

《信号与系统》(第3版)

# 习题解析

课后答案网 [www.khdaw.com](http://www.khdaw.com)

高等教育出版社

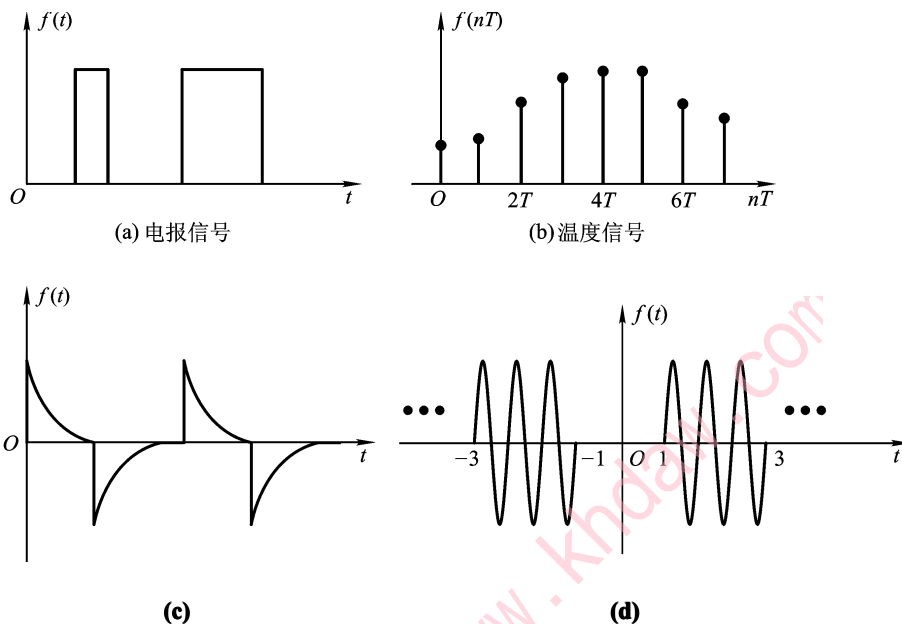
## 目 录

|                |    |
|----------------|----|
| 第 1 章习题解析..... | 2  |
| 第 2 章习题解析..... | 6  |
| 第 3 章习题解析..... | 16 |
| 第 4 章习题解析..... | 23 |
| 第 5 章习题解析..... | 31 |
| 第 6 章习题解析..... | 41 |
| 第 7 章习题解析..... | 49 |
| 第 8 章习题解析..... | 55 |

课后答案网 [www.khdaw.com](http://www.khdaw.com)

# 第 1 章习题解析

**1-1** 题 1-1 图示信号中，哪些是连续信号？哪些是离散信号？哪些是周期信号？哪些是非周期信号？哪些是有始信号？

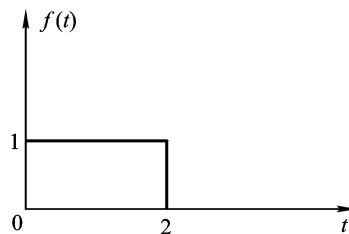


题 1-1 图

**解** (a)、(c)、(d)为连续信号；(b)为离散信号；(d)为周期信号；其余为非周期信号；(a)、(b)、(c)为有始（因果）信号。

**1-2** 给定题 1-2 图示信号  $f(t)$ ，试画出下列信号的波形。[提示： $f(2t)$ 表示将  $f(t)$ 波形压缩， $f(\frac{t}{2})$ 表示将  $f(t)$ 波形展宽。]

- (a)  $2f(t - 2)$
- (b)  $f(2t)$
- (c)  $f(\frac{t}{2})$
- (d)  $f(-t + 1)$



题 1-2 图

**解** 以上各函数的波形如图 p1-2 所示。

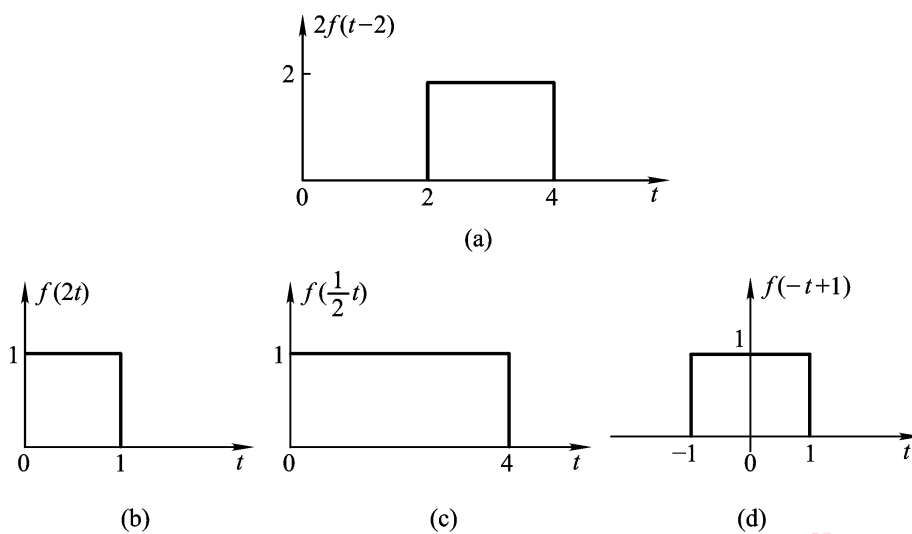
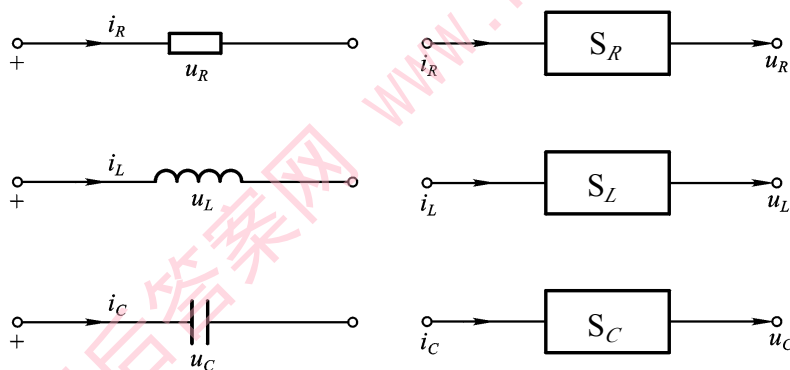


图 p1-2

1-3 如图 1-3 图示,  $R$ 、 $L$ 、 $C$  元件可以看成以电流为输入, 电压为响应的简单线性系统  $S_R$ 、 $S_L$ 、 $S_C$ , 试写出各系统响应电压与激励电流函数关系的表达式。



题 1-3 图

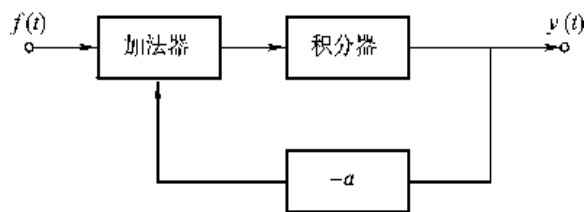
解 各系统响应与输入的关系可分别表示为

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

1-4 如题 1-4 图示系统由加法器、积分器和放大量为  $-a$  的放大器三个子系统组成, 系统属于何种联接形式? 试写出该系统的微分方程。



题 1-4 图

**解** 系统为反馈联接形式。设加法器的输出为  $x(t)$ ，由于

$$x(t) = f(t) + (-a)y(t)$$

且

$$y(t) = \int x(t)dt, \quad x(t) = y'(t)$$

故有

$$y'(t) = f(t) - ay(t)$$

即

$$y'(t) + ay(t) = f(t)$$

**1-5** 已知某系统的输入  $f(t)$  与输出  $y(t)$  的关系为  $y(t) = |f(t)|$ ，试判定该系统是否为线性时不变系统？

**解** 设  $T$  为系统的运算子，则可以表示为

$$y(t) = T[f(t)] = |f(t)|$$

不失一般性，设  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ ，则

$$T[f_1(t)] = |f_1(t)| = y_1(t)$$

$$T[f_2(t)] = |f_2(t)| = y_2(t)$$

故有

$$T[f(t)] = |f_1(t) + f_2(t)| = y(t)$$

显然

$$|f_1(t) + f_2(t)| \neq |f_1(t)| + |f_2(t)|$$

即不满足可加性，故为非线性时不变系统。

**1-6** 判断下列方程所表示的系统的性质。

$$(1) y(t) = \frac{df(t)}{dt} + \int_0^t f(\tau)d\tau$$

$$(2) y''(t) + y'(t) + 3y(t) = f'(t)$$

$$(3) 2y'(t) + y(t) = 3f(t)$$

$$(4) [y'(t)]^2 + y(t) = f(t)$$

**解** (1)线性; (2)线性时不变; (3)线性时变; (4)非线性时不变。

**1-7** 试证明方程

$$y'(t) + ay(t) = f(t)$$

所描述的系统为线性系统。式中  $a$  为常量。

**证明** 不失一般性, 设输入有两个分量, 且

$$f_1(t) \rightarrow y_1(t), \quad f_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

则有

$$y_1'(t) + ay_1(t) = f_1(t)$$

$$y_2'(t) + ay_2(t) = f_2(t)$$

相加得

$$y_1'(t) + ay_1(t) + y_2'(t) + ay_2(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

即

$$\frac{d}{dt}[y_1(t) + y_2(t)] + a[y_1(t) + y_2(t)] = f_1(t) + f_2(t)$$

可见

$$f_1(t) + f_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

即满足可加性, 齐次性是显然的。故系统为线性的。

**1-8** 若有线性时不变系统的方程为

$$y'(t) + ay(t) = f(t)$$

若在非零  $f(t)$  作用下其响应  $y(t) = 1 - e^{-t}$ , 试求方程

$$y'(t) + ay(t) = 2f(t) + f'(t)$$

的响应。

**解** 因为  $f(t) \rightarrow y(t) = 1 - e^{-t}$ , 由线性关系, 则

$$2f(t) \rightarrow 2y(t) = 2(1 - e^{-t})$$

由线性系统的微分特性, 有

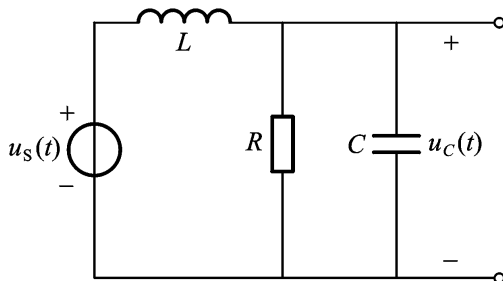
$$f'(t) \rightarrow y'(t) = e^{-t}$$

故响应

$$2f(t) + f'(t) \rightarrow y(t) = 2(1 - e^{-t}) + e^{-t} = 2 - e^{-t}$$

## 第 2 章习题解析

2-1 如图 2-1 所示系统，试以  $u_C(t)$  为输出列出其微分方程。



题 2-1 图

**解** 由图示，有

$$i_L = \frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt}$$

又

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t (u_s - u_C) dt$$

故

$$\frac{1}{L} (u_s - u_C) = \frac{u_C}{R} + C u_C''$$

从而得

$$u_C''(t) + \frac{1}{RC} u_C'(t) + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{1}{LC} u_s(t)$$

2-2 设有二阶系统方程

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$$

在某起始状态下的  $0_+$  起始值为

$$y(0_+) = 1, \quad y'(0_+) = 2$$

试求零输入响应。

**解** 由特征方程

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

则零输入响应形式为

$$y_{zi}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-2t}$$

由于

$$\begin{aligned}y_{zi}(0_+) &= A_1 = 1 \\ -2A_1 + A_2 &= 2\end{aligned}$$

所以

$$A_2 = 4$$

故有

$$y_{zi}(t) = (1 + 4t)e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

**2-3** 设有如下函数  $f(t)$ ，试分别画出它们的波形。

(a)  $f(t) = 2\varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2)$

(b)  $f(t) = \sin\pi t [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-6)]$

**解** (a)和(b)的波形如图 p2-3 所示。

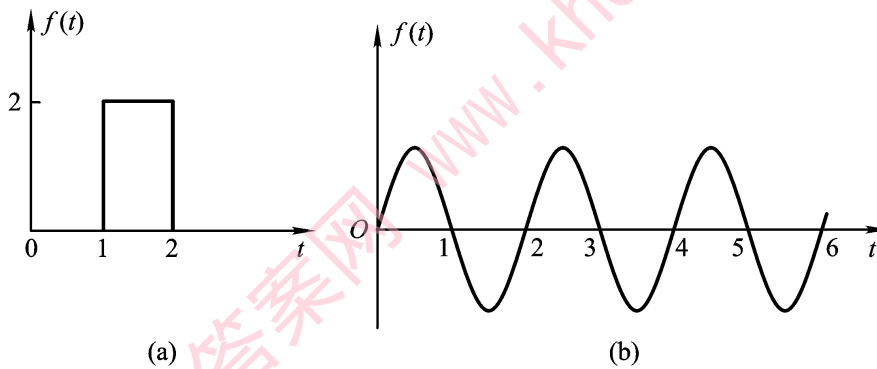
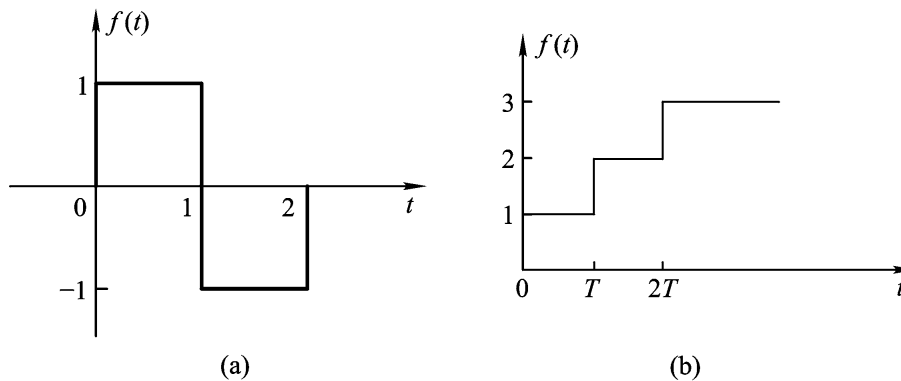


图 p2-3

**2-4** 试用阶跃函数的组合表示题 2-4 图所示信号。



题 2-4 图



**解** (a)  $f(t) = \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1) + \varepsilon(t-2)$

(b)  $f(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon(t-T) + \varepsilon(t-2T)$

**2-5** 试计算下列结果。

(1)  $t\delta(t-1)$

(2)  $\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t-1)dt$

(3)  $\int_0^{\infty} \cos(\omega t - \frac{\pi}{\gamma})\delta(t)dt$

(4)  $\int_0^{0+} e^{-3t}\delta(-t)dt$

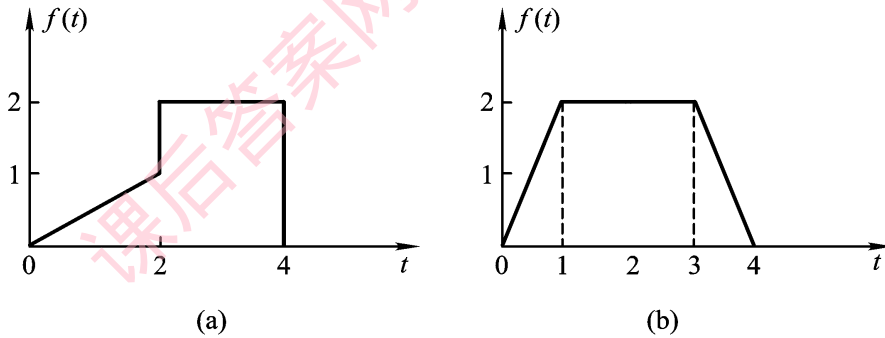
**解** (1)  $t\delta(t-1) = \delta(t-1)$

(2)  $\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t-1)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)dt = 1$

(3)  $\int_0^{\infty} \cos(\omega t - \frac{\pi}{\gamma})\delta(t)dt = \int_0^{\infty} \cos(-\frac{\pi}{\gamma})\delta(t)dt = \frac{1}{\gamma}$

(4)  $\int_0^{0+} e^{-3t}\delta(-t)dt = \int_0^{0+} e^{-3t}\delta(t)dt = \int_0^{0+} \delta(t)dt = 1$

**2-6** 设有题 2-6 图示信号  $f(t)$ ，对(a)写出  $f'(t)$  的表达式，对(b)写出  $f''(t)$  的表达式，并分别画出它们的波形。



题 2-6 图

**解** (a)

$$f'(t) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}, & 0 \leq t \leq 2 \\ \delta(t-2), & t=2 \\ -2\delta(t-4), & t=4 \end{cases}$$

