

# 华中科技大学硕士学位论文

## 摘要

随机动力学系统以各种各样的形式出现在自然科学的许多领域。近年来，对随机动力学系统的研究成为理论界和实验界的焦点。本论文用解析的方法研究了由关联噪声驱动的随机动力学系统中随机共振现象、平均第一通过时间的对称性破缺及其在激光系统中的应用。论文包括三个方面的工作。

第一，研究了由关联噪声驱动的双稳系统和激光系统中的随机共振现象，讨论了各种参数对随机共振形式的影响。（根据建立模型的不同，我们对三种随机系统中出现的随机共振现象分别进行了研究。（1）首次研究了锯齿型双稳势阱模型中随机共振现象。运用绝热近似理论，导出了输出信号功率谱和信噪比的解析表达式。研究发现，信噪比随着加性噪声强度变化时，不仅会出现共振，还会出现抑制、单调减少和单调增加四种情况；信噪比随着势垒高度的变化曲线会出现抑制、双极值和单调下降三种情况。（2）首次研究了无限深双稳势阱中的随机共振现象。运用绝热近似理论，得到了信噪比的解析表达式。在信噪比随着噪声关联强度的曲线中观察到了多重随机共振现象，并且还发现信噪比随着加性噪声强度和乘性噪声的变化，既出现了共振也出现了抑制。（3）研究了出现在具有周期调制噪声的单模激光系统中的随机共振现象。首次将信号和噪声以相乘的形式引入单模激光系统中，考虑关联的泵噪声和量子噪声的情况，运用线性化近似方法，导出了激光处于稳态时的光强关联函数、功率谱和信噪比。第一次在激光系统中发现信噪比随着关联时间的变化既出现单峰的随机共振又出现多重随机共振。而且，当适当改变参数时，还会出现多重随机共振和单峰形式的随机共振之间的转变。）

第二，首次研究了噪声间关联对对称双稳系统的平均第一通过时间的影响。运用解析方法导出了由关联噪声驱动的对称双稳系统中的相反方向平均首通时间的关系，证明它们不再具有空间对称性（空间对称破缺）。研究发现，（1）由于噪声间关联的存在，导致对称双稳势的平均第一通过时间左右不对称，即  $T^+ \neq T^-$ 。而且，它们随着噪声强度的变化规律也完全不同。（2）由于关联效应使平均首通时间随噪声强度的变化，出现共振、抑制，乃至于出现“相变”。作为例子，分别导出了四次方模型和锯齿模型的平均第一通过时间。由平均第一通过时间的解析式，进一步证明了在同样参数区  $T(x_- \rightarrow x_+; \lambda) \neq T(x_+ \rightarrow x_-; \lambda)$ ，不仅如此，还发现  $T^+$ （即

# 华中科技大学硕士学位论文

$T(x_- \rightarrow x_+; \lambda)$  和  $T^-$  (即  $T(x_+ \rightarrow x_-; \lambda)$ ) 随着乘性噪声强度  $Q$  和加性噪声强度  $D$  的变化呈现出不同的规律。在四次方模型中, 当  $T^+ \sim Q$  曲线出现一个极大值时,  $T^+$  为单调减小; 当  $T^+ \sim D$  曲线出现单调增加  $\rightarrow$  三极值  $\rightarrow$  单极值的相变, 而  $T^-$  只是单调减小; 减小参数  $Q$ , 当  $T^+ \sim D$  曲线表现为单调减小  $\rightarrow$  两极值  $\rightarrow$  单调增加, 即另一形式的相变, 而  $T^- \sim D$  曲线仅单调增加。对双稳锯齿模型也有类似表现。

第三, 研究了在相关色噪声作用下, 单模激光的定态性质。运用由我们研究组提出的近似方法, 导出了具有白关联的不同自相关时间的加性色噪声和乘性色噪声驱动的单模激光三次方模型的场幅定态几率分布及其均值、协方差, 分析了在阈值上时, 激光光强均值和协方差受噪声间的关联强度  $\lambda$  和噪声的“颜色”的影响。

**关键词:** 随机共振; 平均第一通过时间; 双稳系统; 单模激光; 关联噪声;  
绝热近似; 线性化近似

## ABSTRACT

There are various stochastic dynamics systems in many scientific fields. Recently, it has become a hot focus to investigate the stochastic dynamics systems by means of theory and experiment. In this paper, using the analytic methods, the phenomenon of stochastic resonance and symmetry-breaking in the mean first passage time, which occur in the stochastic dynamics systems driven by correlated noises, and its applications in the laser systems, are studied in detail. Three aspects are included in this paper.

First, the phenomenon of stochastic resonance occurring in a bistable system and laser system, which are driven by correlated noise, are studied. Further, the effects on the form of stochastic resonance by parameters are discussed. By setuping various models, we investigate the phenomenon of stochastic resonance in three stochastic systems. (1) By using a bistable sawtooth potential model, the phenomenon of stochastic resonance is firstly studied. Using the adiabatic elimination theory, we derive the analytic expression of output signal power spectrum and signal-to-noise ratio, and detect that: There are not only resonance but also suppression and monotony in the dependence of signal-to-noise ratio upon the additive noise intensity; There are three case, suppression, two-extreme, and decreasing monotonously, in the dependence of signal-to-noise ratio upon the barrier height. (2) By using a bistable box potential model, the phenomenon of stochastic resonance is studied firstly. Using the adiabatic elimination theory, we derive the analytic expression of signal-to-noise ratio. The phenomenon of stochastic resonance is observed in the dependence of signal-to-noise ratio upon the correlation intensity, and both resonance and suppression appear in the dependence of signal-to-noise ratio upon the additive noise intensity and the multiplicative noise intensity. (3) The phenomenon of stochastic resonance in the single-mode laser system driven by periodically modulated noise is studied. Multiplicatively introducing the noise and signal into a single-mode laser system firstly, taking the correlated pump and quantum noise into account, using the linear approximation method, we derive the analytic expression of laser intensity correlation function, power spectrum, and signal-to-noise ratio, and find firstly that, the two forms of

stochastic resonance (the single-peak form stochastic resonance and stochastic multiresonance) in the curve of the dependence of signal-to-noise ratio upon the noise correlation time. Furthermore, when the correlation intensity between noises and the intensities of both noises are changed, the two forms of stochastic resonance alternates.

Second, effect on the mean first passage time in symmetrical bistable systems by cross-correlation between noises is studied firstly. By studying symmetrical bisable systems driven by correlated noises, we derive the relation between the mean first passage time in two opposite directions, and prove that, the mean first passage time in two opposite directions is not symmetrical any more when noises are correlated. Two conclusion are drawn: (1) The existence of cross-correlation leads to symmetry-breaking in the mean first passage time. Furthermore, the dependence of them upon noise intensity are entirely different. (2) It is the effect of cross-correlation who induces the resonance and suppression, even the occurrence of the phase transition. When  $\lambda = 0$  (without cross-correlation), the dependence of the mean first passage times in two opposite directions upon noise intensity is always monotonous. As examples, the mean first passage time in the quartic bistable model and the sawtooth bistable model are calculated, respectively. From the analytic results of the mean first passage time, we testify further the relation  $T(\text{from } x_- \text{ to } x_+, \lambda) \neq T(\text{from } x_+ \text{ to } x_-, \lambda)$  in the same area of the parameter plan. Moreover, it is found that the dependences of  $T^+$  (i.e.,  $T(\text{from } x_- \text{ to } x_+, \lambda)$ ) and  $T^-$  (i.e.,  $T(\text{from } x_+ \text{ to } x_-, \lambda)$ ) upon the multiplicative noise intensity  $Q$  and the additive noise intensity  $D$  exhibit entirely different properties. In the quartic bistable system, when the  $T^+$  vs.  $Q$  curve exhibits a maximum, while the  $T^-$  vs.  $Q$  curve is monotonous; when the  $T^+$  vs.  $D$  curve experiences the phase transition from increasing monotonously to possessing three extrema to possessing single extreme, while the  $T^-$  vs.  $D$  curve just increases monotonously. Decreasing  $Q$ , when the  $T^+$  vs.  $D$  curve experiences another phase transition, from decreasing monotonously to possessing two extrema to increasing monotonously, while the  $T^-$  vs.  $D$  curve only increases monotonously. Similar behaviours also exist in the sawtooth bistable model.

# 华中科技大学硕士学位论文

---

Final, the stationary property of a single-mode laser system driven by correlated colored noises is studied. Using an approximation method derived by us for the colored noise, we derive the stationary probability distribution, the mean value and the normalized variance of the laser intensity of a single-mode laser cubic model driven by correlated multiplicative and additive colored noises. Moreover, the influence of the mean value and the normalized variance of the laser intensity by correlation intensity between noises and the colorenness of noise are studied.

**Keywords:** Stochastic Resonance; Mean First Passage Time; Bistable System; Single-Mode Laser; Correlated Noise; Adiabatic Elimination Theory; Linear Approximation Method

## 1 综述

### 1.1 非平衡统计物理概述

非平衡统计物理是研究系统在远离平衡时与外界环境及内部耗散共同作用下的宏观突变行为与现象的一门物理学学科<sup>[1,2]</sup>。近四十年来，非平衡统计物理取得了巨大的进展，对物理学和对整个自然科学乃至社会科学产生了深远的影响，大大改变了人们思考问题的角度，改变了人们对自然与社会以及整个世界的认知方式。

对于近平衡态的研究，以涨落耗散定理、昂萨格倒易关系和最小熵产生定理为主要内容的线性热力学和近平衡态统计物理已经发展成熟。对于远离平衡态的研究，普里高津(Ilya Prigogine)学派的耗散结构理论<sup>[3-5]</sup>和哈肯(Herman Haken)学派的协同学<sup>[6-8]</sup>是最有影响的两种理论学派。耗散结构理论和协同学都是研究非平衡开放系统中的自组织和合作行为，但两者处理问题的思路是完全不同。

耗散结构理论从“非平衡是有序之源”的观点出发，通过热力学分析、动力学分析(突变论处理方法)和随机方法的综合考察，对于复杂系统自组织问题作出了一系列开创性的工作，但也留下了一系列的有待进一步解决的问题<sup>[3-5]</sup>。协同学正是在这种情况下诞生。哈肯学派认为熵这一物理量对非平衡的描述是不很恰当的。他们从激光理论抽象出适用于其它系统的内容，建立了协同学。协同学研究系统中子系统之间是怎样相互合作、协调作用以产生宏观的空间结构、时间结构、功能结构。他们对于每个子系统都合理地写出运动方程，其中包含了决定性力和随机力之间的协同作用，即广义的朗之万方程。然后，对这些朗之万方程进行动力学和统计学的考察。由于系统包含的子系统很多，哈肯提出了序参量和伺服原理：对于一个高维(甚至是无穷维)的非线性系统，在不稳定点(分叉点)附近，存在着不稳定模和稳定模，后者完全由前者支配。通过绝热消去法，原来的高维系统就变成了一个维数很低的方程组，即序参量的演化方程。该方程控制着系统在临界点附近的动力学性质，通过求解此方程，即可得到各种时间、空间和功能结构<sup>[6-8]</sup>。

二十世纪八十年代以来，远离平衡的非平衡统计物理研究又有了较大的突破，发现了非线性随机系统中的许多新奇现象，如：随机共振<sup>[9]</sup>、共振激活<sup>[10-20]</sup>、淬火现象<sup>[9]</sup>、噪声诱导相变<sup>[9,21]</sup>、噪声诱导输运<sup>[22-34]</sup>、分子马达<sup>[35]</sup>及蛋白质分子的能量输运

<sup>[36]</sup>等等。这些研究工作大大促进了非平衡统计物理在物理学的各个分支和其它诸如化学、生物学、生态学、天文学、大气物理、地球科学等自然科学乃至经济学、金融学、新闻学等社会科学领域的应用，成为理论物理和其他自然科学以及社会科学的交叉点，大大改变了人们对自然和整个社会的认识。另一方面，这些研究工作也使人们认识到，“世界是随机的”这一观念并不意味着我们将会失去对世界的把握和控制，相反，在本论文对随机共振的研究中，我们将会看到噪声在许多情况下充当着积极的角色。正如英国《新科学家》周刊 1999 年 1 月 9 日的评论文章标题：“噪声有妙用”。

## 1.2 噪声

在宏观世界里，随机涨落是普遍存在的。这种涨落是快速变化的、随机的、不可预言的，我们称之为噪声。通常，人们认为噪声总是消极的东西，它产生杂乱的运动，破坏次序，破坏功能，抹去相和相之间的差异，导致系统均匀，起到破坏相变的作用<sup>[19]</sup>。但是普里高津(Ilya Prigogine)学派的耗散结构理论认为“无序是有序之源”，即系统“通过涨落达到有序”。这之后，更多的研究发现噪声在系统的演化中起到了决定性的作用，使许多在确定性方程中不可能产生的相变行为在噪声的作用下成为可能。这些相变导致了序的形成和对称性的破缺。就目前研究来看，噪声在各种随机系统中起着关键性的作用，比如：随机共振，噪声诱导相变、噪声诱导输运以及分子马达等<sup>[42-45]</sup>。

根据噪声起源的不同，可分为内噪声和外噪声。内噪声通常认为是系统内部的统计性质引起的结果。它是系统自发产生的，一般与体系体积的倒数成正比，因此这种噪声比较小。例如，在激光系统中，量子噪声是由于粒子的自发辐射引起，它就是内噪声。同时，它也是量子效应的直接结果，源于量子力学的不确定原理<sup>[37]</sup>。外噪声则是由于系统所处的外部环境引起的，它由外部条件完全控制。例如，激光系统中的泵浦噪声就是外噪声。在运用理论模型处理时，一般通过对系统引入的各个参量加以控制，来实现外噪声对系统的控制作用。

人们常常应用朗之万方程处理随机动力学的问题。在朗之万方程中，根据噪声与参量作用的不同形式，可分为加性噪声和乘性噪声。与参量无关的噪声源，用加性噪声描述。例如，内噪声通常就是加性的。而与参量有关的噪声源用乘性噪声。例如，外噪声通常就是乘性的。

# 华中科技大学硕士学位论文

此外，噪声还可根据其统计性质，分为白噪声和色噪声。其统计性质分别为白噪声和色噪声<sup>[9]</sup>：

## 1) 白噪声

白噪声的统计性质为：

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \text{ 且 } \langle \xi(t) \xi(s) \rangle = 2D\delta(t-s), \quad (1.2.1)$$

其中 $\langle \rangle$ 代表系综平均（注意，这里与量子力学中波函数的狄拉克表示法不同）。之所以把它称之为白噪声，是由于其功率密度：

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 2D\delta(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = 2D,$$

为常数，与 $\omega$ 无关，即谱是白色的。这种噪声实际上是没有的，只是对实际噪声的一种抽象近似。因为这种噪声具有无穷大的功率（ $W \propto \int S(\omega) d\omega = \infty$ ），所以真实的噪声必然要对功率谱进行截断，仅保留其低频部分。这样作的结果正是色噪声的特性，使噪声的不同时刻之间具有了关联，对 $S(\omega)$ 一种常用的截断是使 $S(\omega)$ 为洛伦兹型：

$$S(\omega) = \frac{2D}{1 + \tau^2 \omega^2}$$

## 2) 色噪声

色噪声（这里主要是指 O-U 噪声）的统计性质为：

$$C(\Delta t) = \langle \xi(t) \xi(s) \rangle = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right) \quad (1.2.2)$$

当 $\tau \rightarrow 0$ 时， $C(\Delta t) = 2D\delta(\Delta t)$ ，色噪声回归为白噪声<sup>[38-40]</sup>。图 1.1 是用数值模拟得到的一个色噪声样本。

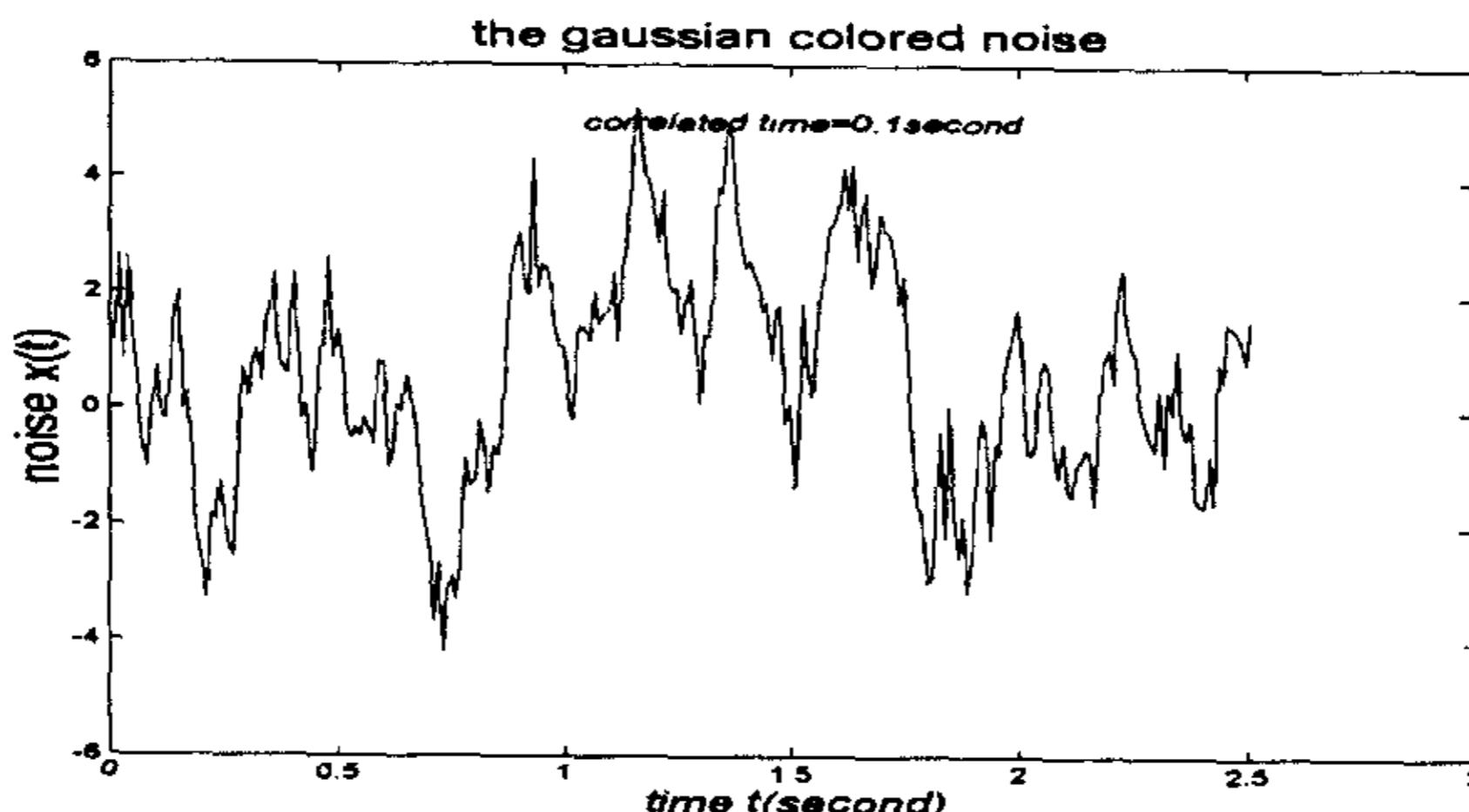


图 1.1 色噪声的一个样本

噪声又可分为高斯和非高斯两种情况，一方面高斯噪声集平稳、高斯、马尔可夫性等统计性于一身，数学上处理起来比较容易；另一方面，大数定理又使得高斯噪声是许多实际问题中的涨落的有效近似。其高斯噪声的高阶矩满足：

$$\begin{aligned}\langle \xi(t_1)\xi(t_2)\cdots\xi(t_{2n-1})\xi(t_{2n}) \rangle &= \sum [C(t_1-t_2)\cdots C(t_{2n-1}-t_{2n})], \\ \langle \xi(t_1)\xi(t_2)\cdots\xi(t_{2n-1}) \rangle &= 0\end{aligned}.$$

在这里，噪声是人们对自然界中所有物理量的涨落的一个通俗而形象的叫法，不仅仅是指我们日常用语中的“噪音”。以上对噪声的分类以及噪声统计性质的不同数学描述，是人们对各种实际物理系统中噪声理想化的理论抽象，它们只是在一定程度上描述了噪声的实际物理状态。这样做的目的，是为了便于理论上对噪声的定量分析与计算。随着人们对噪声研究的进一步深入，将会有更多理想化形式的噪声被引入到各种物理系统。

### 1.3 噪声间的关联

整个自然界之所以多姿多彩，正是由于它们之间都有着一定的联系；人类社会之所以走向文明，正是因为人与人之间存在相互作用。人类认识自然的过程，也就是人与自然的相互作用的过程。否则，这个世界就是一个不可认知的“谜”。因此，自然界中引起涨落的各种噪声源之间也必然存在着一定的关联。

在过去，有不少的工作为了简单起见，认为各个噪声源间没有关联<sup>[41]</sup>。Fox 和 Roy<sup>[42]</sup>研究了量子噪声和泵噪声间没有关联时的光强涨落，并得到一个新的朗之万方程，即现在普遍使用的单模激光光强的 Langevin 方程。但是，自然界中的同一系统或同一过程的不同噪声源之间必然存在某种形式的关联。基于这样的考虑，1991 年，Fulinski 等人提出在某些情况下，两个噪声之间可以存在关联<sup>[43]</sup>。随后，许多研究者研究了噪声间存在关联时的情况，而且这些结果进一步与实验相符<sup>[44-46]</sup>。1993 年和 1995 年，朱世群<sup>[47]</sup>、曹力和吴大进等人<sup>[48]</sup>把 Fulinski 等人的工作推广到单模激光中，并分别研究了加性和乘性噪声之间的关联对激光光强定态性质和瞬态行为的影响。龙全等人对单模激光和双模激光中的噪声关联作了深入的研究<sup>[49-52]</sup>。1995 年，Madureira 等人<sup>[53]</sup>在关联加性和乘性噪声驱动的双稳系统中发现了“巨抑制”现象。Zhou 等人<sup>[54]</sup>考虑了量子噪声的实部与虚部间的关联，吸引了许多研究者在这方面作了大量的工作<sup>[55]</sup>。柯等人<sup>[56-57]</sup>考虑量子噪声的实部和虚部间的关联，得到的光强朗

之方程在  $\lambda_q = \frac{1}{2}$  时, 与 Fox 和 Roy<sup>[42]</sup>等得到的结果完全一致, 并且揭示了激光的锁相正是由于量子噪声的实部与虚部间的关联所致。1997 年, 贾亚等人<sup>[58]</sup>在研究一个双稳系统时, 在相互关联的加性和乘性噪声作用下, 发现系统出现了重复相变。

自从 1981 年首次发现随机共振现象以来<sup>[59]</sup>, 随机共振现象一直以来成为人们研究随机动力学系统的重要课题。1998 年和 2000 年, Tessone. J 和 Wio. S 将噪声间的关联引入到对双稳系统中随机共振的研究, 发现了信噪比对噪声强度的“顽固性”<sup>[60-61]</sup>。2000 年和 2001 年, 贾亚等人研究了分别由相互关联的加性和乘性白噪声和由相互关联的加性和乘性色噪声驱动的双稳系统中的随机共振现象, 发现了双峰形式的随机共振<sup>[62-63]</sup>。在 2002 年和 2003 年, 我们也研究了许多由相互关联的加性和乘性噪声产生的随机共振现象, 发现了单峰形式和多峰形式的随机共振<sup>[64-65]</sup>。在后面的章节, 我们还将详细地介绍我们的工作。

下面我们将简要介绍噪声间的各种关联形式。

1991 年, Fulinski 等人<sup>[43]</sup>提出了两个白噪声  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  间的  $\delta$  函数关联, 即白关联形式, 其统计性质为

$$\begin{cases} \langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0 \\ \gamma_{11}(t, s) = \langle \xi(t) \xi(s) \rangle = 2Q\delta(t-s) \\ \gamma_{22}(t, s) = \langle \eta(t) \eta(s) \rangle = 2D\delta(t-s) \\ \gamma_{21}(t, s) = \langle \eta(t) \xi(s) \rangle = \gamma_{12}(t, s) = \langle \xi(t) \eta(s) \rangle = 2\lambda\sqrt{DQ}\delta(t-s) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

其中  $\lambda$  为噪声关联强度, 这里是个常数。

1996 年, 魏雪勤等人<sup>[66]</sup>提出了两个色噪声  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  间的  $e$  指数关联, 即色关联形式, 其统计性质为

$$\begin{cases} \langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0 \\ \gamma_{11}(t, t') = \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \frac{Q}{\tau_1} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_1}\right) \\ \gamma_{22}(t, t') = \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \frac{D}{\tau_2} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_2}\right) \\ \gamma_{21}(t, t') = \gamma_{12}(t, t') = \langle \eta(t) \xi(t') \rangle = \frac{\lambda\sqrt{DQ}}{\tau_3} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_3}\right) \end{cases} \quad (1.3.2)$$

其中  $\lambda$  为噪声关联强度, 这里为常数。

1997年, 贾亚等人<sup>[67]</sup>提出了两个白噪声  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  间的  $e$  指数关联, 即色关联形式, 其统计性质为

$$\begin{cases} \langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0 \\ \gamma_{11}(t, s) = \langle \xi(t) \xi(s) \rangle = 2Q\delta(t-s) \\ \gamma_{22}(t, s) = \langle \eta(t) \eta(s) \rangle = 2D\delta(t-s) \\ \gamma_{21}(t, s) = \langle \eta(t) \xi(s) \rangle = \gamma_{12}(t, s) = \langle \xi(t) \eta(s) \rangle = \frac{\lambda\sqrt{DQ}}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right) \end{cases} \quad (1.3.3)$$

其中  $\lambda$  为噪声关联强度, 这里也是个常数。

1998年, Tessone. J 和 Wio. S<sup>[60]</sup>提出了两个白噪声  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  间含时关联强度的  $\delta$  函数关联, 其统计性质为

$$\begin{cases} \langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0 \\ \gamma_{11}(t, s) = \langle \xi(t) \xi(s) \rangle = 2Q\delta(t-s) \\ \gamma_{22}(t, s) = \langle \eta(t) \eta(s) \rangle = 2D\delta(t-s) \\ \gamma_{21}(t, s) = \langle \eta(t) \xi(s) \rangle = \gamma_{12}(t, s) = \langle \xi(t) \eta(s) \rangle = 2\lambda(t)\sqrt{DQ}\delta(t-s) \end{cases} \quad (1.3.4)$$

这里噪声关联强度不再为常数。Tessone. J 和 Wio. S 假设它的形式为

$$\lambda(t) = \lambda_0 \cos \Omega t \quad (1.3.5)$$

2000年, Tessone. J 和 Wio. S<sup>[61]</sup>又给它加了一个初始相位  $\phi$ , 成为

$$\lambda(t) = \lambda_0 \cos(\Omega t + \phi) \quad (1.3.6)$$

至于两个噪声之间为什么要取这些关联形式, 各类文献中都没有从物理意义上定性的解释, 或者从数学上进行严密的证明。每种关联形式的给出都是一种假设, 而且根据研究的必要性, 我们还可以提出新的恰当的关联形式。这些假设的关联形式的正确性只能由从它导出的理论结果与实验结果是否相符来判断。这就如同量子力学的五个基本假设的正确性, 是由于从它导出的所有微观量子效应与实验相一致的结果。

## 1.4 逃逸问题和平均第一通过时间

逃逸问题是研究系统从束缚区(稳定区)进入逃逸区(不稳定区)的性质和规律。例如, 一个具有大的电阻阻尼的电路系统, 设  $x$  表示电压,  $x_u$  表示临界值,  $x_s$  表

示稳定值。当初始电压小于临界值  $x_u$ ，系统会自动稳定到  $x_s$  的定态，但一旦某种原因使某一时刻的电压超过临界值  $x_u$ ，系统会逃逸出束缚区。也就是说，电压会由于某种正反馈机制进一步放大，直至器件被烧毁。这时  $x_u$  就是使电路系统正常运行的最大电压。这里所说的“某种原因”主要指的是系统受到的不可避免的噪声。我们感兴趣的是，当不存在大的宏观外力时，系统由于受到不可避免的噪声作用而产生的逃逸。尽管随机力的强度很小，但它仍然可以引起各类稳定系统的崩溃。所以，研究系统的逃逸问题对于估计系统的稳定性，对于根据实际需要来设计系统，有着重要的意义<sup>[9]</sup>。

所谓平均第一通过时间是指系统的某一物理量在噪声的驱动下第一次到达边界的统计平均时间，一般简写为 MFPT。它是描写随机系统的一个重要特征量之一。在一般的文献中（噪声强度很小的情况下），人们常把平均第一通过时间的倒数定义为逃逸率<sup>[9]</sup>。因此，对逃逸问题的研究和对平均第一通过时间的研究密切相关。由于对逃逸问题的研究，平均第一通过时间（MFPT）很早就引起了人们的关注。1943 年，Chandrasekher<sup>[68]</sup>曾用 MFPT 的几率分布估计过逃逸率。1945 年，Uhlenbeck 等人<sup>[69]</sup>研究过具有初速度的布朗粒子的 MFPT 几率分布。先前人们主要研究马尔可夫过程。近年来，人们的目光又转向非马尔可夫过程。1981 年，Hanggi 等人<sup>[70]</sup>提出了用广义的的主方程描述离散的非马尔可夫过程的 MFPT 理论。1985 年，Hanggi<sup>[71]</sup>提出了“退耦合假设”计算 MFPT，接着又讨论了双态噪声及纯扩散条件下的 MFPT<sup>[72]</sup>；同年，Sancho 也讨论了双态噪声系统的 MFPT 问题，得到一维双态线性噪声系统的 MFPT 的精确公式<sup>[73]</sup>。1986 年，Fox<sup>[74]</sup>采用泛函与路径积分方法，得到了近似的 FPE，无须作 Hanggi 假设，MFPT 的理论结果和实验结果相符。接着，Fox 把 MFPT 理论用来处理激光中的噪声<sup>[75]</sup>。Masoliver 等人<sup>[76]</sup>讨论了高斯色噪声情况下的 MFPT，并且指出了 Hanggi 的假设和 Fox 的结果都是他们的特定近似。Sancho 等<sup>[77]</sup>通过投影算子方法，借助于记忆核的向后方程，直接得到 MFPT 的形式方程，MFPT 也可用奇异微扰方法进行研究。1988 年，曹力等人运用投影算子技术到处了平方 O-U 噪声驱动的单变量系统的 MFPT 方程，并得到了近似解<sup>[78]</sup>。1989 年，刁操政等人对内外噪声同时驱动下的 MFPT 问题进行了研究，推动了 MFPT 的近似公式，并对所得的结果进行了推广和应用<sup>[79]</sup>。进入九十年代，提出了许多解决非马尔可夫情况下 MFPT 问题的新方法和新技巧。例如，插值法<sup>[80]</sup>，统一色噪声展开<sup>[81]</sup>，统一

展开理论<sup>[82]</sup>等。

平均第一通过时间的计算，不仅是解决逃逸问题的基础，也是分析随机共振现象的关键问题之一。因此，在这里简单介绍一下最基本的计算平均第一通过时间的方法<sup>[38]</sup>。

以噪声驱动的一维系统在齐次过程的情况为例，假定粒子在区间  $(a, b)$  中，并且时刻  $t = 0$  的初始位置是  $x$ ， $a$  和  $b$  两点设定为两个吸收壁。因此，粒子时刻  $t$  仍然在区间  $(a, b)$  中的概率为

$$\int_a^b p(x', t|x, 0) dx' = G(x, t) \quad (1.4.1)$$

假定粒子离开区间  $(a, b)$  的时刻是  $T$ ，则 (1.4.1) 式可写成

$$\text{Prob}(T \geq t) = \int_a^b p(x', t|x, 0) dx' \quad (1.4.2)$$

这意味着  $G(x, t)$  与  $\text{Prob}(T \geq t)$  表示相同的物理量。由于系统是齐次的，我们可以得到

$$p(x', t|x, 0) = p(x', 0|x, -t) \quad (1.4.3)$$

向后福克-普朗克方程可以写为

$$\frac{\partial p(x', t|x, 0)}{\partial t} = A(x) \frac{\partial}{\partial x} p(x', t|x, 0) + \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x', t|x, 0) \quad (1.4.4)$$

其中， $A(x)$  为漂移项， $B(x)$  为扩散项。于是  $G(x, t)$  服从方程

$$\frac{\partial G(x, t)}{\partial t} = A(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) + \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t) \quad (1.4.5)$$

边界条件为

$$p(x', 0|x, 0) = \delta(x - x') \quad (1.4.6)$$

因而

$$G(x, 0) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.4.7)$$

若  $x = a$  或  $x = b$  处为吸收壁，即在  $x = a$  或  $x = b$  处，粒子立刻被吸收，所以

$$\text{Prob}(T \geq t) = 0 \quad (1.4.8)$$

同样, 若  $x = a$  或  $x = b$  处为吸收壁,

$$G(a, t) = G(b, t) = 0 \quad (1.4.9)$$

由于  $G(x, t)$  是  $T \geq t$  的概率, 因此

$$\langle f(T) \rangle = - \int_0^\infty f(t) dG(x, t) \quad (1.4.10)$$

所以, 平均第一通过时间

$$T(x) = \langle T \rangle \quad (1.4.11)$$

对 (1.4.10) 式分布积分, 由 (1.4.11) 得

$$T(x) = - \int_0^\infty \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} dt = \int_0^\infty G(x, t) dt \quad (1.4.12)$$

同理, 若定义

$$T_n(x) = \langle T^n \rangle \quad (1.4.13)$$

则有

$$T_n(x) = n \int_0^\infty t^{n-1} G(x, t) dt \quad (1.4.14)$$

由 (1.4.7) 式可得

$$\int_0^\infty \frac{\partial G(x, t)}{\partial t} = G(x, \infty) - G(x, 0) = -1 \quad (1.4.15)$$

