳性，见图 5-2。非平稳性模型 $ARIMA(p,d,q)$ 经过一次差分 ($d=1$) 转化为 $ARMA(p,q)$ 。为了便于计算自相关系数，便于建模，将数据进行标准化处理。公式如下：

$$\tilde{x} \approx \frac{[x_t - E(x)]}{\sqrt{D(x)}} = \frac{x_t - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k}{\sqrt{D(x)}}$$

其中 $E(x)$ 为序列均值， $D(x)$ 为序列方差

对沉降速率进行标准化处理后的数据

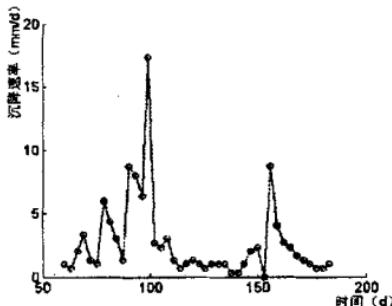


图 5-3 沉降速率随时间的变化图

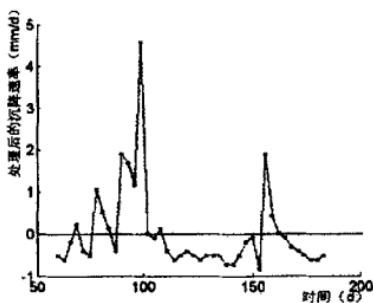


图 5-4 处理以后的沉降速率随时间的变化图

表 5-2 标准化处理后的数据

序号	沉降速率数 值 (mm/d)	序号	沉降速率数 值 (mm/d)	序号	沉降速率数 值 (mm/d)
1	-0.5147	15	0.0063	29	-0.5147
2	-0.6176	16	-0.0997	30	-0.2027
3	-0.2027	17	0.1093	31	-0.0988
4	0.2122	18	-0.4117	32	-0.8266
5	-0.4117	19	-0.6176	33	1.8773
6	-0.5147	20	-0.5147	34	0.4213
7	1.0452	21	-0.4117	35	0.0054
8	0.5242	22	-0.5147	36	-0.0988
9	0.1093	23	-0.6186	37	-0.3066
10	-0.4117	24	-0.5147	38	-0.4108
11	1.8782	25	-0.5147	39	-0.5147
12	1.6692	26	-0.5147	40	-0.6186
13	1.1482	27	-0.7228	41	-0.6186
14	4.5706	28	-0.7228	42	-0.5147

5.2.2 自相关函数与偏相关函数计算

通过计算可以得到

表 5-3 自相关函数与偏相关函数

序号(ρ_k)	自相关函数值	序号(ρ_k)	自相关函数值	序号(φ_{kk})	偏相关函数值
1	0.3575	11	-0.2390	1	0.3575
2	0.3025	12	-0.2640	2	0.2003
3	0.3340	13	-0.2407	3	0.2101
4	0.0459	14	-0.1911	4	-0.1913
5	-0.0259	15	-0.1932	5	-0.1349
6	-0.0745	16	-0.0975	6	-1.002
7	-0.0216	17	-0.0351	7	0.1341
8	-0.2178	18	0.3919	8	-0.1954
9	-0.2223	19	0.1738	9	-0.1288
10	-0.1487	20	0.1667	10	-0.0472

从表 5-3 的计算结果来看, 自相关函数值是在振动中逐渐减小的, 并不具有截尾的性质, 偏相关函数值从第三步开始就开始减小, 也不具有截尾的性质, 初步判断该样本数据适用 ARMA 模型, 但是阶数还不能够判定。

5.2.3 模型的识别与参数估计

我们已经判断该序列属于 ARMA 模型, 那么我们按照 F 检验的定阶准则从低阶到高阶进行拟合及检验。假如 $n=p+q=4$ 时, 就存在多种可能的模型形式 ($p=1, q=3; p=2, q=2; p=3, q=1$), 对 p, q 不同的值的模型进行比较, 从而确定最适合的模型。Box-Jenkins 认为实际应用中混合模型的阶数 (p, q) 一般都比较低, 因而采用逐个穷举进行模型的挑选是可行的。

通过 FORTRAN 编程进行计算较为方便的, 只要将 p, q 的数值输入计算机, 就会得到相应的参数估计。作者采用 ARMA 模型参数矩估计的方法对 ARMA 模型的参数进行计算。

其中 ARMA (1, 1) 的计算结果如下:

ARMA(1,1) PARAMETERS ESTIMATION:

.8338

sigm=7.374E+00

-.4830E+00

C(1)= -4.830261E-01

Press any key to continue

表 5-4 矩估计方法计算得的参数表

$n=p+q$	p, q 值	计算所得参数(φ, ϑ)			白噪声方差 σ_a^2
$N=2$	$p=1$	0.8338			7.374
	$q=1$	0.4830			
$N=3$	$p=2$	1.042 -0.1267			7.184
	$q=1$	0.6668			
	$p=1$	0.9884			4.923
	$q=2$	0.5982 -0.0290			
$N=4$	$p=3$	0.6307	0.3796	0.3675	7.674
	$q=1$	-0.8178			
	$p=2$	0.4473	0.5104		7.896
	$q=2$	0.6107	0.1342		
	$p=1$	0.1163			7.893
	$q=3$	0.0682	-0.1660	-0.3116	
$N=5$	$p=4$	0.9384	0.0010	0.1545 -0.3142	7.988
	$q=1$	0.5951			
	$p=3$	0.0832	-0.5383	0.4791	8.014
	$q=2$	0.0981	0.7066		
	$p=2$	0.2241	-0.1184		7.918
	$q=3$	0.0393	-0.2527	-0.3220	
	$p=1$	-0.7940			7.936
	$q=4$	0.7727	-0.3244	-0.5038 -0.3279	