(b)  $f''(t) = 2\delta(t) - 2\delta(t-1) - 2\delta(t-3) + 2\delta(t-4)$

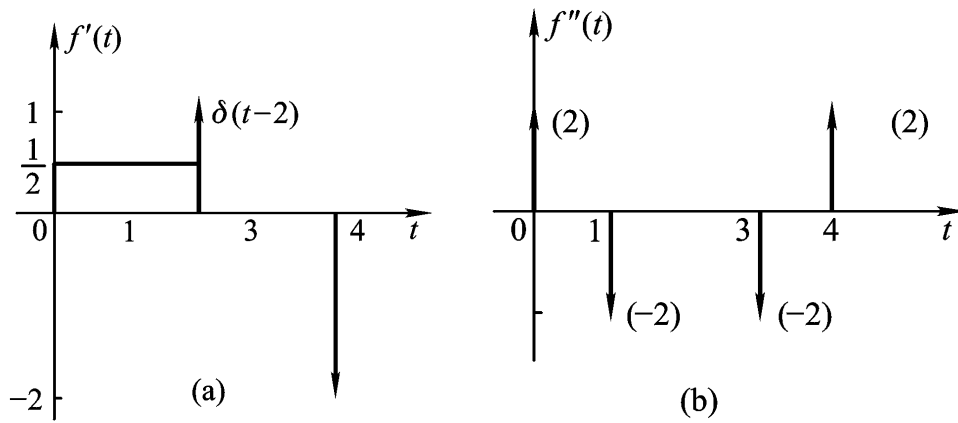
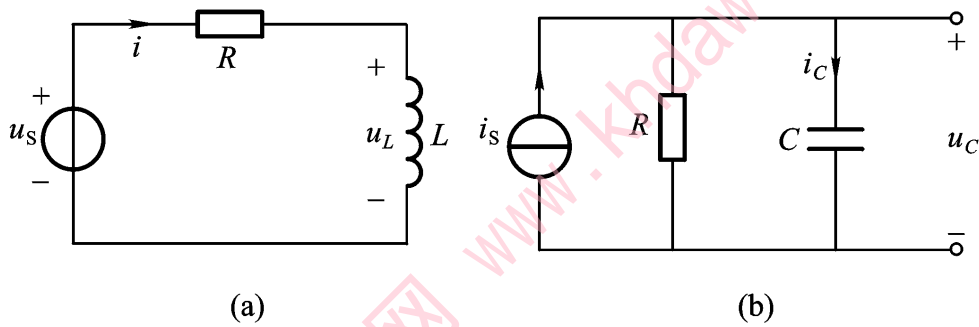


图 p2-6

2-7 如题 2-7 图一阶系统，对(a)求冲激响应  $i$  和  $u_L$ ，对(b)求冲激响应  $u_C$  和  $i_C$ ，并画出它们的波形。



题 2-7 图

解 由图(a)有

$$L \frac{di}{dt} = u_s(t) - Ri$$

即

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{1}{L}u_s(t)$$

当  $u_s(t) = \delta(t)$ ，则冲激响应

$$h(t) = i(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \varepsilon(t)$$

则电压冲激响应

$$h(t) = u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \delta(t) - \frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \varepsilon(t)$$

对于图(b)RC 电路，有方程

$$C \frac{du_C}{dt} = i_s - \frac{u_C}{R}$$

即

$$u'_C + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}i_s$$

当  $i_s = \delta(t)$  时, 则

$$h(t) = u_C(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \varepsilon(t)$$

同时, 电流

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \varepsilon(t)$$

**2-8** 设有一阶系统方程

$$y'(t) + 3y(t) = f'(t) + f(t)$$

试求其冲激响应  $h(t)$  和阶跃响应  $s(t)$ 。

**解** 因方程的特征根  $\lambda = -3$ , 故有

$$x_1(t) = e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$$

当  $h(t) = \delta(t)$  时, 则冲激响应

$$h(t) = x_1(t) * [\delta'(t) + \delta(t)] = \delta(t) - 2e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$$

阶跃响应

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \frac{1}{3}(1 + 2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

**2-9** 试求下列卷积。

(a)  $\delta(t) * 2$

(b)  $\varepsilon(t+3) * \varepsilon(t-5)$

(c)  $t e^{-t} \cdot \varepsilon(t) * \delta'(t)$

**解** (a) 由  $\delta(t)$  的特点, 故

$$\delta(t) * 2 = 2$$

(b) 按定义

$$\varepsilon(t+3) * \varepsilon(t-5) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau+3)\varepsilon(t-\tau-5)d\tau$$

考虑到  $\tau < -3$  时,  $\varepsilon(\tau+3) = 0$ ;  $\tau > t-5$  时,  $\varepsilon(t-\tau-5) = 0$ , 故

$$\varepsilon(t+3) * \varepsilon(t-5) = \int_{-3}^{t-5} d\tau = t-2, \quad t > 2$$

也可以利用迟延性质计算该卷积。因为

$$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = t\varepsilon(t)$$

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f(t-t_1-t_2)$$

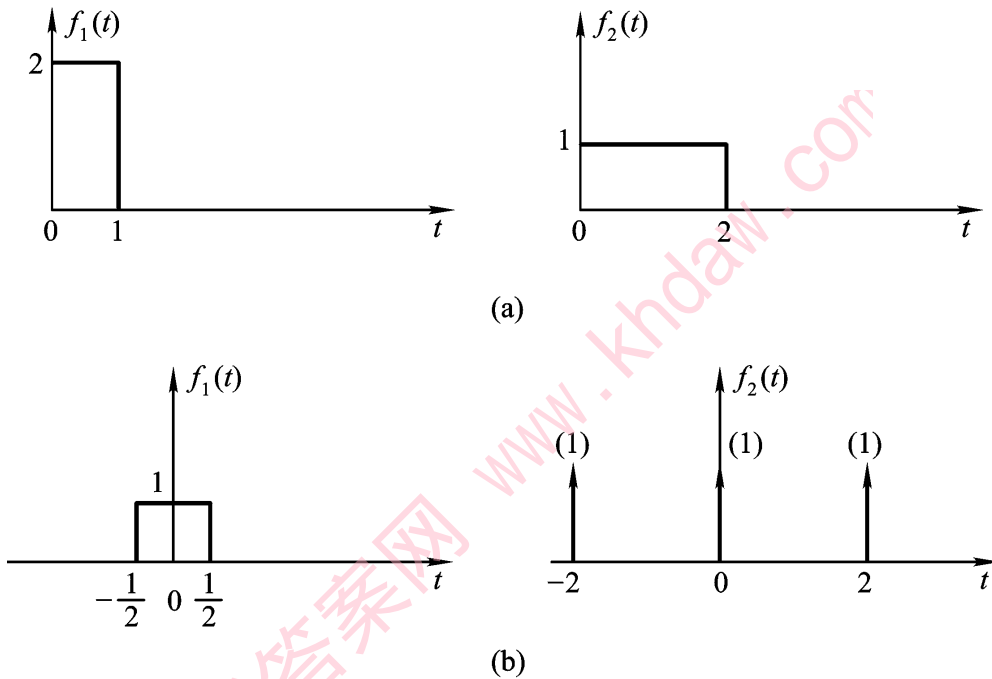
故对本题, 有

$$\varepsilon(t+3) * \varepsilon(t-5) = (t+3-5)\varepsilon(t+3-5) = (t-2)\varepsilon(t-2)$$

两种方法结果一致。

$$(c) \mathcal{L}^{-1}\{\varepsilon(t) * \delta'(t)\} = [\mathcal{L}^{-1}\{\varepsilon(t)\}]' = (e^{-t} - t e^{-t})\varepsilon(t)$$

**2-10** 对图示信号, 求  $f_1(t) * f_2(t)$ 。



题 2-10 图

**解** (a)先借用阶跃信号表示  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ , 即

$$f_1(t) = 2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)$$

$$f_2(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$$

故

$$f_1(t) * f_2(t) = [2\varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1)] * [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)]$$

因为

$$\varepsilon(t) * \varepsilon(t) = \int_0^t 1d\tau = t\varepsilon(t)$$

故有

$$f_1(t) * f_2(t) = 2t\varepsilon(t) - 2(t-1)\varepsilon(t-1) - 2(t-2)\varepsilon(t-2) + 2(t-3)\varepsilon(t-3)$$

读者也可以用图形扫描法计算之。结果见图 p2-10(a)所示。

(b)根据 $\delta(t)$ 的特点, 则

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= f_1(t) * [\delta(t) + \delta(t-2) + \delta(t+2)] \\ &= f_1(t) + f_1(t-2) + f_1(t+2) \end{aligned}$$

结果见图 p2-10(b)所示。

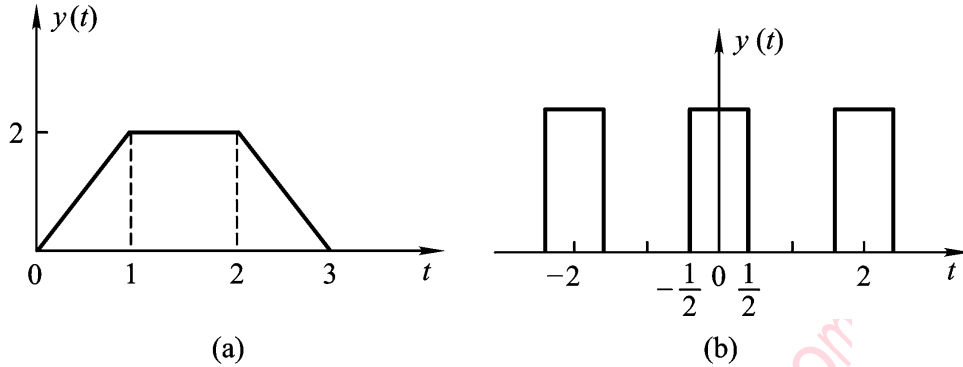


图 p2-10

**2-11** 试求下列卷积。

(a)  $(1 - e^{-2t})\varepsilon(t) * \delta'(t) * \varepsilon(t)$

(b)  $e^{-3t}\varepsilon(t) * \frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)]$

**解** (a)因为 $\delta'(t) * \varepsilon(t) = \varepsilon'(t) = \delta(t)$ , 故

$$(1 - e^{-2t})\varepsilon(t) * \delta'(t) * \varepsilon(t) = (1 - e^{-2t})\varepsilon(t) * \delta(t) = (1 - e^{-2t})\varepsilon(t)$$

(b)因为 $e^{-t}\delta(t) = \delta(t)$ , 故

$$e^{-3t}\varepsilon(t) * \frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)] = e^{-3t}\varepsilon(t) * \delta'(t)$$

**2-12** 设有二阶系统方程

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4\delta'(t)$$

试求零状态响应

**解** 因系统的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

解得特征根

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

故特征函数

$$x_2(t) = e^{\lambda_1 t} * e^{\lambda_2 t} = (e^{-t} * e^{-2t})\varepsilon(t)$$

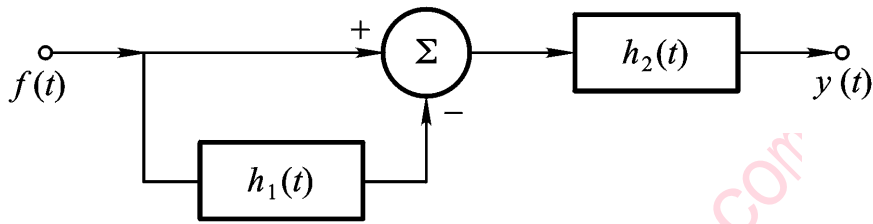
零状态响应

$$\begin{aligned} y(t) &= 4\delta'(t) * x_2(t) = 4\delta'(t) * (e^{-t} * e^{-2t})\varepsilon(t) \\ &= (8e^{-2t} - 4e^{-t})\varepsilon(t) \end{aligned}$$

2-13 如图系统，已知

$$h_1(t) = \delta(t-1), \quad h_2(t) = \varepsilon(t)$$

试求系统的冲激响应  $h(t)$ 。



题 2-13 图

解 由图关系，有

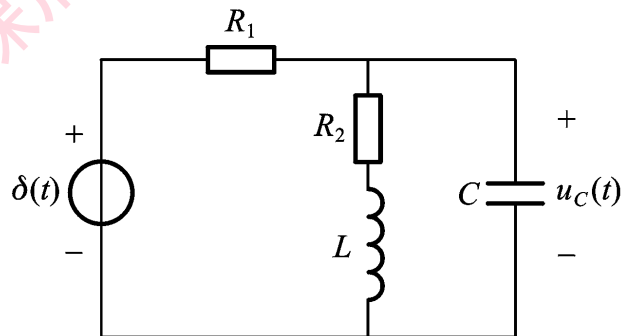
$$x(t) = f(t) - f(t) * h_1(t) = \delta(t) - \delta(t) * \delta(t-1) = \delta(t) - \delta(t-1)$$

所以冲激响应

$$h(t) = y(t) = x(t) * h_2(t) = [\delta(t) - \delta(t-1)] * \varepsilon(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)$$

即该系统输出一个方波。

2-14 如图系统，已知  $R_1 = R_2 = 1\Omega$ ,  $L = 1H$ ,  $C = 1F$ 。试求冲激响应  $u_C(t)$ 。



题 2-14 图

解 由 KCL 和 KVL，可得电路方程为

$$Cu_C'' + \left(\frac{1}{n} + \frac{R_2 C}{l}\right)u_C' + \left(\frac{1}{l} + \frac{R_2}{n l}\right)u_C = \frac{1}{n}\delta'(t) + \frac{R_2}{n l}\delta(t)$$

代入数据得

$$u_C'' + 2u_C' + 2u_C = \delta'(t) + \delta(t)$$

特征根

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j1$$

故冲激响应  $u_C(t)$  为

$$\begin{aligned} u_C(t) &= (e^{jt} * e^{-jt}) * [\delta'(t) + \delta(t)] \\ &= e^{-t} (\cos t - \sin t) \cdot \varepsilon(t) + e^{-t} \sin t \cdot \varepsilon(t) \\ &= e^{-t} \cos t \cdot \varepsilon(t) \quad \text{V} \end{aligned}$$

**2-15** 一线性时不变系统，在某起始状态下，已知当输入  $f(t) = \varepsilon(t)$  时，全响应  $y_1(t) = 3e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$ ；当输入  $f(t) = -\varepsilon(t)$  时，全响应  $y_2(t) = e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$ ，试求该系统的冲激响应  $h(t)$ 。

**解** 因为零状态响应

$$\varepsilon(t) \rightarrow s(t), \quad -\varepsilon(t) \rightarrow -s(t)$$

故有

$$y_1(t) = y_{zi}(t) + s(t) = 3e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$$

$$y_2(t) = y_{zi}(t) - s(t) = e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$$

从而有

$$y_1(t) - y_2(t) = 2s(t) = 2e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$$

即

$$s(t) = e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$$

故冲激响应

$$h(t) = s'(t) = \delta(t) - 3e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$$

**2-16** 若系统的零状态响应

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

试证明：

$$(1) f(t) * h(t) = \frac{df(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

(2) 利用(1)的结果，证明阶跃响应

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

**证** (1) 因为

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

由微分性质，有

$$y'(t) = f'(t) * h(t)$$

再由积分性质，有

$$y(t) = f'(t) * \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

(2) 因为

$$s(t) = \varepsilon(t) * h(t)$$

由(1)的结果，得

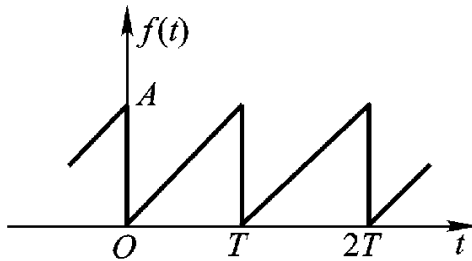
$$\begin{aligned} s(t) &= \varepsilon'(t) * \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\ &= \delta(t) * \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

课后答案网 [www.khdaw.com](http://www.khdaw.com)



## 第 3 章习题解析

3-1 求题 3-1 图所示周期信号的三角形式的傅里叶级数表示式。



题 3-1 图

**解** 对于周期锯齿波信号，在周期  $(0, T)$  内可表示为

$$f(t) = \frac{A}{T}t$$

系数

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A}{T} t dt = \frac{A}{2} \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{2A}{T^2} \int_0^T t \cdot \cos n\omega_1 t dt \\ &= \frac{2A}{T^2} \left| \frac{t \sin n\omega_1 t}{n\omega_1} \right|_0^T = 0 \\ b_n &= \frac{2A}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_1 t dt = \frac{2A}{T^2} \int_0^T t \cdot \sin n\omega_1 t dt \\ &= \frac{2A}{T^2} \left| \frac{t \cos n\omega_1 t}{n\omega_1} \right|_0^T = -\frac{A}{n\omega_1} \end{aligned}$$

所以三角级数为

$$f(t) = \frac{A}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n\omega_1} \sin n\omega_1 t$$

3-2 求周期冲激序列信号

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

的指数形式的傅里叶级数表示式，它是否具有收敛性？

**解** 冲激串信号的复系数为

$$F_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{\tau}$$

所以

$$\delta_T(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_1 t}$$

因  $F_n$  为常数，故无收敛性。

**3-3** 设有周期方波信号  $f(t)$ ，其脉冲宽度  $\tau = 1\text{ms}$ ，问该信号的频带宽度(带宽)为多少？若  $\tau$  压缩为  $0.2\text{ms}$ ，其带宽又为多少？

**解** 对方波信号，其带宽为  $\Delta f = \frac{1}{\tau} \text{Hz}$ ，

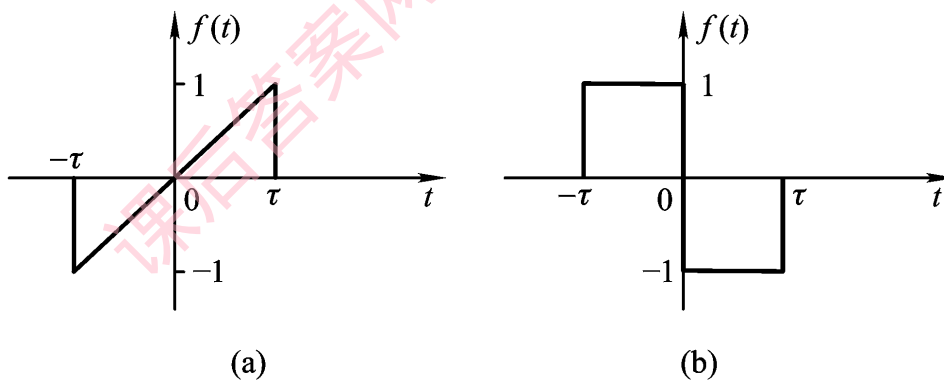
当  $\tau_1 = 1\text{ms}$  时，则

$$\Delta f_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{0.001} = 1000\text{Hz}$$

