概率论第一章习题解答

习题 1.1

1．写出下列随机试验的样本空间Ω及指定的事件：

（1）袋中有 3 个红球和 2 个白球，现从袋中任取一个球，观察其颜色；

（2）掷一枚硬币，设 H 表示“出现正面”，T 表示“出现反面”．现将一枚硬币连掷两次，观察出现正、反面的情况，并用样本点表示事件 A =“恰有一次出现正面”；

（3）对某一目标进行射击，直到击中目标为止，观察其射击次数，并用样本点表示事件 A =“射击次数不超过 5 次”；

（4）生产某产品直到 5 件正品为止，观察记录生产该产品的总件数；

（5）从编号 a、b、c、d 的四人中，随机抽取正式和列席代表各一人去参加一个会议，观察选举结果，并用样本点表示事件 A =“编号为 a 的人当选”．

解：（1）$\Omega = \{$红色, 白色$\}$；（2）$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$，$A = \{(H, T), (T, H)\}$；

（3）$\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$，$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$；（4）$\Omega = \{5, 6, 7, \cdots, n, \cdots\}$；

（5）$\Omega = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)\}$，

$A = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (c, a), (d, a)\}$．

2．某射手射击目标 4 次，记事件 A =“4 次射击中至少有一次击中”，B =“4 次射击中击中次数大于 2”．试用文字描述事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$．

解：$\overline{A}$ 表示 4 次射击都没有击中，$\overline{B}$ 表示 4 次射击中击中次数不超过 2．

3．设 A, B, C 为三个事件，试用事件的运算关系表示下列事件：（1）A, B, C 都发生；（2）A, B, C 都不发生；（3）A, B, C 中至少有一个发生；（4）A, B, C 中最多有一个发生；（5）A, B, C 中至少有两个发生；（6）A, B, C 中最多有两个发生．

解：（1）ABC；（2）$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；（3）$A\cup B\cup C$；（4）$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

（5）$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$；（6）$\overline{ABC}$．

4．在一段时间内，某电话交换台接到呼唤的次数可能是 0 次，1 次，2 次，⋯．记事件 A_n =“接到的呼唤次数小于 n”（$n = 1, 2, \cdots$），试用事件的运算关系表示下列事件：（1）呼唤次数大于 2；（2）呼唤次数在 5 到 10 次范围内；（3）呼唤次数与 8 的偏差大于 2．

解：（1）$\overline{A}_3$；（2）$A_{11} - A_5$；（3）$A_6\cup\overline{A}_{11}$．

5．证明：（1）$AB\cup(A-B)\cup\overline{A}=\Omega$；（2）$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)=AB$．

证：（1）$AB\cup(A-B)\cup\overline{A}=AB\cup A\overline{B}\cup\overline{A}=A(B\cup\overline{B})\cup\overline{A}=A\Omega\cup\overline{A}=A\cup\overline{A}=\Omega$；

（2）$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)=(A\cup B\overline{B})(\overline{A}\cup B)=(A\cup\varnothing)(\overline{A}\cup B)=A(\overline{A}\cup B)=A\overline{A}\cup AB=AB$．

习题 1.2

1．设 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$，$P(AB) = P(BC) = 0$，$P(AC) = 1/8$，求 A、B、C 三个事件至少有一个发生的概率．

解：因 $P(AB) = P(BC) = 0$，且 $ABC\subset AB$，有 $P(ABC) = 0$，

则 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$．

2．设 $P(A) = 0.4$，$P(B) = 0.5$，$P(A\cup B) = 0.7$，求 $P(A - B)$及 $P(B - A)$．

解：因 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0.4 + 0.5 - 0.7 = 0.2$，

则 $P(A-B) = P(A) - P(AB) = 0.4 - 0.2 = 0.2$，$P(B-A) = P(B) - P(AB) = 0.5 - 0.2 = 0.3$.

3. 某市有 A, B, C 三种报纸发行．已知该市某一年龄段的市民中，有 45%的人喜欢读 A 报，34%的人喜欢读 B 报，20%的人喜欢读 C 报，10%的人同时喜欢读 A 报和 B 报，6%的人同时喜欢读 A 报和 C 报，4%的人同时喜欢读 B 报和 C 报，1%的人 A, B, C 三种报纸都喜欢读．从该市这一年龄段的市民中任选一人，求下列事件的概率：（1）至少喜欢读一种报纸；（2）三种报纸都不喜欢；（3）只喜欢读 A 报；（4）只喜欢读一种报纸．

解：分别设 A, B, C 表示此人喜欢读 A, B, C 报，有 $P(A) = 0.45$，$P(B) = 0.34$，$P(C) = 0.2$，$P(AB) = 0.1$，$P(AC) = 0.06$，$P(BC) = 0.04$，$P(ABC) = 0.01$，

（1）$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 0.8$；

（2）$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1 - P(A\cup B\cup C) = 0.2$；

（3）$P(A\overline{B}\overline{C}) = P(A\overline{B}) - P(A\overline{B}C) = P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = 0.3$；

（4）因 $P(\overline{A}B\overline{C}) = P(\overline{A}B) - P(\overline{A}BC) = P(B) - P(AB) - P(BC) + P(ABC) = 0.21$，

$P(\overline{A}\overline{B}C) = P(\overline{A}C) - P(\overline{A}BC) = P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 0.11$，

故 $P(A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C) = P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) = 0.62$.

4. 连续抛掷一枚硬币 3 次，求既有正面又有反面出现的概率．

解：样本点总数 $n = 2^3 = 8$，事件 A 中样本点数 $k_A = C_3^1 + C_3^2 = 6$，则 $P(A) = \dfrac{k_A}{n} = \dfrac{3}{4} = 0.75$.

5. 在分别写有 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13 的 8 张卡片中任取两张，把卡片上的两个数字组成一个分数，求所得分数为既约分数的概率．

解：样本点总数 $n = C_8^2 = 28$，事件 A 中样本点数 $k_A = C_5^1C_3^1 + C_3^2 = 18$，则 $P(A) = \dfrac{k_A}{n} = \dfrac{9}{14} = 0.6429$.

6. 一部 5 卷文集任意地排列在书架上，问卷号自左向右或自右向左恰好为 1, 2, 3, 4, 5 顺序的概率等于多少？

解：样本点总数 $n = A_5^5 = 120$，事件 A 中样本点数 $k_A = 2$，则 $P(A) = \dfrac{k_A}{n} = \dfrac{1}{60} = 0.0167$.

7. 10 把钥匙中有 3 把能打开某一门锁，今任取两把，求能打开某该门锁的概率．

解：样本点总数 $n = C_{10}^2 = 45$，事件 A 中样本点数 $k_A = C_7^1C_3^1 + C_3^2 = 24$，则 $P(A) = \dfrac{k_A}{n} = \dfrac{8}{15} = 0.5333$.

8. 一副扑克牌有 52 张，进行不放回抽样，每次一张，连续抽取 4 张，计算下列事件的概率：（1）四张花色各异；（2）四张中只有两种花色．

解：样本点总数 $n = C_{52}^4 = 270725$，

（1）事件 A_1 中样本点数 $k_{A_1} = C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1 = 28561$，则 $P(A_1) = \dfrac{k_{A_1}}{n} = \dfrac{2197}{20825} = 0.1055$；

（2）事件 A_2 表示两种花色各两张，或者一种 1 张一种 3 张，

样本点数 $k_{A_2} = C_4^2(C_{13}^2C_{13}^2 + 2C_{13}^3C_{13}^1) = 81120$，则 $P(A_2) = \dfrac{k_{A_2}}{n} = \dfrac{1248}{4165} = 0.2996$.

9. 口袋内装有 2 个伍分、3 个贰分、5 个壹分的硬币共 10 枚，从中任取 5 枚，求总值超过壹角的概率．

解：样本点总数 $n = C_{10}^5 = 252$，事件 A 分三种情形：

①两枚 5 分，三枚其它，②一枚 5 分，三枚 2 分，一枚 1 分，③一枚 5 分，两枚 2 分，两枚 1 分，

样本点数 $k_A = C_2^2 C_8^3 + C_2^1 C_3^3 C_5^1 + C_2^1 C_3^2 C_5^2 = 126$，则 $P(A) = \dfrac{k_A}{n} = \dfrac{1}{2} = 0.5$．

方法二：10 枚硬币总额 2 角 1 分，任取 5 枚若超过 1 角，那么剩下的 5 枚将不超过 1 角，

可见事件 A 中的样本点与 $\overline{A}$ 中的样本点一一对应，即 $k_A = k_{\overline{A}}$，则 $P(A) = P(\overline{A}) = 0.5$．

10．在 10 个数字 0, 1, 2, ⋯, 9 中任取 4 个（不重复），能排成一个 4 位偶数的概率是多少（最好是更正为：排在一起，恰好排成一个 4 位偶数的概率是多少）？

解：样本点总数 $n = A_{10}^4 = 5040$，事件 A 的限制条件是个位是偶数，首位不是 0，

样本点数 $k_A = A_1^1 A_9^1 A_8^2 + A_4^1 A_8^1 A_8^2 = 2296$，则 $P(A) = \dfrac{k_A}{n} = \dfrac{41}{90} = 0.4556$．

11．一个教室中有 100 名学生，求其中至少有一人的生日是在元旦的概率（设一年以 365 天计算）.

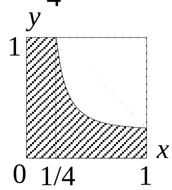
解：样本点总数 $n = 365^{100}$，A 的对立事件 $\overline{A}$ 表示所有学生生日都不在元旦，$k_{\overline{A}} = 364^{100}$，

则 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{k_{\overline{A}}}{n} = 1 - \left(\dfrac{364}{365}\right)^{100} = 0.2399$．

12．在 [0, 1] 区间内任取两个数，求两数乘积小于 1/4 的概率.

解：设所取得两个数为 x, y，$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$，$A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, xy < \dfrac{1}{4}\}$，

有 $m(\Omega) = 1$，$m(\overline{A}) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} (1 - \dfrac{1}{4x}) dx = (x - \dfrac{1}{4}\ln x)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1} = 1 - (\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{4}) = \dfrac{3 - 2\ln 2}{4} = 0.4034$，



则 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{m(\overline{A})}{m(\Omega)} = \dfrac{1 + 2\ln 2}{4} = 0.5966$．

习题 1.3

1．一只盒子有 3 只坏晶体管和 7 只好晶体管，在其中取二次，每次随机地取一只，作不放回抽样，发现第一只是好的，问另一只也是好的概率是多少？

解：设 A 表示第一只是好的，B 表示第二只是好的，

当第一只是好的时，第二次抽取前有 3 只是坏的，6 只是好的，则 $P(B \mid A) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} = 0.6667$．

2．某商场从生产同类产品的甲、乙两厂分别进货 100 件、150 件，其中：甲厂的 100 件中有次品 4 件，乙厂的 150 件中有次品 1 件．现从这 250 件产品中任取一件，从产品标识上看它是甲厂生产的，求它是次品的概率.

解：设 A 表示甲厂产品，B 表示次品，故 $P(B \mid A) = \dfrac{4}{100} = 0.04$．

3．根据抽样调查资料，2000 年某地城市职工家庭和农村居民家庭收入按人均收入划分的户数如下：

户数	6000 元以下	6000 ~ 12000 元	12000 元以上	合计
城市职工	25	125	50	200
农村居民	120	132	48	300
合计	145	257	98	500

现从被调查的家庭中任选一户，已知其人均收入在 6000 元以下，试问这是一个城市职工家庭的概率是多少？

解：设 A 表示人均收入在 6000 元以下，B 表示城市职工家庭，故 $P(B\mid A)=\dfrac{25}{145}=0.1724$.

4. 某单位有 92%的职工订阅报纸，93%的职工订阅杂志，在不订阅报纸的职工中仍有 85%的职工订阅杂志，从单位中任找一名职工，求下列事件的概率：（1）该职工至少订阅报纸或杂志中一种；（2）该职工不订阅杂志，但是订阅报纸.

解：设 A 表示订阅报纸，B 表示订阅杂志，有 $P(A)=0.92$，$P(B)=0.93$，$P(B\mid\overline{A})=0.85$，

则 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=0.08\times0.85=0.068$， $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.93-0.068=0.862$，

（1）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.92+0.93-0.068=0.988$；

（2）$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.92-0.862=0.058$.

5. 某工厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，各个车间的产量分别占全厂产量的 25%、35%、40%，各车间产品的次品率分别为 5%、4%、2%.（1）求全厂产品的次品率；（2）如果从全厂产品中抽取一件产品，恰好是次品，问这件次品是甲、乙、丙车间生产的概率分别是多少？

解：（1）任取一件产品，设 A_1, A_2, A_3 分别表示甲、乙、丙车间产品，B 表示次品，

则 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)$

$=0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.4\times0.02=0.0345$；

（2） $P(A_1\mid B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.25\times0.05}{0.0345}=\dfrac{25}{69}=0.3623$，

$P(A_2\mid B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.35\times0.04}{0.0345}=\dfrac{28}{69}=0.4058$，

$P(A_3\mid B)=\dfrac{P(A_3B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_3)P(B\mid A_3)}{P(B)}=\dfrac{0.4\times0.02}{0.0345}=\dfrac{16}{69}=0.2319$.

6. 有三个形状相同的罐，在第一罐中有两个白球和一个黑球；在第二个罐中有三个白球和一个黑球；在第三个罐中有两个白球和两个黑球．某人随机地取一罐，再从该罐中任取一球，试问这球是白球的概率有多少？

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示第一、二、三罐，B 表示白球，

则 $P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{23}{36}=0.6389$.

7. 三部自动的机器生产同样的汽车零件，其中机器 A 生产的占 40%，机器 B 生产的占 25%，机器 C 生产的占 35%，平均说来，机器 A 生产的零件有 10%不合格，对于机器 B 和 C，相应的百分数分别为 5%和 1%，如果从总产品中随机地抽取一个零件，发现为不合格，试问：（1）它是由机器 A 生产出来的概率是多少？（2）它是由哪一部机器生产的可能性最大？

解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示机器 A, B, C 生产的零件，D 表示不合格的零件，

（1） $P(A_1\mid D)=\dfrac{P(A_1D)}{P(D)}=\dfrac{P(A_1)P(D\mid A_1)}{P(A_1)P(D\mid A_1)+P(A_2)P(D\mid A_2)+P(A_3)P(D\mid A_3)}$

$$=\frac{0.4\times0.1}{0.4\times0.1+0.25\times0.05+0.35\times0.01}=\frac{0.04}{0.056}=\frac{5}{7}=0.7143;$$

（2） $P(A_2\mid D)=\dfrac{P(A_2D)}{P(D)}=\dfrac{0.25\times0.05}{0.056}=\dfrac{0.0125}{0.056}=\dfrac{25}{112}=0.2232$，

$$P(A_3 | D)=\frac{P(A_3D)}{P(D)}=\frac{0.35\times 0.01}{0.056}=\frac{0.0035}{0.056}=\frac{7}{112}=0.0625，$$

则由机器 A 生产的概率最大．

8．设 $P(A)>0$，试证：$P(B|A)\ge 1-\dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$．

证：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(A)}\ge\dfrac{P(A)+P(B)-1}{P(A)}=1-\dfrac{1-P(B)}{P(A)}=1-\dfrac{P(\overline{B})}{P(A)}$．

习题 1.4

1．一个工人看管三台机床，在一小时内机床不需要工人看管的概率分别为 0.9、0.8、0.7，求在一小时内 3 台机床中最多有一台需要工人看管的概率．

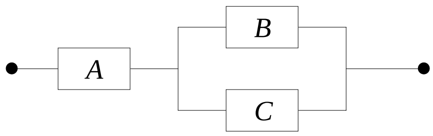
解：设 A_1, A_2, A_3 分别表示一小时内第一、二、三台机床不需要工人照管，可以认为 A_1, A_2, A_3 相互独立，

则概率为 $P(A_1A_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3)=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$

$$=P(A_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3)$$

$= 0.9\times 0.8\times 0.7 + 0.9\times 0.8\times 0.3 + 0.9\times 0.2\times 0.7 + 0.1\times 0.8\times 0.7 = 0.902$.

2．电路由电池 A 与两个并联的电池 B 及 C 串联而成，设电池 A, B, C 损坏的概率分别是 0.3, 0.2, 0.2，求电路发生断电的概率．



解：设 A, B, C 分别表示电池 A, B, C 损坏，电路断电为事件 $A\cup BC$，

则概率为 $P(A\cup BC)=P(A)+P(BC)-P(ABC)$

$=P(A)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)=0.3+0.2\times 0.2-0.3\times 0.2\times 0.2=0.328$.

方法二：设 A, B, C 分别表示电池 A, B, C 正常工作，系统正常工作为事件 $A(B\cup C)=AB\cup AC$，

则概率为 $1-P(AB\cup AC)=1-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$

$=1-P(A)P(B)-P(A)P(C)+P(A)P(B)P(C)$

$=1-0.7\times 0.8-0.7\times 0.8+0.7\times 0.8\times 0.8=0.328$.

3．加工某一零件共需经过四道工序．设第一、二、三、四道工序的次品率分别为 2%, 3%, 5%, 3%，假定各道工序是互不影响的，求加工出来的零件的次品率．

解：设 A_1, A_2, A_3, A_4 分别表示第一、二、三、四道工序加工出合格品，有 A_1, A_2, A_3, A_4 相互独立，

则概率为 $1-P(A_1A_2A_3A_4)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)=1-0.98\times 0.97\times 0.95\times 0.97=0.1240$.

4．抛掷一枚质地不均匀的硬币 8 次，设正面出现的概率为 0.6，求下列事件的概率：

（1）正好出现 3 次正面；（2）至多出现 2 次正面；（3）至少出现 2 次正面．

解：将每次掷硬币看作一次试验，出现正面 A，反面 $\overline{A}$；独立；$P(A)=0.6$．伯努利概型，$n=8$，$p=0.6$．

（1）$P_8(3)=C_8^3\times 0.6^3\times 0.4^5=0.1239$；

（2）$P_8(0)+P_8(1)+P_8(2)=C_8^0\times 0.6^0\times 0.4^8+C_8^1\times 0.6^1\times 0.4^7+C_8^2\times 0.6^2\times 0.4^6=0.0498$；

（3）$1-P_8(0)-P_8(1)=1-C_8^0\times 0.6^0\times 0.4^8-C_8^1\times 0.6^1\times 0.4^7=0.9915$．

5．设每次射击时命中率为 0.2，问至少必须进行多少次独立射击才能使至少击中一次的概率不小于 0.9？

解：将每次射击看作一次试验，击中 A，没击中 $\overline{A}$；独立；$P(A)=0.2$．伯努利概型，n 次试验，$p=0.2$，

则 $1-P_n(0)=1-C_n^0\times 0.2^0\times 0.8^n=1-0.8^n\ge 0.9$，即 $0.8^n\le 0.1$，故 $n\ge\dfrac{\lg 0.1}{\lg 0.8}=10.32$，取 $n=11$．

6. 一大批产品的优质品率为 60%，从中任取 10 件，求下列事件的概率：（1）取到的 10 件产品中恰有 5 件优质品；（2）取到的 10 件产品中至少有 5 件优质品；（3）取到的 10 件产品中优质品的件数不少于 4 件且不多于 8 件．

解：将取每件产品看作一次试验，优质品 A，非优质品 $\overline{A}$；独立；$P(A) = 0.6$．伯努利概型，$n = 10$，$p = 0.6$．

（1）$P_{10}(5) = C_{10}^5 \times 0.6^5 \times 0.4^5 = 0.2007$；

（2）$P_{10}(5) + P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10)$

$$= C_{10}^5 \times 0.6^5 \times 0.4^5 + C_{10}^6 \times 0.6^6 \times 0.4^4 + C_{10}^7 \times 0.6^7 \times 0.4^3 + C_{10}^8 \times 0.6^8 \times 0.4^2$$

$$+ C_{10}^9 \times 0.6^9 \times 0.4^1 + C_{10}^{10} \times 0.6^{10} \times 0.4^0 = 0.8338；$$

（3）$P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8)$

$$= C_{10}^4 \times 0.6^4 \times 0.4^6 + C_{10}^5 \times 0.6^5 \times 0.4^5 + C_{10}^6 \times 0.6^6 \times 0.4^4 + C_{10}^7 \times 0.6^7 \times 0.4^3 + C_{10}^8 \times 0.6^8 \times 0.4^2$$

$= 0.8989$；

7. 证明：若 $P(A|B) = P(A|\overline{B})$，则事件 A 与 B 独立．

证：因 $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A-B)}{1-P(B)} = \dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，

则 $P(AB)[1 - P(B)] = P(B)[P(A) - P(AB)]$，即 $P(AB) - P(AB)P(B) = P(B)P(A) - P(B)P(AB)$，
故 $P(AB) = P(A)P(B)$，A 与 B 相互独立．

复习题一

1. 设 $P(A) = 0.5$，$P(B) = 0.6$，问：（1）什么条件下 $P(AB)$可以取最大值，其值是多少？（2）什么条件下 $P(AB)$可以取得最小值，其值是多少？

解：（1）当 $A \subset B$ 时 $P(AB)$ 最大，$P(AB) = P(A) = 0.5$；
（2）当 $A \cup B = \Omega$ 时 $P(AB)$ 最小，$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.5 + 0.6 - 1 = 0.1$．

2. 一电梯开始上升时载有 5 名乘客，且这 5 人等可能地在 8 层楼的任何一层出电梯，求：（1）每层至多一人离开的概率；（2）至少有两人在同一层离开的概率；（3）只有一层有两人离开的概率．

解：样本点总数是 8 取 5 次的可重排列，即 $n = 8^5 = 32768$，

（1）事件 A_1 中样本点数 $k_{A_1} = A_8^5 = 6720$，则 $P(A_1) = \dfrac{k_{A_1}}{n} = \dfrac{105}{512} = 0.2051$；

（2）事件 A_2 是 A_1 的对立事件，则 $P(A_2) = 1 - P(A_1) = \dfrac{407}{512} = 0.7949$；

（3）事件 A_3 表示有两人在同一层离开，而另外三人分别在 3 个不同楼层或者都在同一层离开，

样本点数 $k_{A_3} = A_8^1 C_5^2 (A_7^3 + A_7^1 C_3^3) = 17360$，则 $P(A_3) = \dfrac{k_{A_3}}{n} = \dfrac{1085}{2048} = 0.5298$．

3. 从 5 副不同的手套中任取 4 只手套，求其中至少有两只手套配成一副的概率．

解：样本点总数 $n = C_{10}^4 = 210$，A 的对立事件 $\overline{A}$ 表示 4 只手套都不配套，$k_{\overline{A}} = C_5^4 C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_2^1 = 80$，

则 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{k_{\overline{A}}}{n} = \dfrac{13}{21} = 0.6190$．

4. 从 1, 2, ⋯, n 中任取两数，求所取两数之和为偶数的概率．

解：样本点总数为 $C_n^2 = \dfrac{1}{2}n(n-1)$，事件 A 表示取得两个偶数或两个奇数，

当 n 为偶数时，共有 $\dfrac{n}{2}$ 个偶数和 $\dfrac{n}{2}$ 个奇数，

样本点数 $k_A = C_{\frac{n}{2}}^2 + C_{\frac{n}{2}}^2 = \dfrac{n}{2}(\dfrac{n}{2}-1) = \dfrac{1}{4}n(n-2)$，则 $P(A) = \dfrac{k_A}{C_n^2} = \dfrac{n-2}{2(n-1)}$；

当 n 为偶数时，共有 $\dfrac{n-1}{2}$ 个偶数和 $\dfrac{n+1}{2}$ 个奇数，

样本点数 $k_A = C_{\frac{n-1}{2}}^2 + C_{\frac{n+1}{2}}^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-3}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+1}{2}\cdot\dfrac{n-1}{2} = \dfrac{1}{4}(n-1)^2$，则 $P(A) = \dfrac{k_A}{C_n^2} = \dfrac{n-1}{2n}$.

5． 在中国象棋的棋盘上任意地放上一只红“车”及一只黑“车”，求它们正好可以一只吃掉另一只的概率．

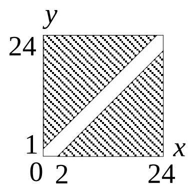
解：样本点总数 $n = C_{90}^2 = 4005$，事件 A 中样本点数 $k_A = C_9^1 C_{10}^2 + C_{10}^1 C_9^2 = 765$，

则 $P(A) = \dfrac{k_A}{n} = \dfrac{17}{89} = 0.1910$.

6． 某货运码头仅能容一船卸货，而甲、乙两船在码头卸货时间分别为 1 小时和 2 小时．设甲、乙两船在 24 小时内随时可能到达，求它们中任何一船都不需等待码头空出的概率．

解：$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x < 24, 0 \le y < 24\}$，$A = \{(x, y) \mid 0 \le x < 24, 0 \le y < 24, x - y > 2$ 或 $y - x > 1\}$，

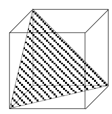
有 $m(\Omega) = 24^2 = 576$，$m(A) = \dfrac{1}{2}\times 23^2 + \dfrac{1}{2}\times 22^2 = 506.5$，



则 $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)} = \dfrac{506.5}{576} = 0.8793$.

