

温湿环境下 层合圆柱壳体表面分层屈曲分析

摘要

局部分层屈曲是复合材料层壳结构的一种重要损伤形式。本文运用能量法研究了对称层合圆柱壳体在温湿环境下的表面分层屈曲问题。假定分层区域为椭圆、矩形。对于子层分层，其铺层既可以为单层，也可以为多层；既可以为对称铺层，也可以为非对称铺层。为了更好地反映工程实际，在分析子层的屈曲时，考虑了其存在面内横向位移的因素。通过对几种不同材料、不同铺层形式对称层合圆柱壳体在各种温湿条件下的表面分层屈曲的实例计算，分析了温湿效应与分层屈曲临界应变值的关系，研究了母层壳、子层壳的几何、物理参数对分层屈曲临界屈曲应变的影响，最后探讨了拉伸和压缩屈曲形成的机制。

关键词

圆柱形层合壳体，表面分层，分层屈曲，母层壳，子层壳
温度，湿度，横向位移

Buckling Analysis of Near Surface Delamination of Cylindrical Laminated Shell in the Condition of Temperature and Humidity

A B S T R A C T

Delamination is one of the important defect forms of composite laminate construction. In this paper, the effects of temperature and humidity on the near surface delamination in a symmetric cylindrical laminated shell are investigated by using the energy method. The delamination shape is assumed to be ellipse or rectangle. The sub-laminated shell can be monolayer or multilayer. Also, it can be symmetric or dissymmetric lamination. To accord with the engineering practice more accurately when analyzing the delamination, transverse displacement of the sub-laminated shell is thought over. Some delamination examples have been calculated. In these examples, the cylindrical laminated shells have different laminations and materials. In the meantime, the effects of temperature and humidity are taken into account. The relationship between critical strain value and the effects of temperature and humidity is studied. The relationships between critical strain value and the parameters of geometry and physics are also studied. The formation mechanism of tension and compression delamination buckling is approached later.

KEY WORDS

Cylindrical laminated shell, near surface delamination, delamination buckling, parent laminated shell, sub-laminated shell, temperature, humidity, transverse displacement

第一章 前 言

复合材料是指由两种或两种以上的材料组成的一种新材料，它的组分材料具有不同的化学或物理性质，且各组分材料之间具有明显的界面。在工程上，所谓复合材料通常是指将一种材料人为均匀地分散在另一种材料中，以克服单一材料的某些弱点，使之具有优于各组分材料的综合性能，有时甚至是组分材料所没有的优良性能的新材料。组分材料中的分散相材料称为增强材料，包容相材料称为基体。这种复合材料在很多力学性能指标超过了一般钢材，在国民经济建设中得到越来越广泛的应用。

纤维增强复合材料从制造到使用，可能存在各种局部缺陷和损伤，从细观方面看，先在制成的材料内部有各种局部的微小缺陷，例如树脂中孔洞或局部树脂过多，纤维个别断头及有些区域纤维排列过密或不平直，局部纤维与基体界面脱胶等，有些缺陷可归为损伤，损伤由细微的到稍大的尺寸，但总的是尺寸较小。在复合材料作为结构受力而发生变形的过程中，随着载荷增加，原有缺陷扩大或发生新的损伤，例如基体中出现微小裂纹，纤维断裂，基体与纤维界面开裂等，损伤逐渐扩大，裂纹扩展。复合材料的损伤主要有四种类型：(1)基体开裂，(2)界面脱粘，(3)分层，(4)纤维断裂。有时这四类损伤不同组合而形成综合损伤，随着损伤区域和尺寸的增大，宏观裂纹扩展，最后达到材料的断裂破坏，复合材料的破坏过程是由原始缺陷、微小损伤，随载荷增大损伤裂纹扩展，直到宏观裂纹扩展，断裂的过程。

在复合材料的几种损伤类型中，分层损伤是很普遍的，由于制造中的缺陷、运行中受到外来物体的碰撞和自由边缘效应等常使层合结构局部分层，在静力或周期载荷作用下，分层发生扩展；或由发生局部的分层屈曲而扩展，使结构刚度下降以至引起破坏和失效。产生分层的原因较为复杂，它与工艺方面的成型、固化、基体和增强纤维界面的胶结以及初始缺陷等情况有关，也与纤维和基体的损伤破坏过程、层合结构的叠合顺序、载荷形式等力学方面的因素有关。实验研究表明，由于层合结构厚度方向上的层间粘结强度很小，往往产生裂纹或分层，使结构的拉伸和弯曲刚度降低。当层合结构在承载状态下，将导致层间分离，其区域形状可由椭圆、矩形、带形等来描述。随着载荷增加，分层区域可能发生屈曲，并续而发生分层扩展，导致层合结构整体刚度迅速下降，直到发生破坏。因此研究具有分层的层合结构在外力作用下发生分层屈曲与扩展的规律及其机理具有重要的理论与实用价值。

早期对复合材料分层损伤的研究，侧重于分层损伤产生的机理，分析影响分层产生的因素以及分层对层板强度的影响，后来则转向了建立表征分层损伤的模型。近年来陆续发表了关于层合板的一维和二维分层屈曲模型的理论分析【2—5】和实验研究的文章【11】、【13】，Gillespie 等人提出层板裂纹扩展的模型【10】；Chai 等人从 80 年代开始，研究了分层屈曲破坏的一维理论和二维理论【4】、【2】。Yin 研究了圆形分层的轴对称屈曲和扩展【5】，也研究了非对称子层板的屈曲与扩展。但是有关温湿环境下层合壳体具有各种形式的分层屈曲研究尚为少见。文献【1】仅研究了由各向同性单层组成的层合圆柱壳体，具有沿周向贯穿的一维分层屈曲模型的简单情况，并且没有考虑温湿效应的影响。

纤维增强复合材料在制造和使用过程中，会发生温度变化，吸收水份，产生变形、内部应力、材料性能变化、损伤等许多复杂的热和湿的效应。这是因为纤维增强复合材料是一种多相不均匀材料，纤维和基体的热膨胀系数和湿膨胀系数是不相同的，即使是单向复合材料，在宏观上没有施加外力并可以自由变形（膨胀和收缩）的情况下，当温度和吸湿量变化时，也会引起较大的微观湿热应力，这是均匀各向同性材料和均匀各向异性材料所没有的。湿热

应力的存在对复合材料的分层屈曲有着重大的影响。不仅如此，温湿效应对材料常数也有一定的影响。

正是考虑到上述因素，本文研究了温湿环境下纤维增强的对称铺层圆柱层合壳体，在表面存在一个展开面周界为矩形和椭圆形的任意方向(α 方向)二维局部分层，在层壳两端承受均匀轴向位移的压缩或拉伸作用下，发生分层屈曲的临界应变值 ε_{cr} 及其特性，分析是建立在母层壳与子层壳都为薄壳的假设基础上，因此应用了层合壳体经典理论及相应的能量准则求解分层屈曲问题。在分析母层壳体变形时，考虑了广义的轴对称变形(存在均布的面内剪切)。对子层壳块则引入了扁壳假设，为了更好地反映实际，在本文中还考虑了子层屈曲面内横向位移。通过数值实例计算，研究了温湿效应、母层壳与子层壳各种几何物理参数、子层分层的形状、子层壳面内横向位移、铺层材料等对分层屈曲临界应变值的影响。对于层合结构的特有现象——拉伸分层屈曲的发生机制和层合壳体中面半径对分层屈曲的影响，也进行了分析。

第二章 复合材料层壳基本理论

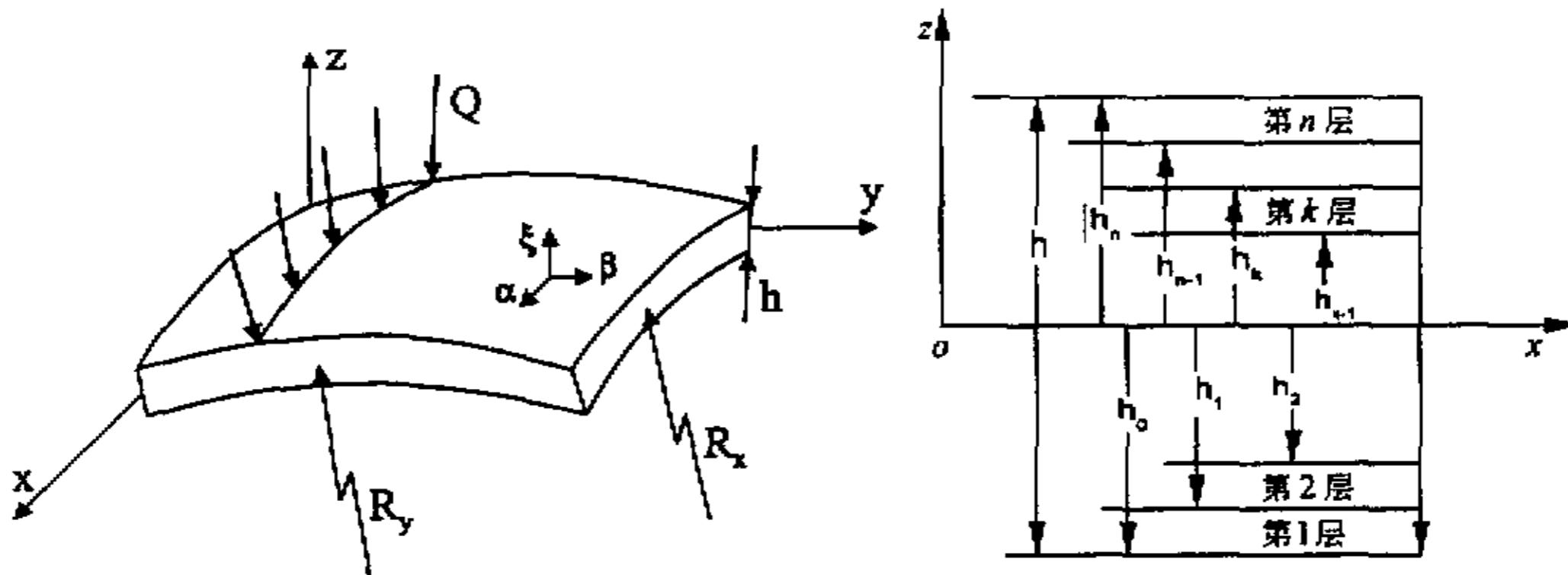
以碳纤维/环氧为代表的先进复合材料，由于比强度高、比刚度大和抗疲劳性能好等特点，常做成多层板壳、夹层板壳和加筋板壳以及薄壁结构等形式。对于复合材料的板壳层合结构，由于复合材料及结构的特点，会面临各向异性和层与层之间所引起的各种耦合效应。复合材料的板壳理论，用于研究复合材料板壳结构在静载、动载和湿热载荷下的变形、应力分析、稳定和振动等问题。复合材料的板壳理论和各向同性材料的板壳理论一样，包括位移应变关系、内力应变关系、平衡方程、边界条件和初始条件等基本方程。

§ 2.1 扁壳方程

考虑沿厚度方向的剪切变形，可得下列基本关系和方程。

一、位移应变关系

选取与扁壳表面平行的某一适合的曲面作为坐标面，对于对称铺层的多层扁壳，最好选中曲面（简称中面）作为 $oxyz$ 坐标面，对于不对称构造的多层扁壳，最好选某一方向的中性面作为坐标面。选择不同的坐标面，并不会改变力学问题的实质，但是，却可影响基本方程和边界条件的表达形式、复杂程度和计算工作量的大小。设有一个多层扁壳，取坐标系 $oxyz$ 如图 2.1 所示，图 2.2 为其剖面图，对于正高斯曲率壳和零高斯曲率壳， z 轴方向和外法线方向一致，离开曲率中心。



图(2.1) 扁壳坐标系

Fig(2.1) shallow shell coordinate

图(2.2) 扁壳剖面图

Fig(2.2) section of the shell

所谓扁壳，一般来说，要求其上任何一点相对于底平面的斜率 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 都比较小，这

样，扁壳的微分几何关系和方程式都比较简单。上述扁壳的中面方程可表示为 $f = f(x, y)$ ，其中， f 表示中面离扁壳底部的垂直距离。假定扁壳在厚度方向不可压缩，在变形前扁壳的法线变形后仍为一条直线，即法线在 x 和 y 方向的平均转角分别为 ϕ_x 和 ϕ_y 。设温度场的

分布 $T(x, y, z)$ 是任意的。壳体在 $oxyz$ 坐标上的位移分量分别为 u_0, v_0 和 w_0 ，则壳体截面上任意一点 $p(x, y, z)$ 的位移分量 u, v 和 w 分别为：

$$\left. \begin{array}{l} u = u_0 + z\phi_x \\ v = v_0 + z\phi_y \\ w = w_0 \end{array} \right\} \quad (2-1)$$

当温差分布为 $\Delta T(x, y, z)$ ，吸湿浓度分布为 $e(x, y, z)$ 时，多层扁壳中第 k 层因应力引起的面内应变为

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}_k = \left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \frac{2w}{R_{xy}} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} - \left. \begin{array}{l} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{array} \right\} \Delta T - \left. \begin{array}{l} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{array} \right\} e \quad (2-2)$$

式(2—2))等号后的第一项是总应变，其中， $\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}$ ， $\frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y}$ 和

$\frac{\partial u_0}{\partial y} + z \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)$ 是位移分量 u_0, v_0 和转角 ϕ_x, ϕ_y 所提供的应变； $\frac{w}{R_x}, \frac{w}{R_y}$

和 $\frac{2w}{R_{xy}}$ 是位移 w 对于扁壳所产生的应变， R_x, R_y 为扁壳在 x, y 方向的曲率半径， $\frac{1}{R_{xy}}$ 为

扭曲率，和通常一样，对于薄壳，可忽略 R_x, R_y, R_{xy} 因 z 的不同所引起的微小差别；

$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$ 是有限挠度情况下所引起的应变分量。式 (2—2) 等号后的

第二项是由温差所引起的应变，第三项是由吸湿量变化所引起的应变。式中的 α_x, α_y 和 β_x, β_y 分别为 x 和 y 方向的热膨胀系数和湿膨胀系数， α_{xy} 和 β_{xy} 为 x 和 y 轴夹角的热膨胀和湿膨胀系数， ΔT 为温差， e 为吸湿量，下标 k 表示是第 k 层的。

二、内力应变关系

在复合材料板壳理论中，内力 $\{N\}$ 和内力矩 $\{M\}$ 的表达式如下：

$$\{N\} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_0^{h_n} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2-3)$$

$$\{M\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_0^{h_n} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2-4)$$

在上两式中的 $\{N\}$ 和 $\{M\}$ 分别表示单位宽度上的内力、内力矩。

令 $\{N^T\}$, $\{M^T\}$, $\{N^H\}$ 和 $\{M^H\}$ 分别表示由于温差 ΔT 和吸湿量变化 e 所引起的内力和内力矩, 上标 T 和 H 表示与温度和吸湿量有关, 则有

$$\{N^T\} = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \Delta T dz \quad (2-5)$$

$$\{M^T\} = \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} \Delta T z dz \quad (2-6)$$

$$\{N^H\} = \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} e dz \quad (2-7)$$

$$\{M^H\} = \begin{bmatrix} M_x^H \\ M_y^H \\ M_{xy}^H \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} e z dz \quad (2-8)$$

其中 \bar{Q}_{ij} 为偏轴刚度系数, 与正轴刚度系数的关系由下式给出

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{aligned} \right\}$$

(2—9)

$\{\alpha_x\}_k$ 、 $\{\beta_x\}_k$ 为层壳第 k 层 x 、 y 方向及 xy 平面的热膨胀系数向量和湿膨胀系数向量，它们与主方向热膨胀系数向量和湿膨胀系数向量的关系由下式给定

$$\left. \begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_1 \cos^2 \theta + \alpha_2 \sin^2 \theta \\ \alpha_y &= \alpha_1 \sin^2 \theta + \alpha_2 \cos^2 \theta \\ \alpha_{xy} &= (\alpha_1 - \alpha_2) 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

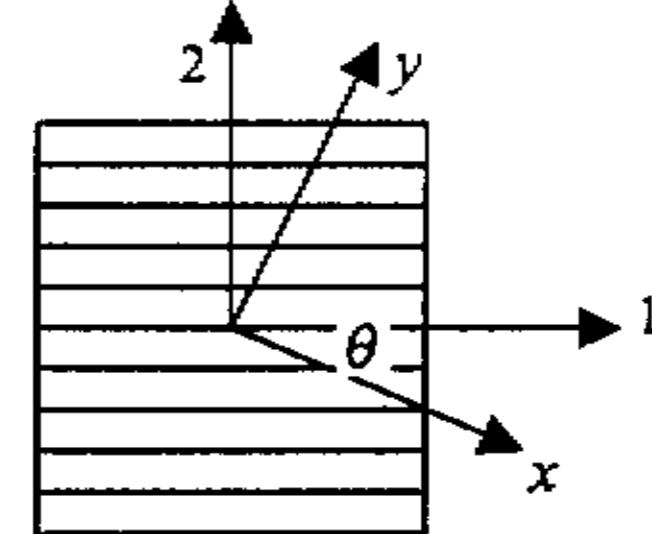
$$\left. \begin{aligned} \beta_x &= \beta_1 \cos^2 \theta + \beta_2 \sin^2 \theta \\ \beta_y &= \beta_1 \sin^2 \theta + \beta_2 \cos^2 \theta \\ \beta_{xy} &= (\beta_1 - \beta_2) 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

θ 为从 x 轴转向主方向 1 轴的角度，逆时针为正。
第 k 层的应力应变关系为

$$\left. \begin{aligned} \{\sigma_x\}_k &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \\ \{\sigma_y\}_k &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \\ \{\tau_{xy}\}_k &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

将式(2—10)代入式(2—3), (2—4)中，可得

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2w}{R_{xy}} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \\ M_x^H \\ M_y^H \\ M_{xy}^H \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$



图(2.3) 主方向与任意方向

Fig(2.3) main and random directions

其中, A_y , B_y 和 D_y 由下列各式确定

$$\left. \begin{aligned} A_y &= \int_{h_0}^{h_n} \bar{Q}_{yj} dz = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{yj}^{(k)} (h_k - h_{k-1}) \\ B_y &= \int_{h_0}^{h_n} \bar{Q}_{yj} z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{yj}^{(k)} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_y &= \int_{h_0}^{h_n} \bar{Q}_{yj} z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{yj}^{(k)} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

h_k , h_{k-1} 如图 2.2 所示。

式(2—12)可以简写为

$$\left\{ \begin{array}{l} N \\ M \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & D \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^0 \\ K \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} N^T \\ M^T \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} N^H \\ M^H \end{array} \right\} \quad (2-13)$$

式中 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[D]$ 阵分别为层壳的拉伸刚度阵、耦合刚度阵和弯曲刚度阵。 $\{\varepsilon^0\}$ 为中面应变向量, $\{K\}$ 为曲率向量。

§ 2.2 边界条件

一、对于非矩形扁壳, 如图 2.4 所示, 取边界的外法线方向为 n 的正方向, 边界的正切线方向 s 由下述规则确定, 即在 nsz 和 xyz 坐标系中, 从 $+n$ 转到 $+s$ 方向与从 x 方向转到 y 方向相同, 则边界条件为:

$$u_n^0 = \bar{u}_n^0, \quad u_s^0 = \bar{u}_s^0, \quad \phi_n = \bar{\phi}_n, \quad \phi_s = \bar{\phi}_s, \quad w = \bar{w} \quad (2-14)$$

其中 u_n^0 和 u_s^0 为坐标面上边界的法向和切向位移, ϕ_n 和 ϕ_s 为相应的转角。

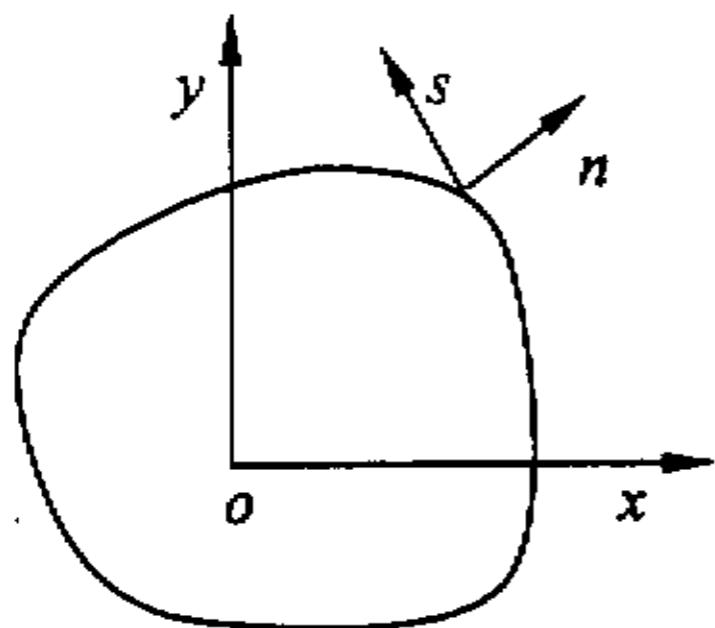


图 (2.4) 边界上的方向

Fig (2.4) directions on boundary

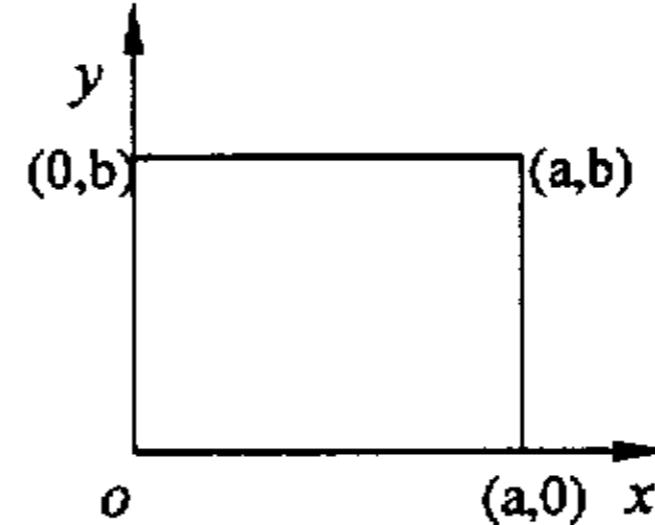


图 (2.5) 矩形扁壳边界

Fig (2.5) boundary of rectangular shell

二、对于矩形扁壳, 如图 2.5 所示, 边界条件为:

$$u_0 = \bar{u}_0, \quad v_0 = \bar{v}_0, \quad \phi_n = \bar{\phi}_n, \quad \phi_y = \bar{\phi}_y, \quad w = \bar{w} \quad (2-15)$$

在式(2—14)和式(2—15)中, 边界上的已知值用加一横来表示。

第三章 考虑温湿及子层横向位移时的层壳表面分层屈曲

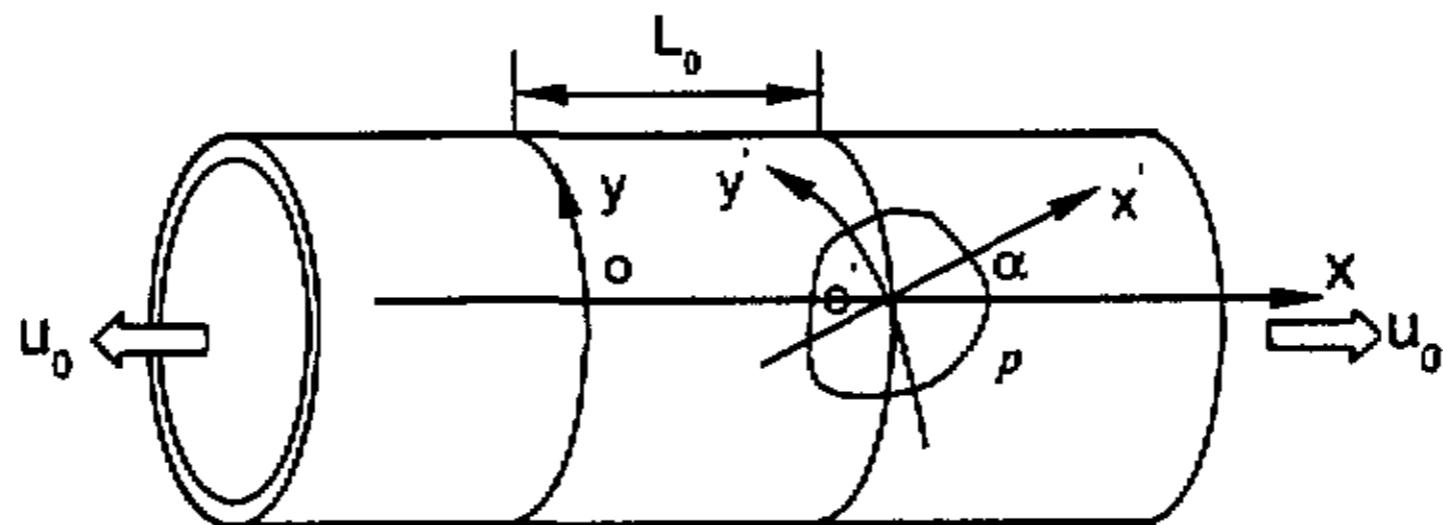
圆柱壳的几何形状比较简单，又是可展曲面，制造起来比较方便，因此应用甚广。由于制造中的缺陷、运行中受到外来物体的碰撞和自由边缘效应等，在复合材料层合结构靠近表面处常发生层间分离现象，其区域形状一般可近似地用圆、椭圆、矩形、带形来描述。

复合材料在制造和使用过程中，会发生温度变化，吸收水分和其它液体，产生变形、材料性能变化、开裂、破坏等许多复杂的热和湿的效应。考虑温湿效应是分析材料损伤、破坏的一个重要方面。

基于以上两点，本章研究了温湿环境下各向异性对称铺层圆柱层壳，在两端承受均匀轴向位移的压缩或拉伸作用下，发生表面分层屈曲的临界应变值及其特性，考虑了材料弹性性质和热膨胀系数依赖于温度变化的因素。子层的分层形状分别为矩形、椭圆。分析是建立在母层壳与子层壳都为薄壳的假设基础上，因此应用了薄壳经典理论及相应的能量准则求解分层屈曲问题。在分析母层壳体变形时，考虑了广义的轴对称变形，对子层壳则引入了扁壳假设并考虑了它的面内屈曲横向位移。

§ 3.1 层壳表面分层屈曲模型

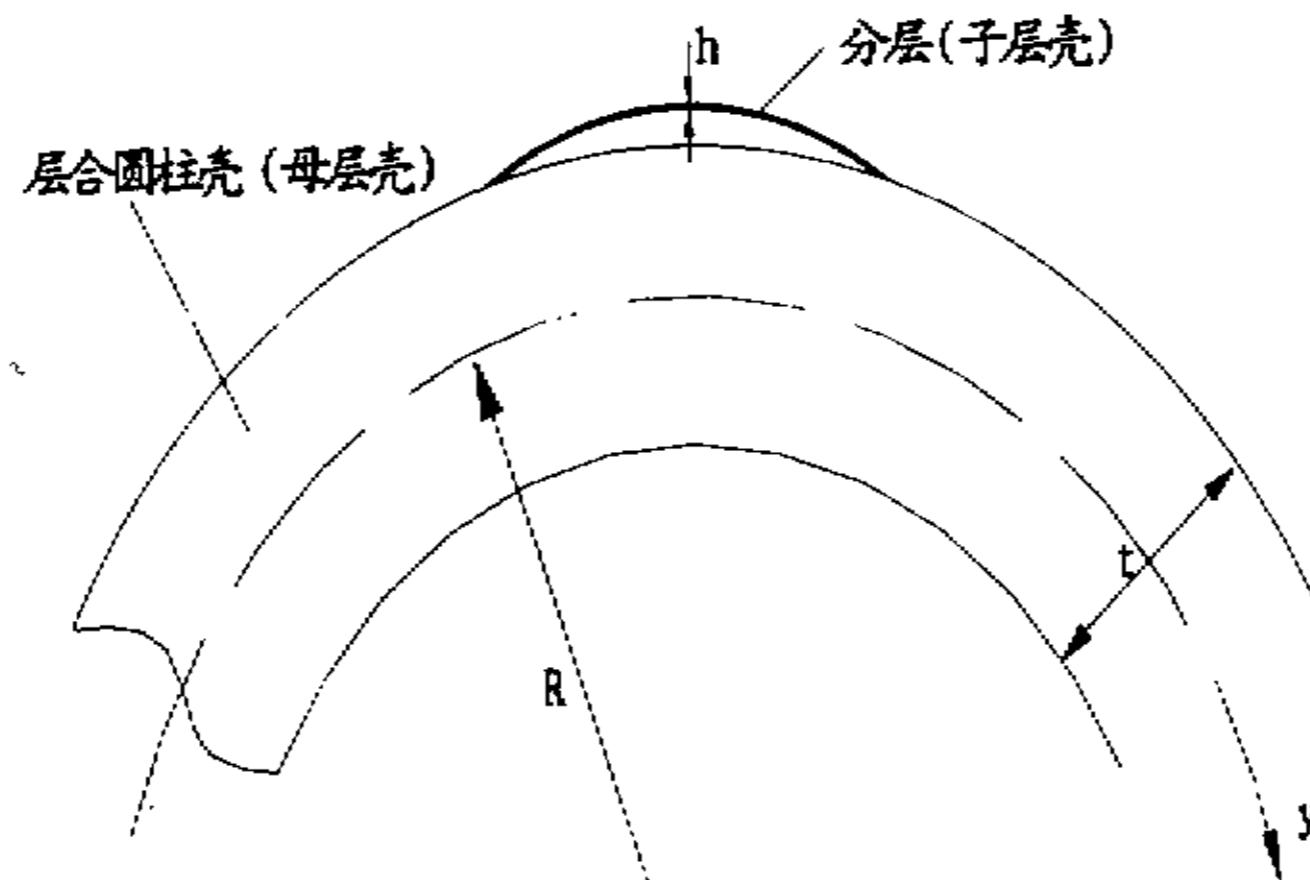
考虑一圆柱层合壳体，如图 3.1 所示，在 x 轴方向上承受等应变拉伸或压缩，假定在远离边缘的内部存在二维的表面分层区域，是一个单层的或多层的分层，它的几何主轴与圆柱壳体主轴的夹角为 α ，称为方位角。把该分层壳块称为子层壳，它可以为任意的铺层形式。其余部分层壳则称为母层壳，为对称铺层形式。假定子层壳厚度很薄， $h/t \ll 1$ ，如图 3.2 所示在分析母层壳变形时，可以忽略其分层影响，把母层壳等价于无分层的层合圆柱壳体。假定母层壳是对称铺层的一般各向异性层壳，置于温湿环境中，在层壳两端承受轴向载荷作用，子层壳的拱高很小，但考虑了其面内横向位移。当母层壳沿轴向的拉伸或压缩应变达到某一临界值时，子层发生失稳，此时的临界值为分层屈曲的临界应变值，或简称为分层屈曲应变。