所以

$$A(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) + \frac{1}{2} B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, t) = -1 \quad (1.4.16)$$

其边界条件为

$$T(a) = T(b) = 0 \quad (1.4.17)$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \exp \left\{ \int_a^x [2A(x')B(x')] dx' \right\},$$

求得平均第一通过时间为

$$T(x) = \frac{2 \left[ \left( \int_a^x \frac{dy}{\varphi(y)} \right) \int_x^b \frac{dy'}{\varphi(y')} \int_a^{y'} \frac{dz \varphi(z)}{B(z)} - \left( \int_x^b \frac{dy}{\varphi(y)} \right) \int_a^x \frac{dy'}{\varphi(y')} \int_a^{y'} \frac{dz \varphi(z)}{B(z)} \right]}{\int_a^b \frac{dy}{\varphi(y)}} \quad (1.4.18)$$

若  $x = a$  为反射壁,  $x = b$  处为吸收壁, 且  $a < b$  时, 则平均第一通过时间为

$$T(x) = 2 \int_x^b \frac{dy}{\varphi(y)} \int_a^y \frac{\varphi(z)}{B(z)} dz \quad (1.4.19)$$

若  $x = b$  处为反射壁,  $x = a$  处为吸收壁, 且  $a < b$  时, 则平均第一通过时间为

$$T(x) = 2 \int_a^x \frac{dy}{\varphi(y)} \int_y^b \frac{\varphi(z)}{B(z)} dz \quad (1.4.20)$$

## 1.5 随机共振概述

对非线性系统输入一个电流  $I(t)$ ,  $\dot{x} = f(x) + I(t)$ , 再测量系统的输出  $x(t)$ 。如果这一输入信号同时含有信号  $S(t)$  和噪声  $\Gamma(t)$ , 即  $I(t) = S(t) + \Gamma(t)$ , 因此我们可以研究输入信号和噪声对输出产生的影响, 尤其是研究在各种非线性条件下, 输入信号和噪声在输出中表现出的协作效应。以某种方式定义输入和输出的信噪比, 当固定输入信号强度而增加输入噪声强度时(即降低输入信噪比), 人们自然期待输出信噪比也会降低。当原系统  $f(x)$  为线性时, 实际情况的确如此。但当系统  $f(x)$  为非线性时, 并非如此。当系统的非线性与输入的信号和噪声之间存在某种匹配时, 如果增加输入噪声, 不仅不减低, 反而大幅度地增加了输出的信噪比, 出现了噪声和信号之间的协作效应<sup>[9]</sup>。在这种情况下, 存在某一最佳输入噪声强度, 使系统产生最高信噪比的输出。输入噪声低于和高于这一强度, 输出信噪比都会显著下降。这一现象很容易使人联想起力学中熟知的共振现象。由于这种类比性, 人们称上述随机系统的协作现象为随机共振。

在激光系统中, 由于激光工作物质的自发辐射和泵浦能量的涨落, 输出激光光强会随机地变化。McNamara 等人<sup>[83]</sup>和 Mandel 等人<sup>[84]</sup>在双模激光系统中发现随机共振现象。这对于提高激光的效率有重要的作用。在电磁系统中, 实现随机共振的第一个实验是 1983 年由 S.Fauve 等人<sup>[85]</sup>在 Schmitt 触发器电路系统中完成的。从此在各种复杂的电子设备中均发现了随机共振现象, 特别是在隧道二极管和半导体二极管的  $I-V$  曲线中, 观测到随机共振曲线<sup>[86-88]</sup>。这对于提高电子线路的信噪比提供了新的思路。在神经系统中, 神经脉冲序列在神经元之间传递时, 也发生随机共振现象<sup>[89]</sup>。通过研究, 将不仅会深入地认识随机共振, 而且对神经系统中信息传递

的认识也会有巨大的跨越。因此，对随机共振现象的研究具有重要的理论和实际意义。

## 1) 随机共振的概念及其发展

自从 1981 年首次发现随机共振现象以来<sup>[59]</sup>，许多学者对这种奇怪而又神秘的现象作了大量的研究。在探索和研究的过程中，他们在理论和实验的各个方面都取得了丰硕的成果。直到现在，随机共振的理论和实验还正在不断向前发展，人们对随机共振现象研究的规模也越来越大。因此，随着人们对随机共振的认识越来越深入，随机共振的概念也在不断发展和扩充。

根据国外和国内的研究情况，可以把随机共振的概念的发展过程大致分为两个阶段。第一个阶段是从二十世纪八十年代到九十年代初期。在这一阶段，随机共振的基本含义是指一个非线性双稳系统，当仅在小周期信号或弱噪声驱动下都不足以使系统的输出在两个稳态之间跳跃，而在弱噪声和小周期信号共同作用下，随着输入噪声强度的增加，系统输出功率中调制信号的频率处出现一个峰值。当噪声强度达到某一适当值时，输出信号的峰值达到最大，即共振<sup>[90]</sup>。

第二个阶段是从二十世纪九十年代初期到现在。在这一阶段，随机共振的概念有了很多很大的扩展。这些扩展可以概括为以下四个方面。第一，以前普遍认为的三个必要条件<sup>[9,90]</sup>（非线性系统、噪声和周期信号）被突破，人们在无外信号或线性系统中也发现了随机共振现象<sup>[91-92]</sup>。第二，传统的随机共振局限于单峰形式的共振情况<sup>[9,90]</sup>。1997 年，Vilar 等<sup>[93]</sup>首次发现了多峰形式的共振，即多重随机共振，现在已成为研究的一个焦点<sup>[65]</sup>。第三，传统的随机共振一般由信噪比与噪声强度的关系来刻画体现<sup>[9,64-65,94]</sup>。1998 年，Barzykin 等<sup>[95]</sup>提出也可以用信噪比与噪声自相关时间的关系来体现。第四，传统的随机共振注重在噪声参数的某个或某些匹配点出现对信号响应的极大值，Tessone 和 Wio 等提出对随机共振中噪声参数的“钝化”现象进行研究<sup>[60-61,96-97]</sup>。所谓噪声参数的“钝化”是指，在噪声参数的一个相对大的范围内都能够维持共振峰的高度不变，似乎类似于物理学上常用峰的半宽度描述的物理量。

## 2) 随机共振的发现

随机共振现象是 Benzi. R 和他的同事<sup>[59]</sup>在 1981 年研究古代气候特征时发现的，并用于解释第四纪全球气候冰期和暖气候期交替出现所具有的周期性（大约为十万元）变化。

第四纪气候记录的主要特征是：它的时间序列功率谱在 $10^5$ 年周期处有一个很强的峰值，这与这一时期地球气候的冰期和暖气候期交替变化的周期大致相符。曾在1930年，Milankovitch<sup>[98]</sup>指出气候变化的频率与地球绕太阳运动的轨道参数有关，把注意力由地球内部引向外部空间。1976年，Hasselmann<sup>[99]</sup>指出，短时间的随机扰动（如天气的变化）会对气候的长期变化产生影响，并建立了随机气候模型。1981年，Sutren<sup>[100]</sup>进一步发现：在不含确定性外部作用力的能量平衡模型中引入随机扰动，将导致在模型的两个平衡态之间的随机跳跃，而这些跳跃具有一个 $10^5$ 年的数量级的平均特征时间。1982年，Benzi R 等人<sup>[101]</sup>创造性地把随机共振应用于第四纪冰川问题的研究。通过把小周期信号和随机扰动同时引入能量平衡模型，他们建立起完整地描述第四纪冰期和暖气候期交替变化这一奇特现象的双稳气候模型

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\varepsilon(T)}{C} \left[ \frac{\mu(t)}{1 + \beta(1 - T/T_1)(1 - T/T_2)(1 - T/T_3)} \right]$$

其中， $\mu(t) = 1 + 0.0005 \cos \omega t$  ( $\omega = 2\pi/10^5$ ) 是地球轨道离心率变化引起的日照率的年平均变化。 $T_1 < T_2 < T_3$ ， $T_3 - T_1 = 10K$ ， $T_1$  和  $T_3$  是被不稳定气候态  $T_2$  分开的两个稳定气候态。 $\beta$  为隐含着随机扰动作用的无量纲参数。 $\varepsilon(T)$  和  $C$  分别是地球表面辐射率和地球热容量。

具体地说，在上述双稳气候模型中，地球处在非线性条件下，小周期信号被假设为太阳常数的周期性（十万年）变化，随机扰动来源于地球内部海洋和大气回流的短时间涨落。二者本身都不足以引起地球气候从冰期到暖气候期的大幅度变化，但只要有能产生 $1K$ 温度差的外部驱动力，在内部弱随机扰动的协同作用下，地球气候在冰期和暖气候期之间以近似于小外部周期信号的周期为周期作温度差为 $10K$ 数量级的大幅度变化。至此，第四纪冰川世纪之谜得到了科学圆满的解释，而其中随机共振的运用则起到了关键性作用。

### 3) 随机共振现象的研究手段

现代物理学分为理论物理、实验物理和计算物理三大分支。理论物理是从一系列的基本物理原理出发，列出数学方程，用数学分析方法求出解析结果。实验物理是以观测和实验为基本手段来揭示新的物理现象，检验理论物理推论的正确性及其

应用范围，并为理论物理的进一步发展提供依据。计算物理则是计算科学、数学和物理学三者之间的交叉学科。它主要是采用计算科学的方法，应用大规模高速计算机作为工具，去解决理论或实验物理中在目前研究水平和实验条件下不能解决的问题，其结果可以用以检测和指导理论物理和实验物理。

随机共振现象属于非平衡统计物理的研究范畴。人们对随机共振现象的研究始终贯穿着现代物理学的这三种研究手段。从 1981 年首次发现随机共振现象以来<sup>[59]</sup>，最先开始的是理论和实验的研究。这一过程中提出了绝热近似理论和微扰理论，并与实验取得很好的一致性。同时，人们也做了许多数值方法的研究，分为数值模拟 (digital simulation) 和电子线路模拟 (analog simulation)。严格地说，后者应该属于实验的范畴，但一般文献中都把它单独列出。由于这种方法的主要工作量在于对大量数据样本的数值处理，因此我们把它归到计算物理中。这三种研究手段的应用，使人们对随机共振的本质的认识逐步深入和发展，反过来，对随机共振的研究也促进了这些研究手段和方法的发展<sup>[90]</sup>。

## 4) 随机共振的描述方法

从物理学发展来看，有时候即使要给某种物理现象提供一种定性的解释，也是不容易的。但是，仅给物理现象赋予定性的解释是远远不够的。只有有了定量的量度和计算手段之后，人们才能清楚地看到它们的物理本质。因此，我们用一个什么样的可观测量（物理量）来量度随机共振现象也是一个关键性的问题。

这个可观测量既要具有物理意义上的广泛性，也要与实验的测量技术相联系，以便于测量。以前的研究者正是遵守这两个原则，提出了几种典型的方案。

第一种方案是 Benzi. R 等人<sup>[59]</sup>在 1981 年提出来的。他们用功率谱（一般用  $S(\omega)$  表示）峰值的强度来量度随机共振的程度（强度）。因为，功率谱有很直观的物理意义和成熟的测量手段，而且还便于理论上的处理和实验上的观察。

第二种方案是 Hanggi 等人<sup>[102]</sup>在 1989 年提出来的。他们用系统对信号的响应（实际上是系统对信号响应的系统平均，一般用  $\bar{x}$  表示）与噪声强度的关系来表示随机共振。因为，系统对信号的响应具有更直观的物理意义，测量的方式也更直接。

第三种方案是 McMamara 等人<sup>[94]</sup>在 1989 年提出来的。为了使可观测量的物理意义更加明显，他们用信噪比与噪声参数（噪声强度和噪声的自关联时间与互关联时间）的关系来表示随机共振。他们把信噪比定义成输出信号的功率与输出噪声的功率的比值。这样，信噪比定义就基本上与电子信号学科上的信噪比具有相似的物理

意义和可观测效果。现在，这种方案的使用范围是最广泛的。我们自己的工作也都是采用这种表示法。

第四种方案是 Gamaitoni 等人<sup>[103]</sup>在 1989 年提出来的。他们用停留时间分布来表示随机共振。停留时间是指粒子在两个稳态之间跳跃一次所等待的时间间隔。这种方案是从输入与输出同步性的角度来描述随机共振现象。这种同步性的表示方法在生物学的神经学领域得到了广泛的使用<sup>[104-105]</sup>。

## 5) 随机共振的理论和实验成果

自从随机共振现象被发现以来，随机共振在理论方面和实验方面的发展日新月异，特别是在许多自然科学领域，这些理论和实验的成果都得到了广泛的应用。下面按照时间顺序进行介绍。

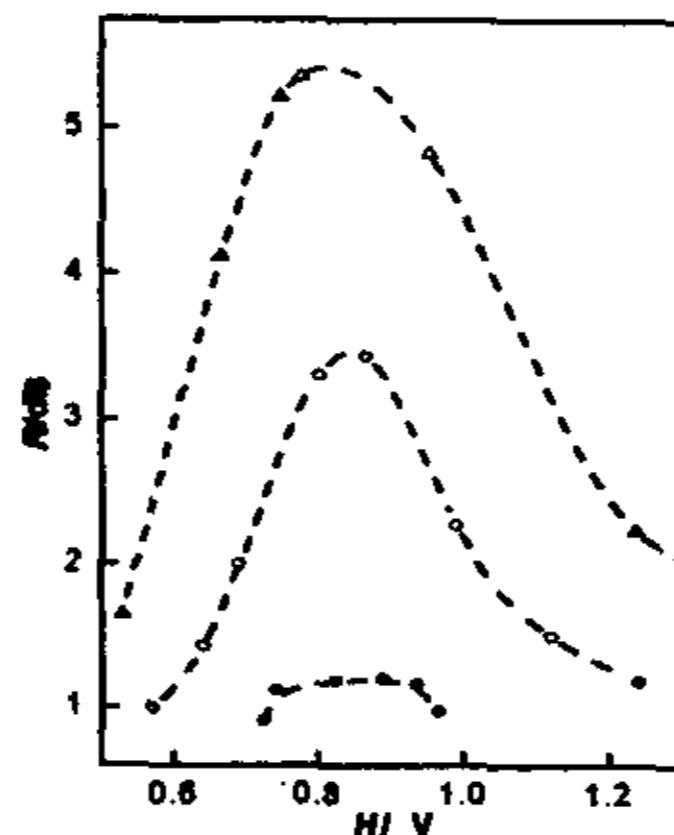


图 1.2 输出信噪比与噪声电压的关系

在 1981 年和 1982 年，Benzi. R 和他的同事提出随机共振的初步理论，并运用它成功的解释了第四纪冰川世纪之谜<sup>[59,101]</sup>。1983 年，Fauve. S 和 Heslot. F<sup>[85]</sup>在具有双稳输出特性的 Schmitt 触发器电路系统中第一个用实验证实随机共振现象的存在，并把信噪比的概念引入到随机共振的实验研究。图 1.2 是他们根据实验的数据作出的曲线，从这三条曲线上我们可以看到明显的“共振峰”的形状。展示随机共振的第二个实验是 McNamara. B 等人<sup>[83]</sup>于 1988 年在一个光学系统（双向环型激光器）中实现的。双向环型激光器的两个相反方向（顺时针和逆时针）运动的激光模成为系统的两个稳定态。输入信号和噪声，同时测量两个方向上的激光强度，由此计算出输出功率谱和信噪比。实验的结果再次得到与图 1.2 类似的曲线的随机共振现象。一年后，McNamara. B 和 Wiesenfeld. K 提出了随机共振的绝热近似理论<sup>[94]</sup>。他们把连续的模型简化为双态模型，通过绝热近似处理，计算出输出响应的时间平均相关函数和输

出功率谱，最后给出信噪比的解析表达结果。我们将在下章详细介绍这一理论。1990年，胡岗等人<sup>[106]</sup>提出了微扰理论。他们把朗之万方程转化成相应的福克-普朗克方程，然后按照量子力学中本征函数的微扰展开方法，计算出输出功率谱和信噪比的形式表达结果。这一理论，我们将在下章详细介绍。1993年 Douglass. J 和他的同事们<sup>[107]</sup>在龙虾尾部的机械性刺激感官器神经元细胞中观察到了随机共振现象，随后，1996, Levin. J 和他的同事们<sup>[108]</sup>在蟋蟀头部触角的机械性刺激感官器神经元细胞中也观察到了随机共振现象。此后，随机共振有了更大的发展。（1）人们在无外信号或线性系统中也发现了随机共振现象。（2）1997年，Vilar 等<sup>[93]</sup>首次发现了多峰形式的共振，即多重随机共振。（3）1998年，Barzykin 等<sup>[95]</sup>提出也可以用信噪比与噪声自相关时间的关系来体现。

## 6) 目前随机共振研究的发展方向

近年来，人们对随机共振本质的认识有了很大的进展。与传统的观念相比，新的理论和实验主要体现在三个方面。（1）以前普遍认为的三个必要条件<sup>[9,90]</sup>（非线性系统、噪声和周期信号）被突破，人们在无外信号或线性系统中也发现了随机共振现象<sup>[9,90]</sup>。（2）传统的随机共振局限于单峰形式的共振情况<sup>[91-92]</sup>。1997年，Vilar 等<sup>[93]</sup>首次发现了多峰形式的共振，即多重随机共振，现在已成为研究的一个焦点<sup>[65]</sup>。（3）传统的随机共振一般由信噪比与噪声强度的关系来刻画体现<sup>[9,64-65,94]</sup>。1998年，Barzykin 等<sup>[95]</sup>提出也可以用信噪比与噪声自相关时间的关系来体现。在第一方面，人们从理论和实验上对线性系统中的随机共振现象作了详细的研究。1996年，Berdichevsky 等<sup>[109]</sup>研究了由乘性噪声驱动的线性系统，发现在乘性噪声的情况下可以出现随机共振现象。1999年，他们又进一步考虑了由关联乘性噪声和加性噪声驱动线性系统的情况<sup>[110]</sup>。2002年，在单模激光增益模型中，考虑泵噪声和量子噪声的关联，运用线性化近似方法，我们发现在仅由加性噪声驱动的线性系统中也能出现随机共振现象<sup>[111]</sup>。

## 7) 随机共振的应用领域

自从随机共振现象被发现以来，人们对随机共振的理论和实验的研究在许多的自然科学领域都取得了巨大的成功。

随机共振的第一个应用是成功地解释了第四纪冰川世纪之谜，这是它在古代气候学中的应用。在电子通信领域中，随机共振极大地提高输出信噪比。在光学领域，利用随机共振可以提高输出激光的稳定性，本论文的第五章将有更详细的工作。在

机械工程中，可以应用随机共振来检测机械故障。在地质研究领域中，人们已经将随机共振应用于地震预报。在生物学和医学领域，随机共振已应用于揭示生物体是如何利用噪声增强弱信号在神经系统中的传输问题。关于随机共振在各个领域的具体应用，我们在第二章有更详细的介绍。

## 1.6 我们的研究工作

1) 研究了由关联噪声驱动的双稳系统和激光系统中的随机共振的特征以及各种参数对随机共振形式的影响。根据建立模型的不同，我们对三种随机系统中出现的随机共振现象分别进行了研究。(1) 在第三章中，研究了锯齿型双稳势阱模型中随机共振信噪比的性质。运用绝热近似理论，计算出输出信号功率谱和信噪比的解析表达结果。研究发现，信噪比随着加法噪声强度变化时，不仅会出现共振，还会出现抑制、单调减少和单调增加四种情况；信噪比随着势垒高度的变化曲线会出现抑制、双极值和单调下降三种情况。(2) 在第四章中，研究了无限深双稳势阱模型中的多重随机共振现象。运用绝热近似理论，得到了信噪比的解析表达结果。在信噪比随着噪声关联强度的曲线中观察到了多极随机共振现象，并且还发现信噪比随着加法噪声强度和乘法噪声的变化，既出现了随机共振也出现了抑制。(3) 在第五章中，研究了出现在单模激光系统中单峰形式和多峰形式的随机共振现象。将信号和噪声以相乘的形式引入单模激光系统中，考虑关联的泵噪声和量子噪声的情况，运用线性化近似方法，在激光系统中发现了多重随机共振现象。计算了激光处于稳态时的光强关联函数、功率谱和信噪比，发现信噪比随着关联时间的变化不仅出现单峰的随机共振，而且还出现了多重随机共振。当适当改变参数时，还会出现多重随机共振和单峰形式的随机共振之间的转变。

2) 在第六章中，研究了噪声间关联对对称双稳系统的平均第一通过时间的影响。运用解析方法研究了由关联噪声驱动的对称双稳系统中的相反方向平均首通时间的关系，证明它们不再具有空间对称性（空间对称破缺）。作为例子，分别计算了四次方模型和锯齿模型的平均第一通过时间。由平均第一通过时间的解析结果，进一步证明了在同样参数区  $T(x_- \rightarrow x_+; \lambda) \neq T(x_+ \rightarrow x_-; \lambda)$ ，不仅如此，还发现  $T^+$ （即  $T(x_- \rightarrow x_+; \lambda)$ ）和  $T^-$ （即  $T(x_+ \rightarrow x_-; \lambda)$ ）随着乘法噪声强度  $Q$  和加法噪声强度  $D$  的变化呈现出不同的规律。在四次方模型中，当  $T^+ \sim Q$  曲线出现一个极大值时， $T^-$  为

# 华中科技大学硕士学位论文

---

单调减小；当  $T^+ \sim D$  曲线出现单调增加  $\rightarrow$  三极值  $\rightarrow$  单极值的相变，而  $T^-$  只是单调减小；减小参数  $Q$ ，当  $T^+ \sim D$  曲线表现为单调减小  $\rightarrow$  两极值  $\rightarrow$  单调增加，即另一形式的相变，而  $T^- \sim D$  曲线仅单调增加。对双稳锯齿模型也有类似表现。研究发现，(1) 由于噪声间关联的存在，导致对称双稳势的平均第一通过时间左右不对称，即  $T^+ \neq T^-$ 。而且，它们随着噪声强度的变化规律也完全不同。(2) 由于关联效应使平均首通时间随噪声强度的变化，出现共振、抑制，乃至于出现“相变”。当  $\lambda=0$  (无关联) 时，所有  $T^+$  和  $T^-$  随着噪声强度的变化均为单调。

3) 在第七章中，研究了在相关色噪声作用下，单模激光的定态性质。运用处理色噪声的有效近似方法，计算了具有白关联的不同自相关时间的加法色噪声和乘法色噪声驱动的单模激光三次方模型的场幅定态几率分布及其均值、协方差，分析了在阈值上时，激光光强均值和协方差受噪声间的关联强度  $\lambda$  和噪声的“颜色”的影响。

## 2 随机共振基本理论和应用

对随机共振的理论研究是人们解释自然科学各个领域中随机共振现象的主要依据。虽然随机共振的理论研究受到复杂数学方法和传统确定论物理思想的困扰，但是，一直以来人们从来没有放弃过对她的理论探索。到现在为止，人们已经建立起来多种关于随机共振的理论。近年来，对随机共振的理论研究，更是呈现出一片百花齐放、百家争鸣的欣欣向荣的满园春色。

在这些理论中，最有影响的理论研究成果有三种：绝热近似理论、微扰理论和线性化近似理论。

### 2.1 绝热近似理论

绝热近似理论是由 McNamara 和 Wiesenfeld 在 1989 年提出来的<sup>[94]</sup>。1998 年，Hanggi P 曾用“卓越”（原文英文为“prominent”）一词来评价这一理论的创造性和重要性<sup>[90]</sup>。下面简要介绍这一理论。

对一个双稳系统同时输入信号和噪声的最简单模型为

$$\dot{x} = ax - x^3 + A \cos \Omega t + \Gamma(t) \quad (2.1.1)$$

其中  $a > 0$ ，则  $ax - x^3$  为最简单双稳系统， $A \cos \Omega t$  为最简单的单频信号， $\Gamma(t)$  为噪声性质最简单的白噪声，噪声强度为  $D$ 。当  $A = D = 0$  时（无噪声和信号情况下），系统在

$$x = \pm \sqrt{a}$$

处有两个稳态。当  $D = 0$  时，若  $A < A_C$  ( $A_C = \frac{2\sqrt{3}}{9} a^{5/2}$ )，运动轨道将在  $x = \sqrt{a}$  或  $x = -\sqrt{a}$  附近进行局域性的简谐周期振动。然而在噪声的帮助下，系统将可以在两个稳态之间进行跃迁。用概率分布来描述，与其对应的福克-普朗克方程为

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(ax - x^3 + A \cos \Omega t) \rho(x, t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) \quad (2.1.2)$$

先将连续模型简化为双态模型。当输入信号和噪声强度都很小时

$$A \ll 1, D \ll 1, \quad (2.1.3)$$

可以把系统的两个连续的吸引区  $(-\infty, 0)$  和  $(0, \infty)$  看成两个离散的吸引子  $x = \sqrt{a}$  和  $x = -\sqrt{a}$ 。在两个吸引子处的概率总量分别为

$$p_-(t) = \int_{-\infty}^0 \rho(x, t) dx, \quad p_+(t) = \int_0^{\infty} \rho(x, t) dx \quad (2.1.4)$$

显然,  $p_-(t) + p_+(t) = 1$ 。

下面, 介绍绝热近似的物理图象。当输入信号频率很低时

$$\Omega \ll 1$$

我们假设系统在各个吸引子处达到局域平衡所需的时间远小于两吸引子之间概率整体达到平衡所用的时间, 也远小于信号的周期。也就是说, 与信号变化和两吸引子之间概率交换所需的时间相比, 在各个吸引子处达到概率平衡可以认为是瞬时完成的。

因此, 在绝热近似下, 福克-普朗克方程的长时间演化行为可以简化为概率交换的主方程

$$\begin{aligned} p_-(t) &= -r_-(t)p_-(t) + r_+(t)p_+(t) \\ &= r_+(t) - [r_-(t) + r_+(t)]p_-(t) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

假设  $r_{\pm}(t)$  具有以下形式:

$$r_{\pm}(t) = f(\alpha + \beta \cos \Omega t) \quad (2.1.6)$$

利用泰勒公式展开为

$$r_{\pm}(t) = \frac{1}{2}(r_0 \mp r_1 \beta \cos \Omega t + r_2 \beta \cos^2 \Omega t \mp \dots) \quad (2.1.7)$$

其中,  $\frac{1}{2}r_0 = f(\alpha)$ ,  $\frac{1}{2}r_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n f(\alpha)}{d(\beta \cos \Omega t)^n}$ 。

将 (2.1.7) 式的展开取到  $\beta$  的一次项, 带入主方程 (2.1.5) 式得到  $p_{\pm}(t)$  的解为

$$p_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-r_0(t-t_0)} [2p_{\pm}(t_0) - 1 \mp \frac{r_1 \beta \cos(\Omega t - \theta)}{(r_0^2 + \Omega^2)^{1/2}}] + 1 \pm \frac{r_1 \beta \cos(\Omega t - \theta)}{(r_0^2 + \Omega^2)^{1/2}} \right\} \quad (2.1.8)$$

其中,  $\sin \theta = \frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + r_0^2}}$ ,  $\cos \theta = \frac{r_0}{\sqrt{\Omega^2 + r_0^2}}$ 。

当  $t_0 \rightarrow -\infty$  时,  $p_{\pm}(t)$  趋于渐进解  $p_{\pm}^s(t)$ 。利用渐进态, 随机变量的相关函数可求得为

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = ae^{-r_0|\tau|} \left[ 1 - \frac{r^2 \beta^2 \cos^2(\Omega t - \theta)}{r_0^2 + \Omega^2} \right] + \frac{ar^2 \beta^2 \{ \cos \Omega \tau + \cos[\Omega(2t + \tau) + 2\theta] \}}{2(r_0^2 + \Omega^2)}$$

这个相关函数不仅与时间间隔  $\tau$  有关, 而且与时间的起始值  $t$  有关。所以统计意义上的相关函数应该是对初始时间  $t$  的系统平均

$$\begin{aligned} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle_{ave} &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle dt \\ &= ae^{-r_0|\tau|} \left[ 1 - \frac{r^2 \beta^2}{2(r_0^2 + \Omega^2)} \right] + \frac{ar^2 \beta^2 \cos \Omega \tau}{2(r_0^2 + \Omega^2)} \end{aligned}$$

系统的输出功率谱为

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle_{ave} e^{-i\omega\tau} d\tau = S_1(\omega) + S_2(\omega) \quad (2.1.9)$$

将输出信噪比  $R$  定义为输出总信号功率与  $\omega = \Omega$  处的单位噪声谱的平均功率之比

$$R = \frac{P_s}{S_2(\omega = \Omega)}, \quad P_s = \int_0^{\infty} S_1(\omega) d\omega \quad (2.1.10)$$

这就是在绝热近似下系统 (2.1.1) 的输出信噪比的表达式。从推导的过程可以看出, 它对信号、噪声和系统的限制条件是很严格的。它要求  $A \ll 1$ ,  $D \ll 1$  和  $\Omega \ll 1$ 。但是, 在实际的物理系统中, 有时候这些限制条件恰恰是合理的。我们自己的部分工作就是以绝热近似理论为基础, 在双稳系统中引入了相关联的加性和乘性噪声。

## 2.2 微扰理论

在量子力学中, 微扰理论是求解许多薛定谔方程的重要工具之一。1990 年, 中国学者胡岗教授<sup>[106]</sup>注意到福克-普朗克方程与薛定谔方程的相似性, 将微扰理论应用到求解福克-普朗克方程的过程中。这种方法给出的信噪比的结果比绝热近似理论的结果具有更大的适用性和广泛性。

下面对这一理论进行简要介绍。处理的模型仍为一个最简单双稳系统同时输入信号和噪声。与其对应的福克-普朗克方程为

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[(ax - x^3 + A \cos \Omega t)\rho(x,t)] + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x,t) \quad (2.2.1)$$

当  $A \ll 1$  时, 可以把弱信号  $A \cos \Omega t$  看作微扰。非微扰的福克-普朗克方程为

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = L_{FP} \rho(x,t) \quad (2.2.2)$$

其中  $L_{FP} = -\frac{\partial}{\partial x}(ax - x^3) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,

可以作为求解福克-普朗克方程 (2.2.1) 的基本解。假定非微扰的福克-普朗克方程 (2.2.2) 的全部本征函数和本征值已经得到

$$L_{FP} u_n(x) = -\lambda_n u_n(x) \quad ,$$

$$\bar{u}_n(x) L_{FP} = -\bar{\lambda}_n \bar{u}_n(x) \quad (2.2.3)$$

其中,  $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

令  $u_n(x) = \rho(x) \bar{u}_n(x)$ , 则

$\rho(x)$  为非微扰的福克-普朗克方程 (2.2.2) 的定态解

$$\rho(x) = N \exp[-\phi(x)/D] \quad (2.2.4)$$

$$\phi_0(x) = -\int C(x) dx = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \quad .$$

为了书写方便采用狄拉克表示

$$|n\rangle = u_n(x) \quad , \quad \langle n| = \bar{u}_n(x)$$

左右矢具有正交性

$$\langle n|m \rangle = \delta_{nm}$$

由归一化要求, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx = \langle 0|0 \rangle = 1 \quad ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n(x) dx = \langle 0|n \rangle = 0 \quad , \quad (n \neq 0)$$

下面，在本征表象 (2.2.3) 中讨论福克-普朗克方程 (2.2.1) 的解。当  $t \rightarrow \infty$  时，

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(x, t) = \rho_\infty(x, t) \quad (2.2.5)$$

假设  $\rho_\infty(x, t)$  是周期为  $2\pi/\Omega$  的  $t$  的周期函数（这个假设的自洽性证明省略）。这时，

可把  $\rho_\infty(x, t)$  通过傅立叶函数展开

$$\rho_\infty(x, t) = f_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} [f_m(x) \cos(m\Omega t) + k_m(x) \sin(m\Omega t)] \quad (2.2.6)$$

将  $f_m(x)$  和  $k_m(x)$  在本征矢 (2.2.3) 上进行分解

$$f_m(x) = \sum_n f_{nm} |n\rangle, \quad k_m(x) = \sum_n k_{nm} |n\rangle$$

这时，可把  $\rho_\infty(x, t)$  写成

$$\rho_\infty(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m}(t) |n\rangle \quad (2.2.7)$$

其中， $q_{n,0} = f_{n,0}$ ，

$$q_{n,m}(t) = f_{n,m} \cos(m\Omega t) + k_{n,m} \sin(m\Omega t)。$$

将其代入福克-普朗克方程 (2.2.1)，令左右两边具有相同  $n$  和傅立叶分量的系数相等，可得到方程组

$$0 = -\lambda_n f_{n,0} + \frac{A}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu,1} \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \nu \right\rangle, \quad (m=0) \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} -\Omega f_{n,1} \sin(\Omega t) + \Omega k_{n,1} \cos(\Omega t) &= -\lambda_n [f_{n,1} \cos(\Omega t) + k_{n,1} \sin(\Omega t)] \\ &+ A \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu,0} \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \nu \right\rangle \cos(\Omega t) + \frac{A}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu,2} \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \nu \right\rangle \cos(\Omega t) \\ &+ k_{\nu,2} \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \nu \right\rangle \sin(\Omega t), \quad (m=1) \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} -m\Omega f_{n,m} \sin(m\Omega t) + m\Omega k_{n,m} \cos(m\Omega t) &= -\lambda_n [f_{n,m} \cos(m\Omega t) + k_{n,m} \sin(m\Omega t)] \\ &+ \frac{A}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} [f_{\nu,m-1} \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \nu \right\rangle + f_{\nu,m+1} \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \nu \right\rangle] \cos(m\Omega t) \\ &+ \frac{A}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} [k_{\nu,m-1} \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \nu \right\rangle + k_{\nu,m+1} \left\langle n \left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \nu \right\rangle] \sin(m\Omega t), \quad (m \geq 1) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