从表 5 可以看出方差最小为 ARMA(1,1)模型, 方程的表达式为

$$w_t - 0.8338w_{t-1} = a_t - 0.4830a_{t-1}$$

5.2.4 利用逆函数方法进行拟合

由计算机产生的结果与实测值之间的比较, 结果如下表 5-5:

表 5-5 沉降速率实测值与预测值的对比表

序号	沉降速率		相对误差 (%)	序号	沉降速率		相对误差 (%)
	实测值	预测值			实测值	预测值	
1	0	0	0	22	1	1.39	0.386
2	0.67	2.57	2.84	23	0.67	0.92	0.386
3	2	-0.02	1.01	24	1	0.54	0.464
4	3.33	2.22	0.33	25	1	1.04	0.042
5	1.33	3.82	1.87	26	1	1.02	0.018
6	1	0.95	0.05	27	0.33	1.01	2.026
7	6	0.74	0.88	28	0.33	0.14	0.577
8	4.33	7.36	0.7	29	1	0.25	0.749
9	3	4.43	0.48	30	2	1.16	0.42
10	1.33	2.65	0.99	31	2.33	2.36	0.013
11	8.67	0.69	0.92	32	0.01	2.59	0
12	8	10.55	0.32	33	8.67	-0.58	1.067
13	6.33	8.61	0.36	34	4	10.53	1.633
14	17.3	6.1	0.65	35	2.67	3.67	0.376
15	2.67	20.47	6.66	36	2.33	2.13	0.085
16	2.33	-0.3	1.13	37	1.67	2.01	0.204
17	3	0.97	-0.68	38	1.33	1.33	0.001
18	1.33	2.61	0.96	39	1	1.09	0.092
19	0.67	0.68	0.01	40	0.67	0.8	0.197
20	1	0.19	0.81	41	0.67	0.48	0.277
21	1.33	0.89	0.33	42	1	0.59	0.412

从表 5-5 可以看出沉降速率有时的误差较大; 有时误差较小, 最小为 1 %。这是由于拟合值与实测值有一个滞后的过程, 所以有时的拟合值误差偏大, 但是沉降速率的基本形式还是很好的反映出来了。

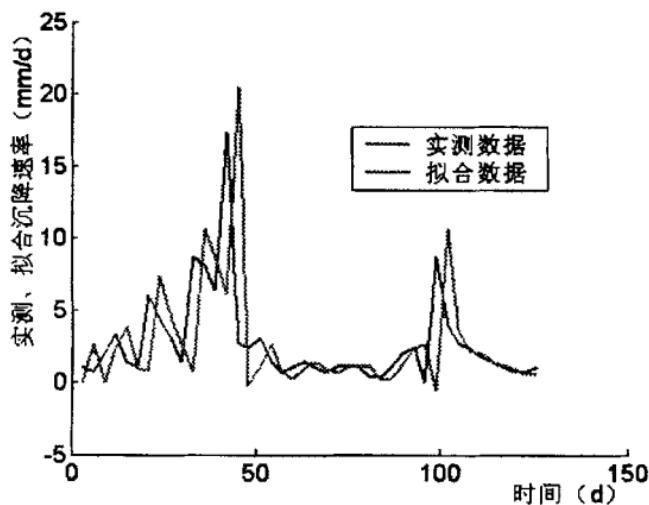


图 5-5 平沉降速率实测值与预测值的对比图

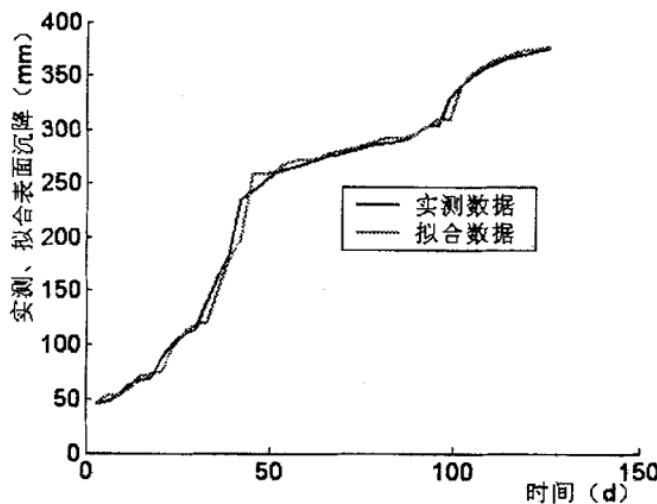


图 5-6 表面沉降的实测值与预测值的对比图

拟合所得的数据按照平稳化处理公式反推回来, 得到的表面沉降, 其预测值与实测值之间的比较见下表 5-6:

表 5-6 表面沉降的真值与预测值的对比表

序号	表面沉降		相对误差 (%)	序号	表面沉降		相对误差 (%)
	实测值	预测值			实测值	预测值	
1	45	45.00	0	22	275	277.69	0.01
2	47	52.71	0.122	23	277	280.46	0.012
3	53	52.66	0.006	24	280	282.07	0.007
4	63	59.33	0.058	25	283	285.2	0.008
5	67	70.8	0.057	26	286	288.25	0.008
6	70	73.66	0.052	27	287	291.27	0.015
7	88	75.88	0.138	28	288	291.7	0.013
8	101	97.95	0.03	29	291	292.45	0.005
9	110	111.22	0.011	30	297	295.93	0.004
10	114	119.17	0.045	31	304	303.02	0.003
11	140	121.24	0.134	32	304	310.78	0.022
12	164	152.88	0.068	33	329	309.05	0.061
13	183	178.71	0.023	34	341	340.65	0.001
14	235	197.02	0.162	35	349	351.66	0.008
15	243	258.42	0.063	36	356	358.06	0.006
16	250	257.53	0.03	37	361	364.08	0.009
17	259	260.42	0.005	38	365	368.07	0.008
18	263	268.25	0.02	39	368	371.35	0.009
19	265	270.28	0.02	40	370	373.74	0.01
20	268	270.85	0.011	41	372	375.19	0.009
21	272	273.53	0.006	42	376	376.96	0.003

从表 5-6 可以看出实测值与预测值之间的误差较平稳化处理后的沉降速率真值与预测值的误差有明显的下降。最大的误差为 16.2%, 最小的误差为 0.1%。实测值与预测值的差值有减小的趋势, 由最大的误差 38 mm 减小到 0.96 mm, 这是由于时间序列数据愈多, 拟合、预测的效果愈好。从图 5-6 可以看出, 沉降的拟合还是能够很好反映出沉降与荷载之间的变化规律。

5.3 预测及加载

由于是经过一次差分的, 所以 $w_t = x_t - x_{t-1}$; 从 $t = 42$ 开始, 假设 $a_{t-2} = 0$, 则

$$\begin{aligned} a_{t-1} &= 0.4830a_{t-2} + (x_{t-1} - x_{t-2}) - 0.8338(x_{t-2} - x_{t-3}) \\ &= (372 - 370) - 0.8338 \times (370 - 368) = 0.3324 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_t &= 0.4830a_{t-1} + (x_t - x_{t-1}) - 0.8338(x_{t-1} - x_{t-2}) \\ &= 0.4830 \times (0.3324) + 4 - 0.8338 \times 2 = 2.4929 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{t+1} - x_t &= 0.8338(x_t - x_{t-1}) + a_{t+1} - 0.4830a_t \\ &= 0.8338 \times 4 - 0.4830 \times (2.4929) = 2.1311 \end{aligned}$$

预测值 $x_{t+1} = 376 + 2.311 = 378.311 \text{ mm}$

同理可以计算未来 8 天的沉降

表 5-7 未来 8 天的预测结果

日期	2003-11-4	2003-11-5	2003-11-6	2003-11-7	2003-11-8	2003-11-9	2003-11-10	2003-11-11	2003-11-12
预测值 (mm)	378.31	379.22	380.64	381.83	382.86	383.63	384.12	384.55	385.01

可以看出: 未来的八天内每天的沉降量不大, 沉降速率最大不超过 3 mm, 且沉降比较均匀。因此, 可以加载。

5.4 小结

1. 从时间序列对沉降速率拟合来看, 有一个滞后的过程, 所以预测的精度不高, 但是还是能够很好的反映沉降速率的基本规律; 从时间序列对表面沉降来看, 拟合的效果很好。

2. 使用时间序列的预测是一个动态的预测模式, 而且影响因素必须是不变的, 或者是小量变化, 在填土期间, 数据包涵了荷载这一信息, 变化较大; 但在荷载填筑完成后, 荷载比较稳定, 所以本文时间序列只是对沉降作短期

的预测，不能作长期的预测。

3.时间序列要求数据是等时间隔的，必须对原始数据进行补充，补充数据采用多项式插值进行内插，从而保证监测数据序列是等时间间隔。

4.表面沉降有明显的增长趋势，而且形式复杂，很难用线性或指数等趋向性函数消去增长趋势，而采非平稳时间序列 ARIMA 通过一次差分处理转化平稳时间序列 ARMA，来得方便快捷。

5.从预测的结果可以提前了解路基加载的时间和高度，从而实现对路基填筑动态化施工过程。

6.时间序列的预测精度是比较高的，广泛的应用于各行各业，本章应用时间序列过程复杂，主要应用于重点断面和沉降形式比较复杂，用其他方法无法拟合的断面。

第六章 混沌时间序列在路基工后沉降中的应用

珠江三角洲软土分布广泛、含水量高、压缩性大。在软土深厚的地段用堆载预压法进行高速公路软土地基处理时。由于地基的变形量大，变形期长^[36]，而工期较短，因而工后沉降往往较大，不能满足规范的要求^[37]。

为此，人们研究提出了各种各样的估算方法，目前，计算公路最终沉降的方法有两大类：第一类为根据固结理论，结合各种土的本构模型，计算公路最终沉降量的各种有限元法。如考虑非线性弹性模型及弹塑性模型的有限元法^[38]、考虑粘弹塑性模型的有限元法^{[39][40]}、考虑结构性的损伤模型的有限元法^{[41][42]}、以及大变形固结有限元方法^[43]。但是由于计算参数较多，且一般需通过三轴试验确定，因而在工程设计中难以采用，目前还不可能把有限元法作为每个断面沉降计算的主要方法应用于设计，主要用于重要工程、重点地段的计算。第二类为根据实测资料推算最终沉降量的预测方法，如指数曲线法、双曲线法和高本俊介法以及曾国熙 1975 年改进的高木俊介法^[44]等，这些预测方法难以反映公路沉降与时间的关系。