图(3.1) 层壳的尺度与坐标系
Fig(3.1) dimension of the shell and coordinates

子层 p 的分层形状可以有多种，一般可近似地用圆、椭圆、矩形、带形来描述。本文中涉及的子层形状为矩形和椭圆。事实上，带形分层可作为椭圆形或矩形分层的特例处理，而圆形分层则是椭圆形分层的简单情形。

本文将用经典层壳理论来分析母层壳的变形，用考虑横向位移的扁壳理论来分析子层的变形。最后，运用相应的能量准则求解分层屈曲的临界应变。



图(3.2) 母层壳与子层壳
Fig(3.2) parent laminated shell and sub-laminated shell

§ 3.2 母层壳的变形分析

与子层屈曲直接有关的是层壳在子层边界附近区域的变形。由于假定分层位于远离边缘的层壳内部，可以不计自由边缘效应，而且子层壳的厚度相对于母层壳很薄，所以在分析母层壳的力学变形时，我们可以忽略由于子层的分离而引起的母层壳总刚度下降，把整个层壳等价于无分层的母层壳。

母层壳的尺度与坐标系 oxy 如图 3.1 所示。当给定母层壳的轴向位移 u_0 ，温差 ΔT 和吸湿浓度 e 时，由于圆柱形层合壳体是轴对称的，有

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = \frac{u_0}{l}, \quad u = u(x), \quad v = v(x) \quad (3-1)$$

$$N_2 = 0, \quad N_{12} = 0 \quad (3-2)$$

式中 ε_1 为母层壳的轴向应变， u 、 v 分别为 x 、 y 方向位移。

故几何方程为

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{w}{R}, \quad \gamma_{12} = \frac{dv}{dx} \quad (3-3)$$

w 为母层壳径向位移。

当母层为对称铺层时， $B_y = 0$ ，由层壳理论的内力应变关系式(2—13)可得

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{Bmatrix} \quad (3-4)$$

其中 $\{N^T\}$, $\{N^H\}$ 分别为母层壳的热内力和湿内力。

对于均匀温度变化, ΔT 沿层壳厚度不变, 则由式(2—5)得:

$$\{N^T\} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \{\alpha_x\}_k \Delta T (z_k - z_{k-1}) \quad (3-5)$$

对于均匀吸湿浓度, e 沿层壳厚度不变, 则由式(2—7)得:

$$\{N^H\} = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k \{\beta_x\}_k e (z_k - z_{k-1}) \quad (3-6)$$

式(3—5), (3—6) 中的 $[\bar{Q}]_k$ 为母层壳第 k 层的偏轴刚度阵, 其与正轴刚度阵 $[Q]_k$ 的关系由第二章的式(2—9)给出, 此时该式中的 θ 角为母层壳各铺层主方向(1,2)与坐标系 oxy 的坐标轴(x, y)的夹角。 $\{\alpha_x\}_k$ 、 $\{\beta_x\}_k$ 为层壳第 k 层 x 、 y 方向及 xy 平面的热膨胀系数向量和湿膨胀系数向量, 它们与主方向热膨胀系数向量和湿膨胀系数向量的关系也已经在第二章中讨论了。 z_k 为母层壳各个单层的坐标, 与图 2.2 中的 h_k 相对应。

由(3—5)、(3—6)式可知, 当 ΔT , e 给定时, $\{N^T\}$, $\{N^H\}$ 为常量。

由(3—4)式得

$$0 = A_{12}\varepsilon_1 + A_{22}\varepsilon_2 + A_{26}\gamma_{12} - N_y^T - N_y^H \quad (3-7)$$

$$0 = A_{16}\varepsilon_1 + A_{26}\varepsilon_2 + A_{66}\gamma_{12} - N_{xy}^T - N_{xy}^H \quad (3-8)$$

即:

$$A_{22}\varepsilon_2 + A_{26}\gamma_{12} = N_y^T + N_y^H - A_{12}\varepsilon_1 \quad (3-9)$$

$$A_{26}\varepsilon_2 + A_{66}\gamma_{12} = N_{xy}^T + N_{xy}^H - A_{16}\varepsilon_1 \quad (3-10)$$

将 ε_1 替换为 ε_0 得:

$$A_{22}\varepsilon_2 + A_{26}\gamma_{12} = N_y^T + N_y^H - A_{12}\varepsilon_0 \quad (3-11)$$

$$A_{26}\varepsilon_2 + A_{66}\gamma_{12} = N_{xy}^T + N_{xy}^H - A_{16}\varepsilon_0 \quad (3-12)$$

解之得:

$$\varepsilon_2 = \frac{A_{26}A_{16} - A_{66}A_{12}}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2} \varepsilon_0 + \frac{A_{66}(N_y^T + N_y^H) - A_{26}(N_{xy}^T + N_{xy}^H)}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2} \quad (3-13)$$

$$\gamma_{12} = \frac{A_{26}A_{12} - A_{22}A_{16}}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2} \varepsilon_0 + \frac{A_{22}(N_{xy}^T + N_{xy}^H) - A_{26}(N_y^T + N_y^H)}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2} \quad (3-14)$$

令

$$m = \frac{A_{26}A_{16} - A_{66}A_{12}}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2}, \quad n = \frac{A_{26}A_{12} - A_{22}A_{16}}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2} \quad (3-15)$$

$$c = \frac{A_{66}(N_y^T + N_y^H) - A_{26}(N_{xy}^T + N_{xy}^H)}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2}, \quad d = \frac{A_{22}(N_{xy}^T + N_{xy}^H) - A_{26}(N_y^T + N_y^H)}{A_{22}A_{66} - A_{26}^2}$$

则有：

$$\varepsilon_2 = m\varepsilon_0 + c, \quad \gamma_{12} = n\varepsilon_0 + d \quad (m, n, c, d \text{ 皆为常数})$$

而 $\varepsilon_0 = \frac{u_0}{l}$ 为给定值，故 $m\varepsilon_0 + c, n\varepsilon_0 + d$ 皆为常数

将上两式代入几何方程(3-3)中，当坐标原点取在母层壳对称面上时，积分可得母层壳的位移表达式：

$$\left. \begin{array}{l} u = \varepsilon_0 x \\ v = (n\varepsilon_0 + d)x \\ w = -Rm\varepsilon_0 - Rc \end{array} \right\} \quad (3-16)$$

§ 3.3 母层壳在子层壳坐标系中的位移分量

首先我们将母层壳位移 u, v, w 转换到子层壳坐标系中。如图 3.1 所示子层壳，方位角为 α ，中心距母层壳中心对称面距离为 l_0 ，在子层壳中面建立局部坐标系 $o'x'y'$ 。如图，

对于 oxy 坐标系中的任一点 $P(x, y)$ ，有

$$x = l_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

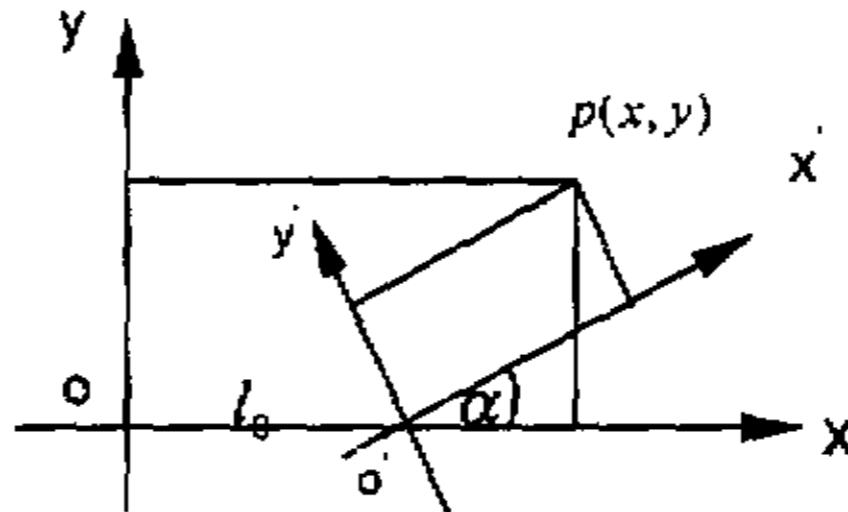


图 (3.3) 两坐标系关系

Fig (3.3) Relation between two coordinates

代入位移分量式(3-16)得：

$$u = \varepsilon_0 l_0 + \varepsilon_0 x' \cos \alpha - \varepsilon_0 y' \sin \alpha$$

$$v = (n\varepsilon_0 + d)l_0 + (n\varepsilon_0 + d)x' \cos \alpha - (n\varepsilon_0 + d)y' \sin \alpha \quad (3-17)$$

$$w = -Rm\varepsilon_0 - Rc$$

设 u', v', w' 为母层壳在子层壳坐标系 $o'x'y'z'$ 中的位移分量，则有

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = [A(\alpha)] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3-18)$$

其中 $[A(\alpha)] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 将(3-17)代入上式得

$$u' = [x' \cos^2 \alpha + (nx' - y') \sin \alpha \cos \alpha - ny' \sin^2 \alpha] \varepsilon_0 + (\cos \alpha + n \sin \alpha) l_0 \varepsilon_0 + l_0 d \sin \alpha + x' d \sin \alpha \cos \alpha - y' d \sin^2 \alpha \quad (3-19)$$

$$v' = [nx' \cos^2 \alpha - (ny' + x') \sin \alpha \cos \alpha + y' \sin^2 \alpha] \varepsilon_0 + (n \cos \alpha - \sin \alpha) l_0 \varepsilon_0 + l_0 d \cos \alpha + x' d \cos^2 \alpha - y' d \sin \alpha \cos \alpha \quad (3-20)$$

$$w' = -Rm \varepsilon_0 - Rc \quad (3-21)$$

§ 3.4 子层壳的变形分析

用 \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} 表示子层壳在自身局部坐标系 $o'x'y'z'$ 中的位移分量, 对于子层壳, 由于沿厚度方向剪切变形甚小, 此时式 $\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\phi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$ 。由图 2.1、图 3.1 的几何关系

可以得出曲率半径 $R_x = -\frac{R}{\sin \alpha}$, $R_y = -\frac{R}{\cos \alpha}$, $R_{xy} = -\frac{R}{\sin \alpha \cos \alpha}$ (式中 R 近似地取为子层壳中面半径)。

则由(2-10)式得子层壳中面应变为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x'} \right)^2 - \frac{\bar{w}}{R} \sin \alpha \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y'} \right)^2 - \frac{\bar{w}}{R} \cos \alpha \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x'} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y'} - 2 \frac{\bar{w}}{R} \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3-22)$$

同样可得曲率为:

$$k_x = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x'^2}, \quad k_y = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y'^2}, \quad k_{xy} = 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x' \partial y'} \quad (3-23)$$

由(2-9)式, 子层壳第 k 个单层的应力应变关系为:

$$\begin{aligned} [\sigma]_k &= [\bar{\bar{Q}}]_k \{[\varepsilon]_k - [\alpha]_k \Delta T - [\beta]_k e\} \\ &= [\bar{\bar{Q}}]_k \{[\varepsilon]_0 - z_k[k] - [\alpha]_k \Delta T - [\beta]_k e\} \end{aligned} \quad (3-24)$$

$$[\varepsilon]_k = [\varepsilon]_0 - z_k[k] \quad (3-25)$$

式中 $[\varepsilon]_0$ 为子层壳中面应变, $[\varepsilon]_k$ 为子层壳第 k 层总应变。 $[\varepsilon]_k - [\alpha]_k \Delta T - [\beta]_k e$ 为第 k 层应力引起的应变。 $[\alpha]_k$ 、 $[\beta]_k$ 分别为子层壳第 k 个单层的热膨胀系数向量与湿膨胀系数向量, z_k 为子层壳第 k 个单层的坐标, 它们的计算方法和母层壳的相同。 $[\bar{\bar{Q}}]_k$ 为子层壳第 k 单层的偏轴刚度阵, 其与子层壳的正轴刚度阵的关系也由第二章的式(2—9)给出, 此时式(2—9)中的 θ 角为子层各层的纤维方向与子层坐标系 $o'x'y'$ 的轴 $o'x'$ 的夹角(如图 3.4 所示)。

子层壳第 k 单层的弹性应变能可写成:

$$\begin{aligned} U_k &= \frac{1}{2} \iiint_{V_k} [\varepsilon]_k^T [\sigma]_k dV_k \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{V_k} \{[\varepsilon]_0 - z_k[k]\}^T [\bar{\bar{Q}}]_k \{[\varepsilon]_0 - z_k[k] - [\alpha]_k \Delta T - [\beta]_k e\} dV_k \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{V_k} \{[\varepsilon]_0 - z_k[k]\}^T [\bar{\bar{Q}}]_k \{[\varepsilon]_0 - z_k[k]\} dV_k \\ &\quad - \frac{1}{2} \iiint_{V_k} \{[\varepsilon]_0 - z_k[k]\}^T [\bar{\bar{Q}}]_k ([\alpha]_k \Delta T + [\beta]_k e) dV_k \end{aligned} \quad (3-26)$$

则整个子层壳块的总弹性应变能为

$$\begin{aligned} U_{sub} &= \sum_{k=1}^N U_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_k} \{[\varepsilon]_0 - z_k[k]\}^T [\bar{\bar{Q}}]_k \{[\varepsilon]_0 - z_k[k]\} dV_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_k} \{[\varepsilon]_0 - z_k[k]\}^T [\bar{\bar{Q}}]_k ([\alpha]_k \Delta T + [\beta]_k e) dV_k \\ &= \frac{1}{2} \iint_{S_k} \{[\varepsilon]_0^T [\bar{A}] [\varepsilon]_0 - 2[\varepsilon]_0^T [\bar{B}] [k] + [k]^T [\bar{D}] [k]\} ds_k \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_k} \{[\varepsilon]_0^T [\bar{\bar{Q}}]_k ([\alpha]_k \Delta T + [\beta]_k e) - z_k[k]^T [\bar{\bar{Q}}]_k ([\alpha]_k \Delta T + [\beta]_k e)\} dV_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \iint_{s_k} \{ [\varepsilon]_0^T [\bar{A}] [\varepsilon]_0 - 2[\varepsilon]_0^T [\bar{B}] [k] + [k]^T [\bar{D}] [k] \} ds_k \\
 &\quad - \frac{1}{2} \iint_{s_k} \{ [\varepsilon]_0^T ([\bar{N}^T] + [\bar{N}^H]) - [k]^T ([\bar{M}^T] + [\bar{M}^H]) \} ds_k \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{s_k} \{ [\varepsilon]_0^T [\bar{A}] [\varepsilon]_0 - 2[\varepsilon]_0^T [\bar{B}] [k] + [k]^T [\bar{D}] [k] \\
 &\quad - [\varepsilon]_0^T ([\bar{N}^T] + [\bar{N}^H]) + [k]^T ([\bar{M}^T] + [\bar{M}^H]) \} ds_k
 \end{aligned} \tag{3—27}$$

式中 $[\bar{A}]$ 、 $[\bar{B}]$ 、 $[\bar{D}]$ 分别为子层壳拉伸、耦合、弯曲刚度阵， $[\bar{N}^T]$ 、 $[\bar{M}^T]$ 分别为子层壳的热内力和热力矩， $[\bar{N}^H]$ 、 $[\bar{M}^H]$ 分别为子层壳的湿内力和湿力矩。它们的计算式如下：

$$\bar{A}_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{\bar{Q}}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1})$$

$$\bar{B}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\bar{Q}}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$\bar{D}_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{\bar{Q}}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

($i, j = 1, 2, 3$)

$$\{\bar{N}^T\} = \sum_{k=1}^N [\bar{\bar{Q}}]_k \{\alpha_x\}_k \Delta T (z_k - z_{k-1})$$

$$\{\bar{M}^T\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{\bar{Q}}]_k \{\alpha_x\}_k \Delta T (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$\{\bar{N}^H\} = \sum_{k=1}^N [\bar{\bar{Q}}]_k \{\beta_x\}_k e (z_k - z_{k-1})$$

$$\{\bar{M}^H\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [\bar{\bar{Q}}]_k \{\beta_x\}_k e (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

(N 为子层总层数， $[\bar{\bar{Q}}]_k$ 为子层壳在子层坐标系中第 k 单层的偏轴刚度阵)

将 U_{sub} 式(3—27)展开得：

$$\begin{aligned}
 U_{sub} = & \frac{1}{2} \iint_{S_k} (\varepsilon_x^0 A_{11} + 2\varepsilon_x^0 \varepsilon_y^0 A_{12} + 2\varepsilon_x^0 \gamma_{xy}^0 A_{16} + 2\varepsilon_y^0 \gamma_{xy}^0 A_{26} + \varepsilon_y^0 A_{22} + \gamma_{xy}^0 A_{66} \\
 & - 2\varepsilon_x^0 k_x B_{11} - 2\varepsilon_y^0 k_x B_{12} - 2\gamma_{xy}^0 k_x B_{16} - 2\varepsilon_x^0 k_y B_{12} - 2\varepsilon_y^0 k_y B_{22} - 2\gamma_{xy}^0 k_y B_{26} \\
 & - 2\varepsilon_x^0 k_{xy} B_{16} - 2\varepsilon_y^0 k_{xy} B_{26} - 2\gamma_{xy}^0 k_{xy} B_{66} + k_x^2 D_{11} + 2k_x k_y D_{12} + 2k_x k_{xy} D_{16} \\
 & + 2k_y k_{xy} D_{26} + k_y^2 D_{22} + k_{xy}^2 D_{66} - \varepsilon_x^0 N_x^T - \varepsilon_x^0 N_x^H - \varepsilon_y^0 N_y^T - \varepsilon_y^0 N_y^H - \gamma_{xy}^0 N_{xy}^T \\
 & - \gamma_{xy}^0 N_{xy}^H + k_x M_x^T + k_x M_x^H + k_y M_y^T + k_y M_y^H + k_{xy} M_{xy}^T + k_{xy} M_{xy}^H) ds_k
 \end{aligned} \tag{3-28}$$

§ 3.5 分层屈曲问题的求解

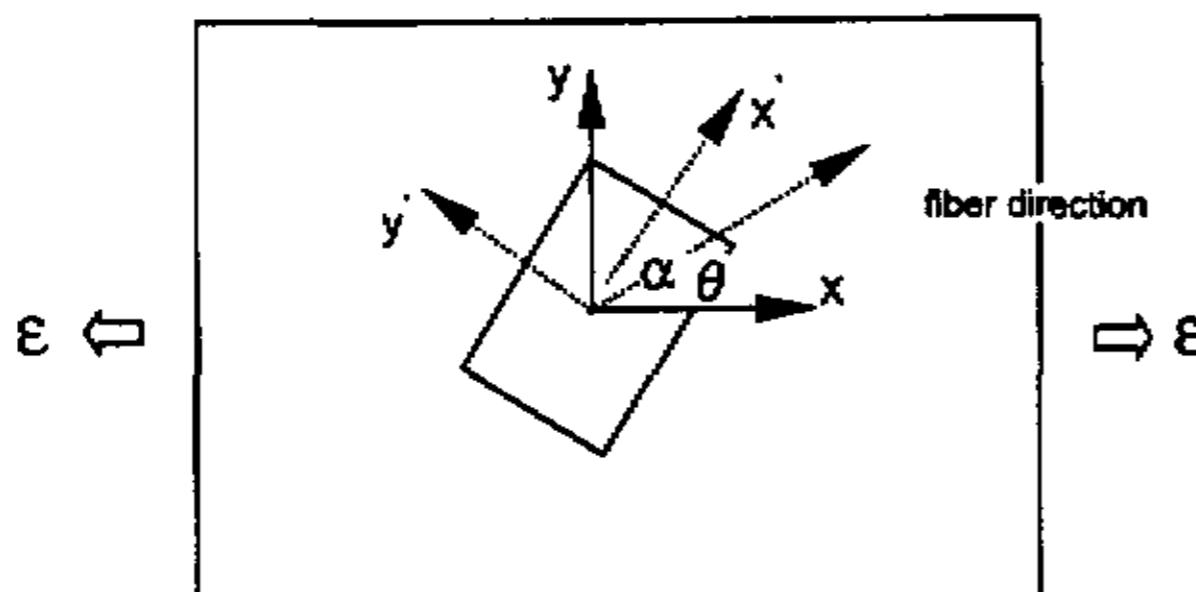
假定子层边界和母层壳固定连接。则当子层壳发生屈曲时，必须满足周界上的变形条件。即在边界上有：

$$\bar{u} = u', \quad \bar{v} = v', \quad \bar{w} = w' \tag{3-29}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x'} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y'} = 0 \tag{3-30}$$

为了满足边界条件，应当适当选取子层壳的位移形式。当不考虑子层壳的面内横向位移时，可以认为子层壳的位移 $\bar{u} = u'$, $\bar{v} = v'$ 。为了更好地反映实际的层壳表面分层屈曲情况，在子层壳的位移 \bar{u} 、 \bar{v} 中可以加入线性项以反映其面内横向位移的情况。以下就针对不同的子层形状给出其位移形式。

(1) 子层为矩形



图(3.4) 矩形子层
Fig(3.4) Rectangular sublaminates

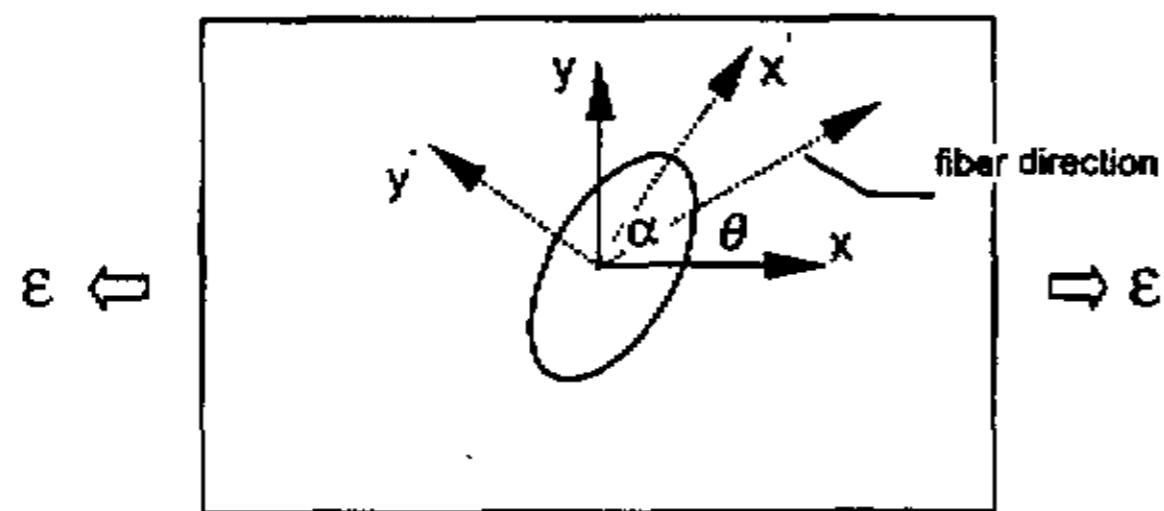
选取下列形式的子层壳位移：

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= [x' \cos^2 \alpha + (nx' - y') \sin \alpha \cos \alpha - ny' \sin^2 \alpha] \varepsilon_0 + (\cos \alpha + n \sin \alpha) l_0 \varepsilon_0 + \\ &\quad l_0 d \sin \alpha + x' d \sin \alpha \cos \alpha - y' d \sin^2 \alpha + (x'^2 - a^2)(y'^2 - b^2) a_0 x' \\ \bar{v} &= [nx' \cos^2 \alpha - (ny' + x') \sin \alpha \cos \alpha + y' d \sin^2 \alpha] \varepsilon_0 + (n \cos \alpha - \sin \alpha) l_0 \varepsilon_0 + \\ &\quad l_0 d \cos \alpha + x' d \cos^2 \alpha - y' d \sin \alpha \cos \alpha + (x'^2 - a^2)(y'^2 - b^2) a_1 y' \\ \bar{w} &= -Rm \varepsilon_0 - Rc + (x'^2 - a^2)^2 (y'^2 - b^2)^2 (a_2 + a_3 x'^2 + a_4 y'^2 + a_5 x' y') \end{aligned} \right\} \quad (3-31)$$

显然式(3—31)满足边界条件式(3—29)、(3—30)。

上式中的 $(x'^2 - a^2)(y'^2 - b^2)a_0 x'$, $(x'^2 - a^2)(y'^2 - b^2)a_1 y'$ 为考虑子层面内横向位移时而增加的两项。 $a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 是待定常数, $2a$ 、 $2b$ 为矩形的两边长。

(2) 子层为椭圆



图(3.5) 椭圆子层
Fig(3.5) Elliptical sublaminate

选取下列形式的子层壳位移:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= [x' \cos^2 \alpha + (nx' - y') \sin \alpha \cos \alpha - ny' \sin^2 \alpha] \varepsilon_0 + (\cos \alpha + n \sin \alpha) l_0 \varepsilon_0 + \\ &\quad l_0 d \sin \alpha + x' d \sin \alpha \cos \alpha - y' d \sin^2 \alpha + (1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}) a_0 x' \\ \bar{v} &= [nx' \cos^2 \alpha - (ny' + x') \sin \alpha \cos \alpha + y' d \sin^2 \alpha] \varepsilon_0 + (n \cos \alpha - \sin \alpha) l_0 \varepsilon_0 + \\ &\quad l_0 d \cos \alpha + x' d \cos^2 \alpha - y' d \sin \alpha \cos \alpha + (1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}) a_1 y' \\ \bar{w} &= -Rm \varepsilon_0 - Rc + (1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2})^2 (a_2 + a_3 x'^2 + a_4 y'^2 + a_5 x' y') \end{aligned} \right\} \quad (3-32)$$

显然式(3—32)满足边界条件式(3—29)、(3—30)。

上式中的 $(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2})a_0 x'$, $(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2})a_1 y'$ 为考虑子层面内横向位移时而增加

的两项。 $a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ 是待定常数， a 、 b 为椭圆的长短轴。

将子层壳的位移式代入(3-22)，然后再代入子层壳的总弹性应变能表达式(3-28)中，经过积分得子层壳的总弹性应变能 U_{sub} 表达式。由于无横向载荷作用，子层壳边界上是给定位移，因此子层壳的总势能 \prod 即等于总弹性应变能。根据 Trefftz 准则【20】，得到屈曲特征方程：

$$\left| \frac{\partial^2 \prod}{\partial a_i \partial a_j} \right| = [\lambda] = 0 \quad (3-33)$$

$$i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

式中

$$\lambda_{ij} = P_{ij} \varepsilon_0 + T_{ij}$$

元素 P_{ij} 和 T_{ij} 是与层壳的几何参数 a 、 b 、 R 、 α ，物理常数 A_{ij} 、 B_{ij} 、 D_{ij} 及温湿效应 ΔT 、 e 有关的函数。显然式(3-33)为关于 ε_0 的高次方程，求解方程的根即可得到子层屈曲的临界应变值 ε_{cr} 。在其根中负根的绝对值最小的根即为子层壳的压缩屈曲的临界应变，而正根的最小值为子层壳拉伸屈曲临界应变值。

第四章 圆柱层壳表面分层屈曲的计算实例及分析

本文对几种典型的对称层合壳和各种子层形式的屈曲应变进行了数值分析,得出了屈曲应变的数值解,并且就各种不同铺层的对称层壳和子层的几何与物理参数以及温湿效应对子层屈曲的影响作了分析。还就子层的面内位移线性项作了分析。

对称层壳的铺层形式包括: $[(0,45,90,-45)_s]$ 、 $[90,(\pm 15)_s]$ 、 $[90,(\pm \theta)_s]$ 、 $[(\pm 60,0,90)_s]$ 、 $[(0)_{10}]_s$ 、 $[(0,\pm 30,90)_s]$, 等, 并且选取了不同的材料弹性常数。

考虑了分层形状分别为椭圆形、矩形的单层与多层铺层的子层, 并选取了不同的参数: 子层主轴方位角 α 、厚度、分层区域尺寸等。

由于复合材料由纤维和基体组成, 而纤维和基体的热膨胀性能不同, 单向纤维增强的复合材料在热膨胀性能方面也具有各向异性(力学性能为各向异性的), 另外树脂基体一般在湿度环境下易于吸湿, 而纤维一般吸湿性较差, 复合材料吸湿后发生变形, 由于纤维和基体吸湿性不同, 使复合材料的湿度变形也具有各向异性。本文考虑了不同材料的热膨胀系数, 和湿膨胀系数。并给出了一种线性解的脱层屈曲模态, 即考虑材料常数是温度的线性函数的情况。