此式为无穷个耦合的代数方程组。对  $\rho_a(x, t)$  主要考虑  $A^0$  和  $A^1$  的项，这些项在  $A \ll 1$  时对信噪比的计算有主要贡献。相关函数的定义为

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle_{ave} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} dt \lim \int dx \int dy xy P(x, t+\tau | y, t) \rho_a(y, t)$$

对此式进行傅立叶变换，并只取正频部分的功率谱，得到

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle_{ave} e^{-i\omega\tau} d\tau = S_1(\omega) + S_2(\omega) \quad (2.2.11)$$

将输出信噪比  $R$  定义为输出总信号功率与  $\omega = \Omega$  处的单位噪声谱的平均功率之比

$$R = \frac{P_s}{S_2(\omega = \Omega)} , \quad P_s = \int_0^{\infty} S_1(\omega) d\omega \quad (2.2.12)$$

这里对信噪比的定义方式与绝热近似理论的定义方式相同。从推导的过程可以看出，它成立的条件仅为

$$A \ll 1 \quad (2.2.13)$$

而对信号频率  $\Omega$  和噪声强度  $D$  都没有限制。所以，它的适用范围比绝热近似理论要广泛。但是，应用这种方法时，必须先求解非微扰的福克-普朗克方程 (2.2.2) 的全部本征函数和本征值，而有时候往往这一步也是很困难的。因此，我们在过去的研究工作中很少采用这一方法。

## 2.3 线性化近似方法

线性化近似理论是人们在处理非线性动力学系统时常用到的理论工具之一。我们首次将线性化近似理论应用到随机共振的理论研究中来<sup>[111]</sup>。因此，在这里把它称作线性化近似方法更为恰当。

为了清楚地介绍这种方法，我们把运用它处理单模激光增益模型的步骤详细介绍如下：

考虑泵噪声与量子噪声间的关联，在单模激光增益模型中输入信号后的光强方程为<sup>[112]</sup>：

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I} I + D + \frac{2I}{1+\beta I} \xi(t) + 2\sqrt{I}\eta(t) + A \cos \Omega t \quad (2.3.1)$$

泵噪声  $\xi(t)$  和量子噪声  $\eta(t)$  的统计性质为：

$$\begin{aligned}\langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \frac{Q}{2\tau_1} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_1}\right), \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \frac{D}{2\tau_2} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_2}\right), \\ \langle \xi(t) \eta(t') \rangle &= \langle \eta(t) \xi(t') \rangle = \frac{\lambda \sqrt{DQ}}{2\tau_3} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_3}\right), \quad -1 \leq \lambda \leq 1\end{aligned}\quad (2.3.2)$$

当 (2.3.2) 式中的  $\tau_1$ 、 $\tau_2$ 、 $\tau_3$  均  $\rightarrow 0$  时, 就过渡到  $\delta$  函数关联形式:

$$\begin{aligned}\langle \xi(t) \xi(t') \rangle &= Q \delta(t-t'), \quad \langle \eta(t) \eta(t') \rangle = D \delta(t-t'), \\ \langle \xi(t) \eta(t') \rangle &= \langle \eta(t) \xi(t') \rangle = \lambda \sqrt{DQ} \delta(t-t')\end{aligned}\quad (2.3.3)$$

式中  $I$  为激光光强;  $\lambda$  为噪声关联系数;  $Q$ 、 $D$  分别为泵噪声和量子噪声的强度;  $\tau_1$  为泵噪声自关联时间,  $\tau_2$  为量子噪声自关联时间,  $\tau_3$  为两噪声间的互关联时间;

$\beta = \frac{\tilde{A}}{\Gamma}$ ,  $\tilde{A}$  和  $\Gamma$  分别为自饱和系数和增益系数;  $K$  为损失系数。

令

$$I = I_0 + \varepsilon(t) \quad (2.3.4)$$

其中  $\varepsilon(t)$  为微扰项, 将 (2.3.1) 式在确定论定态光强  $I_0 = (\Gamma - K)/\beta K$  附近线性化, 可得线性化方程为:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\gamma \varepsilon(t) + D + \frac{2I_0}{1 + \beta I_0} \xi(t) + 2\sqrt{I_0} \eta(t) + A \cos \Omega t \quad (2.3.5)$$

式中  $\gamma = 2K(\Gamma - K)/\Gamma$ ;

由 (2.3.5) 式可得:

$$\langle \varepsilon(t) \rangle = \frac{D}{\gamma} - \left( \frac{D}{\gamma} + \frac{A\gamma}{\gamma^2 + \Omega^2} \right) e^{-\gamma t} + \frac{A}{(\gamma^2 + \Omega^2)^{1/2}} \cos(\Omega t - \Theta) \quad (2.3.6)$$

$$\text{其中: } \cos \Theta = \frac{\gamma}{(\gamma^2 + \Omega^2)^{1/2}}$$

根据平均光强相关函数的定义:

$$B(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \overline{\langle I(t'+t)I(t') \rangle} \quad (2.3.7)$$

$$\text{式中 } \overline{\langle I(t'+t)I(t') \rangle} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{t'}^{t'+\frac{2\pi}{\Omega}} \langle I(t'+t)I(t') \rangle dt'$$

可得到平均光强相关函数为 (只讨论  $\gamma \neq \tau^{-1}$ ):

$$\begin{aligned} B(t) = & \frac{A^2}{2(\gamma^2 + \Omega^2)} \cos \Omega t + I_0^2 + \frac{2I_0 D}{\gamma} + \frac{D^2}{\gamma^2} \\ & - \left( \frac{2I_0^2 Q}{\gamma(1 + \beta I_0)^2 (\gamma^2 \tau_1^{-2} - 1)} + \frac{2I_0 D}{\gamma(\gamma^2 \tau_2^{-2} - 1)} + \frac{4I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{\gamma(1 + \beta I_0)(\gamma^2 \tau_3^{-2} - 1)} \right) e^{-\gamma|t|} \\ & \frac{2I_0^2 Q}{\tau_1(1 + \beta I_0)^2 (\gamma^2 - \tau_1^{-2})} e^{-\frac{|t|}{\tau_1}} + \frac{2I_0 D}{\tau_2(\gamma^2 - \tau_2^{-2})} e^{-\frac{|t|}{\tau_2}} \\ & + \frac{4I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{\tau_3(1 + \beta I_0)(\gamma^2 - \tau_3^{-2})} e^{-\frac{|t|}{\tau_3}} \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

将 (2.3.8) 式做傅立叶变换, 得到光强的功率谱为:

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) \quad (2.3.9)$$

$S_1(\omega)$  为输出信号功率谱,  $S_2(\omega)$  为输出噪声功率谱, 具体形式为:

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \frac{\pi A^2}{2(\gamma^2 + \Omega^2)} [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] \\ S_2(\omega) &= \left[ \frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)^2 (\omega^2 \tau_1^{-2} + 1)} + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)(\omega^2 \tau_3^{-2} + 1)} + \frac{4I_0 D}{\omega^2 \tau_2^{-2} + 1} \right] \frac{1}{(\gamma^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

信噪比定义为输出总信号功率与  $\omega = \Omega$  处的单位噪声谱的平均功率之比 (只取正  $\omega$  的谱):

$$R = \frac{P_s}{S_2(\omega = \Omega)} \quad (2.3.10)$$

式中  $P_s = \int_0^\infty S_1(\omega) d\omega$ 。则有

$$R = \frac{\frac{\pi A^2}{2}}{\frac{4I_0^2 Q}{(1 + \beta I_0)^2 (\tau_1^{-2} \Omega^2 + 1)} + \frac{8I_0^{3/2} \lambda \sqrt{DQ}}{(1 + \beta I_0)(\tau_3^{-2} \Omega^2 + 1)} + \frac{4I_0 D}{(\tau_2^{-2} \Omega^2 + 1)}} \quad (2.3.11)$$

从推导的过程可以看出,线性化近似方法对信号、噪声没有任何限制条件。与前面两种理论相比,这是它最大的优点,也是我们将线性化近似理论引入随机共振研究的目的所在。我们自己的部分工作就是以线性化近似方法为基础,在单模激光系统中引入了相关联的加性噪声和乘性噪声。

## 2.4 随机共振现象的应用

随机共振理论的成功就在于它在各个自然科学领域的成功应用。

随机共振现象的发现和证实就是它在古代气候学中的第一个应用。这个内容在前面已经有了详细的介绍,这里不再赘述。

随机共振现象在电子通信领域中也得到了应用。电路中的各种干扰和噪声严重地影响了有用信号的传送。对于信号检测,尤其是强噪声背景下的微弱信号检测,随机共振极大地提高了人们与噪声作斗争的能力。它为电路设计和信号处理都提供了新的思路和方法<sup>[113]</sup>。

随机共振现象也被应用到机械工程中。由于某些微弱信号往往是某些机械故障的前兆,所以尽可能早地准确的捕捉潜在的恶性故障的前兆,对于在关键设备中避免这些灾难的发生是非常重要的。因而,在机械故障诊断领域,怎样从强噪声背景中检测这些微弱信号一直是倍受关注的重要问题。1995年,Asdi. A 等人<sup>[114]</sup>提出应用随机共振来检测机械故障。

随机共振现象在地质研究中也得到广泛应用。2001年,中国地震局地质研究所把随机共振应用于地震预报<sup>[115]</sup>。对于强震的时间和震级的预报的可靠性达到百分之八十以上。因此,随机共振将在减轻强震灾害方面发挥重要的作用。

在过去的几年中,随机共振开始进入到生物学和医学领域,用于揭示生物体是如何利用噪声增强弱信号在神经系统中的传输问题。起初,在单个的神经元中发现的随机共振现象,后来 Moss. F 等人<sup>[116]</sup>对神经元网络作了大量的研究。他们首先成功地利用随机共振提高了老鼠脑组织中弱信号的传输率。他们把由信号和噪声组成的弱电场加到老鼠的海马区(一个对记忆功能起关键作用的脑区)的切片上,通过探测输出信噪比和噪声强度的关系,发现在一定的噪声强度下,输出信噪比达到一个最大值。因此,对于耳聋病人来说,一个原来不能激发神经元的弱信号,经过输入噪声出现随机共振后,就可以激发神经元,使神经元可以分辨出信号。可见,随机共振现象在生物学和医学领域将有巨大的研究应用价值。

## 2.5 小结

本章简要地介绍了三种随机共振的理论研究方法，分别为绝热近似理论、微扰理论和线性化近似方法，以及随机共振在各个领域中的应用。这三种理论都有自己的适用性和局限性。因此，根据这三种理论各自的特点，我们将在后面不同的章节中选用适当的方法来进行自己的研究工作。

### 3 锯齿双稳系统中的随机共振现象

二十年前, Benzi<sup>[59]</sup>和 Nicolis<sup>[117]</sup>分别独立发现了随机共振现象。随后, Fauve<sup>[85]</sup>和 McNamara<sup>[83]</sup>分别在实验中实现了这一现象。以此为起点, 随机共振现象开始在自然科学许多领域引起人们的关注。到目前为止, 随机共振现象已经在气候学、化学、激光物理、神经学、生物学、固态物理等学科中被实验所观察到<sup>[90]</sup>。

现在, 关于双稳系统的随机共振理论已经有了很大的发展。McNamara 等人<sup>[83,94]</sup>以概率转移速率为基础, 运用绝热近似方法详细从理论和实验上研究了双稳系统的随机共振现象, 定义了刻画随机共振量化特征的信噪比, 并且在理论上导出了信噪比的数学表达式。这为人们定量描述随机共振现象提供了一个有效的量度方法。Hu 等人<sup>[106]</sup>应用本征函数微扰展开的方法, 处理双稳系统的随机共振问题。他们的工作得出了信噪比更精确的数学表达结果。为了从其它的角度研究随机共振现象, 人们又提出了以停留时间分布为基础的研究方法。Zhou 等人<sup>[118]</sup>利用这种方法研究了乘性半周期力驱动系统, 得到了停留时间分布的最大值与噪声间的关系。Gamaitoni 等人<sup>[119]</sup>提出以停留时间分布峰值以下的面积作为随机共振的量度, 并且发现这个面积与噪声或驱动频率构成的函数存在一个极大值。在这一阶段, 人们认为, 双稳非线性系统、噪声和信号是出现随机共振必不可少的条件。Gamaitoni、Hanggi、Jung 和 Marchesoni<sup>[90]</sup>对这一阶段作了全面的总结。最近, 人们发现上述三个条件并非缺一不可的, 在单稳系统中可以出现随机共振现象<sup>[109]</sup>, 就是在线性系统中也可以出现随机共振现象, 但要求在乘性色噪声驱动的条件下。这种情况已为实验所证实<sup>[120-125]</sup>。

上面的工作都只研究了包含一个噪声项的情况。然而在一般实际情况下, 许多随机系统往往由多个噪声来驱动。这些噪声之间还会以各种形式互相关联, Fulinski 等人<sup>[43,48,126]</sup>已对此作了大量的研究。Tessone<sup>[60]</sup>和 Jia<sup>[62]</sup> 分别应用绝热近似的方法研究了由相关乘性噪声和加性噪声同时驱动的双稳系统, 都发现了明显的的随机共振现象。Tessone<sup>[60]</sup>进一步研究了两噪声间周期性地关联的情况, 利用平均第一通过时间, 由数值计算得到概率转移速率和信噪比。Jia<sup>[62]</sup>假设两噪声间关联为常数, 运用最陡下降法求出 Kramers 速率, 给出了信噪比的近似解析表达结果。但是对于乘性噪声和加性噪声同时驱动的双稳系统, 在运用绝热近似的条件下还没有文献给出解析表达结果。

本章运用绝热近似方法, 研究了由相关乘性噪声和加性噪声驱动的双稳锯齿系统。由于我们选取了分段线性双稳势模型, 概率跃迁速率在绝热近似条件下有精确的解析表达式, 从而可以求得输出信号功率和信噪比的解析表达结果。

### 3.1 锯齿双稳势阱模型

考虑由相关加性噪声和乘性噪声驱动的一维双稳系统。我们用一个弱的外加余弦信号调制其双稳势。这里的加性噪声和乘性噪声均为高斯白噪声, 且两噪声间以白噪声的形式关联。模型的朗之万方程为

$$\dot{x} = -U'(x) + A(t) + g(x)\xi(t) + \eta(t) \quad (3.1)$$

这里  $U(x)$  为双稳锯齿势函数, 具体形式为

$$U(x) = \begin{cases} -2bx/L - 2b, & (-\infty < x \leq -L/2) \\ 2bx/L, & (-L/2 < x \leq 0) \\ -2bx/L, & (0 < x \leq L/2) \\ 2bx/L - 2b, & (L/2 < x \leq \infty) \end{cases} \quad (3.2)$$

式中  $b$  为势垒的高度,  $L$  为势垒的宽度。

方程 (3.1) 中  $A(t) = A_0 \cos \Omega t$ , 为余弦调制信号,  $A_0$  和  $\Omega$  分别为信号的振幅和频率。乘性系数  $g(x)$  为

$$g(x) = \begin{cases} c, & (-\infty < x \leq -L/2, 0 < x \leq L/2) \\ -c, & (-L/2 < x \leq 0, L/2 < x \leq \infty) \end{cases} \quad (3.3)$$

其中  $c$  为常数。

方程 (3.1) 中噪声  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  的统计性质遵守

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0,$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2Q\delta(t-t') \quad (3.4)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (3.5)$$

$$\langle \xi(t)\eta(t') \rangle = \langle \eta(t)\xi(t') \rangle = 2\lambda\sqrt{QD}\delta(t-t') \quad (3.6)$$

式(3.4)和式(3.5)中的 $Q$ 和 $D$ 分别为乘性噪声和加性噪声的强度,  $\lambda$ 为加性噪声和乘性噪声之间的关联强度, 满足 $|\lambda| \leq 1$ 。

### 3.2 应用绝热近似理论的计算

上面是我们研究的具体模型, 下面简要介绍我们的研究步骤。第一步, 我们假设 $W_{\pm}(t)$ 可用泰勒公式展开为<sup>[94]</sup>

$$W_{\pm}(t) = \frac{1}{2}[W_0 \mp \alpha_1 A_0 \cos \Omega t + O(A_0^2) + \dots] \quad (3.7)$$

这里的 $W_+(t)$ 和 $W_-(t)$ 分别为从 $x_+$ 到 $x_-$ 和从 $x_-$ 到 $x_+$ 的概率转移速率,  $x_+$ 和 $x_-$ 为双稳态的两确定论稳定定态值,  $W_0$ 为无调制信号时的概率转移速率,  $\alpha_1$ 为在泰勒展开点的一阶导数值。

第二步, 当 $D \ll \Delta U(x)$  (势垒高度) 时, 利用文献<sup>[33-35]</sup>的结果求出平均第一通过时间 $T(R, \lambda, A(t)) = 1/W(t)$ , 从而求得 $W_0$ 和 $\alpha_1$ ,

$$\frac{1}{2}W_0 = W(t)|_{A=0} = [T(R, \lambda, A)|_{A=0}]^{-1} \equiv T_0^{-1} \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{2}\alpha_1 = T_0^{-2} \left( \frac{\partial T}{\partial A} \right) \bigg|_{A=0} \quad (3.9)$$

最后一步, 在绝热近似下, 系统的功率谱可表示为<sup>[94]</sup>:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= S_S(\omega) + S_N(\omega) \\ &= \frac{\pi |x_+ x_-| \alpha_1^2 A_0^2}{2(W_0^2 + \Omega^2)} \delta(\omega - \Omega) + \left[ 1 - \frac{\alpha_1^2 A_0^2}{2(W_0^2 + \Omega^2)} \right] \frac{2|x_+ x_-| W_0}{W_0^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

式中 $S_S(\omega)$ 表示 $\delta$ 函数形式的输出信号功率谱,  $S_N(\omega)$ 表示具有罗伦兹形式的连续分布输出噪声功率谱。

于是, 信噪比表示为<sup>[62]</sup>

$$SNR = \frac{P_s}{S_N(\omega = \Omega)} , \quad P_s = \int_0^\infty S_S(\omega) d\omega \quad (3.11)$$

值得说明的是，概率转移速率的表达式（3.7）必须在绝热近似条件下才是有效的。因此本文中所有参数的取值均限制在绝热近似条件下。下面将由我们具体的模型求出  $W_0$ 、 $\alpha_1$  和  $SNR$  的解析式。

根据势函数式（3.2）可知， $x_{\pm} = \pm L/2$  为方程（3.1）的两个确定论稳定定态值，此时  $W_{\pm}(t)$  分别为从  $-L/2$  到  $L/2$  和  $L/2$  到  $-L/2$  的概率转移速率。

与朗之万方程（3.1）对应的福克-普朗克方程为<sup>[38]</sup>

$$\partial_t p(x, t) = -\partial_x [-U'(x) + A_0 \cos \Omega t + G(x)G'(x)]p(x, t) + \partial_{xx} G^2(x)p(x, t) \quad (3.2)$$

式中  $G(x) = \sqrt{D}(Rg^2(x) + 2\lambda\sqrt{R}g(x) + 1)^{1/2}$ ， $R = Q/D$ 。

方程（3.12）描述的系统的第一通过时间  $T(R, \lambda, A(t))$ <sup>[53,127]</sup> 为

$$T(R, \lambda, A) = D^{-1} \int_{-L/2}^{L/2} dx H(x) \exp\left[\frac{\Phi(x)}{D}\right] \int_{-\infty}^x dy H(y) \exp\left[-\frac{\Phi(y)}{D}\right] \quad (3.13)$$

其中  $H(x) = [Rg^2(x) + 2\lambda\sqrt{R}g(x) + 1]^{-1/2}$ ， $(3.14)$

$$\Phi(x) = - \int_{-\infty}^x H^2(y) [-U'(y) + A_0 \cos \Omega t] dy \quad (3.15)$$

将具体模型代入式（3.13），求得

$$\begin{aligned} T(R, \lambda, A) = & \frac{D}{H_+ H_- K_+ K_-} [\exp\left(\frac{LK_+ H_-^2}{2D}\right) - 1] \exp\left(\frac{LK_- H_+^2}{2D}\right) + \\ & \frac{D}{H_+^2 K_-^2} [\exp\left(\frac{LK_- H_+^2}{2D}\right) - 1] [1 - \exp\left(\frac{LK_+ H_-^2}{2D}\right)] + \\ & \frac{D}{H_-^2 K_+^2} [\exp\left(\frac{LK_+ H_-^2}{2D}\right) - 1] - \frac{1}{2K_+} - \frac{1}{2K_-} \quad (3.16) \end{aligned}$$

式中  $H_+ = (c^2 R + 2\lambda c\sqrt{R} + 1)^{-1/2}$ ， $H_- = (c^2 R - 2\lambda c\sqrt{R} + 1)^{-1/2}$ ，

$K_+ = 2b/L + A(t) = 2b/L + A_0 \cos \Omega t$ ，

$K_- = -2b/L + A(t) = -2b/L + A_0 \cos \Omega t$ 。

容易求得

$$T_0 \equiv T(R, \lambda, A) \Big|_{A=0} = \frac{L^2 D}{4b^2} \left\{ \frac{1}{H_+ H_-} [1 - \exp(-\frac{bH_+^2}{D})] \exp(-\frac{bH_-^2}{D}) + \right. \\ \left. \frac{1}{H_+^2} [\exp(-\frac{bH_+^2}{D}) - 1] [1 - \exp(-\frac{bH_-^2}{D})] + \frac{1}{H_-^2} [\exp(-\frac{bH_-^2}{D}) - 1] \right\} \quad (3.17)$$

由式 (3.8) 得出  $W_0 = 2/T_0$ 。由式 (3.9) 得到

$$\frac{1}{2} \alpha_1 = \frac{1}{T_0^2} \left( \frac{\partial T}{\partial A} \right) \Big|_{A=0} = \frac{1}{T_0^2} \left\{ \frac{-L^3 H_-}{8b^2 H_+} \exp(\sigma_-) \exp(-\sigma_+) + \frac{-L^3 H_+}{8b^2 H_-} [\exp(\sigma_-) - 1] \exp(-\sigma_+) + \right. \\ \frac{DL^3}{4b^3 H_+^2} [\exp(-\sigma_+) - 1] [1 - \exp(\sigma_-)] + \frac{L^3}{8b^2} \exp(-\sigma_+) [1 - \exp(\sigma_-)] + \\ \left. \frac{-L^3 H_-^2}{8b^2 H_+^2} [\exp(-\sigma_+) - 1] \exp(\sigma_-) + \frac{-L^3 D}{4b^3 H_-^2} [\exp(\sigma_-) - 1] + \frac{L^3}{8b^3} \exp(\sigma_-) + \frac{L^3}{4b^2} \right\} \quad (3.18)$$

其中  $\sigma_+ = \frac{bH_+^2}{D}$ ,  $\sigma_- = \frac{bH_-^2}{D}$ 。至此,  $W_0$  和  $\alpha_1$  的解析结果均已求得。由式 (3.11) 得到信号功率和信噪比的解析表达式为

$$P_s = \int_0^\infty S_s(\omega) d\omega = \frac{\pi L^2 \alpha_1^2 A_0^2}{8(W_0^2 + \Omega^2)} \quad (3.19)$$

$$SNR = \frac{P_s}{S_N(\omega = \Omega)} = \frac{P_s}{\left[ 1 - \frac{\alpha_1^2 A_0^2}{2(W_0^2 + \Omega^2)} \right] \frac{L^2 \alpha_1^2}{2(W_0^2 + \Omega^2)}} \quad (3.20)$$

### 3.3 噪声、信号和双稳势阱结构对信噪比的影响

根据我们的研究模型, 信噪比会受到噪声以及它们的关联、双稳势的结构和信号三个方面的影响。

(1) 加性噪声强度  $D$ 、乘性噪声强度  $Q$  和关联强度  $\lambda$  对信噪比的影响

图 3.1 和图 3.2 绘出了信噪比随着加性噪声强度  $D$  的变化曲线。当噪声关联强度  $\lambda > 0$  时, 曲线出现极小值 (即“抑制”) 和单调下降两种情况, 如图 3.1 所示, 并且  $\lambda$  增大时, 抑制更强。当噪声关联强度  $\lambda \leq 0$  时, 曲线出现极大值 (即“随机共振”)

和单调增加两种情况, 如图 3.2 所示。

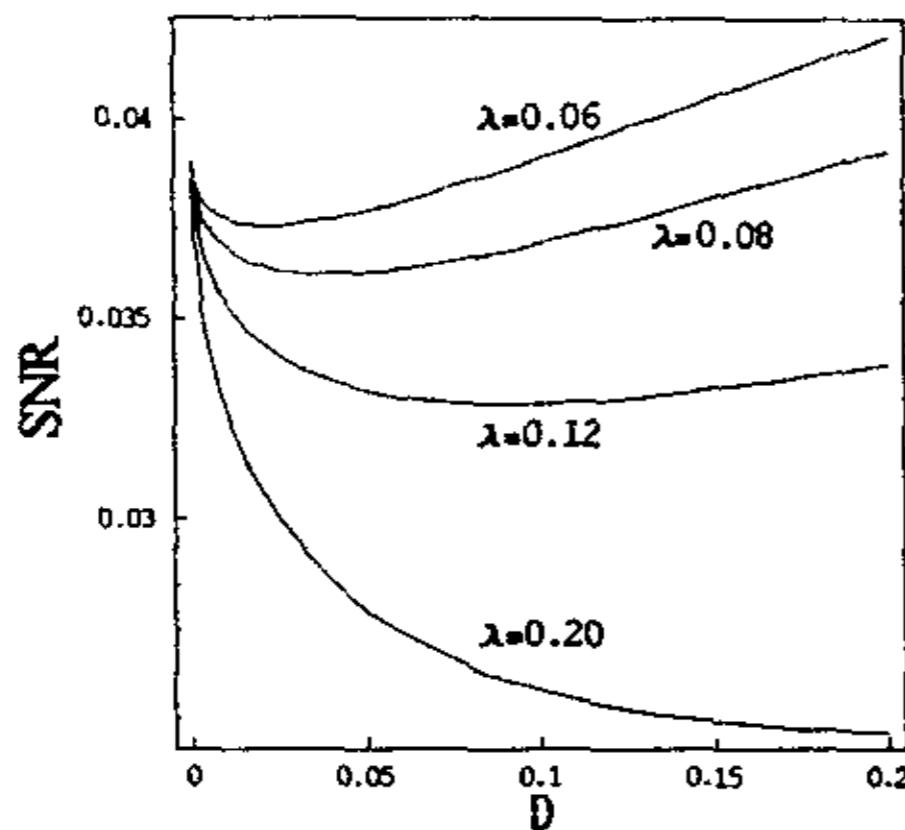


图 3.1 信噪比  $SNR$  随着加性噪声强度  $D$  的变化曲线, 其它参数值为:  
 $L = 1, b = 2, c = 32, Q = 0.001, A_0 = 0.1, \Omega = 0.001$ 。

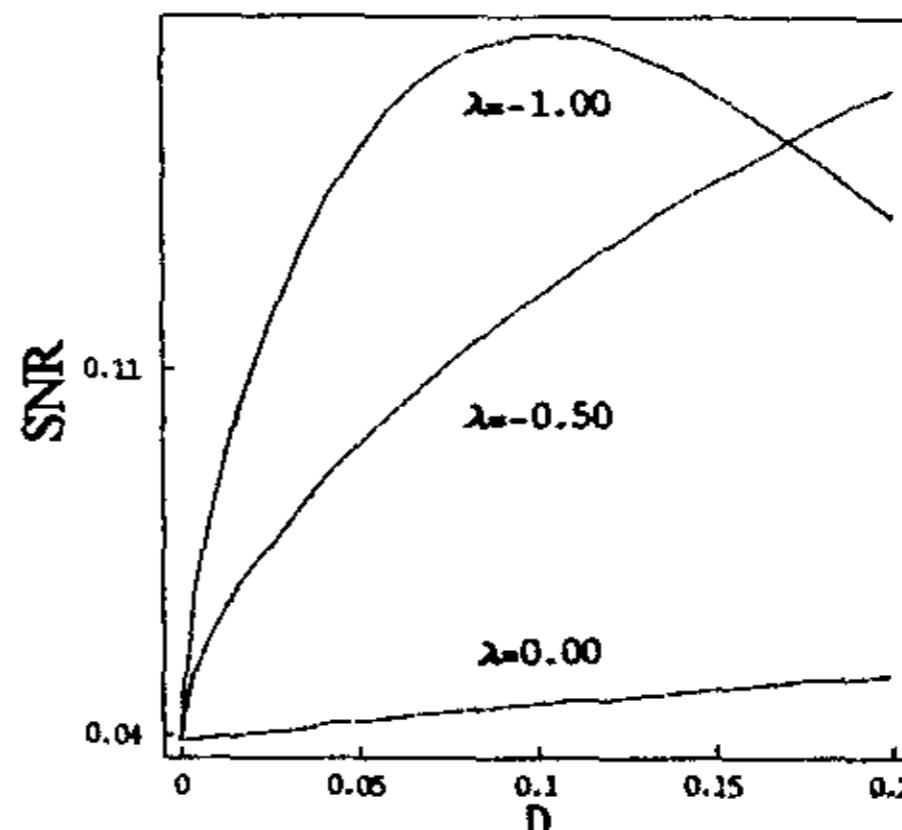


图 3.2 信噪比  $SNR$  随着加性噪声强度  $D$  的变化曲线, 其它参数值为:  
 $L = 1, b = 2, c = 32, Q = 0.001, A_0 = 0.1, \Omega = 0.001$ 。

如何理解信噪比随着加性噪声强度  $D$  的变化曲线会出现共振和抑制呢? 我们认为是由于概率转移速率  $W_{\pm}$  会出现激活共振和抑制两种情况, 而概率转移速率  $W_{\pm}$  是确定信噪比的关键量, 因此信噪比也相应会出现随机共振和抑制的情况, 而概率转移速率  $W_{\pm}$  的激活共振和抑制则来自于噪声间的关联<sup>[127]</sup>。

当以噪声关联强度  $\lambda$  为参数, 信噪比随着乘性噪声强度  $Q$  的曲线出现典型的随机共振, 且  $\lambda$  从  $-0.9$  变化到  $0.5$  时, 峰值逐渐降低变宽, 极值位置向  $Q$  增大的方向移动, 如图 3.3 所示。值得强调的是: 在  $\lambda > 0, \lambda = 0$  和  $\lambda < 0$ , 信噪比随着乘性噪声强度  $Q$  的曲线均出现随机共振, 但是在信噪比随着加性噪声强度  $D$  的曲线中, 仅当  $\lambda < 0$  时才出现随机共振。因此, 乘性噪声和加性噪声对随机共振的影响是非常不同的。这是我们在物理系统引入乘性噪声的原因之一。

以加性噪声强度  $D$  和乘性噪声强度  $Q$  为参数, 信噪比随着噪声关联强度  $\lambda$  的变化曲线均出现单峰和单调下降两种情况, 如图 3.4 和图 3.5 所示。它们的极大值都随着参数  $D$  和  $Q$  的增大而增大。但是, 两者极值位置的变化却相反: 以加性噪声强度  $D$  为参数的变化曲线的极值位置随  $D$  取值增大向右移动, 而以乘性噪声强度  $Q$  为参数

的曲线的极值位置随  $Q$  增大向左移动。

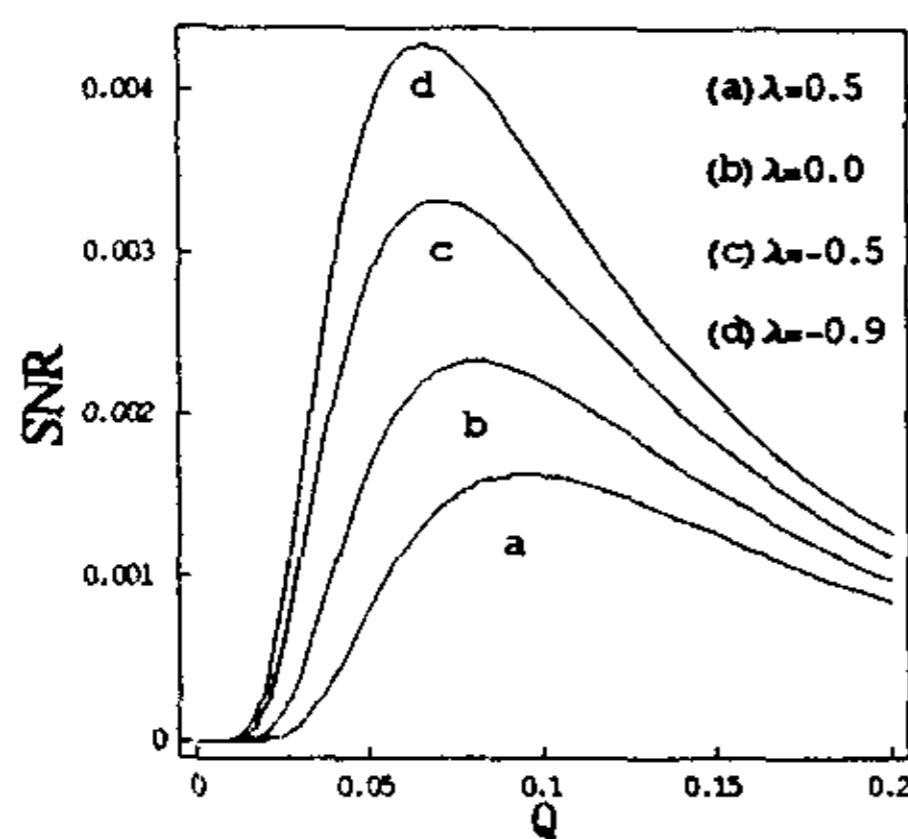


图 3.3 信噪比  $SNR$  随着乘性噪声强度  $Q$  的变化曲线, 其它参数值为:  
 $L = 1, b = 5, c = 8, D = 0.08, A_0 = 0.005, \Omega = 0.001$ 。