当  $\tau_2 = 0.2\text{ms}$  时，则

$$\Delta f_2 = \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{0.0002} = 5000\text{Hz}$$

**3-4** 求题 3-4 图示信号的傅里叶变换。



题 3-4 图

**解** (a) 因为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\tau}, & |t| < \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$

为奇函数，故

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= -j2 \int_0^\tau \frac{t}{\tau} \sin \omega t dt \\
 &= -j \frac{2}{\tau^2} [\sin \omega \tau - \omega \tau \cos \omega \tau] \\
 &= j \frac{2}{\tau} [\cos \omega \tau - \text{Sa}(\omega \tau)]
 \end{aligned}$$

或用微分定理求解亦可。

(b)  $f(t)$  为奇函数，故

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= -j2 \int_0^\tau (-1) \sin \omega t dt \\
 &= \frac{2}{\tau} [\cos \omega \tau - 1] = j \frac{4}{\tau} \sin^2 \left( \frac{\omega \tau}{2} \right)
 \end{aligned}$$

若用微分-积分定理求解，可先求出  $f'(t)$ ，即

$$f'(t) = \delta(t + \tau) + \delta(t - \tau) - 2\delta(t)$$

所以

$$f'(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) = e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau} - 2 = 2\cos \omega\tau - 2$$

又因为  $F_1(0) = 0$ ，故

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega} F_1(\omega) = \frac{2}{j\omega} (\cos \omega\tau - 1)$$

**3-5** 试求下列信号的频谱函数。

(1)  $f(t) = e^{-2|t|}$

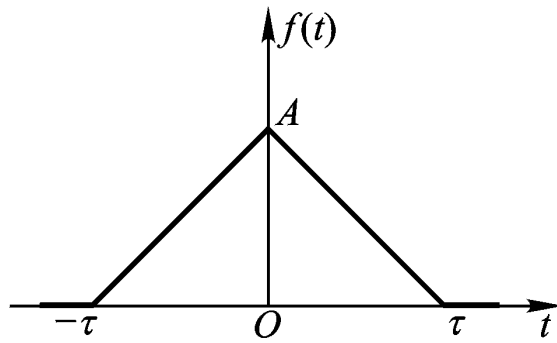
(2)  $f(t) = e^{-at} \sin \omega_0 t \cdot \varepsilon(t)$

**解** (1) 
$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2 + j\omega} + \frac{1}{2 - j\omega} = \frac{4}{4 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

(2) 
$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} [e^{j\omega_0 t} \cdot e^{(-a-j\omega)t} - e^{-j\omega_0 t} \cdot e^{(-a-j\omega)t}] dt \\
 &= \frac{1}{2j} \left| \frac{1}{(a + j\omega) - j\omega_0} - \frac{1}{(a + j\omega) + j\omega_0} \right| \\
 &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}
 \end{aligned}$$

**3-6** 对于如题 3-6 图所示的三角波信号，试证明其频谱函数为

$$F(\omega) = A\tau \text{Sa}^2 \left( \frac{\omega\tau}{2} \right)$$



题 3-6 图

证 因为

$$f(t) = \begin{cases} (A(1 - \frac{|t|}{\tau})), & |t| < \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 2 \int_0^{\tau} A(1 - \frac{t}{\tau}) \cos \omega t dt \\ &= \frac{2A}{\tau} (1 - \cos \omega \tau) \\ &= \frac{4A}{\tau} \sin^2(\frac{\omega \tau}{2}) \\ &= A \tau \text{Sa}^2(\frac{\omega \tau}{2}) \end{aligned}$$

3-7 试求信号  $f(t) = 1 + 2\cos t + 3\cos 3t$  的傅里叶变换。

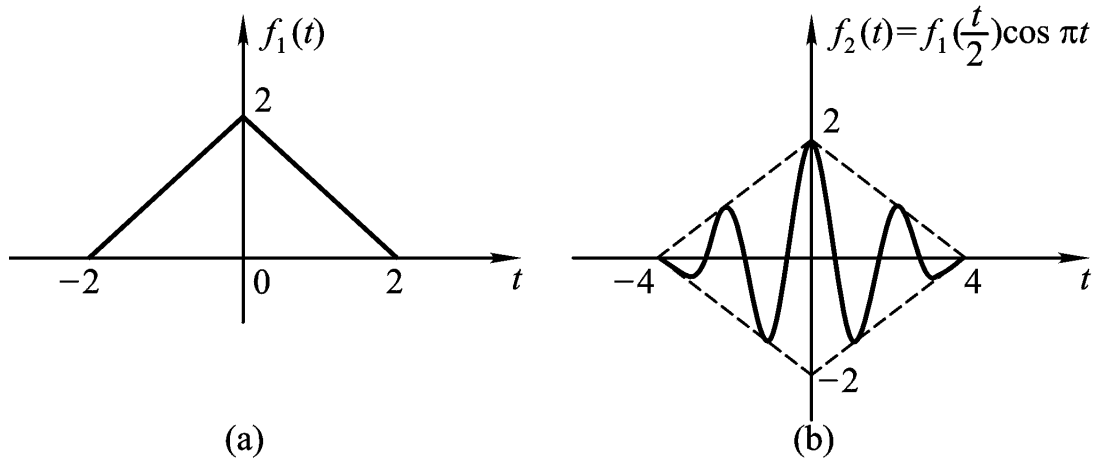
解 因为

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \\ 2\cos t &\leftrightarrow 2\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)] \\ 3\cos 3t &\leftrightarrow 3\pi[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)] \end{aligned}$$

故有

$$F(\omega) = 2\pi[\delta(\omega) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)] + 3\pi[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$$

3-8 试利用傅里叶变换的性质，求题 3-8 图所示信号  $f_2(t)$  的频谱函数。



题 3-8 图

**解** 由于  $f_1(t)$  的  $A=2$ ,  $\tau=2$ , 故其变换

$$F_1(\omega) = A\tau \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{\gamma}\right) = 4\text{Sa}^2(\omega)$$

根据尺度特性, 有

$$f_1\left(\frac{t}{\gamma}\right) \leftrightarrow 2F_1(2\omega) = 8\text{Sa}^2(2\omega)$$

再由调制定理得

$$\begin{aligned} f_2(t) = f_1\left(\frac{t}{\gamma}\right)\cos\pi t &\leftrightarrow F_2(\omega) \\ F_2(\omega) &= \frac{1}{\gamma}[8\text{Sa}^2(2\omega - 2\pi) + 8\text{Sa}^2(2\omega + 2\pi)] \\ &= 4\text{Sa}^2(2\omega - 2\pi) + 4\text{Sa}^2(2\omega + 2\pi) \\ &= \frac{\sin^2(2\omega)}{(\omega - \pi)^2} + \frac{\sin^2(2\omega)}{(\omega + \pi)^2} \end{aligned}$$

**3-9** 试利用卷积定理求下列信号的频谱函数。

(1)  $f(t) = A\cos(\omega_0 t) * \varepsilon(t)$

(2)  $f(t) = A\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$

**解** (1) 因为

$$\begin{aligned} A\cos(\omega_0 t) &\leftrightarrow A\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ \varepsilon(t) &\leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

所以由时域卷积定理

$$F(\omega) = A\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \cdot \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

$$= \frac{A\pi}{j} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} A\sin(\omega_0 t) &\leftrightarrow jA\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \\ \varepsilon(t) &\leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

由频域卷积定理

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{j\omega} \left\{ jA\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] * [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] \right\} \\ &= \frac{jA\pi}{\omega} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] - \frac{\omega_0 A}{\omega^2} \end{aligned}$$

**3-10** 设有信号

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \cos 4\pi t \\ f_2(t) &= \begin{cases} 1, & |t| < \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases} \end{aligned}$$

试求  $f_1(t)f_2(t)$  的频谱函数。

**解** 设  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ , 由调制定理

$$f_1(t) \cos 4\pi t \leftrightarrow \frac{1}{2} [F_1(\omega + 4\pi) + F_1(\omega - 4\pi)] = F(\omega)$$

而

$$F_1(\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 2\text{Sa}(\omega\tau)$$

故

$$F(\omega) = \text{Sa}(\omega + 4\pi) + \text{Sa}(\omega - 4\pi)$$

**3-11** 设有如下信号  $f(t)$ , 分别求其频谱函数。

(1)  $f(t) = e^{-(3+j4)t} \cdot \varepsilon(t)$

(2)  $f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$

**解** (1) 因

$$e^{-at} \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

故

$$e^{-(3+j4)t} \leftrightarrow \frac{1}{s+3+j4} = \frac{1}{s+3} - \frac{j}{s+3+j4} + \frac{j}{s+3-j4}$$

(2) 因  $\varepsilon(t) - \varepsilon(t-2) = G_\tau(t)\varepsilon(t-1), \quad \tau = 2$

故

$$F(\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{\gamma}\right) e^{-j\omega} = 2\text{Sa}(\omega) e^{-j\omega}$$

### 3-12 设信号

$$f_1(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求  $f_2(t) = f_1(t)\cos 50t$  的频谱函数，并大致画出其幅度频谱。

解 因

$$F(\omega) = 2\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{\gamma}\right) e^{-j2\omega} = 8\text{Sa}(2\omega) e^{-j2\omega}$$

故

$$\begin{aligned} F_2(\omega) &= \frac{1}{\gamma} [F_1(\omega + 50) + F_1(\omega - 50)] \\ &= 4\text{Sa}[2(\omega + 50)] e^{-j2(\omega+50)} + 4\text{Sa}[2(\omega - 50)] e^{-j2(\omega-50)} \end{aligned}$$

幅度频谱见图 p3-12。

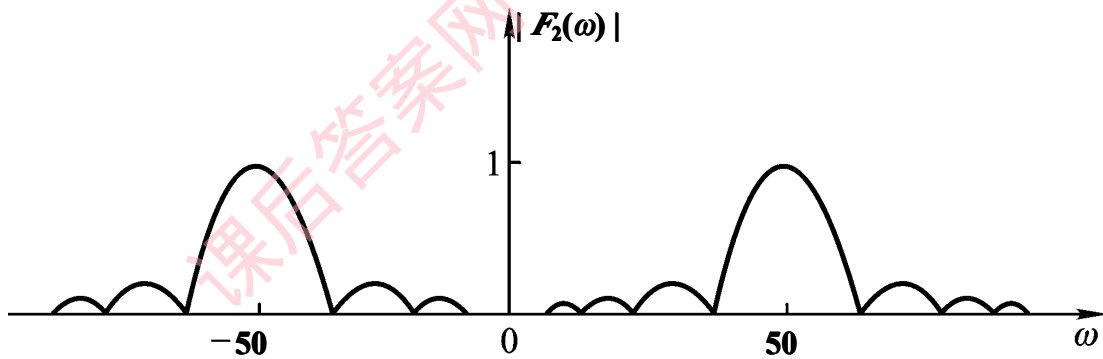
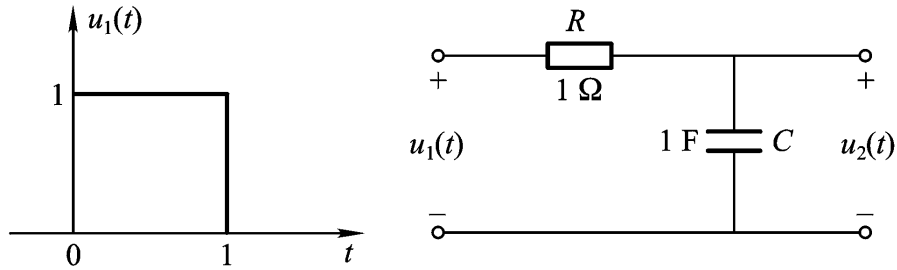


图 p3-12

## 第 4 章习题解析

4-1 如题 4-1 图示  $RC$  系统，输入为方波  $u_1(t)$ ，试用卷积定理求响应  $u_2(t)$ 。



题 4-1 图

**解** 因为  $RC$  电路的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

而响应

$$u_2(t) = u_1(t) * h(t)$$

故由卷积定理，得

$$U_2(\omega) = U_1(\omega) * H(j\omega)$$

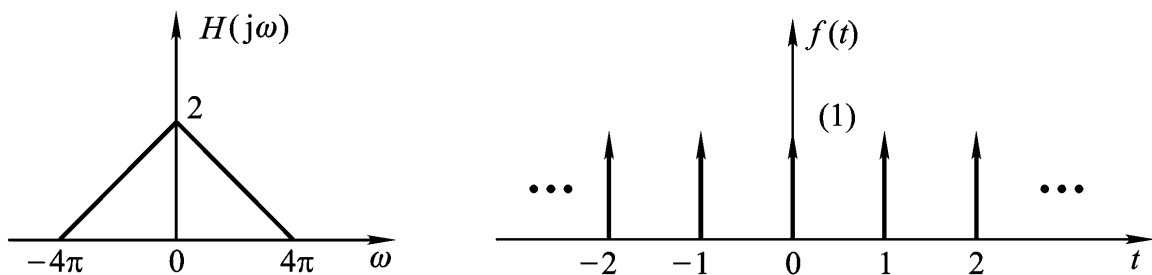
而已知  $U_1(\omega) = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega})$ ，故

$$U_2(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega})$$

反变换得

$$u_2(t) = (1 - e^{-t})\varepsilon(t) - [1 - e^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

4-2 一滤波器的频率特性如题图 4-2 所示，当输入为所示的  $f(t)$  信号时，求相应的输出  $y(t)$ 。



题 4-2 图



**解** 因为输入  $f(t)$  为周期冲激信号, 故

$$F_n = \frac{1}{T} = 1, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

所以  $f(t)$  的频谱

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2n\pi)$$

当  $n = 0, \pm 1, \pm 2$  时, 对应  $H(j\omega)$  才有输出, 故

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= F(\omega) H(j\omega) \\ &= 2\pi [2\delta(\omega) + \delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)] \end{aligned}$$

反变换得

$$y(t) = 2(1 + \cos 2\pi t)$$

**4-3** 设系统的频率特性为

$$H(j\omega) = \frac{2}{1 + j\omega}$$

试用频域法求系统的冲激响应和阶跃响应。

**解** 冲激响应, 故

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = 2e^{-2t} \cdot \varepsilon(t)$$

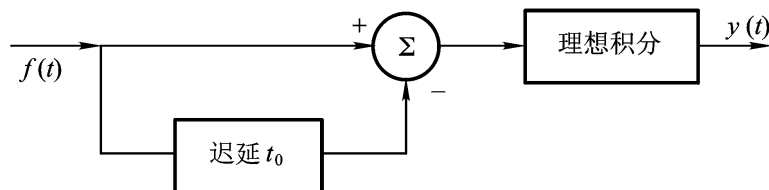
而阶跃响应频域函数应为

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \mathcal{F}[\varepsilon(t)] \cdot H(j\omega) = [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] \cdot \frac{2}{1 + j\omega} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{2}{1 + j\omega} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{1 + j\omega} \end{aligned}$$

所以阶跃响应

$$s(t) = (1 - e^{-2t}) \cdot \varepsilon(t)$$

**4-4** 如题图 4-4 所示是一个实际的信号加工系统, 试写出系统的频率特性  $H(j\omega)$ 。



题 4-4 图

**解** 由图可知输出

$$y(t) = \int_0^t [f(t) - f(t-t_0)] dt$$

取上式的傅氏变换, 得

$$Y(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_0})$$

故频率特性

$$H(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{j\omega} (1 - e^{-j\omega t_0})$$

**4-5** 设信号  $f(t)$  为包含  $0 \sim \omega_m$  分量的频带有限信号, 试确定  $f(3t)$  的奈奎斯特采样频率。

**解** 由尺度特性, 有

$$f(3t) \leftrightarrow \frac{1}{3} F\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

即  $f(3t)$  的带宽比  $f(t)$  增加了 3 倍, 即  $\Delta\omega = 3\omega_m$ 。从而最低的抽样频率  $\omega_s = 6\omega_m$ 。故采样周期和采样频率分别为

$$T_s = \frac{1}{f_s}$$

$$f_s = 6f_m$$

**4-6** 若电视信号占有的频带为  $0 \sim 6\text{MHz}$ , 电视台每秒发送 25 幅图像, 每幅图像又分为 625 条水平扫描线, 问每条水平线至少要有多少个采样点?

**解** 设采样点数为  $x$ , 则最低采样频率应为

$$2f_m = 25 \times 625 \times x$$

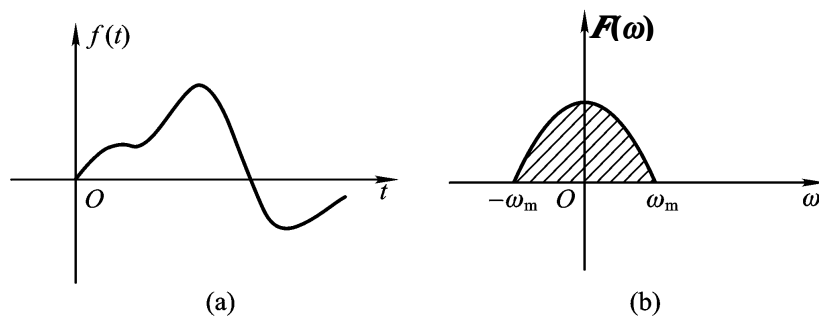
所以

$$x = \frac{2f_m}{25 \times 625} = \frac{2 \times 6 \times 10^6}{25 \times 625} = 768$$

**4-7** 设  $f(t)$  为调制信号, 其频谱  $F(\omega)$  如题图 4-7 所示,  $\cos\omega_0 t$  为高频载波, 则广播发射的调幅信号  $x(t)$  可表示为

$$x(t) = A[1 + m f(t)] \cos\omega_0 t$$

式中,  $m$  为调制系数。试求  $x(t)$  的频谱, 并大致画出其图形。



题 4-7 图

**解** 因为调幅信号

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + mA f(t)\cos\omega_0 t$$

故其变换

$$X(\omega) = \pi A[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{mA}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