本章层壳的材料分别为: AS/3501, 玻璃环氧, T300/5208, 其材料性能如下表所示。

表 4—1 材料性能
Table 4—1 properties of the materials

	弹性模量 (GPa)			泊松比
	E_1	E_2	G_{12}	
AS/3501	138	8.96	7.10	0.0195
玻璃环氧	38.6	8.27	4.14	0.0557
T300/5208	181	10.3	7.17	0.0159

表 4—2 材料的湿热膨胀系数
Table 4—2 humidity and thermal coefficients of the materials

	热膨胀系数 ($10^{-6}/k$)		湿膨胀系数	
	α_1	α_2	β_1	β_2
AS/3501	-0.3	28.1	0	0.44
玻璃环氧	8.6	22.1	0	0.6
T300/5208	0.02	22.5	0	0.6

本文计算所得的各曲线图列于本章末，其中图 4.1、4.2、4.3、4.4、4.5、4.6、4.7、4.8、4.9、4.10、4.24 对应母层壳为 $[(0,45,90,-45)_s]$ 时的分层屈曲。图 4.11、4.12、4.13、4.14 对应母层壳为 $[90,(\pm 15)_s]$ 时的分层屈曲。图 4.15、4.16 对应母层壳为 $[90,(\pm \theta)_s]$ 时的分层屈曲。图 4.17、4.18、4.19、4.20、4.31、4.32 对应母层壳为 $[(\pm 60,0,90)_s]$ 时的分层屈曲。图 4.21、4.22、4.23、4.25、4.26 对应母层壳为 $[(0)_{10}]$ 时的分层屈曲。图 4.27、4.28、4.29、4.30 对应母层壳为 $[(0,\pm 30,90)_s]$ 时的分层屈曲。

§ 4.1 层壳分层屈曲现象的特点

整个层壳在单向拉伸和压缩以及温湿载荷作用下都有可能发生分层屈曲现象，分别称之为拉伸屈曲和压缩屈曲。具体是哪种屈曲和很多因素有关，比如铺层材料、铺层角、铺层厚度、温湿变化大小等。

在理论上，子层屈曲应变特征方程的根有可能出现正值或负值。见特征方程式：

$$[\lambda] = 0 \quad (4-1)$$

式中 $\lambda_{ij} = P_{ij}\varepsilon_0 + T_{ij}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)

由于元素 P_{ij} 和 T_{ij} 是与层壳的几何参数 a 、 b 、 R 、 α ，物理常数 A_{ij} 、 B_{ij} 、 D_{ij} 及温湿效应 ΔT 、 e 有关的常数，显然特征方程为关于 ε_0 的高次方程。此方程的解存在正根和负根的情况。当根为负值时，即得到通常意义上的层壳子层压缩失稳临界应变 ε_{cr} 。当根为正值时则得到复合材料结构所特有的拉伸屈曲现象。

从后面的计算实例可以看出，特征方程的根均为实数，且可正可负。如果几个根全为正值或负值，我们就取其中绝对值最小的一个作为子层的拉伸或压缩屈曲临界应变，这时，层壳在轴向载荷和温湿载荷下只发生拉伸或压缩屈曲，如果根中正负都有，则取正根中的最小值作为拉伸屈曲应变，而负根中绝对值最小值作为压缩屈曲应变，该种层壳在拉伸或压缩及温湿载荷作用下子层均可能发生屈曲现象。

图 4.3 表示当对称铺层母层 $[(0,45,90,-45)_s]$ ，子层为 $[0,45,90,-45]$ 时，具有不同的母层壳半径 R 时的 $\varepsilon_{cr} - \alpha$ 曲线。 α 为子层方位角，从图中可见，具有不同中面半径的层壳都在一定的子层铺层 α 时发生压缩屈曲。从图中可以看出，在 $\alpha < 35^\circ$ ， ε_{cr} 随着 α 的增加而减小，而在 $35^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时， ε_{cr} 随着 α 的增加而增加。对于给定的子层方位角，在同

等条件下, ε_{cr} 的绝对值随着母层中面半径 R 的增加而有减小的趋势, 即越有可能发生压缩屈曲。

图 4.12 表示当对称铺层母层 $[90, (\pm 15)_3]_s$, 子层为 $[90]$ 时, 具有不同的温差时的 $\varepsilon_{cr} - \alpha$ 曲线。 α 为子层方位角, 从图中可见, 三种温差下都在一定的子层铺层 α 时发生拉伸或压缩屈曲。从图中可以看出, 在大概 $0 < \alpha < 15^\circ$, 拉伸屈曲应变 ε_{cr} 的绝对值随着 α 的增加而减小, 即越有可能发生拉伸屈曲。在 $38^\circ < \alpha < 90^\circ$ 时, ε_{cr} 随着 α 的增加而减小, 即越有可能发生压缩屈曲。对于给定的子层方位角, 在同等条件下, ε_{cr} 的绝对值随着温差的增加而有增加的趋势, 即越难发生拉伸或压缩屈曲, 这时与具体的铺层材料、不同的铺层形式有关的现象。在 $15^\circ < \alpha < 38^\circ$ 的空白区, 对于压缩的情形, 则此种表面分层屈曲尚未发生时, 母层壳就发生了整体失稳, 对于拉伸的情形, 则此种表面分层屈曲不会发生。椭圆形分层与上述类似, 见图 4.18。

文献【3】认为, 拉伸屈曲是由于母层和子层之间的泊松比差异(亦即各向异性差异)引起的。从图 4.22 中可以看出, 随着子层单向铺层角 α 的增大, ε_{cr} 减小, 发生拉伸屈曲的可能性加大, 当母层与子层的纤维铺角相差较大, 则其泊松比差异也大。显然图 4.22 的子层当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 这种差异最大, 而同时拉伸屈曲应变 ε_{cr} 最小。因此子层和母层的各向异性差异是发生子层拉伸屈曲的主要原因。

实际上, 层壳分层的拉伸屈曲现象有着明确的力学意义。当母层壳在纵向上承受单向拉伸载荷及温湿载荷时, 由于子层和母层的泊松比差异, 它们在面内横向上的变形大小不同, 该方向上母层的拉伸刚度较小因而收缩变形较大, 而子层具有较大的拉伸刚度, 收缩变形小。为满足变形协调条件, 子层在面内横向就必然受到母层的压缩作用。随着层壳承载增加, 该压缩作用也增大, 当达到一定值时, 子层即发生屈曲。因此, 所谓拉伸屈曲实质上是由于子层和母层的泊松比差异, 当层壳承受单向拉伸载荷时发生的子层局部的失稳现象。

我们已经讨论了母层与子层各向异性差异对子层屈曲应变的影响。可知, 随着母层和子层泊松比差异增大, 子层的压缩屈曲发生的可能性减小, 而拉伸屈曲的可能性变大。这种可能性的增减, 对各种铺层形式的层壳而言只是子层屈曲应变值数值的增减, 在某些区域拉伸或压缩屈曲不发生, 是由于当层壳承受的轴向载荷及温湿载荷下达到临界屈曲应变之前, 层壳发生了整体失稳或断裂破坏。

§ 4.2 子层铺层形式及参数对屈曲应变的影响

子层的铺层形式和参数对屈曲应变有着重要的影响, 以下就针对不同的子层分层形式, 不同的子层参数对屈曲应变的影响分别加以分析。

(1) 不同子层分层形状对 ε_{cr} 的影响

母层壳为 $[(0, 45, 90, -45)_s]_s$, 子层分层为 $[0, 45, 90, -45]$, 对于不同的分层形状的

$\varepsilon_{cr} - \alpha$ 曲线示于图 4.9。从图中可以看出，对于相近尺度的、相同方位角的子层分层屈曲，矩形的临界屈曲应变绝对值比椭圆的要大。也就是说，在上述条件下的分层屈曲，其分层形状更易为椭圆而不是矩形。此外在大约 $0 < \alpha < 20^\circ$ 的这一区域，无论是矩形分层还是椭圆形分层，它们的临界应变都随着方位角的增大而增大，而在 $20^\circ < \alpha < 90^\circ$ 的区域，两者的临界应变都随着方位角的增大而减小，同时两者的临界应变值还随方位角的增大而接近，直至 90° 时归于相同。

(2) 分层的铺层形式和层数对 ε_{cr} 的影响

为了分析分层的不同铺层形式与层数对分层屈曲的影响，本文计算了具有不同铺层形式和单层数目子层的层合圆柱壳体，对层壳 $[(0, \pm 30, 90)_5]$ ，具有 $[0, 30]$ 、 $[0, \pm 30]$ 、 $[0, \pm 30, 90]$ 分层结构的计算结果绘于图 4.27，容易看出相对于四层单层的子层屈曲，二层单层和三层单层的临界应变值的绝对值要小的多。这就说明，相对于四层单层的子层屈曲，二层单层和三层单层的分层屈曲应变更易发生。

当然这种现象也不是绝对的，从图中可以看出，二层单层和三层单层的应变曲线有相交现象，说明压缩分层屈曲应变值不再随着分层的层数的增加而提高，还与分层的铺层形式、分层的方位角 α 有关。就于本图为例，在 $0 < \alpha < 20^\circ$ 时，对应于二层单层的临界屈曲应变比对应于三层的要小，而在 $\alpha > 20^\circ$ 的区域，对应于二层单层的临界屈曲应变反而比对应于三层的要大。

对于有些子层分层，不但存在压缩屈曲，而且有拉伸屈曲的现象。如图 4.11 对应于层壳 $[90, (\pm 15)_3]$ ，子层 $[90]$ 的 ε_{cr} 曲线。从图中可以看出在 $0 < \alpha < 10^\circ$ 区存在着拉伸屈曲现象。图 4.21 也表明了这一点。

(3) 分层的尺寸大小对 ε_{cr} 的影响

子层分层的尺寸大小对临界屈曲应变有着很大的影响。母层壳为 $[(0, 45, 90, -45)_5]$ ，子层分层为 $[0, 45, 90, -45]$ ，对应于不同的分层尺寸的临界应变曲线如图 4.4 所示。图中的三条曲线分别对应于边长为 10、12、14 的正方形分层。在这里呈现了一种比较复杂的情况，即三条曲线相互交叉。不具有一般的规律性，但是，从图中还是可以大致看出，在比较大的方位角区域，大尺寸的分层比小尺寸的分层的临界屈曲应变的绝对值要大，说明小尺寸的分层屈曲更容易发生。

§ 4.3 母层铺层形式及参数对屈曲应变的影响

母层的铺层形式和参数同样对屈曲应变有着重要的影响，以下就针对不同的母层分层形式，不同的母层参数对屈曲应变的影响分别加以分析。

(1) 母层的铺层形式对 ε_{cr} 的影响

母层的铺层形式对分层屈曲有着重大的影响，本文的所有分层屈曲临界应变曲线图就是

在各种不同的母层铺层形式下得到的。图 4.15 和图 4.16 表示母层为 $[90, (\pm\theta)_3]_s$ 、子层为 [90] 的层合壳体在不同的母层壳铺层角 θ 情况下，分层屈曲临界应变的变化。其中图 4.16 没有考虑温湿效应，而图 4.15 则考虑了温湿效应。从图 4.16 可以看出在 $30^\circ \sim 45^\circ$ 的范围内，拉伸屈曲的可能性更大，因为此范围内对应的方位角区域最宽。在 $\alpha > 22^\circ$ 的区域不发生拉伸分层屈曲，同样对于 $\alpha < 38^\circ$ 的区域不发生压缩屈曲。在 $50^\circ < \alpha < 90^\circ$ 的区域，不同母层铺层角的临界屈曲应变曲线几乎重叠，表明在这一区域，母层铺设角对屈曲应变的影响甚微。同时注意到，无论对于何种母层铺设角，拉伸分层屈曲应变绝对值随子层的方位角的增加而增大，而压缩分层屈曲应变绝对值随子层的方位角的增加而减小。

考虑温湿效应时的情形要复杂一些，出现了与不考虑温湿效应时不同的特点。但临界屈曲应变曲线的总的变化趋势并没有改变。

(2) 层壳单层厚度对 ε_{cr} 的影响

影响临界屈曲应变的又一个重要因素是单层的厚度。图 4.14 所示为母层为 $[90, (\pm\theta)_3]_s$ 、子层 [90] 的层合壳体在不同的单层厚度下的分层屈曲临界应变曲线图。从图中很容易的看出，对于拉伸屈曲应变，在相同的子层方位角下，对应单层厚度薄的屈曲应变要比厚的值小一些，也就是说，单层厚度薄的更容易发生拉伸屈曲应变。对于压缩屈曲应变，在相同的子层方位角下，对应单层厚度薄的屈曲应变绝对值同样要比厚的要小一些，说明单层厚度薄的同样更容易发生压缩屈曲应变。

(3) 母层壳中面半径 R 对 ε_{cr} 的影响

母层壳中面半径 R 对临界屈曲应变值的影响很明确，图 4.3、4.6 为母层壳 $[(0, 45, 90, -45)_3]_s$ ，子层分层 $[0, 45, 90, -45]$ 时对应于矩形和椭圆形分层的 $\varepsilon_{cr} - \alpha$ 图。图 4.17、4.18 为母层壳 $[(\pm 60, 0, 90)_3]_s$ ，子层分层 $[\pm 60]$ 时对应于矩形和椭圆形分层的 $\varepsilon_{cr} - \alpha$ 图。从这些图中可以很容易的看出，随着母层壳中面半径 R 的增加，临界压缩屈曲应变的绝对值变小。也就是说随着 R 的增加，分层压缩屈曲更容易发生，不管子层的形状如何。

§ 4.4 湿热效应对屈曲应变的影响

纤维增强塑料基复合材料的固化温度取决于所使用的塑料，通常分为高温固化和常温固化。对于在常温下固化并且在常温下使用的复合材料，温度变化的幅度不大，通常可以不考虑温度变化对应力的影响。但对于在高温下固化的复合材料，当使用的温度不同于固化温度时，便会产生热变形。另外，塑料机体易于吸湿，而材料水分含量的变化也会引起湿变形。而湿热变形会导致应力产生，它们对复合材料的强度有较大的影响，所以在分析时必须加以考虑。

(1) 热载荷对 ε_{cr} 的影响

通常，材料弹性性质和热膨胀系数并不是一成不变的，它们会随着温差的变化而变化。为了更好的反映工程中的实际，在本文中考虑了材料弹性性质和热膨胀系数随温差变化的因素，即材料常数是温度的线形函数：

$$E_1 = E_{10}(1 - 0.5 \times 10^{-3} \Delta t); \quad E_2 = E_{20}(1 - 0.2 \times 10^{-3} \Delta t);$$

$$G_{12} = G_0(1 - 0.2 \times 10^{-3} \Delta t); \quad \alpha_1 = \alpha_{10}(1 + 0.5 \times 10^{-3} \Delta t);$$

$$\alpha_2 = \alpha_{20}(1 + 0.5 \times 10^{-3} \Delta t);$$

其中: E_{10} 、 E_{20} 、 G_0 、 α_{10} 、 α_{20} 是结构在常温时的弹性常数和热膨胀系数, Δt 是温升值。

图 4.21 所示为母层为 $[(0)_{10}]_s$ 、子层 [0] 的层合壳体当不考虑吸湿时在不同的温差下的分层屈曲临界应变曲线图, 材料为 T300/5208。此条件下, 层壳同时存在拉伸屈曲和压缩屈曲。温度效应的影响是显著的, 图中的几条曲线分别对应着常温、温差 50°、温差 100° 的情形。可以看出, 当温差变大时, 拉伸临界屈曲应变的绝对值变大, 发生拉伸屈曲更难了。同样, 当温差变大时, 压缩临界屈曲应变的绝对值也变大, 发生压缩屈曲也更难了。对于如图 4.12 所示的母层为 $[90, (\pm 15)_3]_s$ 、子层为 [90] 的层合壳体也有类似结论。对于不同的母层铺层形式和材料, 温度效应的表现效果是不一样的, 有些受温度影响很大, 而有些则几乎不受温差的变化影响。图 4.8 所示为母层为 $[(0, 45, 90, -45)_s]$, 子层为 [0, 45, 90, -45] 的层合壳体分层屈曲临界应变随温差的变化曲线图, 材料为 AS/3501, 子层方位角为 30°。从图中可以看出, 当温差为 350° 时的临界屈曲应变值的绝对值仅比常温时的临界应变绝对值大 0.00015, 温度效应在此表现的不是很明显。再看一个实例, 图 4.26 所示为母层为 $[(0)_{10}]_s$, 子层为 [0] 的层合壳体分层屈曲临界应变随温差的变化曲线图, 材料为 T300/5208, 子层方位角为 30°。从图中可以看出, 当温差为 350° 时的临界屈曲应变值的绝对值比常温时的临界应变绝对值大 0.012, 温度效应就非常显著了。为了更好的比较这两个实例中临界屈曲应变对温度变化的敏感度, 现将图 4.8、4.26 归并到同一张图 4.25 中, 从图中可以看出, 相对于母层为 $[(0)_{10}]_s$, 子层为 [0] 的层合壳体分层屈曲临界应变随温差而剧烈变化, 母层为 $[(0, 45, 90, -45)_s]$, 子层为 [0, 45, 90, -45] 的层合壳体分层屈曲临界应变随温差的变化非常平缓, 近乎一条水平的直线。

能够对上述的现象做出合理的解释, 由材料性能表知道, 复合材料 T300/5208 的热膨胀系数 $\alpha_1 = 0.02$, $\alpha_2 = 22.5$, 而复合材料 AS/3501 的热膨胀系数为 $\alpha_1 \approx -0.3$, $\alpha_2 = 28.1$ 。其中 AS/3501 的 α_1 与 T300/5208 的 α_1 之比为 $-0.3 / 0.02 = -15$ 。相差了一个数量级。

图 4.29 所示为母层为 $[(0, \pm 30, 90)_s]$, 子层为 $[0, \pm 30, 90]$ 的层合壳体分层屈曲临界应变随温差的变化曲线图, 材料为 AS/3501, 子层方位角为 30°, 子层的分层形状为椭圆形。图 4.32 所示为母层为 $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, 子层为 $[\pm 60]$ 的层合壳体分层屈曲临界应变随温差的变化曲线图, 材料为 AS/3501, 子层方位角为 30°, 子层的分层形状为椭圆形。这些实例

再一次验证了上面所做的分析。

注意到图 4.32 中，在子层的方位角 $20^\circ < \alpha < 65^\circ$ 区域，几条临界屈曲应变曲线几乎重叠，说明此种结构在这一区域中受温差的影响是很小的，也说明了温差对材料屈曲的影响还与具体的层壳结构有关。

（2）湿载荷对 ε_{cr} 的影响

图 4.22 所示为母层为 $[(0)_{10}]_s$ 、子层 [0] 的层合壳体在不同的吸湿浓度下的分层屈曲临界应变曲线图，材料为 T300/5208。此条件下，层壳同时存在拉伸屈曲和压缩屈曲。湿效应的影响是显著的，图中的几条曲线对应着吸湿浓度分别为 0、0.003、0.006 的屈曲临界应变。可以看出，当吸湿浓度变大时，拉伸临界屈曲应变的绝对值变大，发生拉伸屈曲更难了。同样，当吸湿浓度变大时，压缩临界屈曲应变的绝对值也变大，发生压缩屈曲也更难了。对于如图 4.13 所示的母层为 $[90, (\pm 15),]$ 、子层为 [90] 的层合壳体也有类似结论。图 4.1 表明的情形也是如此。

对于不同的母层铺层形式和材料，湿度效应的表现效果是不一样的，有些受湿度影响很大，而有些则几乎不受吸湿浓度变化的影响。图 4.5 所示为母层为 $[(0, 45, 90, -45),]$ ，子层为 $[0, 45, 90, -45]$ 的层合壳体在常温时分层屈曲临界应变随吸湿浓度的变化曲线图，材料为 AS/3501，子层方位角为 30° 。从图中可以看出，当吸湿浓度为 0.025 时的临界屈曲应变值的绝对值仅比无吸湿时的临界应变绝对值大 0.0003，湿度效应在此表现的不是很明显。图 4.23 所示为母层为 $[(0)_{10}]_s$ ，子层为 [0] 的层合壳体常温时分层屈曲临界应变随吸湿浓度的变化曲线图，材料为 T300/5208，子层方位角为 30° 。从图中可以看出，当吸湿浓度为 0.021 时的临界屈曲应变值的绝对值比无吸湿时的临界应变绝对值大 0.0175，湿度效应就很明显了。为了更好的比较这两个实例中临界屈曲应变对湿度变化的敏感度，现将图 4.5、4.23 归并到同一张图 4.24 中，从图中可以看出，相对于母层为 $[(0)_{10}]_s$ ，子层为 [0] 的层合壳体分层屈曲临界应变随湿度变化而剧烈变化，母层为 $[(0, 45, 90, -45),]$ ，子层为 $[0, 45, 90, -45]$ 的层合壳体分层屈曲临界应变随吸湿浓度的变化非常平缓，近乎一条水平的直线。

图 4.28 所示为母层为 $[(0, \pm 30, 90),]$ ，子层为 $[0, \pm 30, 90]$ 的层合壳体分层屈曲临界应变随湿度的变化曲线图，材料为 AS/3501，子层方位角为 30° ，子层的分层形状为椭圆形。图 4.31 所示为母层为 $[(\pm 60, 0, 90),]$ ，子层为 $[\pm 60]$ 的层合壳体分层屈曲临界应变随湿度的变化曲线图，材料为 AS/3501，子层方位角为 30° ，子层的分层形状为椭圆形。这些实例再一次验证了上面所做的分析。

注意到图 4.31 中，在子层的方位角 $45^\circ < \alpha < 75^\circ$ 区域，几条临界屈曲应变曲线几乎重叠，说明此种结构在这一区域中受湿度变化的影响是很小的，也说明了湿度变化对材料屈曲的影响还与具体的层壳结构有关。

(2) 温湿载荷对 ε_{cr} 的影响

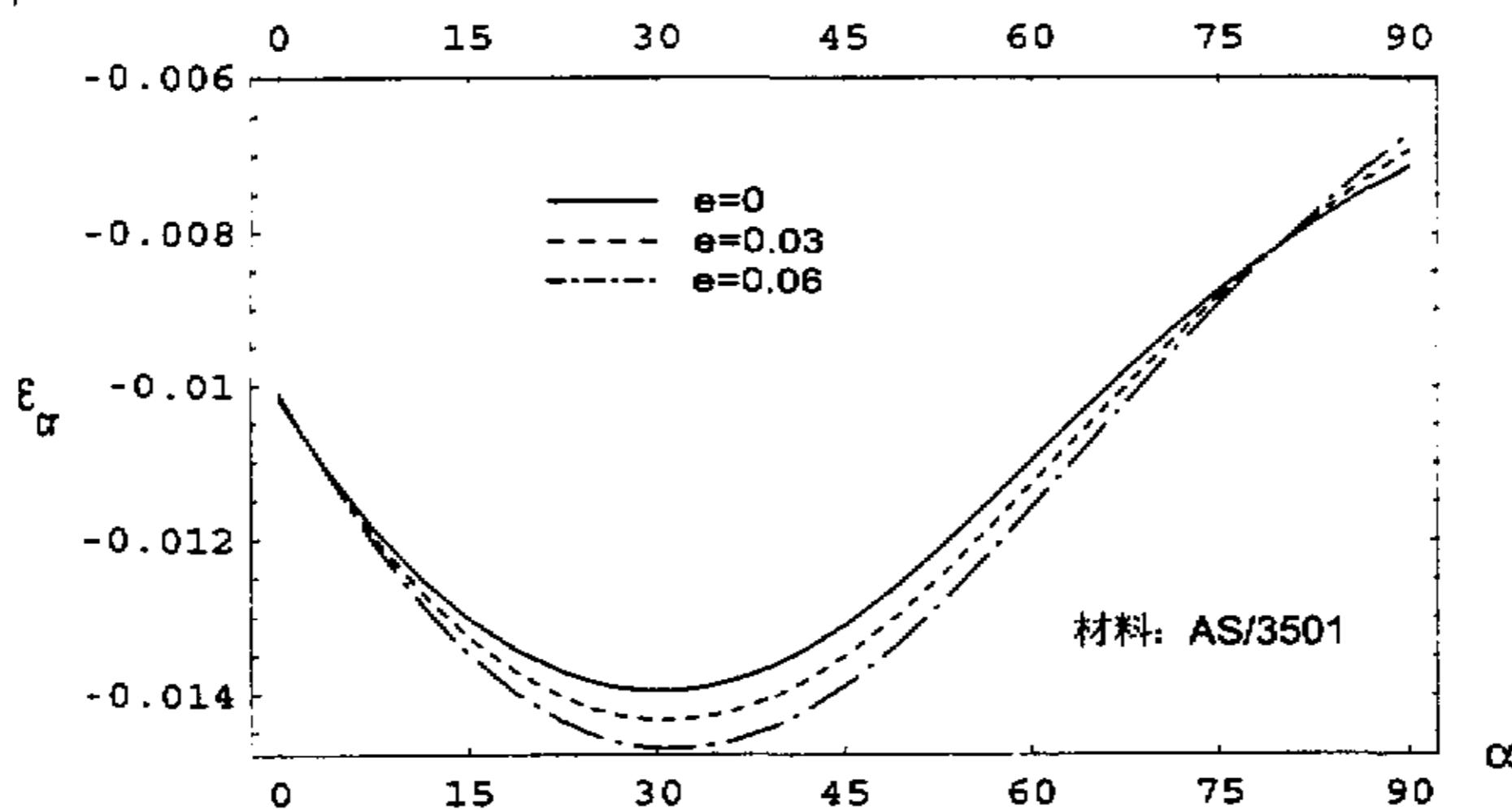
图 4.30 所示为母层为 $[(0, \pm 30, 90)_s]$, 子层为 $[0, \pm 30, 90]$ 的层合壳体在不同的温湿条件下的分层屈曲临界应变曲线图, 分别对应于常温无吸湿、温差 100° 吸湿浓度 0.006、温差 200° 吸湿浓度 0.012 三种工况, 材料为 AS/3501, 子层方位角为 30° , 子层的分层形状为椭圆形。结合(1)、(2)的讨论可以看出, 温度效应和湿度效应的作用效果是一致的。也就是说, 温差增大和吸湿浓度增大对层壳表面分层屈曲的影响一致, 温差减小和吸湿浓度减小对层壳表面分层屈曲的影响一致。就图 4.30, 图 4.2 来说, 当温差增大吸湿浓度增大时, 层壳的压缩屈曲临界应变绝对值增大。当温差减小吸湿浓度减小时, 层壳的压缩屈曲临界应变绝对值减小, 更容易发生压缩分层屈曲。

§ 4.5 子层面内位移对屈曲应变的影响

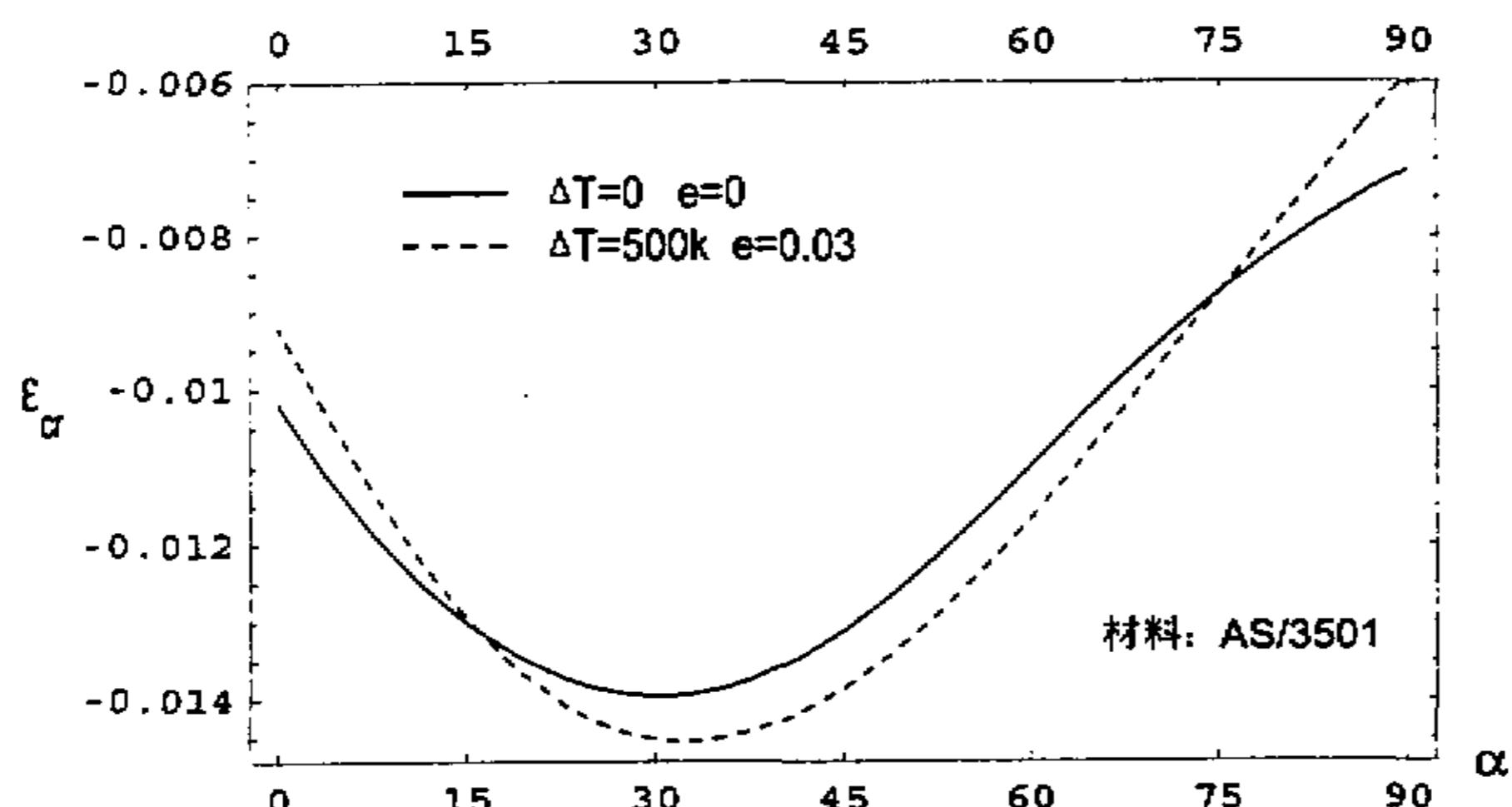
由层壳表面的分层屈曲的模型可知, 为了更好的反映实际的层壳表面分层屈曲情况, 在子层壳的面内位移中加入了线形项。未考虑子层面内位移对屈曲影响与考虑面内位移对屈曲影响的曲线比较图见 4.20、4.10、4.19。图 4.20 对应于母层壳 $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, 椭圆形子层分层 $[\pm 60]$ 的曲线比较图。从图中可以看出当考虑子层面内位移时, 压缩临界屈曲应变绝对值比未考虑时的值要小。并且子层方位角越小, 这种差别也越大。就图 4.20 对应的材料结构来说, 当子层方位角大致为 8° 时, 这种区别达到最大, 两者相差 0.005。当然这种差别也与具体的层壳结构有关, 图 4.10 所示为母层壳 $[(0, 45, 90, -45)_s]$, 具有矩形分层 $[0, 45, 90, -45]$ 时的曲线比较图。在这张图中, 考虑子层面内位移线形项时的临界屈曲应变与不考虑时的值相差无几, 并且这种差别也几乎不受子层方位角变化的影响。不过, 与图 4.20 所示的层合结构类似, 即考虑子层面内位移时的压缩临界屈曲应变绝对值比未考虑时的值要小。