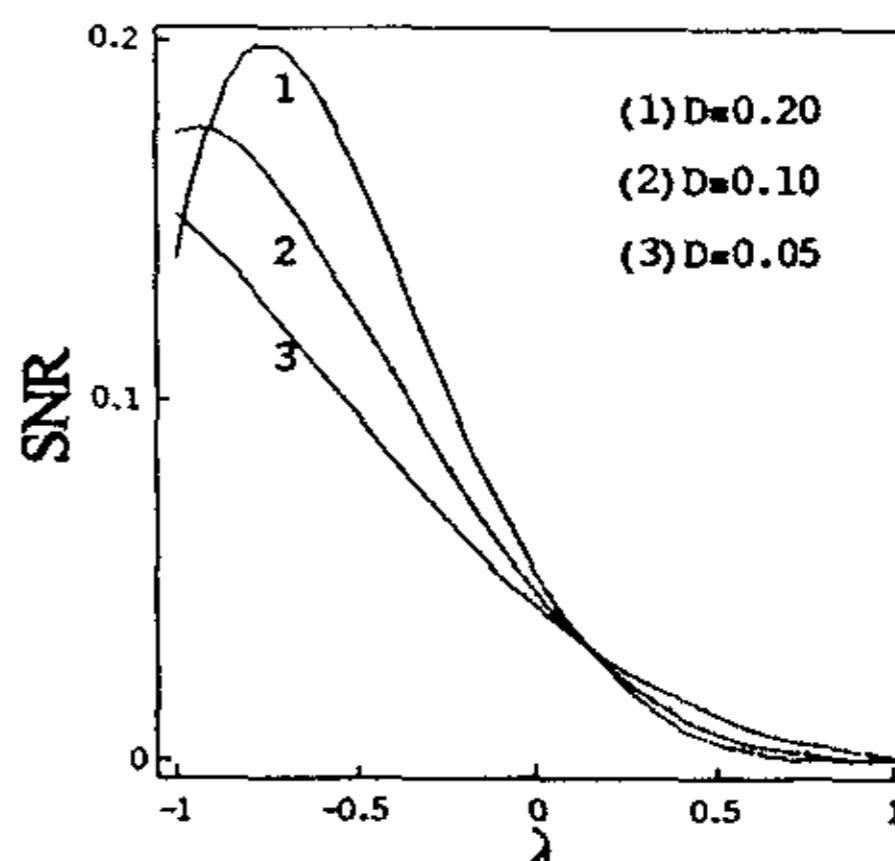


图 3.4 信噪比  $SNR$  随着噪声间关联强度  $\lambda$  的变化曲线, 其它参数值为:  
 $L = 1, b = 2, c = 32, Q = 0.001, A_0 = 0.1, \Omega = 0.001$ 。

## (2) 势垒高度 $b$ 和势垒宽度 $L$ 对信噪比的影响

以加性噪声强度  $D$  为参数, 信噪比随着势垒高度  $b$  的变化曲线出现抑制。当参数  $D$  增大时, 极小值上移, 极值点的位置稍微向右移动。以乘性噪声强度  $Q$  为参数, 作出信噪比随着势垒高度  $b$  的变化曲线, 如图 (3.6) 所示。当参数  $Q$  取值变化时, 信噪比随着势垒高度  $b$  的变化曲线出现单调下降、双极值和抑制三种情况。而且当噪声关联强度  $\lambda > 0$ 、 $\lambda = 0$  和  $\lambda < 0$  时, 均出现这三种情况。因此我们认为这种现象不是来源于噪声间的关联, 而是由于乘性噪声系数的特殊形式。若固定乘性噪声系数为一常数, 即等价于模型中只有一个加性噪声, 就回到上述以加性噪声强度  $D$  为参数的情况。

为了文章的简洁性, 我们略去信噪比随着其它参数变化时的曲线。以加性噪声强度  $D$  为参数, 作出信噪比随着势垒宽度  $L$  的变化曲线, 发现它们均单调下降, 这是由于势垒变宽, 导致概率转移速率减小, 信噪比下降, 且当加性噪声强度  $D$  增大时曲线上移。这是合理的, 因为在同样的势垒宽度  $L$  下, 加性噪声强度  $D$  越大概率转垒宽度  $L$  的增大均单调减小。

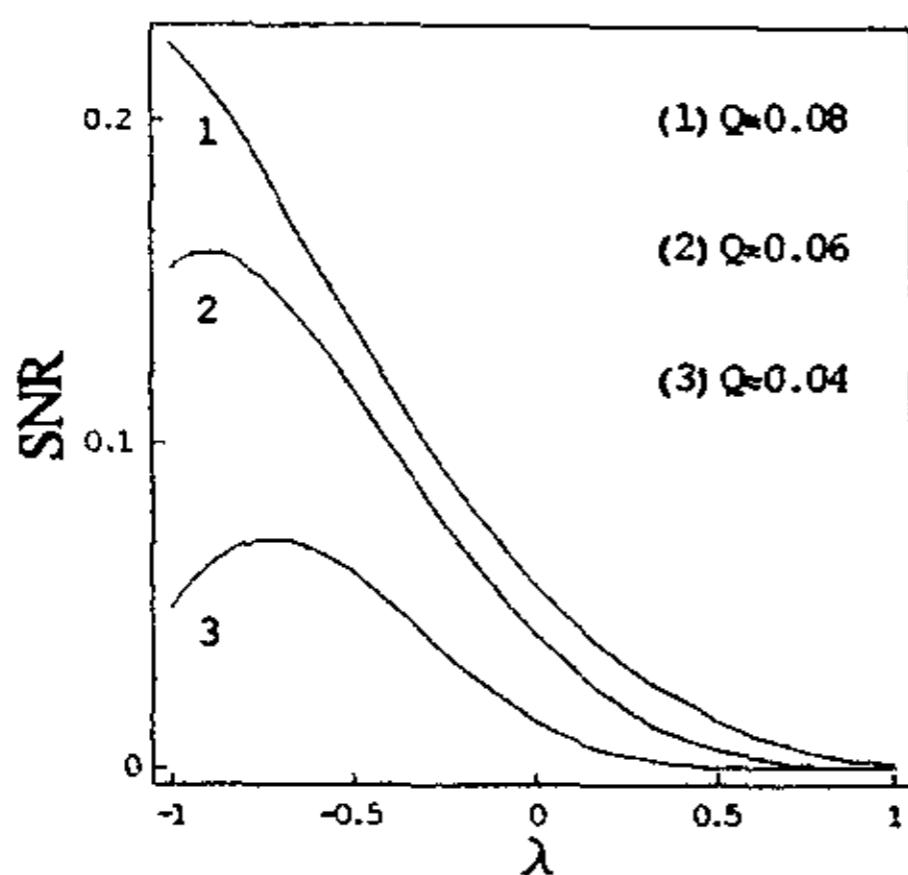


图 3.5 信噪比  $SNR$  随着噪声间关联强度  $\lambda$  的变化曲线, 其它参数值为:  
 $L = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 4$ ,  $D = 0.001$ ,  
 $A_0 = 0.1$ ,  $\Omega = 0.001$ 。

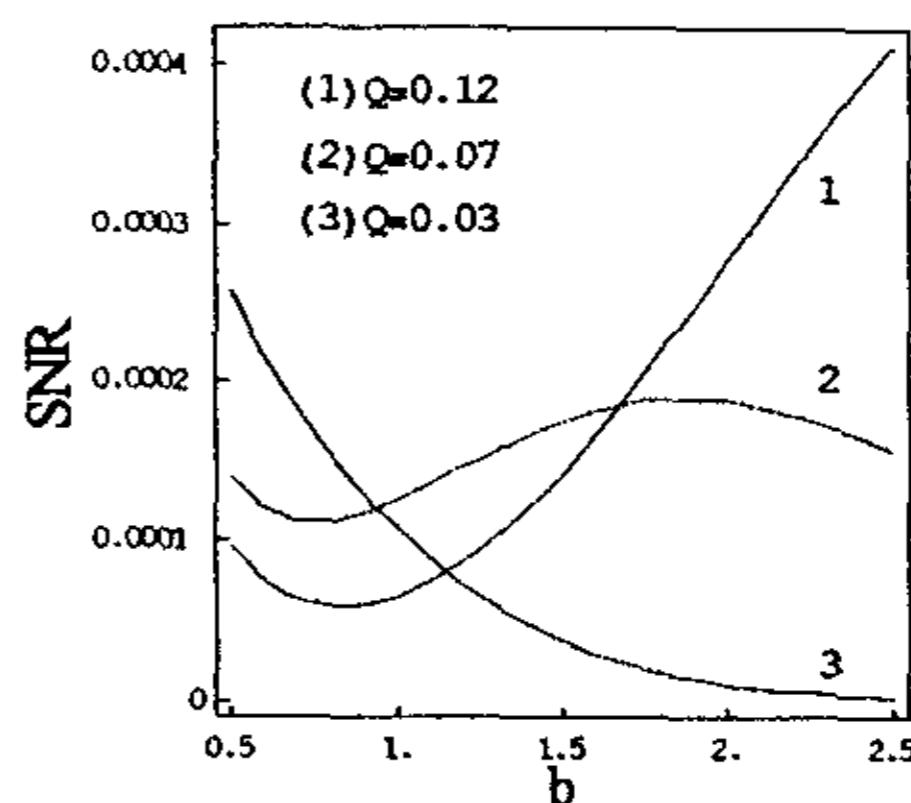


图 3.6 信噪比  $SNR$  随着噪声间关联强度  $b$  的变化曲线, 其它参数值为:  
 $L = 1$ ,  $c = 3.5$ ,  $D = 0.05$ ,  
 $\lambda = -0.5$ ,  $A_0 = 0.005$ ,  $\Omega = 0.001$ 。

### (3) 信号幅值 $A_0$ 和频率 $\Omega$ 对信噪比的影响

以加性噪声强度  $D$  为参数, 信噪比随着信号幅值  $A_0$  增加的曲线均单调上升, 且加性噪声强度  $D$  增大时曲线上移。当以信号频率  $\Omega$  为参数时, 分析信噪比随着乘性噪声强度  $Q$  的变化曲线。当  $\Omega$  取值变化时, 信噪比随着信号频率  $\Omega$  几乎没有变化; 对于加性噪声强度  $D$ , 信噪比随它的变化曲线也有相同的结论。这是在绝热近似条件下我们所期望的结果, 也显示了我们推导的正确性。

## 3.4 小结

在研究随机共振的许多文献中, 双稳模型是人们选用的最多也最典型的非线性模型。本章工作的创新之处在于, 引入驱动系统的噪声是互相关联的加性和乘性噪声, 导出了信噪比的解析表达式, 全面而详细地分析了噪声的参数、信号的参数和双稳态结构的参数对随机共振的信噪比的影响。本章内容已发表在《中国物理快报》上。

## 4 双稳系统中的多重随机共振现象

自从 Benzi 等人<sup>[59]</sup>和 Nicolis 等人<sup>[117]</sup>分别独立发现了随机共振现象以来,这一现象在许多自然科学领域引起了人们极大的关注。此后,随机共振理论逐步发展和完善。McNamara 等人<sup>[94]</sup>以概率转移速率为基础,运用绝热近似方法详细研究了双稳系统的随机共振现象。随后, Hu 等人<sup>[106]</sup>应用本征函数微扰展开的方法,得出了信噪比更精确的数学表达结果。Gamaitoni 等人<sup>[119]</sup>提出了应用停留时间分布研究随机共振的方法。这一阶段研究的随机共振都是单峰的情况,即系统的信噪比随着噪声强度的变化曲线只出现一个峰值。在这些工作中,人们的注意力似乎都放在探讨什么样的系统中可以出现随机共振现象,而忽略了对随机共振本身的共振形式的关注和研究。因此,一直到 1997 年,几乎没有文献发现和研究过随机共振系统的信噪比随着噪声强度的变化曲线出现多个峰值的情况,即多重随机共振现象。

1997 年, Vilar 等人<sup>[93]</sup>第一次发现了多极随机共振现象。他们利用数值计算的方法,研究了四个不同的随机系统,作出了信噪比随着加法噪声强度的对数值的曲线。从这些曲线可以看到,信噪比随着加法噪声强度对数值的变化出现多个极大值,甚至周期性地出现极大值。

Vilar 等人研究的模型中都只包含一个噪声项的情况,而且他们的工作中没有给出信噪比的解析表达结果。然而在一般实际情况下,许多随机系统往往由多个噪声来驱动。这些噪声之间还会以各种形式互相关联, Fulinski 等人<sup>[43,48,126]</sup>已对此作了大量的研究。另外,他们是根据系统的对称性和守恒律,利用标度参数方法来分析随机共振系统的信噪比与噪声强度之间的关系<sup>[93,128]</sup>。本文运用绝热近似方法,研究了由相关乘法噪声和加法噪声驱动的双稳锯齿系统中的随机共振现象,得到了信噪比的解析表达结果。从信噪比的解析表达结果出发,我们在信噪比随着噪声关联强度的曲线中也观察到了多重随机共振现象,并且还发现信噪比随着加法噪声强度和乘法噪声的变化时,既出现了随机共振也出现了抑制。

### 4.1 无限深双稳势阱模型

考虑由相关加法噪声和乘法噪声驱动的一维双稳系统。我们用一个弱的外加余弦信号调制其双稳势。这里的加法噪声和乘法噪声均为高斯白噪声,且两噪声间以

白噪声的形式关联。模型的朗之万方程为

$$\dot{x} = -U'(x) + A(t) + g(x)\xi(t) + \eta(t) \quad (4.1)$$

这里  $U(x)$  为双稳锯齿势函数, 具体形式为

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & (-\infty < x < -L) \\ bx/L, & (-L \leq x < 0) \\ -bx/L, & (0 \leq x \leq L) \\ +\infty, & (L < x \leq +\infty) \end{cases} \quad (4.2)$$

式中  $b$  为势垒的高度,  $L$  为势垒的宽度。

方程 (4.1) 中  $A(t) = A_0 \cos \Omega t$ , 为余弦调制信号,  $A_0$  和  $\Omega$  分别为信号的振幅和频率。乘法系数  $g(x)$  为

$$g(x) = \begin{cases} +c, & (-L \leq x < 0) \\ -c, & (0 \leq x \leq L) \end{cases} \quad (4.3)$$

其中  $c$  为正常数。

方程 (4.1) 中噪声  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  的统计性质遵守

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0 \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2Q\delta(t-t') \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (4.5)$$

$$\langle \xi(t)\eta(t') \rangle = \langle \eta(t)\xi(t') \rangle = 2\lambda\sqrt{QD}\delta(t-t') \quad (4.6)$$

式 (4.4) 和式 (4.5) 中的  $Q$  和  $D$  分别为乘法噪声和加法噪声的强度,  $\lambda$  为加法噪声和乘法噪声之间的关联强度, 满足  $|\lambda| \leq 1$ 。

## 4.2 系统输出信噪比的计算

上一节是我们研究的具体模型。为了能够清晰地叙述理论推导过程, 我们分两个步骤来导出系统信噪比的解析表达式。第一步, 我们假设  $W_{\pm}(t)$  可用泰勒公式展开

为<sup>[94]</sup>

$$W_{\pm}(t) = \frac{1}{2}[W_0 \mp \alpha_1 A_0 \cos \Omega t + O(A_0^2) + \dots] \quad (4.7)$$

这里的 $W_+(t)$ 和 $W_-(t)$ 分别为从 $x_+$ 到 $x_-$ 和从 $x_-$ 到 $x_+$ 的概率转移速率， $x_+$ 和 $x_-$ 为双稳态的两确定论稳定定态值， $W_0$ 为无调制信号时的概率转移速率， $\alpha_1$ 为 $W_{\pm}(t)$ 在泰勒展开点的一阶导数值。

根据势函数式(4.2)可知， $x_{\pm} = \pm L$ 为方程(4.1)的两个确定论稳定定态值，此时 $W_{\pm}(t)$ 分别为从 $-L$ 到 $L$ 和从 $L$ 到 $-L$ 的概率转移速率。与朗之万方程(4.1)对应的福克-普朗克方程为<sup>[21]</sup>

$$\partial_t p(x, t) = -\partial_x [-U'(x) + A_0 \cos \Omega t + G(x)G'(x)]p(x, t) + \partial_{xx} G^2(x)p(x, t) \quad (4.8)$$

式中 $G(x) = \sqrt{D}(Rg^2(x) + 2\lambda\sqrt{R}g(x) + 1)^{1/2}$ ， $R = Q/D$ 。

方程(4.8)描述的系统的第一通过时间 $T(R, \lambda, A(t))$ 为<sup>[53, 127]</sup>

$$T(R, \lambda, A) = D^{-1} \int_{-L}^L dx H(x) \exp\left[-\frac{\Phi(x)}{D}\right] \int_{-\infty}^x dy H(y) \exp\left[-\frac{\Phi(y)}{D}\right] \quad (4.9)$$

$$\text{其中 } H(x) = [Rg^2(x) + 2\lambda\sqrt{R}g(x) + 1]^{-1/2} \quad (4.10)$$

$$\Phi(x) = - \int_{-\infty}^x H^2(y) [-U'(y) + A_0 \cos \Omega y] dy \quad (4.11)$$

将具体模型代入式(4.9)，求得

$$\begin{aligned} T(R, \lambda, A) = & \frac{D}{H_+^2 K_+^2} [\exp\left(\frac{LH_+^2 K_+}{D}\right) - 1] + \frac{D}{H_-^2 K_-^2} [\exp\left(\frac{LH_-^2 K_-}{D}\right) - 1] + \\ & \frac{-H_-}{H_+ K_+} \frac{D}{H_-^2 K_- - H_+^2 K_+} [\exp\left(\frac{L}{D}(H_-^2 K_- - H_+^2 K_+)\right) - 1] + \\ & \frac{D}{H_+ H_- K_+ K_-} \exp\left(\frac{LH_+^2 K_+}{D}\right) [\exp\left(\frac{LH_-^2 K_-}{D}\right) - 1] - \frac{1}{K_+} - \frac{1}{K_-} \end{aligned} \quad (4.12)$$

式中 $H_+ = (c^2 R + 2\lambda c\sqrt{R} + 1)^{-1/2}$ ， $H_- = (c^2 R - 2\lambda c\sqrt{R} + 1)^{-1/2}$ ，

$K_+ = b/L + A(t) = b/L + A_0 \cos \Omega t$ ，

$$K_- = -b/L + A(t) = -b/L + A_0 \cos \Omega t.$$

式(4.12)给出了平均第一通过时间的解析表达结果。当  $D \ll \Delta U(x)$  (势垒高度)时, 利用文献[53,62,127]的结果, 概率转移速率为平均第一通过时间的倒数, 即  $W(t) = 1/T(R, \lambda, A(t))$ , 由概率转移速率的表达式(4.7)可得  $W_0$  和  $\alpha_1$ , 即

$$\frac{1}{2}W_0 = W(t)|_{A=0} = [T(R, \lambda, A)|_{A=0}]^{-1} \equiv T_0^{-1} \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{2}\alpha_1 = T_0^{-2} \left( \frac{\partial T}{\partial A} \right) \Big|_{A=0} \quad (4.14)$$

根据式(4.12)容易求得

$$\begin{aligned} T_0 \equiv T(R, \lambda, A)|_{A=0} = & \frac{L^2 D}{H_+^2 b^2} [\exp(\frac{bH_+^2}{D}) - 1] + \frac{L^2 D}{H_-^2 b^2} [\exp(\frac{-bH_-^2}{D}) - 1] + \\ & \frac{DH_- L^2}{H_+ (H_+^2 + H_-^2) b^2} [\exp(\frac{-b}{D} (H_+^2 + H_-^2)) - 1] + \\ & \frac{-DL^2}{H_+ H_- b^2} \exp(\frac{bH_+^2}{D}) [\exp(\frac{-bH_-^2}{D}) - 1] \end{aligned} \quad (4.15)$$

由式(4.13)得出  $W_0 = 2/T_0$ 。由式(4.14)得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha_1 = & \frac{1}{T_0^2} \left( \frac{\partial T}{\partial A} \right) \Big|_{A=0} = \frac{1}{T_0^2} \left\{ \frac{L^3}{b^2} \exp(\sigma_+) + \frac{L^3}{b^2} \exp(-\sigma_-) + \right. \\ & \frac{-2DL^3}{H_+^2 b^3} [\exp(\sigma_+) - 1] + \frac{2DL^3}{H_-^2 b^3} [\exp(-\sigma_-) - 1] + \\ & \frac{DH_- L^3}{H_+ (H_+^2 - H_-^2) b^3} [\exp(\sigma_+ - \sigma_-) - 1] + \frac{H_- (H_-^2 - H_+^2) L^3}{H_+ (H_+^2 + H_-^2) b^2} \exp(\sigma_+ - \sigma_-) + \\ & \frac{-L^3 H_-}{b^2 H_+} \exp(\sigma_+) \exp(-\sigma_-) + \frac{-L^3 H_+}{b^2 H_-} \exp(\sigma_+) [\exp(-\sigma_-) - 1] + \\ & \left. \frac{DH_- (H_-^2 - H_+^2) L^3}{H_+ (H_+^2 + H_-^2)^2 b^3} [\exp(\sigma_+ - \sigma_-) - 1] + \frac{2L^3}{b^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中  $\sigma_+ = \frac{bH_+^2}{D}$ ,  $\sigma_- = \frac{bH_-^2}{D}$ 。至此,  $W_0$  和  $\alpha_1$  的解析结果均已求得。

第二步, 在绝热近似下, 系统的功率谱可表示为<sup>[94]</sup>:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= S_s(\omega) + S_N(\omega) \\ &= \frac{\pi L^2 \alpha_1^2 A_0^2}{2(W_0^2 + \Omega^2)} \delta(\omega - \Omega) + \left[1 - \frac{\alpha_1^2 A_0^2}{2(W_0^2 + \Omega^2)}\right] \frac{2L^2 W_0}{W_0^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

式中  $S_s(\omega)$  表示  $\delta$  函数形式的输出信号功率谱,  $S_N(\omega)$  表示具有罗伦兹形式的连续分布输出噪声功率谱。

于是, 信噪比表示为<sup>[94,62]</sup>

$$\begin{aligned} P_s &= \int_0^\infty S_s(\omega) d\omega = \frac{\pi L^2 \alpha_1^2 A_0^2}{2(W_0^2 + \Omega^2)}, \\ SNR &= \frac{P_s}{S_N(\omega = \Omega)} = \frac{P_s}{\left[1 - \frac{\alpha_1^2 A_0^2}{2(W_0^2 + \Omega^2)}\right] \frac{2L^2 W_0}{W_0^2 + \omega^2}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

上式中,  $P_s$  为系统输出信号的功率,  $SNR$  为系统的输出信噪比。在本章中, 我们运用绝热近似理论才能导出输出信噪比的表达式 (4.18)。绝热近似理论的有效条件是:  $A \ll 1$ ,  $D \ll 1$  和  $\Omega \ll 1$ , 由于在我们的模型中引入了乘性噪声, 因此也要求  $Q \ll 1$ 。与信号变化周期和粒子在双阱之间概率交换所需的时间相比, 在各个阱内处达到概率平衡的过程可以认为是在瞬间完成的。而且, 这也是我们在式 (4.7) 中, 仅把  $A(t)$  展开到一阶的原因。为了保证结果的有效性, 本文中所有参数的选取均限制在绝热近似条件下。

### 4.3 多重随机共振及噪声对信噪比的影响

利用信噪比的解析表达式 (4.18), 下面着重分析了加法噪声强度、乘法噪声强度以及它们之间的关联强度对信噪比的影响。

#### (1) 多重随机共振的出现

在图 4.1 中, 我们绘出了信噪比随着噪声间关联强度变化曲线的四种情况。取加法噪声强度  $D$  为参数, 当  $D$  很小时, 如  $D = 0.001$ , 信噪比随着噪声间关联强度变化的曲线出现一个极小值, 即信噪比被抑制, 图 4.1 (1) 所示。增加加法噪声强度  $D$ , 当  $D = 0.08$  时, 信噪比随着噪声间关联强度变化的曲线出现两个共振峰, 并且峰的高度不等, 如图 4.1 (2) 所示, 这就是在一般系统中很少见的多极随机共振现象。当  $D = 0.2$  时, 信噪比随着噪声间关联强度变化的曲线也出现两个共振峰, 但两个峰高度的差距增大, 且出现两个极小值。继续增加加法噪声强度  $D$ , 当  $D = 0.30$  时, 信噪比随着噪声间关联强度变化的曲线出现三个共振峰, 右边第一个峰的高度最大, 中间的一个峰的高度最小。这说明多极随机共振的出现不仅依赖加法噪声强度的大小, 而且与噪声间的关联强度有密切的关系, 即随机力与势垒的涨落之间的关联程度。

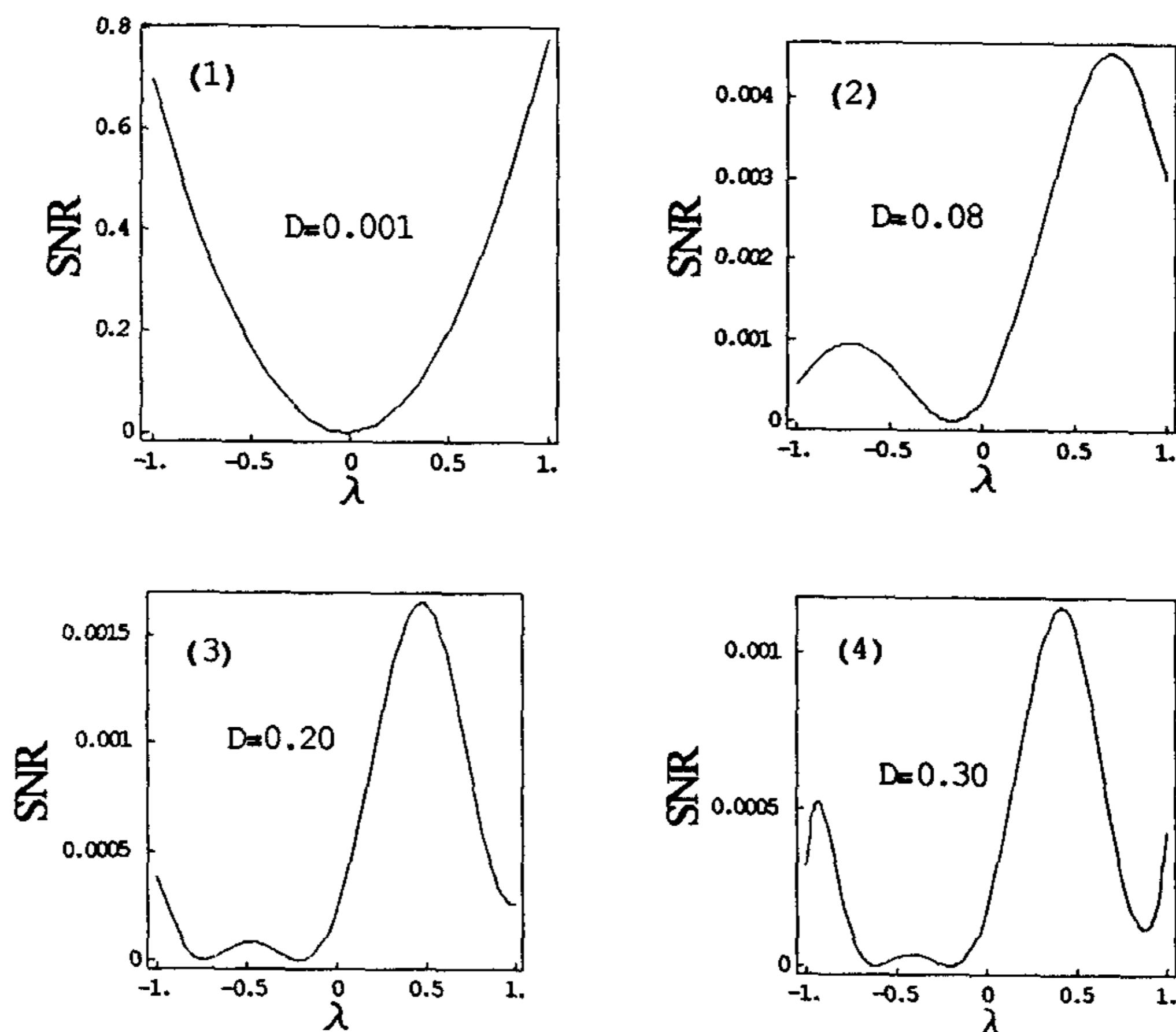


图 4.1 信噪比  $SNR$  随着噪声间关联强度  $\lambda$  的变化曲线, 其它参数值为:  $L = 0.1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 30$ ,  $Q = 0.001$ ,  $A_0 = 0.1$ ,  $\Omega = 0.001$ 。

## (2) 加法噪声强度对信噪比的共振和抑制

信噪比随着加法噪声强度变化的曲线也有四种情况,如图 4.2 所示。取乘法系数  $c$  为参数,当乘法系数  $c = 7.0$  时,信噪比随着加法噪声强度增加而单调上升。当乘法系数  $c = 18.0$  时,信噪比随着加法噪声强度的变化曲线出现一个极大值,即典型的随机共振。继续增加乘法系数,当  $c = 20.4$  时,信噪比随着加法噪声强度的变化曲线先出现一个极小值,再出现一个极大值,也就是说,先出现了抑制,再出现随机共振,这种情况在以前的文献中也是很少见的。当乘法系数  $c = 25.0$  时,信噪比随着加法噪声强度增加而单调下降。这说明乘法系数也是影响系统信噪比的关键参数。

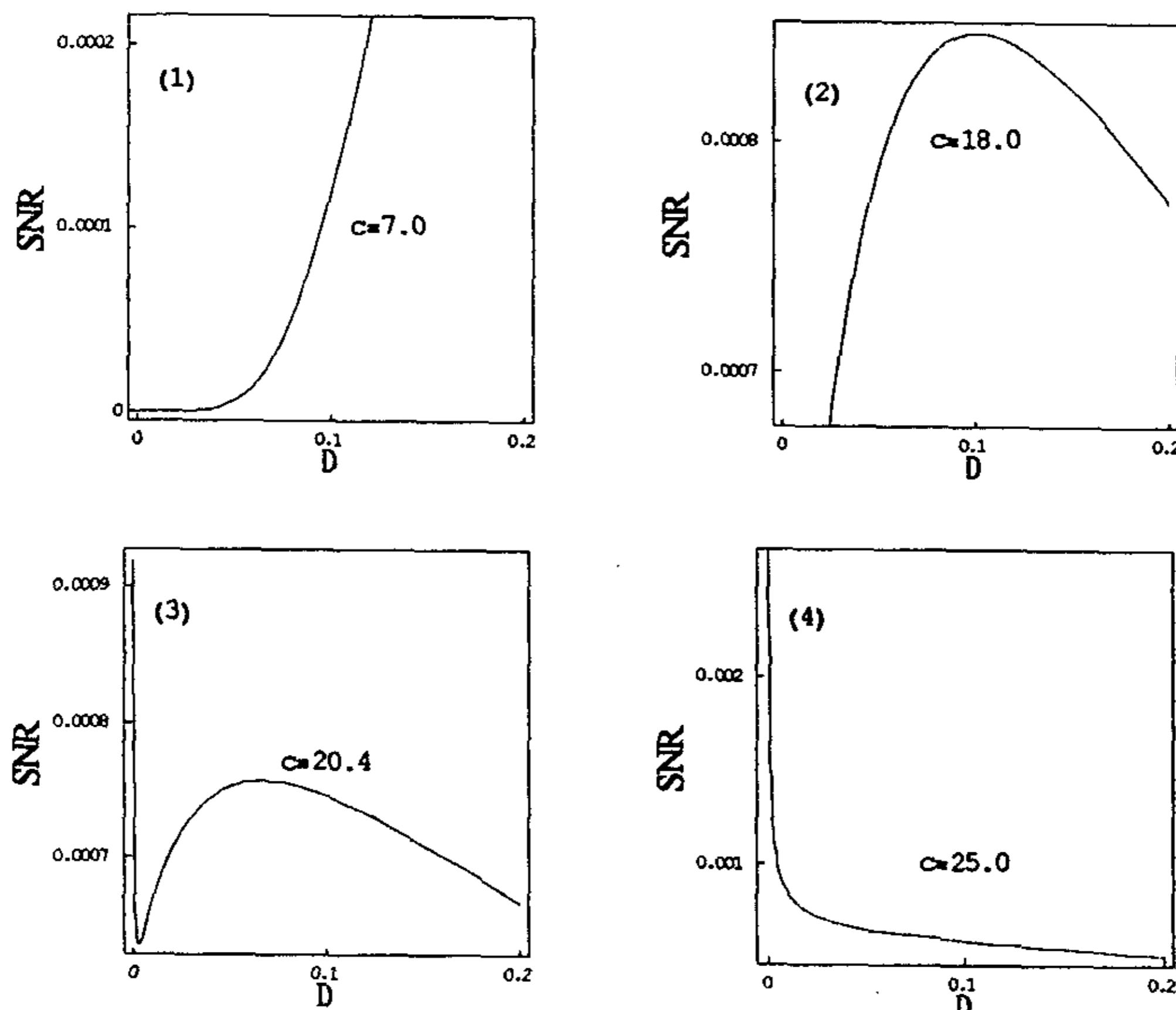


图 4.2 信噪比  $SNR$  随着加性噪声强度  $D$  的变化曲线,其它参数值为:  $L = 0.1$ ,  $b = 2$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $Q = 0.001$ ,  $A_0 = 0.1$ ,  $\Omega = 0.001$ 。

## (3) 乘法噪声强度对信噪比的共振和抑制

在图 4.3 中,我们绘出了信噪比随着乘法噪声强度变化曲线的四种情况。当乘法系数  $c = 1.7$  时,信噪比随着乘法噪声强度增加而单调上升。当乘法系数  $c = 4.6$  时,

信噪比随着乘法噪声强度的变化曲线出现一个共振峰，即典型的随机共振。继续增加乘法系数  $c$ ，当  $c=10.8$  时，信噪比随着乘法噪声强度的变化曲线与  $SNR \sim D$  曲线相反，表现为信噪比随着乘法噪声强度增加，先出现共振（极大值），再出现  $SNR$  的抑制，如图 4.2 (3) 和图 4.3 (3) 所示。当乘法系数  $c=30.0$  时，信噪比随着乘法噪声强度增加而单调上升。