式中,  $F(\omega)$  为  $f(t)$  的频谱。  $x(t)$  的频谱图如图 p4-7 所示。

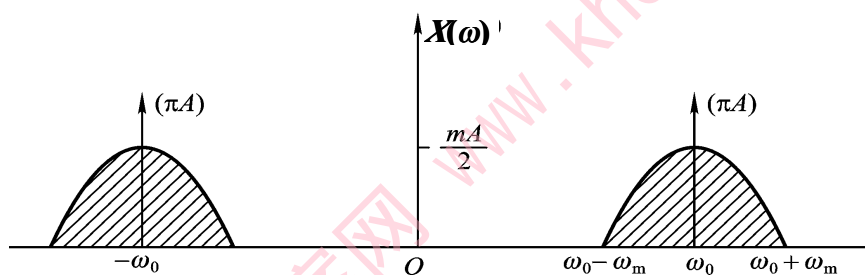
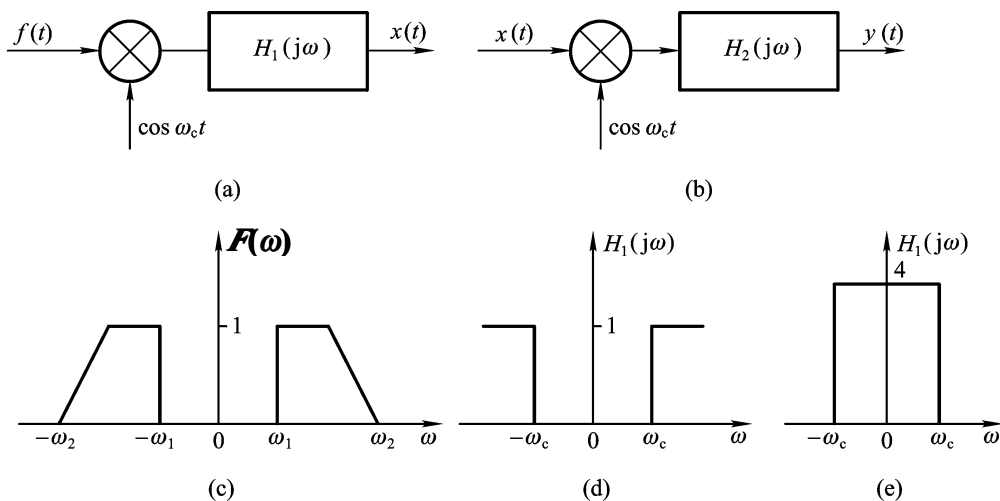


图 p4-7

**4-8** 题 4-8 图所示(a)和(b)分别为单边带通信中幅度调制与解调系统。已知输入  $f(t)$  的频谱和频率特性  $H_1(j\omega)$ 、 $H_2(j\omega)$  如图所示, 试画出  $x(t)$  和  $y(t)$  的频谱图。



题 4-8 图

**解** 由调制定理知

$$f_1(t) = f(t) \cos \omega_c t \leftrightarrow F_1(\omega) = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_c) + F(\omega - \omega_c)]$$

而  $x(t)$  的频谱

$$X(\omega) = F_1(\omega) \cdot H_1(j\omega)$$

又因为

$$f_2(t) = x(t) \cos \omega_c t \leftrightarrow F_2(\omega) = \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_c) + X(\omega - \omega_c)]$$

所以

$$Y(\omega) = F_2(\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

它们的频谱变化分别如图 p4-8 所示，设  $\omega_c > \omega_2$ 。

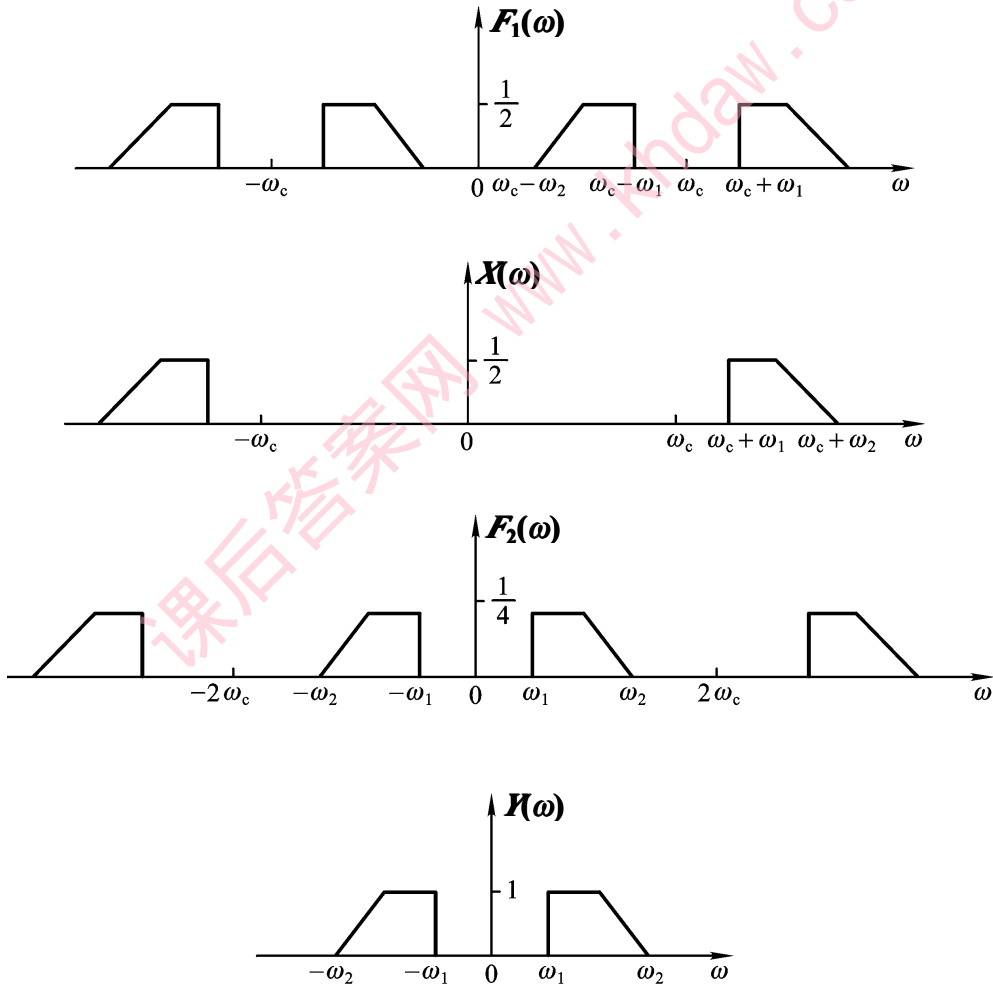
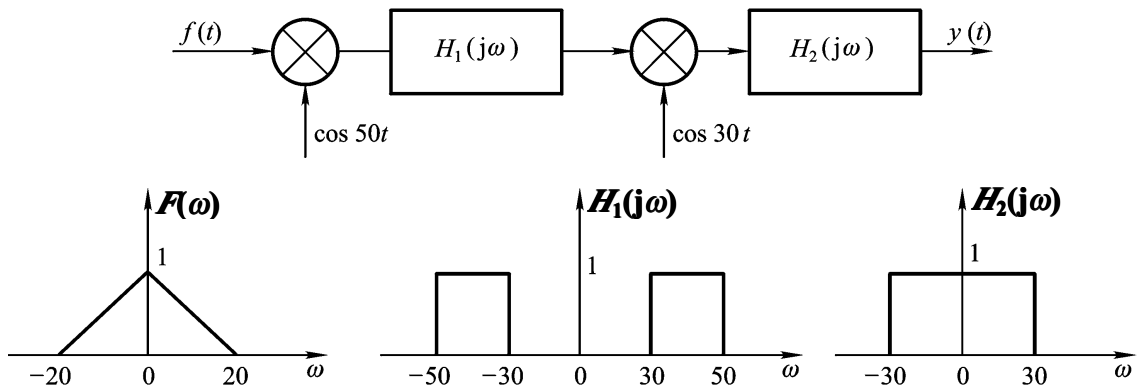


图 p4-8

**4-9** 如题 4-9 图所示系统，设输入信号  $f(t)$  的频谱  $F(\omega)$  和系统特性  $H_1(j\omega)$ 、 $H_2(j\omega)$  均

给定，试画出  $y(t)$  的频谱。



题 4-9 图

**解** 设  $f_1(t) = f(t) \cos 50t$ ，故由调制定理，得

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2}[F(\omega + 50) + F(\omega - 50)]$$

从而

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) = H_1(\omega) \cdot F_1(\omega)$$

它仅在  $|\omega| = (30 \sim 50)$  内有值。再设

$$f_3(t) = f_2(t) \cos 30t$$

则有

$$F_3(\omega) = \frac{1}{2}[F_2(\omega + 30) + F_2(\omega - 30)]$$

即  $F_3(\omega)$  是  $F_2(\omega)$  的再频移。进而得响应的频谱为

$$Y(\omega) = F_3(\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

其结果仅截取  $-20 < \omega < 20$  的部分。以上过程的频谱变化如图 p4-9 所示。

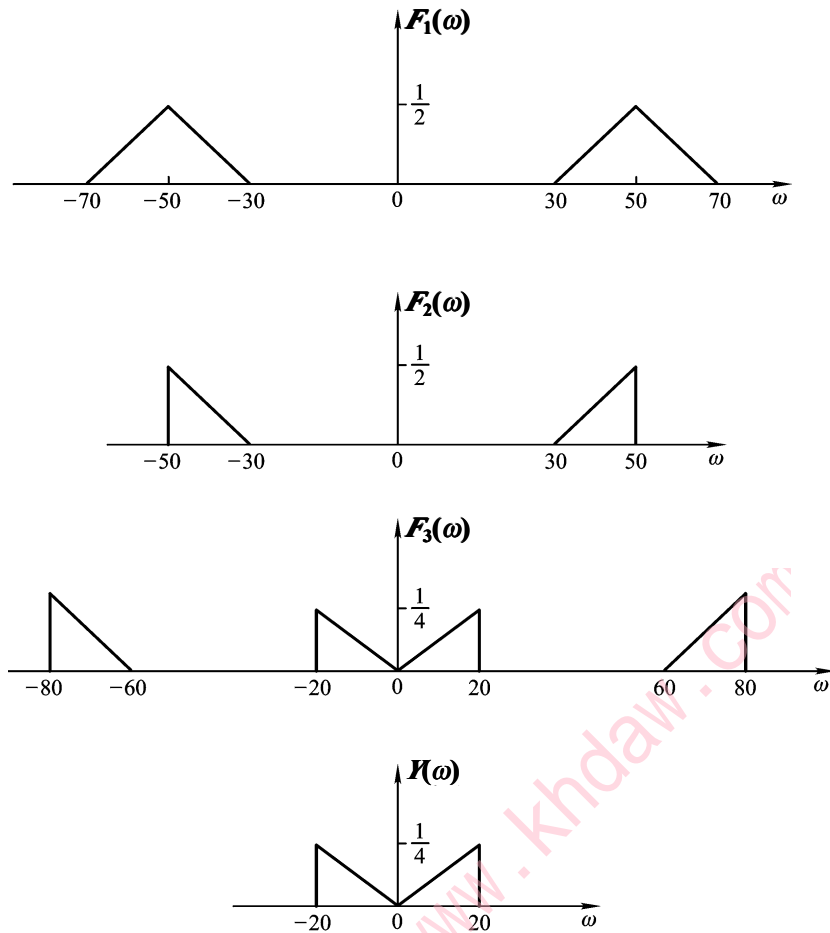
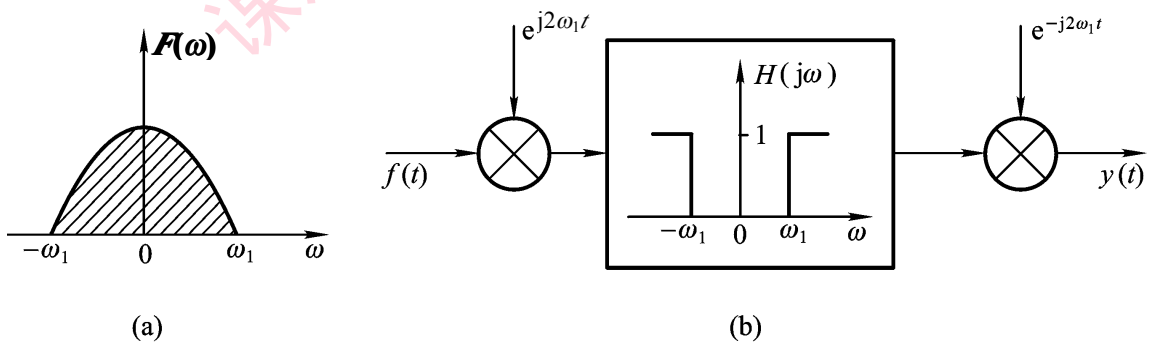


图 p4-9

4-10 设信号  $f(t)$  的频谱  $F(\omega)$  如题 4-10 图(a)所示, 当该信号通过图(b)系统后, 证明  $y(t)$  恢复为  $f(t)$ 。



题 4-10 图

**证明** 因为

$$f(t)e^{j2\omega_1 t} \leftrightarrow F_1(\omega - 2\omega_1)$$

故通过高通滤波器后，频谱  $F_1(\omega)$  为

$$F_1(\omega) = H(j\omega)F(\omega - 2\omega_1) = F(\omega - 2\omega_1)$$

所以输出

$$y(t) \leftrightarrow Y(\omega) = F(\omega - 2\omega_1 + 2\omega_1) = F(\omega)$$

即  $y(t)$  包含了  $f(t)$  的全部信息  $F(\omega)$ ，故恢复了  $f(t)$ 。

课后答案网 [www.khdaw.com](http://www.khdaw.com)

## 第 5 章习题解析

5-1 求下列函数的单边拉氏变换。

(1)  $2 - e^{-t}$

(2)  $\delta(t) + e^{-3t}$

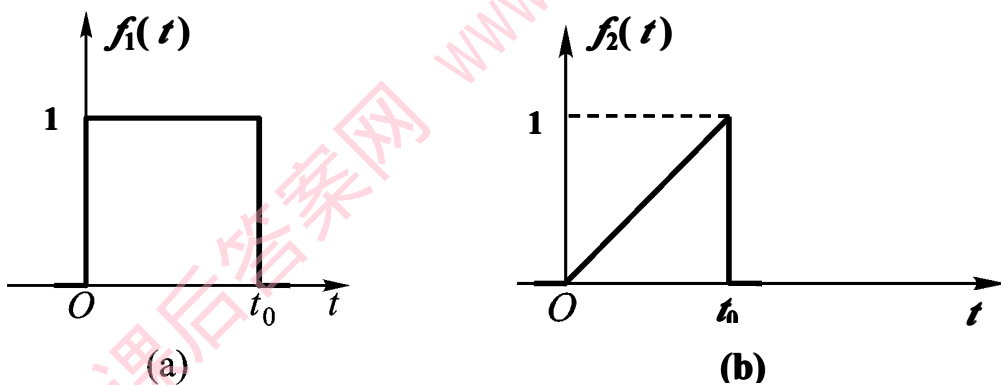
(3)  $e^{-2t} \cos t$

解 (1)  $F(s) = \int_0^{\infty} (2 - e^{-t})e^{-st} dt = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{s+2}{s(s+1)}$

(2)  $F(s) = \int_0^{\infty} [\delta(t) + e^{-3t}]e^{-st} dt = 1 + \frac{1}{s+3}$

(3)  $F(s) = \int_0^{\infty} (e^{-2t} \cos t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (e^{jt} + e^{-jt}) e^{-2t} \cdot e^{-st} dt$   
 $= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-2+j} + \frac{1}{s-2-j} \right) = \frac{s+2}{(s-2)^2 + 4}$

5-2 求下列题 5-2 图示各信号的拉氏变换。



题 5-2 图

解 (a) 因为  $f_1(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)$

而  $\varepsilon(t) \rightarrow \frac{1}{s}$ ,  $\varepsilon(t - t_0) \rightarrow \frac{1}{s} e^{-st_0}$

故

$$f_1(t) \rightarrow \frac{1}{s}(1 - e^{-st_0})$$

(b) 因为  $f_2(t) = \frac{t}{t_0} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)] = \frac{t}{t_0} \varepsilon(t) - \frac{t}{t_0} \varepsilon(t - t_0)$



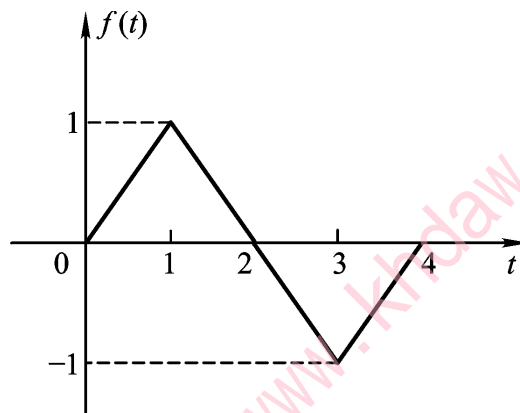
又因为  $\frac{t}{s} \varepsilon(t) \rightarrow \frac{1}{s^2}$

$\frac{t}{s} \varepsilon(t-t_0) \rightarrow (\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}) e^{-st_0}$

故有

$$\begin{aligned} f_2(t) &\rightarrow \frac{1}{s^2} - (\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}) e^{-st_0} \\ &= \frac{1}{s^2} (1 - e^{-st_0}) - \frac{1}{s} e^{-st_0} \end{aligned}$$