注: 本章图例中各参数的单位约定如下

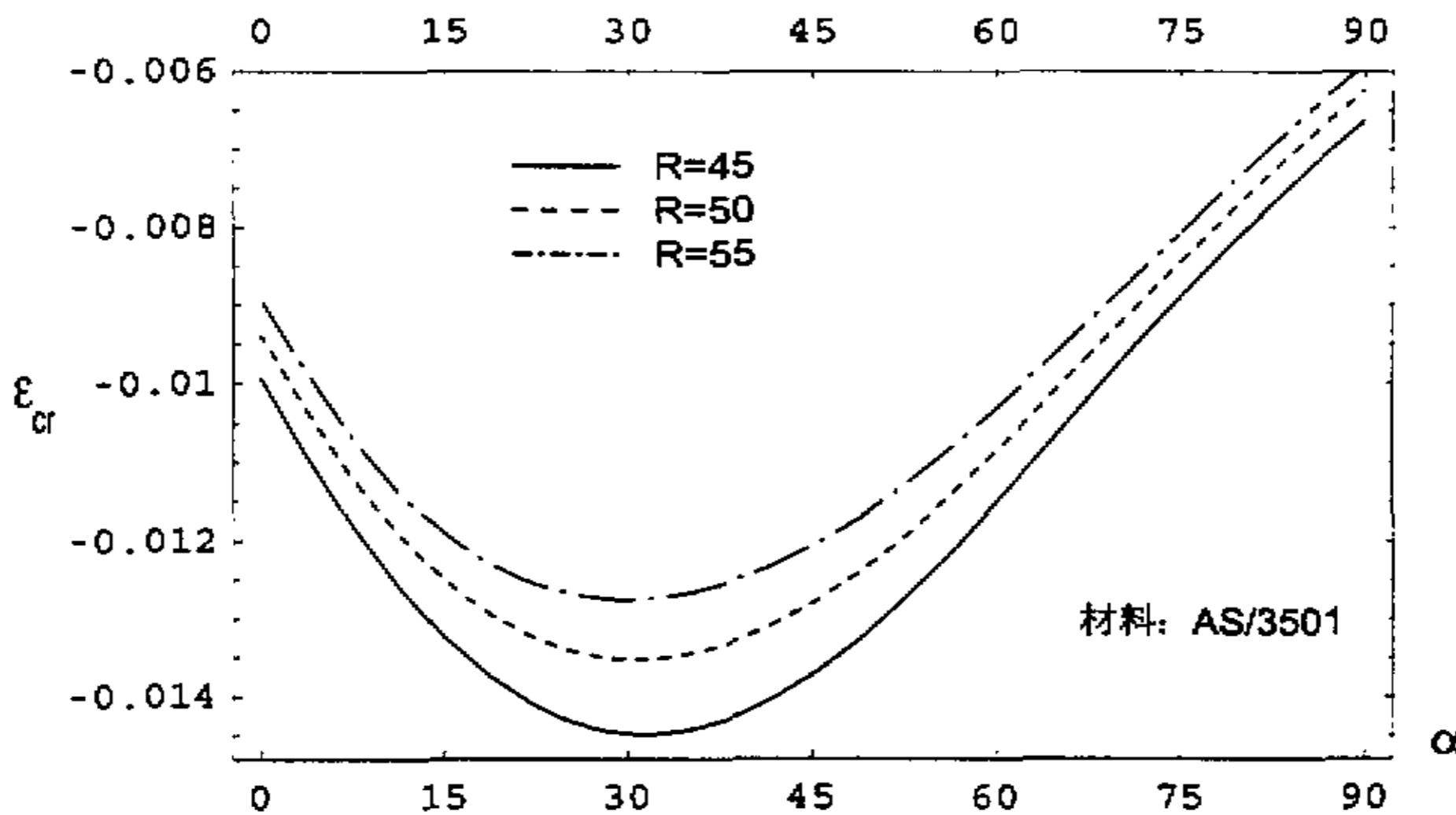
- (1) 长度单位: mm
- (2) 角度单位: 度
- (3) 温度单位: k
- (4) 热膨胀系数单位: $10^{-6} k^{-1}$



图(4.1) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 矩形子层 $[0,45,90,-45]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和吸湿效应. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 0$
Fig(4.1) cylindrical shell $[(0,45,90,-45)_s]$, rectangular sub-shell $[0,45,90,-45]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity effect. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 0$

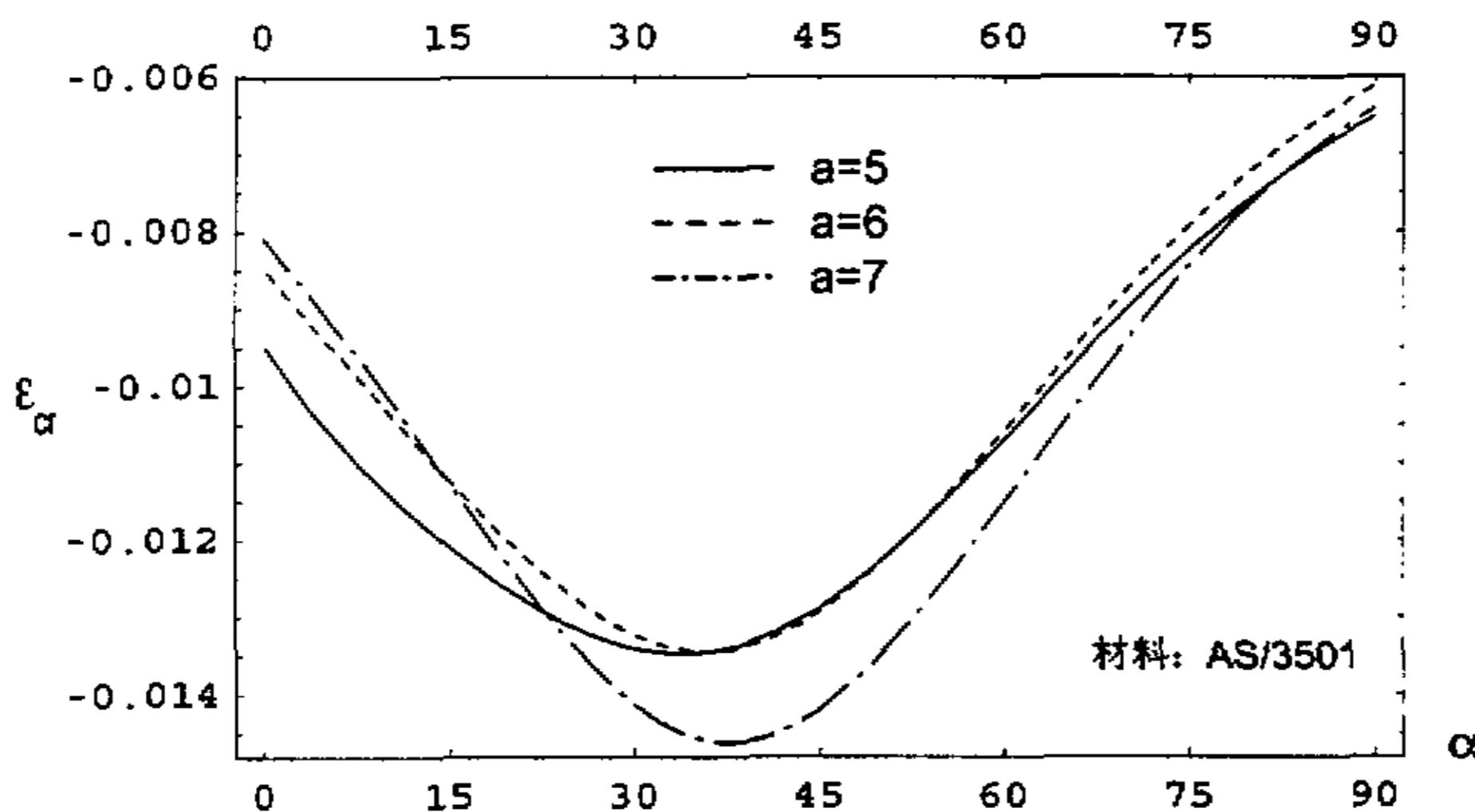


图(4.2) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 矩形子层 $[0,45,90,-45]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和吸湿效应. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $R = 45mm$
Fig(4.2) cylindrical shell $[(0,45,90,-45)_s]$, rectangular sub-shell $[0,45,90,-45]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity effect. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $R = 45mm$



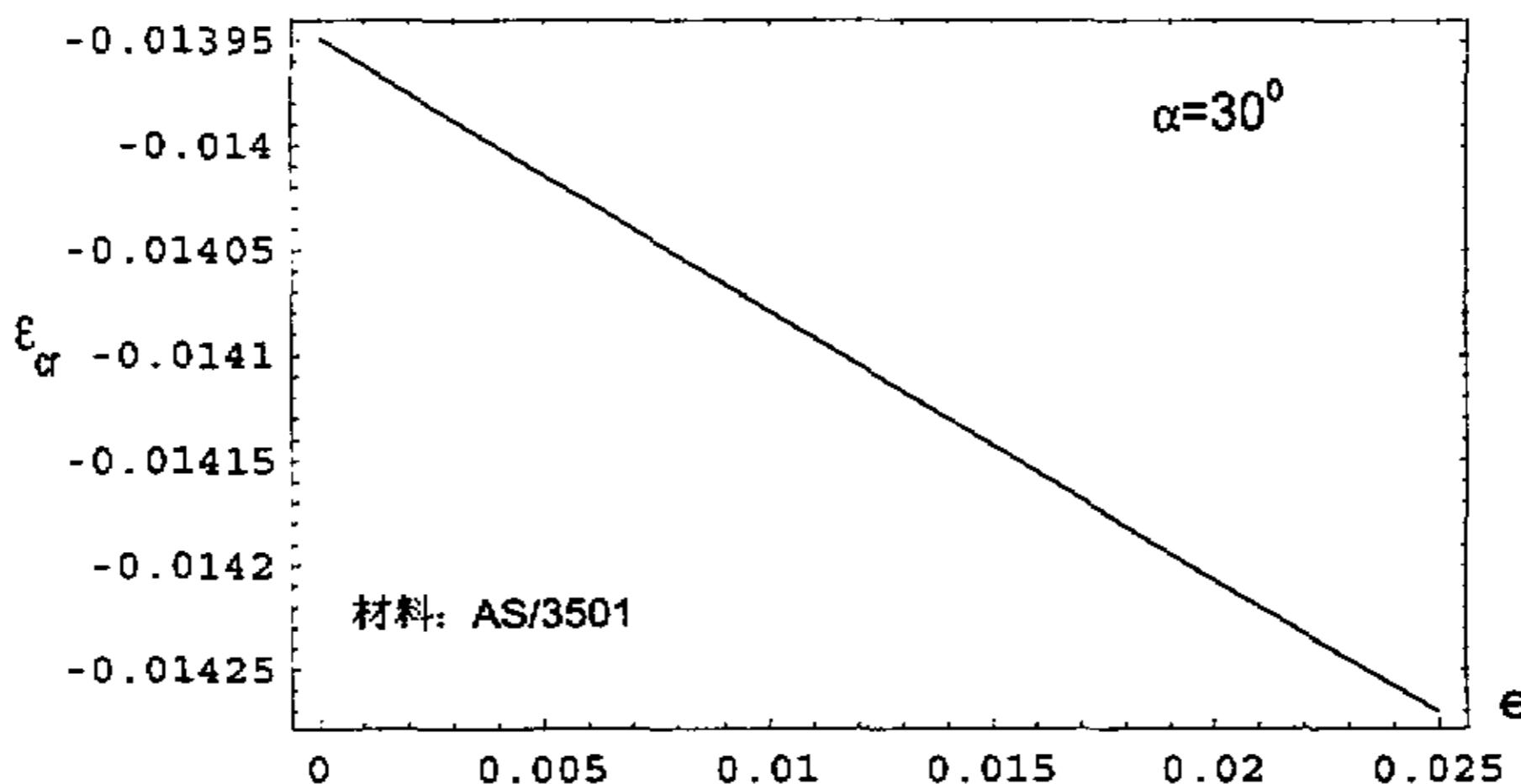
图(4.3) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 矩形子层 $[0,45,90,-45]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $\Delta T = 400k$ 、 $e = 0.02$.

Fig(4.3) cylindrical shell $[(0,45,90,-45)_s]$, rectangular sub-shell $[0,45,90,-45]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $\Delta T = 400k$ 、 $e = 0.02$



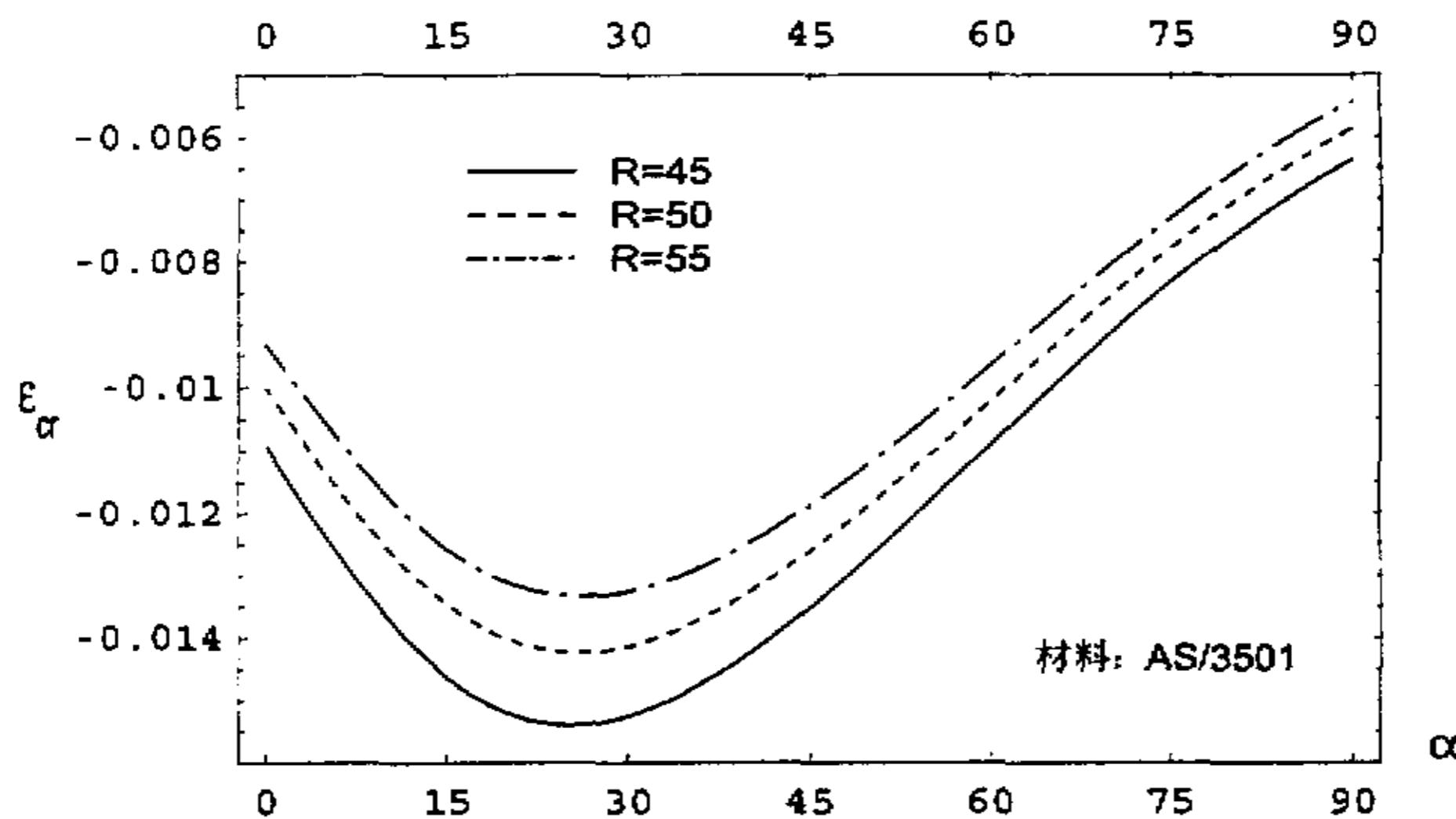
图(4.4) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 矩形子层 $[0,45,90,-45]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应. $a = b$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 200k$ 、 $e = 0.01$.

Fig(4.4) cylindrical shell $[(0,45,90,-45)_s]$, rectangular sub-shell $[0,45,90,-45]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = b$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 200k$ 、 $e = 0.01$.



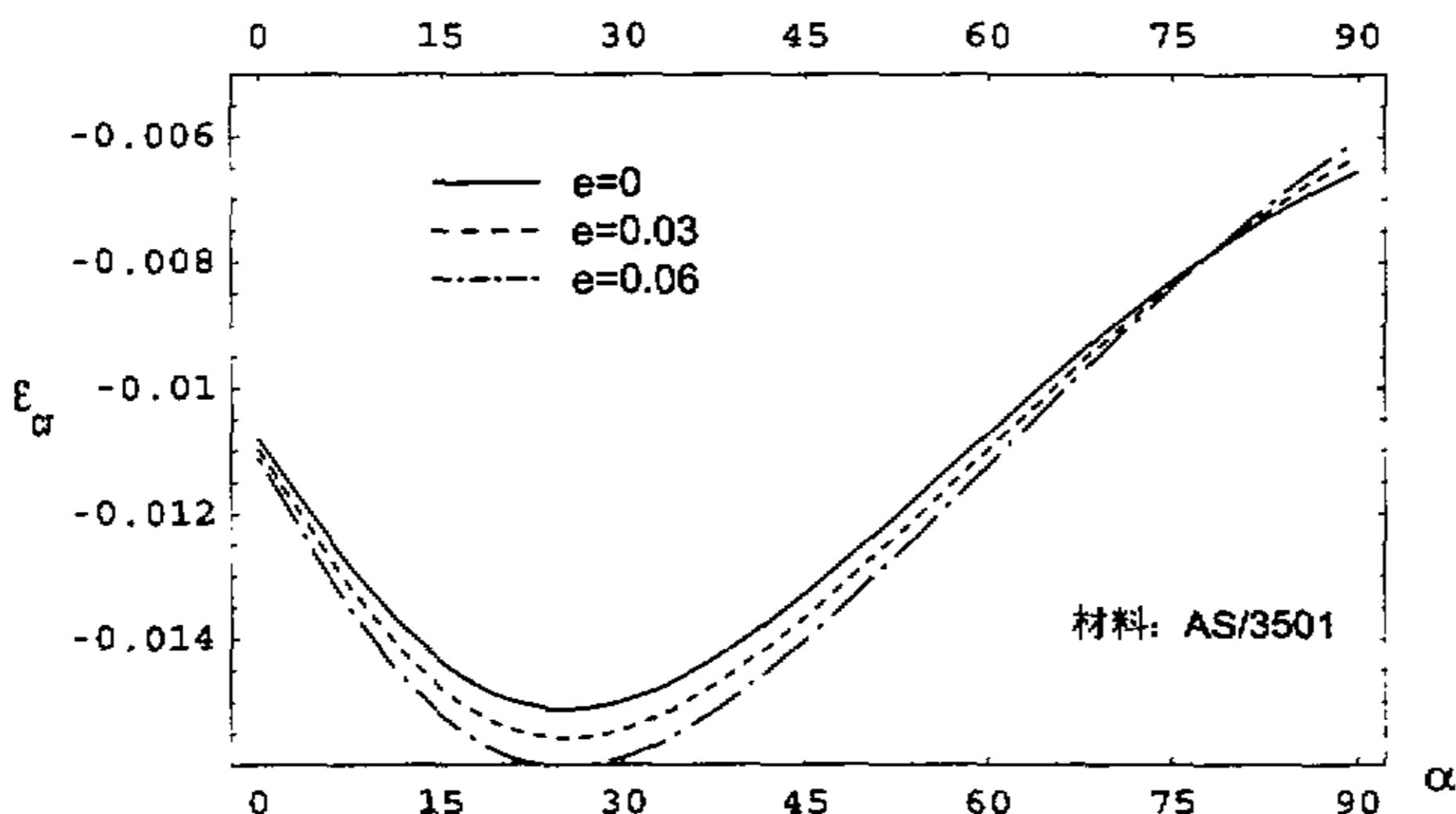
图(4.5) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 矩形子层 $[0,45,90,-45]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和吸湿效应. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 0$

Fig(4.5) cylindrical shell $[(0,45,90,-45)_s]$, rectangular sub-shell $[0,45,90,-45]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity effect. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 0$



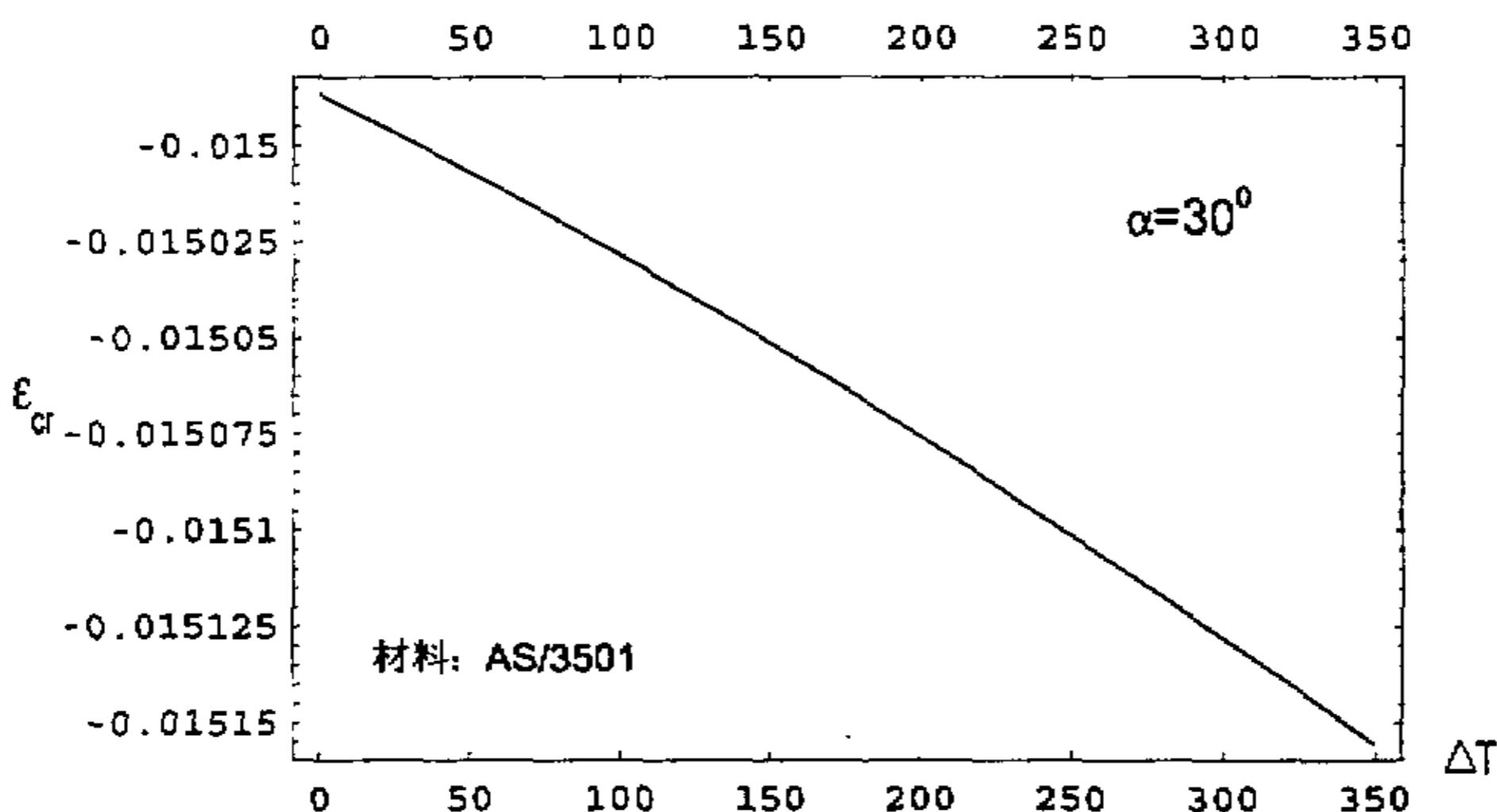
图(4.6) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 椭圆子层 $[0,45,90,-45]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $\Delta T = 200k$ 、 $e = 0.012$

Fig(4.6) cylindrical shell $[(0,45,90,-45)_s]$, elliptical sub-shell $[0,45,90,-45]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $\Delta T = 200k$ 、 $e = 0.012$.