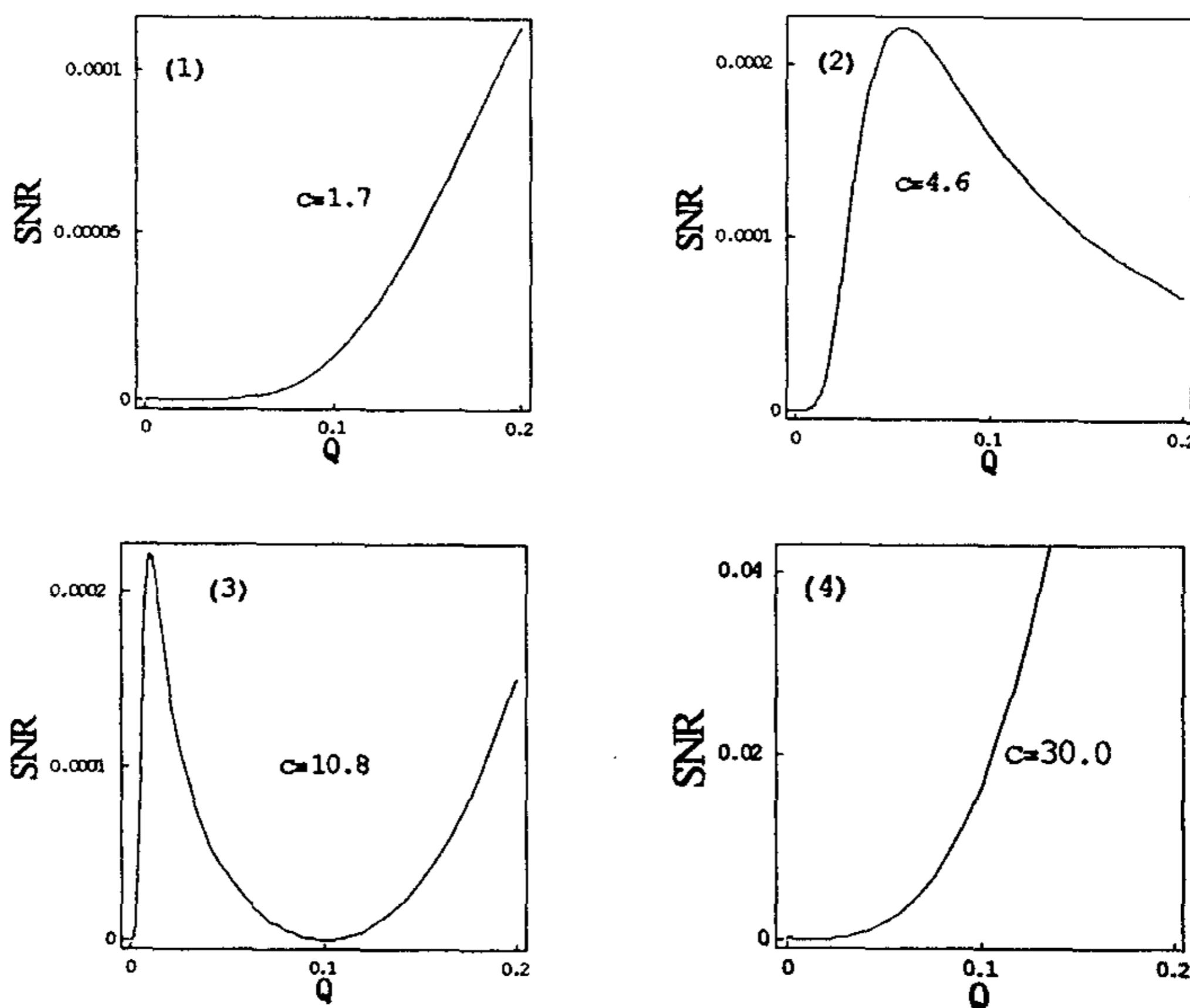


图 4.3 信噪比  $SNR$  随着乘性噪声强度  $Q$  的变化曲线，其它参数值为：  $L = 0.1$ ，  
 $b = 5$ ，  $\lambda = 0$ ，  $D = 0.2$ ，  $A_0 = 0.1$ ，  $\Omega = 0.001$ 。

综上所述，系统的输出信噪比不仅仅是在某一个特定的噪声强度参数时形成随机共振，而且可以在多个不同的噪声强度参数时达到随机共振。在同一个系统中，既可以形成随机共振，也可以存在抑制。我们认为多极随机共振是随机共振现象的一种新的表现形式，它有助于引导人们进一步认识随机共振现象的本质。在本文模型中，各个共振峰的高度相差很大，我们期望通过修改模型，使得各个共振峰的高度相等，这样更有利于实际的应用。

## 4.4 小结

目前，报道多重随机共振的论文越来越多。本章选用一维无限深双稳势阱，引入关联的加性和乘性噪声，导出了信噪比的解析表达式，并详细分析了多重随机共振信噪比随着加性噪声强度、乘性噪声强度以及乘法系数变化的规律。在信噪比随着噪声关联强度变化的曲线中观察到了多重随机共振现象，还发现信噪比随着加性噪声强度和乘性噪声强度的变化，既出现了随机共振也出现了抑制。本章内容已发表在《Eur.Phys.J.B》上。其审稿人在审稿报告中说，由于本章内容的创新性，甚至同意可以在不改正有些语法问题（指英文稿的语法错误）的情况下马上发表。这篇论文发表后，正在筹备中的第三届国际慢动力学讨论会（拟 2003 年 11 月 3 日至 8 日在日本仙台召开）即来函邀请参加这一会议。

## 5 具有周期调制噪声的单模激光系统中的随机共振现象

自从 1981 年帮济等<sup>[59]</sup>发现随机共振现象以来，人们对随机共振现象作了大量的研究。近年来，人们对随机共振本质的认识有了很大的进展。与传统的观念相比，新的理论和实验主要体现在三个方面。（1）以前普遍认为的三个必要条件<sup>[9,90]</sup>（非线性系统、噪声和周期信号）被突破，人们在无外信号或线性系统中也发现了随机共振现象<sup>[91,92]</sup>。

（2）传统的随机共振局限于单峰形式的共振情况<sup>[9,90]</sup>。1997 年，Vilar 等<sup>[93]</sup>首次发现了多峰形式的共振，即多重随机共振，现在已成为研究的一个焦点<sup>[65]</sup>。（3）传统的随机共振一般由信噪比与噪声强度的关系来刻画体现<sup>[9,64-65,94]</sup>。1998 年，Barzykin 等<sup>[95]</sup>提出也可以用信噪比与噪声自相关时间的关系来体现。在第一方面，人们从理论和实验上对线性系统中的随机共振现象作了详细的研究。1996 年，Berdichevsky 等<sup>[109]</sup>研究了由乘性噪声驱动的线性系统，发现在乘性噪声的情况下可以出现随机共振现象。1999 年，他们又进一步考虑了由关联乘性噪声和加性噪声驱动线性系统的情况<sup>[110]</sup>。2002 年，在单模激光增益模型中，考虑泵噪声和量子噪声的关联，运用线性化近似方法，我们发现在仅由加性噪声驱动的线性系统中也能出现随机共振现象<sup>[111]</sup>。

以上对线性系统的随机共振的研究中，噪声和信号都是以相加的形式引入的。但是，Dykman 等<sup>[129]</sup>在研究非对称双稳系统中的随机共振时，曾把噪声和信号以相乘的形式引入，即用信号调制噪声。实际物理系统中，这种周期调制的噪声很普遍，例如，在光学和无线电的放大器中，噪声的强度就被信号调制了<sup>[129]</sup>。因此对信号调制噪声的研究具有重要的实际应用价值。在我们工作<sup>[111]</sup>的基础上，本文首次将信号和噪声以相乘的形式引入单模激光系统中，考虑关联的泵噪声和量子噪声的情况，第一次在激光系统中发现了多重随机共振现象。通过对由关联色泵噪声和色量子噪声驱动的单模激光增益模型的研究，我们计算了激光稳态时的光强关联函数、功率谱和信噪比，发现信噪比随着关联时间的变化不仅出现单峰的随机共振，而且还出现了多重随机共振。由于本章应用线性化方法，我们可以得到精确的解析结果，同时也不受绝热近似条件<sup>[9,64-65,94]</sup>的限制。

### 5.1 具有周期调制噪声的单模激光模型

单模激光增益模型输入信号后的光强方程为<sup>[111]</sup>：

$$\frac{dI}{dt} = -2KI + \frac{2\Gamma}{1+\beta I}I + D + \frac{2I}{1+\beta I}A\cos(\Omega t)\xi(t) + 2\sqrt{I}\eta(t) \quad (5.1)$$

其中泵噪声  $\xi(t)$  和量子噪声  $\eta(t)$  的统计性质为:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{Q}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \frac{D}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \\ \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= \langle \eta(t)\xi(t') \rangle = \frac{\lambda\sqrt{DQ}}{2\tau} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau}\right), \quad -1 \leq \lambda \leq 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

式中  $I$  为激光光强;  $\lambda$  为噪声关联强度;  $Q$ 、 $D$  分别为泵噪声和量子噪声的强度; 假设泵噪声自关联时间、量子噪声自关联时间和两噪声间的互关联时间均为  $\tau$ ;  $\beta = \frac{\tilde{A}}{\Gamma}$ ,  $\tilde{A}$  和  $\Gamma$  分别为自饱和系数和增益系数;  $K$  为损失系数。

## 5.2 单模激光光强输出功率谱及信噪比

对上面介绍的模型, 我们用近线性化近似方法进行处理。令

$$I = I_0 + \varepsilon(t) \quad (5.3)$$

其中  $\varepsilon(t)$  为微扰项, 将 (5.1) 式在确定论定态光强  $I_0 = (\Gamma - K)/\beta K$  附近线性化, 可得线性化方程为:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\gamma\varepsilon(t) + D + \frac{2I_0}{1+\beta I_0}A\cos(\Omega t)\xi(t) + 2\sqrt{I_0}\eta(t) \quad (5.4)$$

式中  $\gamma = 2K(\Gamma - K)/\Gamma$ ; 由 (5.4) 式可得:

$$\langle \varepsilon(t) \rangle = \frac{D}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) \quad (5.5)$$

根据平均光强相关函数的定义:

$$B(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} \overline{\langle I(t'+t)I(t') \rangle} \quad (5.6)$$

式中  $\overline{\langle I(t'+t)I(t') \rangle} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{t'+\frac{2\pi}{\Omega}} \langle I(t'+t)I(t') \rangle dt'$ , 可求出  $B(t)$  (只讨论  $\gamma \neq \tau^{-1}$ )。

对平均光强相关函数  $B(t)$  式做傅立叶变换，得到光强的功率谱为：

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) \quad (5.7)$$

其中  $S_1(\omega)$  为输出信号功率谱， $S_2(\omega)$  为输出噪声功率谱。信噪比定义为输出信号功率  $P_s$  与  $\omega = \Omega$  处的单位噪声谱的平均功率之比：

$$R = \frac{P_s}{S_2(\omega = \Omega)} \quad (5.8)$$

上式中  $P_s = \int_0^\infty S_1(\omega) d\omega = \frac{\pi \Lambda^2 Q (\gamma^2 + \Omega^2 - 1/\tau^2)}{4\tau \kappa_+ \kappa_-}$ ，

$$\begin{aligned} S_2(\omega = \Omega) = & \frac{2\gamma}{\kappa} \left\{ \frac{Q\Lambda^2}{2\tau} \left[ \frac{\gamma}{4\kappa} \left( \frac{\gamma - 1/\tau}{\kappa_-} - \frac{\gamma + 1/\tau}{\kappa_+} \right) + \frac{\Omega^2}{4\kappa} \left( \frac{1}{\kappa_-} - \frac{1}{\kappa_+} \right) - \frac{\gamma - 1/\tau}{4\gamma\kappa_-} - \frac{2DI_0}{\gamma(\tau^2\gamma^2 - 1)} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\Lambda\lambda\sqrt{DQI_0}}{\tau} \left[ \frac{2\gamma}{4\gamma^2 + \Omega^2} \left( \frac{\gamma - 1/\tau}{\kappa_-} - \frac{\gamma + 1/\tau}{\kappa_+} + \frac{2}{\tau\gamma^2 - 1/\tau} \right) + \frac{\Omega^2}{4\gamma^2 + \Omega^2} \left( \frac{1}{\kappa_+} - \frac{1}{\kappa_-} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{2DI_0}{(1 + \tau^2\Omega^2)(\gamma^2 - 1/\tau^2)} \end{aligned}$$

其中  $\kappa = \gamma^2 + \Omega^2$ ， $\Lambda = 2AI_0/(1 + \beta I_0)$ ，

$$\kappa_+ = (\gamma + 1/\tau)^2 + \Omega^2, \quad \kappa_- = (\gamma - 1/\tau)^2 + \Omega^2.$$

### 5.3 结论和讨论

根据信噪比的表达式 (5.8)，我们在图 5.1-3 中绘出了信噪比随着噪声关联时间的变化曲线。从图中，我们可以看到多重随机共振和单峰形式的随机共振现象，而且改变噪声间的关联强度和噪声强度，会出现多重随机共振和单峰形式的随机共振之间的转变，即通过控制噪声的参数，可以决定随机共振的形式。

#### (1) 噪声间的关联强度对随机共振形式的影响

在图 5.1 中，以噪声间的关联强度  $\lambda$  为参数，绘出了信噪比随着噪声关联时间  $\tau$  的变化曲线。当  $0.45 < \lambda \leq 0.60$  时，曲线出现双峰形式的多重随机共振。两个峰的高度不等，右边的峰高于左边的峰，如图 5.1a 所示。当  $0.60 < \lambda \leq 1.00$  时，如图 5.1b

所示, 曲线转变为单峰形式的随机共振。

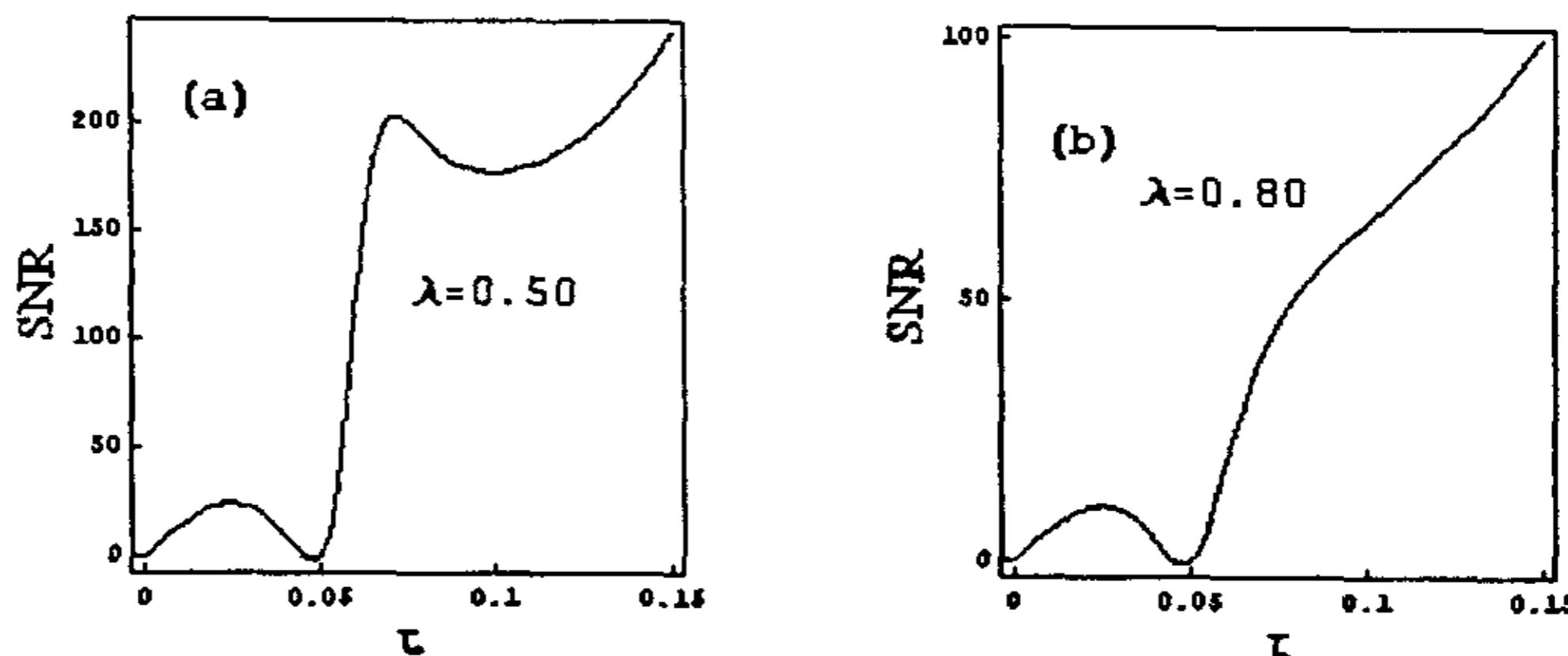


图 5.1 信噪比随着噪声关联时间  $\tau$  的变化曲线。其它参数为:  $Q = 0.8$ ,  $D = 0.1$ ,  $I_0 = 1.0$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $\gamma = 20$ ,  $A = 1.0$ ,  $\Omega = 10$ , (a)  $\lambda = 0.5$ ; (b)  $\lambda = 0.8$ .

### (2) 量子噪声强度对随机共振形式的影响

在图 5.2 中, 以量子噪声强度  $D$  为参数, 绘出了信噪比随着噪声关联时间  $\tau$  的变化曲线。当  $0.04 < D \leq 0.06$  时, 曲线出现单峰形式的随机共振。如图 5.2a 所示。当  $D > 0.06$  时, 如图 5.2b 所示, 曲线出现两个极大值和两个极小值, 双峰形式的多重随机共振。

### (3) 泵噪声强度对随机共振形式的影响

在图 5.3 中, 以泵噪声强度  $Q$  为参数, 绘出了信噪比随着噪声关联时间  $\tau$  的变化曲线。当  $0.04 < Q \leq 1.06$  时, 曲线出现两个极大值和两个极小值, 双峰形式的多重随机共振, 如图 5.3a 所示。当  $Q > 1.06$  时, 曲线出现单峰形式的随机共振, 如图 5.3b 所示。

下面把我们先前的工作<sup>[11]</sup> 与本文的工作作一个比较。从讨论的模型上看: 前者是把信号和噪声以相加的形式引入到单模激光系统, 而本文是把信号和噪声以相乘的形式引入到单模激光系统。因此, 它们代表着不同的物理过程。从所得的现象上看: (1) 前者中只出现了单峰形式的随机共振, 而本文还存在多重随机共振现象; (2) 前者的随机共振只出现在信噪比随着泵噪声和量子噪声强度变化的曲线上, 信噪比随着噪声关联时间变化的曲线没有随机共振现象, 与此相反, 本文的随机共振现象只出现在信噪比随着噪声关联时间变化的曲线上, 信噪比随着泵噪声和量子噪

声强度变化的曲线不出现随机共振现象；(3) 前者的随机共振出现在关联强度  $\lambda < 0$  的情况下，而本文的随机共振现象出现在关联强度  $\lambda > 0$  的情况下。

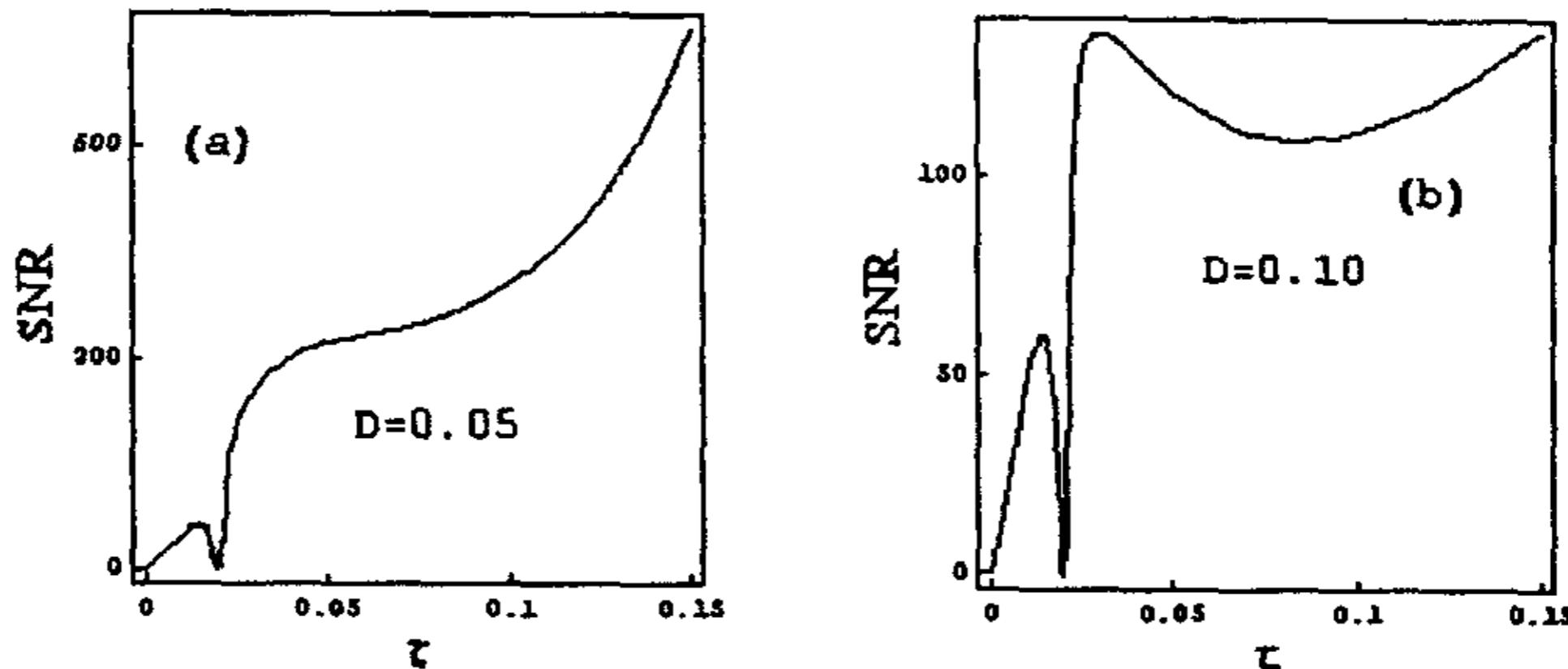


图 5.2 信噪比随着噪声关联时间  $\tau$  的变化曲线。其它参数为:  $Q = 1.0$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $I_0 = 1.0$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $\gamma = 50$ ,  $A = 1.0$ ,  $\Omega = 10$ , (a)  $D = 0.05$ ; (b)  $D = 0.10$ 。

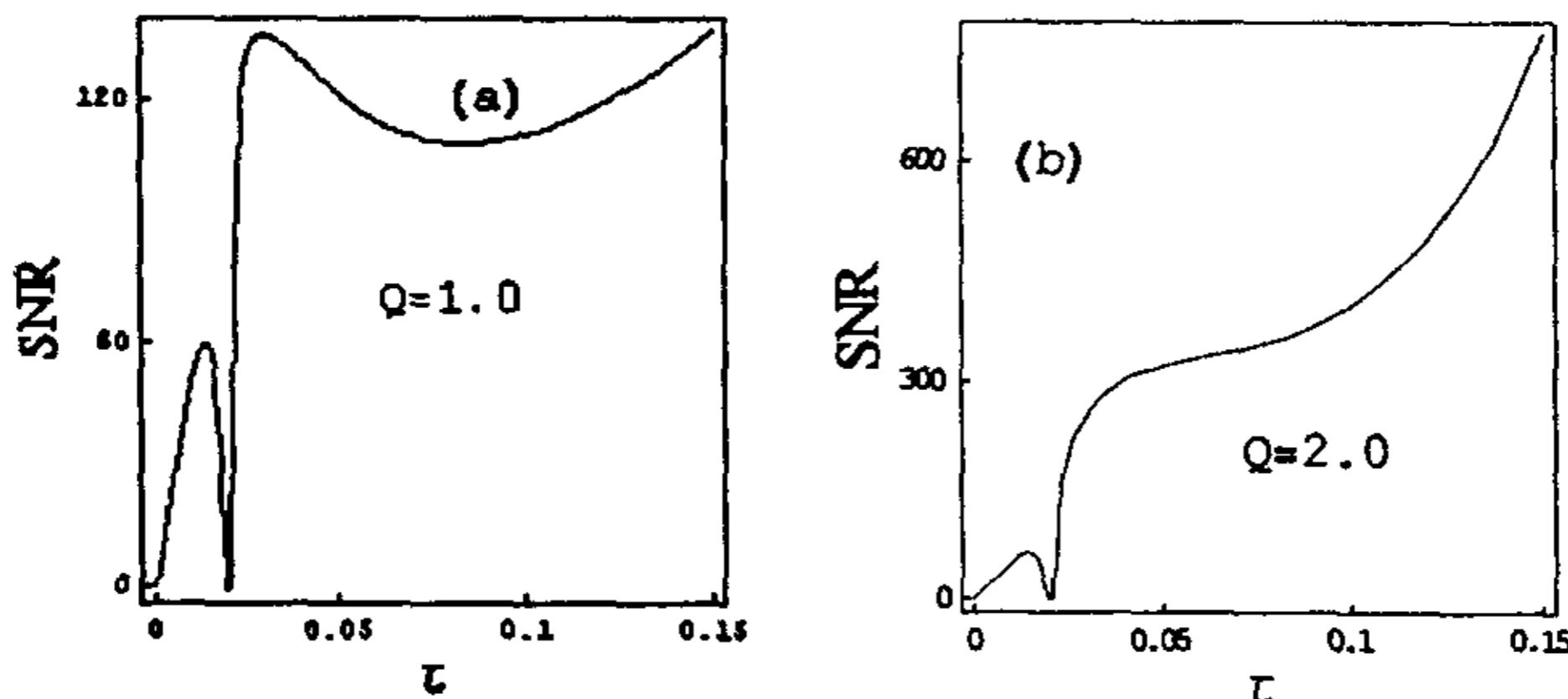


图 5.3 信噪比随着噪声关联时间  $\tau$  的变化曲线。其它参数为:  $D = 0.1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $I_0 = 1.0$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $\gamma = 50$ ,  $A = 1.0$ ,  $\Omega = 10$ , (a)  $Q = 1.0$ ; (b)  $Q = 2.0$ 。

总之，由于是把信号和噪声以相乘的形式引入到单模激光系统，我们首次在单模激光系统中同时发现了两种形式的随机共振现象。这不仅为随机共振研究提供了新的现象，而且也为激光器的设计优化提出了新的方法。

#### 5.4 小结

以前的许多工作都是把噪声和信号以相加的形式引入到随机系统。本章的创新

# 华中科技大学硕士学位论文

---

之处是把噪声和信号以相乘的形式引入到单模激光系统。通过应用第二章介绍的线性化近似方法，导出了激光的输出信噪比的解析表达式。根据信噪比的解析表达式分析发现，在信噪比随着噪声关联时间的变化曲线中，出现了两种形式的随机共振现象（多重随机共振和单峰形式的随机共振）。当改变泵噪声和量子噪声间的关联强度和噪声强度时，还会出现多重随机共振和单峰形式的随机共振之间的转变。

## 6 噪声关联与对称双稳系统平均第一通过时间的对称破缺

自从 H.A.Kramers<sup>[130]</sup>首次研究粒子逃逸以来, 布朗粒子的逃逸问题成为非线性随机系统的一个重要研究方向。在许多文献中, 人们引进平均第一通过时间或逃逸率作为刻画逃逸过程的主要物理量<sup>[9-11,17-18,127,132-133]</sup>。在这些工作中, 关于逃逸问题的理论研究、实验研究和数值模拟都有了很大的发展。其中 Doering 和 Gadoua<sup>[10]</sup>应用主方程和福克—普朗克方程研究了只含加性噪声的分段线性双稳系统的首通时间  $T(L \rightarrow -L)$ , 并与数值模拟对比, 发现了“类共振”现象。Madureira 等人<sup>[18]</sup>研究了由相关加性和乘性白噪声同时驱动的立方双稳系统, 利用数值计算分析了逃逸率  $\kappa^+(-1 \rightarrow +1)$  的行为, 得出了  $R \ll 1$  和  $R \gg 1$  的解析结果 ( $R$  为乘性噪声和加性噪声强度的比值), 并发现了逃逸率随着  $R$  的“巨抑制”现象。

以上对双稳系统的逃逸问题的研究中, 主要都集中在单方向的逃逸问题上; 但对于噪声间存在关联的情况, 平均第一通过时间  $T^+$  和  $T^-$  表现出完全不同的特点。在一般实际情况下, 许多随机系统往往由多个噪声来驱动。这些噪声之间还会以各种形式互相关联, Fulinski 等人已对此作了大量的研究<sup>[43,48,126]</sup>。因此, 只有研究噪声关联对双稳系统相反方向平均第一通过时间的影响才能全面描写其瞬态性质。本文计算和分析对称双稳系统中存在噪声间关联时的相反方向的平均第一通过时间, 发现  $T^+$  (即  $T(x_- \rightarrow x_+; \lambda)$ ) 和  $T^-$  (即  $T(x_+ \rightarrow x_-; \lambda)$ ) 并不相等且随着噪声强度的变化表现出不同的现象。

### 6.1 对称双稳系统的平均第一通过时间对称破缺

考虑由相关加性噪声和乘性噪声驱动的一维双稳系统。系统由朗之万方程描述为

$$\dot{x} = -U'(x) + g(x)\xi(t) + \eta(t) \quad (6.1)$$

这里  $U'(x)$  是势函数对  $x$  的导数,  $U(x)$  为对称双稳势函数, 即  $U(x) = U(-x)$ ,

$U'(x) = -U'(-x)$ , 且假设乘性噪声系数  $g(x) = -g(-x)$ ,  $g'(x) = g'(-x)$ 。

假设噪声  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  的统计性质遵守

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \eta(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 2Q\delta(t-t') \quad (6.2)$$

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = 2D\delta(t-t') \quad (6.3)$$

$$\langle \xi(t) \eta(t') \rangle = \langle \eta(t) \xi(t') \rangle = 2\lambda\sqrt{QD}\delta(t-t') \quad (6.4)$$

式 (6.2) 和式 (6.3) 中的  $Q$  和  $D$  分别为乘性噪声和加性噪声的强度, 式 (6.4) 中  $\lambda$  为加性噪声和乘性噪声之间的关联强度, 满足  $|\lambda| \leq 1$  。

与朗之万方程 (6.1) 对应的福克-普朗克方程为<sup>[38,45]</sup>

$$\begin{aligned} \partial_t p(x,t) = & -\partial_x \{-U'(x) + D[Rg(x) + \lambda\sqrt{R}]g'(x)\} p(x,t) + \\ & D\partial_{xx}[Rg^2(x) + 2\lambda\sqrt{R}g(x) + 1]p(x,t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

式中  $R = Q/D$  。

观察方程 (6.5) 的形式, 由势函数的对称性可知: 当  $\lambda = 0$  时,  $p(x,t) = p(-x,t)$ , 即分布函数具有对称性; 当  $\lambda \neq 0$  时,  $p(x,t) \neq p(-x,t)$ , 但是如果态空间扩大, 由  $(x) \rightarrow (x, \lambda)$ , 可导出“广义”的对称性, 即  $p(x,t; \lambda) = p(-x,t; -\lambda)$  。

首通时间的表达式为<sup>[17]</sup>

$$T^+ \equiv T(x_- \rightarrow x_+; \lambda) = D^{-1} \int_{x_-}^{x_+} H(x, \lambda) p^{-1}(x, \lambda) dx \int_{-\infty}^x p(y, \lambda) dy \quad (6.6)$$

$$T^- \equiv T(x_+ \rightarrow x_-; \lambda) = D^{-1} \int_{x_+}^{x_-} H(x, \lambda) p^{-1}(x, \lambda) dx \int_x^{\infty} p(y, \lambda) dy \quad (6.7)$$

式中  $x_+$  和  $x_-$  为双稳势  $U(x)$  的两确定论稳定定态值,  $p(x, \lambda)$  为定态几率分布, 其表达式为

$$P(x, \lambda) = NH(x, \lambda) \exp[-\Phi(x)/D] \quad (6.8)$$

其中  $N$  为归一化常数,  $\Phi(x)$  和  $H(x, \lambda)$  分别为广义势和前置因子,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x H^2(x, \lambda) U'(x) dy ,$$

$$H(x, \lambda) = [1 + 2\lambda\sqrt{R}g(x) + Rg^2(x)]^{-1/2} .$$

当  $\lambda = 0$  时, 有  $H(x, \lambda) = H(-x, \lambda)$ ,  $p(x, \lambda) = p(-x, \lambda)$ , 由式 (6.6) 和式 (6.7) 可得,  $T(x_- \rightarrow x_+; 0) = T(x_+ \rightarrow x_-; 0)$ , 平均第一通过时间  $T^+$  和  $T^-$  具有空间对称性; 当  $\lambda \neq 0$  时,  $H(x, \lambda) \neq H(-x, \lambda)$ ,  $p(x, \lambda) \neq p(-x, \lambda)$ , 因此,  $T(x_- \rightarrow x_+; \lambda) \neq T(x_+ \rightarrow x_-; \lambda)$ , 即平均第一通过时间空间对称性破缺。但是, 如果态空间由  $(x)$  扩大为  $(x, \lambda)$ , 当  $\lambda \neq 0$  时, 有  $H(x, \lambda) = H(-x, -\lambda)$ ,  $p(x, \lambda) = p(-x, -\lambda)$ , 则仍存在“广义”的对称性, 即  $T(x_- \rightarrow x_+; \lambda) = T(x_+ \rightarrow x_-; -\lambda)$ 。因此, 我们只需要研究  $\lambda \geq 0$  时,  $T(x_- \rightarrow x_+; \lambda)$  和  $T(x_+ \rightarrow x_-; \lambda)$  的性质。