**5-3** 利用微积分性质，求题 5-3 所示信号的拉氏变换。



题 5-3 图

**解** 先对  $f(t)$  求导，则

$$f'(t) = \varepsilon(t) - 2\varepsilon(t-1) + 2\varepsilon(t-3) - \varepsilon(t-4)$$

故对应的变换

$$F_1(s) = \frac{1}{s} (1 - 2e^{-s} + 2e^{-3s} - e^{-4s})$$

所以

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{s} = \frac{1 - 2e^{-s} + 2e^{-3s} - e^{-4s}}{s^2}$$

**5-4** 用部分分式法求下列象函数的拉氏反变换。

(1)  $F(s) = \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$

(2)  $F(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{s^2 + 1}$

(3)  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$

$$(4) F(s) = \frac{4}{(s+2)(s+3)}$$

**解** (1)  $F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+3}$

$$k_1 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = -1$$

$$k_2 = (s+3)F(s)|_{s=-3} = 2$$

故有

$$F(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

所以

$$f(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$(2) F(s) = \frac{2s^2 + s + 2}{(s^2 + 1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}$$

可得

$$A = sF(s)|_{s=0} = 2$$

又

$$2s^2 + s + 2 = As^2 + A + Bs^2 + Cs$$

可得

$$B = 0, C = 1$$

$$F(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

所以

$$f(t) = (2 + \sin t)\varepsilon(t)$$

$$(3) F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$k_1 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = 1$$

$$k_2 = (s+2)F(s)|_{s=-2} = -1$$

故有

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2}$$

故

$$f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$(4) F(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_{11}}{(s+2)} + \frac{k_{12}}{(s+2)^2}$$

故

$$k_1 = sF(s)|_{s=-1} = 1$$

$$k_{11} = (s+2)^2 F(s)|_{s=-2} = \frac{4}{-1} = -2$$

$$k_{12} = \frac{d}{ds}[(s+2)^2 F(s)]|_{s=-2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{4}{s}\right)|_{s=-2} = -1$$

故有

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}$$

所以

$$f(t) = (1 - e^{-2t} - 2te^{-2t})\varepsilon(t)$$

**5-5** 求下列象函数的拉氏反变换。

$$(1) F(s) = 1 - e^{-s}$$

$$(2) F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$(3) F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}$$

**解** (1)  $f(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$

(2)  $f(t) = e^{-t}\varepsilon(t) - e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)$

(3)  $f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2) + \varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-3) + \varepsilon(t-2) - \varepsilon(t-5) + \dots$

**5-6** 设系统微分方程为

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2f'(t) + f(t)$$

已知  $y(0_-) = 1$ ,  $y'(0_-) = 1$ ,  $f(t) = e^{-2t} \cdot \varepsilon(t)$ 。试用 s 域方法求零输入响应和零状态响应。

**解** 对系统方程取拉氏变换, 得

$$s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) + 4sY(s) - 4y(0_-) + 3Y(s) = 2sF(s) + F(s)$$

从而

$$Y(s) = \frac{sy(0_-) + y'(0_-) + 4y(0_-)}{s^2 + 4s + 3} + \frac{2s+1}{s^2 + 4s + 3} \cdot F(s)$$

由于

$$F(s) = \frac{1}{s+2}$$

故

$$Y(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} + \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}$$

求反变换得

$$y_{zi}(t) = \frac{7}{2}e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-3t}$$

$$y_{zs}(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + 3e^{-2t} - \frac{5}{2}e^{-3t}$$

全响应为

$$y(t) = 3e^{-t} + 3e^{-2t} - 5e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

**5-7** 设某 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3f(t)$$

试求其冲激响应和阶跃响应。

**解** 对方程取拉氏变换，得系统函数

$$H(s) = \frac{3}{s^2 + 5s + 6} = \frac{3}{(s+2)(s+3)}$$

当  $f(t) = \delta(t)$  时， $F(s) = 1$ ，得

$$Y(s) = H(s) = \frac{3}{(s+2)(s+3)}$$

从而

$$h(t) = 3e^{-2t} - 3e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

当  $f(t) = \varepsilon(t)$  时， $F(s) = \frac{1}{s}$ ，得

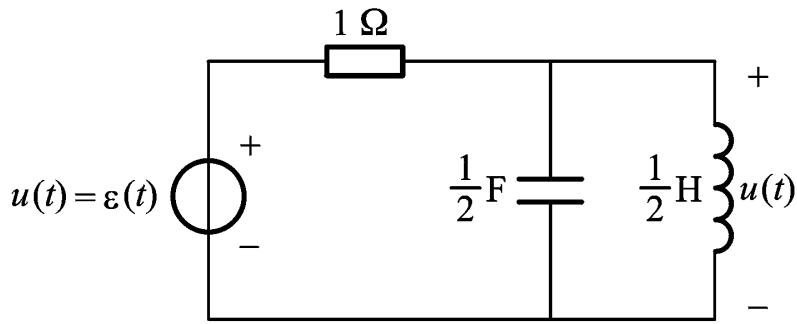
$$Y(s) = \frac{1}{s}H(s) = \frac{3}{s(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{0.5}{s} + \frac{-1.5}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

故得

$$y(t) = s(t) = 0.5 - 1.5e^{-2t} + e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

**5-8** 试求题 5-8 图示电路中的电压  $u(t)$ 。



题 5-8 图

解 对应的 s 域模型如图 p5-8 所示, 则

$$H(s) = \frac{U(s)}{F(s)} = \frac{\sqrt{2} \frac{1}{s}}{\frac{1}{2s}} = \frac{2s}{\sqrt{2}}$$

而  $F(s) = \frac{1}{s}$ , 故有

$$U(s) = F(s)H(s) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

所以

$$u(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-t} \cdot \sin\sqrt{3}t \cdot \varepsilon(t) \text{ V}, \quad t \geq 0$$

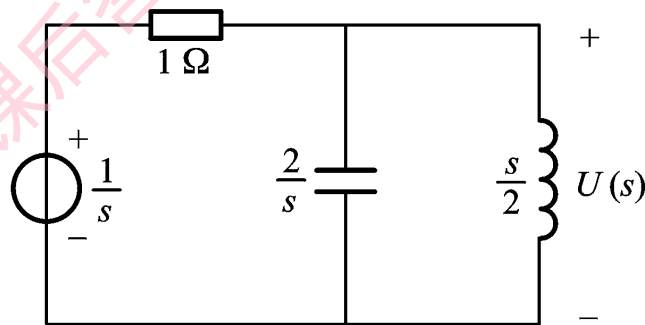
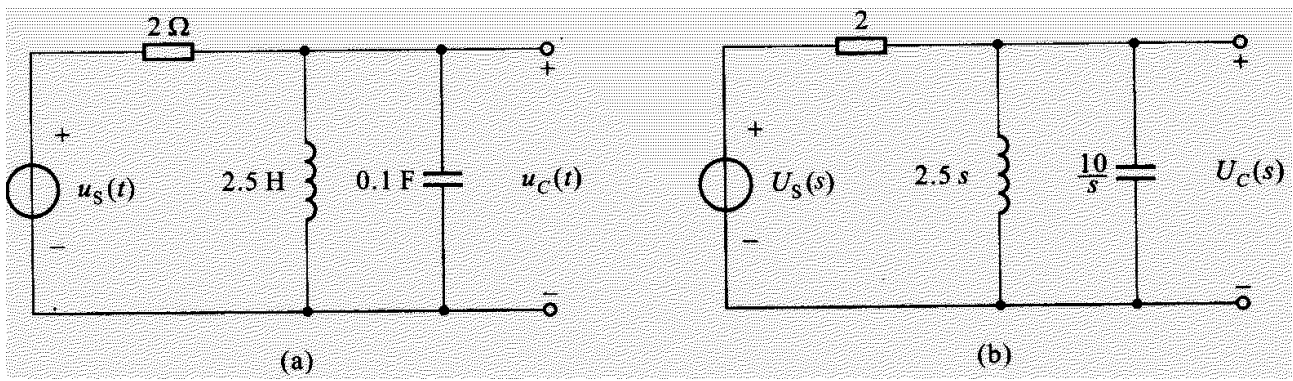


图 p5-8

5-9 如题 5-9 图所示电路, 试求冲激响应  $u_C(t)$ 。



题 5-9 图

解 以  $U_C(s)$  为变量列节点方程

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2.5s} + \frac{s}{10}\right)U_C(s) = \frac{1}{2}U_S(s)$$

因  $U_C(s)=1$ , 则

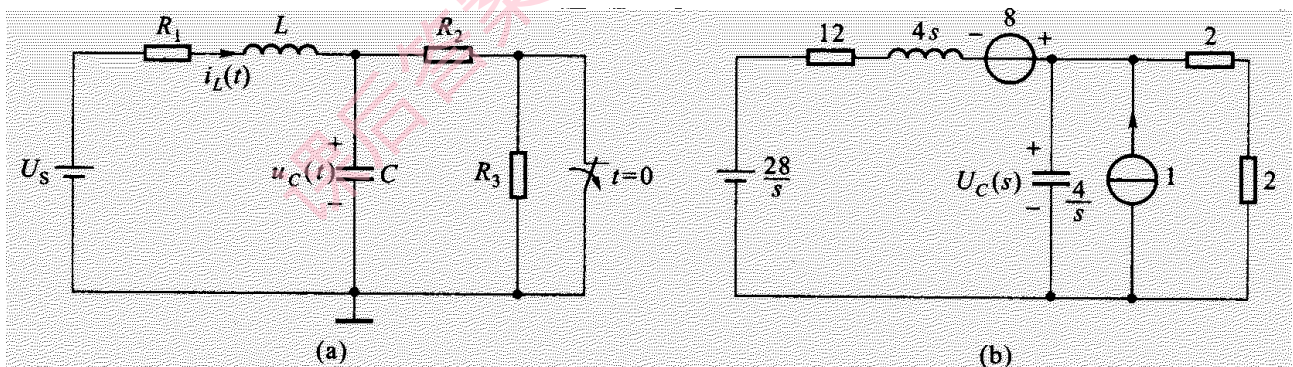
$$U_C(s) = \frac{5s}{s^2 + 4s + 5}$$

$$= \frac{-3}{s+1} + \frac{3}{s+5}$$

故

$$h(t) = u_C(t) = \left(-\frac{5}{2}e^{-t} + \frac{20}{2}e^{-4t}\right) \cdot \varepsilon(t)$$

5-10 如题 5-10 图所示电路, 已知  $U_S = 28V$ ,  $L = 4H$ ,  $C = \frac{1}{4}F$ ,  $R_1 = 12\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 2\Omega$ . 当  $t=0$  时 S 断开, 设开关断开前电路已稳定, 求  $t \geq 0$  后响应  $u_C(t)$ 。



题 5-10 图

解 初始状态在  $t=0_-$  时求得

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = 2A$$

$$u_C(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = 4V$$

对于图(b)S 域模型, 列出关于  $U_C(s)$  的节点方程, 即

$$\left(\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s} + \frac{1}{s}\right)U_C(s) = \frac{s}{s^2} + 1$$

解得

$$U_C(s) = \frac{4(s^2 + 5s + 7)}{s^2(s+1)^2} = \frac{7}{s} - \frac{3s+8}{(s+1)^2}$$

可得

$$u_C(t) = 7 - 2(t+1.5)e^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

**5-11** 设有

$$y(t) = e^{-3t}\varepsilon(t) * \delta'(t)$$

试用卷积定理求  $y(t)$ 。

**解**

$$e^{-3t} \leftrightarrow \frac{1}{s+3}$$

$$\delta'(t) \leftrightarrow s$$

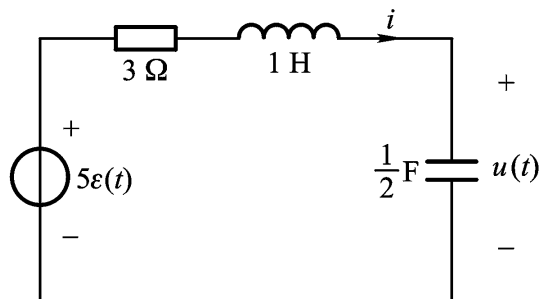
所以

$$Y(s) = \frac{1}{s+3} \cdot s = \frac{s}{s+3} = 1 - \frac{3}{s+3}$$

故

$$y(t) = \delta(t) - 3e^{-3t} \cdot \varepsilon(t)$$

**5-12** 如题 5-12 图所示  $RLC$  电路，已知  $u_s(t) = 5\varepsilon(t)$ ， $i(0_-) = 2A$ ， $u(0_-) = 2V$ 。试用 S 域方法求全响应  $u(t)$ 。



题 5-12 图

**解** 由该电路对应的 S 域模型（此处略），可得

$$I(s) = \frac{s + \mathcal{L}\{u(t)\}}{s} = \frac{2s+3}{s}$$

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{u(0_-)}{s} + I(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s} + \frac{2(2s+3)}{s^2} \\ &= \frac{5}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

得

$$u(t) = 5 - 2e^{-t} - e^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

**5-13** 若有系统方程

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \delta(t)$$

且  $y(0_-) = y'(0_-) = 0$ ，试求  $y(0_+)$  和  $y'(0_+)$ 。

**解** 取拉氏变换，得系统函数

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

所以

$$h(t) = e^{-2t} - e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

故

$$h(0_+) = y(0_+) = 0,$$

$$h'(0_+) = y'(0_+) = 1$$

**5-14** 设有系统函数

$$H(s) = \frac{s+3}{s+2}$$

试求系统的冲激响应和阶跃响应。

**解** 因为

$$H(s) = \frac{s+3}{s+2} = \frac{s+2}{s+2} + \frac{1}{s+2} = 1 + \frac{1}{s+2}$$

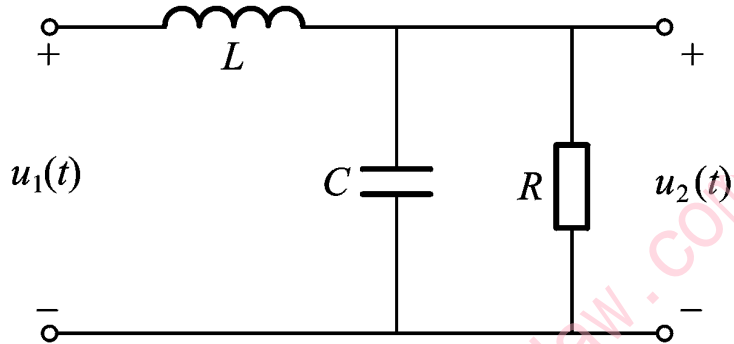
故

$$h(t) = \delta(t) + e^{-2t} \varepsilon(t)$$



$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_0^t h(\tau) d\tau \\
 &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t}\right) \varepsilon(t)
 \end{aligned}$$

**5-15** 如题 5-15 图所示二阶系统，已知  $L=1\text{H}$ ， $C=1\text{F}$ ， $R=1\Omega$ ， $u_s(t) = \delta(t)$ 。试求以  $u_C(t)$  为响应时的冲激响应  $h(t)$ 。



题 5-15 图

**解** 列 S 域节点方程

$$\left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R} + sC\right) U_C(s) = \frac{U_S(s)}{s}$$

可得

$$U_C(s) = \frac{R}{s(LCn^2 + LC + R)} U_S(s)$$

因  $U_S(s) = 1$ ，故有

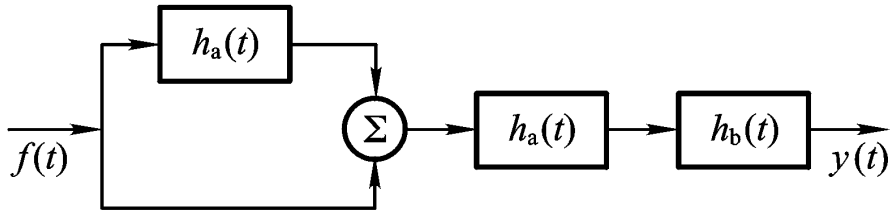
$$U_C(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

故

$$u_C(t) = h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \cdot \varepsilon(t)$$

## 第 6 章习题解析

6-1 在题 6-1 图示系统中, 已知  $h_a(t) = \delta(t-1)$ ,  $h_b(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$ , 试求系统函数  $H(s)$  和冲激响应  $h(t)$ , 并画出其波形。



题 6-1 图

解 因为

$$y_1(t) = f(t) * h_a(t) + f(t)$$

故

$$Y_1(s) = F(s)H_a(s) + F(s) = [1 + H_a(s)]F(s)$$

而

$$Y(s) = Y_1(s)H_a(s) \cdot H_b(s)$$

其中

$$H_a(s) = e^{-s}, \quad H_b(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-2s})$$

所以

$$Y(s) = (1 + e^{-s})e^{-s} \cdot \frac{1}{s}(1 - e^{-2s}) \cdot F(s)$$

故

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{(1 + e^{-s})(1 - e^{-2s}) \cdot e^{-s}}{s} \\ &= \frac{1}{s}(e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-4s}) \end{aligned}$$

所以冲激响应

$$h(t) = \varepsilon(t-1) + \varepsilon(t-2) - \varepsilon(t-3) - \varepsilon(t-4)$$