事实上，路基是一个受岩土体条件控制，并受地形地貌，地下水，地震和人类工程活动等多种因素影响而发展演化的耗散的非线性动力系统，在上述各种因素的共同作用下，系统演化过程可视为一种具有混沌特征的动力系统，在重构相空间中，其运动轨迹收缩到奇怪吸引子，由于混沌系统具有内在规律性和对初值的敏感依赖性，我们可以根据路基变形的历史数据记录，在相对长时期内对路基变形破坏进行预测，这种路基变形的非线性混沌模型预测比其它一般统计方法的预测效果要好。

采用数据之间的关系，利用混沌时间序列的最大 Lyapunov 指数和全域法来预测路基的最终沉降。从预测的结果与其它常规方法进行比较，最大 Lyapunov 指数和全域法的预测是可行，结果也是比较令人满意的。同时由于其它的一些方法往往都曾在一些缺点，预测的结果彼此相差很大，工程上往往是利用几种进行综合评估，以便得出与工程实际相符合的结果。本文的最大 Lyapunov 指数和全域法的预测方法，给评估过程增加了新的方法。

6.1 工程实例分析

对 K11+560 进行分析：路基的基本情况：

设计高程 19.088m, 地面高程 12.870m, 路基设计高度 $H_d=6.218m$ 。
加载和卸载的时期的沉降曲线如下图 6-1。

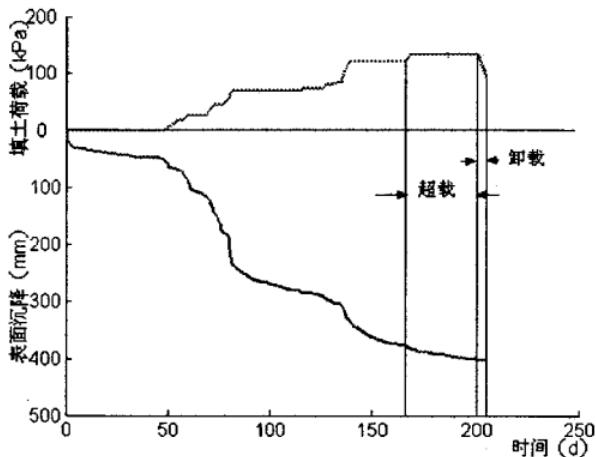


图 6-1 K11+560 中线超载卸载的表面沉降与填土荷载的关系曲线

表 6-1 K11+560 中线超载前沉降和荷载的数据

观测日期	2003-10-7	2003-10-8	2003-10-9	2003-10-10	2003-10-11	2003-10-13	2003-10-17	2003-10-21	2003-10-23	2003-10-26	2003-10-27	2003-11-3
差天数(d)	1	1	1	1	1	2	4	4	2	3	1	7
累计荷载(kPa)	122.0	122.0	122.0	122.0	122.0	122.0	122.0	122.0	122.0	122.0	122.0	122.0
累计沉降(mm)	331.0	337.0	341.0	345.0	346.0	350.0	359.0	365.0	368.0	373.0	373.0	376.0

表 6-2 K11+560 中线超载时沉降和荷载的数据

观测日期	2003-11-5	2003-11-9	2003-11-14	2003-11-19	2003-11-22	2003-11-25	2003-11-28	2003-12-2	2003-12-5	2003-12-8
累计沉降 (mm)	380.0	386.0	389.0	392.0	393.0	395.0	397.6	398.2	400.4	401.3
差天数 (d)	2	4	5	5	3	3	3	4	3	3
累计荷载 (kPa)	134.4	134.4	134.4	134.4	134.4	134.4	134.4	134.4	134.4	134.4

6.2 多项式插值进行内插值

将监测数据进行整理,取 $\Delta t = 1d$, 遇到没有监测数据时, 采用多项式插值进行内插^[9], 从而保证监测数据序列是等时间间隔。如下表 6-3、6-4 和下图 6-2、6-3。

表 6-3 超载前补充的数据

日期	累计沉降 (mm)	日期	累计沉降 (mm)
2003-10-7	331	2003-10-21	365
2003-10-8	337	2003-10-22	367
2003-10-9	341	2003-10-23	368
2003-10-10	345	2003-10-24	369
2003-10-11	346	2003-10-25	370
2003-10-12	349	2003-10-26	373
2003-10-13	350	2003-10-27	373
2003-10-14	354	2003-10-28	373
2003-10-15	356	2003-10-29	374
2003-10-16	358	2003-10-30	374
2003-10-17	359	2003-10-31	375
2003-10-18	361	2003-11-1	376
2003-10-19	363	2003-11-2	376
2003-10-20	365	2003-11-3	376

表 6-4 超载时补充的数据

日期	累计沉降 (mm)	日期	累计沉降 (mm)
2003-11-5	380.0	2003-11-23	394.6
2003-11-6	380.9	2003-11-24	394.6
2003-11-7	381.9	2003-11-25	395.0
2003-11-8	382.9	2003-11-26	395.6
2003-11-9	386.0	2003-11-27	396.1
2003-11-10	384.7	2003-11-28	397.6
2003-11-11	385.6	2003-11-29	397.1
2003-11-12	386.5	2003-11-30	397.5
2003-11-13	387.3	2003-12-1	397.9
2003-11-14	389.0	2003-12-2	398.2
2003-11-15	388.8	2003-12-3	398.8
2003-11-16	389.5	2003-12-4	399.1
2003-11-17	390.3	2003-12-5	400.4
2003-11-18	390.9	2003-12-6	399.9
2003-11-19	392.0	2003-12-7	400.2
2003-11-20	392.2	2003-12-8	401.3
2003-11-21	392.8	2003-12-9	400.9
2003-11-22	393.0		