7． 从区间 [0, 1] 中任取三个数，求三数和不大于 1 的概率．

解：$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \le x, y, z \le 1\}$，$A = \{(x, y, z) \mid 0 \le x, y, z \le 1, x + y + z \le 1\}$，



有 $m(\Omega) = 1$，A 是一个三棱锥，$m(A) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1 = \dfrac{1}{6}$，则 $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)} = \dfrac{1}{6} = 0.1667$.

8． 已知 5%的男人和 0.25%的女人是色盲，现随机地挑选一人，此人恰为色盲，问此人是男人的概率是多少？（假设男人和女人各占人数的一半．）

解：设 A_1, A_2 分别表示男人和女人，B 表示色盲，

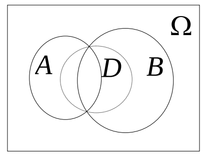
则 $P(A_1 \mid B) = \dfrac{P(A_1 B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)} = \dfrac{0.5\times 0.05}{0.5\times 0.05 + 0.5\times 0.0025} = \dfrac{20}{21} = 0.9524$.

9． 发报台分别以 0.7 和 0.3 的概率发出信号 0 和 1（例如：分别用低电频和高电频表示）．由于随机干扰的影响，当发出信号 0 时，接收台不一定收到 0，而是以概率 0.8 和 0.2 收到信号 0 和 1；同样地，当发报台发出信号 1 时，接收台以概率 0.9 和 0.1 收到信号 1 和 0．试求：（1）接收台收到信号 0 的概率；（2）当接收台收到信号 0 时，发报台确是发出信号 0 的概率．

解：设 A_0, A_1 分别表示发出信号 0, 1，B_0, B_1 表示收到信号 0, 1，

（1）$P(B_0) = P(A_0)P(B_0 \mid A_0) + P(A_1)P(B_0 \mid A_1) = 0.7\times 0.8 + 0.3\times 0.1 = 0.59$；

（2）$P(A_0 \mid B_0) = \dfrac{P(A_0 B_0)}{P(B_0)} = \dfrac{P(A_0)P(B_0 \mid A_0)}{P(B_0)} = \dfrac{0.7\times 0.8}{0.59} = \dfrac{56}{59} = 0.9492$.



10． 设 A, B 独立，$AB \subset D$，$\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{D}$，证明 $P(AD) \ge P(A)P(D)$.

证：因 $AB \subset D$，有 $AB \subset AD$，则 $P(AD) - P(AB) = P(AD - AB)$，

因 $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{A \cup B} \subset \overline{D}$，有 $D \subset A \cup B$，$D - B \subset A \cup B - B \subset A$，

则 $AD - AB = A(D - B) = D - B$，

故 $P(AD) - P(AB) = P(AD - AB) = P(D - B) \ge P(A)P(D - B) \ge P(A)[P(D) - P(B)]$，

由于 A, B 独立，有 $P(AB) = P(A)P(B)$，故 $P(AD) \ge P(A)P(D)$.

11．甲、乙、丙三人同时向一架飞机射击，他们击中目标的概率分别为 0.4, 0.5, 0.7．假设飞机只有一人击中时，坠毁的概率为 0.2，若 2 人击中，飞机坠毁的概率为 0.6，而飞机被 3 人击中时一定坠毁．现在如果发现飞机已被击中坠毁，计算它是由三人同时击中的概率．

解：结果：设 B 表示目标被击毁，

原因：设 A_0, A_1, A_2, A_3 分别表示无人、1 人、2 人、3 人击中目标，

则 $P(A_3 | B) = \dfrac{P(A_3B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_3)P(B | A_3)}{P(A_0)P(B | A_0) + P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + P(A_3)P(B | A_3)}$，

且有 $P(B|A_0) = 0$，$P(B|A_1) = 0.2$，$P(B|A_2) = 0.6$，$P(B|A_3) = 1$，

又设 C_1, C_2, C_3 分别表示甲、乙、丙击中目标，

则 $P(A_0) = P(\overline{C}_1\overline{C}_2\overline{C}_3) = P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3) = 0.6 \times 0.5 \times 0.3 = 0.09$，

$$P(A_1) = P(C_1\overline{C}_2\overline{C}_3 \cup \overline{C}_1C_2\overline{C}_3 \cup \overline{C}_1\overline{C}_2C_3)$$

$$= P(C_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3) + P(\overline{C}_1)P(C_2)P(\overline{C}_3) + P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(C_3)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.36，$$

$$P(A_2) = P(C_1C_2\overline{C}_3 \cup C_1\overline{C}_2C_3 \cup \overline{C}_1C_2C_3)$$

$$= P(C_1)P(C_2)P(\overline{C}_3) + P(C_1)P(\overline{C}_2)P(C_3) + P(\overline{C}_1)P(C_2)P(C_3)$$

$$= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.4 \times 0.5 \times 0.7 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.41，$$

$$P(A_3) = P(C_1C_2C_3) = P(C_1)P(C_2)P(C_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14，$$

故 $P(A_3 | B) = \dfrac{0.14 \times 1}{0.09 \times 0 + 0.36 \times 0.2 + 0.41 \times 0.6 + 0.14 \times 1} = \dfrac{0.14}{0.458} = 0.3057$.

12．已知某种疾病患者的痊愈率为 25%，为试验一种新药是否有效，把它给 10 个病人服用，且规定若 10 个病人中至少有 4 人治好则认为这种药有效，反之则认为无效．试求：（1）虽然新药有效，且把痊愈率提高到 35%，但通过试验被否定的概率；（2）新药完全无效，但通过试验被认为有效的概率．

解：将每人服药看作一次试验，痊愈 A，没有痊愈 $\overline{A}$；独立；

（1）新药有效，痊愈率为 0.35，即 $P(A) = 0.35$，伯努利概型，$n = 10$，$p = 0.35$，

故概率为 $P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3)$

$$= C_{10}^0 \times 0.35^0 \times 0.65^{10} + C_{10}^1 \times 0.35^1 \times 0.65^9 + C_{10}^2 \times 0.35^2 \times 0.65^8 + C_{10}^3 \times 0.35^3 \times 0.65^7 = 0.5138.$$

（2）新药完全无效，痊愈率为 0.25，即 $P(A) = 0.25$，伯努利概型，$n = 10$，$p = 0.25$，

故所求概率为 $1 - P_{10}(0) - P_{10}(1) - P_{10}(2) - P_{10}(3)$

$$= 1 - C_{10}^0 \times 0.25^0 \times 0.75^{10} - C_{10}^1 \times 0.25^1 \times 0.75^9 - C_{10}^2 \times 0.25^2 \times 0.75^8 - C_{10}^3 \times 0.25^3 \times 0.75^7 = 0.2241.$$

概率论第二章习题解答

习题 2.1

1． 试分别给出可能取值为有限、可列的随机变量的实例．

解：如掷一枚骰子，X 表示掷出的点数，X 的全部可能取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6，即可能取值为有限个；

观察某商店一小时内的进店人数 X，X 的全部可能取值为 0, 1, 2, ⋯ ，即可能取值为可列个．

2． 试给出可能取值至少充满一个区间的随机变量的实例．

解：电池的使用寿命 X 小时，X 的全部可能取值为 $[0, +\infty)$，即可能取值充满区间 $[0, +\infty)$．

习题 2.2

1． 一箱产品 20 件，其中 5 件优质品，不放回地抽取，每次一件，共抽取两次。求取到的优质品件数 X 的分布律．

解：X 的全部可能取值为 0, 1, 2，

$X=0$ 表示没有取得优质品，即 2 个全为非优质品，$P\{X=0\}=\dfrac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{105}{190}=\dfrac{21}{38}$，

$X=1$ 表示取得 1 个优质品 1 个非优质品，$P\{X=1\}=\dfrac{C_5^1C_{15}^1}{C_{20}^2}=\dfrac{75}{190}=\dfrac{15}{38}$，

$X=2$ 表示取得 2 个优质品没有非优质品，$P\{X=2\}=\dfrac{C_5^2}{C_{20}^2}=\dfrac{10}{190}=\dfrac{1}{19}$，

故 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \dfrac{21}{38} & \dfrac{15}{38} & \dfrac{1}{19}\end{pmatrix}$．

2． 上题若采取放回抽取，其它条件不变，求随机变量 X 的分布律．

解：X 的全部可能取值为 0, 1, 2，有 $X\sim B(2, 0.25)$，

$$P\{X=0\}=C_2^0\times0.25^0\times0.75^2=0.5625,\quad P\{X=1\}=C_2^1\times0.25^1\times0.75^1=0.375,$$

$$P\{X=2\}=C_2^2\times0.25^2\times0.75^0=0.0625,$$

故 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.5625 & 0.375 & 0.0625\end{pmatrix}$．

3． 从分别标有号码 1, 2, 3, ⋯, 7 的 7 张卡片中任意取出 2 张，求余下的卡片中最大号码的分布律．

解：设 X 表示余下卡片中的最大号码，X 的全部可能取值为 5, 6, 7，

$X=5$ 表示取出了 6, 7 号卡片，$P\{X=5\}=\dfrac{C_2^2}{C_7^2}=\dfrac{1}{21}$，

$X=6$ 表示取出了 7 号卡片，并且另一张不超过 5 号，$P\{X=6\}=\dfrac{C_5^1}{C_7^2}=\dfrac{5}{21}$，

$X=7$ 表示没有取出 7 号卡片，$P\{X=5\}=\dfrac{C_6^2}{C_7^2}=\dfrac{15}{21}=\dfrac{5}{7}$，

故 X 的分布列为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{21} & \frac{5}{21} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$.

4. 某人有 n 把外形相似的钥匙，其中只有 1 把能打开房门，但他不知道是哪一把，只好逐把试开。求此人直至将门打开所需的试开次数的分布律.

解：设 X 表示将门打开所需的试开次数，X 的全部可能取值为 $1, 2, \cdots, n$，

$X = 1$ 表示第一次就打开门，$P\{X=1\} = \frac{1}{n}$，

$X = 2$ 表示第一次没有打开门，第二次才打开，$P\{X=2\} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$，

$X = 3$ 表示前两次没有打开门，第三次才打开，$P\{X=3\} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n}$，

… … … … … … … … … … … … … … … …,

$X = n$ 表示前 $n-1$ 次没有打开门，第 n 次才打开，$P\{X=n\} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{n}$，

故 X 的分布列为 $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

5. 设 X 的分布律 $P\{X = n\} = cn$，$n = 1, 2, \cdots, 10$，求 c 之值.

解：根据概率函数规范性知 $c + 2c + \cdots + 10c = 55c$，

故 $c = \frac{1}{55}$.

6. 某书店开设新书征订业务，每位顾客在一周内收到书店回单的概率为 0.2，有 4 位顾客预定新书．求一周内收到回单的顾客数 X 的分布律.

解：伯努利概型，$n = 4$，$p = 0.2$，

$P\{X=0\} = C_4^0 \times 0.2^0 \times 0.8^4 = 0.4096$，$P\{X=1\} = C_4^1 \times 0.2^1 \times 0.8^3 = 0.4096$，

$P\{X=2\} = C_4^2 \times 0.2^2 \times 0.8^2 = 0.1536$，$P\{X=3\} = C_4^3 \times 0.2^3 \times 0.8^1 = 0.0256$，

$P\{X=4\} = C_4^4 \times 0.2^4 \times 0.8^0 = 0.0016$，

故 X 的分布列为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.4096 & 0.4096 & 0.1536 & 0.0256 & 0.0016 \end{pmatrix}$.

7. 某学生参加一项测试，对其中的 20 道是非题，纯粹是随机地选择“是”与“非”．计算该生至少做正确 14 道题目的概率.

解：设 X 表示该生做正确的题目个数，伯努利概型，$n = 20$，$p = 0.5$，

故概率为 $P\{X \ge 14\} = \sum_{k=14}^{20} P\{X = k\} = \sum_{k=14}^{20} C_{20}^k \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{20-k} = 0.0577$.

8. 设收到一批 100 个零件的订货，每一零件是次品的概率为 0.01，该批零件验收合格的标准是次品数不超过 3 个．试求这批订货合格的概率.

解：设 X 表示这批订货的次品数，伯努利概型，$n = 100$，$p = 0.01$，

故概率为 $P\{X \le 3\} = \sum_{k=0}^{3} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{3} C_{100}^k \cdot 0.01^k \cdot 0.99^{100-k} = 0.9816$.

注：此题 $n = 100$ 很大，$p = 0.01$ 很小，$np = 1$ 较小，可用泊松分布近似计算，

取 $\lambda = np = 1$， $X \dot\sim P(1)$，查表得 $P\{X \le 3\} = 0.9810$.

9． 假设一小时内进入学校图书馆的学生人数服从泊松分布，已知一小时无学生进入图书馆的概率为0.01，求一小时内至少有 2 名学生进入图书馆的概率．

解：设 X 表示一小时内进入图书馆的学生人数，有 $X \sim P(\lambda)$，且 $P\{X = 0\} = \mathrm{e}^{-\lambda} = 0.01$，

则 $\lambda = -\ln 0.01 = 4.6052$，

故概率为 $P\{X \ge 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - 0.01 - 0.0461 = 0.9439$.

注：此题查表可得此概率的近似值，由 $X \sim P(\lambda)$，且 $P\{X = 0\} = 0.01$，查表可得 $\lambda \approx 4.5$，

故 $P\{X \ge 2\} = 1 - P\{X \le 1\} = 1 - 0.0611 = 0.9389$.

习题 2.3

1． 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{12}, & 0 \le x < 1, \\ \dfrac{1}{4}, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

求 $P\{X = 1\}$， $P\{\frac{1}{2} < X \le 1\}$，$P\{1 \le X \le 2\}$.

解：X 的全部可能取值为 0, 1, 2，

$P\{X = 0\} = \dfrac{1}{12} - 0 = \dfrac{1}{12}$， $P\{X = 1\} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{6}$， $P\{X = 2\} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$，

则 X 的分布列为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

故 $P\{X = 1\} = \dfrac{1}{6}$， $P\{\dfrac{1}{2} < X \le 1\} = P\{X = 1\} = \dfrac{1}{6}$， $P\{1 \le X \le 2\} = P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{11}{12}$.

2． 随机变量 X 的可能取值为 0, 1, 2，对应概率依次为 $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}$. 求：

（1）X 的分布函数并作出图形；（2） $P\{0 < X \le \dfrac{5}{2}\}$ 和 $P\{0 \le X \le \dfrac{5}{2}\}$.

解：（1）X 的分布列为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，分段点 0, 1, 2，

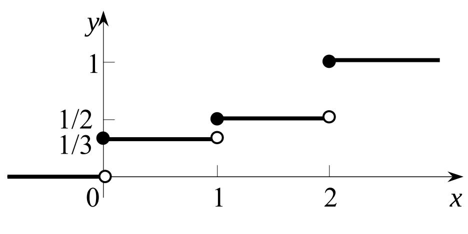
当 $x < 0$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P(\varnothing) = 0$，

当 $0 \le x < 1$ 时， $F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} = \dfrac{1}{3}$，

当 $1 \le x < 2$ 时， $F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$，

当 $x \ge 2$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P(\Omega) = 1$，

故 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{3}, & 0 \le x < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & 1 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$



（2）$P\{0<X\le\frac{5}{2}\}=F(\frac{5}{2})-F(0)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，$P\{0\le X\le\frac{5}{2}\}=P(\Omega)=1$.

3．已知离散型随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.3, & -1\le x<0,\\ 0.6, & 0\le x<1,\\ 0.8, & 1\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

试给出 X 的分布律，求计算 $P\{X<1\mid X=0\}$.

解：X 的全部可能取值为 $-1, 0, 1, 3$，

$P\{X=-1\}=0.3-0=0.3$，$P\{X=0\}=0.6-0.3=0.3$，$P\{X=1\}=0.8-0.6=0.2$，

$P\{X=3\}=1-0.8=0.2$，

故 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 3\\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix}$ 且 $P\{X<1\mid X=0\}=\dfrac{P\{X<1, X=0\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{P\{X=0\}}{P\{X=0\}}=1$.

注：此题最好应该将“$P\{X<1\mid X=0\}$”改为“$P\{X<1\mid X\ge 0\}$”，

则有 $P\{X<1\mid X\ge 0\}=\dfrac{P\{X<1, X\ge 0\}}{P\{X\ge 0\}}=\dfrac{P\{X=0\}}{P\{X\ge 0\}}=\dfrac{0.3}{0.3+0.2+0.2}=\dfrac{3}{7}$.

4．一盒中有 6 个球，在这 6 个球上标注的数字分别为 $-3, -3, 1, 1, 1, 2$，现从盒中任取 1 球，试求取得的球上标注的数字的分布律及分布函数.

解：设 X 表示取得的球上标注的数字，X 的全部可能取值为 $-3, 1, 2$，

$P\{X=-3\}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P\{X=1\}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$P\{X=2\}=\frac{1}{6}$，

故 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$；

当 $x<-3$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$，

当 $-3\le x<1$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=-3\}=\frac{1}{3}$，

当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=-3\}+P\{X=1\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$，

当 $x\ge 2$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\Omega)=1$，

故 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ \frac{1}{3}, & -3\le x<1,\\ \frac{5}{6}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

5．设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，用 $F(x)$ 表示下述概率

（1）$P\{X<a\}$；（2）$P\{X>a\}$；（3）$P\{X\le a\}$.

解：（1）$P\{X<a\}=P\{X\le a\}-P\{X=a\}=F(a)-P\{X=a\}$；

（2）$P\{X>a\}=1-P\{X\le a\}=1-F(a)$；

（3）$P\{X\le a\}=F(a)$.

习题 2.4

1． 设 X 是连续型随机变量，其分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ a\sin x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & x\ge\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

试求常数 a 与 $P\{|X|<\dfrac{\pi}{6}\}$.

解：连续型随机变量的分布函数连续，有 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}F(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}F(x)=F(\dfrac{\pi}{2})$，即 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}a\sin x=a=1$，

故 $a=1$ 且 $P\{|X|<\dfrac{\pi}{6}\}=F(\dfrac{\pi}{6})-F(-\dfrac{\pi}{6})=\sin\dfrac{\pi}{6}-0=\dfrac{1}{2}$.

2． 连续型随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}a+b\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

试求：（1）系数 a、b；（2）密度函数 $f(x)$.

解：（1）由分布函数的规范性得 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(a+b\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})=a=1$，

连续型随机变量的分布函数连续，有 $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=F(0)$，即 $\lim\limits_{x\to0^+}(a+b\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})=a+b=0$，

故 $a=1$，$b=-1$；

（2）当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，有 $f(x)=F'(x)=0$，

当 $x>0$ 时， $F(x)=1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，有 $f(x)=F'(x)=0-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，

故密度函数 $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

3． 设随机变量 X 的密度函数为

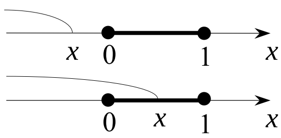
$$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 X 的分布函数.

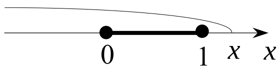
解：分段点 0, 1，

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0$，

当 $0\le x<1$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x 2(1-t)dt=(2t-t^2)\Big|_0^x=2x-x^2$，



当 $x \ge 2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_0^1 2(1-t)dt=(2t-t^2)\Big|_0^1=1$，



故 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x-x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

4． 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=c\mathrm{e}^{-x^2+x},\quad -\infty<x<+\infty，$$

试确定常数 c 的值．

解：由密度函数的规范性得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=c\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2+x}\mathrm{d}x=c\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}\mathrm{d}x=c\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})=c\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=c\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}=1，$$

故 $c=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$．

方法二：因 $f(x)=c\mathrm{e}^{-x^2+x}=c\mathrm{e}^{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}=c\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\cdot\mathrm{e}^{-(x-\frac{1}{2})^2}$，$-\infty<x<+\infty$，

与正态分布密度函数 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$ 比较，可得 $\mu=\dfrac{1}{2}$，$\sigma^2=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}=c\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$，

故 $c=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$．

5． 设顾客在某银行的窗口等候服务的时间 X（以分钟计）服从参数为 $\dfrac{1}{5}$ 的指数分布，某顾客在窗口等候服务，若超过 10 分钟，他就离开．他一月内要到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开的次数．试求 Y 的分布律，并计算 $P\{Y\ge 1\}$．

解：X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

Y 伯努利概型，$n=5$，$p=P\{X>10\}=\int_{10}^{+\infty}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x}\mathrm{d}x=(-\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x})\Big|_{10}^{+\infty}=\mathrm{e}^{-2}$，即 $Y\sim B(5,\mathrm{e}^{-2})$，

则 $P\{Y=0\}=C_5^0\times(\mathrm{e}^{-2})^0\times(1-\mathrm{e}^{-2})^5=0.4833$，$P\{Y=1\}=C_5^1\times(\mathrm{e}^{-2})^1\times(1-\mathrm{e}^{-2})^4=0.3782$，

$P\{Y=2\}=C_5^2\times(\mathrm{e}^{-2})^2\times(1-\mathrm{e}^{-2})^3=0.1184$，$P\{Y=3\}=C_5^3\times(\mathrm{e}^{-2})^3\times(1-\mathrm{e}^{-2})^2=0.0185$，

$P\{Y=4\}=C_5^4\times(\mathrm{e}^{-2})^4\times(1-\mathrm{e}^{-2})^1=0.0015$，$P\{Y=5\}=C_5^5\times(\mathrm{e}^{-2})^5\times(1-\mathrm{e}^{-2})^0=0.0001$，

故 Y 的分布列为 $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0.4833 & 0.3782 & 0.1184 & 0.0185 & 0.0015 & 0.0001\end{pmatrix}$；

且 $P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-0.4833=0.5167$.

6． 据历史资料分析，某地区连续两次强地震之间相隔的年数 X 是一个随机变量，它的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.1x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

现假设该地区刚发生了一次强地震．试求：（1）今后 3 年内再次发生强地震的概率；（2）今后 3 年至 5 年内再次发生强地震的概率．

解：（1）$P\{X\le 3\}=F(3)=1-\mathrm{e}^{-0.3}=0.2592$；

（2）$P\{3\le X\le 5\}=F(5)-F(3)=1-\mathrm{e}^{-0.5}-1+\mathrm{e}^{-0.3}=\mathrm{e}^{-0.3}-\mathrm{e}^{-0.5}=0.1343$．

7． 设 $X\sim N(0,1)$，求：$P\{1<X\le 2\}$，$P\{-2<X\le -1\}$，$P\{|X|>1.5\}$．

解：$P\{1<X\le 2\}=\Phi(2)-\Phi(1)=0.9772-0.8413=0.1359$；

$P\{-2<X\le -1\}=\Phi(-1)-\Phi(-2)=1-\Phi(1)-1+\Phi(2)=\Phi(2)-\Phi(1)=0.9772-0.8413=0.1359$；

$P\{|X|>1.5\}=P\{X<-1.5\}+P\{X>1.5\}=\Phi(-1.5)+1-\Phi(1.5)=2-2\Phi(1.5)=2-2\times 0.9332=0.1336$．

8． 设 $X\sim N(1,4)$，求：$P\{X\le -3\}$，$P\{1\le X\le 3\}$，$P\{|X|>1\}$．

解：因 $X\sim N(1,4)$，有 $\mu=1$，$\sigma=2$，

故 $P\{X\le -3\}=F(-3)=\Phi(\frac{-3-1}{2})=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$；

$$P\{1\le X\le 3\}=F(3)-F(1)=\Phi(\frac{3-1}{2})-\Phi(\frac{1-1}{2})=\Phi(1)-\Phi(0)=0.8413-0.5=0.3413；$$

$$P\{|X|>1\}=P\{X<-1\}+P\{X>1\}=F(-1)+1-F(1)=\Phi(\frac{-1-1}{2})+1-\Phi(\frac{1-1}{2})=\Phi(-1)+1-\Phi(0)$$

$$=1-\Phi(1)+1-\Phi(0)=2-0.8413-0.5=0.6587.$$

9． 设随机变量 $X\sim N(60,3^2)$，求分点 x_1,x_2，使 X 分别落在区间 $(-\infty,x_1),(x_1,x_2),(x_2,+\infty)$ 的概率之比为 3∶4∶5.