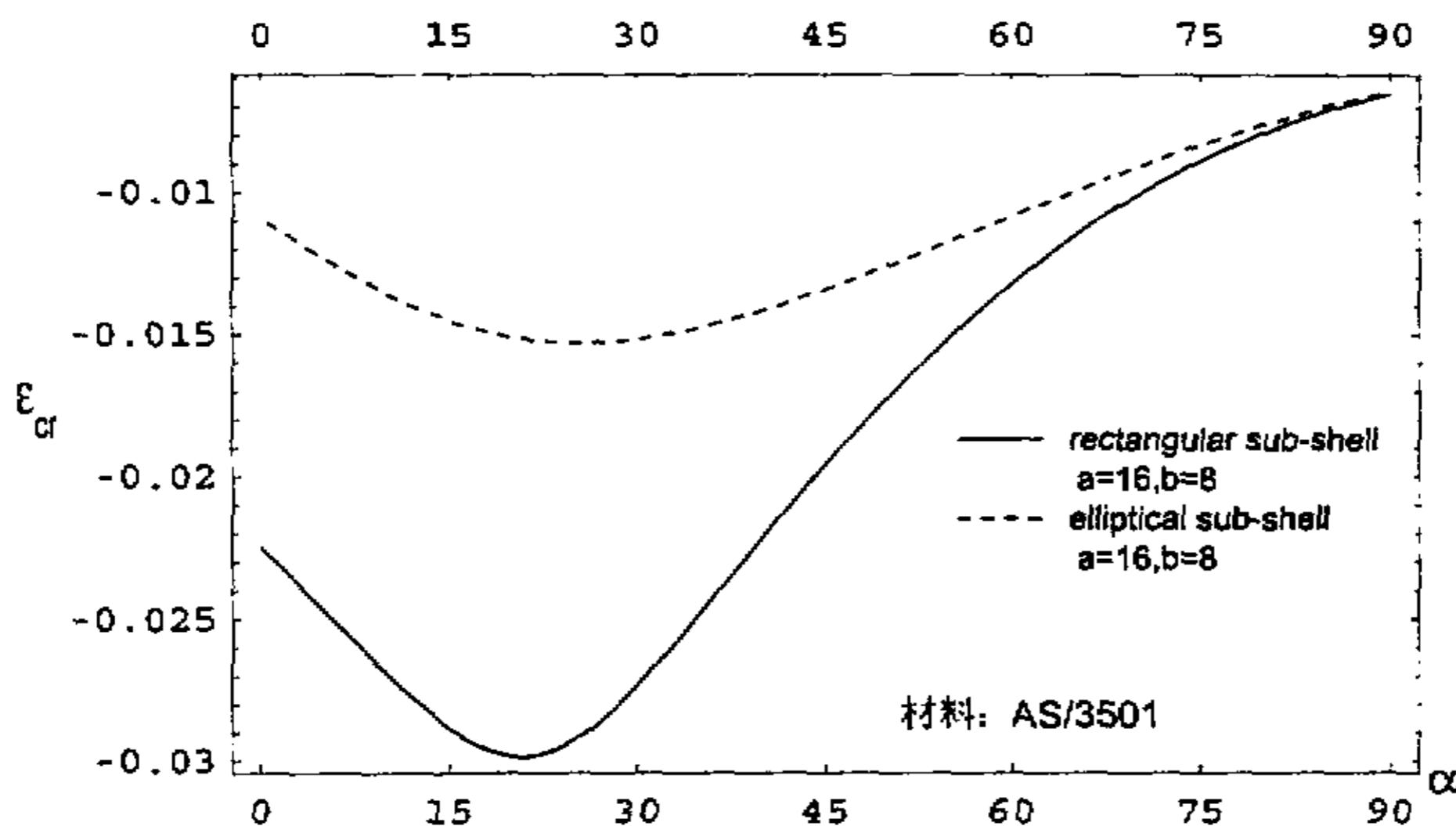
图(4.7) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 椭圆子层 $[0,45,90,-45]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和吸湿效应. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 0$

Fig (4.7) cylindrical shell $[(0,45,90,-45)_s]$, elliptical sub-shell $[0,45,90,-45]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity effect. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 0$



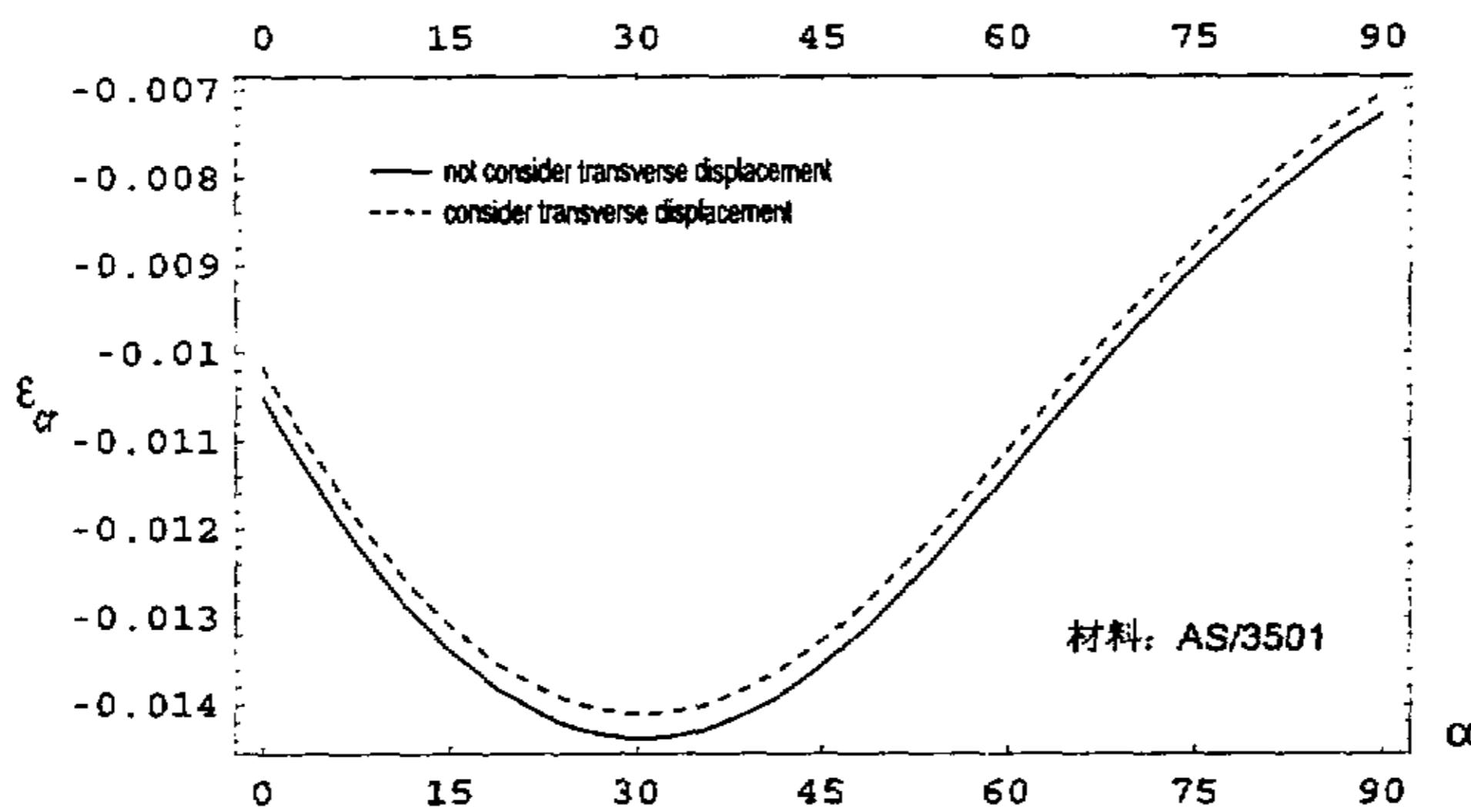
图(4.8) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 椭圆子层 $[0,45,90,-45]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温度效应. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$

Fig (4.8) cylindrical shell $[(0,45,90,-45)_s]$, elliptical sub-shell $[0,45,90,-45]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and temperature effect. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$



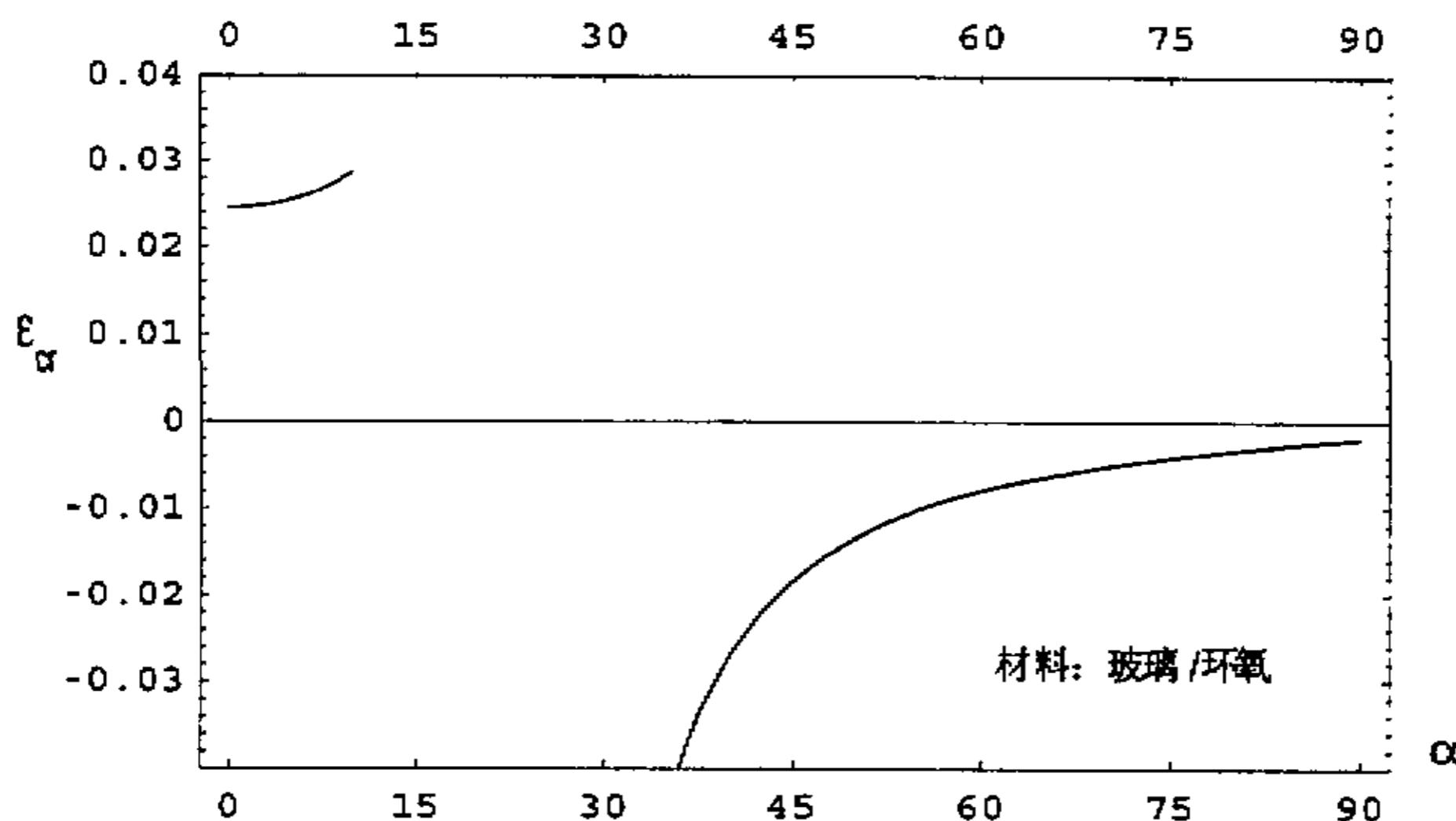
图(4.9) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 子层 $[0,45,90,-45]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应。 $R = 45mm$, $\Delta T = 100k$, $e = 0.009$

Fig(4.9) cylindrical shell $[(0,45,90,-45)_s]$, sub-shell $[0,45,90,-45]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $R = 45mm$, $\Delta T = 100k$, $e = 0.009$



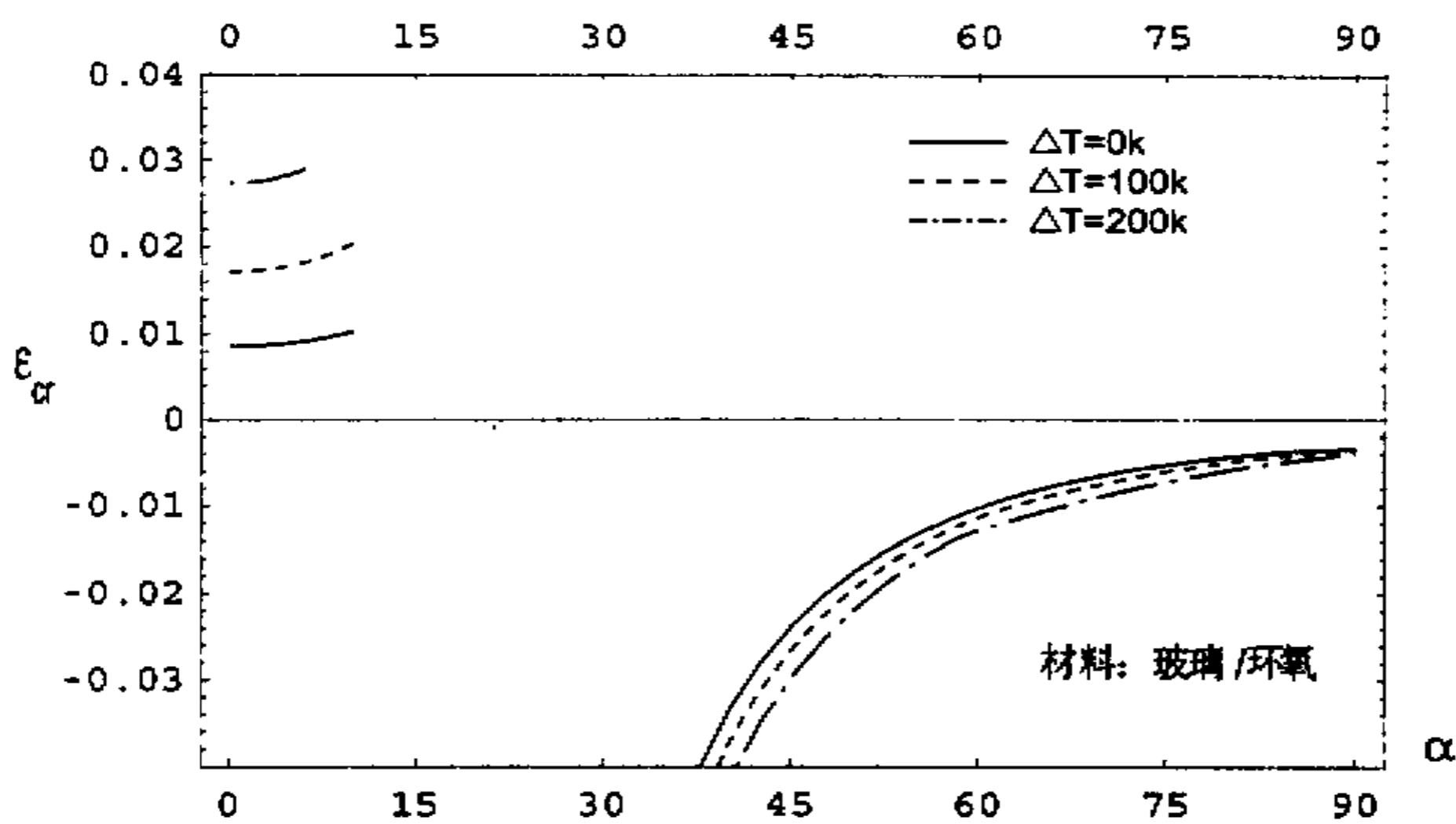
图(4.10) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 矩形子层 $[0,45,90,-45]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应。 $a = 5mm$, $b = 4mm$, $R = 45mm$, $\Delta T = 100k$, $e = 0.009$

Fig(4.10) cylindrical shell $[(0,45,90,-45)_s]$, rectangular sub-shell $[0,45,90,-45]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement and humidity, temperature effect. $a = 5mm$, $b = 4mm$, $R = 45mm$, $\Delta T = 100k$, $e = 0.009$



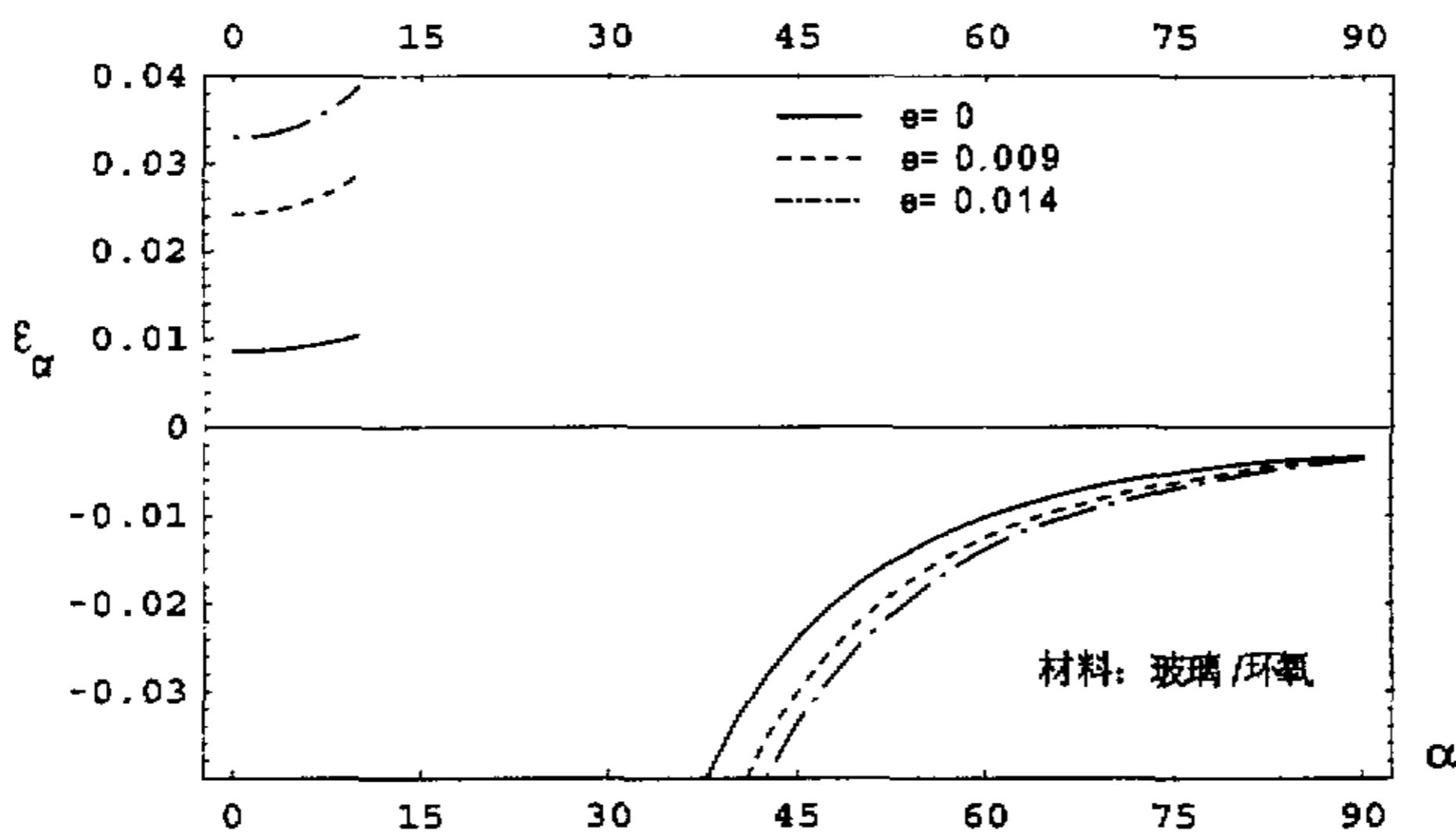
图(4.11) 母层 $[90, (\pm 15)_3]_s$, 矩形子层[90], 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应. $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 80mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$

Fig(4.11) cylindrical shell $[90, (\pm 15)_3]_s$, rectangular sub-shell[90], monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity-temperature effect. $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 80mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$



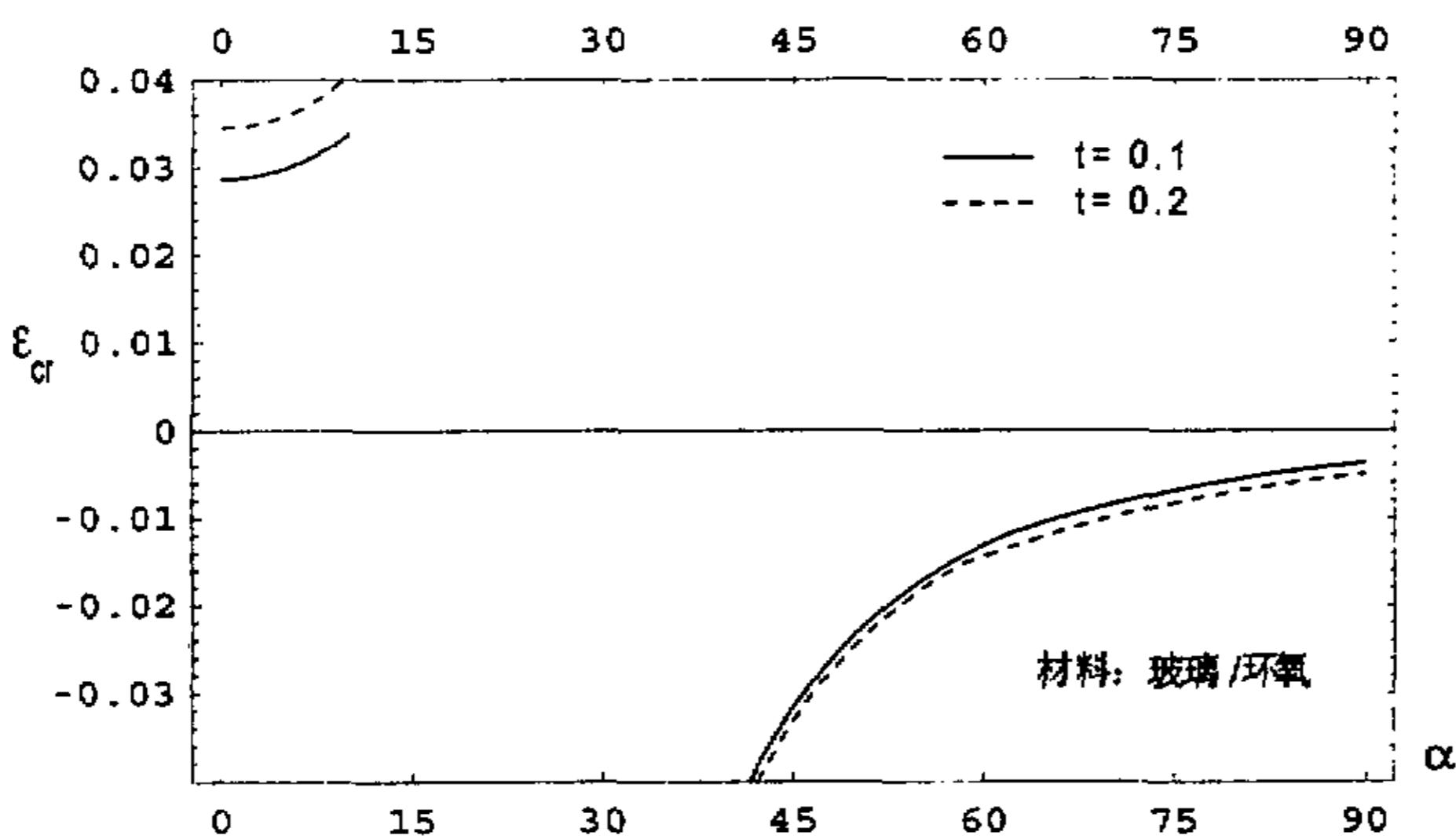
图(4.12) 母层 $[90, (\pm 15)_3]_s$, 矩形子层[90], 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温度效应. $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 50mm$ 、 $e = 0$

Fig(4.12) cylindrical shell $[90, (\pm 15)_3]_s$, rectangular sub-shell[90], monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and temperature effect. $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 50mm$ 、 $e = 0$



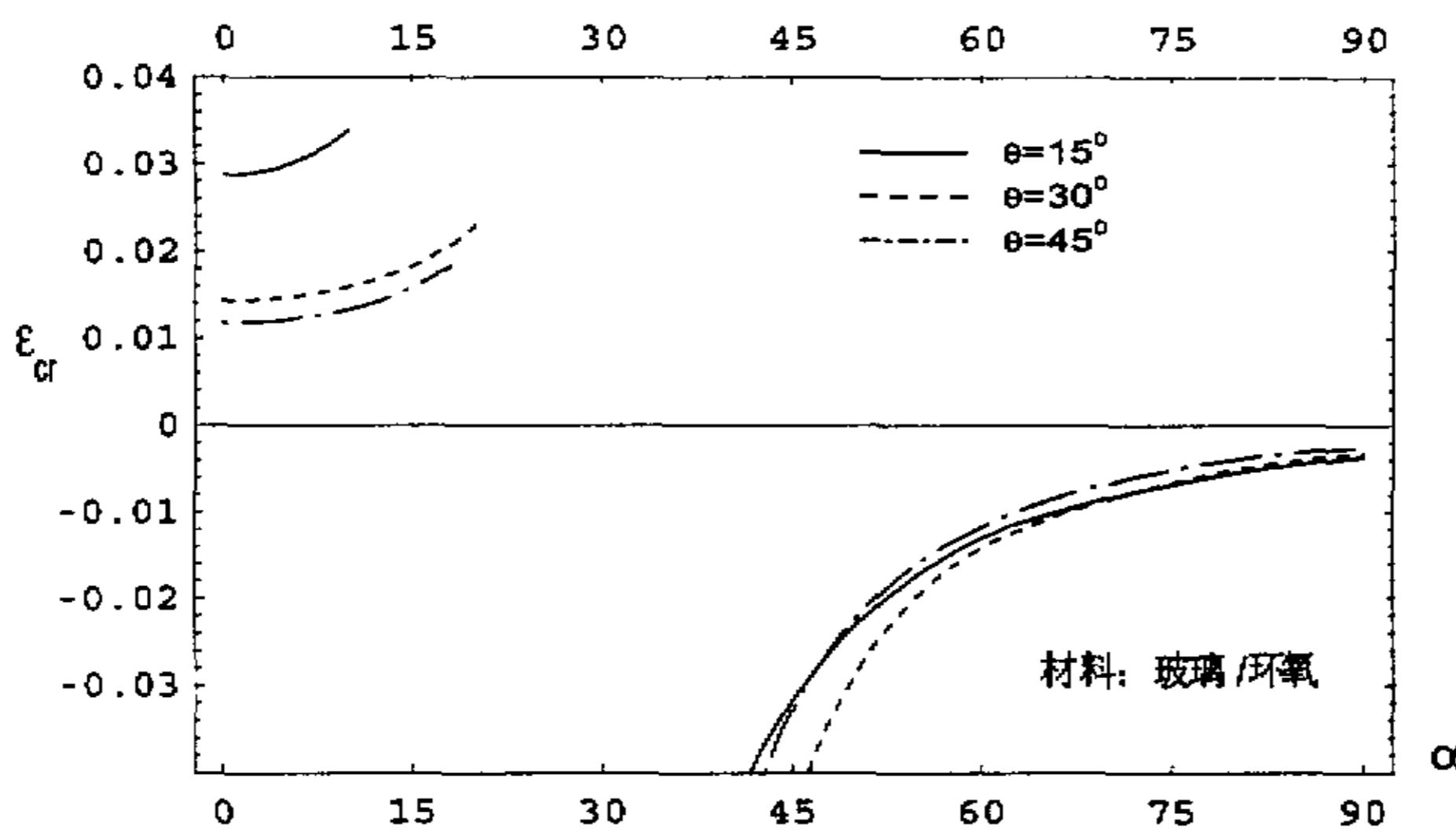
图(4.13) 母层 $[90,(\pm 15)_3]_s$, 矩形子层[90], 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和湿度效应。 $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 50mm$ 、 $\Delta T = 0$

Fig(4.13) cylindrical shell $[90,(\pm 15)_3]_s$, rectangular sub-shell[90], monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity effect. $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 50mm$ 、 $\Delta T = 0$



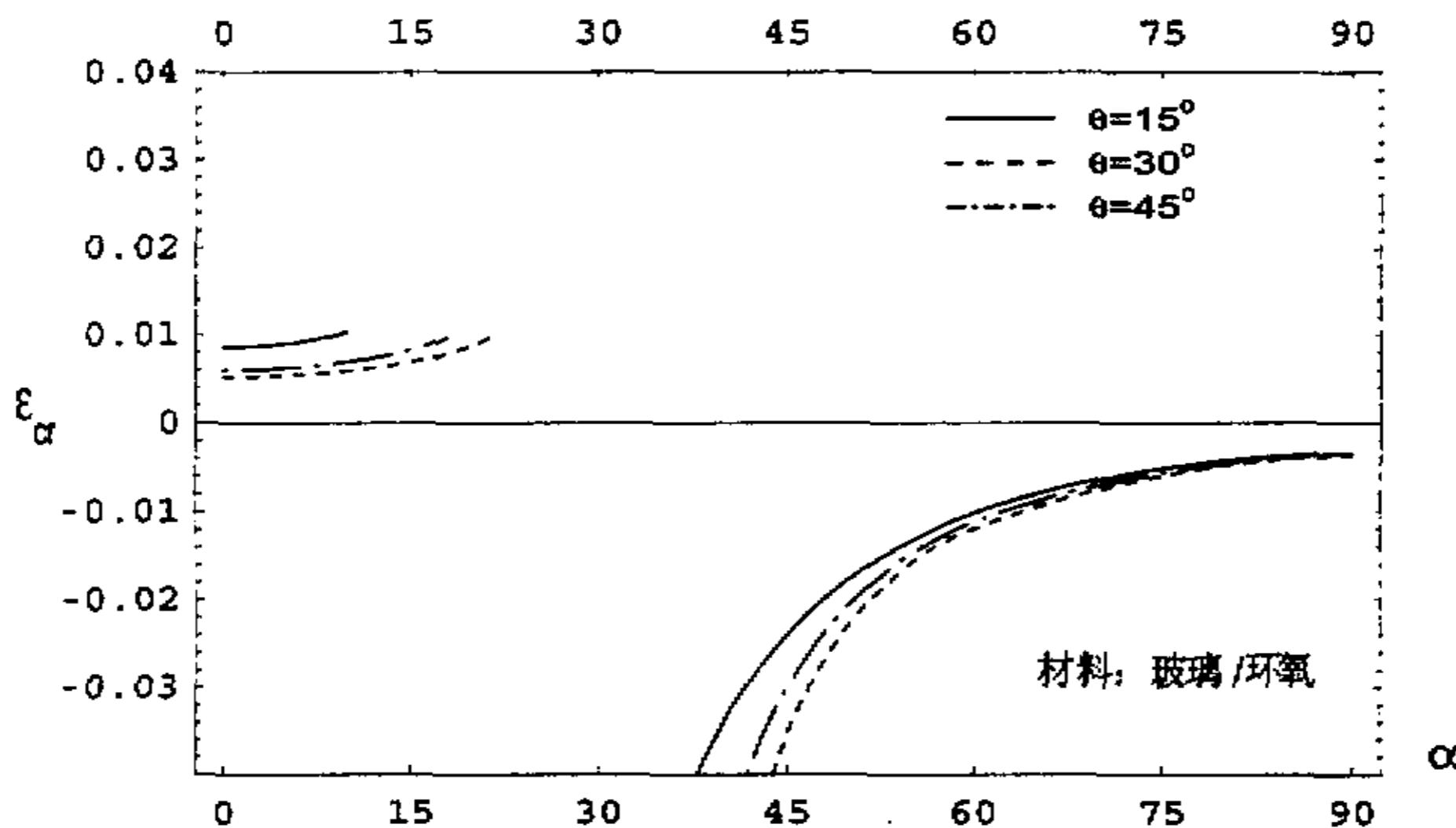
图(4.14) 母层 $[90,(\pm 15)_3]_s$, 矩形子层[90], 单层厚 t . 考虑子层横向位移和温湿效应。 $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 50mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$