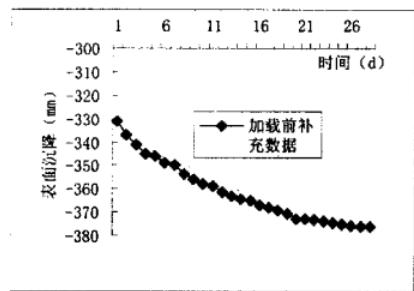


图 6-2 超载前补充数据图

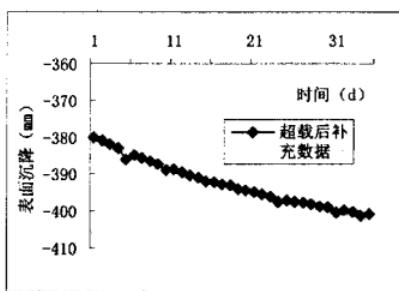


图 6-3 超载时补充数据图

6.3 混沌时间序列对 K11+560 进行

同时将后一天的沉降减去前一天的沉降, 利用混沌时间序列对 K11+560 分析。利超载前和超载时的 $\log C(r) \sim \log(r)$ 曲线, 如下图 6-4、6-5。

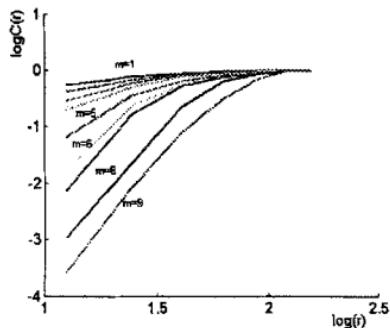


图 6-4 超载前不同 m 的 $\log C(r)$ - $\log(r)$ 关系

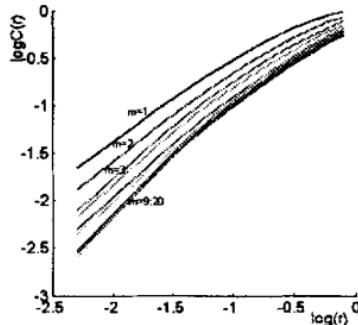


图 6-5 超载时不同 m 的 $\log C(r)$ - $\log(r)$ 关系

表 6-5 超载前和超载后混沌时间序列的计算

路基填筑情况	最大 Lyapunov 指数 λ	延迟时间 τ (d)	时间间隔 t (d)	关联维数 d	嵌入维数 m
超载前	0.00457	1	1	0.02	1
超载时	0.00332	1	1	0.4	1

6.4 允许工后沉降 $[s_r]$ 卸载标准

当根据沉降监测资料推算的剩余沉降小于允许工后沉降 $[s_r]$ 时, 可以卸载。《公路软土地基路堤设计与施工技术规范》(JTJ017-96)^[45] 规定, 在路面设计使用年限内 (通常为 15 yr), 允许工后沉降 $[s_r]$ 为: 一般路基段 < 0.3 m, 桥头段 (约 30m 长度范围) < 0.1 m, 涵洞和机耕通道处 < 0.2 m。允许工后沉降 $[s_r]$ 通常由设计单位或专家小组根据地区经验和高速公路的具体情况提出。

6.5 最终沉降预测法

6.5.1 利用 Lyapunov 指数进行预测

超载前的最大可预测时间尺度 $1/0.00457=218(d)$, 预测的最终沉降为 387 mm; 超载完成后最大可预报时间尺度 $1/0.00332=301(d)$, 预测的最终沉降为 417 mm。由于路基沉降的次固结的原因, 路基沉降是一个长时间过程, 而次固结沉降所占的比例较小, 有时候可以在工后沉降预测中忽略不计。从预测的结果来看, 与上述几种方法还是比较接近的, 所以可以认为路基沉降的主要固结在 $218d$ 内已经完成, 可以认为未来 $218d$ 的预测沉降数据和 $301d$ 的预测沉降数据就是路基的最终沉降; 但是不是所有的次固结沉降都可以忽略不计的, 有时候次固结沉降在总沉降中所占的比例也很大, 这时候就要把所预测的沉降当成已知的沉降数据来进行跟踪预测, 当然预测的精度有所降低。

6.5.2 全域法预测

由相空间重构可得 $m=1$, $\tau=1$; 建立 $X(n)$ 与 $X(n+1)$ 之间的关系, 可以发现它们之间比较符合一次函数。则

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

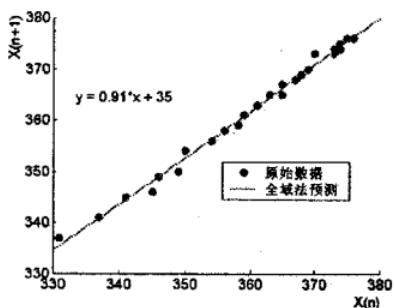


图 6-6 超载前的全域旅游法预测图

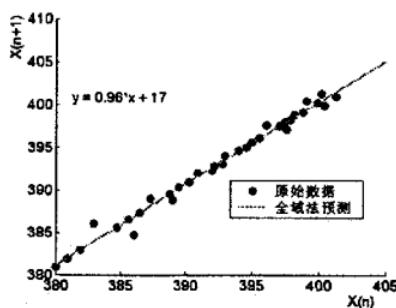


图 6-7 超载时的全域旅游法预测图

超载前 $a=35$, $b=0.91$; 通过迭代可以预测 218 (d) 时的沉降为 388.9 mm;
超载时 $a=17$, $b=0.96$; 通过迭代可以预测 301 (d) 时的沉降为 424.9 mm。