解：因 $X\sim N(60,3^2)$，有 $\mu=60$，$\sigma=3$，

则 $P\{X\le x_1\}=F(x_1)=\Phi(\frac{x_1-60}{3})=\frac{3}{3+4+5}=0.25$，有 $\frac{x_1-60}{3}=-0.67$，

$$P\{X\le x_2\}=F(x_2)=\Phi(\frac{x_2-60}{3})=\frac{3+4}{3+4+5}=0.5833，有\ \frac{x_2-60}{3}=0.21，$$

故 $x_1=57.99$，$x_2=60.63$．

10．某人需乘车去机场乘飞机，现有两条路线可供选择，走第一条路线所需时间 $X_1\sim N(50,100)$，走第二条路线所需时间 $X_2\sim N(60,16)$．问：（1）若有 70 分钟，应选择哪一条路线？（2）若有 65 分钟，应选择哪一条路线？

解：因 $X_1\sim N(50,100)$，$X_2\sim N(60,16)$，有 $\mu_1=50$，$\sigma_1=10$，$\mu_2=60$，$\sigma_2=4$，

应选择能在规定时间内到达机场概率更大的路线，

（1） $P\{X_1\le 70\}=F_1(70)=\Phi(\frac{70-50}{10})=\Phi(2)=0.9772$，

$P\{X_2\le 70\}=F_2(70)=\Phi(\frac{70-60}{4})=\Phi(2.5)=0.9938$，即 $P\{X_2\le 70\}$ 更大，

故应选择第二条路线；

（2） $P\{X_1\le 65\}=F_1(65)=\Phi(\frac{65-50}{10})=\Phi(1.5)=0.9332$，

$P\{X_2\le 65\}=F_2(65)=\Phi(\frac{65-60}{4})=\Phi(1.25)=0.8944$，即 $P\{X_1\le 65\}$ 更大，

故应选择第一条路线．

习题 2.5

1． 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

，

求：（1）$X-1$ 的分布律；（2）X^2 的分布律.

解：因 X 的全部可能取值为 $-1, 0, 1, 2, \frac{5}{2}$，

则 $X-1$ 的全部可能取值为 $-2, -1, 0, 1, \frac{3}{2}$，$X^2$ 的全部可能取值为 $1, 0, 1, 4, \frac{25}{4}$，即 $0, 1, 4, \frac{25}{4}$，

故

$X-1$	-2	-1	0	1	$\frac{3}{2}$
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

，

X^2	0	1	4	$\frac{25}{4}$
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

.

2． 测量一圆形物体的直径 L，其分布律如下：

L	10	11	12	13
P	0.1	0.4	0.3	0.2

，

求圆周长与圆面积的分布律.

解：因直径 L 的全部可能取值为 10, 11, 12, 13，

则圆周长 $C=\pi L$ 的全部可能取值为 $10\pi, 11\pi, 12\pi, 13\pi$，

圆面积 $S=0.25\pi L^2$ 的全部可能取值为 $25\pi, 30.25\pi, 36\pi, 42.25\pi$，

故

C	10π	11π	12π	13π
P	0.1	0.4	0.3	0.2

，

S	25π	30.25π	36π	42.25π
P	0.1	0.4	0.3	0.2

.

3． 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{81}, & -3<x<6,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 $Y=\frac{1}{3}(12-X)$ 的密度函数 $f_Y(y)$.

解：因 $y=\frac{1}{3}(12-x)$ 严格单调减少，其反函数为 $x=12-3y$，导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-3$，且 $-3<x<6$ 时，有 $2<y<5$，

故 Y 的密度函数 $f_Y(y)=\dfrac{(12-3y)^2}{81}\cdot|-3|=\dfrac{(4-y)^2}{3},\quad 2<y<5$，即 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{(4-y)^2}{3}, & 2<y<5,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

4． 设 $X\sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，求 $Y=\sin X$ 的密度函数.

解：因 $X\sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，有 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & 其他,\end{cases}$

又因 $y=\sin x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内严格单调增加，其反函数为 $x=\arcsin y$，导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，

且 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$-1 < y < 1$，则 $f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \left|\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$，$-1 < y < 1$，

故 Y 的密度函数 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

5．设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

求 $Y = |X|$ 的密度函数．

解：因随机变量 X 的全部可能取值为 $(0, +\infty)$，此时有 $Y = X$，即 Y 与 X 有相同的分布，

故 $f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

6．设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 的密度函数．

解：因 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，有 X 的密度函数为 $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty < x < +\infty$，

又因 $y = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ 严格单调增加，其反函数为 $x = \sigma y + \mu$，导数 $\dfrac{dx}{dy} = \sigma$，

且 $-\infty < x < +\infty$ 时，有 $-\infty < y < +\infty$，

故 Y 的密度函数 $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma y+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot |\sigma| = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$，$-\infty < y < +\infty$，即 $Y \sim N(0, 1)$．

7．设 $X \sim N(0, 1)$，求 $Y = X^2$ 的密度函数．

解：因 $X \sim N(0, 1)$，有 X 的密度函数为 $f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty < x < +\infty$，

又因 $y = x^2$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内分成两个严格单调区间：$-\infty < x < 0$ 和 $0 < x < +\infty$，

在 $-\infty < x < 0$ 内，$y = x^2$ 的反函数为 $x = -\sqrt{y}$，导数 $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，

且 $-\infty < x < 0$ 时，$0 < y < +\infty$，则 $f_Y(y)^{(1)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \left|-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$，$0 < y < +\infty$；

在 $0 < x < +\infty$ 内，$y = x^2$ 的反函数为 $x = \sqrt{y}$，导数 $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，

且 $0 < x < +\infty$ 时，$0 < y < +\infty$，则 $f_Y(y)^{(2)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \left|\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$，$0 < y < +\infty$；

故 Y 的密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

复习题二

1． 设 X 的分布律 $P\{X=n\}=p^n$，$n=1, 2, \cdots$，求 p 之值.

解：X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n & \cdots\\ p & p^2 & \cdots & p^n & \cdots\end{pmatrix}$，

根据概率函数规范性知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p^n=1$，可得 $|p|<1$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p^n=\dfrac{p}{1-p}=1$，故 $p=0.5$.

2． 如果 $p_n=kn^{-2}$，$n=1, 2, \cdots$，问它能否成为一个离散型随机变量的概率分布，为什么？

解：由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}kn^{-2}=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 是 $p=2$ 的 p 级数，收敛，记其收敛和为 S，

当 $k=\dfrac{1}{S}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n=1$，且 $p_n>0$，满足概率函数的非负性与规范性，

故它能成为一个离散性随机变量的概率分布.

3． 甲、乙两人相约玩一种电脑游戏“攻擂”，甲先乙后轮流攻擂，先攻下擂者胜，已知甲、乙各自攻擂成功的概率为 a 和 b（$0<a, b<1$），求至某人获胜，二人攻擂总次数的分布律.

解：设 X 表示二人攻擂的总次数，X 的全部可能取值为 $1, 2, \cdots, n, \cdots$，

$X=1$ 表示甲第一次就攻擂成功，　$P\{X=1\}=a$；

$X=2$ 表示甲第一次攻擂失败，乙第一次就成功，　$P\{X=2\}=(1-a)b$；

$X=3$ 表示甲、乙第一次都失败，甲第二次成功，　$P\{X=3\}=(1-a)(1-b)a$；

$X=4$ 表示甲前两次失败，乙第一次失败，第二次成功，　$P\{X=4\}=(1-a)^2(1-b)b$；

… … … … … … … … … … … … … … … …；

$X=2k-1$ 表示甲、乙前 $k-1$ 次都失败，甲第 k 次成功，$P\{X=2k-1\}=(1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}a$；

$X=2k$ 表示甲前 k 次失败，乙前 $k-1$ 次失败，第 k 次成功，$P\{X=2k\}=(1-a)^k(1-b)^{k-1}b$；

… … … … … … … … … … … … … … … …

故 X 的概率分布为 $P\{X=n\}=\begin{cases}(1-a)^{k-1}(1-b)^{k-1}a, & n=2k-1\\ (1-a)^k(1-b)^{k-1}b, & n=2k\end{cases}$，$k=1, 2, \cdots$.

4． 一汽车沿街道行驶时须通过三个均设有红绿信号灯的路口，设各信号灯相互独立且红绿两种信号显示的时间相同。求汽车未遇红灯而连续通过路口数的分布（理解为第一次遇到红灯前连续通过路口数）.

解：设 X 表示未遇红灯而连续通过的路口数，X 的全部可能取值为 $0, 1, 2, 3$，

$X=0$ 表示第一个路口就遇到红灯，　$P\{X=0\}=0.5$；

$X=1$ 表示第一个路口遇到绿灯，第二个路口遇到红灯，　$P\{X=1\}=0.5\times0.5=0.25$；

$X=2$ 表示前两个路口遇到绿灯，第三个路口遇到红灯，　$P\{X=2\}=0.5^2\times0.5=0.125$；

$X=3$ 表示三个路口都遇到绿灯，　$P\{X=3\}=0.5^3=0.125$.

故 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.125\end{pmatrix}$.

5． 将一颗骰子连续投掷若干次，直至掷出的点数之和超过 3 为止，求掷骰子次数的分布律.

解：设 X 表示掷骰子的次数，X 的全部可能取值为 1, 2, 3, 4，

$X=1$ 表示第一枚骰子掷出点数超过 3 点，$P\{X=1\}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$；

$X=2$ 表示第一枚掷出 1 点，第二枚掷出点数超过 2 点，

或第一枚掷出 2 点，第二枚掷出点数超过 1 点，

或第一枚掷出 3 点，第二枚任意，$P\{X=2\}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{4}{6}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{6}{6}=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$；

$X=3$ 表示前两枚都掷出 1 点，第三枚掷出点数超过 1 点，

或前两枚掷出 1 和 2 点，第三枚任意，$P\{X=3\}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\dfrac{5}{6}+2\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times\dfrac{6}{6}=\dfrac{17}{216}$；

$X=4$ 表示前三枚都掷出 1 点，第四枚任意，　$P\{X=3\}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\times\dfrac{6}{6}=\dfrac{1}{216}$.

故 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{12} & \dfrac{17}{216} & \dfrac{1}{216}\end{pmatrix}$.

6． 从一副扑克牌(52 张)每次抽取一张，连续抽取四次，用随机变量 X, Y 分别表示采取不放回抽取和放回抽取的黑色花色张数，求 X, Y 的分布律.

解：X 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3, 4，有 $X\sim H(4, 26, 52)$，

$P\{X=0\}=\dfrac{C_{26}^0C_{26}^4}{C_{52}^4}=\dfrac{14950}{270725}=0.0552$，$P\{X=1\}=\dfrac{C_{26}^1C_{26}^3}{C_{52}^4}=\dfrac{67600}{270725}=0.2497$，

$P\{X=2\}=\dfrac{C_{26}^2C_{26}^2}{C_{52}^4}=\dfrac{105625}{270725}=0.3902$，$P\{X=3\}=\dfrac{C_{26}^3C_{26}^1}{C_{52}^4}=\dfrac{67600}{270725}=0.2497$，

$P\{X=4\}=\dfrac{C_{26}^4C_{26}^0}{C_{52}^4}=\dfrac{14950}{270725}=0.0552$，

故 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0.0552 & 0.2497 & 0.3902 & 0.2497 & 0.0552\end{pmatrix}$；

（或用公式表示 $P\{X=k\}=\dfrac{C_{26}^kC_{26}^{4-k}}{C_{52}^4},\quad k=0,1,2,3,4$）

Y 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3, 4，有 $Y\sim B(4, 0.5)$，

$P\{Y=0\}=C_4^0\times0.5^0\times0.5^4=0.0625$，$P\{Y=1\}=C_4^1\times0.5^1\times0.5^3=0.25$，

$P\{Y=2\}=C_4^2\times0.5^2\times0.5^2=0.375$，$P\{Y=3\}=C_4^3\times0.5^3\times0.5^1=0.25$，

$P\{Y=4\}=C_4^4\times0.5^4\times0.5^0=0.0625$，

故 Y 的分布列为 $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0.0625 & 0.25 & 0.375 & 0.25 & 0.0625\end{pmatrix}$.

（或用公式表示 $P\{Y=k\}=C_4^k\times0.5^k\times0.5^{4-k}=C_4^k\times0.5^4,\quad k=0,1,2,3,4$）

7．某传呼台有客户 3000 个．已知每个客户在任意时刻打传呼的概率为 0.002，问传呼台至少应安排多少名传呼员才能以不低于 0.9 的概率保证客户打入电话时立刻有服务员为其服务？

解：设 X 表示同一时刻打传呼的客户数，有 $X \sim B(3000, 0.002)$，$n = 3000$ 很大，$p = 0.002$ 很小，$\lambda = np = 6$，

则 X 近似服从泊松分布 $P(6)$，又设传呼台应安排 x 名传呼员，有 $P\{X \le x\} = \sum\limits_{k=0}^{x} \dfrac{6^k}{k!} e^{-6} \ge 0.9$，

查泊松分布表可得 $x \ge 9$，即至少应安排 9 名传呼员．

8．设书籍中每页的印刷错误服从泊松分布．经统计发现在某本书上，有一个印刷错误的页数与有 2 个印刷错误的页数相同，求任意检验 4 页都没有印刷错误的概率．

解：设 X 表示一页中印刷错误的个数，有 $X \sim P(\lambda)$，$\lambda > 0$，

由于 $P\{X = 1\} = \dfrac{\lambda^1}{1!} \mathrm{e}^{-\lambda} = P\{X = 2\} = \dfrac{\lambda^2}{2!} \mathrm{e}^{-\lambda}$，可得$\lambda = 2$ 或$\lambda = 0$（舍去），

则每一页中没有印刷错误的概率 $P\{X = 0\} = \dfrac{2^0}{0!} \mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-2} = 0.1353$（查表），

又设 Y 表示所检验的 4 页中没有印刷错误的页数，有 $Y \sim B(4, \mathrm{e}^{-2}) = B(4, 0.1353)$，

故所检验的 4 页中都没有印刷错误的概率 $P\{Y = 4\} = C_4^4 \times (\mathrm{e}^{-2})^4 \times (1 - \mathrm{e}^{-2})^0 = \mathrm{e}^{-8} = 0.0003$．

9．假设随机变量 X 的绝对值不大于 1，$P\{X = -1\} = \dfrac{1}{8}$，$P\{X = 1\} = \dfrac{1}{4}$，在事件“$|X| < 1$”出现的条件下，$X$ 在$(-1, 1)$内任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比．求 X 的分布函数 $F(x)$．

解：因 $|X| \le 1$，有 $P\{-1 < X < 1\} = 1 - P\{X = -1\} - P\{X = 1\} = \dfrac{5}{8}$，

若$(a, b) \subset (-1, 1)$，有 $P\{a < X < b \mid -1 < X < 1\} = \dfrac{P\{a < X < b\}}{P\{-1 < X < 1\}} = \dfrac{b - a}{2}$，即 $P\{a < X < b\} = \dfrac{5(b - a)}{16}$，

当 $x < -1$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = 0$，

当$-1 \le x < 1$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\} + P\{-1 < X < x\} + P\{X = x\} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{5(x + 1)}{16} = \dfrac{5x + 7}{16}$，

当 $x \ge 1$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P\{-1 \le X \le 1\} = 1$，

故 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{5x + 7}{16}, & -1 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$

10．设 $F_1(x)$和 $F_2(x)$分别是两个随机变量的分布函数，试判断下列各函数能否作为某随机变量的分布函数：

（1）$G(x) = F_1(x) + F_2(x)$；

（2）$\psi(x) = k_1F_1(x) + k_2F_2(x)$，其中 $k_1 \ge 0$，$k_2 \ge 0$，$k_1 + k_2 = 1$．

解：（1）根据分布函数的规范性知：$F_1(-\infty) = F_2(-\infty) = 0$，$F_1(+\infty) = F_2(+\infty) = 1$，

则 $G(-\infty) = F_1(-\infty) + F_2(-\infty) = 0$，$G(+\infty) = F_1(+\infty) + F_2(+\infty) = 1 + 1 = 2 \ne 1$，

故 $G(x)$不满足分布函数的规范性，不能作为某随机变量的分布函数；

（2）根据分布函数的四条基本性质知：$F_1(x) \ge 0$，$F_2(x) \ge 0$，

$F_1(-\infty) = F_2(-\infty) = 0$，$F_1(+\infty) = F_2(+\infty) = 1$，

若 $x_1 < x_2$，有 $F_1(x_1) \le F_1(x_2)$，$F_2(x_1) \le F_2(x_2)$，$\lim\limits_{x \to x_0^+} F_1(x) = F_1(x_0)$，$\lim\limits_{x \to x_0^+} F_2(x) = F_2(x_0)$，

则$\psi(x) = k_1F_1(x) + k_2F_2(x) \ge 0$，

$\psi(-\infty) = k_1F_1(-\infty) + k_2F_2(-\infty) = 0$，$\psi(+\infty) = k_1F_1(+\infty) + k_2F_2(+\infty) = k_1 + k_2 = 1$，

$\psi(x_1) = k_1F_1(x_1) + k_2F_2(x_1) \le k_1F_1(x_2) + k_2F_2(x_2) = \psi(x_2)$，

$$\lim_{x\to x_0^+}\psi(x)=\lim_{x\to x_0^+}[k_1F_1(x)+k_2F_2(x)]=k_1F_1(x_0)+k_2F_2(x_0)=\psi(x_0),$$

故$\psi(x)$满足分布函数的四条基本性质，可以作为某随机变量的分布函数.

11．设 X 在$(0, 5)$上服从均匀分布，求方程 $4x^2+4Xx+X+2=0$ 有实根的概率.

解：要使方程 $4x^2+4Xx+X+2=0$ 有实根，需判别式$\Delta=(4X)^2-4\times4\times(X+2)=16(X^2-X-2)\geq0$，

可得 $X\leq-1$ 或 $X\geq2$，故方程有实根的概率为 $P\{X\leq-1\cup X\geq2\}=P\{2\leq X\leq5\}=\dfrac{5-2}{5-0}=\dfrac{3}{5}$.

12．某计算机在毁坏前运行的总时间 X（单位：小时）是一个连续型随机变量，其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}, & x\geq0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

求：（1）该计算机在损坏前能运行 50 到 150 小时的概率；（2）它的运行时间将小于 100 小时的概率；（3）已知该计算机已经运行了 50 小时，再运行 50 小时的概率.

解：根据密度函数的规范性知：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}\mathrm{d}x=-100\lambda\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}\Big|_0^{+\infty}=100\lambda=1$，得 $\lambda=\dfrac{1}{100}$.

（1）$P\{50\leq X\leq150\}=\int_{50}^{150}\dfrac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}\Big|_{50}^{150}=\mathrm{e}^{-0.5}-\mathrm{e}^{-1.5}=0.3834$；

（2）$P\{X<100\}=\int_0^{100}\dfrac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}\Big|_0^{100}=1-\mathrm{e}^{-1}=0.6321$；

（3）$P\{X\geq100\mid X\geq50\}=\dfrac{P\{X\geq100\}}{P\{X\geq50\}}=\dfrac{\int_{100}^{+\infty}\frac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}\mathrm{d}x}{\int_{50}^{+\infty}\frac{1}{100}\mathrm{e}^{-\frac{x}{100}}\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}^{-0.5}}=\mathrm{e}^{-0.5}=0.6065$.

13．某种电池的寿命 X（单位：小时）是一个随机变量，服从$\mu=300$，$\sigma=35$ 的正态分布，求这样的电池寿命在 250 小时以上的概率，并求一允许限 x，使得电池寿命在$(300-x，300+x)$内的概率不小于 0.9.

解：因 $X\sim N(\mu,\sigma^2)=N(300,35^2)$，

故$P\{X>250\}=1-F(250)=1-\Phi(\dfrac{250-300}{35})=1-\Phi(-1.4286)=\Phi(1.4286)=0.9236$.

又$P\{300-x<X<300+x\}=F(300+x)-F(300-x)=\Phi(\dfrac{300+x-300}{35})-\Phi(\dfrac{300-x-300}{35})$

$=\Phi(\dfrac{x}{35})-\Phi(\dfrac{-x}{35})=2\Phi(\dfrac{x}{35})-1\geq0.9$，即$\Phi(\dfrac{x}{35})\geq0.95$，

故$\dfrac{x}{35}\geq1.65$，$x\geq57.75$，即取 $x=57.75$.

14．设 X 的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi(1+x^2)}, & x>0,\\ 0, & x\leq0,\end{cases}$$

求 $Y=\ln X$ 的分布密度.

解：因 $y=\ln x, x>0$ 严格单调增加，其反函数为 $x=\mathrm{e}^y$，导数$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\mathrm{e}^y$，且 $x>0$ 时，有$-\infty<y<+\infty$，

故 Y 的密度函数 $f_Y(y)=\dfrac{2}{\pi[1+(e^y)^2]}\cdot|e^y|=\dfrac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$，$-\infty<y<+\infty$．

15．设随机变量 X 在区间 $(-1, 2)$上服从均匀分布，求 $Y=e^{2X}$ 的密度函数．

解：因 $X\sim U(-1, 2)$，有 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

又因 $y=e^{2x}$ 严格单调增加，其反函数为 $x=\dfrac{1}{2}\ln y$，导数 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2y}$，且$-1<x<2$ 时，有 $e^{-2}<y<e^4$，

则 $f_Y(y)=\dfrac{1}{3}\cdot\left|\dfrac{1}{2y}\right|=\dfrac{1}{6y}$，$e^{-2}<y<e^4$，

故 Y 的密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6y}, & e^{-2}<y<e^4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

16．设 $X\sim N(0, 1)$，求 $Y=2(1-|X|)$的密度函数．

解：因 $X\sim N(0, 1)$，有 X 的密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$-\infty<x<+\infty$，

又因 $y=2(1-|x|)$在$-\infty<x<+\infty$ 内分成两个严格单调区间：$-\infty<x<0$ 和 $0<x<+\infty$，

在$-\infty<x<0$ 内，$y=2(1-|x|)=2(1+x)$的反函数为 $x=\dfrac{y}{2}-1$，导数 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{2}$，

且$-\infty<x<0$ 时，$-\infty<y<2$，则 $f_Y(y)^{(1)}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\frac{y}{2}-1)^2}{2}}\cdot\left|\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{8}}$，$-\infty<y<2$，

在 $0<x<+\infty$ 内，$y=2(1-|x|)=2(1-x)$的反函数为 $x=1-\dfrac{y}{2}$，导数 $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{1}{2}$，

且 $0<x<+\infty$ 时，$-\infty<y<2$，则 $f_Y(y)^{(2)}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(1-\frac{y}{2})^2}{2}}\cdot\left|-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{8}}$，$-\infty<y<2$，

故 Y 的密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{8}}, & y<2,\\ 0, & y\ge 2.\end{cases}$

17．设 $X\sim U(0, \pi)$，求 $Y=\sin X$ 的密度函数．

解：因 $X\sim U(0, \pi)$，有 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & 0<x<\pi,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

又因 $y=\sin x$ 在 $0<x<\pi$ 内分成两个严格单调区间：$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$，

在 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 内，$y=\sin x$ 的反函数为 $x=\arcsin y$，导数 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，

且 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$0 < y < 1$，则 $f_Y(y)^{(1)} = \dfrac{1}{\pi}\cdot\left|\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$，　$0 < y < 1$；

在 $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ 内，$y = \sin x$ 的反函数为 $x = \pi - \arcsin y$，导数 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，

且 $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ 时，$0 < y < 1$，则 $f_Y(y)^{(2)} = \dfrac{1}{\pi}\cdot\left|-\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$，　$0 < y < 1$．

故 Y 的密度函数 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

18．设随机变量 Y 在任一有限区间 $[a, b]$ 上的概率均大于零，其分布函数为 $F_Y(y)$．又 X 服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布．证明：$Z = F_Y^{-1}(X)$ 的分布函数与 Y 的分布函数相同．

证：因 Y 在任一有限区间 $[a, b]$ 上概率均大于零，则分布函数 $F_Y(y)$ 严格单调增加，
（否则，若 $x_1 < x_2$ 时有 $F(x_1) = F(x_2)$，则 Y 在有限区间 (x_1, x_2) 上概率等于零）

则 $F_Z(z) = P\{Z = F_Y^{-1}(X) \le z\} = P\{X \le F_Y(z)\}$，

又因 $X \sim U(0, 1)$，对任意的 $a \in [0, 1]$，都有 $P\{X \le a\} = \dfrac{a-0}{1-0} = a$，且分布函数值 $F_Y(z) \in [0, 1]$，

故 $F_Z(z) = P\{X \le F_Y(z)\} = F_Y(z)$，得证．

概率论习题三解答

习题 3.1

1．试给出二维随机变量的实例．

（略）

2．判断二元函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\ge 0,\\ 0, & x+y<0,\end{cases}$$

是否为某个二维随机变量(X, Y)的联合分布函数？

解：因 $F(1, 1) = F(1, -1) = F(-1, 1) = 1$，$F(-1, -1) = 0$，

则 $F(1, 1) - F(1, -1) - F(-1, 1) + F(-1, -1) = -1 < 0$，

故 $F(x, y)$不满足联合分布函数的基本性质，不能成为某个二维随机变量(X, Y)的联合分布函数．

3．设二维随机变量(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求 X 与 Y 的边缘分布函数 $F_X(x), F_Y(y)$，以及概率 $P\{1 < X \le 2, 3 < Y \le 5\}$．

解：$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-2^{-y}, & y\ge 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$$\begin{aligned}P\{1<X\le 2, 3<Y\le 5\} &= F(2,5)-F(1,5)-F(2,3)+F(1,3)\\ &=(1-2^{-2}-2^{-5}+2^{-7})-(1-2^{-1}-2^{-5}+2^{-6})-(1-2^{-2}-2^{-3}+2^{-5})+(1-2^{-1}-2^{-3}+2^{-4})\\ &=2^{-7}-2^{-6}-2^{-5}+2^{-4}.\end{aligned}$$

习题 3.2

1．一口袋中有 4 个球，上面分别标有数字 1, 2, 2, 3，从该袋中任取一球，不放回，再从该袋中任取一球，用 X、Y 分别表示第一次、第二次取得的球上的数字，求二维随机变量(X, Y)的联合分布律．

解：X、Y 的全部可能取值都是 1, 2, 3，

有 $P\{X=1, Y=1\}=0$，$P\{X=1,Y=2\}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}$，$P\{X=1,Y=3\}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$，

$P\{X=2,Y=1\}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，$P\{X=2,Y=2\}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，$P\{X=2,Y=3\}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，

$P\{X=3,Y=1\}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$，$P\{X=3,Y=2\}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}$，$P\{X=3, Y=3\}=0$，

故(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

．

2．一盒中装有 2 只白球，3 只黑球，现进行有放回摸球，每次 1 球．用 X 表示第一次摸出的白球数，用

Y 表示第二次摸出的白球数，求二维随机变量(X, Y)的联合分布律与 X 及 Y 的边缘分布律.