Fig(4.14) cylindrical shell $[90,(\pm 15)_3]_s$, rectangular sub-shell[90], monolayer thickness t . Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 50mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$



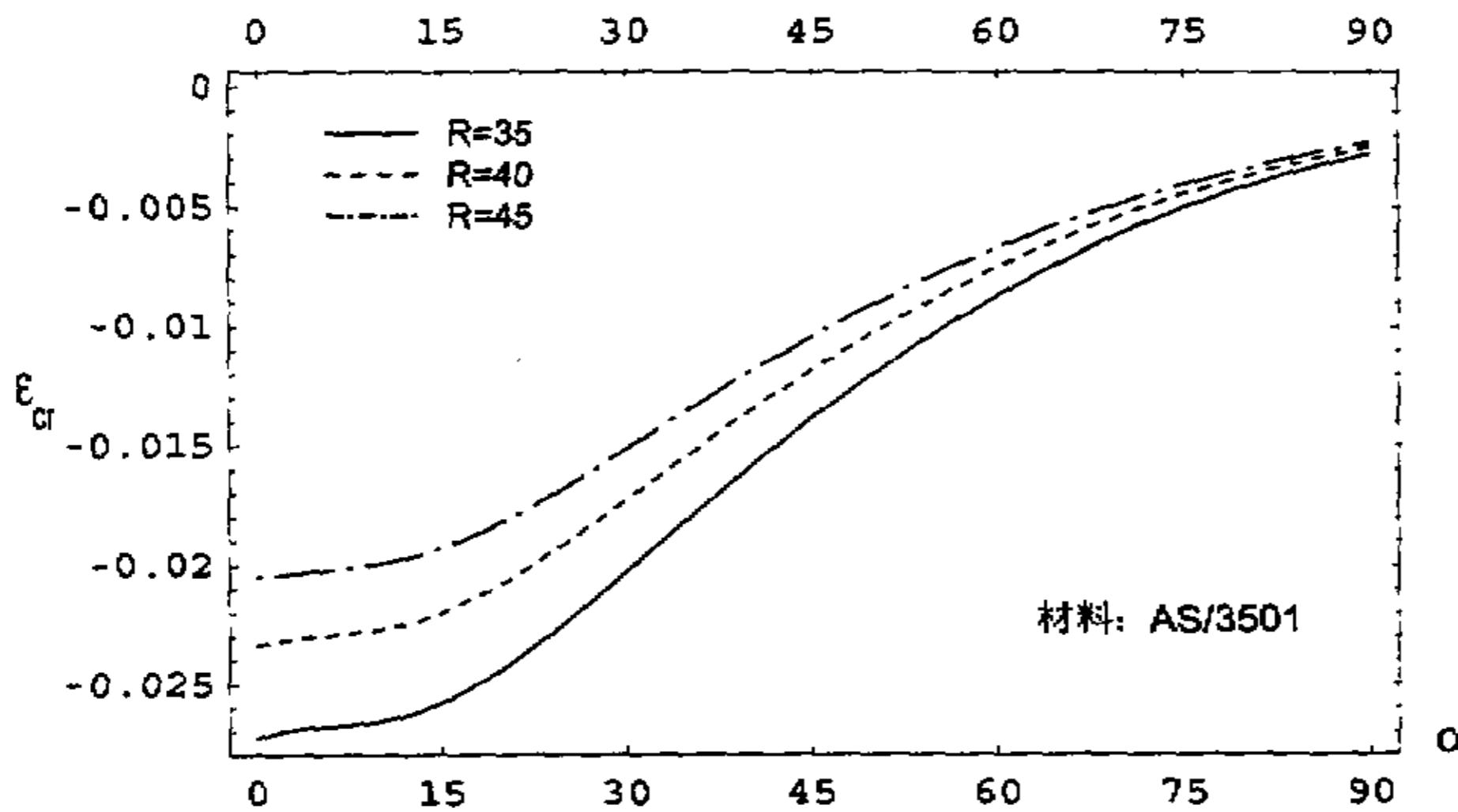
图(4.15) 母层 $[90,(\pm\theta)_3]_s$, 矩形子层[90], 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应. $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 50mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$

Fig(4.15) cylindrical shell $[90,(\pm\theta)_3]_s$, rectangular sub-shell[90], monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 50mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$



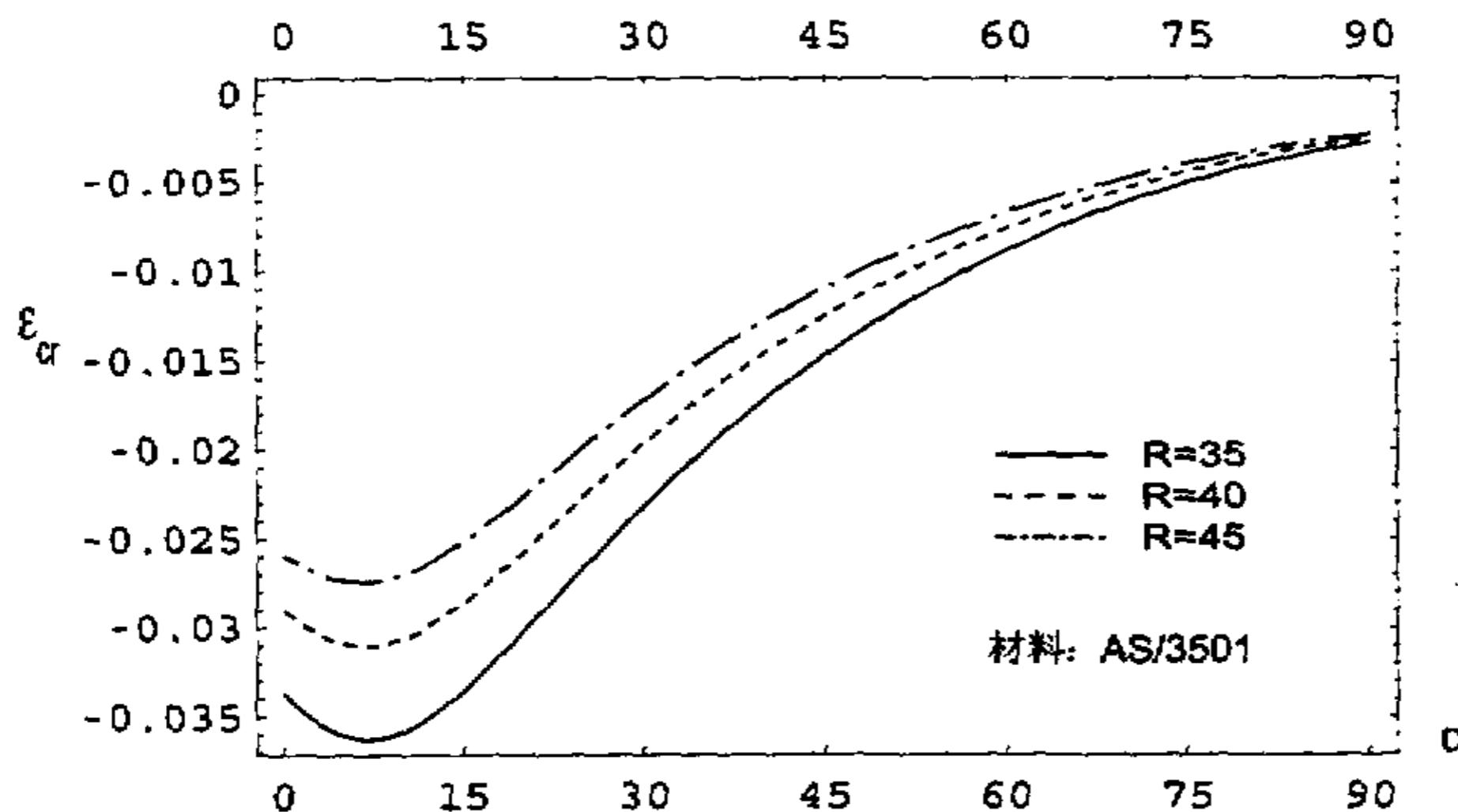
图(4.16) 母层 $[90,(\pm\theta)_3]_s$, 矩形子层[90], 单层厚 $0.1mm$. 不考虑子层横向位移和温湿效应. $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 50mm$ 、 $\Delta T = 0$ 、 $e = 0$

Fig(4.16) cylindrical shell $[90,(\pm\theta)_3]_s$, rectangular sub-shell[90], monolayer thickness $0.1mm$. Don't consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 6mm$ 、 $b = 5mm$ 、 $R = 50mm$ 、 $\Delta T = 0$ 、 $e = 0$



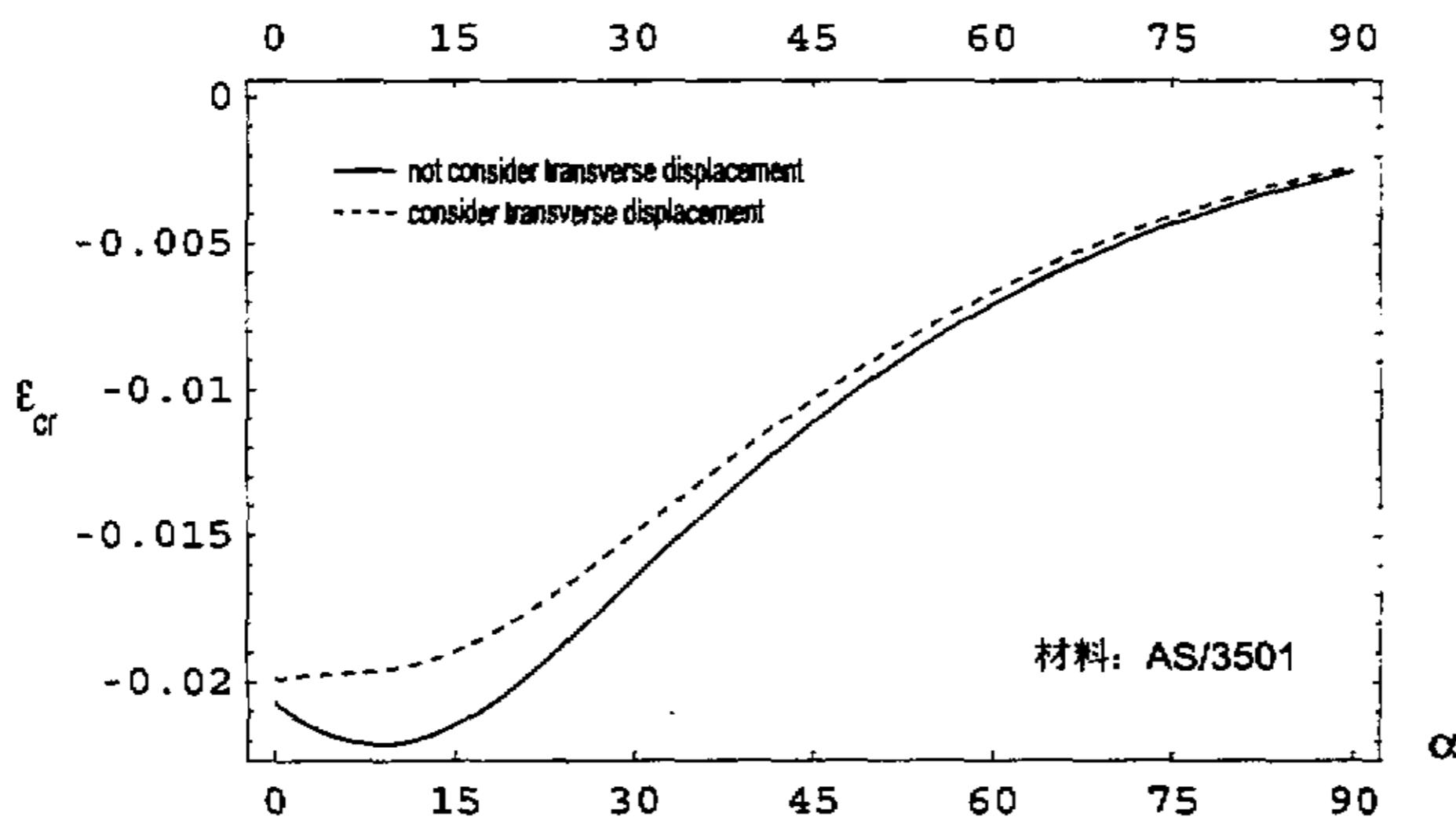
图(4.17) 母层 $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, 矩形子层 $[\pm 60]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$

Fig(4.17) cylindrical shell $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, rectangular sub-shell $[\pm 60]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$



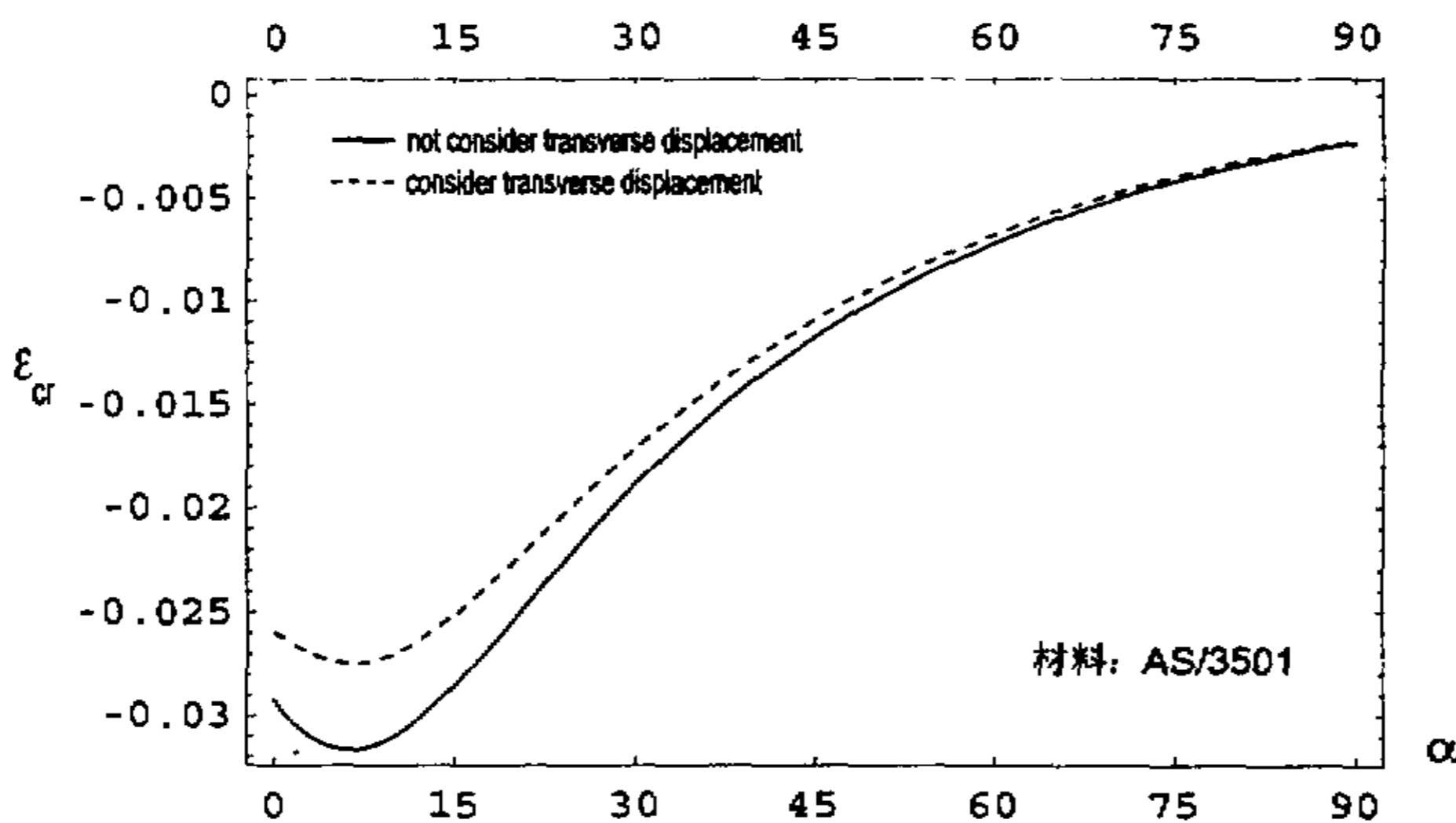
图(4.18) 母层 $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, 椭圆子层 $[\pm 60]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$

Fig(4.18) cylindrical shell $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, elliptical sub-shell $[\pm 60]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$



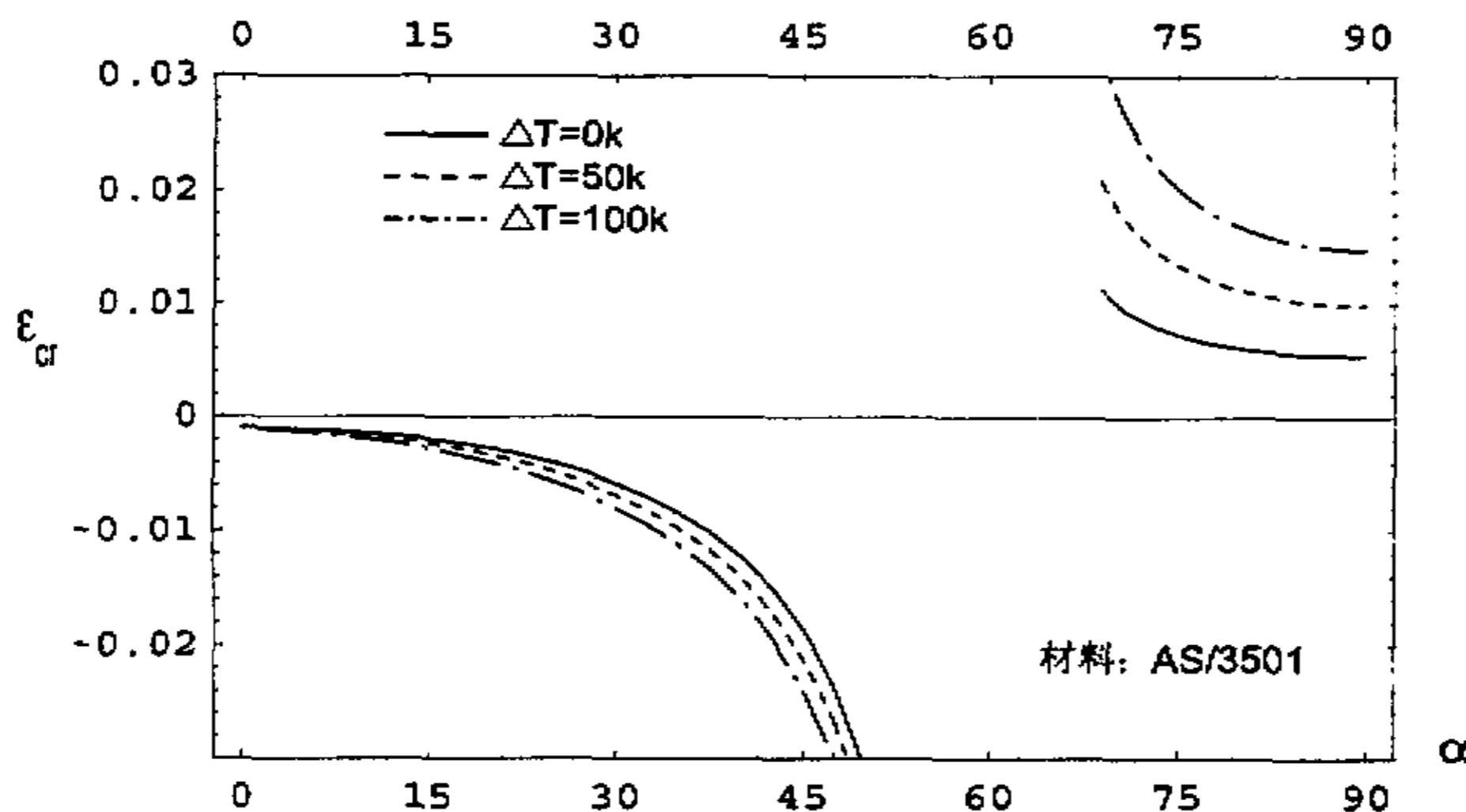
图(4.19) 母层 $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, 矩形子层 $[\pm 60]$, 单层厚 $0.1mm$. 不考虑温湿效应. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $\Delta T = 0$ 、 $e = 0$ 、 $R = 45mm$

Fig(4.19) cylindrical shell $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, rectangular sub-shell $[\pm 60]$, monolayer thickness $0.1mm$. Don't consider the humidity, temperature effect. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $\Delta T = 0$ 、 $e = 0$ 、 $R = 45mm$



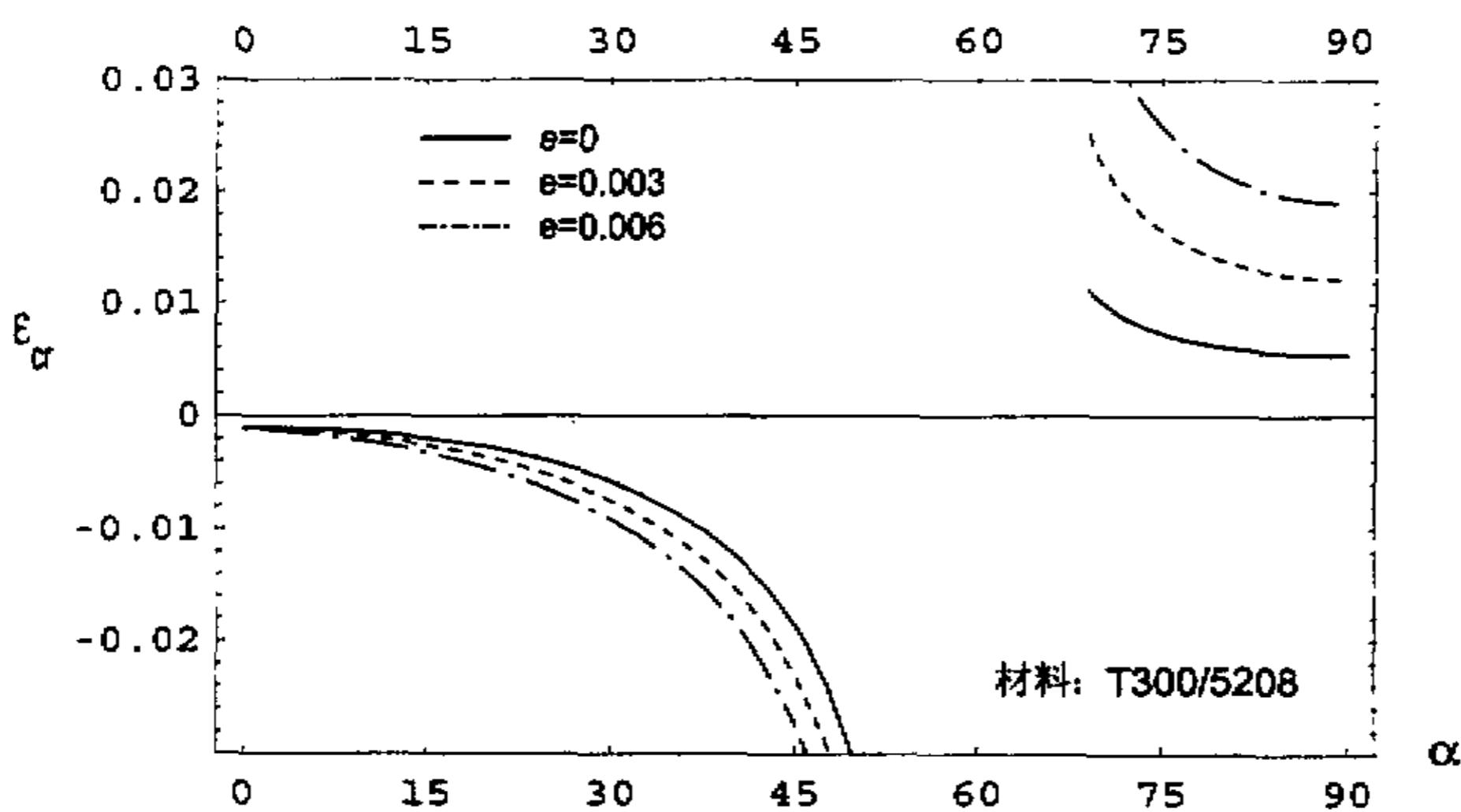
图(4.20) 母层 $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, 椭圆子层 $[\pm 60]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑温湿效应. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$

Fig(4.20) cylindrical shell $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, elliptical sub-shell $[\pm 60]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the humidity, temperature effect. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $\Delta T = 50k$ 、 $e = 0.009$



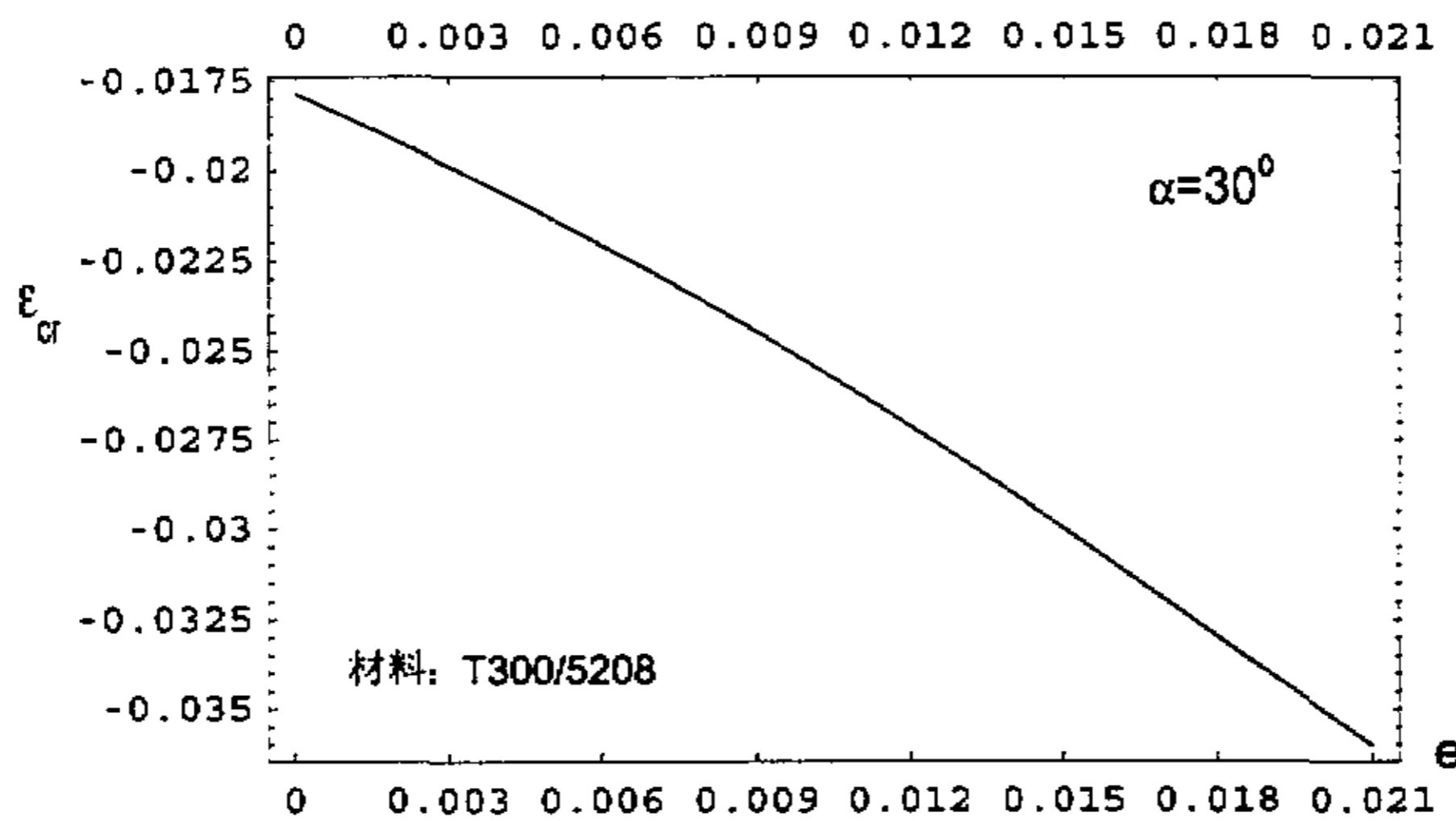
图(4.21) 母层 $[(0)_{10}]_s$, 矩形子层[0], 单层厚0.1mm。考虑子层横向位移和温度效应。 $a = 4\text{mm}$ 、 $b = 7.5\text{mm}$ 、 $R = 45\text{mm}$ 、 $e = 0$

Fig(4.21) cylindrical shell $[(0)_{10}]_s$, rectangular sub-shell [0], monolayer thickness 0.1mm. Consider the transverse displacement of sub-shell and temperature effect. $a = 4\text{mm}$ 、 $b = 7.5\text{mm}$ 、 $R = 45\text{mm}$ 、 $e = 0$