6.5.3 双曲线法预测最终沉降^[46]

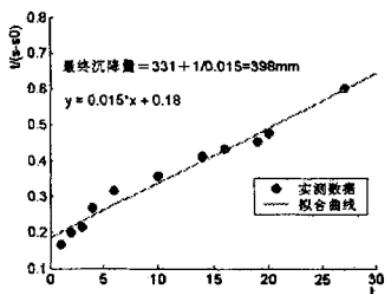


图 6-8 超载前双曲线法预测图

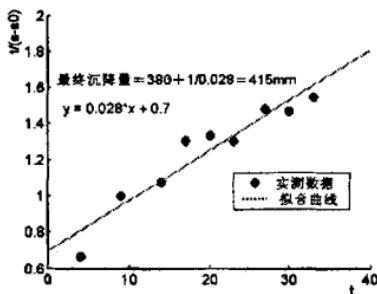


图 6-9 超载时双曲线法预测图

6.5.4 三点法预测最终沉降^[47]

表 6-6 K11+560 超载前沉降数据 (三点法)

符 号	S_1	S_2	S_3
沉降数据 (mm)	331.0	359	373
天 数 (d)	0.0	10	20

按照公式: $S_{\infty} = \frac{S_3(S_2 - S_1) - S_2(S_3 - S_1)}{(S_2 - S_1) - (S_3 - S_1)}$

由计算可得(超载前): $S_{\infty} = 387$ mm

表 6-7 K11+560 超载时沉降数据 (三点法)

符 号	S_1	S_2	S_3
沉降数据 (mm)	380.0	393	400.4
天 数 (d)	0.0	17	34

同理可以得到 (超载时): $S_{\infty} = 410.2$ mm

6.5.5 星野法预测最终沉降^[48]

按照公式：

$$\frac{t-t_0}{(S-S_0)^2} = \frac{1}{A^2 K^2} - \frac{t-t_0}{A^2}$$

可得 $S_\infty = S_0 + A$

超载前： $S_\infty = 373\text{mm}$

超载后： $S_\infty = 405.8\text{mm}$

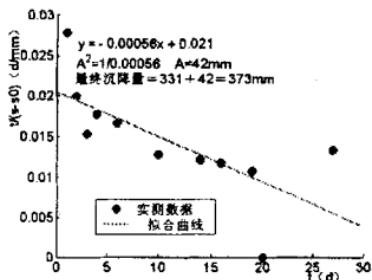


图 6-10 超载前星野法预测图

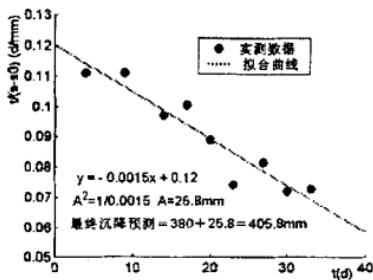


图 6-11 超载时星野法预测图

综合上述几种方法可以得到混沌时间序列拟合较好，由于混沌时间序列在使用过程中补充了一些数据，这不免给模型带来了一些错误信息，所以预测的结果还不能完全保证与实际沉降相符合。所以要采取几种方法进行综合评估。

评估的结果选取

超载前： $S_\infty = 388\text{ mm}$

超载后： $S_\infty = 420\text{ mm}$

6.6 卸载

表 6-8 路基基本情况

H_d (m)	T_r (m)	T_{re} (m)	T_{ve} (m)	H_e (m)
5.488	0.72	1.05	0.86	6.678

按照公式: $H_e = H_d - T_r + T_{re} + T_{ve}$ 计算得到 $H_e = 6.678$ m

$H_t = 7.08$ m (超载时填土的高度)

由公式 $H_\infty = H_t - (S_\infty - S_t)$ 可得 $H_\infty = 7.08 - (0.420 - 0.401) = 7.066$ m

可以得到使用荷载作用下的最终沉降量由公式 $S_e = \frac{H_e}{H_\infty} S_\infty$

$S_e = 6.678 / 7.066 \times 420 = 399.7$ mm.

由式 $S_r = S_e - S_t$, 得: $S_r = 399.7 - 380 = 19.7$ mm $< [S_r] = 100$ mm.