解：X、Y 的全部可能取值都是 0, 1，

有 $P\{X=0, Y=0\}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}=0.16$， $P\{X=0, Y=1\}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=0.24$，

$P\{X=1, Y=0\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=0.24$， $P\{X=1, Y=1\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=0.36$，

故(X, Y)的联合分布律与 X 及 Y 的边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.16	0.24	0.4
1	0.24	0.36	0.6
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6	0

.

3． 在上题中采用不放回摸球方式，求二维随机变量(X, Y)的联合分布律与 X 及 Y 的边缘分布律.

解：X、Y 的全部可能取值都是 0, 1，

有 $P\{X=0, Y=0\}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=0.1$， $P\{X=0, Y=1\}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}=0.3$，

$P\{X=1, Y=0\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=0.3$， $P\{X=1, Y=1\}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}=0.3$，

故(X, Y)的联合分布律与 X 及 Y 的边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.1	0.3	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6	0

.

4． 设二维随机变量(X, Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$1-p$	0
1	0	p

求(X, Y)的联合分布函数.

解：x、y 的分段点都是 0, 1，

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x, y)=P\{X\le x, Y\le y\}=P(\varnothing)=0$，

当 $0\le x<1$ 且 $0\le y<1$ 时，$F(x, y)=P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X=0, Y=0\}=1-p$，

当 $0\le x<1$ 且 $y\ge 1$ 时，$F(x, y)=P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{X=0, Y=1\}=1-p$，

当 $x\ge 1$ 且 $0\le y<1$ 时，$F(x, y)=P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{X=1, Y=0\}=1-p$，

当 $x\ge 1$ 且 $y\ge 1$ 时，$F(x, y)=P\{X\le x, Y\le y\}=P(\Omega)=1$，

故(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ 1-p, & 0\le x<1, 0\le y<1 \text{ 或 } 0\le x<1, y\ge 1 \text{ 或 } x\ge 1, 0\le y<1,\\ 1, & x\ge 1, y\ge 1.\end{cases}$$

5． X 表示随机地在 1, 2, 3, 4 中取出的一个整数值，Y 表示在数 1 至数 X 中随机地取出的一个整数值，求(X, Y)的联合分布律.

解：X、Y 的全部可能取值都是 1, 2, 3, 4，

有 $P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}$，$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=1,Y=4\}=0$，

$P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2,Y=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，$P\{X=2,Y=3\}=P\{X=2,Y=4\}=0$，

$P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3,Y=3\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，$P\{X=3,Y=4\}=0$，

$P\{X=4,Y=1\}=P\{X=4,Y=2\}=P\{X=4,Y=3\}=P\{X=4,Y=4\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，

故(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

.

6． 设随机变量 Y 服从参数为$\lambda=1$ 的指数分布，随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & 若Y\le k,\\ 1, & 若Y>k,\end{cases}\quad (k=1,2),$$

试求(X_1,X_2)的联合分布律.

解：因 $Y\sim e(1)$，有 Y 的密度函数为 $f(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y\ge 0,\\ 0, & y<0,\end{cases}$

则 $P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=\int_0^1 e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_0^1=1-e^{-1}$，

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=P(\varnothing)=0$，

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=\int_1^2 e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_1^2=e^{-1}-e^{-2}$，

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=\int_2^{+\infty} e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_2^{+\infty}=e^{-2}$，

故(X_1,X_2)的联合分布律为

X_1 \ X_2	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

.

7． 已知随机变量 $X\sim B(1,0.6)$，关于 Y 的条件分布如下表

Y	1	2	3
$P\{Y\mid X=0\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

，

Y	1	2	3
$P\{Y\mid X=1\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

，

求(X,Y)的联合分布律及在 $Y=1$ 条件下 X 的条件分布律.

解：因 X 的分布律为

X	0	1
P	0.4	0.6

，

则 $P\{X=0, Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1 \mid X=0\}=0.4\times\dfrac{1}{4}=0.1$，

$P\{X=0, Y=2\}=P\{X=0\}P\{Y=2 \mid X=0\}=0.4\times\dfrac{1}{2}=0.2$，

$P\{X=0, Y=3\}=P\{X=0\}P\{Y=3 \mid X=0\}=0.4\times\dfrac{1}{4}=0.1$，

$P\{X=1, Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1 \mid X=1\}=0.6\times\dfrac{1}{2}=0.3$，

$P\{X=1, Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2 \mid X=1\}=0.6\times\dfrac{1}{6}=0.1$，

$P\{X=1, Y=3\}=P\{X=1\}P\{Y=3 \mid X=1\}=0.6\times\dfrac{1}{3}=0.2$，

故(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	1	2	3	$p_{i\cdot}$
0	0.1	0.2	0.1	0.4
1	0.3	0.1	0.2	0.6
$p_{\cdot j}$	0.4	0.3	0.3	0

；

因 $P\{X=0 \mid Y=1\}=\dfrac{P\{X=0, Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\dfrac{0.1}{0.4}=0.25$， $P\{X=1 \mid Y=1\}=\dfrac{P\{X=1, Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\dfrac{0.3}{0.4}=0.75$，

故在 $Y=1$ 条件下 X 的条件分布律为

X	0	1
$P(X \mid Y=1\}$	0.25	0.75

.

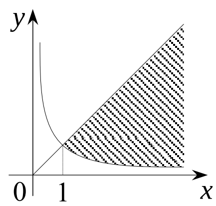
习题 3.3

1． 设二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^2y}, & 1\le x, \dfrac{1}{x}<y\le x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 X、Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$、$f_Y(y)$.

解：如图，X 的可能取值范围 $[1, +\infty)$，当 $x\ge 1$ 时， $\dfrac{1}{x}<y\le x$，



则 $f_X(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\dfrac{1}{2x^2y}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2x^2}|\ln y|\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}=\dfrac{1}{x^2}\ln x$， $x\ge 1$，

故 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\ln x, & x\ge 1, \\ 0, & x<1;\end{cases}$

Y 的可能取值范围 $(0, +\infty)$，当 $0 < y < 1$ 时，$\dfrac{1}{y} < x < +\infty$，

则 $f_Y(y) = \int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} \dfrac{1}{2x^2 y} \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2y \cdot x}\Big|_{\frac{1}{y}}^{+\infty} = \dfrac{1}{2}$，$0 < y < 1$，

当 $y \geq 1$ 时，$x \leq y < +\infty$，

则 $f_Y(y) = \int_{y}^{+\infty} \dfrac{1}{2x^2 y} \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2y \cdot x}\Big|_{y}^{+\infty} = \dfrac{1}{2y^2}$，$y \geq 1$，

故 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0 < y < 1, \\ \dfrac{1}{2y^2}, & y \geq 1, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$

2． 设二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

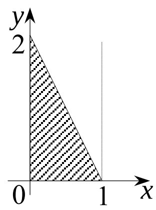
$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 < x < 1, 0 < y < 2(1-x), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求：（1）常数 c；（2）$f_X(x)$、$f_Y(y)$.

解：（1）如图，↑：$0 < x < 1$，$0 < y < 2(1-x)$，

由规范性得 $1 = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{2(1-x)} cxy \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot \dfrac{c}{2} xy^2 \Big|_0^{2(1-x)} = \dfrac{c}{2}\int_0^1 4x(1-x)^2 \mathrm{d}x = 2c(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4})\Big|_0^1 = \dfrac{c}{6}$，

故 $c = 6$；



（2）X 的可能取值范围 $(0, 1)$，当 $0 < x < 1$ 时，$0 < y < 2(1-x)$，

则 $f_X(x) = \int_0^{2(1-x)} 6xy \mathrm{d}y = 3xy^2 \Big|_0^{2(1-x)} = 12x(1-x)^2$，$0 < x < 1$，

故 $f_X(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$

Y 的可能取值范围 $(0, 2)$，当 $0 < y < 2$ 时，$0 < x < 1 - \dfrac{y}{2}$，

则 $f_Y(y) = \int_0^{1-\frac{y}{2}} 6xy \mathrm{d}x = 3x^2 y \Big|_0^{1-\frac{y}{2}} = 3y(1 - \dfrac{y}{2})^2$，$0 < y < 2$，

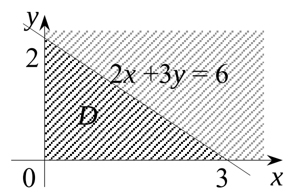
故 $f_Y(y) = \begin{cases} 3y(1 - \dfrac{y}{2})^2, & 0 < y < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

3． 设二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} a\mathrm{e}^{-(2x+2y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求：（1）常数 a；（2）(X, Y)落入区域 $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 6\}$内的概率；（3）$(X, Y)$的联合分布函数 $F(x, y)$.

解：（1）由规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} a\mathrm{e}^{-(2x+2y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$，



得 $a\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\cdot\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y = a(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x})\Big|_{0}^{+\infty}\cdot(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y})\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{4}a = 1$，

故 $a = 4$；

（2）D：↑　$0 \le x \le 3$，$0 \le y \le \frac{6-2x}{3}$，

故 $P\{(X,Y)\in D\} = \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{3}\mathrm{d}x\int_{0}^{\frac{6-2x}{3}} 4\mathrm{e}^{-(2x+2y)}\mathrm{d}y = \int_{0}^{3}\mathrm{d}x\cdot(-2\mathrm{e}^{-2x-2y})\Big|_{0}^{\frac{6-2x}{3}}$

$= \int_{0}^{3}(-2\mathrm{e}^{-4-\frac{2x}{3}} + 2\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{d}x = (3\mathrm{e}^{-4-\frac{2x}{3}} - \mathrm{e}^{-2x})\Big|_{0}^{3} = (3\mathrm{e}^{-6} - \mathrm{e}^{-6}) - (3\mathrm{e}^{-4} - 1) = 2\mathrm{e}^{-6} - 3\mathrm{e}^{-4} + 1$；

（3）当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时，$F(x,y) = 0$，

当 $x \ge 0$ 且 $y \ge 0$ 时，$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} 4\mathrm{e}^{-(2u+2v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

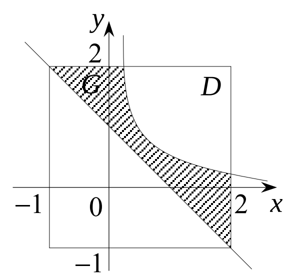
$= 4\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{-2u}\mathrm{d}u\cdot\int_{0}^{y}\mathrm{e}^{-2v}\mathrm{d}v = 4(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2u})\Big|_{0}^{x}\cdot(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2v})\Big|_{0}^{y} = (1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-2y})$，

故(X, Y)的联合分布函数 $F(x,y) = \begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-2y}), & x \ge 0, y \ge 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4．在区间 $(-1, 2)$ 上随机地选取两点，其坐标分别记为 X 与 Y．求两坐标之和大于 1 且两坐标之积小于 1 的概率．

解：二维随机变量 (X, Y) 服从区域 $D = \{(x, y) \mid -1 < x < 2, -1 < y < 2\}$内的二维均匀分布，
区域 D 中满足两坐标之和大于 1 且之积小于 1 的区域

$G = \{(x, y) \mid x + y > 1, xy < 1, -1 < x < 2, -1 < y < 2\}$，



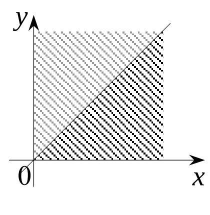
因区域 G 的面积 $S_G = \frac{1}{2}\times 3^2 - \int_{\frac{1}{2}}^{2}(2-\frac{1}{x})\mathrm{d}x = \frac{9}{2} - (2x - \ln x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{3}{2} + 2\ln 2$，

故 $P\{(X,Y)\in G\} = \frac{S_G}{S_D} = \frac{\frac{3}{2}+2\ln 2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{2}{9}\ln 2$．

5．设二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求 $P\{X > Y\}$．



解：$P\{X > Y\} = \int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y = \int_{0}^{+\infty}\mathrm{d}x\cdot(-\mathrm{e}^{-x-y})\Big|_{0}^{x} = \int_{0}^{+\infty}(-\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$

$= (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x})\Big|_{0}^{+\infty} = 0 - (\frac{1}{2} - 1) = \frac{1}{2}$．

注：此题也可由 X 与 Y 的对称性直接可得 $P\{X > Y\} = \frac{1}{2}$．

6．设二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases}c(R - \sqrt{x^2 + y^2}), & x^2 + y^2 \le R^2,\\ 0, & x^2 + y^2 > R^2,\end{cases}$$

试求：（1）常数 c 之值；（2）(X, Y)落入区域 $x^2+y^2\le r^2\quad (r<R)$ 的概率.

解：（1）由规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} c(R-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R c(R-\rho)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho = 1$，

得 $c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot(\frac{1}{2}R\rho^2-\frac{1}{3}\rho^3)\Big|_0^R = c\int_0^{2\pi}\frac{1}{6}R^3\mathrm{d}\theta = \frac{c}{3}\pi R^3 = 1$，

故 $c=\dfrac{3}{\pi R^3}$；

（2）$P\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le r^2\} = \iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\frac{3}{\pi R^3}(R-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\frac{3}{\pi R^3}(R-\rho)\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho$

$$=\frac{3}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot(\frac{1}{2}R\rho^2-\frac{1}{3}\rho^3)\Big|_0^r = \frac{3}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{2}Rr^2-\frac{1}{3}r^3)\mathrm{d}\theta = 3\left(\frac{r}{R}\right)^2-2\left(\frac{r}{R}\right)^3.$$

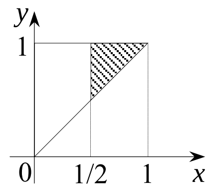
7． 设随机变量(X, Y)的条件密度函数为

$$f_X(x\,|\,Y=y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

及 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求 $P\{X>\frac{1}{2}\}$.



解：(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_Y(y)f_X(x\,|\,Y=y)=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

故 $P\{X>\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_x^1 15x^2y\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\cdot\frac{15}{2}x^2y^2\Big|_x^1=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{15}{2}(x^2-x^4)\mathrm{d}x=\frac{15}{2}(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{47}{64}$.

习题 3.4

1． 将一枚硬币连抛两次，令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{第 } k \text{ 次出现正面},\\ 0, & \text{第 } k \text{ 次出现反面},\end{cases}\quad (k=1, 2),$$

验证 X_1 与 X_2 相互独立.

证：因 X_1 与 X_2 的全部可能取值都是 0, 1，有 $P\{X_1=i, X_2=j\}=0.5\times0.5=0.25$，（$i, j=1, 2$），则$(X_1, X_2)$的联合分布律为

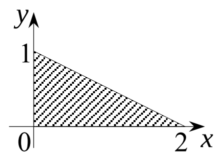
X_1 \ X_2	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.25	0.25	0.5
1	0.25	0.25	0.5
$p_{\cdot j}$	0.5	0.5	0

因 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$，（$i, j=1, 2$），

故 X_1 与 X_2 相互独立.

2．设随机变量(X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布，且 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<2, 0<y<1-\dfrac{x}{2}\}$，讨论 X 与 Y 是否相互独立？

解：(X, Y)的联合密度函数为



$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<2, 0<y<1-\dfrac{x}{2},\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

因 X 的全部可能取值范围是 $(0, 2)$，当 $0<x<2$ 时，$0<y<1-\dfrac{x}{2}$，

则 $f_X(x)=\int_0^{1-\frac{x}{2}}1\mathrm{d}y=1-\dfrac{x}{2}$，$0<x<2$，

因 Y 的全部可能取值范围是 $(0, 1)$，当 $0<y<1$ 时，$0<x<2-2y$，

则 $f_Y(y)=\int_0^{2-2y}1\mathrm{d}x=2-2y$，$0<y<1$，

即 $f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}(1-\dfrac{x}{2})(2-2y), & 0<x<2, 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}\neq f(x,y)$，

故 X 与 Y 不独立.

3．设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，证明 X 与 Y 独立的充要条件是$\rho=0$.

证：充分性：设$\rho=0$，(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}=f_X(x)\cdot f_Y(y),$$

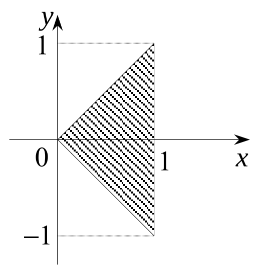
故 X 与 Y 独立；

必要性：设 X 与 Y 独立，有(X, Y)的联合密度函数 $f(x, y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，特别是取 $x=\mu_1$，$y=\mu_2$，

有 $f(\mu_1,\mu_2)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=f_X(\mu_1)\cdot f_Y(\mu_2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$，

故$\rho=0$.

4．设随机变量(X, Y)的联合密度函数为



$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

判断 X 与 Y 是否相互独立？

解：因 X 的全部可能取值范围是 $(0, 1)$，当 $0<x<1$ 时，$-x<y<x$，

则 $f_X(x)=\int_{-x}^{x}1dy=2x$，$0<x<1$，

因 Y 的全部可能取值范围是 $(-1, 1)$，当 $-1<y<0$ 时，$-y<x<1$，当 $0<y<1$ 时，$y<x<1$，

则当 $-1<y<0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-y}^{1}1dx=1+y$；当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_y^1 1dx=1-y$；

即 $f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2x(1+y), & 0<x<1, -1<y<0,\\ 2x(1-y), & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}\neq f(x,y)$，

故 X 与 Y 不独立.

5． 设随机变量 X 与 Y 相互独立，证明随机变量 X^2 与 Y^2 也相互独立.

解：因 (X^2, Y^2) 的联合分布函数为 $F_{X^2,Y^2}(x,y)=P\{X^2\le x, Y^2\le y\}$，

且 X^2 与 Y^2 的边缘分布函数分别为 $F_{X^2}(x)=P\{X^2\le x\}$， $F_{Y^2}(y)=P\{Y^2\le y\}$，

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，有 $F_{X^2,Y^2}(x,y)=0=F_{X^2}(x)F_{Y^2}(y)$，

当 $x\ge 0$ 或 $y\ge 0$ 时，有

$$
\begin{aligned}
F_{X^2,Y^2}(x,y)&=P\{X^2\le x, Y^2\le y\}=P\{-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x}, -\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P\{-\sqrt{x}-\varepsilon<X\le\sqrt{x}, -\sqrt{y}-\varepsilon<Y\le\sqrt{y}\}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[F_{X,Y}(\sqrt{x},\sqrt{y})-F_{X,Y}(\sqrt{x},-\sqrt{y}-\varepsilon)-F_{X,Y}(-\sqrt{x}-\varepsilon,\sqrt{y})+F_{X,Y}(-\sqrt{x}-\varepsilon,-\sqrt{y}-\varepsilon)]\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[F_X(\sqrt{x})F_Y(\sqrt{y})-F_X(\sqrt{x})F_Y(-\sqrt{y}-\varepsilon)-F_X(-\sqrt{x}-\varepsilon)F_Y(\sqrt{y})+F_X(-\sqrt{x}-\varepsilon)F_Y(-\sqrt{y}-\varepsilon)]\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[F_X(\sqrt{x})-F_X(-\sqrt{x}-\varepsilon)][F_Y(\sqrt{y})-F_Y(-\sqrt{y}-\varepsilon)]\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P\{-\sqrt{x}-\varepsilon<X\le\sqrt{x}\}P\{-\sqrt{y}-\varepsilon<Y\le\sqrt{y}\}\\
&=P\{-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x}\}P\{-\sqrt{y}\le Y\le\sqrt{y}\}=P\{X^2\le x\}P\{Y^2\le y\}=F_{X^2}(x)F_{Y^2}(y),
\end{aligned}
$$

故 X^2 与 Y^2 相互独立.

习题 3.5

1． 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

求 $X+Y$ 及 XY 的分布律.

解：因 $X+Y$ 的全部可能取值为 $-2, 0, 1, 3, 4$，

故 $X+Y\sim\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & 3 & 4\\ \frac{5}{20} & \frac{2}{20} & \frac{9}{20} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20}\end{pmatrix}$；

因 XY 的全部可能取值为 $-2, -1, 1, 2, 4$，

故 $X+Y\sim\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1 & 2 & 4\\ \frac{9}{20} & \frac{2}{20} & \frac{5}{20} & \frac{3}{20} & \frac{1}{20}\end{pmatrix}$.

2． 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	2
-1	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	0

试求：（1）$X-Y$ 的分布律；（2）$\max\{X, Y\}$的分布律.

解：（1）$X-Y$ 的全部可能取值为 $-3, -1, 0, 1, 2$，

故 $X-Y \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$；

（2）$\max\{X, Y\}$的全部可能取值为$-1, 0, 1, 2$，

故 $\max\{X, Y\} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{15} & \frac{1}{3} & \frac{3}{15} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

3． 设 X, Y 是相互独立的随机变量，且都服从以 n, p 为参数的二项分布，试证 $Z = X + Y \sim B(2n, p)$.

证明：因 $P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$，$k = 0, 1, \cdots, n$； $P\{Y = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$，$k = 0, 1, \cdots, n$；

$X+Y$ 的全部可能取值为 $0, 1, \cdots, 2n$，

则 $P\{X+Y = m\} = \sum\limits_{k=0}^{m} P\{X = k, Y = m-k\} = \sum\limits_{k=0}^{m} P\{X = k\}P\{Y = m-k\}$

$= \sum\limits_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k} \cdot C_n^{m-k} p^{m-k} q^{n-m+k} = \sum\limits_{k=0}^{m} C_n^k C_n^{m-k} \cdot p^m q^{2n-m} = C_{2n}^m p^m q^{2n-m}$，$m = 0, 1, \cdots, 2n$，

故 $Z = X + Y \sim B(2n, p)$.

注：超几何分布 $H(m, n, 2n)$ 的概率函数为 $P\{X = k\} = \dfrac{C_n^k C_n^{m-k}}{C_{2n}^m}$，$k = 0, 1, \cdots, m$，

根据概率函数的规范性，可得组合数公式 $C_{2n}^m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_n^k C_n^{m-k}$.