$h(t)$  的波形如图 p6-1 所示。

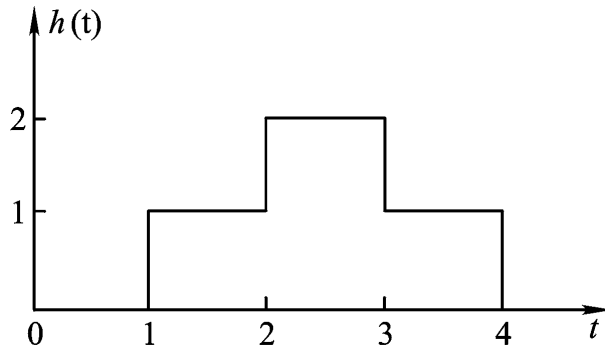
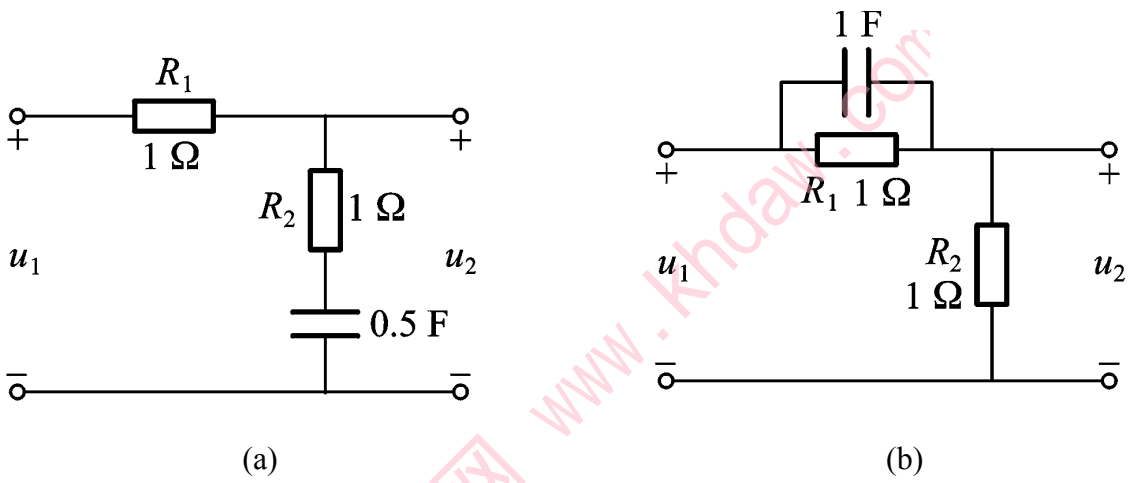


图 p6-1

6-2 试画出题 6-2 图所示网络的系统函数  $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$  的波特图。



题 6-2 图

解 (a) 由图可得系统函数

$$H(s) = \frac{sR_2C + 1}{(R_1 + R_2)C + 1} = \frac{0.5s + 1}{1.5 + 1} = \frac{0.5s + 1}{2.5}$$

可见其超前环节  $\omega_1 = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ rad/s}$ ，滞后环节  $\omega_2 = 1 \text{ rad/s}$ ，故得波特图如图 p6-2(a)所示。

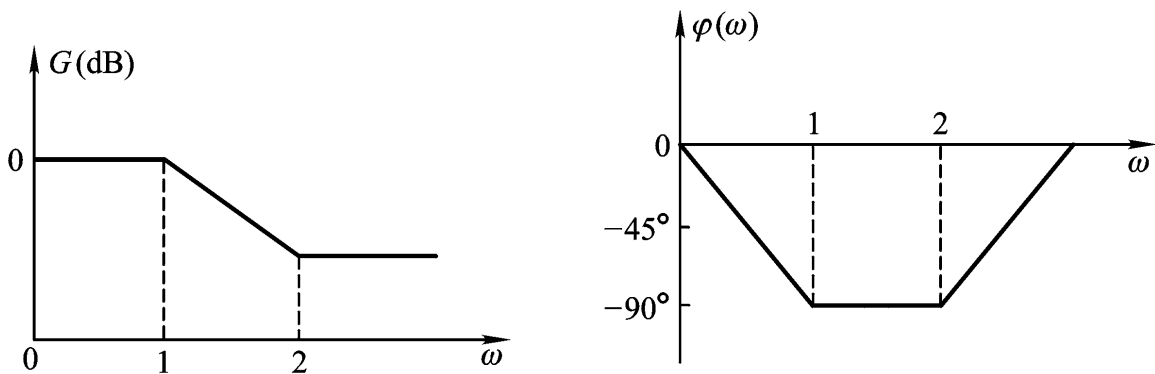


图 p6-2(a)

(b) 由图可得系统函数

$$H(s) = \frac{R_2}{p} = \frac{R_2}{p + p} = \frac{s\tau_1 + 1}{\dots}$$

其中

$$\tau_1 = R_1 C, \tau_2 = (R_1 // R_2) C$$

故

$$H(s) = \frac{0.5(s+1)}{\dots}$$

从而得波特图如图 p6-2(b)所示。

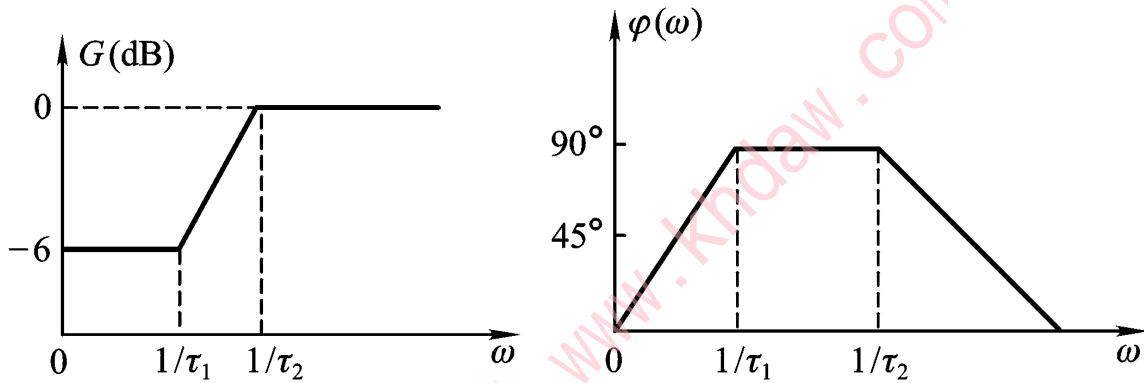
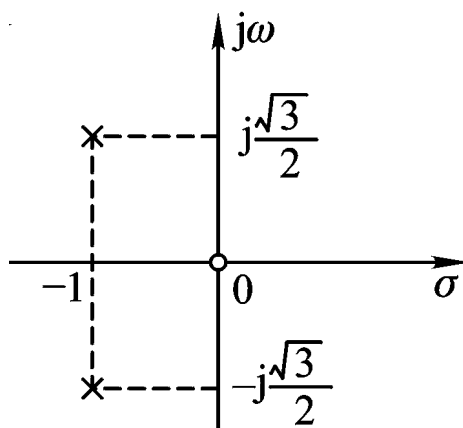


图 p6-2(a)

6-3 已知某系统函数  $H(s)$  的零、极点分布如题 6-3 图所示,若冲激响应的初值  $h(0_+) = 2$ ,求系统函数  $H(s)$ , 并求出  $h(t)$ 。



题 6-3 图

解 由图示零、极点分布, 应有

$$H(s) = \frac{H_0 s}{s^2 + 2}$$

又因为

$$h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = H(0) = 2$$

故有

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 2}$$

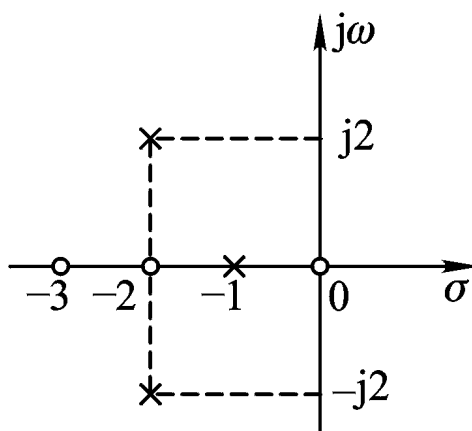
进一步可表示为

$$\begin{aligned} H(s) &= 2 \left[ \frac{s+1}{s^2 + 2} - \frac{1}{s^2 + 2} \right] \\ &= \frac{2(s+1)}{s^2 + 2} - \frac{2}{s^2 + 2} \end{aligned}$$

所以

$$h(t) = 2e^{-t} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right), \quad t \geq 0$$

**6-4** 某系统函数  $H(s)$  的零、极点分布如题 6-4 图所示，且  $H_0 = 5$ ，试写出  $H(s)$  的表达式。



题 6-4 图

**解** 从图可知系统的零点为

$$z_1 = 0, z_2 = -2, z_3 = -3$$

极点为

$$s_1 = -1, s_{2,3} = -2 \pm j2$$

故系统函数

$$\begin{aligned} H(s) &= H_0 \cdot \frac{N(s)}{D(s)} = 5 \cdot \frac{s(s+2)(s+3)}{(s+1)(s^2+4s+8)} \\ &= \frac{5s(s^2+5s+6)}{(s+1)(s^2+4s+8)} \end{aligned}$$

**6-5** 设系统函数

$$H(s) = \frac{5(s+1)}{(s+2)(s+5)}$$

试画出其 S 域模拟框图。

**解**  $H(s)$  可改写为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{5(s+1)}{(s+2)(s+5)} = \frac{5s+5}{s^2+7s+10} \\ &= \frac{5s^{-2}+5s^{-3}}{1+7s^{-1}+10s^{-2}} \end{aligned}$$

从而得模拟图如图 p6-5 所示。

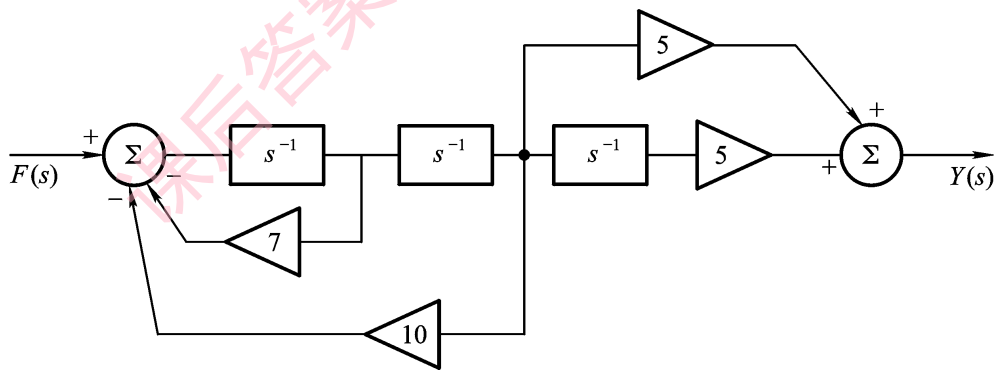
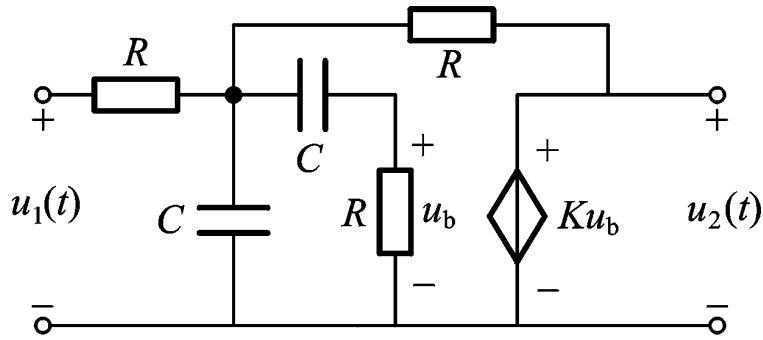


图 p6-5

**6-6** 如题 6-6 图所示为二阶有源带通系统的模型，设  $R=1\Omega$ ,  $C=1F$ ,  $K=3$ , 试求系统函数  $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ 。



题 6-6 图

**解** 对于电路的 S 域模型, 可列节点方程

$$\begin{cases} \frac{U_1(s) - U_a(s)}{n} + \frac{U_2(s) - U_a(s)}{n} = \frac{U_a(s)}{1} + \frac{U_b(s)}{n} \\ sC(U_a - U_b) = \frac{U_b(s)}{n} \\ U_2(s) = KU_b(s) \end{cases}$$

代入数据后, 可得

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{3s}{s^2 + 2s + 2}$$

**6-7** 试判定下列系统的稳定性。

(1)  $H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2}$

(2)  $H(s) = \frac{3s+1}{s^3 + 4s^2 - 2s + 2}$

(3)  $H(s) = \frac{2s+4}{(s+1)(s^2 + 4s + 2)}$

**解** (1) 因  $H(s)$  分母多项式各项系数均为正, 故稳定。

(2) 因  $H(s)$  分母多项式有负系数, 故不稳定。

(3) 因

$$H(s) = \frac{2s+4}{(s+1)(s^2 + 4s + 2)} = \frac{2s+4}{(s+1)(s+1)(s+2)}$$

其极点均在左半平面, 故系统稳定。

**6-8** 已知系统的微分方程为

$$y'''(t) + y'(t) + 6y(t) = f'(t)$$

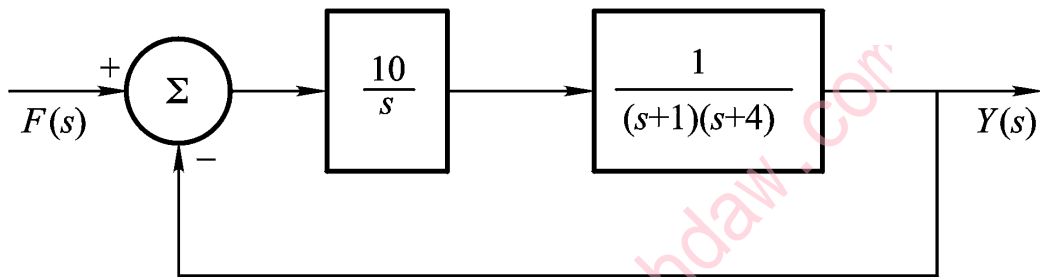
试求系统函数  $H(s)$ ，系统是否稳定？

**解** 因系统函数为

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 6s + 1}$$

则二阶系统之  $D(s)$  的各项系数均为正，故系统稳定。

**6-9** 如题 6-9 图所示系统，试判定其稳定性。



题 6-9 图

**解** 由图可得系统函数

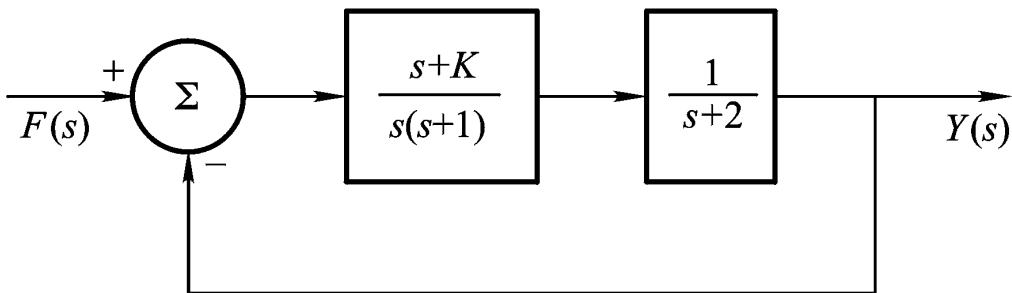
$$H(s) = \frac{s \cdot (s+1)(s+4)}{10 \cdot 1} = \frac{2s+4}{s^2 + 5s + 4}$$

因为  $a_1 a_2 = 20$ ， $a_0 a_3 = 10$ ，故满足

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

故系统稳定。

**6-10** 如题 6-10 图示反馈系统，为使其稳定，试确定  $K$  值。



题 6-10 图



解 该系统的  $H(s)$  为

$$H(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + K} = \frac{s+2}{s^2 + 2s + K}$$