可以进行卸载。

最终沉降预测法关键是对最终沉降进行预测, 各种方法对最终沉降的预测结果不一样, 有时与实际偏离很多, 这就要对多种方法进行预测。进行综合评判选取较与实际接近的预测结果, 从预测的结果来看混沌时间序列的预测结果较其它方法的预测结果理想。但是有时也不一定可靠, 要综合其它方法合理选取。

6.7 小结

1. 从计算的 Lyapunov 指数来看, 超载前和超载后的沉降具有混沌性质。
2. Lyapunov 指数预测跟全域法预测的结果比较接近, 而且从全域法的预测图形来, 拟合预测的效果较常规方法要好。
3. 经过综合评估确定了超载前和超载时的最终沉降量, 符合卸载标准可以对 K11+560 路段进行卸载。
4. 本章混沌时间的预测的方法不仅适合工程中的位移、沉降预测, 而且也适合其它行业方面的预测。

第七章 结论及展望

7.1 结论

本文对路基沉降预测方面作了些工作，主要包括两个方面：一是在路基填筑期间利用时间序列建立模型对表面沉降拟合，并进行短期预测，使沉降曲线的形式及规律能够准确的利用时间序列模型进行拟合预测成为可能；二是路基填筑完成后利用混沌时间序列来对路基超载前和超载时的最终沉降进行预测，并跟常规的预测方法进行比较，同时在路基卸载的综合评估过程中提供了几种判别方法。

本文的具体研究工作如下：

(1) 根据对时间序列统计规律性的分析，构造拟合它的最佳数据模型非平稳 ARIMA(1,1,1)模型，浓缩时间序列的信息，简化了对时间序列的表示。

(2) 利用拟合的数学模型预测时间序列未来的可能值，从预测的结果可以提前了解路基加载的时间和高度，从而实现对路基填筑动态化信息法施工。给出预报结果的精度分析，说明时间序列具有精度高，预测可靠等特点。

(3) 根据拟合的数学模型模拟出时间序列，用于分析和优化。对现场施工进行动态优化调节。保证了在路基填筑施工期间能够较主动的进行施工组织设计，可以节省时间和资金。

(4) 从计算的 Lyapunov 指数来看，K11+560 路段超载前和超载时的沉降具有混沌性质。

(5) 通过工程实例分析，Lyapunov 指数预测和全域法预测的结果比较接近，而且从全域法的预测图形来，拟合预测的效果较常规方法要好。经过综合评估确定了超载前和超载时的最终沉降量，符合卸载标准可以对 K11+560 路段进行卸载。

(6) 本章时间序列与混沌时间序列的预测的方法不仅适合工程中的位移、沉降预测，而且也适合其它行业方面的预测。

7.2 展望

(1) 利用时间序列进行预测的过程较为复杂, 只能对路基填筑中的沉降量大、沉降快的重点断面进行预测, 而且时间序列理论较复杂, 要求操作人员具有较高的专业知识, 所以时间序列正在要真正应用于路基沉降方面, 还得利用计算机编制成专业的计算软件才能够应用于工程中。

(2) 影响路基沉降的因素很多, 有些是不确定的, 有些是不可知的, 要能够更好的预测路基沉降还得对时间序列的理论进行研究。近几年来时间序列逐渐向灰色模型、神经网络等方面发展, 同时时间序列从一元非线性向多元非线性时间序列发展也是比较热门的话题。

(3) 全域法预测和 Lyapunov 指数预测是利用未来一段时间的沉降来代替路基的最终沉降, 所以全域法和 Lyapunov 指数的长期预测并不是软土路基的最终沉降预测, 要全域法预测和 Lyapunov 指数预测能够进行最终预测, 还得对混沌时间序列的理论工作进行分析研究。

(4) 预测只是对软基处理结果好坏的一种评价手段, 要减少路基沉降还得对软基处理的方法进行研究, 得出一种适合软基的处理方法。

参考文献

- 【1】张诚厚, 袁文明, 戴济群. 高速公路软基处理. 北京:中国建筑工业出版社, 1997
- 【2】经绯, 刘松玉, 邵光辉. 软土地基上路堤沉降变形特征分析. 岩土工程学报, 2001. 23(6):728-730
- 【3】张惠明, 徐玉胜, 曾巧玲. 深圳软土变形特性与工后沉降. 岩土工程学报, 2002. 24(4):509-514
- 【4】刘金元, 杨春林, 吴正文. 时间序列方法在观测资料分析中的应用. 河海大学学报, 1999. 27(2):116-118
- 【5】龚晓南. 高速公路软土地基处理技术. 高速公路软弱地基处理理论与实践, 1998
- 【6】许永明, 徐泽中. 一种预测路基工后沉降量的方法. 河海大学学报, 2000. 28(5): 111-113
- 【7】张诚厚 袁文明 戴济群. 高速公路软基处理. 中国建筑工业出版社, 1997
- 【9】张玉祥. 岩土工程时间序列预报问题初探. 岩石力学与工程学报, 1998. 17(5): 552-558
- 【10】项静恬, 杜金观, 史久思. 动态数据处理—时间序列分析. 北京: 气象出版社, 1986
- 【11】史代敏. 经济时间序列确定趋势与随机趋势辨析. 天津商学院学报, 2001. 21 (6):12-14
- 【12】王立杰, 刘志东. 经济时间序列分析技术在煤炭价格预测中的应用. 煤炭学报, 2001 26(1):109-112
- 【13】Jayawardena A W 等. 降雨和径流时间序列的混沌分析与预测. 人民长江, 1996. 27(6):43-45
- 【14】陈素维. 时间序列在建筑结构振动分析中的应用. 西安工程科技学院学报, 2003. 17(2):179-181
- 【15】刘永熙, 闻邦椿, 杨积东, 郭立新. 投资时间序列的混沌分维研究. 东北大学学报(自然科学版), 2001. 22(5):524-526
- 【16】耿显民. 时间序列价格模型及其应用. 应用数学学报, 2002. 25(2):372-377
- 【17】付义祥, 刘志强. 边坡位移的混沌时间序列分析方法及应用研究. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2003. 27(4):473-476