4． 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0, \end{cases}$$

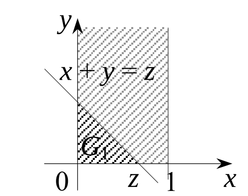
求 $Z = X + Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

解：因 X 与 Y 相互独立，有(X, Y)的联合密度函数 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y}, & 0 < x < 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

对于 $Z = X + Y$，作曲线簇 $x + y = z$，得 z 的分段点 $0, 1$，

当 $z < 0$ 时，$F_Z(z) = 0$，有 $f_Z(z) = F_Z'(z) = 0$，

当 $0 \le z < 1$ 时， $F_Z(z) = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^z \mathrm{d}x \int_0^{z-x} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = \int_0^z \mathrm{d}x \cdot (-\mathrm{e}^{-y})\Big|_0^{z-x}$

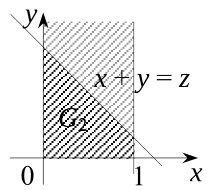


G_1：$0 \le z < 1$

↑：$0 \le x \le z, 0 \le y \le z - x$

$=\int_0^z(-\mathrm{e}^{-z+x}+1)\mathrm{d}x=(-\mathrm{e}^{-z+x}+x)\Big|_0^z=-1+z+\mathrm{e}^{-z}$，有 $f_Z(z)=F_Z'(z)=1-\mathrm{e}^{-z}$，

当 $z\ge 1$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{G_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\cdot(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_0^{z-x}$



G_2：$z\ge 1$

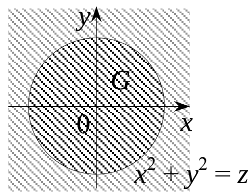
↑：$0\le x\le 1,\ 0\le y\le z-x$

$=\int_0^1(-\mathrm{e}^{-z+x}+1)\mathrm{d}x=(-\mathrm{e}^{-z+x}+x)\Big|_0^1=-\mathrm{e}^{-z+1}+1+\mathrm{e}^{-z}$，

有 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\mathrm{e}^{-z+1}-\mathrm{e}^{-z}=(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}$，

故 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z}, & 0\le z<1,\\ (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}, & z\ge 1,\\ 0, & z<0.\end{cases}$

5． 设$(X,Y)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0)$，求 $Z=X^2+Y^2$ 的密度函数．



G：$z>0$

极坐标：$0\le\theta<2\pi,\ 1\le r\le\sqrt{z}$

解：(X,Y)的联合密度函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$，

对于 $Z=X^2+Y^2$，作曲线簇 $x^2+y^2=z$，得 z 的分段点 0，

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$，则 $f_Z(z)=F_Z'(z)=0$，

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{G}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}r\mathrm{d}r=2\pi\cdot\dfrac{1}{2\pi\sigma^2}(-\sigma^2\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}})\Big|_0^{\sqrt{z}}=-\mathrm{e}^{-\frac{z}{2\sigma^2}}+1$，

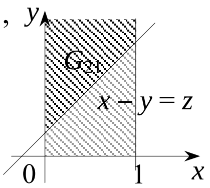
则 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\dfrac{1}{2\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2\sigma^2}}$，

故 $Z=X^2+Y^2$ 的密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{z}{2\sigma^2}}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

6． 设随机变量 X 服从区间 $(0,1)$上的均匀分布，Y 服从参数为 1 的指数分布，且 X 与 Y 相互独立，试求下列随机变量的密度函数：（1）$Z_1=X+Y$；（2）$Z_2=X-Y$．

解：$X\sim U(0,1)$，X 的密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$，$Y\sim \mathrm{e}(1)$，$Y$ 的密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$

因 X 与 Y 相互独立，有(X,Y)的联合密度函数 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<1,y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$



G_3：$z<0$

↑：$0\le x\le 1,\ x-z\le y<+\infty$

（1）对于 $Z_1=X+Y$，同第 4 题；

（2）对于 $Z_2=X-Y$，作曲线簇 $x-y=z$，得 z 的分段点 0, 1，

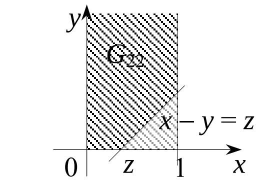
当 $z<0$ 时，$F_2(z)=\iint\limits_{G_{21}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-z}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\cdot(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_{x-z}^{+\infty}$

$=\int_0^1\mathrm{e}^{z-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{z-x}\Big|_0^1=-\mathrm{e}^{z-1}+\mathrm{e}^z=(1-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{e}^z$，有 $f_2(z)=F_2'(z)=(1-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{e}^z$，

当 $0\le z<1$ 时，$F_2(z)=\iint\limits_{G_{22}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y+\int_z^1\mathrm{d}x\int_{x-z}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$

$=\int_0^z\mathrm{d}x\cdot(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_0^{+\infty}+\int_z^1\mathrm{d}x\cdot(-\mathrm{e}^{-y})\Big|_{x-z}^{+\infty}=\int_0^z\mathrm{d}x+\int_z^1\mathrm{e}^{z-x}\mathrm{d}x$

$=z-\mathrm{e}^{z-x}\Big|_z^1=z-\mathrm{e}^{z-1}+1$，则 $f_2(z)=F_2'(z)=1-\mathrm{e}^{z-1}$，



G_3：$0\le z<1$

↑：$0\le x<z,\ 0\le y<+\infty$

$z\le x\le 1,\ x-z\le y<+\infty$

当 $z\ge 1$ 时，$F_2(z)=1$，则 $f_2(z)=F_2'(z)=0$，

故 $Z_2=X-Y$ 的密度函数 $f_2(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{e}^z, & z<0,\\ 1-\mathrm{e}^{z-1}, & 0\le z<1,\\ 0, & z\ge 1.\end{cases}$

7．设(X, Y)相互独立且服从区间$(0, a)$上的均匀分布，求下列随机变量函数的分布：（1）$Z_1=X+Y$；（2）$Z_2=\dfrac{X}{Y}$．

解：$X, Y\sim U(0, a)$，X, Y 的密度函数分别为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<x<a,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<y<a,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

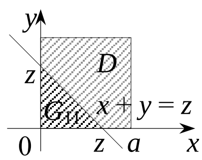
因 X 与 Y 相互独立，有(X, Y)的联合密度函数 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & 0<x<a, 0<y<a,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

即 (X, Y)服从区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<a, 0<y<a\}$上的二维均匀分布，

（1）对于 $Z_1=X+Y$，作曲线簇 $x+y=z$，得 z 的分段点 $0, a, 2a$，

当 $z<0$ 时，$F_1(z)=0$，则 $f_1(z)=F_1'(z)=0$，

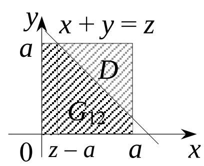
当 $0\le z<a$ 时，$F_1(z)=\dfrac{S_{G_{11}}}{S_D}=\dfrac{\frac{1}{2}z^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{2a^2}$，则 $f_1(z)=F_1'(z)=\dfrac{z}{a^2}$，



$0\le z<a$

当 $a\le z<2a$ 时，$F_1(z)=\dfrac{S_{G_{12}}}{S_D}=\dfrac{a^2-\frac{1}{2}(2a-z)^2}{a^2}=\dfrac{-2a^2+4az-z^2}{2a^2}$，

则 $f_1(z)=F_1'(z)=\dfrac{4a-2z}{2a^2}=\dfrac{2a-z}{a^2}$，

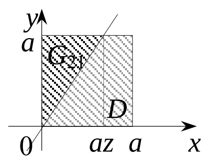


$a\le z<2a$

当 $z\ge 2a$ 时，$F_1(z)=1$，则 $f_1(z)=F_1'(z)=0$，

故 $Z_1=X+Y$ 的密度函数 $f_1(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{a^2}, & 0\le z<a,\\ \dfrac{2a-z}{z^2}, & a\le z<2a,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

（2）对于 $Z_2=\dfrac{X}{Y}$，作曲线簇 $\dfrac{x}{y}=z$，得 z 的分段点 $0, 1$，

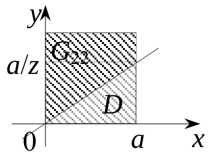


$0\le z<1$

当 $z<0$ 时，$F_2(z)=0$，则 $f_2(z)=F_2'(z)=0$，

当 $0 \le z < 1$ 时，$F_2(z) = \dfrac{S_{G_{21}}}{S_D} = \dfrac{\frac{1}{2}a \cdot az}{a^2} = \dfrac{z}{2}$，则 $f_2(z) = F_2'(z) = \dfrac{1}{2}$，

当 $z \ge 1$ 时，$F_2(z) = \dfrac{S_{G_{22}}}{S_D} = \dfrac{a^2 - \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{z}}{a^2} = 1 - \dfrac{1}{2z}$，则 $f_2(z) = F_2'(z) = \dfrac{1}{2z^2}$，



$z \ge 1$

故 $Z_2 = \dfrac{X}{Y}$ 的密度函数 $f_2(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0 \le z < 1, \\ \dfrac{1}{2z^2}, & z \ge 1, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$

复习题三

1． 某高校学生宿舍有 8 名委员，其中来自文科的 2 名，来自理科和工科的各 3 名，现从 8 名委员中随机地指定 3 名担任学生会主席和副主席，设 X, Y 分别为主席和副主席来自文科、工科的人数．求：（1）(X, Y)的联合分布律；（2）X 和 Y 的边缘分布律．

解：X 的全部可能取值为 0, 1, 2，Y 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3，

$(X, Y) = (0, 0)$表示 3 名主席都来自理科，　$P\{(X,Y) = (0,0)\} = \dfrac{C_3^3}{C_8^3} = \dfrac{1}{56}$；

$(X, Y) = (0, 1)$表示 1 名来自工科，2 名来自理科，$P\{(X,Y) = (0,1)\} = \dfrac{C_3^1 C_3^2}{C_8^3} = \dfrac{9}{56}$；

$(X, Y) = (0, 2)$表示 2 名来自工科，1 名来自理科，$P\{(X,Y) = (0,1)\} = \dfrac{C_3^2 C_3^1}{C_8^3} = \dfrac{9}{56}$；

依此类推，

故(X, Y)的联合分布律及其各自的边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{20}{56}$
1	$\frac{6}{56}$	$\frac{18}{56}$	$\frac{6}{56}$	0	$\frac{30}{56}$
2	$\frac{3}{56}$	$\frac{3}{56}$	0	0	$\frac{6}{56}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	

2． 将一颗骰子连掷两次，令 X 为第一次掷出的点数，Y 为两次掷出的最大点数．求(X, Y)的联合分布律与各自的边缘分布律．

解：X, Y 的全部可能取值都是 1, 2, 3, 4, 5, 6，

$(X, Y) = (1, 1)$表示两次都掷出 1 点，　$P\{(X,Y) = (1,1)\} = \dfrac{1}{6^2} = \dfrac{1}{36}$；

$(X, Y) = (1, 2)$表示第一次 1 点，第二次 2 点，　$P\{(X,Y) = (1,2)\} = \dfrac{1}{6^2} = \dfrac{1}{36}$；

$(X, Y)=(2, 2)$表示第一次 2 点，第二次不超过 2 点，$P\{(X,Y)=(2,2)\}=\frac{2}{6^2}=\frac{2}{36}$；依此类推，

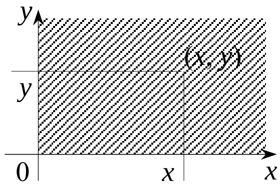
故(X, Y)的联合分布律及其各自的边缘分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	

3． 二维随机变量(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}，x>0，y>0，$$

试确定系数 a 的值，并求联合分布函数 $F(x, y)$.



解：由规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{a}{(1+x^2)(1+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，

得 $a\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=a\arctan x\big|_0^{+\infty}\cdot\arctan y\big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}a=1$，故 $a=\frac{4}{\pi^2}$；

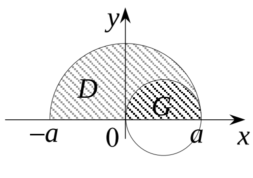
当 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x, y)=0$，

当 $x\ge 0$ 且 $y\ge 0$ 时，$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^x\int_0^y\frac{4}{\pi^2(1+u^2)(1+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int_0^x\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\cdot\int_0^y\frac{1}{1+v^2}\mathrm{d}v=\frac{4}{\pi^2}\arctan u\big|_0^x\cdot\arctan v\big|_0^y=\frac{4}{\pi^2}\arctan x\cdot\arctan y，$$

故 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi^2}\arctan x\cdot\arctan y, & x\ge 0, y\ge 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

4． 二维随机变量$(X,\ Y)$服从区域 D 的均匀分布，其中 D 为以原点为圆心，a 为半径的圆的上半圆周与 x 轴所围成的区域. 求：（1）(X, Y)的边缘密度函数；（2）$P\{(X, Y)\in G\}$，其中 G 为以$(\frac{a}{2}, 0)$为圆心，$\frac{a}{2}$ 为半径的圆所围成的区域.



解：（1）D 的面积 $S_D=\frac{\pi a^2}{2}$，故 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi a^2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$

因 X 的全部可能取值为 $(-a, a)$，当 $-a<x<a$ 时，$0<y<\sqrt{a^2-x^2}$，

故 $f_X(x)=\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\dfrac{2}{\pi a^2}\mathrm{d}y=\dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}$，$-a<x<a$，即 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}, & -a<x<a,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

又因 Y 的全部可能取值为 $(0, a)$，当 $0<y<a$ 时，$-\sqrt{a^2-y^2}<x<\sqrt{a^2-y^2}$，

故 $f_Y(y)=\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\dfrac{2}{\pi a^2}\mathrm{d}y=\dfrac{4}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2}$，$0<y<a$，即 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2}, & 0<y<a,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2）$P\{(X,Y)\in G\}=\dfrac{S_G}{S_D}=\dfrac{\pi/8}{\pi/2}=\dfrac{1}{4}$.

5． 二维随机变量(X, Y)的联合分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{xy}{3}, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求：（1）(X, Y)的边缘密度函数；（2）X 与 Y 是否独立；（3）求 $P\{(X, Y)\in D\}$，其中 D 为曲线 $y=2x^2$ 与 $y=2x$ 所围成的区域.

解：（1）当 $0\le x\le 1$ 时，$0\le y\le 2$，

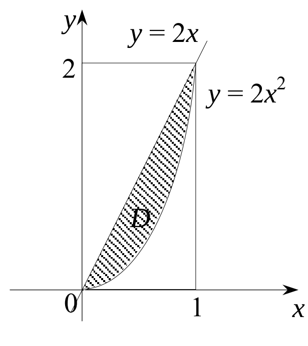
则 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^2(x^2+\dfrac{xy}{3})\mathrm{d}y=(x^2y+\dfrac{xy^2}{6})\Big|_0^2=2x^2+\dfrac{2x}{3}$，$0\le x\le 1$，

故 $f_X(x)=\begin{cases}2x^2+\dfrac{2x}{3}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

当 $0\le y\le 2$ 时，$0\le x\le 1$，

则 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2+\dfrac{xy}{3})\mathrm{d}x=(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2y}{6})\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}+\dfrac{y}{6}$，$0\le y\le 2$，

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{y}{6}, & 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$



（2）因 $f(x, y)\ne f_X(x)\,f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立；

（3）D：↑ $0\le x\le 1$，$2x^2\le y\le 2x$，

故 $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{2x^2}^{2x}(x^2+\dfrac{xy}{3})\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\cdot(x^2y+\frac{xy^2}{6})\Big|_{2x^2}^{2x}=\int_0^1(2x^3+\frac{4x^3}{6}-2x^4-\frac{4x^5}{6})\mathrm{d}x=(\frac{2x^4}{4}+\frac{x^4}{6}-\frac{2x^5}{5}-\frac{4x^6}{36})\Big|_0^1=\frac{7}{45}.$$

6． 设(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{(1+y)^2}\mathrm{e}^{-x}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试讨论 X, Y 的独立性.

解：广义矩形区域 $x>0$，$y>0$，

则 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+y)^2}\mathrm{d}y=x\mathrm{e}^{-x}\cdot(-\frac{1}{1+y})\Big|_0^{+\infty}=x\mathrm{e}^{-x}$，$x>0$，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+y)^2}dx=\frac{1}{(1+y)^2}\int_0^{+\infty}x(-d\mathrm{e}^{-x})=\frac{1}{(1+y)^2}[-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}dx]$$

$$=\frac{1}{(1+y)^2}[0-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}]=\frac{1}{(1+y)^2}\text{，}y>0\text{，}$$

即边缘密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$；

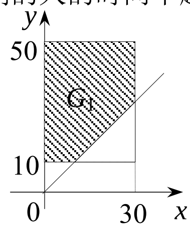
因 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 独立.

7. 甲、乙相约 9:10 在车站见面，假设甲、乙到达车站的时间分别均匀分布在 9:00-9:30 及 9:10-9:50 之间，且两人到达的时间相互独立．求下列事件的概率：（1）甲先到；（2）先到的人等后到的人的时间不超过 10 分钟.

解：设甲、乙到达车站的时间分别为 9 点 X 分钟、9 点 Y 分钟，

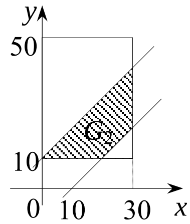
则(X,Y)服从区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<30,10<y<50\}$上的二维均匀分布，

（1）甲先到，即 $X<Y$，



故 $P\{X<Y\}=\frac{S_{G_1}}{S_D}=\frac{1200-200}{1200}=\frac{5}{6}$；

（2）先到的人等后到的人的时间不超过 10 分钟，即 $|X-Y|\le 10$，



故 $P\{|X-Y|\le 10\}=\frac{S_{G_2}}{S_D}=\frac{450-50}{1200}=\frac{1}{3}$.

8. 设 $F_1(x),F_2(y)$是两个随机变量 X,Y 的分布函数，$f_1(x),f_2(y)$是相应的密度函数．试证：对任意α($|\alpha|<1$)，

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y)\{1+\alpha[2F_1(x)-1][2F_2(y)-1]\}$$

是二维随机变量(X,Y)的联合密度函数，且以 $f_1(x),f_2(y)$为其边缘密度函数.

证：根据已知条件得：$0\le F_1(x)\le 1$，$0\le F_2(x)\le 1$，$f_1(x)=F_1'(x)\ge 0$，$f_2(y)=F_2'(y)\ge 0$，且 $|\alpha|<1$，

有$-1\le 2F_1(x)-1\le 1$，$-1\le 2F_2(y)-1\le 1$，得 $0<1+\alpha[2F_1(x)-1][2F_2(y)-1]<2$，

则 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)\{1+\alpha[2F_1(x)-1][2F_2(y)-1]\}\ge 0$，非负性成立，

且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\cdot f_1(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(y)\{1+\alpha[2F_1(x)-1][2F_2(y)-1]\}\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\cdot f_1(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\{1+\alpha[2F_1(x)-1][2F_2(y)-1]\}\mathrm{d}F_2(y)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\cdot f_1(x)\{F_2(y)+\alpha[2F_1(x)-1][F_2^2(y)-F_2(y)]\}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\{1+\alpha[2F_1(x)-1][1-1]-0\}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x=1\text{，规范性成立，}$$

故 $f(x,y)$是二维随机变量(X,Y)的联合密度函数；

边缘密度函数 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(y)\{1+\alpha[2F_1(x)-1][2F_2(y)-1]\}\mathrm{d}y$

$$=f_1(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\{1+\alpha[2F_1(x)-1][2F_2(y)-1]\}\mathrm{d}F_2(y)$$

$$= f_1(x)\{F_2(y) + \alpha[2F_1(x) - 1][F_2^2(y) - F_2(y)]\}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = f_1(x),$$

同理边缘密度函数 $f_Y(y) = f_2(y)$，故 $f_1(x), f_2(y)$分别为 $f(x, y)$的边缘密度函数.

9．设(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x, y) = G(x)[H(y) - H(-\infty)], \quad -\infty < x, y < +\infty,$$

且 $G(+\infty), H(+\infty), H(-\infty)$均存在，试证：$X$ 与 Y 相互独立.

证：$F(x, y)$是(X, Y)的联合分布函数，有 $F(+\infty,+\infty) = G(+\infty)[H(+\infty) - H(-\infty)] = 1$，

因边缘分布函数 $F_X(x) = F(x,+\infty) = G(x)[H(+\infty) - H(-\infty)]$，

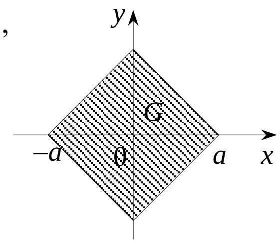
且边缘分布函数 $F_Y(y) = F(+\infty, y) = G(+\infty)[H(y) - H(-\infty)]$，

则 $F_X(x)F_Y(y) = G(x)[H(+\infty) - H(-\infty)]G(+\infty)[H(y) - H(-\infty)] = G(x) \cdot 1 \cdot [H(y) - H(-\infty)] = F(x, y)$，

故 X 与 Y 相互独立.

10．设(X, Y)在区域 $G = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le a\}$上服从均匀分布，求 X 与 Y 的边缘密度函数，并判断 X 与 Y 是否相互独立.

解：因区域 G 的面积 $S_G = 2a^2$，有(X, Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a^2}, & |x|+|y|\le a,\\ 0, & 其他,\end{cases}$



G：↑ 当$-a \le x < 0$ 时，$-a - x \le y \le a + x$，当 $0 \le x \le a$ 时，$x - a \le y \le a - x$，

则当$-a \le x < 0$ 时，$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-a-x}^{a+x} \dfrac{1}{2a^2} dy = \dfrac{a+x}{a^2}$，

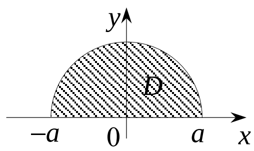
当 $0 \le x \le a$ 时，$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{x-a}^{a-x} \dfrac{1}{2a^2} dy = \dfrac{a-x}{a^2}$，

故 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{a+x}{a^2}, & -a\le x<0,\\ \dfrac{a-x}{a^2}, & 0\le x\le a,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 同理 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{a+y}{a^2}, & -a\le y<0,\\ \dfrac{a-y}{a^2}, & 0\le y\le a,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 即 $f(x, y) \ne f_X(x)\, f_Y(y)$，

故 X 与 Y 不独立.

11．求本复习题三第 4 题中二维随机变量(X, Y)的两个条件密度函数 $f_X(x \mid Y = y)$及 $f_Y(y \mid X = x)$.

解：(X, Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi a^2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$



因 X 的全部可能取值为 $(-a, a)$，当 $-a < x < a$ 时，$0 < y < \sqrt{a^2 - x^2}$，

则 $f_X(x) = \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \dfrac{2}{\pi a^2} \mathrm{d}y = \dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$，$-a < x < a$，即 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}, & -a<x<a,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

故当$-a < x < a$ 时，$f_X(x) > 0$，有 $f_Y(y \mid X = x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{\dfrac{2}{\pi a^2}}{\dfrac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$，$0 < y < \sqrt{a^2 - x^2}$，

又因 Y 的全部可能取值为 $(0, a)$，当 $0 < y < a$ 时，$-\sqrt{a^2 - y^2} < x < \sqrt{a^2 - y^2}$，

则 $f_Y(y)=\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\frac{2}{\pi a^2}\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2}$，$0<y<a$，即 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{4}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2}, & 0<y<a,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

当 $0<y\le a$ 时，$f_Y(y)>0$，有

$$f_X(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{2}{\pi a^2}}{\frac{4}{\pi a^2}\sqrt{a^2-y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-y^2}}，-\sqrt{a^2-y^2}<x<\sqrt{a^2-y^2}，$$

故当$-a<x<a$ 时，条件密度函数 $f_Y(y|X=x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, & 0<y<\sqrt{a^2-x^2},\\ 0, & 其他;\end{cases}$

当 $0<y\le a$ 时，条件密度函数 $f_X(x|Y=y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{a^2-y^2}}, & -\sqrt{a^2-y^2}<x<\sqrt{a^2-y^2},\\ 0, & 其他.\end{cases}$

12．某电脑批发商经营台式电脑和笔记本电脑．该商家每月收到的台式电脑和笔记本电脑订单在接到订单的 1 周内能及时发货的比例分别为随机变量 X 和 Y，其联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

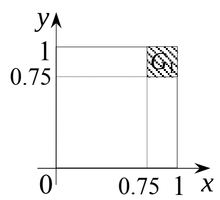
（1）求某月内台式电脑和笔记本电脑订单在 1 周内能及时发货的比例都超过 75%的概率；

（2）假设某月内台式电脑和笔记本电脑订单数量相同，求全部订单的 75%以上在 1 周内能及时发货的概率；

（3）随机变量 X 与 Y 是否相互独立？

（4）已知某月内台式电脑订单在 1 周内能及时发货的比例为 x （$0<x<1$），试确定笔记本电脑能及时发货的比例不少于 50%的概率．当 x 增大时此项概率如何变化？

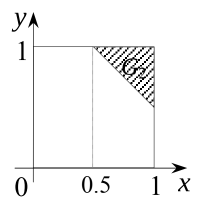
解：（1）需要 $X>0.75$，$Y>0.75$，G_1：↑　$0.75<x\le 1$，$0.75<y\le 1$，



故 $P\{X>0.75, Y>0.75\}=\iint\limits_{G_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0.75}^{1}\mathrm{d}x\int_{0.75}^{1}(2-x-y)\mathrm{d}y$

$$=\int_{0.75}^{1}\mathrm{d}x\cdot(2y-xy-\frac{y^2}{2})\bigg|_{0.75}^{1}=\int_{0.75}^{1}(\frac{9}{32}-\frac{x}{4})\mathrm{d}x=(\frac{9x}{32}-\frac{x^2}{8})\bigg|_{0.75}^{1}=\frac{1}{64}；$$

（2）需要 $\frac{X+Y}{2}>0.75$，G_2：↑　$0.5<x\le 1$，$1.5-x<y\le 1$，



故 $P\{\frac{X+Y}{2}>0.75\}=\iint\limits_{G_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0.5}^{1}\mathrm{d}x\int_{1.5-x}^{1}(2-x-y)\mathrm{d}y$

$$=\int_{0.5}^{1}\mathrm{d}x\cdot(2y-xy-\frac{y^2}{2})\bigg|_{1.5-x}^{1}=\int_{0.5}^{1}(-\frac{3}{8}+x-\frac{x^2}{2})\mathrm{d}x=(-\frac{3x}{8}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})\bigg|_{0.5}^{1}=\frac{1}{24}；$$

（3）矩形区域 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，

则 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1(2-x-y)\mathrm{d}y=(2y-xy-\frac{y^2}{2})\bigg|_0^1=\frac{3}{2}-x$，$0\le x\le 1$，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1(2-x-y)\mathrm{d}x=(2x-\frac{x^2}{2}-xy)\Big|_0^1=\frac{3}{2}-y\text{，}0\le y\le 1\text{，}$$

故边缘密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}\text{，}\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-y, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}\text{，}\end{cases}$

因 $f(x,y)\ne f_X(x)\,f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立.