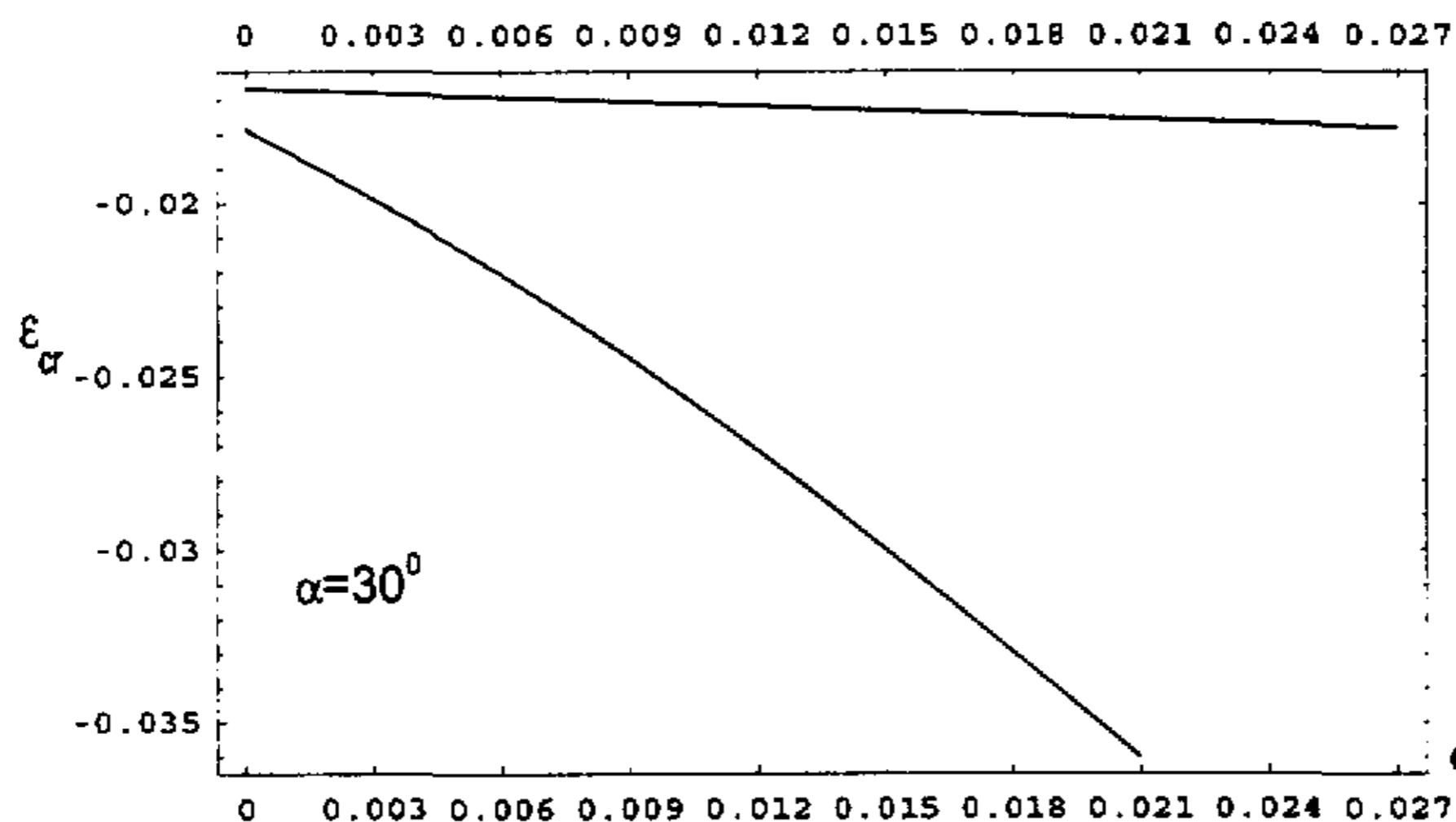
图(4.22) 母层 $[(0)_{10}]_s$, 矩形子层[0], 单层厚0.1mm。考虑子层横向位移和湿度效应。 $a = 4\text{mm}$ 、 $b = 7.5\text{mm}$ 、 $R = 45\text{mm}$ 、 $\Delta T = 0$

Fig(4.22) cylindrical shell $[(0)_{10}]_s$, rectangular sub-shell [0], monolayer thickness 0.1mm. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity effect. $a = 4\text{mm}$ 、 $b = 7.5\text{mm}$ 、 $R = 45\text{mm}$ 、 $\Delta T = 0$



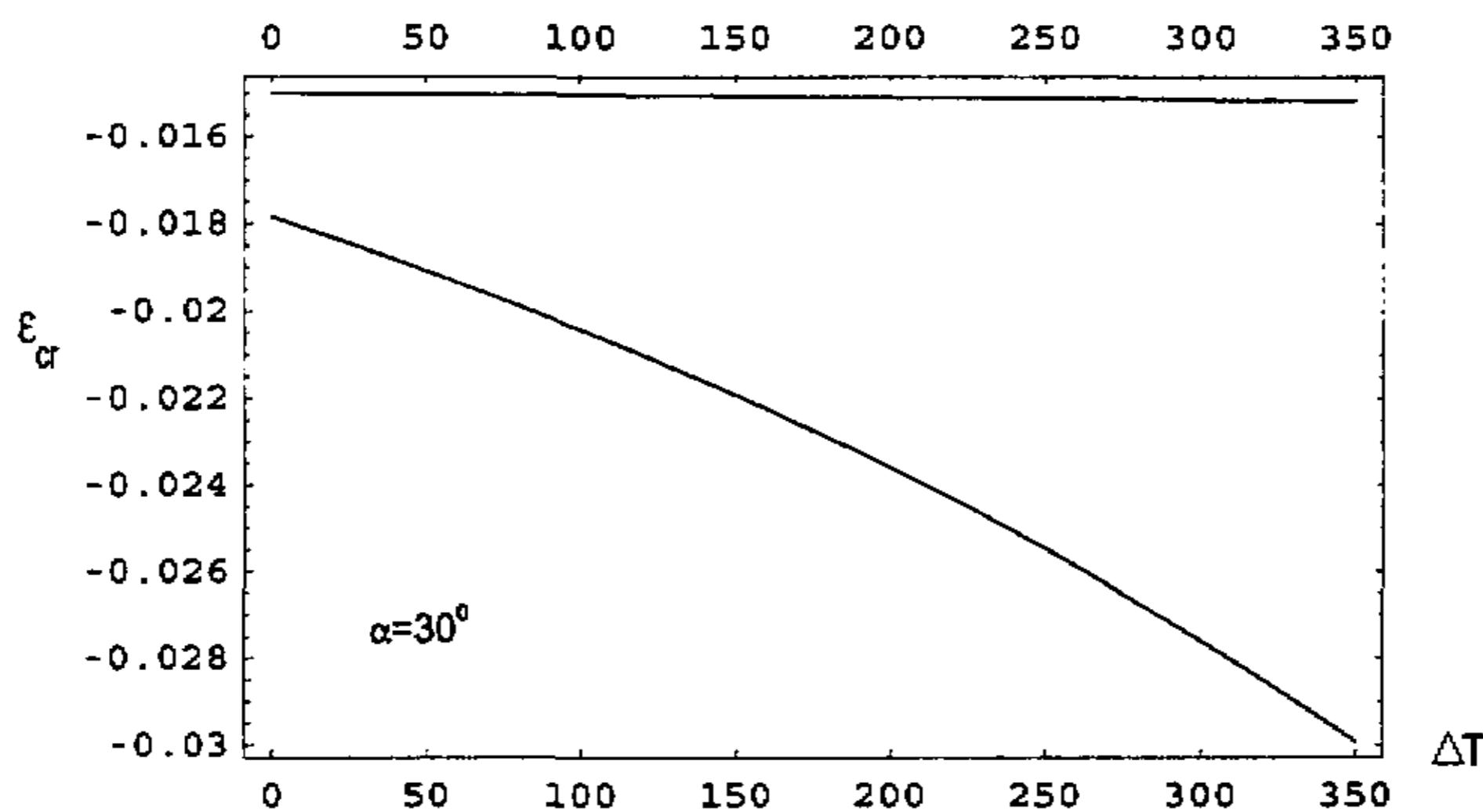
图(4.23) 母层 $[(0)_{10}]_s$ ，椭圆子层 [0]，单层厚 $0.1mm$ 。考虑子层横向位移和湿度效应。 $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 0$

Fig(4.23) cylindrical shell $[(0)_{10}]_s$, elliptical sub-shell [0], monolayer thickness $0.1mm$ 。Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity effect.
 $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 0$



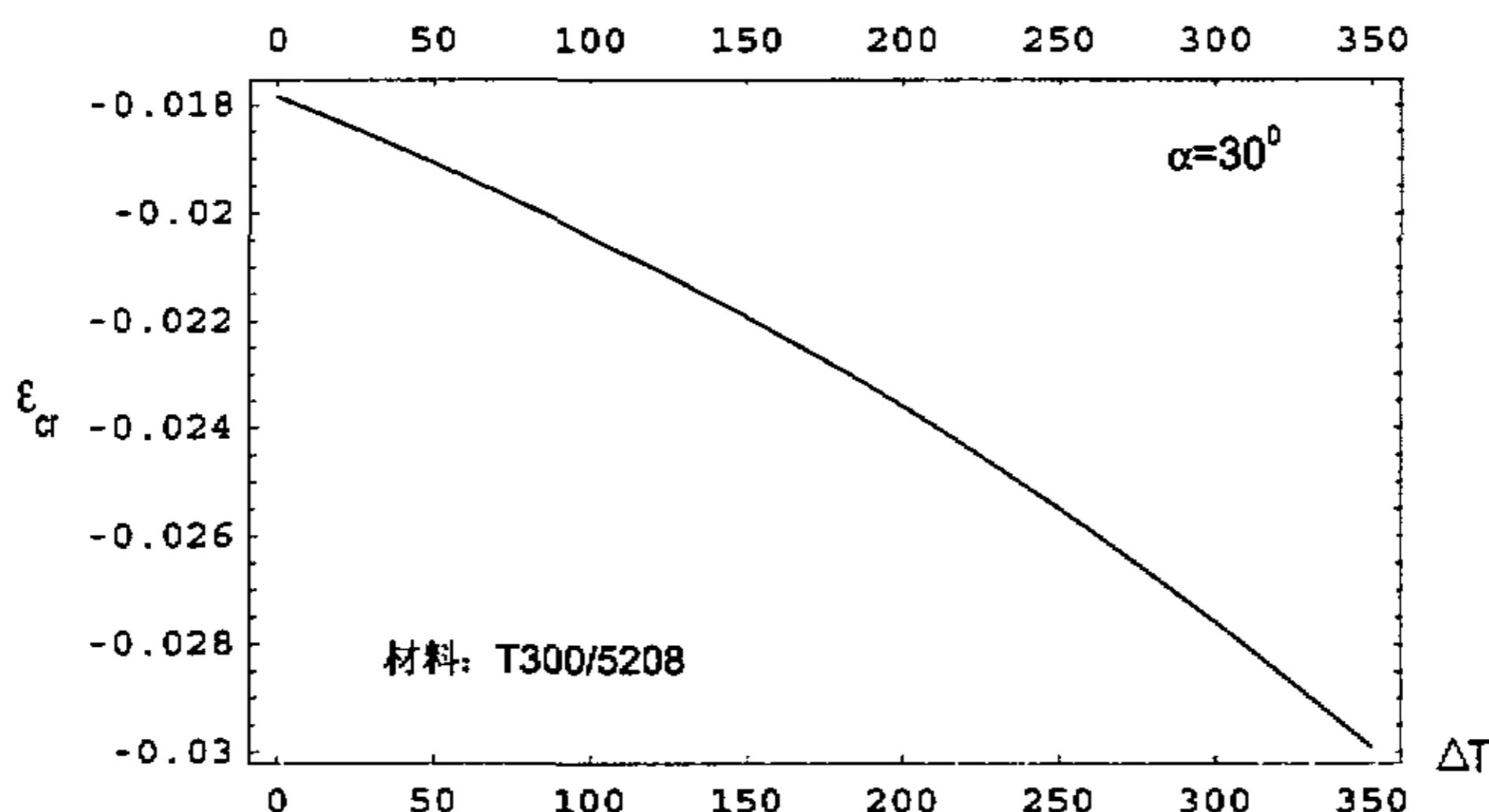
图(4.24) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$ ，椭圆子层 $[0,45,90,-45]$ 与母层 $[(0)_{10}]_s$ ，椭圆子层 [0] 的比较图。 $R = 45mm$ ， $\Delta T = 0$

Fig(4.24) comparison diagram of two kinds of delamination, monolayer thickness $0.1mm$ ， Consider the transverse displacement and humidity effect, $R = 45mm$ ， $\Delta T = 0$



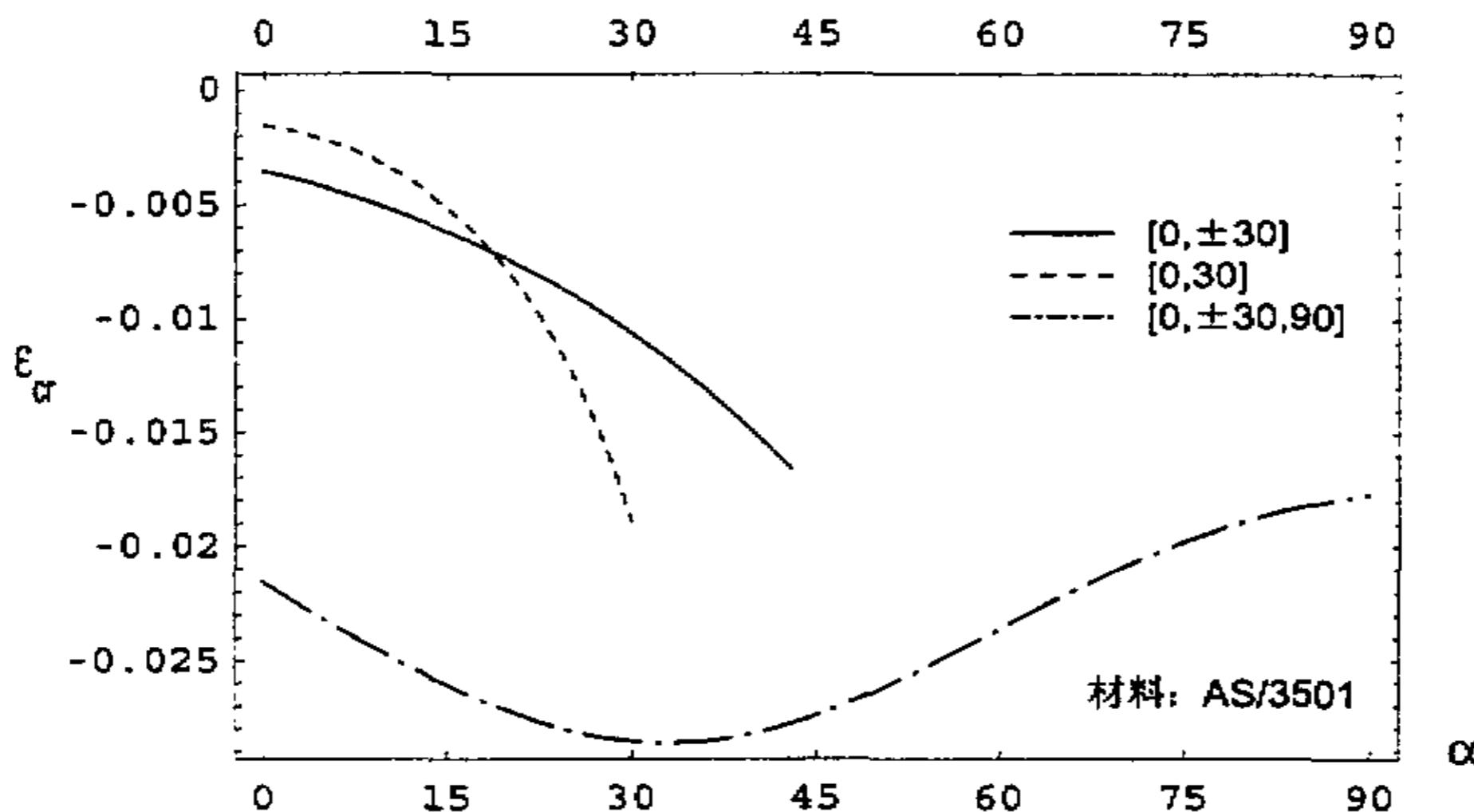
图(4.25) 母层 $[(0,45,90,-45)_s]$, 椭圆子层 $[0,45,90,-45]$ 与母层 $[(0)_{10}]_s$, 椭圆子层 $[0]$ 的比较图. $R = 45mm$, $e = 0$

Fig (4.25) comparison diagram of two kinds of delamination, monolayer thickness 0.1mm. Consider the transverse displacement and temperature effect, $R = 45mm$, $e = 0$



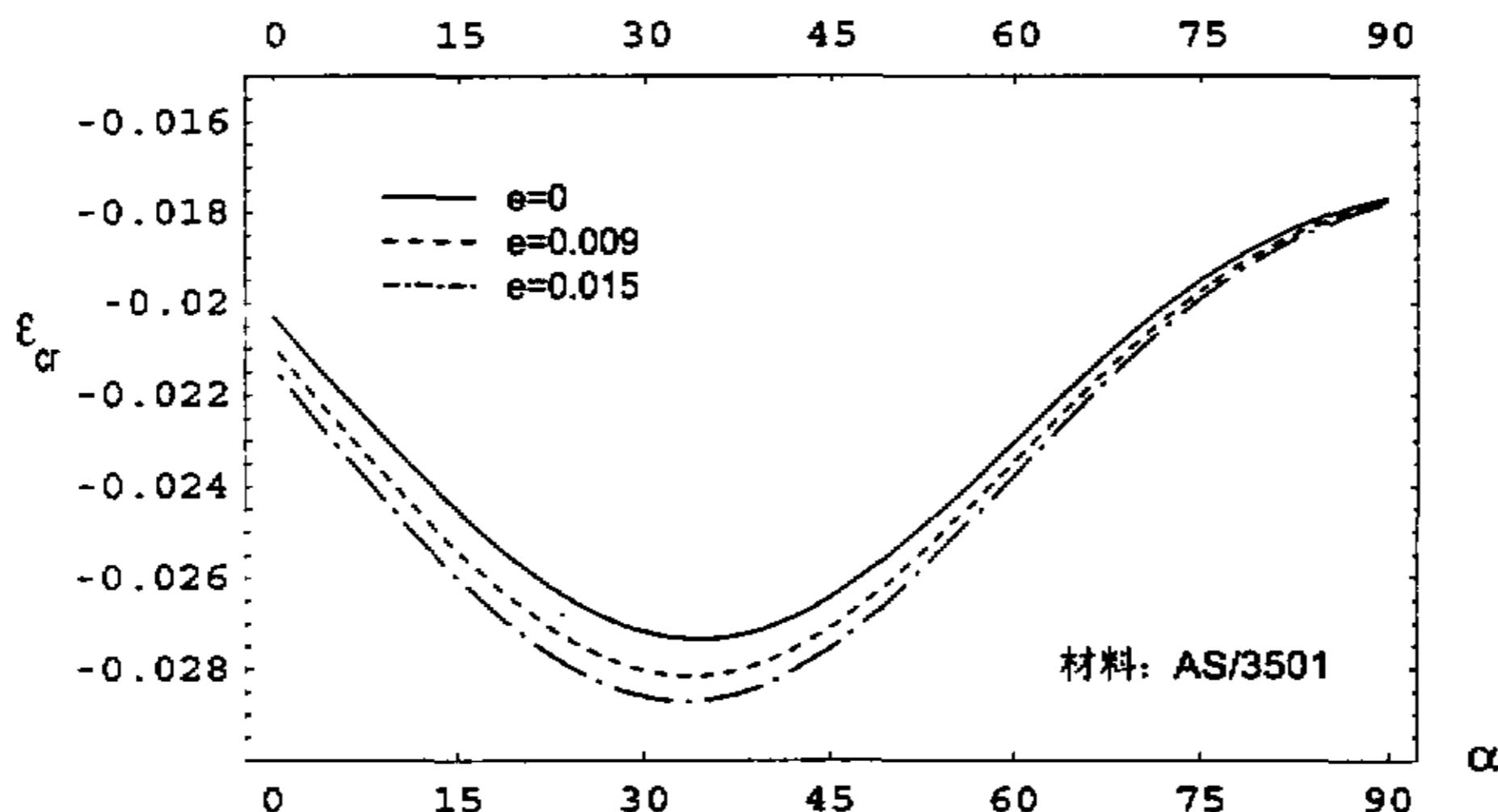
图(4.26) 母层 $[(0)_{10}]_s$, 椭圆子层 $[0]$, 单层厚0.1mm. 考虑子层横向位移和温度效应. $a = 16mm$, $b = 8mm$, $R = 45mm$, $e = 0$

Fig (4.26) cylindrical shell $[(0)_{10}]_s$, elliptical sub-shell $[0]$, monolayer thickness 0.1mm. Consider the transverse displacement of sub-shell and temperature effect. $a = 16mm$, $b = 8mm$, $R = 45mm$, $e = 0$



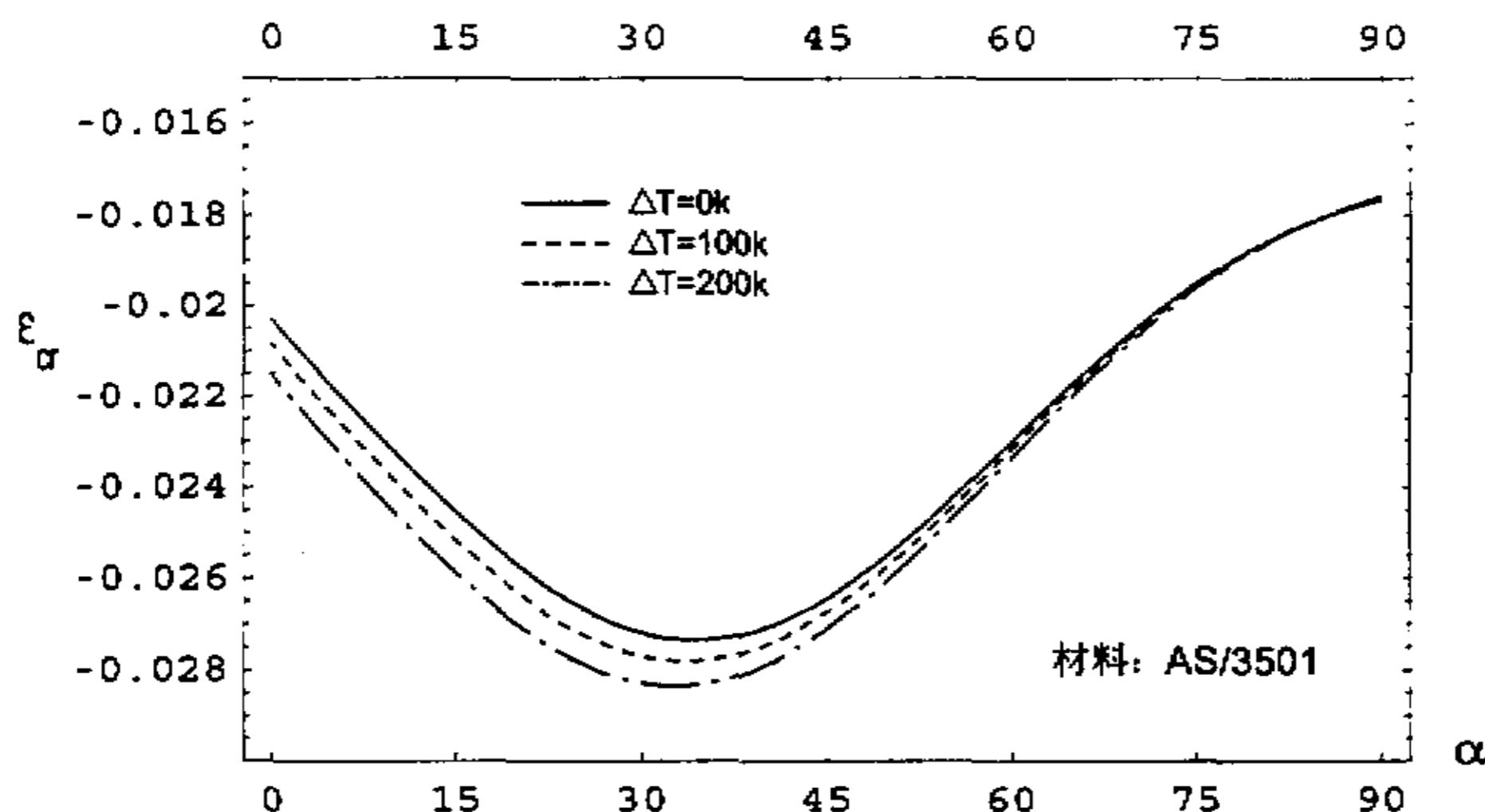
图(4.27) 母层 $[(0, \pm 30, 90)_s]$, 椭圆子层, 单层厚0.1mm。考虑子层横向位移和温湿效应。 $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 100k$ 、 $e = 0.009$

Fig(4.27) cylindrical shell $[(0, \pm 30, 90)_s]$, rectangular sub-shell, monolayer thickness 0.1mm. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 100k$ 、 $e = 0.009$



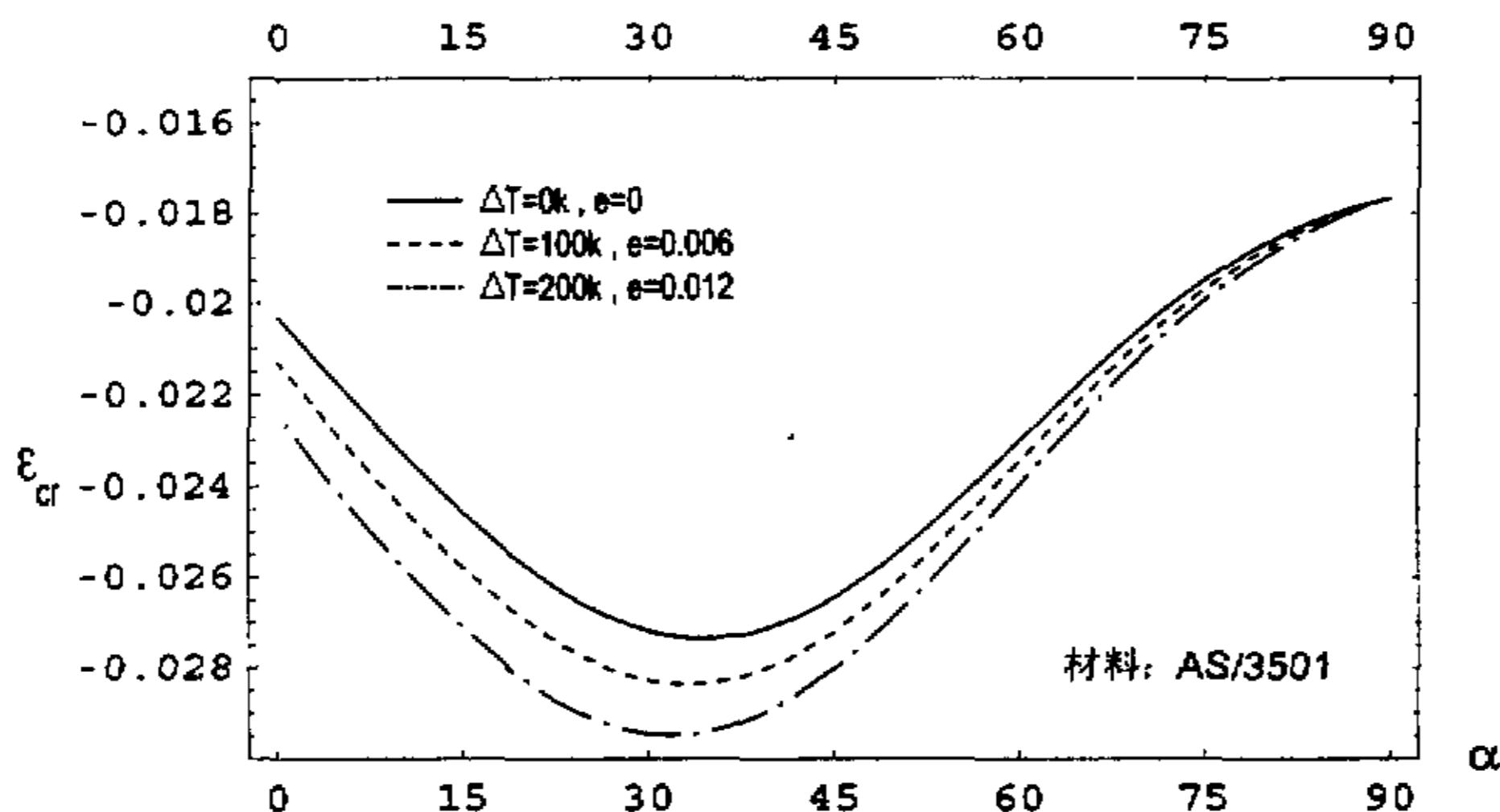
图(4.28) 母层 $[(0, \pm 30, 90)_s]$, 椭圆子层 $[0, \pm 30, 90]$, 单层厚0.1mm。考虑子层横向位移和吸湿效应。 $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 0$

Fig(4.28) cylindrical shell $[(0, \pm 30, 90)_s]$, elliptical sub-shell $[0, \pm 30, 90]$, monolayer thickness 0.1mm. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity effect. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 0$