- 【18】刘沫宇, 迟秀文等. 时间序列分析法与边坡位移预报. 武汉工业大学学报. 1995.(3):46-49
- 【19】吕培印, 杨锦军, 陈伟. 时间序列分析法预报建筑物地基沉降量. 辽宁工学院学报, 1996. 16(4):27-30
- 【20】朱永全, 景诗庭, 张清. 时间序列分析在隧道施工监测中的应用. 岩石力学与工程学报, 1996. 15(1):353-359
- 【21】郑璐石, 任克亮. 时间序列分析在岩体开挖位移监测中的应用. 宁夏大学学报(自然科学版), 1998. 19(2):123-124
- 【22】徐浩峰, 应宏伟, 朱向荣. 时间序列分析方法预报基坑支撑轴力. 水力学报, 2004.15(1):05-108
- 【23】吴俐民. 时间序列系统辨识在大坝变形分析中的应用研究. 四川测绘, 1993.16(4):147-153
- 【24】李志芬, 张家权. 平稳时间序列法的分析和应用. 东北水利水电, 2001. 19(3):25-26
- 【25】常学将, 陈敏, 王明生. 时间序列分析. 北京: 高等教育出版社, 1993
- 【26】陈兆国. 时间序列及其谱分析. 北京: 科学出版社, 1988
- 【27】S.M.潘迪特, 吴宪民. 时间序列及系统分析与应用. 北京: 机械工业出版社, 1988
- 【28】杨位钦, 顾岚. 时间序列分析与动态数据建模. 北京: 工业学院出版社, 1986
- 【29】吴今培. 实用时间序列. 湖南: 科学技术出版社, 1989
- 【30】安鸿志, 陈兆国, 杜金观, 潘一民. 时间序列的分析与应用. 北京: 科学出版社, 1983
- 【31】盛昭瀚, 马军海. 管理科学: 面对复杂性 II—经济时序动力系统最佳时序采样间隔分析研究. 管理科学学报, 2000.3(1): 100—104
- 【32】黄润生. 混沌及其应用. 武汉: 武汉大学出版社, 2000
- 【33】吕金虎, 路君安, 陈士华. 混沌时间序列分析及其应用. 武汉: 武汉大学出版社, 2002
- 【34】M.T.Rosenstein,J.J.couins and C.J.Deluca. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents form small data sets, Physica D. 1993.65:117-134
- 【35】CasdagliM. Nonlinear prediction of chaotic time series. PhysicaD35, 1989,335
- 【36】常保平. 软基路堤沉降历程预报的改进方法. 中国公路学报, 1993. 8(3):5-9

- 【37】刘增贤. 软基工后沉降的观测与分析. 中外公路, 2002.22(2):33-35
- 【38】殷宗泽等, 沪宁高速公路地基沉降有限元计算分析, 水利水电科技进展, 1998, 18(2):22-26
- 【39】赵维炳等, 粘土塑性本构模型及其参数测定, 中国青年学者岩土工程力学与应用
论合论文集, 1994
- 【40】刘和无, 超长水泥土搅拌桩复合地基性状研究, 东南大学硕士论文, 1998
- 【41】沈珠江, 结构性粘土的弹塑性损伤模型, 岩土工程学报, 1993. 15(3):21-28
- 【42】施建勇等, 考虑损伤的软土地基变形分析, 岩土工程学报, 1998. 20(2):2-5
- 【43】谢新宇等, 饱和土体一维大变形固结理论新进展, 岩土工程学报, 1997. 19(4):30-38
- 【44】洛秋元等、排水固结法, (地基处理手册), 北京: 中国建筑工业出版社, 1986
- 【45】中华人民共和国交通部. 公路软土地基路堤设计与施工技术规范 (JTJ017-96) .
北京: 人民交通出版社, 1996
- 【46】赵明华. 土力学与基础工程. 武汉:武汉工业大学出版社, 2001
- 【47】Asaoka A. Observational procedure of settlement prediction. Soils and foundations ,
1978,18(4):30-34
- 【48】河海大学. 交通土建软土地基工程手册. 人民交通出版社, 2001

致 谢

在本论文得以顺利完成之际，我衷心地感谢我的导师张季如教授，在我的论文写作过程中，倾注了大量的心血。张季如教授渊博的知识，严谨的治学态度和丰富的人生哲理使我终身收益。三年来的学习期间，无论是学习上，工作上还是生活上都给与了极大的帮助。使我在一次次的迷茫中能够正确的摆正自己的位置；张季如教授既是我尊敬的老师，同时又是我生活中的朋友。衷心地感谢张季如教授！

衷心地感谢夏元友教授为论文提供了项目资金赞助，使得论文能够顺利的完成，同时在论文的写作期间给予了指导。

感谢广梧高速工程有限公司的领导的大力支持和关心。

感谢广东省航盛工程有限公司岩土分公司的领导的关心和帮助。

感谢谢全敏副教授给予论文提供宝贵意见和帮助。

感谢朱瑞赓教授、李新平教授、管昌生教授、程康教授、冯仲仁副教授、胡春林副教授、祝文化副研究员、孙吉主副教授、申翊老师、王协群老师的关心和帮助。

感谢文建华、张雄兵、胡在良、芮瑞、郑筱彦等师兄弟的关心和帮助。

感谢各位评委和专家对本文的评阅和指正。

感谢我的家人和女友黄丽的大力支持和奉献。

最后再一次衷心地感谢所有关心和帮助我的老师和同学以及亲人使得我能够顺利地完成学业！