（4）先求在 $X=x$ 条件下，Y 的条件分布，

当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)>0$，有 $f_Y(y\,|\,X=x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{2-x-y}{\frac{3}{2}-x}=\dfrac{4-2x-2y}{3-2x},\quad 0\le y\le 1$，

则当 $0\le x\le 1$ 时，$P\{Y\ge 0.5\,|\,X=x\}=\int_{0.5}^1 f_Y(y\,|\,X=x)\mathrm{d}y=\int_{0.5}^1\dfrac{4-2x-2y}{3-2x}\mathrm{d}y=\dfrac{4y-2xy-y^2}{3-2x}\Big|_{0.5}^1$

$$=\frac{1.25-x}{3-2x}=\frac{5-4x}{12-8x}\text{，}$$

有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P\{Y\ge 0.5\,|\,X=x\}=\dfrac{(-4)\cdot(12-8x)-(-8)\cdot(5-4x)}{(12-8x)^2}=-\dfrac{8}{(12-8x)^2}<0$，

故若 $0<x<1$，当 x 增大时，概率 $P\{Y\ge 0.5\,|\,X=x\}$将减少.

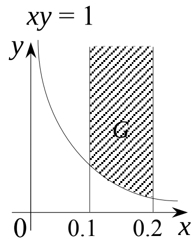
13．某公司生产的某种化工原料的月平均价格 X（万元/公斤）和月销售量 Y（吨）都是随机变量，其联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}10x\mathrm{e}^{-xy}, & 0.1<x<0.2,\ y>0,\\ 0, & \text{其他}\text{，}\end{cases}$$

求：（1）公司某个月内销售此种产品的总收入超过 1000 万元的概率；

（2）月平均价格 X 的密度函数；

（3）月销售量 Y 的条件密度函数，并计算当 X = 0.15 和 X = 0.2 时月销售量超过 4 吨的概率，比较此二结果，说明其经济意义.



解：（1）需要 $1000XY>1000$，即 $XY>1$，G：$\uparrow$ $0.1<x<0.2$，$\dfrac{1}{x}<y<+\infty$，

故 $P\{XY>1\}=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0.1}^{0.2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}10x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\int_{0.1}^{0.2}\mathrm{d}x\cdot(-10\mathrm{e}^{-xy})\Big|_{\frac{1}{x}}^{+\infty}$

$$=\int_{0.1}^{0.2}10\mathrm{e}^{-1}\mathrm{d}x=10\mathrm{e}^{-1}x\Big|_{0.1}^{0.2}=\mathrm{e}^{-1}\text{；}$$

（2）广义矩形区域 $0.1<x<0.2$，$0<y<+\infty$，

则 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}10x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=(-10\mathrm{e}^{-xy})\Big|_0^{+\infty}=10$，$0.1<x<0.2$，

故月平均价格 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}10, & 0.1<x<0.2,\\ 0, & \text{其他}\text{；}\end{cases}$

（3）当 $0.1<x<0.2$ 时，$f_X(x)>0$，有 $f_Y(y\,|\,X=x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\dfrac{10x\mathrm{e}^{-xy}}{10}=x\mathrm{e}^{-xy}$，$y>0$，

故当 $0.1<x<0.2$ 时，月销售量 Y 的条件密度函数为 $f_Y(y\,|\,X=x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-xy}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$

且 $P\{Y>4\,|\,X=0.15\}=\int_4^{+\infty}f_Y(y\,|\,X=0.15)\mathrm{d}y=\int_4^{+\infty}0.15\mathrm{e}^{-0.15y}\mathrm{d}y=(-\mathrm{e}^{-0.15y})\Big|_4^{+\infty}=\mathrm{e}^{-0.6}$，

$P\{Y>4\,|\,X=0.2\}=\int_4^{+\infty}f_Y(y\,|\,X=0.2)\mathrm{d}y=\int_4^{+\infty}0.2\mathrm{e}^{-0.2y}\mathrm{d}y=(-\mathrm{e}^{-0.2y})\Big|_4^{+\infty}=\mathrm{e}^{-0.8}$，

有 $P\{Y>4\,|\,X=0.15\}>P\{Y>4\,|\,X=0.2\}$，可见当平均价格增加时，月销售量有下降的趋势.

14．设随机变量 X 服从参数为 p（$0<p<1$）的几何分布，即

$P\{X=k\}=q^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots$，

其中 $q=1-p$，Y 与 X 独立同分布，求 $Z=X+Y$ 的分布.

解：$X+Y$ 的全部可能取值为 2, 3, 4, ⋯，

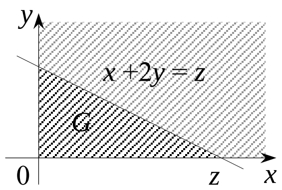
则 $P\{X+Y=m\}=\sum\limits_{k=1}^{m-1}P\{X=k,Y=m-k\}=\sum\limits_{k=1}^{m-1}P\{X=k\}P\{Y=m-k\}=\sum\limits_{k=1}^{m-1}q^{k-1}p\cdot q^{m-k-1}p$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}q^{m-2}p^2=(m-1)q^{m-2}p^2,\quad m=2,3,4,\cdots.$$

15．设(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $Z=X+2Y$ 的分布函数.



G：↑ $0\le x\le z,\ 0\le y\le\dfrac{z-x}{2}$

解：作曲线簇 $x+2y=z$，得 z 的分段点 0，

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=0$，则 $f_Z(z)=F_Z'(z)=0$，

当 $z>0$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{d}x\cdot[-\mathrm{e}^{-(x+2y)}]\Big|_0^{\frac{z-x}{2}}=\int_0^z[-\mathrm{e}^{-z}+\mathrm{e}^{-x}]\mathrm{d}x$

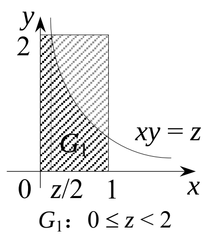
$=[-\mathrm{e}^{-z}x-\mathrm{e}^{-x}]\Big|_0^z=-(z+1)\mathrm{e}^{-z}+1$，则 $f_Z(z)=F_Z'(z)=-\mathrm{e}^{-z}+(z+1)\mathrm{e}^{-z}=z\mathrm{e}^{-z}$，

故 $Z=X+2Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}1-(z+1)e^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0;\end{cases}$ 密度函数为 $f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

16．设(X,Y)在矩形区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 2\}$上服从均匀分布，求下列随机变量的密度函数：（1）$Z_1=XY$；（2）$Z_2=\min\{X,Y\}$.

解：因 D 的面积 $S_D=2$，有(X,Y)的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\le x\le 1,0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

（1）对于 $Z_1=XY$，作曲线簇 $xy=z$，得 z 的分段点 0, 2，



G_1：$0\le z<2$

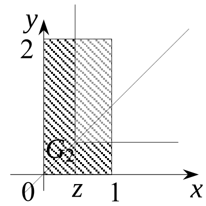
当 $z\le 0$ 时，$F_1(z)=0$，则 $f_1(z)=F_1'(z)=0$，

当 $0<z<2$ 时，$F_1(z)=\dfrac{S_{G_1}}{S_D}=\dfrac{2\cdot\frac{z}{2}+\int_{\frac{z}{2}}^{1}\frac{z}{x}dx}{2}=\dfrac{z}{2}+\dfrac{z}{2}\ln x\Big|_{\frac{z}{2}}^{1}=\dfrac{z}{2}-\dfrac{z}{2}\ln\dfrac{z}{2}$，

则 $f_1(z)=F_1'(z)=-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{z}{2}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2}{z}$，

当 $z\ge 2$ 时，$F_1(z)=1$，则 $f_1(z)=F_1'(z)=0$，

故 $Z_1 = XY$ 的密度函数 $f_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\frac{2}{z}, & 0 < z < 2, \\ 0, & 其他； \end{cases}$



G_2：$0 \le z < 1$

（2）对于 $Z_2 = \min\{X, Y\}$，作曲线簇 $\min\{x, y\} = z$，得 z 的分段点 0, 1，

当 $z < 0$ 时，$F_2(z) = 0$，则 $f_2(z) = F_2'(z) = 0$，

当 $0 \le z < 1$ 时，$F_2(z) = \dfrac{S_{G_2}}{S_D} = \dfrac{2 \cdot z + z \cdot (1 - z)}{2} = \dfrac{3}{2}z - \dfrac{1}{2}z^2$，则 $f_2(z) = F_2'(z) = \dfrac{3}{2} - z$，

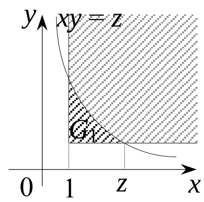
当 $z \ge 1$ 时，$F_2(z) = 1$，则 $f_2(z) = F_2'(z) = 0$，

故 $Z_2 = \min\{X, Y\}$的密度函数 $f_2(z) = \begin{cases} \frac{3}{2} - z, & 0 \le z < 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

17．设(X, Y)的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 y^2}, & x > 1, y > 1 \\ 0, & 其它 \end{cases},$$

求下列随机变量的密度函数：（1）$Z_1 = XY$；（2）$Z_2 = \dfrac{X}{Y}$.



G_1：$z \ge 1$

↑：$1 \le x \le z, 1 \le y \le z/x$

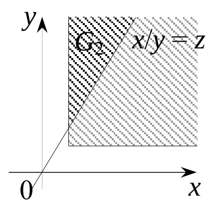
解：（1）对于 $Z_1 = XY$，作曲线簇 $xy = z$，得 z 的分段点 1，

当 $z < 1$ 时，$F_1(z) = 0$，则 $f_1(z) = F_1'(z) = 0$，

当 $z \ge 1$ 时，$F_1(z) = \iint\limits_{G_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^z \mathrm{d}x \int_1^{\frac{z}{x}} \dfrac{1}{x^2 y^2}\mathrm{d}y = \int_1^z \mathrm{d}x \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2 y}\right)\Bigg|_1^{\frac{z}{x}} = \int_1^z \left(-\dfrac{1}{xz} + \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

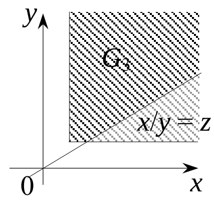
$$= \left(-\frac{1}{z}\ln x - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^z = -\frac{1}{z}\ln z - \frac{1}{z} + 1，则 f_1(z) = F_1'(z) = \frac{1}{z^2}\ln z，$$

故 $Z_1 = XY$ 的密度函数 $f_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^2}\ln z, & z \ge 1, \\ 0, & z < 1; \end{cases}$



G_2：$0 \le z < 1$

↑：$1 \le x < +\infty, x/z \le y < +\infty$



G_3：$z \ge 1$

→：$1 \le y < +\infty, 1 \le x \le zy$

（2）对于 $Z_2 = \dfrac{X}{Y}$，作曲线簇 $\dfrac{x}{y} = z$，得 z 的分段点 0, 1，

当 $z \le 0$ 时，$F_2(z) = 0$，则 $f_2(z) = F_2'(z) = 0$，

当 $0 < z < 1$ 时，$F_2(z) = \iint\limits_{G_2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{z}}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2 y^2}\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} \mathrm{d}x \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2 y}\right)\Bigg|_{\frac{x}{z}}^{+\infty} = \int_1^{+\infty} \dfrac{z}{x^3}\mathrm{d}x$

$$= -\frac{z}{2x^2}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{z}{2}，则 f_2(z) = F_2'(z) = \frac{1}{2}，$$

当 $z \ge 1$ 时，$F_2(z) = \iint\limits_{G_3} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} \mathrm{d}y \int_1^{zy} \dfrac{1}{x^2 y^2}\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} \mathrm{d}y \cdot \left(-\dfrac{1}{xy^2}\right)\Bigg|_1^{zy} = \int_1^{+\infty} \left(-\dfrac{1}{zy^3} + \dfrac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y$

$$=\left(\frac{1}{2zy^2}-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_1^{+\infty}=-\frac{1}{2z}+1$$，则 $f_2(z)=F_2'(z)=\dfrac{1}{2z^2}$，

故 $Z_2=\dfrac{X}{Y}$ 的密度函数 $f_2(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0<z<1,\\ \dfrac{1}{2z^2}, & z\ge 1,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

18．设 X, Y 为随机变量．已知 $P\{X\ge 0, Y\ge 0\}=\dfrac{2}{5}$，$P\{X\ge 0\}=P\{Y\ge 0\}=\dfrac{3}{5}$，求：（1）$P\{\max\{X, Y\}\ge 0\}$；（2）$P\{\min\{X, Y\}<0\}$．

解：（1）$P\{\max\{X,Y\}\ge 0\}=P\{“X\ge 0”\cup“Y\ge 0”\}=P\{X\ge 0\}+P\{Y\ge 0\}-P\{X\ge 0, Y\ge 0\}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{5}$；

（2）$P\{\min\{X,Y\}<0\}=1-P\{\min\{X,Y\}\ge 0\}=1-P\{X\ge 0, Y\ge 0\}=1-\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}$．

概率论习题四解答

习题 4.1

1． 一箱产品 20 件，其中 5 件优质品，不放回地抽样，每次一件，共抽取两次，设取到的优质品件数为 X，求 $E(X)$.

解：X 的全部可能取值为 0, 1, 2，

$$P\{X=0\}=\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\frac{105}{190}=\frac{21}{38}，\quad P\{X=1\}=\frac{C_5^1C_{15}^1}{C_{20}^2}=\frac{75}{190}=\frac{15}{38}，\quad P\{X=2\}=\frac{C_5^2}{C_{20}^2}=\frac{10}{190}=\frac{1}{19}，$$

则 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{21}{38} & \frac{15}{38} & \frac{1}{19}\end{pmatrix}$，

故 $E(X)=0\times\frac{21}{38}+1\times\frac{15}{38}+2\times\frac{1}{19}=\frac{19}{38}=\frac{1}{2}$.

2． 盒内有 12 个乒乓球，其中 9 个是新球，3 个是旧球，采取不放回抽样，每次一个直到取到新球为止，求下列随机变量的数学期望．（1）抽取次数 X；（2）取到的旧球个数 Y.

解：（1）X 的全部可能取值为 1, 2, 3, 4，

$$P\{X=1\}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}，\quad P\{X=2\}=\frac{3}{12}\times\frac{9}{11}=\frac{9}{44}，\quad P\{X=3\}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{220}，$$

$$P\{X=4\}=\frac{3}{12}\times\frac{2}{11}\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{9}=\frac{1}{220}，$$

则 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{3}{4} & \frac{9}{44} & \frac{9}{220} & \frac{1}{220}\end{pmatrix}$，

故 $E(X)=1\times\frac{3}{4}+2\times\frac{9}{44}+3\times\frac{9}{220}+4\times\frac{1}{220}=\frac{286}{220}=1.3$.

（2）Y 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3，

$$P\{Y=0\}=\frac{3}{4}，\quad P\{Y=1\}=\frac{9}{44}，\quad P\{Y=2\}=\frac{9}{220}，\quad P\{Y=3\}=\frac{1}{220}，$$

则 Y 的分布列为 $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \frac{3}{4} & \frac{9}{44} & \frac{9}{220} & \frac{1}{220}\end{pmatrix}$，

故 $E(X)=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{9}{44}+2\times\frac{9}{220}+3\times\frac{1}{220}=\frac{66}{220}=0.3$.

3． 随机变量 X 只取 1, 2, 3 共三个值，并且取各个值的概率不相等且组成等差数列，求 $E(X)$.

解：设 $P\{X=1\}=a-d$，$P\{X=2\}=a$，$P\{X=3\}=a+d$，由非负性知 $a\geq0$ 且 $|d|\leq a$，

由规范性知：$P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=(a-d)+a+(a+d)=3a=1$，得 $a=\frac{1}{3}$，

故 $E(X)=1\times(a-d)+2\times a+3\times(a+d)=6a+2d=2+2d$，$|d|\leq\frac{1}{3}$.

4． 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq1,\end{cases}$$

求 $\mathrm{E}(X)$.

解：$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x\cdot\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\pi}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)=-\dfrac{1}{\pi}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1}=0$.

5．连续型随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}kx^a, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $k, a>0$，又知 $\mathrm{E}(X)=0.75$，求 k 和 a 的值.

解：由规范性知，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 kx^a\mathrm{d}x=k\cdot\dfrac{x^{a+1}}{a+1}\Big|_0^1=\dfrac{k}{a+1}=1$，

又知 $\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot kx^a\mathrm{d}x=k\cdot\dfrac{x^{a+2}}{a+2}\Big|_0^1=\dfrac{k}{a+2}=0.75$，

故 $k=3, a=2$.

6．设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{5}$，$k=1,2,3,4,5$．求 $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(X^2)$ 及 $\mathrm{E}[(X+2)^2]$.

解：$\mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{1}{5}+5\times\dfrac{1}{5}=3$，$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\dfrac{1}{5}+2^2\times\dfrac{1}{5}+3^2\times\dfrac{1}{5}+4^2\times\dfrac{1}{5}+5^2\times\dfrac{1}{5}=11$，

$\mathrm{E}[(X+2)^2]=3^2\times\dfrac{1}{5}+4^2\times\dfrac{1}{5}+5^2\times\dfrac{1}{5}+6^2\times\dfrac{1}{5}+7^2\times\dfrac{1}{5}=27$.

7．设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

求 $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(2X), \mathrm{E}(\mathrm{e}^{-2X})$.

解：$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x(-\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x})=-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=0+(-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{+\infty}=1$，

$\mathrm{E}(2X)=\int_{-\infty}^{+\infty}2xf(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2$，

$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{3}$.

8．球的直径测量值 X 在 (a,b)上均匀分布，求球体积 V 的数学期望.

解：$X\sim U(a,b)$，有 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 且球体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi X^3$，

则 $\mathrm{E}(V)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{4}{3}\pi x^3f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{4\pi}{3}\int_a^b x^3\cdot\dfrac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\dfrac{4\pi}{3(b-a)}\cdot\dfrac{x^4}{4}\Big|_a^b=\dfrac{\pi(b^4-a^4)}{3(b-a)}=\dfrac{\pi}{3}(b^3+ab^2+a^2b+a^3)$.

9．一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红或绿两种信号显示的时间相等，以 X 表示该汽车未遇到红灯而连续通过的路口数，求 X 的概率分布以及 $\mathrm{E}(\dfrac{1}{1+X})$.

注：此题 X 应理解为首次遇到红灯前而连续通过的路口数.

解：设 X 表示未遇红灯而连续通过的路口数，X 的全部可能取值为 0, 1, 2, 3，

$P\{X=0\}=0.5$，$P\{X=1\}=0.5\times0.5=0.25$，$P\{X=2\}=0.5^2\times0.5=0.125$，$P\{X=3\}=0.5^3=0.125$，

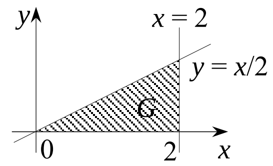
故 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.125\end{pmatrix}$；

$$\mathrm{E}(\frac{1}{1+X})=1\times0.5+\frac{1}{2}\times0.25+\frac{1}{3}\times0.125+\frac{1}{4}\times0.125=\frac{67}{96}=0.6979 .$$

10．设随机变量 X 和 Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy, & (x,y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases},$$

其中区域 G 由 $y=\dfrac{x}{2}$, $x=2$ 以及 x 轴所围成，求 $\mathrm{E}(2XY)$.



G：↑：$0\le x\le 2,\ 0\le y\le x/2$

解：$\mathrm{E}(2XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}2xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}2xy\cdot2xy\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\cdot4x^2\left.\dfrac{y^3}{3}\right|_0^{\frac{x}{2}}=\int_0^2\dfrac{x^5}{6}\mathrm{d}x=\left.\dfrac{x^6}{36}\right|_0^2=\dfrac{16}{9}$.

11．设随机变量 X, Y 分别服从参数为 2 和 4 的指数分布．（1）求随机变量 $Z=2X-3Y^2$ 的数学期望；（2）若 X 与 Y 独立，求 $W=3XY$ 的数学期望.

解：因 $X\sim\mathrm{e}(2)$，$Y\sim\mathrm{e}(4)$，有 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{2}$， $\mathrm{E}(Y)=\dfrac{1}{4}$，且 $f_Y(y)=\begin{cases}4\mathrm{e}^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$

则 $\mathrm{E}(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}y^2\cdot4\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}y^2(-\mathrm{d}\mathrm{e}^{-4y})=-y^2\mathrm{e}^{-4y}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-4y}\cdot2y\mathrm{d}y$

$$=0+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}y\cdot4\mathrm{e}^{-4y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{E}Y=\frac{1}{8},$$

（1） $\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}(2X-3Y^2)=2\mathrm{E}(X)-3\mathrm{E}(Y^2)=2\times\dfrac{1}{2}-3\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$；

（2）因 X 与 Y 独立，有 $\mathrm{E}(W)=\mathrm{E}(3XY)=3\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)=3\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}$.

12．设(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{1}{15}$

求 $\mathrm{E}(3X-2Y)$ 及 $\mathrm{E}(2XY)$.

解：$\mathrm{E}(3X-2Y)=0\times0+(-2)\times\dfrac{2}{15}+(-4)\times\dfrac{3}{15}+3\times\dfrac{1}{15}+1\times\dfrac{6}{15}+(-1)\times\dfrac{3}{15}=\dfrac{-10}{15}=-\dfrac{2}{3}$；

$\mathrm{E}(2XY)=0\times0+0\times\dfrac{2}{15}+0\times\dfrac{3}{15}+0\times\dfrac{1}{15}+2\times\dfrac{6}{15}+4\times\dfrac{3}{15}=\dfrac{24}{15}=\dfrac{8}{5}$.

13．一学徒用机床接连加工 10 个零件，设第 i 个零件报废的概率为 $\dfrac{1}{1+i}$,（$i=1, 2, 3, \cdots, 10$），求报废零件个数的数学期望.

解：设 X 表示报废零件个数，有 X 的全部可能取值为 1, 2, 3, ⋯, 10，令 $X_i=\begin{cases}1, & 第\,i\,个零件报废,\\ 0, & 第\,i\,个零件没有报废,\end{cases}$

有 $P\{X_i=1\}=\dfrac{1}{i+1}$， $P\{X_i=0\}=1-\dfrac{1}{i+1}$， $\mathrm{E}(X_i)=\dfrac{1}{i+1}$， $i=1, 2, 3, \cdots, 10$，又因 $X=\sum_{i=1}^{10}X_i$，

故 $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{10}\mathrm{E}(X_i)=\sum_{i=1}^{10}\dfrac{1}{i+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{11}=\dfrac{55991}{27720}=2.0199$.

习题 4.2

1. 求习题 4.1 中第 1, 6, 7 题所给随机变量的方差.

解：第 1 题中 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \dfrac{21}{38} & \dfrac{15}{38} & \dfrac{1}{19}\end{pmatrix}$，且 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{2}$， $\mathrm{E}(X^2)=0\times\dfrac{21}{38}+1\times\dfrac{15}{38}+4\times\dfrac{1}{19}=\dfrac{23}{38}$，

故 $\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=\dfrac{23}{38}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{27}{76}$；

第 6 题中 X 的分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{1}{5}$，$k=1, 2, 3, 4, 5$，且 $\mathrm{E}(X)=3$，

则 $\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\dfrac{1}{5}+2^2\times\dfrac{1}{5}+3^2\times\dfrac{1}{5}+4^2\times\dfrac{1}{5}+5^2\times\dfrac{1}{5}=11$，

故 $\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=11-9=2$；

第 7 题中 X 的分布为 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 即 $X\sim \mathrm{e}(1)$，故 $\mathrm{D}(X)=1$.

2. 地铁的运行间隔时间为两分钟，一旅客在任意时刻进入月台，求候车时间的数学期望和方差.

解：设 X 表示旅客的候车时间，有 $X\sim U(0, 2)$，故 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}=1$， $\mathrm{D}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{1}{3}$.

3. 某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩 X（百分制）近似服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的考生总数的 2.3%，试求考生的外语成绩在 60 分 ～84 分之间的概率.

解：设 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，有 $\mu=\mathrm{E}(X)=72$，且 $P\{X\ge 96\}=1-F(96)=1-\Phi(\dfrac{96-72}{\sigma})=0.023$，

则 $\Phi(\dfrac{24}{\sigma})=0.977$， $\dfrac{24}{\sigma}=2$， $\sigma=12$，

故 $P\{60\le X\le 84\}=F(84)-F(60)=\Phi(\dfrac{84-72}{12})-\Phi(\dfrac{60-72}{12})=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826$.

4. 公共汽车车门的高度是按成年男子与车门顶碰头的机会在 1%以下设计的，设男子身高服从均值为 175cm，方差为 36cm^2 的正态分布．问车门高度应设计为多少？

解：设 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，有 $\mu=E(X)=175$，$\sigma^2=D(X)=36$，又设车门高度是 x cm，

则 $P\{X>x\}=1-F(x)=1-\Phi(\dfrac{x-175}{6})=0.01$，有 $\Phi(\dfrac{x-175}{6})=0.99$， $\dfrac{x-175}{6}=2.33$，

故 $x=188.98$ cm.

5. 随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2
P	0.4	0.1	0.5

，

又 $Y=3X+1$，求 $\mathrm{E}(Y), \mathrm{D}(Y)$.

解：$\mathrm{E}(X)=0\times 0.4+1\times 0.1+2\times 0.5=1.1$，
$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times 0.4+1^2\times 0.1+2^2\times 0.5=2.1$，$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=2.1-1.1^2=0.89$，

故 $\mathrm{E}(Y)=3\mathrm{E}(X)+1=4.3$，$\mathrm{D}(Y)=9\mathrm{D}(X)=8.01$.

6．在习题 4.1 第 7 题中，求 $D(2X)$ 和 $D(e^{-2X})$.