从必要条件考虑, 应当  $K > 0$ , 再由

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

考虑, 应满足  $K < 9$ , 故当

$$0 < K < 9$$

时系统稳定。

也可以从劳斯阵列判定。因为阵列:

$$\begin{array}{cc} 3 & K \\ 9-K & 0 \end{array}$$

为使第一列元素不变号, 即应

$$\frac{9-K}{3} > 0, \quad K > 0$$

即

$$0 < K < 9$$

时系统稳定。

## 第7章习题解析

7-1 试画出下列离散信号的图形。

(a)  $f_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(n)$

(b)  $f_2(n) = \varepsilon(2-n)$

(c)  $f_3(n) = \varepsilon(-2-n)$

(d)  $f_4(n) = 2(1-0.5^n)\varepsilon(n)$

解 各信号的图形分别如图 p7-1 所示。

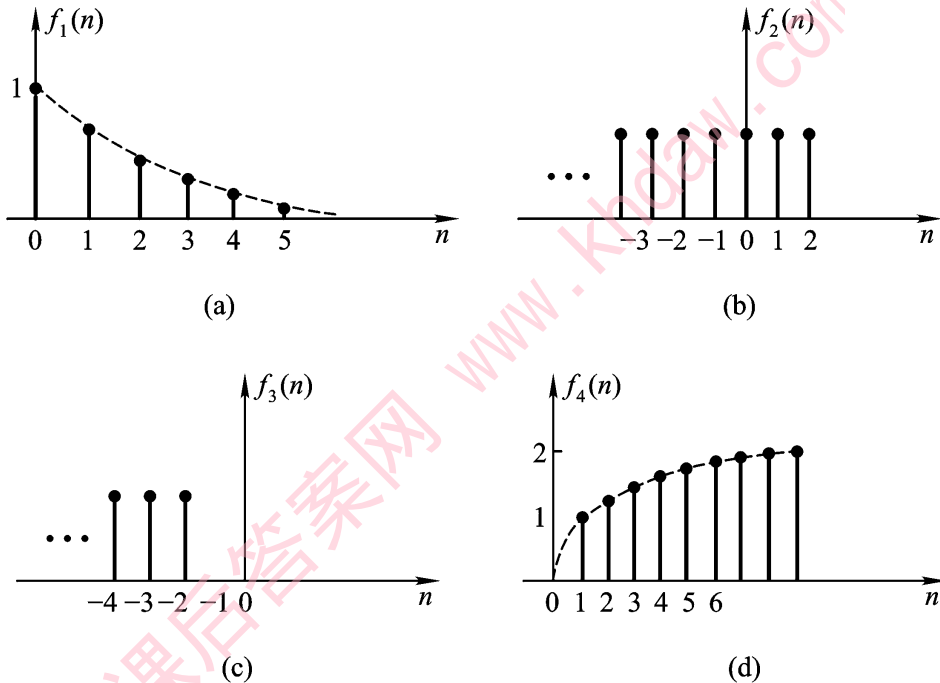


图 p7-1

7-2 试画出下列序列的图形。

(a)  $f_1(n) = \varepsilon(n-2) - \varepsilon(n-6)$

(b)  $f_2(n) = \varepsilon(n+2) + \varepsilon(-n)$

(c)  $f_3(n) = n\varepsilon(n) \cdot [\varepsilon(n) - \varepsilon(n-5)]$

(d)  $f_4(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + \delta(n-4)$

解 各序列的图形分别如图 p7-2 所示。

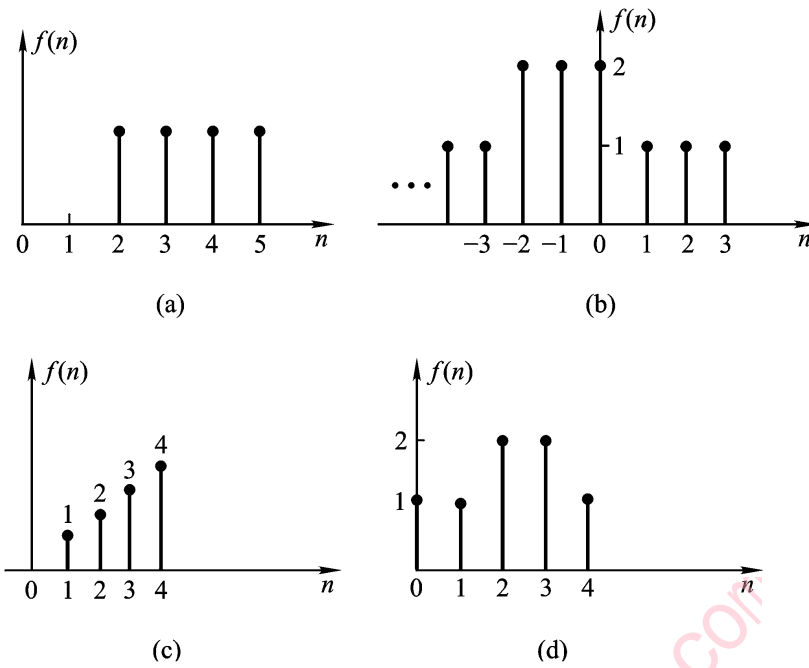


图 p7-2

7-3 设有差分方程

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = f(n)$$

起始状态  $y(-1) = -\frac{1}{2}$ ,  $y(-2) = \frac{5}{4}$ 。试求系统的零输入响应。

**解** 系统的特征方程为

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

其特征根为

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

则零输入响应的形式为

$$\begin{aligned} y_{zi}(n) &= K_1 \lambda_1^n + K_2 \lambda_2^n \\ &= K_1 (-1)^n + K_2 (-2)^n \end{aligned}$$

由起始状态  $y(-1)$  和  $y(-2)$  导出起始值  $y(0)$  和  $y(1)$

$$n=0 \text{ 时, } y(0) = -3y(-1) - 2y(-2) = 1.5 - 2.5 = -1$$

$$n=1 \text{ 时, } y(1) = -3y(0) - 2y(-1) = 3 + 1 = 4$$

从而有

$$\begin{cases} y_{zi}(0) = K_1 + K_2 = -1 \\ y_{zi}(1) = -K_1 - 2K_2 = 4 \end{cases}$$

解得

$$K_1 = 2, \quad K_2 = -3$$

故

$$y_{zi}(n) = 2(-1)^n - 3(-2)^n, \quad n \geq 0$$

7-4 设有离散系统的差分方程为

$$y(n) + 4y(n-1) + 3y(n-2) = 4f(n) + f(n-1)$$

试画出其时域模拟图。

解 原方程可以写为

$$y(n] = -4y(n-1) - 3y(n-2) + 4f(n) + f(n-1)$$

从而可得时域模拟图 p7-4, 图中 D 为单位延时 (位移) 器。

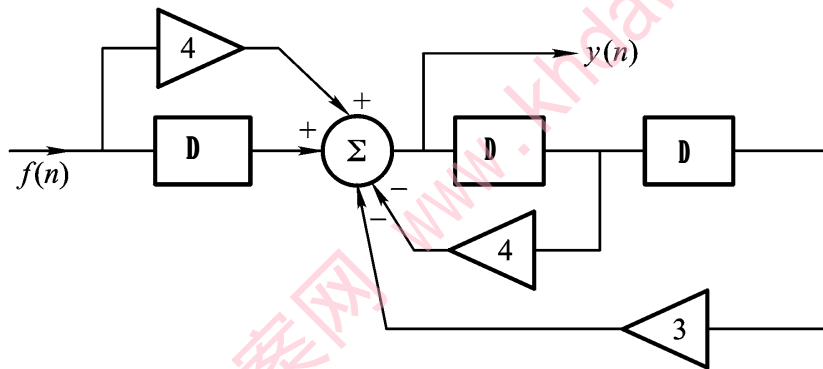
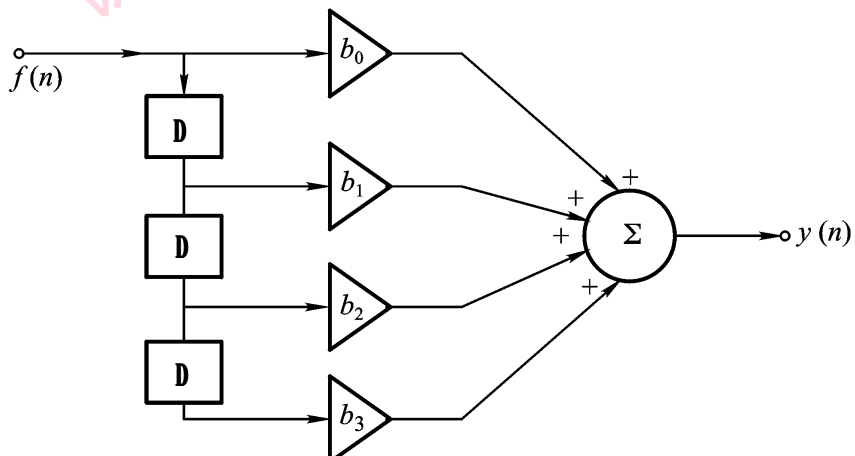


图 p7-4

7-5 如图所示为工程上常用的数字处理系统, 是列出其差分方程。

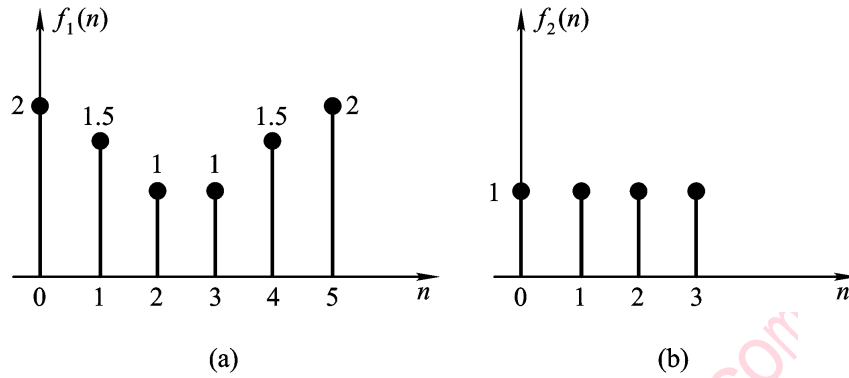


题 7-5 图

解 由图可得差分方程

$$y(n] = b_0 f(n) + b_1 f(n-1) + b_2 f(n-2) + b_3 f(n-3)$$

7-6 设有序列  $f_1(n)$  和  $f_2(n)$ , 如图 7-6 所示, 试用二种方法求二者的卷积。



题 7-6 图

解 方法一: 用“乘法”

|  |  |   |     |     |     |     |     |     |
|--|--|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|  |  | 2 | 1.5 | 1   | 1   | 1.5 | 2   |     |
|  |  | × |     |     | 1   | 1   | 1   | 1   |
|  |  |   |     |     |     |     |     |     |
|  |  | 2 | 1.5 | 1   | 1   | 1.5 | 2   |     |
|  |  | 2 | 1.5 | 1   | 1   | 1.5 | 2   |     |
|  |  | 2 | 1.5 | 1   | 1   | 1.5 | 2   |     |
|  |  | 2 | 1.5 | 1   | 1   | 1.5 | 2   |     |
|  |  |   |     |     |     |     |     |     |
|  |  | 2 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 5   | 5.5 | 4.5 |
|  |  |   |     |     |     |     |     | 2   |

即有

$$f_1(n) * f_2(n) = \{ 2, 3.5, 4.5, 5.5, 5, 5.5, 4.5, 3.5, 2 \}$$

方法二: 用单位序列表示各函数后卷积。因为

$$f_1(n) = 2\delta(n) + 1.5\delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + 1.5\delta(n-4) + 2\delta(n-5)$$

$$f_2(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)$$

则

$$f_1(n) * f_2(n) = 2\delta(n) + 3.5\delta(n-1) + 4.5\delta(n-2) + 5.5\delta(n-3) + 5\delta(n-4) + 5.5\delta(n-5) + 4.5\delta(n-6) + 3.5\delta(n-7) + 2\delta(n-8)$$

7-7 设有一阶系统为

$$y(n) - 0.8y(n-1) = f(n)$$

试求单位响应  $h(n)$  和阶跃响应  $s(n)$ ，并画出  $s(n)$  的图形。

**解** 由方程知特征根  $\lambda = 0.8$ ，故

$$h(n) = \lambda^n \varepsilon(n) = 0.8^n \varepsilon(n)$$

阶跃响应为

$$s(n) = h(n) * \varepsilon(n) = \frac{1 - 0.8^{n+1}}{1 - 0.8} = 5(1 - 0.8^{n+1})\varepsilon(n)$$

$s(n)$  的图形如图 p7-7 所示。

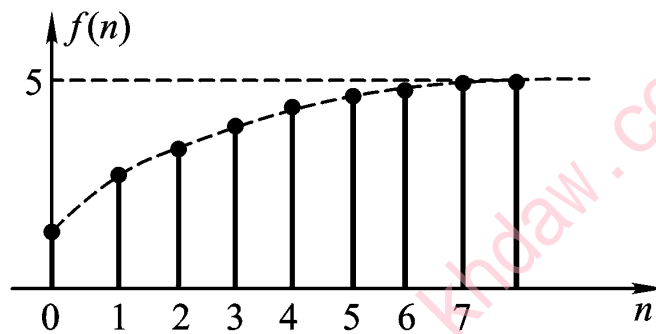


图 p7-7

**7-8** 设离散系统的单位响应  $h(n) = (\frac{1}{2})^n \varepsilon(n)$ ，输入信号  $f(n) = 2^n$ ，试求零状态响应  $y(n)$ 。

**解** 由给定的  $f(n)$  和  $h(n)$ ，得

$$\begin{aligned} y(n) &= f(n) * h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n-k)h(k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad |a| < 1$$

故得

$$y(n) = \frac{6}{2} \cdot 2^n \varepsilon(n) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \varepsilon(n)$$

**7-9** 试证明

$$\lambda_1^n \varepsilon(n) * \lambda_2^n \varepsilon(n) = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

证明

$$\begin{aligned}\lambda_1^n \varepsilon(n) * \lambda_2^n \varepsilon(n) &= \sum_{k=0}^n \lambda_1^{n-k} \cdot \lambda_2^k = \lambda_1^n \sum_{k=0}^n \lambda_1^{-k} \lambda_2^k \\ &= \lambda_1^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k = \lambda_1^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \\ &= \lambda_1^n \cdot \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\end{aligned}$$

7-10 已知系统的单位响应,

$$h(n) = a^n \varepsilon(n) \quad (0 < a < 1)$$

输入信号  $f(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-6)$ , 求系统的零状态响应。

解

$$y(n) = f(n) * h(n) = [\varepsilon(n) - \varepsilon(n-6)] * a^n \varepsilon(n)$$

因为

$$\varepsilon(n) * a^n \varepsilon(n) = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \cdot \varepsilon(n)$$

利用时延性质, 则

$$\varepsilon(n-6) * a^n \varepsilon(n) = \frac{1 - a^{n+1-6}}{1 - a} \cdot \varepsilon(n-6)$$

所以得

$$y(n) = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \cdot \varepsilon(n) - \frac{1 - a^{n-5}}{1 - a} \cdot \varepsilon(n-6)$$

## 第 8 章习题解析

8-1 求下列离散信号的 Z 变换, 并注明收敛域。

(a)  $\delta(n-2)$

(b)  $a^n \varepsilon(n)$

(c)  $0.5^{n-1} \varepsilon(n-1)$

(d)  $(0.5^n + 0.25^n) \varepsilon(n)$

解 (a)  $F(z) = z^{-2}, \quad 0 < |z| \leq \infty$

(b) 
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az)^{-n}$$

$$= \frac{1}{1 - (az)^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > \frac{1}{a}$$

(c) 
$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 0.5^{n-1} \cdot z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

(d) 
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n \cdot z^{-n}$$

$$= \frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-0.25}, \quad |z| > 0.5$$

8-2 求下列  $F(z)$  的反变换  $f(n)$ 。

(a)  $F(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{z-1}$

(b)  $F(z) = \frac{1-2z^{-1}}{z-1}$

(c)  $F(z) = \frac{2z}{z^2-1}$

(d)  $F(z) = \frac{3z^2+z}{z^2-0.5z-1}$

(e)  $F(z) = \frac{z}{z^2-1}$

解 (a) 因为



$$F(z) = \frac{z^2 - 0.5z}{(z-1)(z-1)}$$

故

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z-0.5}{(z-1)(z-1)} = \frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z-1}$$

解得

$$K_1 = 4, \quad K_2 = -3$$

进而

$$F(z) = \frac{4z}{z-1} - \frac{3z}{z-1}$$

所以

$$f(n) = [4(-\frac{1}{2})^n - 3(-\frac{1}{2})^n] \varepsilon(n)$$

$$(b) \quad F(z) = \frac{z-2}{(z-1)(z-1)} = \frac{z}{(z-1)(z-1)} - \frac{2}{(z-1)(z-1)} = \frac{z}{z-1} - \frac{2}{z-1}$$

所以

$$f(n) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n \varepsilon(n) - (-\frac{1}{2})^{n-1} \varepsilon(n-1)$$

(c) 由于

$$F(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-2)}$$

故

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{2}{(z-1)(z-2)} = \frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z-2}$$

解得

$$K_1 = -2, \quad K_2 = 2$$

进而

$$F(z) = \frac{-2z}{z-1} + \frac{2z}{z-2}$$

所以

$$f(n) = -2\varepsilon(n) + 2(2)^n \varepsilon(n) = 2(2^n - 1)\varepsilon(n)$$

(d) 由于

$$F(z) = \frac{3z^2 + z}{(z-0.5)(z-0.5)}$$

故

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{3z+1}{(z-0.2)(z-0.4)} = \frac{K_1}{z-0.2} + \frac{K_2}{z-0.4}$$

解得

$$K_1 = \frac{8}{3}, \quad K_2 = \frac{1}{3}$$

故有

$$F(z) = \frac{3}{z-0.2} + \frac{3}{z-0.4}$$

所以

$$f(n) = \left[ \frac{8}{3} (0.2)^n + \frac{1}{3} (-0.4)^n \right] \varepsilon(n)$$

(e) 由于

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}$$

故

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{K_1}{z-1} + \frac{K_{11}}{(z-1)^2} + \frac{K_{12}}{z-1}$$

解得

$$K_1 = 1, \quad K_{11} = -1, \quad K_{12} = -1$$

从而有

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1}$$

故得

$$f(n) = (2^n - n - 1) \varepsilon(n)$$

**8-3** 试用  $z$  变换的性质求以下序列的  $z$  变换。

(a)  $f(n) = (n-3)\varepsilon(n-3)$

(b)  $f(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-N)$

**解** (a) 由时延性质, 有

$$F(z) = \frac{z}{z-1} \cdot z^{-3} = \frac{1}{z-1}$$

(b)  $F(z) = \frac{z}{z-1} - z^{-N} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1} (1 - z^{-N})$

**8-4** 试证明初值定理

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

**证明** 因为

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

当  $z \rightarrow \infty$  时, 则上式右边除  $f(0)$  外均为零, 故

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

**8-5** 试用卷和定理证明以下关系:

(a)  $f(n) * \delta(n-m) = f(n-m)$

(b)  $\varepsilon(n) * \varepsilon(n) = (n+1)\varepsilon(n)$

**证明** (a) 因由卷和定理

$$f(n) * \delta(n-m) \leftrightarrow F(z) \cdot z^{-m}$$

而

$$f(n-m) \leftrightarrow z^{-m} F(z)$$

故得

$$f(n) * \delta(n-m) = f(n-m)$$

(b) 因为

$$\varepsilon(n) * \varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

而

$$(n+1)\varepsilon(n) = n\varepsilon(n) + \varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

所以

$$\varepsilon(n) * \varepsilon(n) = (n+1)\varepsilon(n)$$

**8-6** 已知  $\varepsilon(n) * \varepsilon(n) = (n+1)\varepsilon(n)$ , 试求  $n\varepsilon(n)$  的 Z 变换。

**解** 因由卷和定理

$$\varepsilon(n) * \varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)^2}$$

而

$$n\varepsilon(n) = (n+1)\varepsilon(n) - \varepsilon(n)$$

所以

$$n\varepsilon(n) \leftrightarrow \frac{z^2}{z-1} - \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1}$$