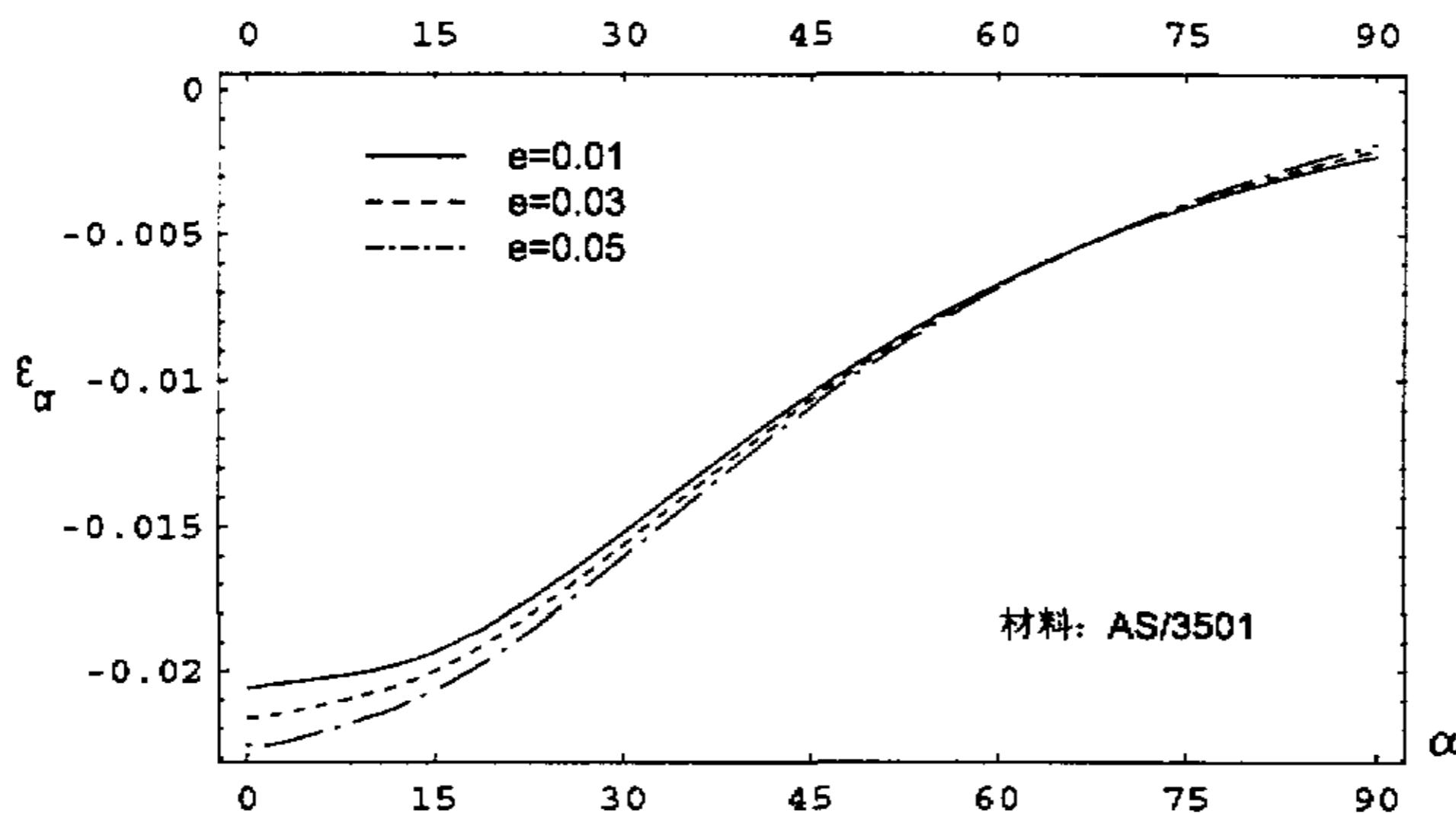
图(4.29) 母层 $[(0,\pm 30,90)_s]$, 椭圆子层 $[0,\pm 30,90]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温度效应. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $e = 0$

Fig(4.29) cylindrical shell $[(0,\pm 30,90)_s]$, elliptical sub-shell $[0,\pm 30,90]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and temperature effect. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $e = 0$



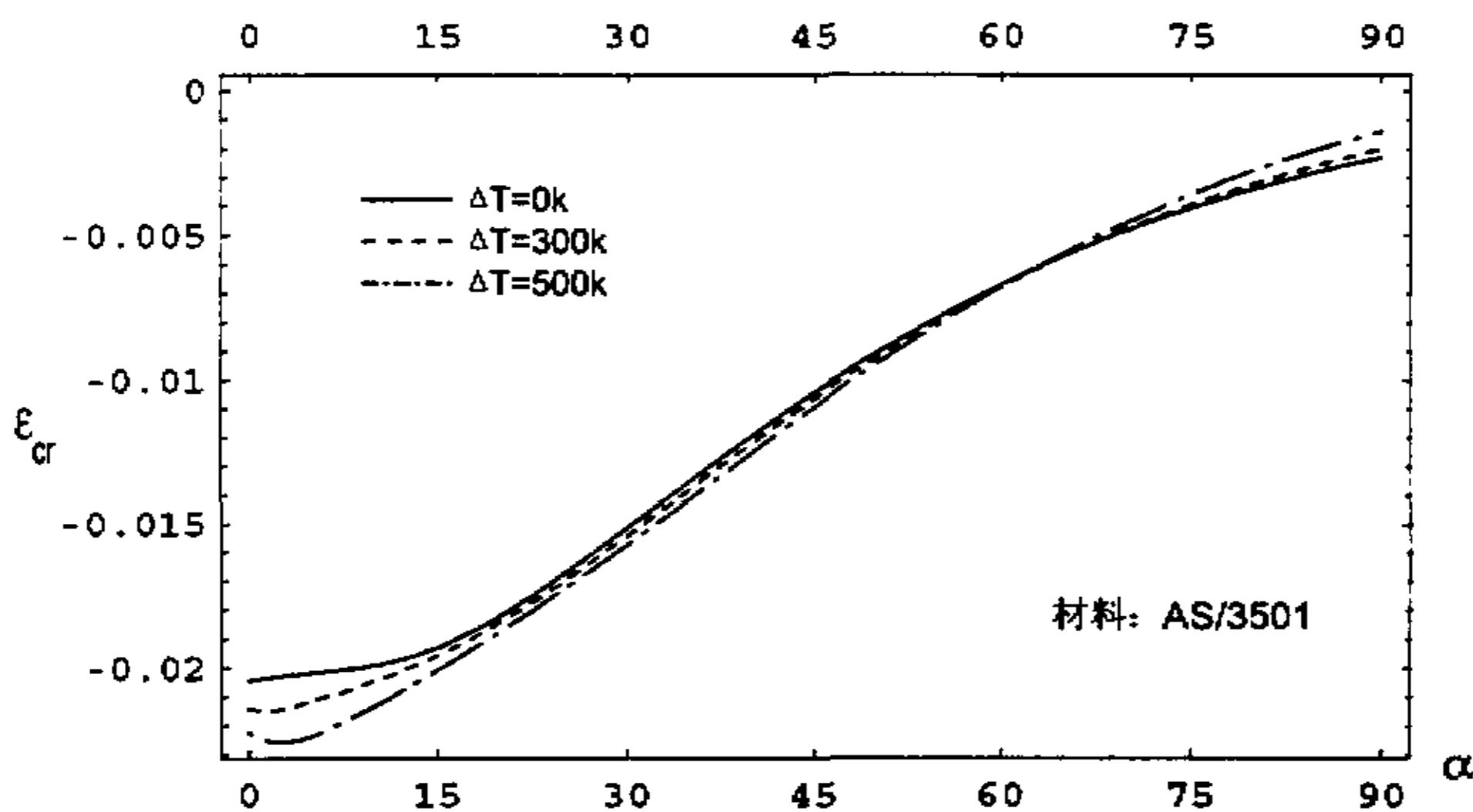
图(4.30) 母层 $[(0,\pm 30,90)_s]$, 椭圆子层 $[0,\pm 30,90]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$

Fig(4.30) cylindrical shell $[(0,\pm 30,90)_s]$, elliptical sub-shell $[0,\pm 30,90]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 16mm$ 、 $b = 8mm$ 、 $R = 45mm$



图(4.31) 母层 $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, 矩形子层 $[\pm 60]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 50k$

Fig(4.31) cylindrical shell $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, rectangular sub-shell $[\pm 60]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $\Delta T = 50k$



图(4.32) 母层 $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, 矩形子层 $[\pm 60]$, 单层厚 $0.1mm$. 考虑子层横向位移和温湿效应. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $e = 0.009$

Fig(4.32) cylindrical shell $[(\pm 60, 0, 90)_s]$, rectangular sub-shell $[\pm 60]$, monolayer thickness $0.1mm$. Consider the transverse displacement of sub-shell and humidity, temperature effect. $a = 5mm$ 、 $b = 4mm$ 、 $R = 45mm$ 、 $e = 0.009$

第五章 计算流程

实例计算是本文的一大重点，本文涉及的实例计算有计算量大、参数多、关系复杂等特点。所以，在着手计算之前必须有个通盘的考虑。本文采用的计算工具为 *Mathematica* 4.0 版，这是一套能进行复杂的数学公式推导、数值计算、矩阵运算以及绘图等操作的强有力的数学工具。

§ 5.1 模块划分及功能

总的计算程序可以分为四个大的模块，分别是：输入模块、计算模块、方程求解模块、绘图模块。

(1) 输入模块比较简单，只要在输入文件中按照指定的顺序输入材料常数、热膨胀系数、湿膨胀系数、各单层铺设角度、各单层坐标等数据。随后输入模块将被计算模块读入并进行数值计算。

(2) 计算模块负责计算下列各项：子层壳拉伸刚度阵 $[\bar{A}]$ 、子层壳耦合刚度阵 $[\bar{B}]$ 、子层壳弯曲刚度阵 $[\bar{D}]$ 、母层壳拉伸刚度阵 $[A]$ （其中 A_{11} 可不求）、子层壳热内力向量 $[\bar{N}^T]$ 、子层壳热力矩向量 $[\bar{M}^T]$ 、母层壳热内力向量 $[N^T]$ （其中 N_x^T 可不求）、 m 、 n 、 c 、 d 、子层壳块的总弹性应变能 U_{sub} 等（见第三章）。

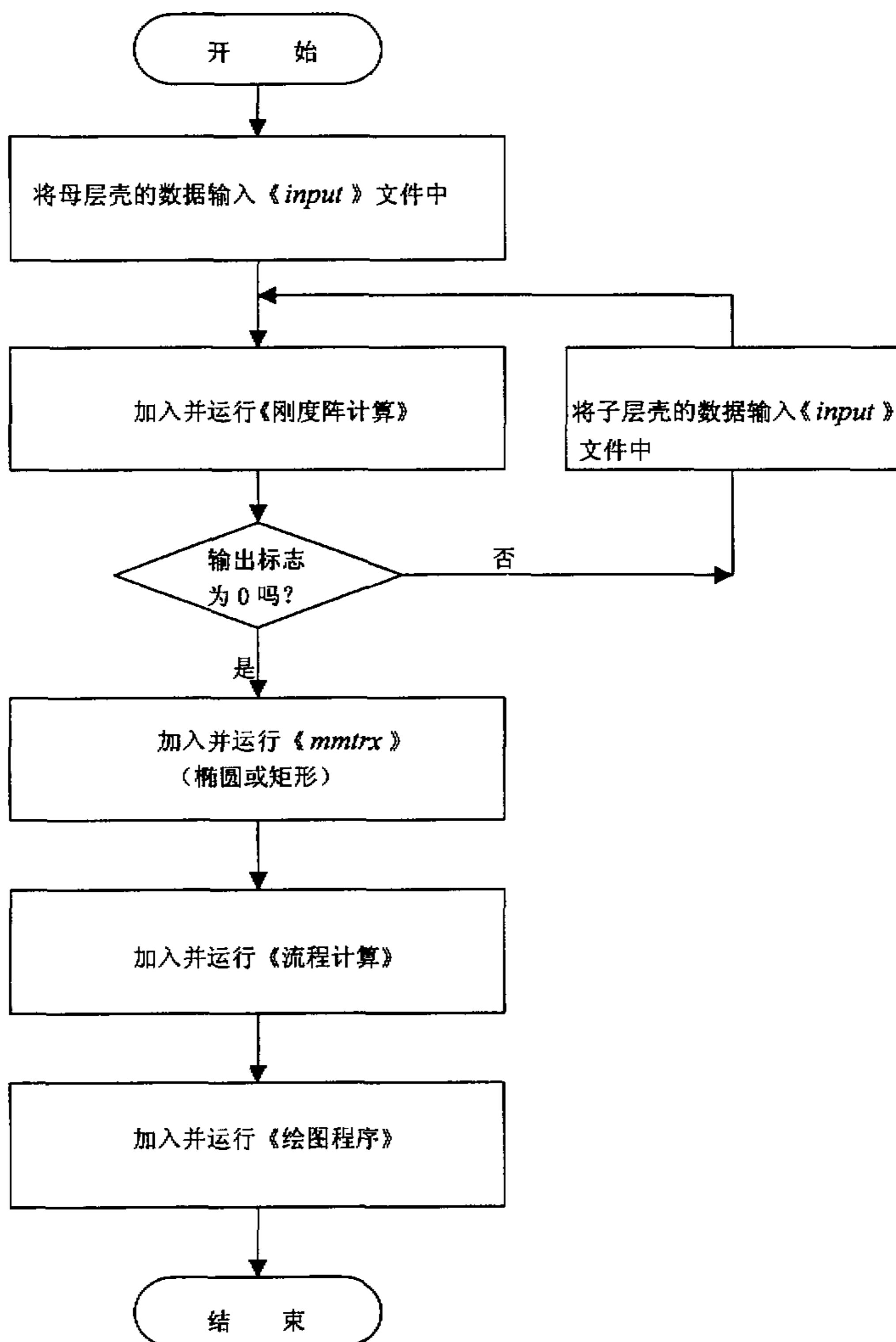
(3) 方程求解模块负责计算下列各项：子层壳的总势能、屈曲特征方程、方程的根。求解方程所得的根即为子层屈曲的临界应变值 ε_{cr} 。在其根中负根的绝对值最小的根即为子层壳的压缩屈曲的临界应变，而正根的最小值为子层壳拉伸屈曲临界应变值。

(4) 绘图模块负责各种图形的绘制工作。包括 $\varepsilon_{cr}-\alpha$ 图、 $\varepsilon_{cr}-t$ 图、 $\varepsilon_{cr}-e$ 图。

计算涉及的程序文件有：《input》、《刚度阵计算》、《mmtrx》、《流程计算》、《画图程序》。其中，《input》对应于输入模块，《刚度阵计算》和《mmtrx》对应计算模块，《流程计算》对应方程求解模块，《画图程序》对应绘图模块。这里说明一下《mmtrx》，实际上，它对应第四章式(4—1)中的方阵 $[\lambda]$ ，求方阵的行列式即可得特征方程式，之所以将它单独列出是因为本文一共涉及了四个《mmtrx》，分别对应：矩形子层考虑横向位移、矩形子层不考虑横向位移、椭圆子层考虑横向位移、椭圆子层不考虑横向位移。各程序文件的清单列于附录中。

§ 5.2 计算流程图

以下是本文的计算流程图。流程图决策框中的输出标志是指用于标明输入文件中是否为母层壳数据的标记。通常用1表示输入文件为母层壳数据，用0表示输入文件为子层壳数据。



图(5.1) 计算流程图
Fig(5.1) flow chart of the calculation

参考文献

- 【1】 Sallam S ,Simitses G J. Delamination Buckling of Cylindrical Shell Under Axial Compression. *J of composite Structures*,1987;7:83
- 【2】 Chai H,Babcock C D. Two-Dimensional Modelling of Compressive Failure in Delaminated Laminates. *J of Composite Materials*,1985;19(1):67
- 【3】 Shivakumar K N,Whitcomb,J D. Buckling of a Sublaminates in a Quasisotropic Composite Laminates. *J of Composite Materials*,1985;19(1):2
- 【4】 Chai H. One Dimensional Modelling of Failure in Laminated Plates by Delamination Buckling. *J of Solids Structures*,1981;17(11):1069
- 【5】 Yin W L. Axisymmetric Buckling and Growth of a Circular Delamination in a Compressed Laminate. *International Journal of Solids and Structures*,1985;21(5)
- 【6】 Whitcomb J D. Flaw Criticality of Circular Disbond Defects in Compressive Laminates. *NASA CR-164830*,1981
- 【7】 Chai M,Babcock C D,Knauss W G. On the Failure of Laminated Plates by Delamination Buckling. *Report No.80-16,California Institute of Technology*,1980;7
- 【8】 Bert C W and Francis P H. *Composite Material Mechanics:Structural Mechanics*, *J of AIAA*,1974;12(9)
- 【9】 Ramkumar R L. Fatigue Degradation in Compressively Loaded Composite Laminates *NASA CR 165681,NAS1-15956*,1981
- 【10】 Gillespie J W,Pipes R B. Compressive Strength of Composite Laminates with Interlaminar Defects. *Composite Structures*,1984;2(1)
- 【11】 李思简, 陈思秋. 层板具有椭圆形、矩形、三角形分层屈曲破坏的实验研究. *复合材料报*,1990;7(2)
- 【12】 呼延晓智, 刘方龙. 准各向同性基体上椭圆形子层的屈曲. *宇航学报*,1990;10
- 【13】 Davidson B D. Delamination buckling:theory and experiment. *J of Composite Materials*,1991;25(10):1351
- 【14】 Yeh Mengkao,Tan Chungming. Buckling of multiply delaminated beams. *J of Composite Materials*,1994;28(1):36
- 【15】 Chen Lienwen,Chen Leiyi. Thermal buckling behavior of laminated composite plate with temperature dependent properties. *Composite Structure*,1989;13(4):275
- 【16】 李思简, 万晖. 层合圆柱壳体表面矩形分层屈曲分析. *上海交通大学学报*,1990;24
- 【17】 温玄玲, 陈浩然等. 复杂加载下对称铺设复合材料层合板内椭圆形分层损伤的脱层屈曲分析. *计算结构力学及其运用*,1995;12(2):143
- 【18】 陈思秋, 李思简. 对称层板二维的分层屈曲研究. *上海交通大学学报*,1989;23(6):30
- 【19】 王震鸣. *复合材料力学和复合材料结构力学*. 北京:机械工业出版社
- 【20】 Dym C L,Shames I H. *Solid Mechanics—A Variational Approach*,Mc Graw Hill, New York,1973
- 【21】 Luo J,Sun C T. Global-Local Methods for Thermoelastic Stress Analysis of Thick Fiber-Wound Cylinders. *J of Composite Materials*,1991;25

```
(1)
Qgcount[e1_, e2_, v12_, v21_, g12_, sita_] :=
Module[{Q11, Q12, Q22, Q66},
Q11 = e1 / (1 - v12 * v21);
Q12 = v12 * e1 / (1 - v12 * v21);
Q22 = e2 / (1 - v12 * v21);
Q66 = g12;
Qg11 = Q11 * (Cos[sita])^4 +
2 * (Q12 + 2 * Q66) * ((Sin[sita])^2) * ((Cos[sita])^2) + Q22 * ((Sin[sita])^4);
Qg12 = (Q11 + Q12 - 4 * Q66) * ((Sin[sita])^2) * ((Cos[sita])^2) +
Q12 * ((Sin[sita])^4 + (Cos[sita])^4);
Qg22 = Q11 * (Sin[sita])^4 + 2 * (Q12 + 2 * Q66) * ((Sin[sita])^2) * ((Cos[sita])^2) +
Q22 * (Cos[sita])^4;
Qg16 = (Q11 - Q12 - 2 * Q66) * Sin[sita] * ((Cos[sita])^3) +
(Q12 - Q22 + 2 * Q66) * ((Sin[sita])^3) * Cos[sita];
Qg26 = (Q11 - Q12 - 2 * Q66) * ((Sin[sita])^3) * Cos[sita] +
(Q12 - Q22 + 2 * Q66) * Sin[sita] * ((Cos[sita])^3);
Qg66 = (Q11 + Q22 - 2 * Q12 - 2 * Q66) * ((Sin[sita])^2) * ((Cos[sita])^2) +
Q66 * ((Sin[sita])^4 + (Cos[sita])^4)];

alfa[alfal_, alfa2_, sita_] :=
Module[{},
alfax = alfal * Cos[sita] * Cos[sita] + alfa2 * Sin[sita] * Sin[sita];
alfay = alfal * Sin[sita] * Sin[sita] + alfa2 * Cos[sita] * Cos[sita];
alfaxy = (alfal - alfa2) * 2 * Sin[sita] * Cos[sita]];

beta[betal_, beta2_, sita_] :=
Module[{},
betax = betal * Cos[sita] * Cos[sita] + beta2 * Sin[sita] * Sin[sita];
betay = betal * Sin[sita] * Sin[sita] + beta2 * Cos[sita] * Cos[sita];
betaxy = (betal - beta2) * 2 * Sin[sita] * Cos[sita]];
A11 = 0; A12 = 0; A16 = 0; A22 = 0; A26 = 0; A66 = 0;
B11 = 0; B12 = 0; B16 = 0; B22 = 0; B26 = 0; B66 = 0;
D11 = 0; D12 = 0; D16 = 0; D22 = 0; D26 = 0; D66 = 0;
NxT = 0; NyT = 0; NxyT = 0;
MxT = 0; MyT = 0; MxyT = 0;
NxH = 0; NyH = 0; NxyH = 0;
MxH = 0; MyH = 0; MxyH = 0;
main = Module[{i, nn,
sr,
e10, e20, g120,
e1, e2, v12, v21, g12,
alfa10, alfa20,
alfal, alfa2,
betal, beta2,
sita,
zk, zkgl},
filedata = ReadList["input"];
sr = filedata[[1]];
nn = filedata[[2]];
e10 = filedata[[3]];
e20 = filedata[[4]];
v12 = filedata[[5]];
v21 = filedata[[6]]];
```

```

g120 = filedata[[7]];
alfa10 = filedata[[8]];
alfa20 = filedata[[9]];
beta1 = filedata[[10]];
beta2 = filedata[[11]];
e1 = e10 * (1 - 0.5 * dataT * 10^-3);
e2 = e20 * (1 - 0.2 * dataT * 10^-3);
g12 = g120 * (1 - 0.2 * dataT * 10^-3);
alfa1 = alfa10 * (1 + 0.5 * dataT * 10^-3);
alfa2 = alfa20 * (1 + 0.5 * dataT * 10^-3);

For[i = 1, i < nn, i++,
  sita = filedata[[12 + (i - 1) * 3]];
  zk = filedata[[13 + (i - 1) * 3]];
  zkg1 = filedata[[14 + (i - 1) * 3]];
  Qgcount[e1, e2, v12, v21, g12, sita];
  A11 = A11 + Qg11 * (zk - zkg1);
  A12 = A12 + Qg12 * (zk - zkg1);
  A16 = A16 + Qg16 * (zk - zkg1);
  A22 = A22 + Qg22 * (zk - zkg1);
  A26 = A26 + Qg26 * (zk - zkg1);
  A66 = A66 + Qg66 * (zk - zkg1);
  B11 = B11 + (1 / 2) * Qg11 * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  B12 = B12 + (1 / 2) * Qg12 * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  B16 = B16 + (1 / 2) * Qg16 * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  B22 = B22 + (1 / 2) * Qg22 * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  B26 = B26 + (1 / 2) * Qg26 * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  B66 = B66 + (1 / 2) * Qg66 * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  D11 = D11 + (1 / 3) * Qg11 * (zk * zk * zk - zkg1 * zkg1 * zkg1);
  D12 = D12 + (1 / 3) * Qg12 * (zk * zk * zk - zkg1 * zkg1 * zkg1);
  D16 = D16 + (1 / 3) * Qg16 * (zk * zk * zk - zkg1 * zkg1 * zkg1);
  D22 = D22 + (1 / 3) * Qg22 * (zk * zk * zk - zkg1 * zkg1 * zkg1);
  D26 = D26 + (1 / 3) * Qg26 * (zk * zk * zk - zkg1 * zkg1 * zkg1);
  D66 = D66 + (1 / 3) * Qg66 * (zk * zk * zk - zkg1 * zkg1 * zkg1);
  alfa[alfa1, alfa2, sita];
  beta[beta1, beta2, sita];
  NxT = NxT + (Qg11 * alfax + Qg12 * alfay + Qg16 * alfaxy) * dataT * (zk - zkg1);
  NyT = NyT + (Qg12 * alfax + Qg22 * alfay + Qg26 * alfaxy) * dataT * (zk - zkg1);
  NxyT = NxyT + (Qg16 * alfax + Qg26 * alfay + Qg66 * alfaxy) * dataT * (zk - zkg1);
  MxT = MxT +
    (1 / 2) * (Qg11 * alfax + Qg12 * alfay + Qg16 * alfaxy) * dataT * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  MyT = MyT + (1 / 2) * (Qg12 * alfax + Qg22 * alfay + Qg26 * alfaxy) *
    dataT * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  MxyT = MxyT + (1 / 2) * (Qg16 * alfax + Qg26 * alfay + Qg66 * alfaxy) *
    dataT * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  NxH = NxH + (Qg11 * betax + Qg12 * betay + Qg16 * betaxy) * e * (zk - zkg1);
  NyH = NyH + (Qg12 * betax + Qg22 * betay + Qg26 * betaxy) * e * (zk - zkg1);
  NxyH = NxyH + (Qg16 * betax + Qg26 * betay + Qg66 * betaxy) * e * (zk - zkg1);
  MxH =
    MxH + (1 / 2) * (Qg11 * betax + Qg12 * betay + Qg16 * betaxy) * e * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  MyH = MyH + (1 / 2) * (Qg12 * betax + Qg22 * betay + Qg26 * betaxy) *
    e * (zk * zk - zkg1 * zkg1);
  MxyH = MxyH + (1 / 2) * (Qg16 * betax + Qg26 * betay + Qg66 * betaxy) *
    e * (zk * zk - zkg1 * zkg1)];

```

```

A11 = A11 * 10^6;
A12 = A12 * 10^6;
A16 = A16 * 10^6;
A22 = A22 * 10^6;
A26 = A26 * 10^6;
A66 = A66 * 10^6;
B11 = B11 * 10^3;
B12 = B12 * 10^3;
B16 = B16 * 10^3;
B22 = B22 * 10^3;
B26 = B26 * 10^3;
B66 = B66 * 10^3;
MxT = MxT * 10^-3;
MyT = MyT * 10^-3;
MxyT = MxyT * 10^-3;
NxH = NxH * 10^6;
NyH = NyH * 10^6;
NxyH = NxyH * 10^6;
MxH = MxH * 10^3;
MyH = MyH * 10^3;
MxyH = MxyH * 10^3;

If[sr > 0,
Print["this is mc. should be counted first!"];
m = (A26*A16 - A66*A12) / (A22*A66 - A26*A26);
n = (A26*A12 - A22*A16) / (A22*A66 - A26*A26);
c = (A66*(NyT + NyH) - A26*(NxyT + NxyH)) / (A22*A66 - A26*A26);
d = (A22*(NxyT + NxyH) - A26*(NyT + NyH)) / (A22*A66 - A26*A26);
Print["this is xc. shoule be counted later!"]]

```

(2)

```

wwww = Det[mmtrx];
kkkkk = wwww /. {a0 -> 0, a1 -> 0, a2 -> 0, a3 -> 0, a4 -> 0, a5 -> 0};
ttttt = kkkkk /. {a -> 10*10^-3, b -> 8*10^-3, r -> 45*10^-3, detat -> 20, e -> 0.009};
11111 = ttttt /. {0. -> 0};
bbbbbb = Expand[11111];
xs0 = bbbbb / . {e -> 0};
bbbbbb = bbbbb - xs0;
bbbbbb = bbbbb / . {0. -> 0};
bbbbbb = Expand[bbbbbb / e];
xs1 = bbbbb / . {e -> 0};
bbbbbb = bbbbb - xs1;
bbbbbb = bbbbb / . {0. -> 0};
bbbbbb = Expand[bbbbbb / e];
xs2 = bbbbb / . {e -> 0};
bbbbbb = bbbbb - xs2;
bbbbbb = bbbbb / . {0. -> 0};
bbbbbb = Expand[bbbbbb / e];
xs3 = bbbbb / . {e -> 0};
bbbbbb = bbbbb - xs3;
bbbbbb = bbbbb / . {0. -> 0};
bbbbbb = Expand[bbbbbb / e];

```

```
xs4 = bbbb;
eeeee = Solve[fcx4 * ε^4 + fcx3 * ε^3 + fcx2 * ε^2 + fcx1 * ε + fcx0 == 0, ε];
rt1 = ε /. eeeee[[1]];
rt2 = ε /. eeeee[[2]];
rt3 = ε /. eeeee[[3]];
rt4 = ε /. eeeee[[4]];
rt1 = rt1 /. {fcx0 → xs0, fcx1 → xs1, fcx2 → xs2, fcx3 → xs3, fcx4 → xs4};
rt2 = rt2 /. {fcx0 → xs0, fcx1 → xs1, fcx2 → xs2, fcx3 → xs3, fcx4 → xs4};
rt3 = rt3 /. {fcx0 → xs0, fcx1 → xs1, fcx2 → xs2, fcx3 → xs3, fcx4 → xs4};
rt4 = rt4 /. {fcx0 → xs0, fcx1 → xs1, fcx2 → xs2, fcx3 → xs3, fcx4 → xs4};
Print["rt1~4 are roots of the equation"]
```

致 谢

本文是在王熙教授的悉心指导下才得以顺利完成的。在论文的写作过程中，王熙教授给我指明了研究的方向，帮我解决了论文进程中的许多具体的困难。导师严谨的治学态度、踏实的工作作风、渊博的学识和平易近人的品格深深地影响着我，不仅使我学到了许多专业知识和科学的研究方法，而且使我懂得了许多做人的道理，这些都将是“我”一生宝贵的财富。短短两年半的研究生生活马上就要结束了，导师的教诲将伴随“我”走向社会。在此，“我”向王教授致以最衷心的感谢。

在做论文期间，同实验室的董美春同学提出了许多非常有益的建议，感谢他给予“我”学习和生活中的许多帮助。还要感谢李庆华、韩震同学，他们在学习和生活中同样给予了“我”许多帮助。

最后，真挚地感谢所有给予“我”鼓励和帮助的老师、同学和朋友们。