解：习题 4.1 第 7 题中 X 的分布为 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 即 $X\sim \mathrm{e}(1)$，有 $\mathrm{D}(X)=1$，

故 $\mathrm{D}(2X)=4\mathrm{D}(X)=4$；

因 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{3}$，

$\mathrm{E}[(\mathrm{e}^{-2X})^2]=\mathrm{E}(\mathrm{e}^{-4X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-4x}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-4x}\cdot\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{5}$，

故 $\mathrm{D}(\mathrm{e}^{-2X})=\mathrm{E}[(\mathrm{e}^{-2X})^2]-[\mathrm{E}(\mathrm{e}^{-2X})]^2=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{45}$.

7．设 X 的方差为 2.5，利用切比雪夫不等式估计以下概率：$P\{|X-\mathrm{E}(X)|\ge 7.5\}$.

解：由切比雪夫不等式得：$P\{|X-\mathrm{E}(X)|\ge 7.5\}\le\frac{\mathrm{D}(X)}{7.5^2}=\frac{2.5}{7.5^2}=\frac{2}{45}=0.0444$.

8．随机地掷 10 颗骰子，用切比雪夫不等式估计点数总和在 20 和 50 之间的概率.

解：设 X_i 表示第 i 颗骰子出现的点数，有 $X_i\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$，

则 $\mathrm{E}(X_i)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$，

且 $\mathrm{E}(X_i^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$，则 $\mathrm{D}(X_i)=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12}$；

设 10 颗骰子点数总和为 $X=\sum_{i=1}^{10}X_i$，有 $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{10}\mathrm{E}(X_i)=10\times\frac{7}{2}=35$，$\mathrm{D}(X)=\sum_{i=1}^{10}\mathrm{D}(X_i)=\frac{350}{12}$，

由切比雪夫不等式得：$P\{|X-35|\ge\varepsilon\}\le\frac{\mathrm{D}(X)}{\varepsilon^2}=\frac{350}{12\varepsilon^2}$，

故 $P\{20<X<50\}=P\{|X-35|<15\}\ge 1-\frac{350}{12\times 15^2}=\frac{2350}{2700}=\frac{47}{54}=0.8704$.

9．一机床制造长度为 50cm 的工件，由于随机扰动，工件长度总有一定的误差，统计表明，长度的均方差为 2.5mm．若工件的实际长度在 49.25 ~ 50.75mm 之间算合格，请估计该机床制造工件的合格率.

解：设 X 表示工件长度，有 $\mathrm{E}(X)=50\mathrm{cm}$，$\mathrm{D}(X)=0.25^2\,\mathrm{cm}^2$，

由切比雪夫不等式得：$P\{|X-50|\ge\varepsilon\}\le\frac{0.25^2}{\varepsilon^2}$，

故工件的合格率为 $P\{49.25<X<50.75\}=P\{|X-50|<0.75\}\ge 1-\frac{0.25^2}{0.75^2}=\frac{8}{9}=0.8889$.

习题 4.3

1．设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数分别为

（1）$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y), & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2） $f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|\le x, 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（3） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin(x+y), & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

试分别求：（1）$E(X), E(Y)$；（2）$D(X), D(Y)$；（3）$\mathrm{Cov}(X,Y)$ 和 ρ_{XY} .

解：（1） $E(X)=\int_0^2 dx\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\int_0^2 dx\cdot\frac{1}{8}(x^2y+x\frac{y^2}{2})\Big|_0^2=\int_0^2\frac{1}{4}(x^2+x)dx=\frac{1}{4}(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2})\Big|_0^2=\frac{7}{6}$，

由对称性可得 $E(Y)=\int_0^2 dx\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\frac{7}{6}$，

因 $E(X^2)=\int_0^2 dx\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\int_0^2 dx\cdot\frac{1}{8}(x^3y+x^2\frac{y^2}{2})\Big|_0^2=\int_0^2\frac{1}{4}(x^3+x^2)dx=\frac{1}{4}(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3})\Big|_0^2=\frac{5}{3}$，

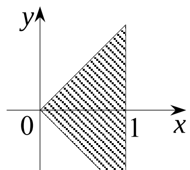
故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$，由对称性可得 $D(Y)=\frac{11}{36}$，

又因 $E(XY)=\int_0^2 dx\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy=\int_0^2 dx\cdot\frac{1}{8}(x^2\frac{y^2}{2}+x\frac{y^3}{3})\Big|_0^2=\int_0^2(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x)dx=(\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{6})\Big|_0^2=\frac{4}{3}$，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$，

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{11}{36}}\cdot\sqrt{\frac{11}{36}}}=-\frac{1}{11};$$

（2） $E(X)=\int_0^1 dx\int_{-x}^x x\cdot 1dy=\int_0^1 dx\cdot xy\Big|_{-x}^x=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$，



↑：$0\le x\le 1, -x\le y\le x$

$E(Y)=\int_0^1 dx\int_{-x}^x y\cdot 1dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^x=\int_0^1 0dx=0$，

因 $E(X^2)=\int_0^1 dx\int_{-x}^x x^2\cdot 1dy=\int_0^1 dx\cdot x^2y\Big|_{-x}^x=\int_0^1 2x^3dx=\frac{2x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$，

$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_{-x}^x y^2\cdot 1dy=\int_0^1 dx\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-x}^x=\int_0^1\frac{2}{3}x^3dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{6}$，

故 $D(X)=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$， $D(Y)=\frac{1}{6}-0^2=\frac{1}{6}$，

又因 $E(XY)=\int_0^1 dx\int_{-x}^x xy\cdot 1dy=\int_0^1 dx\cdot x\frac{y^2}{2}\Big|_{-x}^x=\int_0^1 0dx=0$，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=0-\dfrac{2}{3}\times 0=0$， $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{D}(Y)}}=\dfrac{0}{\sqrt{\dfrac{1}{18}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{6}}}=0$；

（3） $\mathrm{E}(X)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\dfrac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\cdot[-\dfrac{1}{2}x\cos(x+y)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}x(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}x\mathrm{d}(-\cos x+\sin x)=\dfrac{1}{2}x(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x+\sin x)\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(-\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$，

由对称性可得 $\mathrm{E}(Y)=\dfrac{\pi}{4}$，

因 $\mathrm{E}(X^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\dfrac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\cdot[-\dfrac{1}{2}x^2\cos(x+y)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}x^2(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{d}(-\cos x+\sin x)=\dfrac{1}{2}x^2(-\cos x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x+\sin x)\cdot 2x\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi^2}{8}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}(-\sin x-\cos x)=\dfrac{\pi^2}{8}-x(-\sin x-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{\pi}{2}+(\cos x-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{\pi}{2}-2$，

故 $\mathrm{D}(X)=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{\pi}{2}-2-\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{2}-2$，由对称性可得 $\mathrm{D}(Y)=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{2}-2$，

又因 $\mathrm{E}(XY)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}xy\cdot\dfrac{1}{2}\sin(x+y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\cdot\dfrac{1}{2}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}y[-\mathrm{d}\cos(x+y)]$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\cdot\dfrac{1}{2}x[-y\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\mathrm{d}y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\cdot\dfrac{1}{2}x[\dfrac{\pi}{2}\sin x+\sin(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}]$

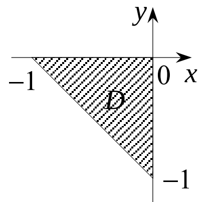
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}x[\dfrac{\pi}{2}\sin x+\cos x-\sin x]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}x\mathrm{d}[-(\dfrac{\pi}{2}-1)\cos x+\sin x]$

$=\dfrac{1}{2}x[(1-\dfrac{\pi}{2})\cos x+\sin x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(1-\dfrac{\pi}{2})\cos x+\sin x]\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}[(1-\dfrac{\pi}{2})\sin x-\cos x]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{\pi}{2})+(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{2}-1$，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=(\dfrac{\pi}{2}-1)-\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}-1-\dfrac{\pi^2}{16}$， $\rho_{XY}=\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-1-\dfrac{\pi^2}{16}}{\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{2}-2}=\dfrac{-\pi^2+8\pi-16}{\pi^2+8\pi-32}$.

2．设二维随机变量 (X, Y) 在 x 轴，y 轴及直线 $x+y+1=0$ 所围成的区域 D 上服从均匀分布，求 X, Y 的相关系数 ρ_{XY} .



解：区域 D 的面积 $S_D=\dfrac{1}{2}$，密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

则 $\mathrm{E}(X)=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{0}x\cdot 2\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\cdot 2xy\Big|_{-1-x}^{0}=\int_{-1}^{0}(2x+2x^2)\mathrm{d}x=(x^2+\dfrac{2x^3}{3})\Big|_{-1}^{0}=-\dfrac{1}{3}$，

↑：$-1\le x\le 0$

$-x-1\le y\le 0$

由对称性可得 $\mathrm{E}(Y)=-\dfrac{1}{3}$，

因 $\mathrm{E}(X^2)=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{0}x^2\cdot 2\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\cdot 2x^2y\Big|_{-1-x}^{0}=\int_{-1}^{0}(2x^2+2x^3)\mathrm{d}x=(\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{2x^4}{4})\Big|_{-1}^{0}=\dfrac{1}{6}$，

则 $\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=\dfrac{1}{6}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{18}$，由对称性可得 $\mathrm{D}(Y)=\dfrac{1}{18}$，

因 $\mathrm{E}(XY)=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{0}xy\cdot 2\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\cdot xy^2\Big|_{-1-x}^{0}=-\int_{-1}^{0}(x^3+2x^2+x)\mathrm{d}x=-(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{0}=\dfrac{1}{12}$，

则 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)=\dfrac{1}{12}-(-\dfrac{1}{3})\times(-\dfrac{1}{3})=-\dfrac{1}{36}$，

故 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{-\dfrac{1}{36}}{\sqrt{\dfrac{1}{18}}\sqrt{\dfrac{1}{18}}}=-\dfrac{1}{2}$.

3．两个随机变量 X, Y，已知 $\mathrm{D}(X)=25$，$\mathrm{D}(Y)=36$，$\rho_{XY}=0.4$，求 $\mathrm{D}(X+Y)$ 和 $\mathrm{D}(X-Y)$.

解：因 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{\mathrm{D}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{D}(Y)}=0.4\times 5\times 6=12$，

故 $\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=25+36+2\times 12=85$；

$\mathrm{D}(X-Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)-2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=25+36-2\times 12=37$.

4．设二维离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

X \\ Y	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.1	0.1	0.1	0.3
1	0.3	0.1	0.3	0.7
$p_{\cdot j}$	0.4	0.2	0.4	

（1）判断 X 与 Y 是否独立；（2）求 $\mathrm{Cov}(X, Y)$；（3）求 $\mathrm{D}(X+Y)$.

解：（1）因 $p_{11}=0.1\ne p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 1}=0.3\times 0.4=0.12$，故 X 与 Y 不独立；

（2）因 $\mathrm{E}(X)=0\times 0.3+1\times 0.7=0.7$，$\mathrm{E}(Y)=(-1)\times 0.4+0\times 0.2+1\times 0.4=0$，

$\mathrm{E}(XY)=0\times 0.1+0\times 0.1+0\times 0.1+(-1)\times 0.3+0\times 0.1+1\times 0.3=0$，

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)=0$；

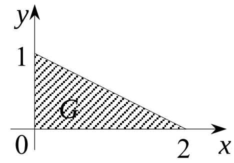
（3）因 $\mathrm{E}(X^2)=0^2\times 0.3+1^2\times 0.7=0.7$，$\mathrm{E}(Y^2)=(-1)^2\times 0.4+0^2\times 0.2+1^2\times 0.4=0.8$，

则 $\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=0.7-0.7^2=0.21$，$\mathrm{D}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-[\mathrm{E}(Y)]^2=0.8-0^2=0.8$，

故 $\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}(X)+\mathrm{D}(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=0.21+0.8-2\times 0=1.01$.

5．设 (X, Y) 在区域 $G=\{(x,y)\mid x\ge 0, y\ge 0, x+2y\le 2\}$ 上均匀分布，

（1）求 $E(X), E(Y)$；（2）$D(X), D(Y)$；（3）求 $Cov(X, Y)$ 及 ρ_{XY}；
（4）问 X 与 Y 是否独立，是否不相关？



↑：$0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1 - x/2$

解：（1）G 的面积 $S_G = 1$，密度函数 $f(x, y)=\begin{cases}1, & (x, y)\in G,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

则 $E(X)=\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}} x\cdot 1dy=\int_0^2 dx\cdot xy\Big|_0^{1-\frac{x}{2}}=\int_0^2(x-\frac{x^2}{2})dx=(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6})\Big|_0^2=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$，

$$E(Y)=\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}} y\cdot 1dy=\int_0^2 dx\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-\frac{x}{2}}=\int_0^2(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8})dx=(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{24})\Big|_0^2=1-1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}；$$

（2）因 $E(X^2)=\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}} x^2\cdot 1dy=\int_0^2 dx\cdot x^2y\Big|_0^{1-\frac{x}{2}}=\int_0^2(x^2-\frac{x^3}{2})dx=(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8})\Big|_0^2=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}$，

故 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$；

因 $E(Y^2)=\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}} y^2\cdot 1dy=\int_0^2 dx\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-\frac{x}{2}}=\int_0^2(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{24})dx=(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}-\frac{x^4}{96})\Big|_0^2=\frac{1}{6}$，

故 $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$；

（3）因 $E(XY)=\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}} xy\cdot 1dy=\int_0^2 dx\cdot x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-\frac{x}{2}}=\int_0^2(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{8})dx=(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{32})\Big|_0^2=\frac{1}{6}$，

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{18}$，$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-\frac{1}{18}}{\sqrt{\frac{2}{9}}\sqrt{\frac{1}{18}}}=-\frac{1}{2}$；

（4）因 $Cov(X,Y)=-\frac{1}{18}\neq 0$，故 X 与 Y 相关，不独立.

6\. 证明：若 (X, Y) 是二维随机变量，则 $Cov(X+Y, X-Y)=D(X)-D(Y)$.

证：$Cov(X+Y, X-Y)=Cov(X, X-Y)+Cov(Y, X-Y)=Cov(X, X)-Cov(X, Y)+Cov(Y, X)-Cov(Y, Y)$
$=D(X)-Cov(X, Y)+Cov(X, Y)-D(Y)=D(X)-D(Y)$.

7\. 试证相关系数的性质 2.

证：$D(Y-\lambda X)=D(Y)+D(\lambda X)-2Cov(Y, \lambda X)=D(Y)+\lambda^2D(X)-2\lambda Cov(X, Y)$，
对于任意的实数 λ，都有 $D(Y-\lambda X)=D(Y)-2\lambda Cov(X, Y)+\lambda^2D(X)\ge 0$，

则判别式 $\Delta=[2Cov(X, Y)]^2-4D(X)D(Y)\le 0$，即 $|Cov(X,Y)|\le\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$，有 $|\rho_{XY}|\le 1$，

当 $|\rho_{XY}|=1$ 时，判别式 $\Delta=0$，方程 $D(Y-\lambda X)=0$ 有唯一实根，因 $D(Y)\neq 0$，次根为非零实根，
不妨设 $\lambda=a$ 是方程的根，即 $D(Y-aX)=0$，由切比雪夫不等式知 $P\{Y-aX=b\}=1$.

习题 4.4

1\. 用机器包装味精，每袋味精净重为随机变量，期望值为 100 克，标准差为 10 克，一箱内装 200 袋味精，求一箱味精净重大于 20500 克的概率.

解：设 X_i 表示第 i 袋味精的净重，有 $\mathrm{E}(X_i)=100$，$\mathrm{D}(X_i)=10^2=100$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_{200}$ 相互独立，

因一箱味精净重 $\sum\limits_{i=1}^{200} X_i$，有 $\mathrm{E}\left(\sum\limits_{i=1}^{200} X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{200}\mathrm{E}(X_i)=20000$，$\mathrm{D}\left(\sum\limits_{i=1}^{200} X_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{200}\mathrm{D}(X_i)=20000$，

且 $n=200$ 很大，由中心极限定理知：$\sum\limits_{i=1}^{200} X_i \overset{\cdot}{\sim} N(20000, 20000)$，

故 $P\{\sum\limits_{i=1}^{200} X_i > 20500\}=1-F(20500)\doteq 1-\Phi(\dfrac{20500-20000}{\sqrt{20000}})=1-\Phi(3.54)=1-0.9998=0.0002$.

2. 某微机网络系统有 120 个终端，每个终端有 5%的时间在使用．若各终端使用与否是相互独立的．试求有不少于 10 个终端在使用的概率．

解：设 X 表示在使用的终端个数，有 $X\sim B(120, 0.05)$，$\mathrm{E}(X)=np=6$，$D(X)=npq=5.7$，
且 $n=120$ 很大，由中心极限定理知：$X \overset{\cdot}{\sim} N(6, 5.7)$，

故 $P\{X\ge 10\}=1-P\{X\le 9\}=1-F(9)\doteq 1-\Phi(\dfrac{9-6}{\sqrt{5.7}})=1-\Phi(1.26)=1-0.8962=0.1038$.

或 $P\{X\ge 10\}=1-F(10)\doteq 1-\Phi(\dfrac{10-6}{\sqrt{5.7}})=1-\Phi(1.68)=1-0.9535=0.0465$.

注：此题 n 很大，p 很小，np 较小，最好是用泊松分布近似，
（一般当 $np\le 10$ 时，用泊松分布近似，当 $np>10$ 时，用正态分布近似）
因 $X\sim B(120, 0.05)$，$\lambda=np=6$，即 $X \overset{\cdot}{\sim} P(6)$，
故 $P\{X\ge 10\}=1-P\{X\le 9\}=1-0.9161=0.0839$.（此题按二项分布计算的准确答案是 0.0786）

3. 设供电网中有 10000 盏灯，夜晚每盏灯开着的概率都是 0.7，假定各灯开、关时间彼此无关，计算同时开着的灯数在 6800 与 7200 之间的概率．

解：设 X 表示同时开着的灯数，有 $X\sim B(10000, 0.7)$，$\mathrm{E}(X)=np=7000$，$D(X)=npq=2100$，
且 $n=10000$ 很大，由中心极限定理知：$X \overset{\cdot}{\sim} N(7000, 2100)$，

故 $P\{6800\le X\le 7200\}=F(7200)-F(6800)\doteq \Phi(\dfrac{7200-7000}{\sqrt{2100}})-\Phi(\dfrac{6800-7200}{\sqrt{2100}})$

$=\Phi(4.36)-\Phi(-4.36)=2\Phi(4.36)-1\doteq 1$.

4. 在某地区的一家保险公司里有 2 万人参加了人寿保险，每人每年付 8 元保险费，若投保人死亡，则保险公司向其家属赔付 2000 元，设该地区的人口死亡率为万分之五，求（1）该保险公司亏本的概率；（2）该保险公司一年的利润不少于 12 万元的概率．

解：（1）设 X 表示一年中投保人的死亡人数，有 $X\sim B(20000, 0.0005)$，
则 $E(X)=np=10$，$D(X)=npq=9.995$，
且 $n=20000$ 很大，由中心极限定理知：$X \overset{\cdot}{\sim} N(10, 9.995)$，

保险公司一年共收保险费 $20000\times 8=160000$ 元，最多可以赔付 $\dfrac{160000}{2000}=80$ 人而不会亏本，

故保险公司亏本的概率为 $P\{X>80\}=1-F(80)=1-\Phi(\dfrac{80-10}{\sqrt{9.995}})=1-\Phi(22.14)\doteq 0$；

（2）一年利润 120000 元，即赔付 40000 元，共 $\dfrac{40000}{2000}=20$ 人，

故一年的利润不少于 12 万元的概率 $P\{X\le 20\}=F(20)=\Phi(\dfrac{20-10}{\sqrt{9.995}})=\Phi(3.16)=0.9992$.

注：此题 n 很大，p 很小，np 较小，最好是用泊松分布近似，

因 $X \sim B(20000, 0.0005)$，$\lambda = np = 10$，即 $X \dot{\sim} P(10)$，

故 $P\{X > 80\} \doteq 0$，$P\{X \le 20\} = 0.9984$．（此题按二项分布计算的准确答案是 0.9984164）

5．某车间有 150 台机床独立工作，每台机床工作时耗电量均为 5 千瓦，且只有 60%的时间运转，问该车间应供电多少千瓦，才能以 99.9%的概率保证车间的机床能够正常运转？

解：设 X 表示同时运转的机床数，有 $X \sim B(150, 0.6)$，$E(X) = np = 90$，$D(X) = npq = 36$，

且 $n = 150$ 很大，由中心极限定理知：$X \dot{\sim} N(90, 36)$，

又设供电可保证 x 台机床同时运转，即供电 $5x$ 千瓦，

则 $P\{X \le x\} = F(x) \doteq \Phi(\dfrac{x-90}{6}) \ge 0.999$，有 $\dfrac{x-90}{6} \ge 3.08$，$x \ge 108.48$，

故取 $x = 109$，该车间应供电 $5x = 545$ 千瓦．

复习题四

1．设随机变量 X 具有分布 $P\{X = k\} = \dfrac{1}{2^k}$，$k = 1, 2, \cdots$，求 $E(X)$ 和 $D(X)$．

解：$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \times \dfrac{1}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{2^k}$，设 $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^k$，收敛区间为 $x \in (-1, 1)$，

有 $\dfrac{S(x)}{x} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$，$\int_0^x \dfrac{S(t)}{t} dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k = \dfrac{x}{1-x}$，$-1 < x < 1$，

两边关于 x 求导，得 $\dfrac{S(x)}{x} = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，即 $S(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$，$-1 < x < 1$，

故 $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{2^k} = S(\dfrac{1}{2}) = 2$；

又 $E(X^2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 \times \dfrac{1}{2^k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{2^k}$，设 $T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$，收敛区间为 $x \in (-1, 1)$，

有 $\dfrac{T(x)}{x} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 x^{k-1}$，$\int_0^x \dfrac{T(t)}{t} dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^k = S(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$，$-1 < x < 1$，

两边关于 x 求导，得 $\dfrac{T(x)}{x} = \left[\dfrac{x}{(1-x)^2}\right]' = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$，即 $T(x) = \dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$，$-1 < x < 1$，

故 $E(X^2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k^2}{2^k} = T(\dfrac{1}{2}) = 6$，$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 6 - 2^2 = 2$．

2．设在时间 $(0, t)$ 内经搜索发现沉船的概率分布为 $F(t) = 1 - e^{-vt}$，$v > 0$，求发现沉船所需的平均搜索时间．

解：设 T 表示发现沉船所需搜索时间，T 的全部可能取值$(0, +\infty)$，当 $t > 0$ 时，$P\{T \le t\} = F(t) = 1 - e^{-vt}$，

则密度函数 $f(t) = F'(t) = ve^{-vt}$，$t > 0$，

故 $E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} t \cdot ve^{-vt}dt = \int_0^{+\infty} t(-de^{-vt}) = -te^{-vt}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-vt}dt = 0 + (-\dfrac{1}{v}e^{-vt})\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{1}{v}$．

3． 轮船横向摇摆的随机振幅 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求：（1）$\mathrm{E}(X)$；（2）遇到大于其振幅均值的概率是多少？

解：（1）$\mathrm{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\cdot\dfrac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x(-\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}})=-x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$，

令 $t=\dfrac{x}{\sqrt{2}\sigma}$，有 $x=\sqrt{2}\sigma t$，$\mathrm{d}x=\sqrt{2}\sigma\mathrm{d}t$，有 $\mathrm{E}(X)=0+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\sqrt{2}\sigma\mathrm{d}t=\sqrt{2}\sigma\cdot\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sigma$；

（2）$P\{X>\mathrm{E}(X)\}=\int_{\mathrm{E}(X)}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma}^{+\infty}\dfrac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}})\Big|_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma}^{+\infty}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}=0.4559$.

4． 某公司生产的机器其无故障工作时间 X 有密度函数（单位：万小时）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\ge 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

公司每售出一台机器可获利 1600 元，若机器售出后使用 1.2 万小时之内出故障，则应予以更换，这时每台亏损 1200 元；若在 1.2 到 2 万小时内出故障，则予以维修，由公司负担维修费 400 元；在使用 2 万小时以后出故障，则用户自己负责，求该公司售出每台机器的平均获利.

解：设 Y 表示售出每台机器的获利，

则 $Y=g(X)=\begin{cases}-1200, & X<1.2,\\ 1200, & 1.2\le X\le 2,\\ 1600, & X>2,\end{cases}$

故 $\mathrm{E}(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{1.2}(-1200)\cdot\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_{1.2}^{2}1200\cdot\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}1600\cdot\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

$$=-1200\cdot(-\frac{1}{x})\Big|_1^{1.2}+1200\cdot(-\frac{1}{x})\Big|_{1.2}^{2}+1600\cdot(-\frac{1}{x})\Big|_2^{+\infty}=-1200\cdot(-\frac{1}{1.2}+1)+1200\cdot(-\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2})+1600\cdot\frac{1}{2}$$

$=-200+400+800=1000$.