**8-7** 已知因果序列的 Z 变换为  $F(z)$ ，试分别求下列原序列的初值  $f(0)$ 。

$$(1) F(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.05z^{-2}}$$

$$(2) F(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

**解** (1)  $F(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1} + 0.05z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.5z + 0.05}$

所以

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 1$$

$$(2) F(z) = \frac{z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

所以

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$$

**8-8** 已知系统的差分方程、输入和初始状态如下，试用 Z 变换法求系统的完全响应。

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = f(n) - \frac{1}{2}f(n-1)$$

$$f(n) = \varepsilon(n), \quad y(-1) = 1。$$

**解** 对方程取 Z 变换，有

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) - 0.5 = F(z) - 0.5z^{-1}F(z)$$

即

$$(1 - 0.5z^{-1})Y(z) = (1 - 0.5z^{-1})\frac{z}{z-1} + 0.5$$

故

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{0.5z}{z-0.5}$$

所以

$$y(n) = \varepsilon(n) + 0.5(0.5)^n$$

**8-9** 设系统差分方程为

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = f(n)$$

起始状态  $y(-1) = 3$ ,  $y(-2) = 2$ , 当  $f(n) = z\varepsilon(n)$  时, 求系统的响应  $y(n)$ 。

**解** 对差分方程取  $z$  变换, 得

$$Y(z) - 5[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + 6[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] = F(z)$$

即

$$Y(z) - 5z^{-1}Y(z) - 15 + 6z^{-2}Y(z) + 18z^{-1} + 12 = \frac{2z}{z-1}$$

从而有

$$Y(z) = \frac{z-1}{z^2-5z+6} = \frac{5z^3-21z^2+18z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

故

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z-2} + \frac{K_3}{z-3}$$

解得

$$K_1 = 1, \quad K_2 = 4, \quad K_3 = 0$$

则有

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{4z}{z-2}$$

得全响应

$$y(n) = \varepsilon(n) + 4(2)^n \varepsilon(n)$$

**8-10** 设一系统的输入  $f(n) = \delta(n) - 4\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$ , 系统函数

$$H(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 2}$$

试求系统的零状态响应。

**解** 因为

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 4z + 2} = \frac{z^2}{(z - 0.5)(z - 1)}$$

所以

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{(z - 0.5)(z - 1)} = \frac{K_1}{z - 0.5} + \frac{K_2}{z - 1}$$

解得

$$K_1 = -1, \quad K_2 = 2$$

故

$$H(z) = \frac{-z}{-0.5z} + \frac{2z}{-1}$$

得

$$h(n) = -(0.5)^n + 2\varepsilon(n)$$

所以

$$\begin{aligned}y(n] &= h(n) * f(n) \\ &= [-(0.5)^n + 2\varepsilon(n)] * [\delta(n) - 4\delta(n-1) + 2\delta(n-2)] \\ &= 4\delta(n) - 2\varepsilon(n) - (0.5)^n \varepsilon(n)\end{aligned}$$

**8-11** 设有系统方程

$$y(n] - 0.2y[n-1] + 0.8y[n-2] = f(n] + 2f[n-1]$$

试画出其 Z 域的模拟框图。

**解** 在零状态下对方程取 z 变换，得

$$Y(z) - 0.2z^{-1}Y(z) + 0.8z^{-2}Y(z) = F(z) + 2z^{-1}F(z)$$

即

$$(1 - 0.2z^{-1} + 0.8z^{-2})Y(z) = (1 + 2z^{-1})F(z)$$

故有

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1} + 0.8z^{-2}}$$

由此可以画出模拟图如图 p8-11 所示。

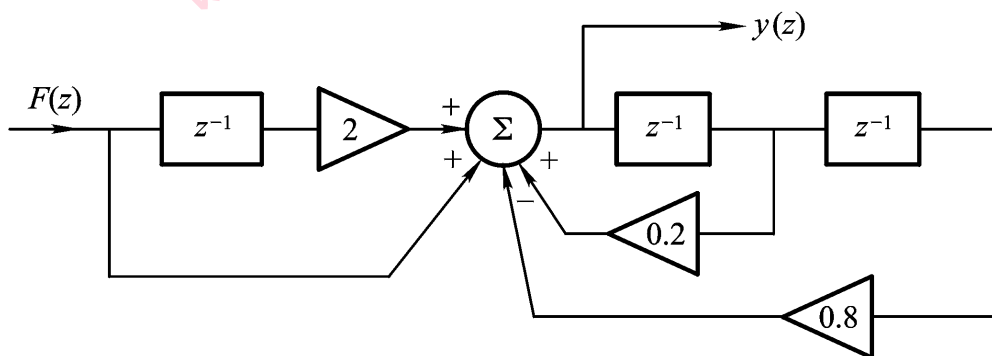
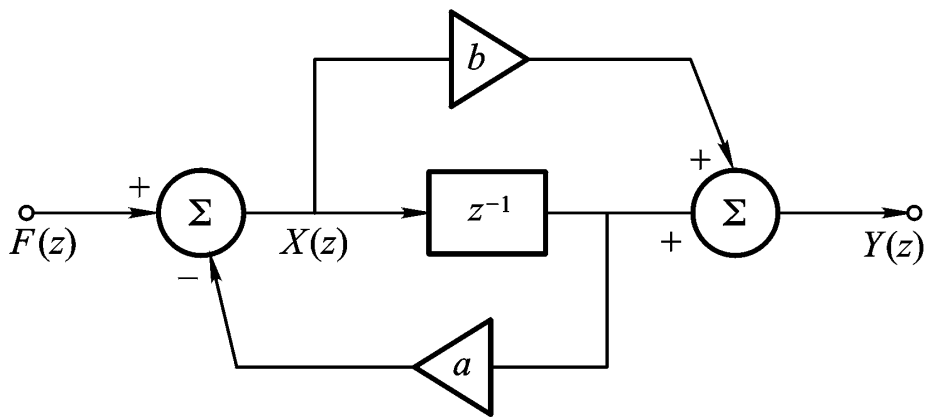


图 p8-11

**8-12** 如题 8-12 图所示 z 域框图，试写出其差分方程。



题 8-12 图

解 由图可得

$$Y(z) = \frac{b + z^{-1}}{1 + az^{-1}} F(z)$$

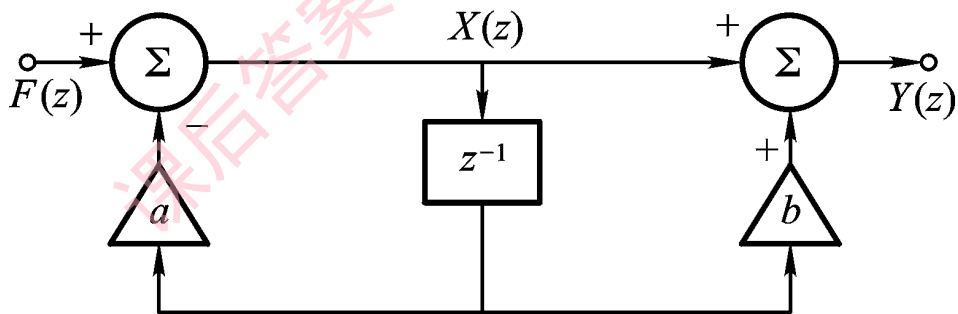
故有

$$(1 + az^{-1})Y(z) = (b + z^{-1})F(z)$$

所以

$$y(n) + ay(n-1) = bf(n) + f(n-1)$$

8-13 如题 8-13 图所示  $z$  域框图，是写出其差分方程。



题 8-13 图

解 由图可得

$$X(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}} F(z)$$

$$Y(z) = (1 + bz^{-1})X(z)$$

故有

$$Y(z) = \frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}} F(z)$$

即

$$(1 + az^{-1})Y(z) = (1 + bz^{-1})F(z)$$

从而有差分方程

$$y(n) + ay(n-1) = f(n) + bf(n-1)$$

**8-14** 对于题 8-12 和 8-13, 试分别写出系统函数  $H(z)$ 。

**解** 对于题 8-12, 因

$$X(z) = F(z) - az^{-1}X(z)$$

$$F(z) = (1 + az^{-1})X(z)$$

而  $Y(z) = bX(z) + z^{-1}X(z) = (b + z^{-1})X(z)$

故

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{b + z^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

对于题 8-13, 因

$$X(z) = \frac{1}{1 + az^{-1}}F(z)$$

$$Y(z) = (1 + bz^{-1})X(z)$$

故

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

**8-15** 已知某数字滤波器的差分方程为

$$y(n] - 0.7y(n-1) + 0.12y(n-2) = 2f(n) - f(n-1)$$

(1) 求系统函数  $H(z)$ ;

(2) 求单位响应  $h(n)$ 。

**解** (1) 在零状态下对方程取  $z$  变换, 得

$$(1 - 0.7z^{-1} + 0.12z^{-2})Y(z) = 2F(z) - z^{-1}F(z)$$

故系统函数

$$H(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.12z^{-2}} = \frac{2z^2 - z}{z^2 - 0.7z + 0.12}$$

(2) 由于

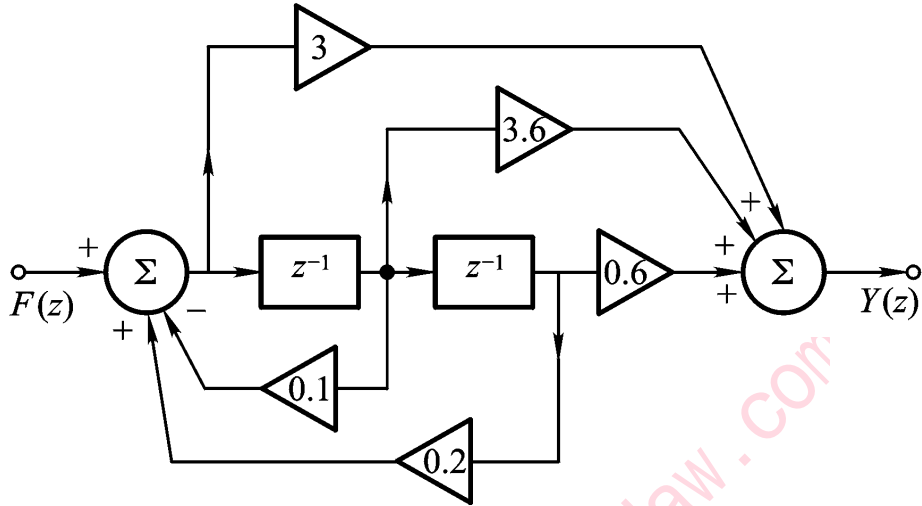
$$H(z) = \frac{2z^2 - z}{z^2 - 0.7z + 0.12} = \frac{4z}{z - 0.2} - \frac{2z}{z - 0.4}$$



故单位响应

$$h(n) = [4(0.3)^n - 2(0.4)^n] \varepsilon(n)$$

8-16 如题 8-16 图所示系统，试求其系统函数  $H(z)$  和单位响应  $h(n)$ 。



题 8-16 图

解 由模拟图可得

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0.6z^{-2} + 3.6z^{-1} + 3}{1 - 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}} = \frac{3z^2 + 3.6z + 0.6}{z^2 - 0.1z - 0.2} \\ &= \frac{3z^2 + 3.6z + 0.6}{(z - 0.5)(z - 0.4)} = K_0 + \frac{K_1z}{z - 0.5} + \frac{K_2z}{z - 0.4} \end{aligned}$$

可得

$$K_0 = -3, \quad K_1 = -1, \quad K_2 = 7$$

故得

$$h(n) = -3\delta(n) - (-0.5)^n \varepsilon(n) + 7(0.4)^n \varepsilon(n)$$

8-17 设一阶系统为

$$y(n) - \frac{1}{\gamma} y(n-1) = f(n)$$

- (1) 求单位响应  $h(n)$ ;
- (2) 若系统的零状态响应为

$$y(n) = 3\left[\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^n\right] \varepsilon(n)$$

试求输入信号。

**解** (1) 对方程取  $z$  变换, 得

$$(1 - \frac{1}{2}z^{-1})Y(z) = F(z)$$

故

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

所以

$$h(n) = (\frac{1}{2})^n \varepsilon(n)$$

(2) 由  $y(n)$  可得  $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{3z}{z - 0.5} - \frac{3z}{z - 1}$$

故有

$$F(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{0.5}{z - 0.5}$$

最后输入

$$f(n) = 0.5(0.5)^n \varepsilon(n-1)$$

**8-18** 设离散系统输入  $f(n) = \varepsilon(n)$  时, 零状态响应  $y(n) = 2(1 - 0.5^n)\varepsilon(n)$ ; 若输入  $f(n) = 0.5^n \varepsilon(n)$  时, 求系统的响应; 该系统是否稳定?

**解**

$$Y(z) = \frac{2z}{z - 1} - \frac{2z}{z - 0.5}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z - 1}$$

故

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = 2 - \frac{2(z-1)}{z-0.5}$$

当  $f(n) = 0.5^n \varepsilon(n)$  时, 则

$$F(z) = \frac{z}{z - 0.5}$$

所以

$$Y(z) = H(z)F(z) = \frac{2z}{z - 0.5} - \frac{2z(z-1)}{(z - 0.5)^2}$$

最后得

$$y(n) = 2n(0.5)^n \varepsilon(n)$$

**8-19** 设有一个二阶横向滤波器，它可对输入序列的当前值及以前的两个采样值进行平均，即

$$y(n) = \frac{1}{3}[f(n) + f(n-1) + f(n-2)]$$

问该系统是否稳定？若稳定试求其幅频特性和相频特性。

**解** 对方程取  $z$  变换，得

$$H(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$

因极点  $z=0$ ，故系统稳定。频率响应为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= \frac{1}{3}(1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T}) \\ &= \frac{1}{3}[(1 + \cos \omega T + \cos 2\omega T) - j(\sin \omega T + \sin 2\omega T)] \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega T})| &= \frac{1}{3} \sqrt{3 + 4 \cos \omega T + 2 \cos 2\omega T} \\ \varphi(\omega) &= -\arctan \frac{\sin \omega T + \sin 2\omega T}{1 + \cos \omega T + \cos 2\omega T} \end{aligned}$$

特性如图 p8-19 所示。

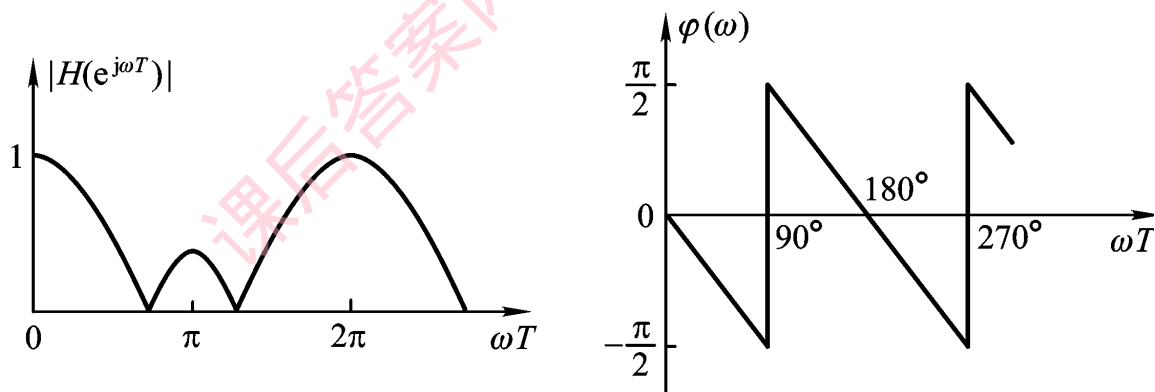


图 p8-19

**8-20** 设有系统函数

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z + 4}{1 - z^{-1}}$$

试求系统的幅频特性和相频特性。

解 由系统函数可得极点

$$z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm j \frac{\sqrt{3}}{4}$$

故系统稳定，从而可得频率响应为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= \frac{4(e^{j\omega T} - 2 + 4e^{-j\omega T})}{4e^{j\omega T} - 2 + 4e^{-j\omega T}} \\ &= 4 \cdot \frac{(5 \cos \omega T - 2) - j3 \sin \omega T}{(5 \cos \omega T - 2) + j3 \sin \omega T} = 4e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega T})| &= 4 \\ \varphi(\omega) &= -2 \arctan\left(\frac{3 \sin \omega T}{5 \cos \omega T - 2}\right) \end{aligned}$$

特性如图 p8-20 所示。

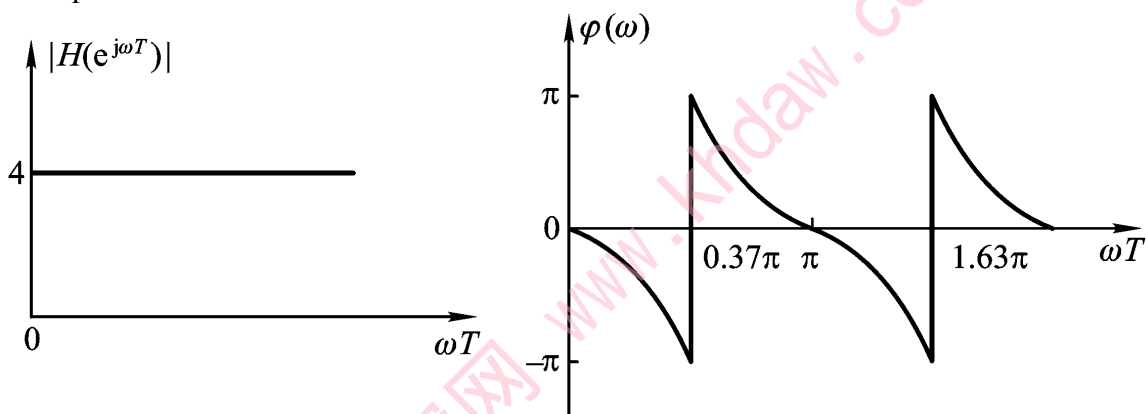


图 p8-20