## 6.2 四次方双稳势阱模型的对称破缺

四次方双稳势函数的具体表达式为:

$$U(x) = -ax^2 + bx^4 \quad (6.9)$$

式中  $a$  和  $b$  为势垒结构参数。乘性噪声系数  $g(x) = x$ 。

根据式 (6) 和式 (7), 利用最陡下降近似方法<sup>[9,18]</sup>, 可得

$$T^\pm(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a\sqrt{aR/b \mp 2\lambda\sqrt{aR/b} + 1}} \exp\left\{\frac{1}{D}[\Phi(0) - \Phi(\mp\sqrt{a/b})]\right\} \quad (6.10)$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi(x, |\lambda| < 1) &= \frac{b}{2R}x^2 - \frac{2\lambda b}{R^{3/2}}x + \frac{b(4\lambda^2 - 1) - aR}{2R^2} \ln(Rx^2 + 2\lambda\sqrt{R}x + 1) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{R(1 - \lambda^2)}} \left[ \frac{a\lambda}{\sqrt{R}} - \frac{\lambda b\sqrt{R}(4\lambda^2 - 3)}{R^2} \right] \arctan\left(\frac{\lambda + \sqrt{R}x}{\sqrt{1 - \lambda^2}}\right), \\ \Phi(x, |\lambda| = 1) &= \frac{b}{2R}x^2 - \frac{2\lambda b}{R^{3/2}}x + \frac{b(4\lambda^2 - 1) - aR}{2R^2} \ln(Rx^2 + 2\lambda\sqrt{R}x + 1) \\ &\quad - \frac{1}{Rx + \lambda\sqrt{R}} \left[ \frac{a\lambda}{\sqrt{R}} - \frac{\lambda b\sqrt{R}(4\lambda^2 - 3)}{R^2} \right]. \end{aligned}$$

图 6.1-5 绘出了平均第一通过时间与噪声强度之间的变化曲线。对于  $T^+(\lambda)$ ，i)  $T^+$  随着  $Q$  的增加，出现单峰，即“共振”现象，且  $\lambda$  取值越大峰值越高，峰的位置向右移动，如图 6.1 所示。当  $\lambda = 0$  时，峰消失， $T^+$  随着  $Q$  的增加单调下降。ii) 以  $\lambda$  和  $Q$  为参数，当  $Q = 3.0$  时， $\lambda$  取值增大， $T^+ \sim D$  曲线出现单调、双峰和单峰的情况，如图 6.2a 所示；当  $Q = 2.0$  时， $T^+$  随着  $D$  的增加出现一个峰值，且  $\lambda$  越大峰值越高，如图 6.2b 所示；当  $Q = 1.0$  时，随  $\lambda$  取值减小， $T^+$  随着  $D$  的增加出现单调下降、双极值和单调上升三种情况，如图 6.2c 所示。

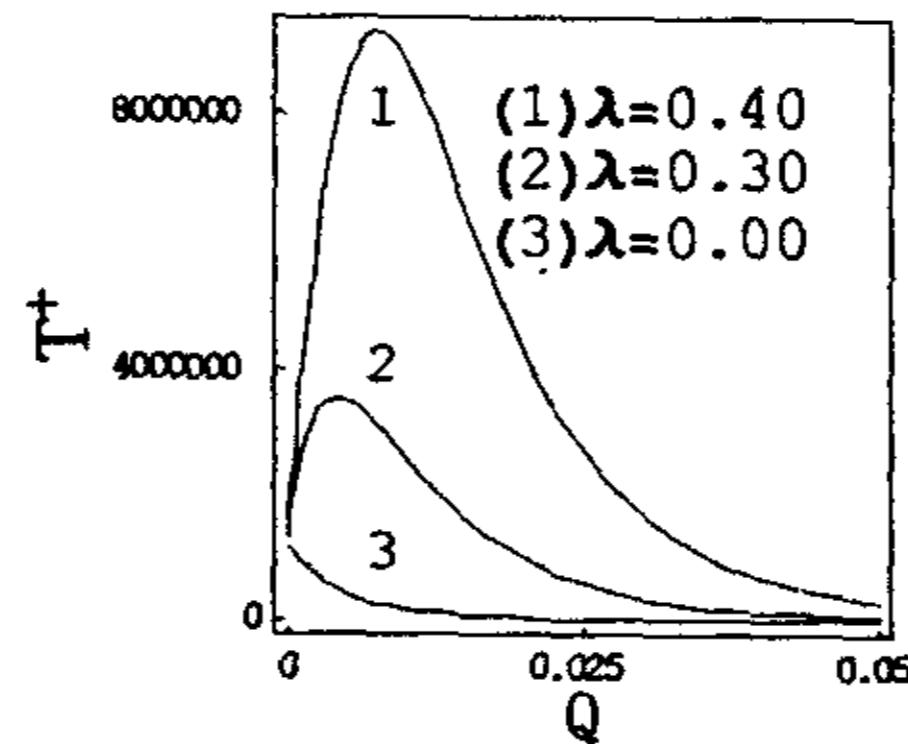


图 6.1  $T^+$  与乘性噪声强度  $Q$  的函数关系。其它参数为： $a = 1$ ， $b = 1$ ， $D = 0.02$ 。

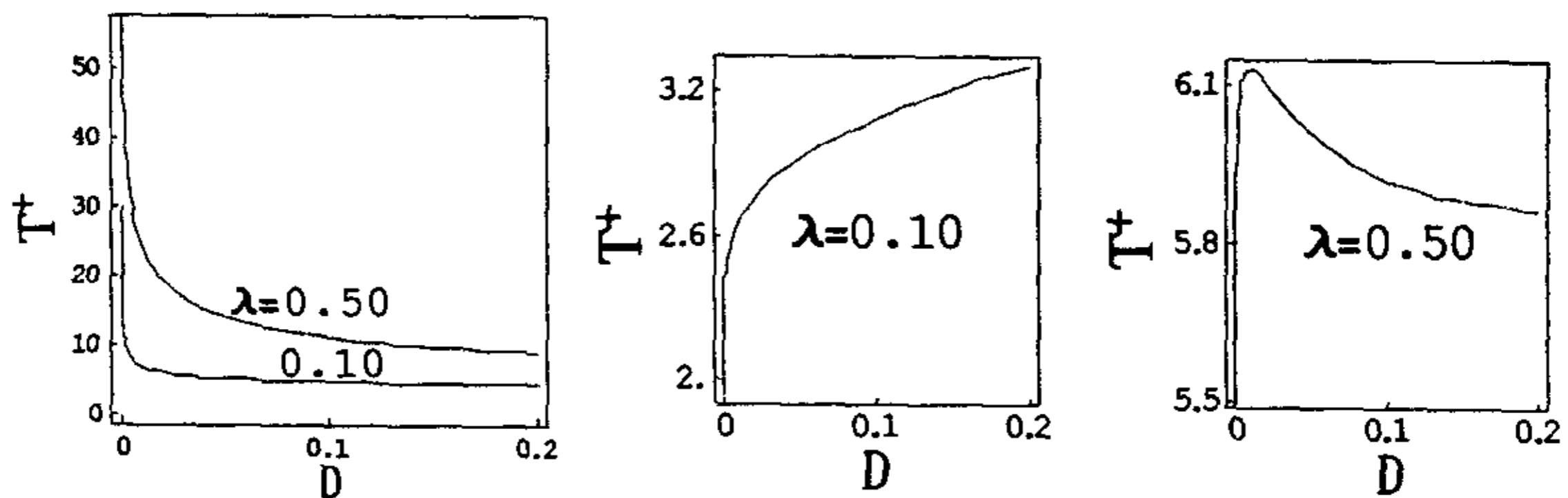


图 6.2  $T^+$  与加性噪声强度  $D$  的函数关系。其它参数为：

(a)  $a = 1$ ， $b = 1$ ， $Q = 0.7$ ；(b)  $a = 1$ ， $b = 1$ ， $Q = 1.1$ 。

再研究  $T^-(\lambda)$ ，i)  $T^- \sim Q$  曲线的增加，单调下降，如图 6.3 所示。ii) 以  $Q$  为

参数, 当  $Q = 3.0$ ,  $T^-$  随着  $D$  的增加单调上升, 如图 6.4a 所示; 当  $Q = 2.0$  和  $Q = 1.0$  时, 与  $Q = 3.0$  时的情况相似, 都单调变化; 当减小  $Q$  到 0.5 时,  $T^-$  随着  $Q$  的增加出现一个极小值, 且  $\lambda$  越大极小值越小, 即抑制越强, 如图 6.4b 所示。

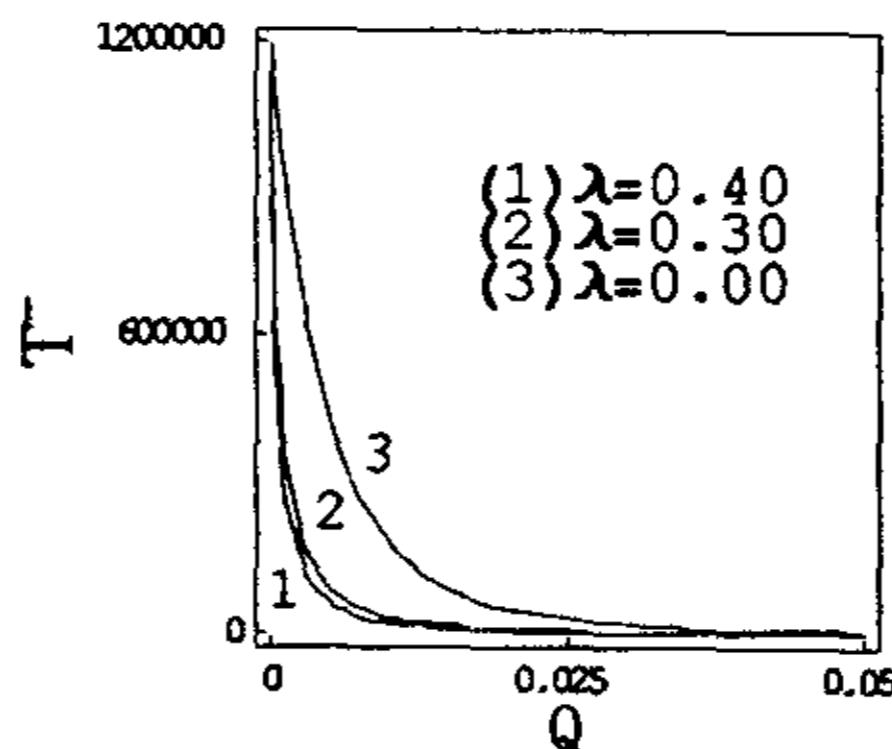


图 6.3  $T^-$  与乘性噪声强度  $Q$  的函数关系. 其它参数为:  $a = 1, b = 1, D = 0.02$ .

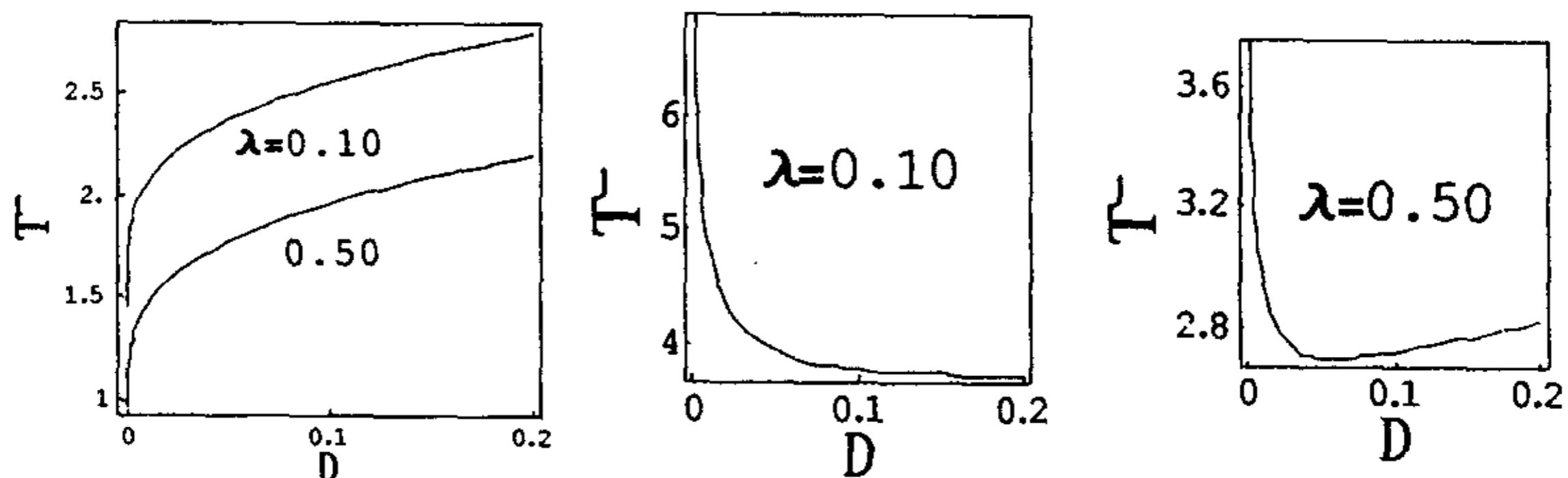


图 6.4  $T^+$  与加性噪声强度  $D$  的函数关系. 其它参数为:

(a)  $a = 1, b = 1, Q = 0.7$ ; (b)  $a = 1, b = 1, Q = 1.1$ .

对于  $T^+/T^-$ : 如图 6.5 所示, 当  $\lambda = 0$  时,  $T^+/T^-$  等于 1。这正是我们所预期的结果, 也证明了我们理论推导的正确性。当  $\lambda \neq 0$  时,  $T^+/T^-$  随着  $Q$  的变化曲线出现一个峰值, 并且随着  $\lambda$  增加, 峰变高。从这里我们可以看到  $\lambda$  对  $T^+$  和  $T^-$  的影响是非常不同的。

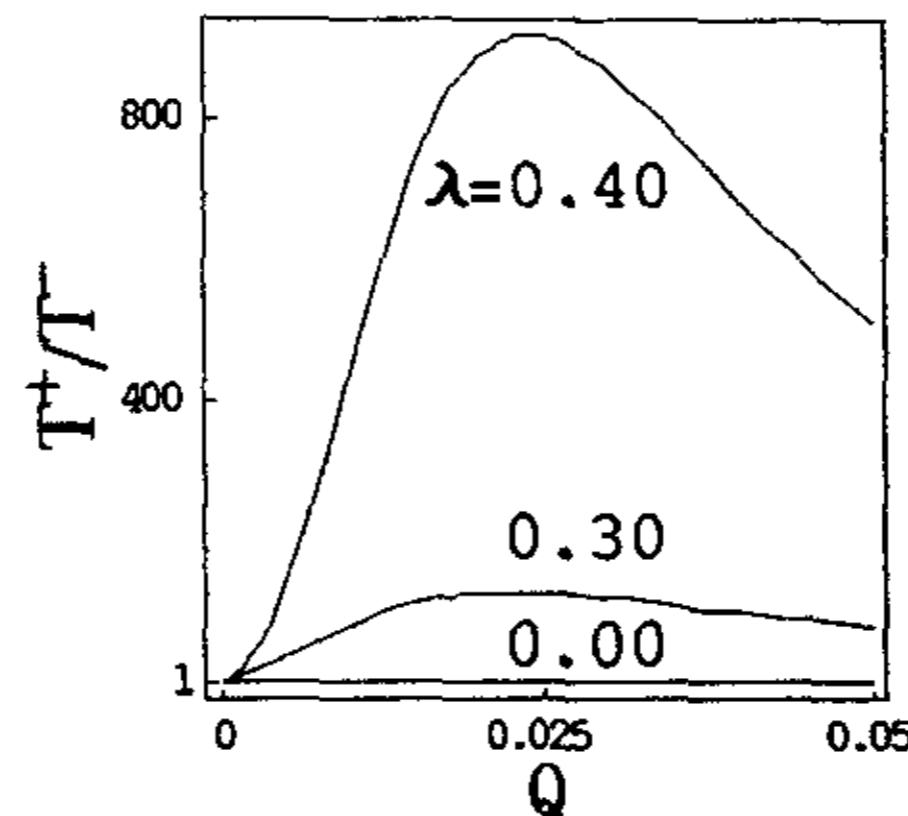


图 6.5  $T^+ / T^-$  与乘性噪声强度  $Q$  的函数关系。其它参数为：  
 $a = 1, b = 1, D = 0.02$ 。

### 6.3 锯齿双稳势阱模型的对称破缺

锯齿双稳势函数的具体表达式为：

$$U(x) = \begin{cases} -2bx/L - 2b, & (-\infty < x \leq -L/2) \\ 2bx/L, & (-L/2 < x \leq 0) \\ -2bx/L, & (0 < x \leq L/2) \\ 2bx/L - 2b, & (L/2 < x \leq \infty) \end{cases} \quad (6.11)$$

式中  $b$  为势垒的高度， $L$  为势垒的宽度。乘性噪声系数  $g(x) = U'(x)$ 。

根据式 (6.6) 和式 (6.7)，计算出  $T^\pm(\lambda)$  的精确结果，

$$T^\pm(\lambda) = \frac{L^2 D}{4b^2} \left\{ \frac{1}{H_\pm^2} [1 - \exp(\mp\sigma_\pm)][1 - \exp(\mp\sigma_\mp)] + \frac{1}{H_\mp^2} [\exp(\mp\sigma_\mp) - 1] - \frac{1}{H_+ H_-} [1 - \exp(\mp\sigma_\mp)][2 - \exp(\mp\sigma_\pm)] \right\} \quad (6.12)$$

式中  $\sigma_\pm = \frac{H_\pm b}{D}$ ， $H_\pm = (K_\pm^2 R + 2\lambda\sqrt{R}K_\pm + 1)^{-1/2}$ ， $K_\pm = \pm \frac{2b}{L}$ 。

图 6.6-10 绘出了平均第一通过时间与噪声强度之间的变化曲线。对于  $T^+(\lambda)$ ：

i) 强关联 ( $\lambda = 0.9$ ) 时,  $T^+$  随着  $Q$  的增加先出现一个极小值, 再出现一个极大值, 即先“抑制”, 再“共振”; 当  $\lambda < 0.8$  时, 曲线单调下降, 如图 6.6 所示。ii) 当  $\lambda = 0$  时, 曲线单调下降; 当  $\lambda \neq 0$  时,  $T^+$  随着  $D$  的增加出现一个极小值, 且  $\lambda$  越大, 曲线越低, 即“抑制”越强, 如图 6.7 所示。

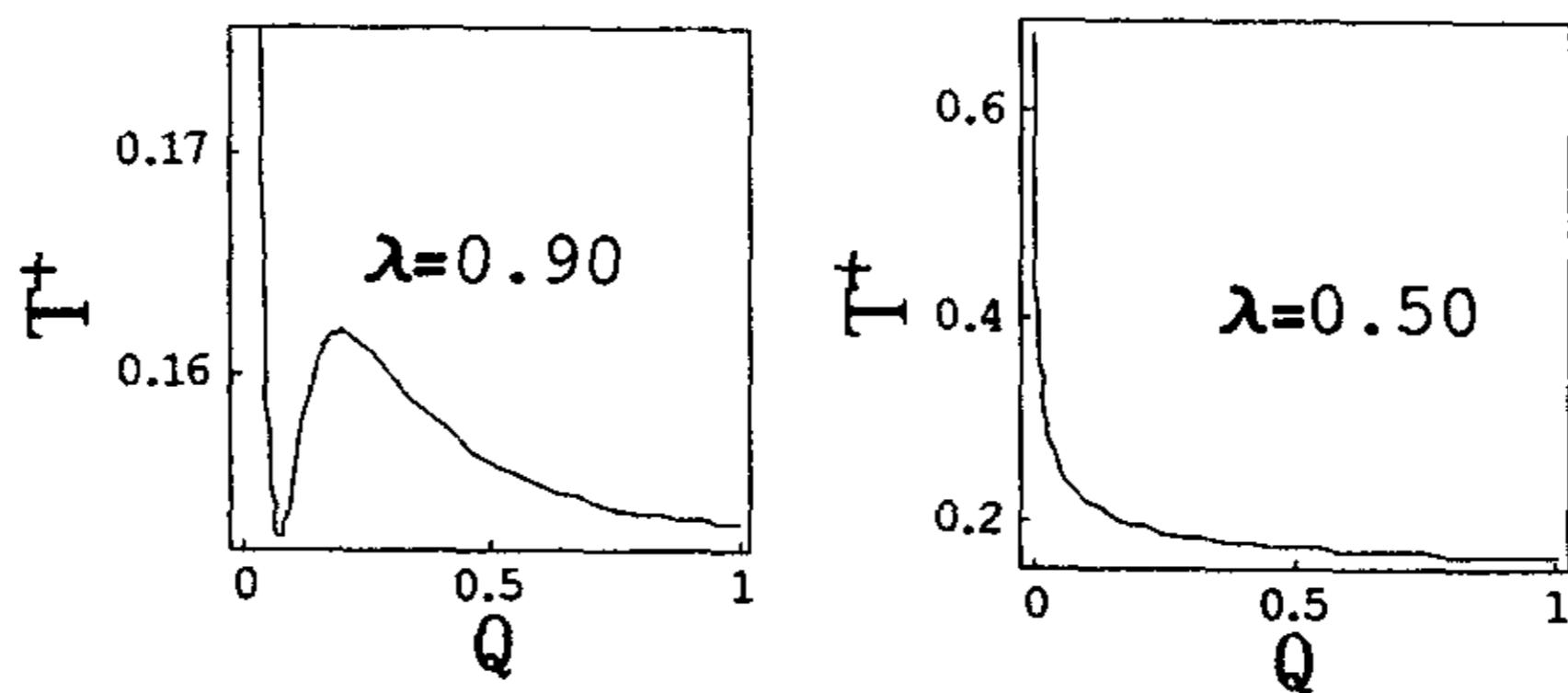


图 6.6  $T^+$  与乘性噪声强度  $Q$  的函数关系。其它参数为:  $L = 1$ ,  $b = 3$ ,  $D = 2$

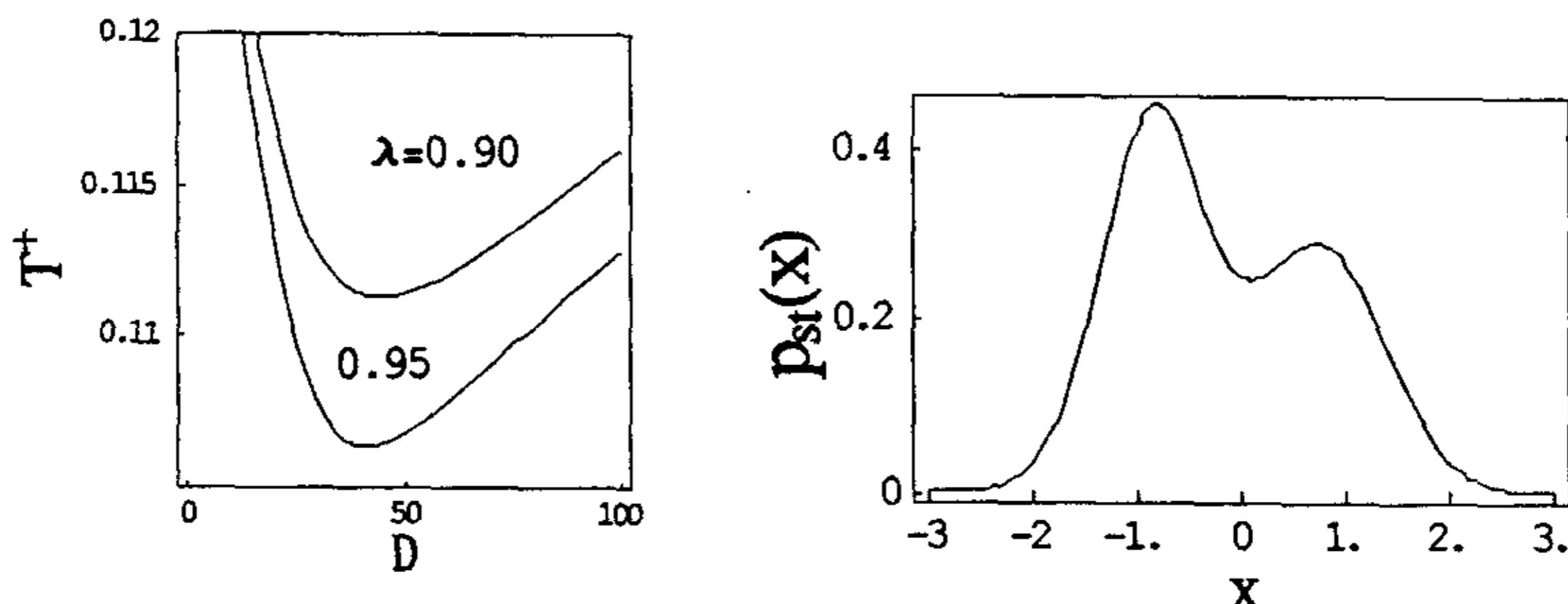


图 6.7  $T^+$  与加性噪声强度  $D$  的函数关系。其它参数为:  $L = 1$ ,  $b = 3$ ,  $Q = 1$ 。

图 6.11 四次方模型的定态几率分布  $P_s$ 。其它参数为:  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $O = 0.4$ ,  $D = 0.2$ ,  $\lambda = 0.2$ 。

对于  $T^-(\lambda)$ , i)  $T^-$  随着  $Q$  的增加, 出现单峰, 且  $\lambda$  取值越大峰值越高, 峰的位置向右移动, 如图 6.8 所示。ii)  $T^-$  随着  $D$  的增加, 也出现单峰, 如图 6.9 所示。

对于  $T^+/T^-$ : 当  $\lambda = 0$  时,  $T^+/T^-$  等于 1。这是我们所预期的结果。当  $\lambda \neq 0$  时,

$T^+ / T^-$  随着  $Q$  的变化曲线出现一个极小值。随着  $\lambda$  增加，曲线降低，极小值的范围变宽，形成抑制平台，如图 6.10 所示。也就是说，随着  $\lambda$  增加，抑制增强， $\lambda$  对  $T^+$  和  $T^-$  的影响也是非常不同的。而且，当  $Q$  的范围扩展到无穷大， $T^+ / T^-$  趋向于 1。从物理的图象上看，当乘性噪声的强度远大于加性噪声时，加性噪声的影响很小，甚至可以被忽略，此时也就不用再考虑噪声间的关联，因此， $T^+$  等于  $T^-$ 。

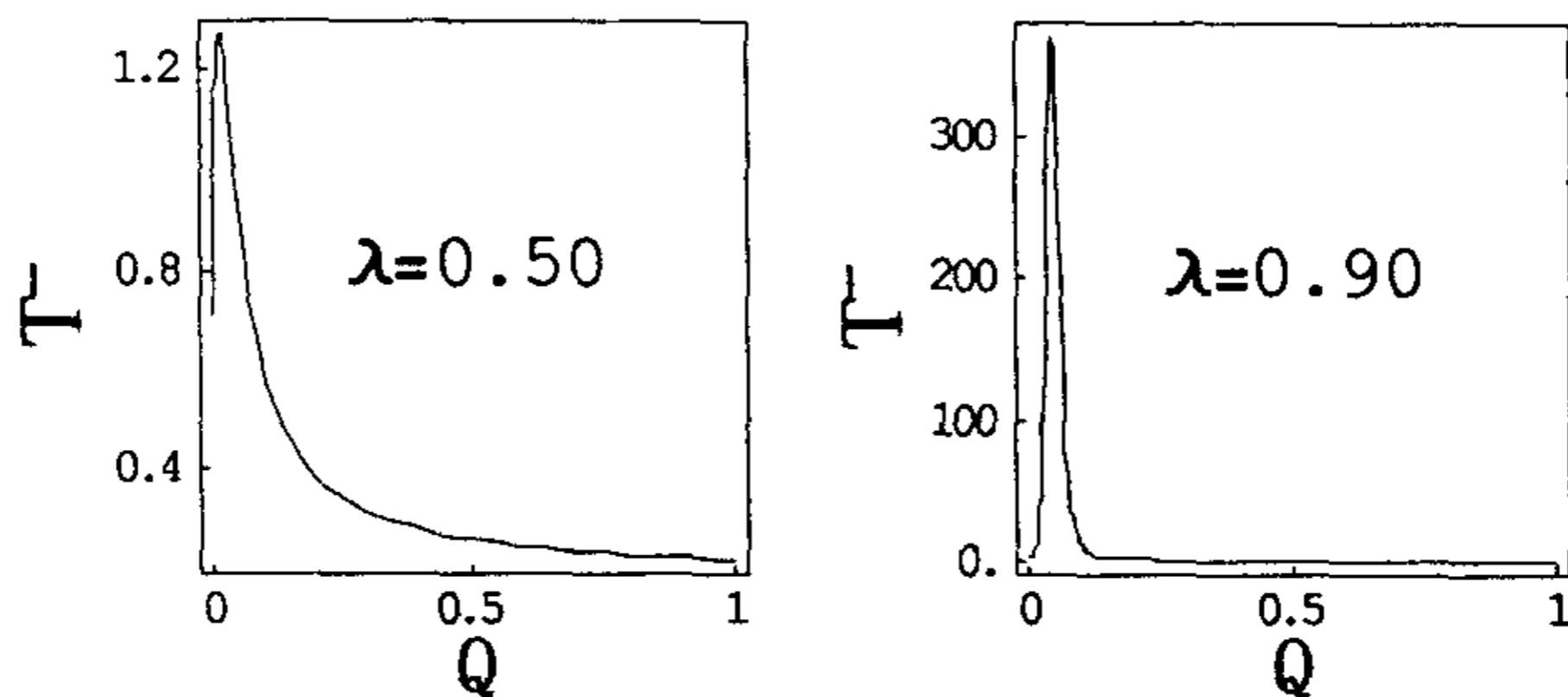


图 6.8  $T^-$  与乘性噪声强度  $Q$  的函数关系。其它参数为：  $L = 1$ ，  $b = 3$ ，  $D = 2$ 。

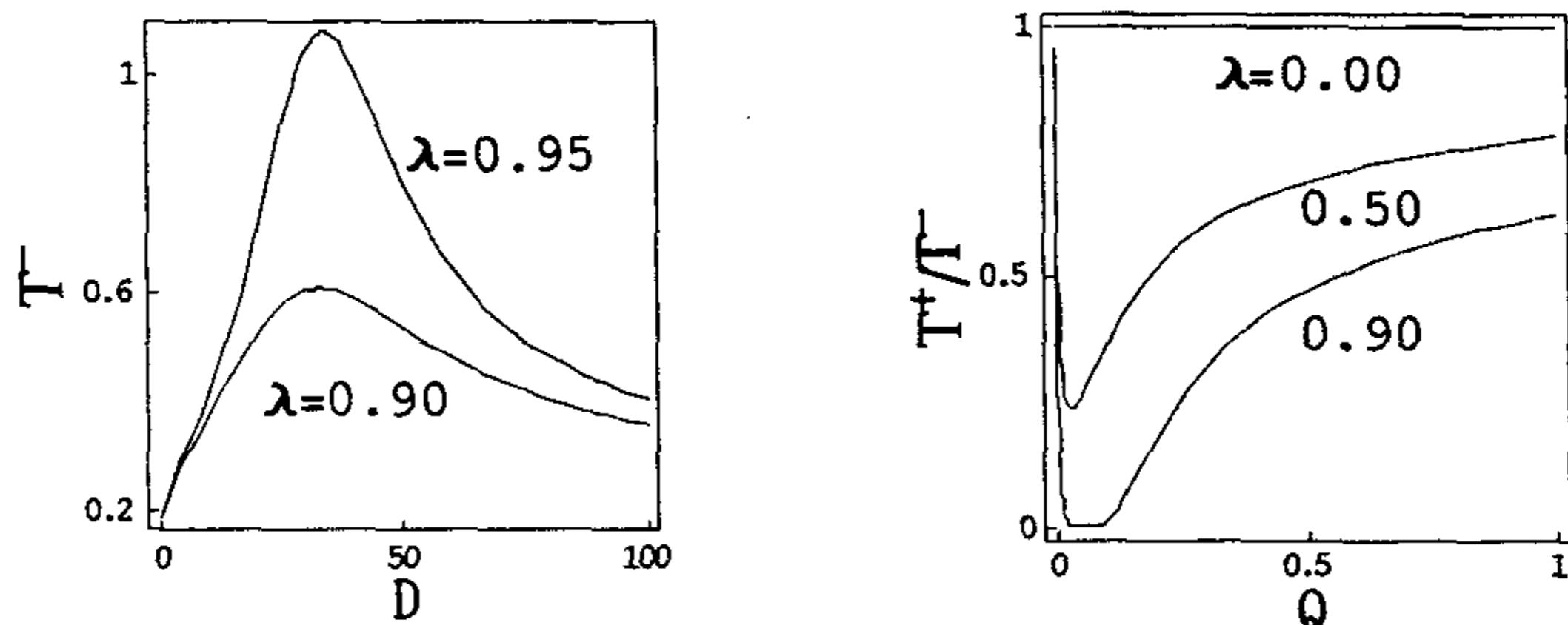


图 6.9  $T^-$  与加性噪声强度  $D$  的函数关系。其它参数为：  $L = 1$ ，  $b = 3$ ，  $Q = 1$ 。

图 6.10  $T^+ / T^-$  与乘性噪声强度  $Q$  的函数关系。其它参数为：  $L = 1$ ，  $b = 3$ ，  $D = 2$ 。

#### 6.4 讨论和结论

由式 (6.10) 和式 (6.12) 可知，当  $\lambda = 0$  时， $T^+ = T^-$ ，因此这两个对称双稳模

型的结果进一步验证了前面的结论。当  $\lambda \neq 0$  时, 怎样从物理图象上理解  $T^+ \neq T^-$  呢? 从定态几率分布来看, 当  $\lambda \neq 0$  时, 粒子在左势阱和右势阱中的概率分布是不相等的, 因此, 这就要求粒子从左势阱逃逸到右势阱的速率与粒子从右势阱逃逸到左势阱的速率不等, 从而要求相反方向的平均第一通过时间也不相等。以四次方模型为例, 当  $\lambda > 0$  时, 如图 6.9 所示, 粒子分布在左势阱中的概率大于分布在右势阱中的概率, 因此, 粒子从左势阱逃逸到右势阱的速率应小于粒子从右势阱逃逸到左势阱的速率, 则应有  $T^+ > T^-$ , 恰如图 6.1 和图 6.3 所示。

从上面两个例子可得如下结论: (i) 由于噪声间关联的存在, 导致对称双稳势的平均第一通过时间左右不对称, 即  $T^+ \neq T^-$ 。而且, 它们随着噪声强度的变化规律也完全不同。(ii) 由于关联效应使平均第一通过时间随噪声强度的变化, 出现共振、抑制, 乃至于出现“相变”。当  $\lambda = 0$  (无关联) 时, 所有  $T^+$  和  $T^-$  随着噪声强度的变化均为单调。

综上所述, 由于两噪声之间相互关联, 导致了对称双稳势系统几率分布的不对称, 从而破坏了粒子越过势垒的平均第一通过时间的对称性。平均第一通过时间和粒子的转移概率之间有定量的联系, 因此这一对称性的破坏会导致许多现象的出现。例如对称周期势系统, 两噪声的相互关联会引起输运现象。又如对称双稳势系统在噪声间相互关联的影响下, 会改变随机共振的特征。我们正在进行这些方面的研究。

## 6.5 小结

许多关于通过双稳势的平均第一通过时间的研究工作往往只讨论单方向上的平均第一通过时间, 而忽略了相反方向上的平均第一通过时间。本章的工作是运用综述中介绍的传统方法计算了通过两个对称势向左和向右两个方向上的平均第一通过时间, 发现平均第一通过时间在向左和向右两个方向上并不对称。我们认为噪声间关联的存在是导致这种空间对称破缺的直接原因。本章内容已发表在《Phys. Letts. A》。其审稿人在审稿报告中, 表现出对这一课题的极大兴趣。而且, 论文发表后, 阿根廷同行 Horacio Wio 教授特地发来电子邮件进行学术交流。

## 7 单模激光损失模型的定态性质分析

自从 A.Fulinski 和 T.Telejko 首次提出两噪声间存在关联后<sup>[43]</sup>，曹力和吴大进对关联噪声驱动的一维随机系统做了详细而全面的研究<sup>[45,134-135]</sup>。以此为理论基础，将噪声间的关联引入到激光系统。他们认为泵浦噪声和量子噪声之间存在关联，结果从理论上得出的结论与后来的实验完全相符。其中，朱士群在激光场幅白噪声模型中，研究了两白噪声间以白关联形式出现的情形<sup>[47]</sup>。文献[47]指出，场幅定态几率分布峰值随净增益系数增加而减小，随关联强度增加而增加；光强均值超过某阈值时，随净增益系数  $a_0$  线性增加，而不受关联强度影响；协方差随关联强度增加而减小。但在实际的激光系统中，泵浦噪声和自发辐射产生的量子噪声之间是以色噪声的形式表现。

### 7.1 单模激光三次方模型的场幅几率分布

在单模激光三次方模型中，如果只考虑激光场幅，则单模激光三次方模型的场幅朗之万方程为

$$\dot{x} = a_0 x - Ax^3 + \frac{D_2}{2x} + x\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) \quad (7.1)$$

其中  $a_0$  和  $A$  分别为净增益系数和自饱和系数。噪声的统计性质为

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_i(t) \rangle &= 0 \quad , \quad \langle \Gamma_i(t)\Gamma_i(s) \rangle = \frac{D_i}{\tau_i} \exp\left[-\frac{|t-s|}{\tau_i}\right] \quad , \\ \langle \Gamma_i(t)\Gamma_j(s) \rangle &= \lambda \sqrt{D_1 D_2} \delta(t-s) \quad , \quad (i, j = 1, 2 \quad , \quad i \neq j) . \end{aligned}$$

其中  $\lambda$  为噪声间关联强度，取值为  $-1 \leq \lambda \leq 1$ 。

先考虑具有  $\delta$  函数关联形式的双色噪声驱动一般系统的朗之万方程

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)$$

运用由 Van.Kampen 引理和 Novikov 定理导出的几率分布函数演化方程<sup>[136]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} f(x)p(x, t) \\ &+ \frac{D_1}{1 - \tau_1[f'(x_0) - g'(x_0)f(x_0)/g(x_0)]} \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x)p(x, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda \sqrt{D_1 D_2} \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{\partial}{\partial x} p(x, t) \\
 & + \frac{D_2}{1 - \tau_2 f'(x_0)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t) + \lambda \sqrt{D_1 D_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x) p(x, t)
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

式中  $x_0$  为确定论定态值。

下面运用导出的几率密度演化方程 (7.2) 式, 导出单模激光三次方模型的近似福克-普朗克方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} C(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D(x) \right] p(x, t) \tag{7.3}$$

式中

$$C(x) = (a_0 + D_1 / \alpha)x - Ax^3 + \frac{D_2}{2x} + \lambda \sqrt{D_1 D_2}$$

$$D(x) = \frac{D_1}{\alpha} x^2 + 2\lambda \sqrt{D_1 D_2} x + D_2 / \beta$$

$$\alpha = 1 + 2\tau_1 (a_0 + AD_2 / 2a_0)$$

$$\beta = 1 + 2\tau_2 (a_0 + AD_2 / 4a_0)$$

由 (7.3) 式求得定态几率分布  $p_{st}(x)$  为

$$p_{st}(x) = \frac{N}{D(x)} \exp \int_x^{\infty} \frac{C(x')}{D(x')} dx'$$

式中  $N$  为定态几率分布归一化常数。其解析表达式,

当  $\alpha\beta\lambda^2 < 1$  时的定态几率分布

$$\begin{aligned}
 p_{st}(x) = & N_1 [D(x)]^{\gamma-1} x^{\beta/2} \exp \left[ -\frac{A\alpha}{2D_1} x^2 + \frac{2A\alpha^2 \lambda \sqrt{D_1 D_2}}{D_1^2} x + \right. \\
 & \left. \xi \arctan \left( \frac{\frac{D_1}{\alpha} x + \lambda \sqrt{D_1 D_2}}{\sqrt{D_1 D_2 (1/\alpha\beta - \lambda^2)}} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

当  $\alpha\beta\lambda^2 > 1$  时的定态几率分布

$$p_{st}(x) = N_2 [D(x)]^{\gamma-1} x^{\beta/2} \exp\left[\frac{-A\alpha}{2D_1} x^2 + \frac{2A\alpha^2 \lambda \sqrt{D_1 D_2}}{D_1^2} x + \xi \arctan h\left(\frac{\frac{D_1}{\alpha} x + \lambda \sqrt{D_1 D_2}}{\sqrt{D_1 D_2} (\lambda^2 - 1/\alpha\beta)}\right)\right] \quad (7.5)$$

当  $\alpha\beta\lambda^2 = 1$  时的定态几率分布

$$p_{st}(x) = N_3 [D(x)]^{\gamma-1} x^{\beta/2} \exp\left[\frac{-A\alpha}{2D_1} x^2 + \frac{2A\alpha^2 \lambda \sqrt{D_1 D_2}}{D_1^2} x + \xi \left(\frac{1}{2\lambda \sqrt{D_1 D_2} + 2D_1 x/\alpha}\right)\right] \quad (7.6)$$

其中

$$\gamma = (a_0\alpha + D_1)/2D_1 - AD_2\alpha^2(4\lambda^2\alpha\beta - 1)/2D_1^2\beta - \beta/4$$

$$\xi = \frac{\lambda}{D_1} \left[ -(\beta D_1/2 + \alpha a_0) + \frac{A\alpha^3 \sqrt{D_1 D_2}}{D_1^2 \lambda} (2\lambda^2 - 3/2\alpha\beta) \right] \left( \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - 1/\lambda^2} \right)^{1/2}$$

式中  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  分别为定态几率分布函数的归一化常数。

下面再考虑光强定态矩的形式。由于  $x = \sqrt{I}$ , 所以定态光强  $I$  的均值为

$$\langle I \rangle = \langle x^2 \rangle = \int_0^\infty x^2 p_{st}(x) dx$$

光强的二阶原点矩为

$$\langle I^2 \rangle = \langle x^4 \rangle = \int_0^\infty x^4 p_{st}(x) dx$$

光强的协方差为

$$\lambda_2(0) = \langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 - 1$$

## 7.2 噪声和系统参数对单模激光定态统计性质的影响

(1) 净增益系数  $a_0$ 、关联强度  $\lambda$  和噪声自关联时间对激光场幅定态几率分布的影响

由图 7.1 可以看出, 场幅定态几率分布函数  $p_{st}(x) \sim x$  曲线的峰值随净增益系数

$a_0$  的增加先减小后增大, 且峰值位置向右移动; 由图 7.2 可看出, 随着关联强度  $\lambda$  的增大, 场幅定态几率分布函数  $p_{st}(x) \sim x$  曲线的峰值减小。这里的结论与文献[47] 的结论有明显的差异。我们认为主要是因为噪声的“颜色”引起的色效应。这里还得出, 场幅定态几率分布函数  $p_{st}(x) \sim x$  曲线的峰值随着乘法噪声自关联时间  $\tau_1$  的增大而明显增大, 见图 7.3; 但随着加法噪声自关联时间  $\tau_2$  的增大, 场幅定态几率分布函数  $p_{st}(x) \sim x$  曲线的峰值增大很小, 如图 7.4 所示。

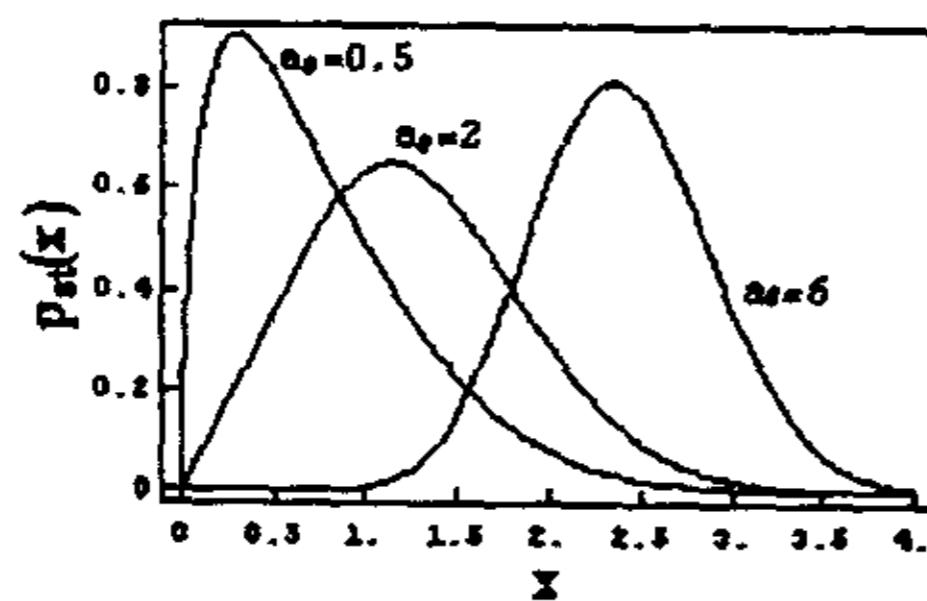


图 7.1 场幅的定态分布函数曲线。其它参数为:  $A = 1$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.1$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\tau_1 = 0.1$ ,  $\tau_2 = 0.1$ 。

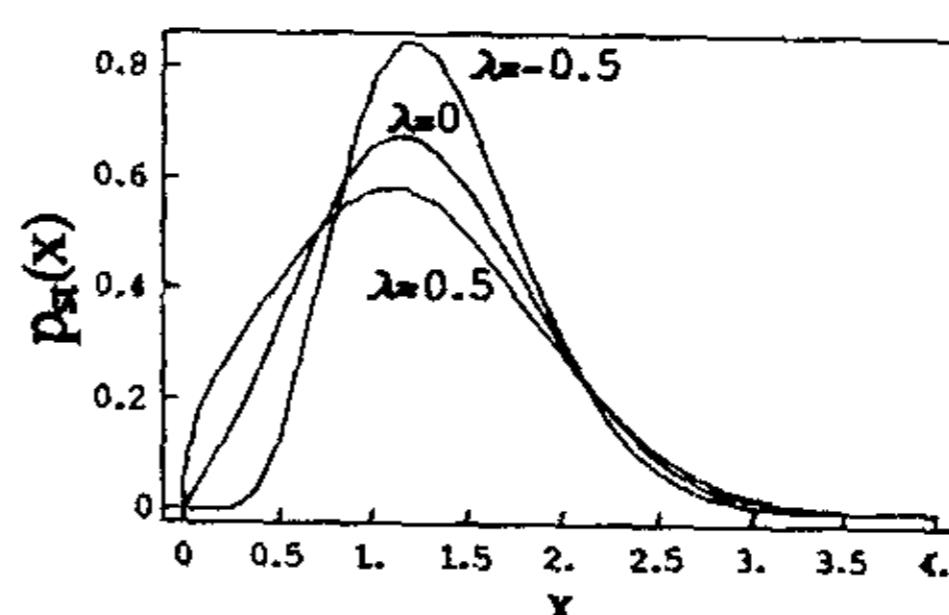


图 7.2 场幅的定态分布函数曲线。其它参数为:  $a_0 = 1$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.1$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\tau_1 = 0.1$ ,  $\tau_2 = 0.1$ 。

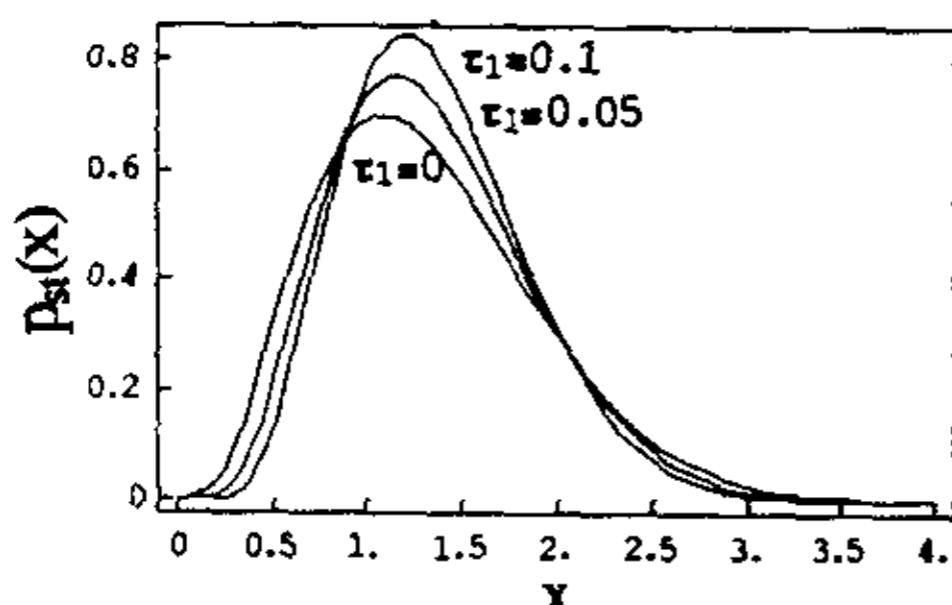


图 7.3 场幅的定态分布函数曲线。其它参数为:  $a_0 = 2$ ,  $A = 1$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.1$ ,  $\lambda = -0.5$ ,  $\tau_2 = 0.1$ 。

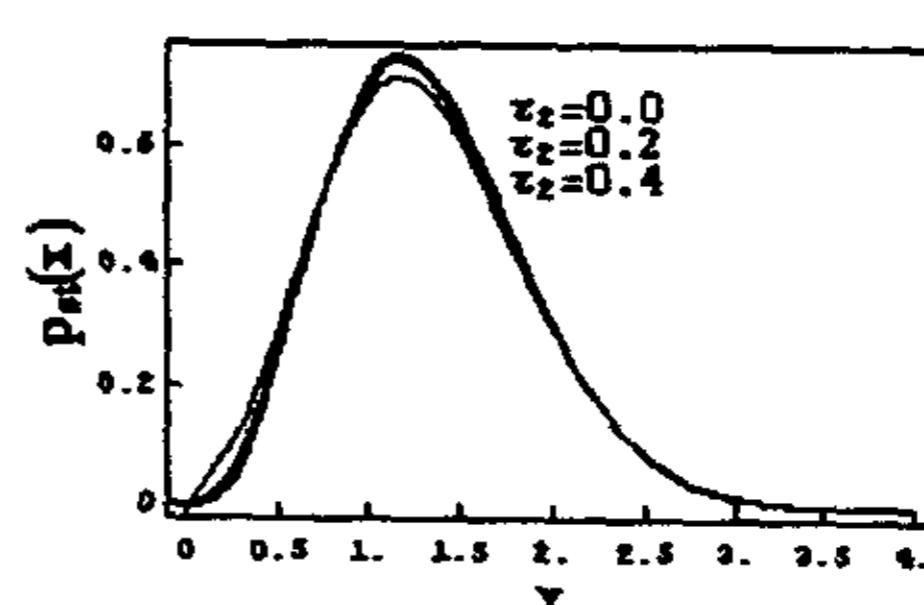


图 7.4 场幅的定态分布函数曲线。其它参数为:  $a_0 = 2$ ,  $A = 1$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.1$ ,  $\lambda = -0.2$ ,  $\tau_2 = 0.1$ 。

## (2) 关联强度 $\lambda$ 、净增益系数 $a_0$ 和噪声自关联时间对激光光强均值的影响

我们对光强均值进行了数值积分, 绘出光强均值  $\langle I \rangle \sim \lambda$  曲线, 发现激光光强均值随噪声间关联强度  $\lambda$  的增大而单调减小。如图 7.5a 所示, 当增大乘法噪声自关联时间  $\tau_1$  时, 在曲线 a 和 b 交点 (交点很靠近图 7.5a 的左上角) 的右边, 光强均值增大; 当增大加法噪声自关联时间  $\tau_2$  时,  $\langle I \rangle \sim \lambda$  曲线几乎不受影响, 如图 7.5b 所示。如图 7.6,  $\langle I \rangle \sim a_0$  曲线中, 光强均值随着净增益系数  $a_0$  的增加几乎线性增加; 当改变乘法噪声自关联时间  $\tau_1$  和加法噪声自关联时间  $\tau_2$  时,  $\langle I \rangle \sim a_0$  曲线几乎不受影响, 分别见图 7.6a 和图 7.6b。

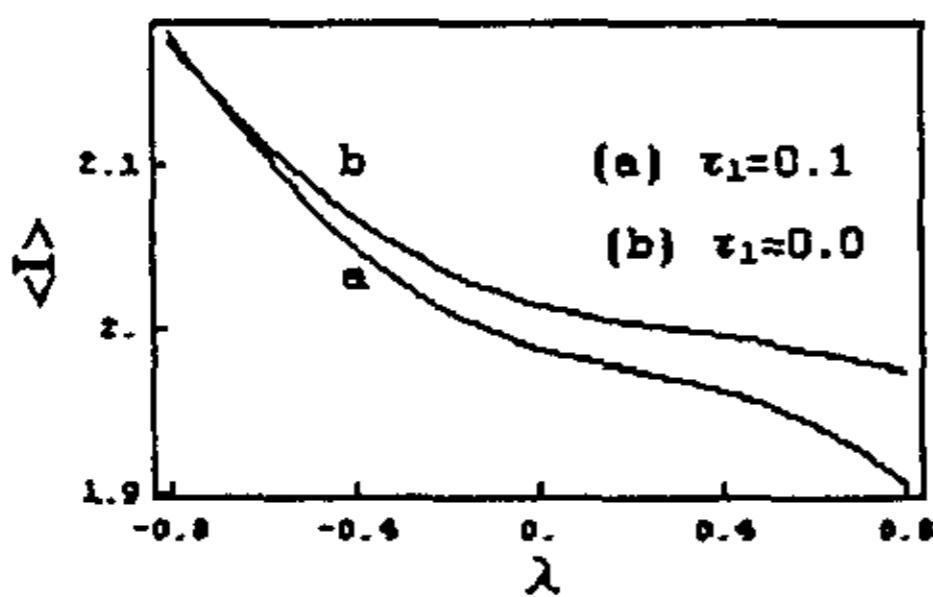


图 7.5a 光强均值随着噪声关联强度的变化曲线。其它参数为:  $a_0 = 2$ ,  $A = 1$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.1$ ,  $\tau_2 = 0.01$ 。

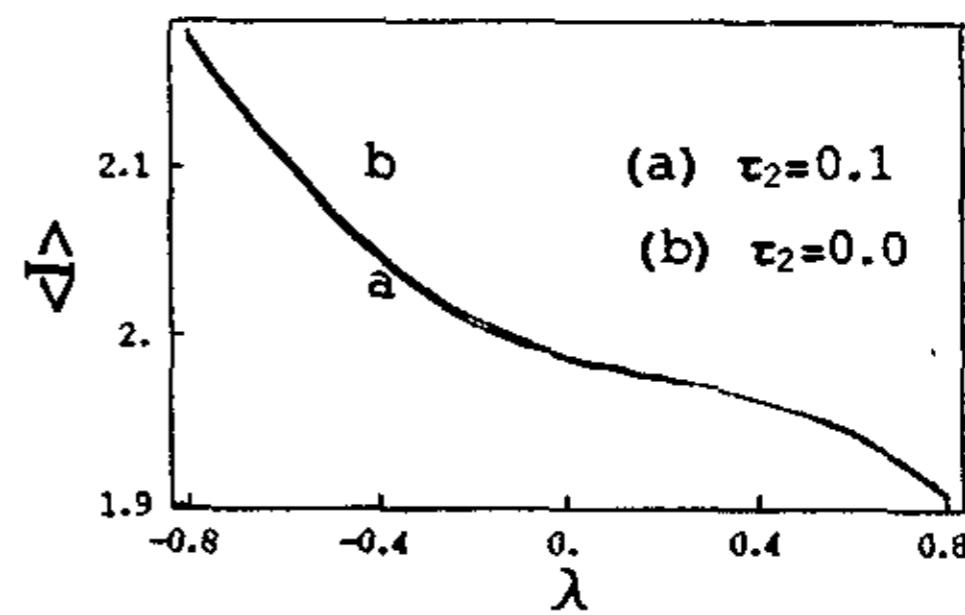


图 7.5b 光强均值随着噪声关联强度的变化曲线。其它参数为:  $a_0 = 2$ ,  $A = 1$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.1$ ,  $\tau_1 = 0.1$ 。

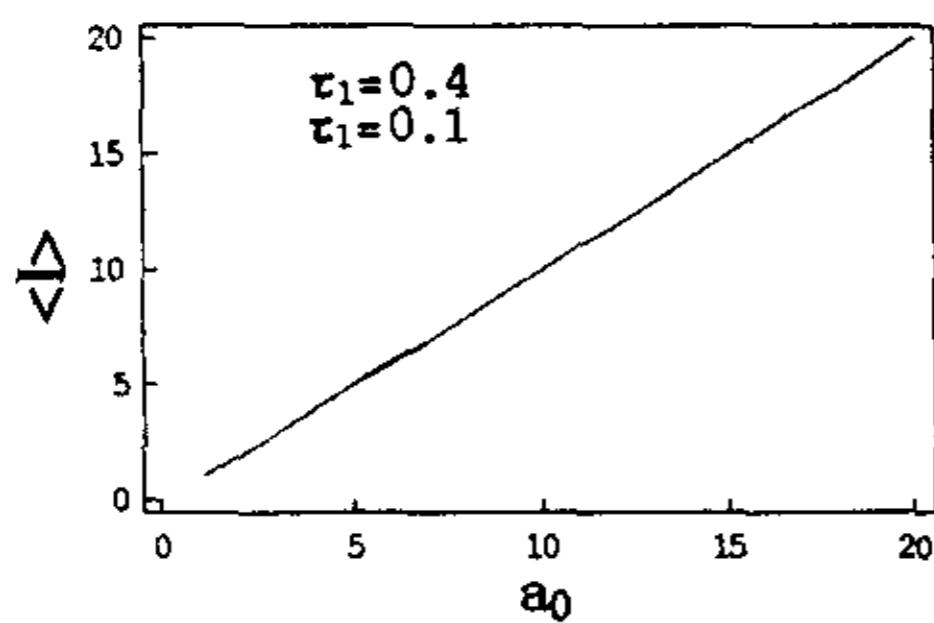


图 7.6a 光强协方差随着净增益系数的变化曲线。其它参数为:  $A = 1$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.1$ ,  $\lambda = -0.1$ ,  $\tau_2 = 0.1$ 。

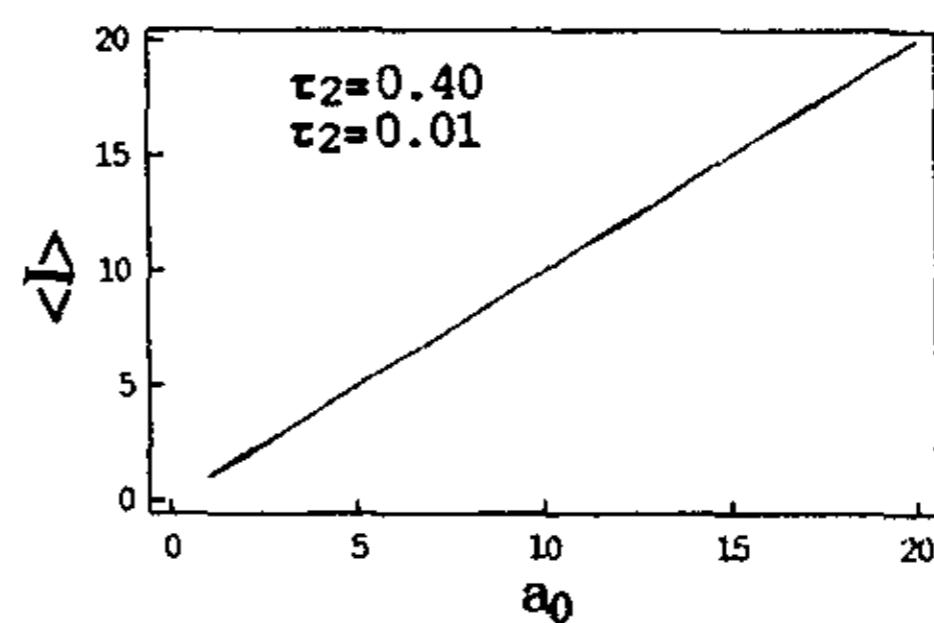


图 7.6b 光强协方差随着净增益系数的变化曲线。其它参数为:  $A = 1$ ,  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.1$ ,  $\lambda = -0.1$ ,  $\tau_1 = 0.1$ 。

### (3) 净增益系数 $a_0$ 和色噪声自相关时间对协方差的影响

从图 7.7 所示的  $\lambda_2(0) \sim a_0$  曲线可以看出, 协方差随净增益系数  $a_0$  的增大而单调减小, 将关联强度  $\lambda$  的增大时,  $\lambda_2(0) \sim a_0$  曲线整体向上抬, 说明这时激光器的精度变差。这与文献[47] 的结论有差别, 我们认为这是由于色效应引起的。由图 7.8 可以看出, 当乘法噪声的自相关时间  $\tau_1$  增大时, 协方差  $\lambda_2(0) \sim a_0$  曲线整体下移, 说明激光器的精度随  $\tau_1$  增大而提高; 当加法噪声自相关时间  $\tau_2$  变化时, 协方差  $\lambda_2(0) \sim a_0$  曲线几乎不受影响, 见图 7.9。

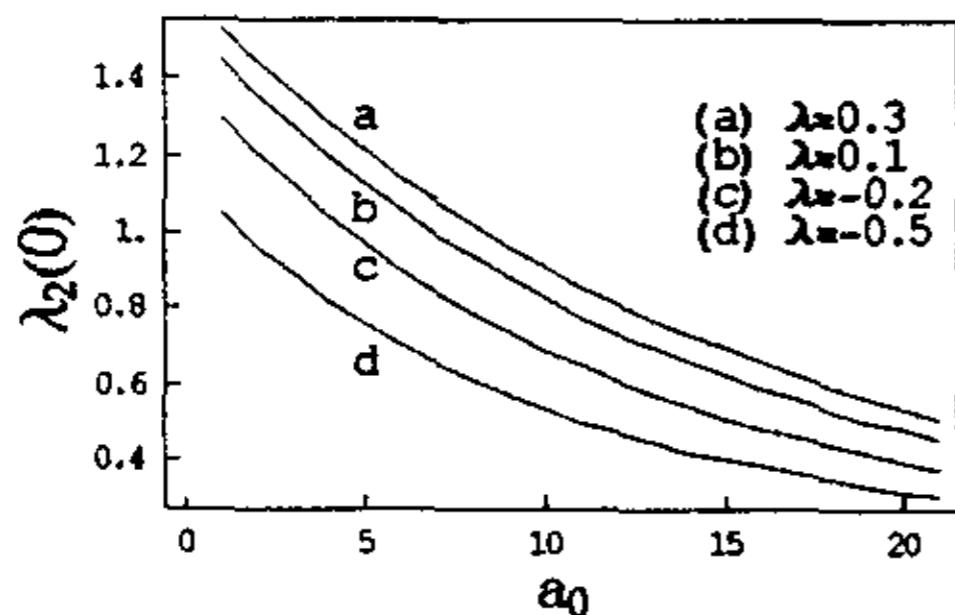


图 7.7 光强协方差随着净增益系数的变化曲线。其它参数为:  $A = 1, D_1 = 1, D_2 = 0.1, \lambda = -0.1, \tau_2 = 0.1$ 。

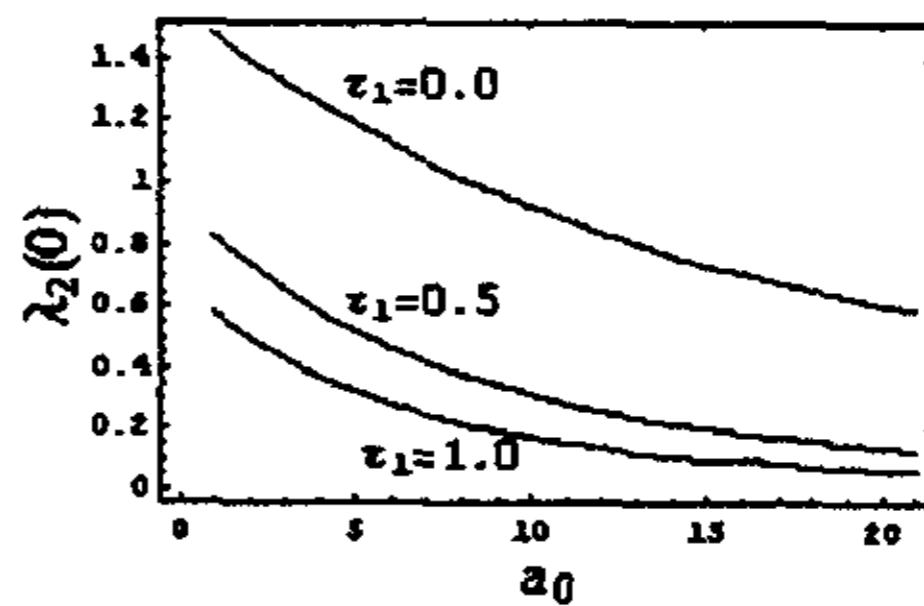


图 7.8 光强协方差随着净增益系数的变化曲线。其它参数为:  $A = 1, D_1 = 1, D_2 = 0.1, \lambda = -0.2, \tau_2 = 0.1$ 。

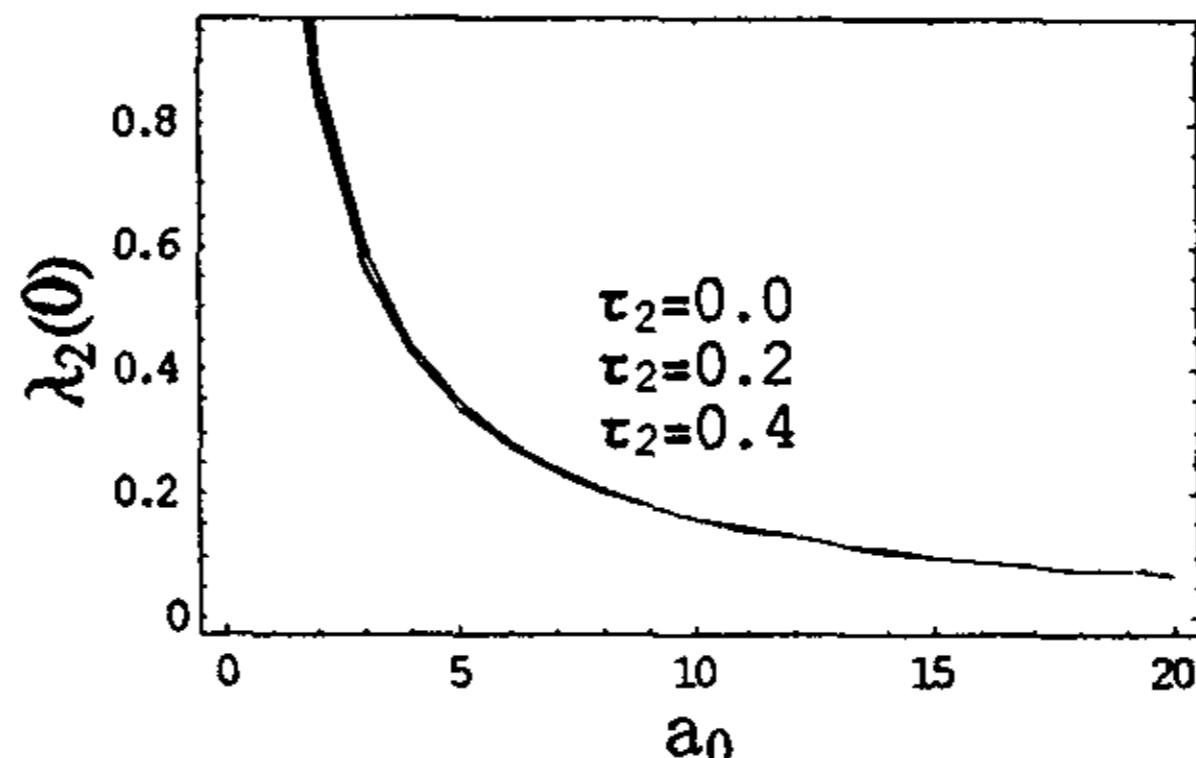


图 7.9 光强协方差随着净增益系数的变化曲线。其它参数为:  $A = 1, D_1 = 1, D_2 = 0.1, \lambda = -0.2, \tau_2 = 0.01$ 。

### 7.3 小结

本章内容的创新之处是首次研究由关联色噪声驱动的单模激光损失模型的定态性质。本章工作详细分析了净增益系数、关联强度和噪声自关联时间对激光场幅定态分布性质的影响，对激光光强均值的影响和对激光场幅协方差的影响。

## 8 总结与展望

纵观物理学的全部伟大发现，不难看出，它们可以分成三类。第一类是偶然的发现。第二类是指依靠理论或实验，在直觉或预见的基础上，有目的地进行探索，从而发现这些现象。第三类发现则是一些由具有数学精确性的理论所预言的现象。这类发现的一个典型例子是赫兹发现了麦克斯韦在其理论中所预言的电磁波。现在，第一类的发现越来越少，第三类由理论预言的发现则越来越多。因此，对我们所研究的方向进行总结和展望是很有必要的。

本论文用解析的方法研究了由关联噪声驱动的随机动力学系统中随机共振的特征、平均第一通过时间的对称性破缺及激光系统统计性质的分析。本章，我们先对本文的工作做一个总结，然后根据有关文献以及作者平时在科研中的思考，对进一步可能开展的研究进行展望。

### 8.1 对随机共振和第一通过时间对称性破缺的总结

在论文的综述部分，我们介绍了目前国内外许多文献对随机共振和平均第一通过时间的研究情况。在他们研究的基础上，我们提出了更普遍更简洁的由关联噪声驱动的双稳系统和激光系统的随机动力学模型，通过解析计算导出了相应的公式，并对许多新的现象进行了深入的研究。

首先是对随机共振的研究。（1）运用绝热近似理论，研究了锯齿型双稳势阱模型中随机共振信噪比的性质。我们发现，信噪比随着加法噪声强度变化时，不仅会出现共振，还会出现抑制、单调减少和单调增加四种情况；信噪比随着势垒高度的变化曲线会出现抑制、双极值和单调下降三种情况。（2）运用绝热近似理论，研究了无限深双稳势阱模型中的多重随机共振现象。我们在信噪比随着噪声关联强度的曲线中观察到了多重随机共振现象，并且还发现信噪比随着加性噪声强度和乘性噪声的变化，既出现了随机共振也出现了抑制。（3）运用线性化近似方法，研究了出现在单模激光系统中单峰形式和多峰形式的随机共振现象。我们发现，信噪比随着关联时间的变化不仅出现单峰的随机共振，而且还出现了多重随机共振。当适当改变参数时，还会出现多重随机共振和单峰形式的随机共振之间的转变。

其次是对平均第一通过时间的研究。我们运用解析方法研究了噪声间关联对对

称双稳系统的平均第一通过时间的影响。提出了由关联噪声驱动的对称双稳系统中的相反方向平均首通时间的关系,证明它们不再相等(对称破缺)。作为例子,分别计算了四次方模型和锯齿模型的平均第一通过时间。由平均第一通过时间的解析结果,进一步证明了在同样参数区  $T(x_- \rightarrow x_+; \lambda) \neq T(x_+ \rightarrow x_-; \lambda)$ ,不仅如此,还发现  $T^+$  (即  $T(x_- \rightarrow x_+; \lambda)$ ) 和  $T^-$  (即  $T(x_+ \rightarrow x_-; \lambda)$ ) 随着乘法噪声强度  $Q$  和加法噪声强度  $D$  的变化呈现出不同的规律。研究发现:(1)由于噪声间关联的存在,导致对称双稳势的平均第一通过时间左右不对称,即  $T^+ \neq T^-$ 。而且,它们随着噪声强度的变化规律也完全不同;(2)由于噪声间关联效应使平均首通时间随噪声强度的变化,出现共振、抑制,乃至于出现“相变”。当  $\lambda=0$  (无关联)时,所有  $T^+$  和  $T^-$  随着噪声强度的变化均为单调。

## 8.2 对随机共振研究的展望

本文对随机共振进行了大量的研究。我们的研究主要集中在对出现在对称双稳系统中的随机共振现象的探讨。从物理和数学的角度看,我们选取的模型都很简洁,因而具有物理意义的广泛性。但是,也正是由于这种简洁和广泛性,使得我们的模型很粗糙,因而得出的结论也只能说是半定量的。进一步要做的工作,应该是改变我们目前的模型,使模型更加丰富,更加与实际的物理图景贴近,因而也使我们的工作具有更为重要的实际应用价值和指导意义。

由于随机共振现象最初是在双稳系统中发现的,因而以前许多论文和我们研究的模型都选择的是双稳和单稳的随机动力学模型。对于多稳随机系统的研究一直被忽略。但是我们并不认为对多稳随机系统中随机共振的研究应该被忽略,相反,在多稳系统中,粒子在各稳态间的流动会更加自由,也更加复杂,因而其中随机共振出现的形式必然更加的丰富多彩。目前,关于处理多稳随机系统的随机共振理论还没有出现,只有很少的文献用数值模拟和实验的方法对它做过一些探讨。我们相信,多稳随机系统的随机共振理论的出现一定会成为随机共振理论研究的一个新的里程碑。因此,我们下一步的研究应尽可能积极参与到这一课题中去。

另外,本文的工作局限于对对称双稳系统中的随机共振现象的探讨。而对于非对称双稳系统的随机共振研究也一直被忽略。仅有很少的文献对这一课题作过一些

零散的研究。在实际的物理系统中，大多数的随机动力学系统都是非对称的。因而对非对称双稳系统的随机共振研究同样具有重要的实际意义。但是，目前处理非对称双稳系统的随机共振的理论也还没有出现。我们曾在 2002 年，对这一课题作了许多的尝试，但是没有得到令人满意的结果。我想这一问题可能已经引起了国际和国内其他学者的关注，但至今为止还没有看到对这一问题的报道。因此，加紧对这一课题的研究是非常必要的。我认为，即使暂时不能提出完整的理论分析，先做一些数值和实验的探索也是很有价值的。

在本文的第五章，我们初步地研究了单模激光中的随机共振的性质，我们所采用的方法是线性化近似。而这种近似是有条件的，即线性化时的微扰不能太大。因此，以后的工作可以考虑用新的思路和方法来进行更加适当的处理。如过可能的话，可以考虑在激光场幅的相位中引入相位噪声。

从研究模型上看，我们的研究模型可以进一步的拓展，比如在生物学领域，特别是对神经元信息传递机制的研究。这方面的文献非常丰富，因此进入这一类课题也是不困难的。从研究方法上看，国际上的许多文献中都已经非常普遍地采用数值模拟、电路模拟和实验，而我们的研究仅限于理论的方法。因此，加强这方面的研究也是非常必要的。

要最终解决上述问题，显然必须付出更艰辛的努力。总之，对这一研究方向的展望，可以借用毛主席的名言：前途是美好的，道路是曲折的。

## 致 谢

首先，我要衷心地感谢两位导师曹力教授和吴大进教授。本文是在他们的悉心指导下完成的。三年来，两位恩师不仅在学习和科研上给予耐心的指导，而且在生活上给予我无微不至的关怀。两位导师高尚的品德、渊博的知识、严谨的治学态度以及诲人不倦的精神，使我受益非浅。

感谢博士师兄柯圣志、朱佑新和杨明在我硕士学习期间给予的指导和帮助。

感谢硕士游敬云、梁贵云和张莉在我的学习和科研过程中与我进行的各种深入而有意义的讨论。

感谢北京大学电子学系博士师兄周小计和同学汪汉斌在我到北京进行学术调研期间给予的大力协助和支持。

感谢物理系其他良师益友的支持和帮助。

感谢我的家人、同学和朋友的一贯支持和热情鼓励。

本文的写作时间虽然充足，但是由于自己在专业知识方面的浅薄和语言功底方面的缺乏，始终没有使本文达到自己所期盼的面貌，同时作为两位导师的关门弟子，未能为本方向的科研工作划上圆满的句号，因而深感愧疚。

谨以此文献给所有支持和帮助过我的人以及相同研究方向的所有科研工作者！

## 参考文献

- [1] 霍裕平, 郑久仁. 非平衡统计物理. 北京: 科学出版社, 1994. 50~62
- [2] 李如生. 平衡和非平衡统计物理. 北京: 清华大学出版社, 1995. 113~120
- [3] I. 普利高津, I.斯唐热 著. 从混沌到有序. 曾庆宏, 沈小峰 译. 上海: 上海译文出版社, 1987. 5~21
- [4] I. 普利高津 著. 从存在到演化. 曾庆宏, 严仕健 译. 上海: 上海科技出版社, 1986. 5~21
- [5] I. 普利高津, G.尼科里斯 著. 非平衡系统的自组织. 徐锡深, 陈式刚等 译. 北京: 北京科学出版社, 1986. 5~21
- [6] H. 哈肯 著. 协同学. 徐锡中等译. 北京: 原子能出版社, 1984. 1~18
- [7] H. 哈肯 著. 高等协同学. 郭治安译. 北京: 科学出版社, 1989. 35~135
- [8] 吴大进, 曹力, 陈立华. 协同学原理与应用. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990. 10~50
- [9] 胡岗. 随机力与非线性系统. 上海: 上海科技教育出版社, 1994.12~200
- [10] C.R.Doering and J.C.Gadoua. Resonant Activation over a Fluctuating Barrier. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, 69: 2318~2321
- [11] M.Bier, R.D.Astumian. Matching a diffusive and a kinetic approach for escape over a fluctuating barrier. *Phys. Rev. Lett.*, 1993, 71: 1649~1653
- [12] P.Hanggi. Escape over fluctuating barriers driven by colored noise. *Chem. Phys.*, 1994, 180: 157~160
- [13] P.Reimann. Thermally activated escape with escape with potential fluctuations driven by an Ornstein-Uhlenbeck process. *Phys. Rev. E.*, 1995, 52: 1579~1601
- [14] F.Marchesoni, L.Gammaitoni, E.Menichella-Saetta et al. Thermally activated escape controlled by colored multiplicative noise. *Phys. Lett. A.*, 1995, 201: 275~279
- [15] M.Marchi, F.Marchesoni, L.Gammaitoni et al. Resonant activation in a bistable system. *Phys. Rev. E.*, 1996, 55: 3479~3484
- [16] R.Bartussek, J.R.Madureira and P.Hanggi. Surmounting a fluctuating double well: A numerical study. *Phys. Rev. E.*, 1995, 52: 2149~2153

# 华中科技大学硕士学位论文

---

- [17] A. J. R. Madureira and P. Hanggi. Escape From a Fluctuating Double Well. *Phy. Rev. E.*, 1995, 51: 3849~3857
- [18] A.J.R. Madureira, P. Hanggi and H. S. Wio. Giant Suppression of the Activation Rate in the Presence of Correlated White Noise Sources. *Phys. Lett. A.*, 1996, 217: 248~252
- [19] R.Mannella, V.Palleschi. On the mean first passage time in a bistable system: some recently computed data. *Phys.Lett.A.*, 1988, 129:317~320
- [20] Y.Jia and J.R.Li. Transient properties of a bistable kinetic model with correlations between additive and multiplicative noises: Mean first-passage time. *Phys.Rev.E.*, 1996,53:5764~5767
- [21] W.Horsthemke, R.Lefever. *Noise-induced Transitions.* Berlin: Springer-Verlag, 1984,37~56
- [22] K.Svoboda, C.F.Schmidt, B.J.Schappand et al. Direct observation of kinesin stepping by optical trapping interferometers. *Nature*, 1993,365:721~724
- [23] M.O.Mangnasco. Forced thermal ratchets. *Phys.Rev.Lett.*,1993,71:1477~1481
- [24] C.R.Doering, W.Horsthemke and J.Piordan. Nonequilibrium fluctuation-inducee transport. *Phys.Rev.Lett.*,1994,72:2984~2988
- [25] J.Maddox. Directed motion from random noise. *Nature.*, 1994, 369:181~184
- [26] M.M.Millonas and M.I.Dyman. Transport and current reversal in stochastically driven ratchets. *Phys.Lett.A.*, 1994, 183:65~68
- [27] M.M.Millonas. Self-consistent microscopic theory of fluctuation-induced transport. *Phys.Rev.Lett.*, 1995, 74:10~13
- [28] I.Derenyi and T.Vicsek. Cooperative transport of Brownian particles. *Phys.Rev.Lett.*, 1995, 75:374~377
- [29] J.Luczka, R.Bartussek, P.Hanggi. White noise induced transport in periodic structures. *Europhys.Lett.*,1995, 31:431~434
- [30] P. Hanggi, R. Bartussek. Brownian Rectifiers: How to Convert Brownian Motion into Directed Motion. *Nonliear Physics of Complex Systems*, in *Lect. Notes. In Phys.*,1996, 294: 479~491
- [31] I. Zapata, R. Bartussek, F. Sols et al. Voltage Rectification by a SQUID Ratchet. *Phys.*
-

# 华中科技大学硕士学位论文

Rev. Lett., 1996, 77: 2292~2299

- [32] P. Reimann, R. Bartussek, R. Hauer et al. Brownian Motors Driven by Temperature Oscillators. Phys. Lett. A., 1996, 215: 26~34
- [33] R. Bartussek, P. Hanggi, F. Sols et al. Voltage Rectification in a Driven Asymmetric SQUID. Inter. Jounal. Bif. and Chaos., 1998, 8 : 849~861
- [34] Y. Jia and J.R.Li. Can a Correlation Ratchet Operate under Spatial Symmetry and Temporal Symmetry. Chin. Phys. Lett., 1998, 15: 315~319
- [35] R.D. Astumian and M. Bier. Fluctuation Driven Ratchets: Molecular Motors. Phys. Rev. Lett., 1994, 72: 1766~1770
- [36] T.E. Dialetas, Katja Lindenberg and G. P. Tsironis. Ratchet Motion by Deterministic and Correlated Stochastic Forces. Phys. Rev. E., 1997, 56: 3976~3985
- [37] S.E. Mangioni, R.R. Deza, R. Toral et al. Nonequilibrium Phase Transition Induced by Multiplicative Noise: Effects of Self-Correlation. Phys. Rev. E., 2000, 61: 223~231
- [38] C.W.Gardiner. Handbook of Statistic Methods for Physics, Chemistry and the Nature Sciences. Berlin: Spring-Verlag, 1983, 78~95
- [39] H.Risken. The Fokker-Planck Equation:Methods of Solution and Applications. Berlin: Spring-Verlag, 1984, 57~86
- [40] 杨明. 非马尔可夫噪声驱动系统的随机动力学及激光器产生亚泊松光的研究. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学图书馆, 1998
- [41] H. Haken. Laser Theory. II. Berlin: Springer, 1984, 121~145
- [42] R.F. Fox. Mean First-passage Times and Colored Noise. Phys. Rev. A., 1988, 37: 911~917
- [43] A.Fulinski and T.Telejko. On the Effects of Interference of Additive and Multiplicative Noises. Phys. Lett. A., 1991, 152: 11~17
- [44] L.Cao and D.J.Wu. Stochastic dynamics for systems driven by correlated noises. Phys.Lett.A., 1994, 185:59~65
- [45] D.J.Wu, L.Cao and S.Z.Ke. Bistable kinetic model driven by correlated noises:steady-state analysis. Phys.Rev.E.,1994,50:2496~2499
- [46] L.Cao, D.J.Wu and S.Z.Ke. Bistable kinetic model driven by correlated

# 华中科技大学硕士学位论文

---

- noises:Unified colored noise approximation. Phys.Rev.E.,1995,52:3228~3231
- [47]S.Q.Zhu. Steady-State Analysis of a Single-Mode Laser With Correlations Between Additive and Multiplicative Noises. Phys. Rev. A., 1993, 47: 2405~2408
- [48]Y.Jia, L. Cao and D.J.Wu. Effects of a Dye Laser with Correlation Between Additive and Multiplicative Noise: Transient Properties. Phys. Rev. A., 1995, 51: 3196~3201
- [49]Q.Long, L.Cao, D.J.Wu et al. Correlation Between Additive and Multiplicative Noises and its Effects on two-mode Laser. Chin. Phys. Lett., 1997, 14: 593~595
- [50]Q.Long, L.Cao, D.J.Wu et al. One-dimensional Model of a Single-Mode Laser with correlation Between Additive and Multiplicative Noises. Phys. Lett. A., 1996, 216: 106~110
- [51]Q.Long, L.Cao, D.J.Wu et al. Phase Lock and Stationary Fluctuations Induced by Correlation Between Additive and Multiplicative Noises Terms in a Single-Mode Laser. Phys. Lett. A., 1997, 231: 339~343
- [52]Q.Long, L.Cao, D.J.Wu et al. Correlation Between Additive and Multiplicative Noises Induced first-order-like Phase transition in a two-mode Laser. Chin. Phys. Lett., 1996, 11: 833~835
- [53]A.J.R.Madureira and P.Hanggi and H.S.Wio. Giant Suppression of the Activation Rate in the Presence of Correlated White Noise Sources. Phys. Lett. A., 1996, 172: 248~251
- [54]R.Bartussek, A.J.R.Madureira and P.Hangg. Surmounting a Fluctuating Double Well: A Numerical Study. Phys.Rev.E.,1995, 52:R2149~R2152
- [55]P.G.de Gennes. The Physics of Liquid Crystal. Oxford,1975
- [56]S.Z.Ke, D.J.Wu, L.Cao et al. Stationary Properties in a Single-Mode Laser with Cross-Correlation Between Quantum Noise Terms. Phys. Lett. A., 2001, 281: 113~121
- [57]S.Z.Ke, L.Cao, D.J.Wu et al. General Laser Intensity Langevin Equation in a Single-Mode Laser Model. Chin. Phys. Lett., 2001, 18: 370~372
- [58]Y.Jia, J.R.Li and Y.C.Chen. a Novel Phase Transition Phenomenon in Bistable System. Chin. Phys. Lett., 1997, 14: 245~247

# 华中科技大学硕士学位论文

---

- [59]R.Benzi, A.Sutera and A.Vulpiana. The mechanism of stochastic resonance. *J.Phys.A.*, 1981, 14:453~460
- [60]C.J.Tessone and H.S.Wio. Stochastic resonance in bistable systems:The effect of simultaneous additive and multiplicative correlated noises. *Mod.Phys.Letts.B.*, 1998, 12:1195~1202
- [61]C.J.Tessone, H.S.Wio and P.Hanggi. Stochastic resonance driven by time-modulated correlated white noise sources. *Phys.Rev.E.*, 2000, 62:4623~4632
- [62]Y.Jia, S.N.Yu and J.R.Li. Stochastic resonance in a bistable system subject to multiplicative and additive noise. *Phys.Rev.E.*, 2000, 62:1869~1878
- [63]Y.Jia, X.P.Zheng, X.M.Hu et al. Effect of colored noise stochastic resonance in a bistable system subject to multiplicative and additive noise. *Phys.Rev.E.*, 2001, 63:031107-1~031107-8
- [64]J.Wang, L.Cao and D.J.Wu. Stochastic Resonance in a Bistable Sawtooth Potential Driven by Correlated Multiplicative and Additive Noise. *Chin.Phys.Lett.*, 2002, 19:1416~1419
- [65]J.Wang, L.Cao and D.J.Wu. Stochastic multiresonance in a bistable sawtooth potential driven by correlated multiplicative and additive noise. *Eur.Phys.J.B.*, 2002, 29: 123~128
- [66]X.Q.Wei, L.Cao and D.J.Wu. Stochastic dynamics for systems driven by correlated colored noise. *Phys.Lett.A*., 1996, 207:338~341
- [67]Y.Jia and J.R.Li. Reentrance Phenomena in a Bistable Kinetic Model Driven by Correlated Noise. *Phys.Rev.Lett.*, 1997, 78:994~997
- [68]S.Chandrasekhar. Stochastic Problem in Physics and Astronomy. *Rev.Mod.Phys.*, 1943, 1:19~23
- [69]G.E.Uhlenbeck. On the Theory of the Brownian Motion. *Rev.Mod.Phys.*, 1945, 17: 323~325
- [70]P.Hanggi. Non-markov Processes:The Problem of the Mean First Passage Time. *Z.Phys.B.*, 1981, 45:79~83
- [71]P.Hanggi. Bistability Driven by Colored Noise:Theory and Experiment. *Phys.Rev.A.*, 1985, 32:695~699

# 华中科技大学硕士学位论文

---

- [72] P.Hanggi. First-Passage Time Problem for Non-markovin Processes. Phys.Rev.A., 1985, 32:1934~1937
- [73] J.M.Sancho. Mean first-passage time of continuous non-Markovian processes driven by colored noise. Phys.Rev.A., 1985, 33:3399~3403
- [74] F.Fox. Functional-calaulus Approach to Stochastic Differential Equation. Phys.Rev.A., 1986, 33:476~479
- [75] F.Fox. Laser-noise analysis by first-passage-time techniques. Phys.Rev.A., 1986, 34:3405~3408
- [76] J.M.Sanchxo. Analytical and numerical studies of multiplicative noise. Phys.Rev.A., 1982, 26:1589~1609
- [77] J.M.Sancho. Mean First-Passage Time of Continuous Non-Markovian Processes Driven by Colored Noise. Phys.Rev.A., 1986, 33:3399~3403
- [78] 曹力, 吴大进, 杨波. 平方外噪声驱动系统的几率演化和平均第一通过时间. 华中理工大学学报, 1991, 19:33~38
- [79] C.Z.Diao, L.Cao and D.J.Wu. The Mean First-Passage Time of the System Driven by Internal and External Noise Simutoneously. Commun.Theor.Phys., 1989, 12:367~371
- [80] F. Castro, H. S. Wio and G. Abramson. Colored-Noise Problem: A Markovian Interpolation Procedure. Phys. Rev. E., 1995, 52: 159~164
- [81] P.Jung and P.Hanggi. Dynamical systems:A unified colored-noise approximation. Phys. Rev. A., 1987, 35: 4464~4467
- [82] G.Hu. Two-Dimension Probability Distribution of System Driven by Colored Noise. Phys. Rev. A., 1991, 43: 700~705
- [83] B.McNamara, K.Wiesenfeld and R.Roy. Observation of stochastic resonance in a ring laser. Phys.Rev.Lett., 1988, 60: 2626~2629
- [84] Mandel, L.R.Roy and S.Singh. in Optical Bistability. edited by C.M.Bowden, M.Ciftan, and H.R.Robl (Plenum, New York), 1981, 127~128.
- [85] S.Fauve and F.Heslot. Stochastic resonance in bistable system. Phys.Lett. A., 1983, 97:5 ~7
- [86] R.N.Mantegna, B.Spagnolo. Stochastic resonance in a tunnel diode. Phys.Rew.E., 1994, 49:R1792~R1795

- [87] R.N.Mantegna, Stochastic resonance phenomenon in single-crystal Nb. B.Spagnolo and Nuovo Cimento D. ,1995, 17: 873~876
- [88] R.N.Mantegna and B.Spagnolo. Noise Enhanced Stability in an Unstable System. Phys.Rew.Lett., 1996, 76:563~566
- [89] S.Kadar, J.C.Wang and K.Showalter. Noise-supported traveling waves in sub-excitatory media. Nature., 1998, 39:770~773
- [90] L.Gammaitoni, P.Hanggi P.Jung et al. Stochastic resonance. Rev.Mod.Phys., 1998, 70:223~287
- [91] G.Hu, T.Ditzinger, C.Z.Ning and H.Haken. Stochastic Resonance without External Periodic Force. Phys .Rev. Lett.,1993, 71: 807~810
- [92] A.Fulinski and P.F.Gora. Universal Character of Stochastic Resonance and a Constructive Role of White Noise. J. Stat. Phys., 1999, 101: 483
- [93] J.M.G Vilar, J.M.Rubi. Stochastic Multiresonance. Phys. Rev. Lett., 1997, 78: 2882~2885
- [94] B.McNamara and K.Wiesenfeld. Theory of stochastic resonance. Phys. Rev. A.,1989, 39: 4854~4868
- [95] A. V.Barzykin and K.Seki. Periodically driven linear system with multiplicative colored noise. Phys. Rev. E., 1998, 57:6555~6563
- [96] F.J.Castro, M.N.Kuperman, M.Fuentes et al. Experimental evidence of stochastic resonance without tuning due to non-Gaussian noise. Phys.Rev.E., 2001, 64: 051105-1~051105-3
- [97] M.A.Fuentes, R.Toral, Horacio, et al. Enhancement of stochastic resonance:the role of non-Gaussian noises. Physica A., 2001, 295:114~122
- [98] Nilankovitch, M.Handbuch and Klimatologie. Berlin: Döppen and Geiger, 1930, 125~137
- [99] K.Hasseiman. Stochastic Climate Models. Part I .Theory. Tellus,1976, 28:473~484
- [100] A.Sutera. On Stochastic Perturbation and Longterm Climate Behaviour. Quart J Roy, Meteorol Soc., 1981, 107:137~153
- [101] R.Benzi, G.Parisi and A.Sutera, et al. Stochastic Resonance in Climatic Change. Tellus., 1982, 34:10~16
-

# 华中科技大学硕士学位论文

---

- [102] P.Hanggi, P.Jung, and F.Marchesoni. the Problem of the Mean First Passage Time. *J.Stat.Phys.*,1989, 54:1367~1371
- [103] L.Gammaitoni, F.Marchesoni, E.Menichella-Saetta, et al. Stochastic Resonance in Bistable Systems. *Phys.Rev.Lett.*,1989, 62:349~352
- [104] D.Petracchi. What is the role of stochastic resonance? *Chaos, Solitons & Fractals*, 2000, 11:1827~1834
- [105] S.Lorenzo. Stochastic resonance in biological systems. *Chaos, Solitons & Fractals*,2000, 11:1819~1822
- [106] G.Hu. G.Nicolis and C.Nicolis, Periodically forced Fokker-Planck equation and stochastic resonance. *Phys.Rev.A.*, 1990, 42:2030~2041
- [107] J.Douglass, L.Wilkens, E.Pantazilou, et al. Noise enhancement of information transfer in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance. *Nature (London)*,1993, 365:337~340
- [108] J.E.Levin and J.P.Miller. Broadband neural encoding in the cricket cercal sensory system enhanced by stochastic resonance. *Nature (London)*,1996, 380:165~168
- [109] V.Berdichevsky and M.Gitterman. Stochastic resonance and ratchets — new manifestations. *Europhys. Lett.*,1996, 36 :161~167
- [110] V.Berdichevsky and M.Gitterman. Stochastic resonance in linear system subject to multiplicative and additive noise. *Phys. Rev. E.*,1999, 60: 1494~1499
- [111] L.Y.Zhang, L.Cao and D.J.Wu et al. Stochastic Resonance in Linear Regime of a Single-Mode Laser. *Chin.Phys.Lett.*, 2003, 20:25~27
- [112] E.Hernandez-Garcia, R.Toral and M.S. Miguel. Intensity correlation functions for the colored gain-noise model of dye lasers. *Phys. Rev. A.*,1990, 42: 6823~6830
- [113] 曾庆勇. 微弱信号检测. 杭州: 浙江大学出版社,1986, 35~46
- [114] A.S.Asdi and A. H.Tewfik. Detection of weak signals using adaptive stochastic resonance. In Proceeding of the 1995 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1995, 2:1332~1335
- [115] 徐好民, 王 煜, 唐方头. 卫星热红外预报地震新进展. *地球信息科学*,2001,4:12~18
- [116] F.Moss, K.Wiesenfeld. Stochastic resonance at the molecular level. *Sci.AM.*,1995,

273:50~52

- [117] G.Nicolis and C.Nicolis. Stochastic Aspects of Climatic Transitons- Additive Fluctuations. *Tellus*, 1981, 33:225~234
- [118] T.Zhou, F.Moss and P.Jung. Escape time distributions of a periodically modulated bistable system with noise. *Phys.Rev.A.*, 1990, 42:3162~3169
- [119] L.Gammaitoni, G.Marchesoni, and S.Santucci. Stochastic Resonance as a Bona Fide Resonance. *Phys.Rev.Lett.*, 1995, 74:1052~1055
- [120] S.M.Bezrukov. Stochastic resonance as an inherent property of rate-modulated series of events. *Phys.Lett.A.*, 1998, 248: 29~34
- [121] A.Fulinski. Noise-stimulated active transport in biological cell membranes. *Phys.Lett.A.*, 1994, 193:267~273
- [122] A.Fulinski. Character of Stochastic Resonance. *Acta Phys.Polon.B.*, 1997, 28: 1811~1814
- [123] A.Fulinski. Relaxation, noise-induced transitions, and stochastic resonance driven by non-Markovian dichotomic noise. *Phys.Rev.E.*, 1995, 52:4523~4526
- [124] V.Berdichevsky and M.Gitterman. Stochastic resonance in linear systems subject to multiplicative and additive noise. *Phys.Rev.E.*, 1999, 60:1494~1499
- [125] A.V.Barzykin, K.Seki, and F.Shibata. Periodically driven linear system with multiplicative colored noise. *Phys.Rev.E.*, 1998, 57:6555~6563
- [126] J.Wang, S.Zhu and J.Yin. Saturation effects on intensity fluctuations of a laser with multiplicative white noise. *Phys.Rev.A.*, 1995, 51:5035~5037
- [127] J.Y.You, L.Cao, S.Z.Ke, et al. Escape of Brownian particle in a bistable sawtooth potential driven by correlated white noises. *Eur.Phys.J.B.*, 2001, 20:397~403
- [128] J.M.G.Vilar and J.M.Rubi. Scaling concepts in periodically modulated noisy systems. *Physica.A.*, 1999, 264:1~14
- [129] M.I.Dykman, D.G.Luchinsky, P.V.E.McClintock, et al. Stochastic resonance for periodically modulated noise intensity. *Phys. Rev. A.*, 1992, 46:1713
- [130] P.Hanggi, P.Talkner and M.Borkovec. Reaction-rate theory: fifty years after Kramers. *Rev. Mod. Phys.*, 1990, 62: 251~341
- [132] H.X. Fu, L.Cao and D.J.Wu. Effect of correlation between additive and

# 华 中 科 技 大 学 硕 士 学 位 论 文

---

- multiplicative noises on the activation from a double well. *Phys. Rev. E.*, 1999, 59: R6235-R6238
- [133] P. Reimann. Thermally activated escape with potential fluctuations driven by an Ornstein-Uhlenbeck process. *Phys. Rev. E.*, 1995, 52: 1579~1600
- [134] 魏学勤, 曹 力, 吴大进. 负关联噪声驱动下单模激光的定态分析. *光学学报*, 1996, 16: 278~281
- [135] 周小计, 曹 力, 吴大进. 关联色噪声驱动的线性系统的统计分析. *华中理工大学学报*, 1997, 25: 102~104
- [136] G. Y. Liang, L. Cao and D. J. Wu. Moments of intensity of single-mode laser driven by additive and multiplicative colored noises with colored cross-correlation. *Phys. Lett. A.*, 2002, 294: 190~198

## 附录 1 攻读硕士学位期间发表论文目录

- [1] J. Wang, L. Cao and D. J. Wu, Effect on the mean first passage time in symmetrical bistable system by cross-correlation between noises. *Phys. Lett. A.*, 2003, **308**: 23~30
- [2] J. Wang, L. Cao and D. J. Wu, Stochastic multiresonance in a bistable sawtooth potential driven by correlated multiplicative and additive noise. *Eur.Phys.J.B.*, 2002, **29**:123~128
- [3] J. Wang, L. Cao and D. J. Wu, Stochastic Resonance in a Bistable Sawtooth Potential Driven by Correlated Multiplicative and Additive Noise. *Chin.Phys.Lett.*, 2002, **19**:1416~1419
- [4] J. Wang, L. Cao and D. J. Wu, Stochastic Multiresonance for Periodically Modulated Noise in a Single-Mode Laser. *Chin.Phys.Lett.*, (accepted)
- [5] 王俊, 曹力, 吴大进. 相关色噪声的激光损失模型的定态性质分析. *华中科技大学学报*, 2001, **29**(12): 111~113
- [6] 梁贵云, 王俊, 曹力, 吴大进. 由具有色关联的色加法和色乘法噪声驱动的单模激光系统的定态几率分析. *中国激光*, 2002, **A29**:7~10
- [7] L. Y. Zhang, L. Cao, D. J. Wu, J. Wang, Stochastic Resonance in Linear Regime of a Single-Mode Laser. *Chin.Phys.Lett.*, 2003, **20**:25~27
- [8] G. Y. Liang, L. Cao, J. Wang, D. J. Wu. Modulated stochastic multiresonance in a single-mode laser system driven by colored additive and multiplicative noises without external periodic force. *Physica. A* , (accepted)
- [9] G. Y. Liang, L. Cao, J. Wang, D. J. Wu. Stationary Intensity Distribution of Single-Mode Laser Driven by Additive and Multiplicative Colored Noises with Colored Cross-correlation. *Commun. Theor. Phys.*, (accepted)