5． 设某产品每周需求量 Q 等可能地取 1, 2, 3, 4, 5（单位：件），生产每件产品的成本为 30 元，每件产品的售价为 90 元，没售出的产品以每件 10 元的费用存入仓库，问每周生产多少件产品能使所期望的利润最大.

解：设每周生产 x 件产品，Y 表示所得利润，当 $Q\ge x$ 时，卖出 x 件，$Y=60x$；

当 $Q<x$ 时，卖出 Q 件，存入仓库 $x-Q$ 件，$Y=60Q-40(x-Q)=100Q-40x$；

则 $Y=g(Q)=\begin{cases}60x, & Q\ge x,\\ 100Q-40x, & Q<x,\end{cases}$

因 Q 等可能地取 1, 2, 3, 4, 5，应该有 $1\le x\le 5$，

当 $x=1$ 时，恒有 $Q\ge x$，$Y=60x=60$，$\mathrm{E}(Y)=60$；

当 $1<x\le 2$ 时，若 $Q=1$，有 $Q<x$，$Y=100Q-40x$，若 $Q\ge 2$，有 $Q\ge x$，$Y=60x$，

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{5}\times(100-40x)+\frac{4}{5}\times 60x=20+40x\text{，有 }60<\mathrm{E}(Y)\le 100\text{；}$$

当 $2<x\le 3$ 时，若 $Q\le 2$，有 $Q<x$，$Y=100Q-40x$，若 $Q\ge 3$，有 $Q\ge x$，$Y=60x$，

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{5}\times(100-40x)+\frac{1}{5}\times(200-40x)+\frac{3}{5}\times 60x=60+20x\text{，有 }100<\mathrm{E}(Y)\le 120\text{；}$$

当 $3<x\le 4$ 时，若 $Q\le 3$，有 $Q<x$，$Y=100Q-40x$，若 $Q\ge 4$，有 $Q\ge x$，$Y=60x$，

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{5}\times(100-40x)+\frac{1}{5}\times(200-40x)+\frac{1}{5}\times(300-40x)+\frac{2}{5}\times 60x=120\text{；}$$

当 $4<x\le 5$ 时，若 $Q\le 4$，有 $Q<x$，$Y=100Q-40x$，若 $Q=5$，有 $Q\ge x$，$Y=60x$，

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{5}\times(100-40x)+\frac{1}{5}\times(200-40x)+\frac{1}{5}\times(300-40x)+\frac{1}{5}\times(400-40x)+\frac{1}{5}\times 60x=200-20x\text{，}$$

有 $120>\mathrm{E}(Y)\ge 100$；

故当 $3\le x\le 4$ 时，所期望的利润最大.

6. 设某种商品每周的需求量 X 服从区间 (10, 30)上的均匀分布，而经销商店进货数量为区间 (10, 30) 中的某一整数，商店每销售一单位商品可获利 500 元；若供大于求则削价处理，每处理 1 单位商品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每 1 单位商品仅获利 300 元，为使商店所获利期望值不少于 9280 元，试确定最少进货量.

解：因 $X\sim U(10, 30)$，有 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}, & 10<x<30,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

设每周进货量为 a，商店所获利润为 Y 元，

当 $X\le a$ 时，$Y=500X-100(a-X)=600X-100a$；当 $X>a$ 时，$Y=500a+300(X-a)=300X+200a$，

即 $Y=g(X)=\begin{cases}600X-100a, & X\le a,\\ 300X+200a, & X>a,\end{cases}$

故 $\mathrm{E}(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{10}^{a}(600x-100a)\dfrac{1}{20}\mathrm{d}x+\int_{a}^{30}(300x+200a)\dfrac{1}{20}\mathrm{d}x$

$$=(15x^2-5ax)\Big|_{10}^{a}+(\frac{15}{2}x^2+10ax)\Big|_{a}^{30}=-\frac{15}{2}a^2+350a+5250\text{，}$$

要使得 $\mathrm{E}(Y)=-\dfrac{15}{2}a^2+350a+5250\ge 9280$，有 $\dfrac{15}{2}a^2-350a+4030\le 0$，可得 $\dfrac{62}{3}\le a\le 26$，

故 a 可取 21, 22, 23, 24, 25, 26，最少进货量为 21.

7. 某人用 n 把钥匙去开门，只有一把能打开，今逐个任取一把试开，求打开此门所需开门次数 X 的均值及方差，假设（1）打不开的钥匙不放回；（2）打不开的钥匙仍放回.

解：（1）X 的全部可能取值为 $1, 2, \cdots, n$，

$$P\{X=1\}=\frac{1}{n}\text{，}P\{X=2\}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}\text{，}P\{X=3\}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}\text{，}\cdots\cdots\text{，}$$

$$P\{X=n\}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n}\text{，}$$

则 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n} & \dfrac{1}{n} & \cdots & \dfrac{1}{n}\end{pmatrix}$，

故 $\mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{n}+2\times\dfrac{1}{n}+3\times\dfrac{1}{n}+\cdots+n\times\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{2}n(n+1)\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{n+1}{2}$，

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{n}+2^2\times\frac{1}{n}+3^2\times\frac{1}{n}+\cdots+n^2\times\frac{1}{n}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\text{，}$$

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)(n-1)}{12}=\frac{n^2-1}{12};$$

（2）X 的全部可能取值为 $1, 2, \cdots, k, \cdots$，

$$P\{X=1\}=\frac{1}{n}，P\{X=2\}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}，P\{X=3\}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}，\cdots，P\{X=k\}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}，\cdots，$$

即 X 的分布列为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & k & \cdots\\ \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n} & \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} & \cdots & \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n} & \cdots\end{pmatrix}$，

则 $\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}$，设 $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}(1-x)=(1-x)\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$，收敛区间为 $x\in(-1, 1)$，

有 $\frac{S(x)}{1-x}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$，$\int_0^x\frac{S(t)}{1-t}dt=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^k=\frac{x}{1-x},\quad -1<x<1$，

两边关于 x 求导，得 $\frac{S(x)}{1-x}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，即 $S(x)=\frac{1}{1-x},\quad -1<x<1$，

故 $\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}=S(\frac{n-1}{n})=n$；

又因 $\mathrm{E}(X^2)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}$，设 $T(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}(1-x)=(1-x)\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}$，$x\in(-1, 1)$，

有 $\frac{T(x)}{1-x}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}$，$\int_0^x\frac{T(t)}{1-t}dt=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^k=x\sum\limits_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{x}{(1-x)^2},\quad -1<x<1$，

两边关于 x 求导，得 $\frac{T(x)}{1-x}=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3}$，即 $T(x)=\frac{1+x}{(1-x)^2},\quad -1<x<1$，

故 $\mathrm{E}(X^2)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}=T(\frac{n-1}{n})=2n^2-n$，故 $\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=n^2-n$．

8．设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 记 $Z=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$．求 $\mathrm{E}(Z), \mathrm{D}(Z)$.

解：因 $X_i\sim N(\mu, \sigma^2)$，有密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，

则 $\mathrm{E}(|X_i-\mu|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-\mu|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=2\int_{\mu}^{+\infty}(x-\mu)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$

$$=2\int_{\mu}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\frac{(x-\mu)^2}{2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot(-\sigma^2)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{\mu}^{+\infty}=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma，$$

且$\mathrm{E}(|X_i-\mu|^2)=\mathrm{E}[(X_i-\mathrm{E}X_i)^2]=\mathrm{D}X_i=\sigma^2$，则$\mathrm{D}(|X_i-\mu|)=\sigma^2-\dfrac{2}{\pi}\sigma^2=\dfrac{\pi-2}{\pi}\sigma^2$；

故$\mathrm{E}(Z)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{E}(|X_i-\mu|)=\dfrac{1}{n}\cdot n\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sigma=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sigma$，

$$\mathrm{D}(Z)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}(|X_i-\mu|)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\frac{\pi-2}{\pi}\sigma^2=\frac{\pi-2}{n\pi}\sigma^2.$$

9． 证明函数$\Psi(t)=\mathrm{E}[(X-t)^2]$在当$t=\mathrm{E}(X)$时取得最小值，且最小值为$\mathrm{D}(X)$.

证：因$\Psi(t)=\mathrm{E}[(X-t)^2]=\mathrm{E}(X^2-2tX+t^2)=\mathrm{E}(X^2)-2t\,\mathrm{E}(X)+t^2$

$=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2+[\mathrm{E}(X)]^2-2t\,\mathrm{E}(X)+t^2=\mathrm{D}(X)+[\mathrm{E}(X)-t]^2\ge\mathrm{D}(X)$，

故当$t=\mathrm{E}(X)$时$\Psi(t)$取得最小值$\mathrm{D}(X)$.

10．设随机变量X与Y有联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	α	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	β

（1）求证$\mathrm{E}(XY)=0$；（2）问当α、β取何值时，X与Y不相关；（3）当X与Y不相关时，X与Y独立吗？

解：（1）由规范性知：$\alpha+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\beta=\alpha+\beta+\dfrac{5}{8}=1$，得$\alpha+\beta=\dfrac{3}{8}$，$\beta=\dfrac{3}{8}-\alpha$，

故$\mathrm{E}(XY)=1\times\alpha+0\times\dfrac{1}{8}+(-1)\times\dfrac{1}{4}+(-1)\times\dfrac{1}{8}+0\times\dfrac{1}{8}+1\times\beta=\alpha+\beta-\dfrac{3}{8}=0$；

（2）因$\mathrm{E}(X)=(-1)\times(\alpha+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4})+1\times(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}+\beta)=-\alpha+\beta-\dfrac{1}{8}=-2\alpha+\dfrac{1}{4}$，

$\mathrm{E}(Y)=(-1)\times(\alpha+\dfrac{1}{8})+0\times(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8})+1\times(\dfrac{1}{4}+\beta)=-\alpha+\beta+\dfrac{1}{8}=-2\alpha+\dfrac{1}{2}$，

则$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)=0-(-2\alpha+\dfrac{1}{4})(-2\alpha+\dfrac{1}{2})=-4(\alpha-\dfrac{1}{8})(\alpha-\dfrac{1}{4})$，

故当$\alpha=\dfrac{1}{8},\beta=\dfrac{1}{4}$或$\alpha=\dfrac{1}{4},\beta=\dfrac{1}{8}$时，$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，$X$与$Y$不相关；

（3）当$\alpha=\dfrac{1}{8},\beta=\dfrac{1}{4}$时，$X$与$Y$的分布表为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	

因$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$，

故X与Y独立；

当$\alpha=\dfrac{1}{4},\beta=\dfrac{1}{8}$时，$X$与$Y$的分布表为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	

因 $p_{11}=\dfrac{1}{4}\neq p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 1}=\dfrac{5}{8}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{15}{64}$，

故 X 与 Y 不独立.

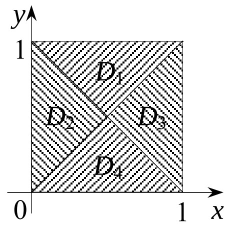
11．设(X, Y)有联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

定义两个新的随机变量 U, V 如下：

$$U=\begin{cases}1, & X\ge Y,\\ 0, & X<Y,\end{cases}\quad V=\begin{cases}1, & X+Y\le 1,\\ 0, & X+Y>1,\end{cases}$$

试求 U 与 V 的协方差 $\mathrm{Cov}(U, V)$及相关系数ρ_{UV}.



D_1：$\rightarrow$：$1/2\le y\le 1,\ 1-y\le x\le y$

D_2：$\uparrow$：$0\le x\le 1/2,\ x\le y\le 1-x$

D_3：$\uparrow$：$1/2\le x\le 1,\ 1-x\le y\le x$

D_4：$\rightarrow$：$0\le y\le 1/2,\ y\le x\le 1-y$

解：因 U, V 的全部可能取值 0, 1，

且 $P\{U=0,V=0\}=P\{X<Y, X+Y>1\}=\displaystyle\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{y}2x\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\cdot x^2\Big|_{1-y}^{y}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2y-1)\mathrm{d}y$

$$=(y^2-y)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=0-(-\frac{1}{4})=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X<Y, X+Y\le 1\}=\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x}^{1-x}2x\mathrm{d}y=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\cdot 2xy\Big|_{x}^{1-x}$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(2x-4x^2)\mathrm{d}x=(x^2-\frac{4x^3}{3})\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12},$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X\ge Y, X+Y>1\}=\iint_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{x}2x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\cdot 2xy\Big|_{1-x}^{x}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(4x^2-2x)\mathrm{d}x=(\frac{4x^3}{3}-x^2)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{3}-(\frac{1}{6}-\frac{1}{4})=\frac{5}{12},$$

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X\ge Y, X+Y\le 1\}=\iint_{D_4} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{y}^{1-y}2x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\cdot x^2\Big|_{y}^{1-y}=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-2y)\mathrm{d}y$$

$$=(y-y^2)\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

即(U, V)的联合分布为

$U \backslash V$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$

则 $\mathrm{E}(U)=0\times(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})+1\times(\frac{5}{12}+\frac{1}{4})=\frac{2}{3}$， $\mathrm{E}(V)=0\times(\frac{1}{4}+\frac{5}{12})+1\times(\frac{1}{12}+\frac{1}{4})=\frac{1}{3}$，

且 $\mathrm{E}(U^2)=0^2\times(\frac{1}{4}+\frac{1}{12})+1^2\times(\frac{5}{12}+\frac{1}{4})=\frac{2}{3}$， $\mathrm{E}(V^2)=0^2\times(\frac{1}{4}+\frac{5}{12})+1^2\times(\frac{1}{12}+\frac{1}{4})=\frac{1}{3}$，

则 $\mathrm{D}(U)=\mathrm{E}(U^2)-[\mathrm{E}(U)]^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$， $\mathrm{D}(V)=\mathrm{E}(V^2)-[\mathrm{E}(V)]^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，

又 $\mathrm{E}(UV)=0\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{12}+0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，

故 $\mathrm{Cov}(U,V)=\mathrm{E}(UV)-\mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V)=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$， $\rho_{UV}=\frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{\mathrm{D}(U)}\sqrt{\mathrm{D}(V)}}=\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{2}{9}}\sqrt{\frac{2}{9}}}=\frac{1}{8}$.

12．用一机床制造大小相同的零件，标准重为 1kg，由于随机误差，每个零件的重量（单位：kg）在（0.95,1.05）上均匀分布．设每个零件重量相互独立．

（1）制造 1200 个零件，问总质量大于 1202kg 的概率是多少？

（2）最多可以制造多少个零件，使零件总质量误差总和的绝对值小于 2kg 的概率不小于 0.9.

解：（1）设 X_i 表示第 i 个零件的重量，有 $X_i\sim U(0.95, 1.05)$，$\mathrm{E}(X_i)=\frac{a+b}{2}=1$，$\mathrm{D}(X_i)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{1200}$，

因 1200 个零件的总质量 $\sum_{i=1}^{1200}X_i$，有 $E\left(\sum_{i=1}^{1200}X_i\right)=\sum_{i=1}^{1200}E(X_i)=1200$， $D\left(\sum_{i=1}^{1200}X_i\right)=\sum_{i=1}^{1200}D(X_i)=1$，

且 $n=1200$ 很大，由中心极限定理知：$\sum_{i=1}^{1200}X_i\stackrel{\cdot}{\sim}N(1200,1)$，

故 $P\{\sum_{i=1}^{1200}X_i>1202\}=1-F(1202)\doteq1-\Phi(\frac{1202-1000}{1})=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$；

（2）设制造 n 个零件，其总质量 $\sum_{i=1}^{n}X_i$，有 $E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n$， $D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{n}{1200}$，

可知数量 n 很大，由中心极限定理知：$\sum_{i=1}^{n}X_i\stackrel{\cdot}{\sim}N(n,\frac{n}{1200})$，

则 $P\{|\sum_{i=1}^{n}X_i-n|\le2\}=F_Y(n+2)-F_Y(n-2)\doteq\Phi(\frac{n+2-n}{\sqrt{\frac{n}{1200}}})-\Phi(\frac{n-2-n}{\sqrt{\frac{n}{1200}}})=2\Phi(\frac{20\sqrt{12}}{\sqrt{n}})-1\ge0.9$，

得 $\Phi(\frac{20\sqrt{12}}{\sqrt{n}})\ge0.95$， $\frac{20\sqrt{12}}{\sqrt{n}}\ge1.65$， $\sqrt{n}\le\frac{20\sqrt{12}}{1.65}=41.9891$，

故 $n \le 1763.0854$，即最多可以制造 1763 个零件.

注：若取为 $\dfrac{20\sqrt{12}}{\sqrt{n}} \ge 1.645$，就有 $\sqrt{n} \le \dfrac{20\sqrt{12}}{1.645} = 42.1167$，得 $n \le 1773.8195$，最多可以制造 1773 个零件.

13．某公司生产的电子元件合格率为 99.5%．装箱出售时，（1）若每箱中装 1000 只，问不合格品在 2 到 6 只之间的概率是多少？（2）若要以 99%的概率保证每箱中合格品数不少于 1000 只，问每箱至少应多装几只这种电子元件？

解：（1）设 X 表示 1000 只电子元件中的不合格品数，有 $X \sim B(1000, 0.005)$，

则 $E(X) = np = 5$，$D(X) = npq = 4.975$，

且 $n = 1000$ 很大，由中心极限定理知：$X \overset{\cdot}{\sim} N(5, 4.975)$，

故 $P\{2 \le X \le 6\} = F_X(6) - F_X(2) = \Phi(\dfrac{6-5}{\sqrt{4.975}}) - \Phi(\dfrac{2-5}{\sqrt{4.975}}) = \Phi(0.45) - \Phi(-1.35)$

$$= \Phi(0.45) + \Phi(1.35) - 1 = 0.6736 + 0.9115 - 1 = 0.5851;$$

（2）设每箱多装 x 只电子元件，Y 表示这 $1000 + x$ 只电子元件中的不合格品数，

则 $Y \sim B(1000 + x, 0.005)$，有 $E(Y) = np = 5 + 0.005x$，$D(Y) = npq = 4.975 + 0.004975x$，

数量 n 很大，由中心极限定理知：$Y \overset{\cdot}{\sim} N(5 + 0.005x, 4.975 + 0.004975x)$，

每箱中合格品数不少于 1000 只，即不合格品数 $Y \le x$，

则 $P\{Y \le x\} = F_Y(x) = \Phi(\dfrac{x - 5 - 0.005x}{\sqrt{4.975 + 0.004975x}}) \ge 0.99$，即 $\dfrac{x - 5 - 0.005x}{\sqrt{4.975 + 0.004975x}} \ge 2.33$，

得方程 $(0.995x - 5)^2 \ge 2.33^2(4.975 + 0.004975x)$，即 $0.99x^2 - 9.977x - 2 \ge 0$，

故 $x \ge 10.274$，即每箱至少应多装 11 只电子元件.

（或由于可以看出 x 较小，$\dfrac{x - 5 - 0.005x}{\sqrt{4.975 + 0.004975x}} \ge 2.33$ 可近似为 $\dfrac{x-5}{\sqrt{5}} \ge 2.33$，得 $x \ge 10.21$）

注：此题 n 很大，p 很小，np 较小，最好是用泊松分布近似，

（1）因 $X \sim B(1000, 0.005)$，$\lambda = np = 5$，即 $X \overset{\cdot}{\sim} P(5)$，

故 $P\{2 \le X \le 6\} = P\{X \le 6\} - P\{X \le 1\} = 0.7622 - 0.0404 = 0.7218$；

（此题按二项分布计算的准确答案是 0.7225）

（2）因 $Y \sim B(1000 + x, 0.005)$，且显然 x 较小，$\lambda = np \doteq 5$，即 $Y \overset{\cdot}{\sim} P(5)$，

则 $P\{X \le x\} \ge 0.99$，查泊松分布表得 $x \ge 11$.

概率论第五章习题解答

习题 5.1

1． 设$X_1, \cdots, X_n$为来自总体X的简单样本，且X服从参数为$p(0<p<1)$的两点分布，样本值为$x_1, \cdots, x_n$．求$X_1, \cdots, X_n$的联合分布律．

解：总体X的分布律为$P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x}$，$x=0, 1$，

故$P\{X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n\}=\prod\limits_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$，其中$x_1, \cdots, x_n=0, 1$．

2． 设 X_1, $\cdots$, X_n 为来自参数为λ的泊松分布总体 X 的样本，样本值为 x_1, $\cdots$, x_n．试求λ为何值时，$P\{X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n\}$最大？

解：总体X的分布律为$P\{X=x\}=\dfrac{\lambda^x}{x!}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$，$x=0, 1, 2, \cdots$，

则$P\{X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n\}=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\cdot \mathrm{e}^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\cdot \mathrm{e}^{-n\lambda}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}$，其中$x_1, \cdots, x_n=0, 1, 2, \cdots$，

令$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}P\{X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n\}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-1}\cdot \mathrm{e}^{-n\lambda}+\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-1}\cdot \mathrm{e}^{-n\lambda}\cdot(-n)}{x_1!x_2!\cdots x_n!}=\dfrac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\cdot \mathrm{e}^{-n\lambda}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}\cdot\Big(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}-n\Big)=0$，

得$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}-n=0$，即$\lambda=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$，且当$0<\lambda<\bar{x}$时，此导数为正，当$\lambda>\bar{x}$时，此导数为负，

故当$\lambda=\bar{x}$时，$P\{X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n\}$最大．

3． 设$X_1, \cdots, X_n$为来自参数为λ的指数分布总体X的样本，试求$X_1, \cdots, X_n$的联合密度函数．

解：总体X的密度函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

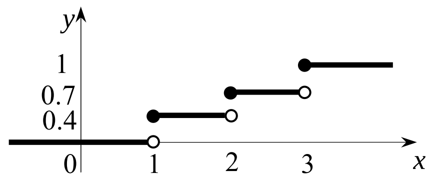
故 $f(x_1, \cdots, x_n)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x_i}, & x_1, \cdots, x_n>0, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_1, \cdots, x_n>0, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4． 设总体X的样本值为 1, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 2，求X的经验分布函数$F_n(x)$，并画出其图形．

解：将样本观测值按由小到大顺序排列：1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3，

即$x_{(1)}=x_{(2)}=x_{(3)}=x_{(4)}=1$，$x_{(5)}=x_{(6)}=x_{(7)}=2$，$x_{(8)}=x_{(9)}=x_{(10)}=3$，

故$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<1, \\ 0.4, & 1\le x<2, \\ 0.7, & 2\le x<3, \\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$



习题 5.2

1． 设$X\sim N(\mu, 25)$，μ未知，$X_1, \cdots, X_n$为总体X的样本．下列样本函数中，哪些是统计量？为什么？

（1）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$；（2）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$，$\sigma$ 为总体标准差.

解：（1）不是统计量，其中含有未知参数μ；

（2）是统计量，参数$\sigma=5$ 为已知.

2． 证明定理 5.2.

证：（1）$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(aX_i+b)=\frac{1}{n}(a\sum_{i=1}^{n}X_i+nb)=a\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i+b=a\overline{X}+b$；

（2）$E(\overline{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X)=\frac{1}{n}\cdot nE(X)=E(X)$，

$$D(\overline{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X)=\frac{1}{n^2}\cdot nD(X)=\frac{1}{n}D(X).$$

3． 证明定理 5.3 中性质（1）.

证：$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2\overline{X}X_i+\overline{X}^2)=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\cdot n\overline{X}+n\overline{X}^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$.

4． 下列数据为某报童近 20 天的报纸销售量：658, 571, 611, 527, 546, 598, 470, 577, 549, 598, 676, 569, 608, 632, 572, 706, 609, 569, 577, 641．（1）计算样本均值$\bar{x}$和样本方差s^2；（2）假设报童每天的报纸销售量X服从正态分布，并且$\mathrm{E}(X)=\bar{x}$，$\mathrm{D}(X)=s^2$，报纸的批发价为 0.35 元，零售价为 0.5 元，卖不完退回报社的退回价为 0.1 元，求报童每天批发多少报纸，可使平均收益最大？

解：（1）$\bar{x}=\frac{1}{20}(658+571+\cdots+641)=593.2$，

$s^2=\frac{1}{19}[(658-593.2)^2+(571-593.2)^2+\cdots+(641-593.2)^2]=2883.22$；

（2）由假设得$X\sim N(593.2, 2883.22)$，设每天批发 a 份报纸，收益为 Y，

当$X\ge a$时，实际售出 a 份报纸，收益$Y=0.15a$元，

当$X<a$时，实际售出 X 份报纸，退回$a-X$份，收益$Y=0.15X-0.25(a-X)=0.4X-0.25a$，

即$Y=g(X)=\begin{cases}0.15a, & X\ge a,\\ 0.4X-0.25a, & X<a,\end{cases}$

则$\mathrm{E}(Y)=\int_{-\infty}^{a}(0.4x-0.25a)f(x)\mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty}0.15af(x)\mathrm{d}x=0.4\int_{-\infty}^{a}xf(x)dx-0.25aF(a)+0.15a[1-F(a)]$

$=0.4\int_{-\infty}^{a}xf(x)dx-0.4aF(a)+0.15a$，

令$\frac{\mathrm{dE}(Y)}{\mathrm{d}a}=0.4af(a)-0.4F(a)-0.4af(a)+0.15=-0.4F(a)+0.15=-0.4\Phi(\frac{a-593.2}{\sqrt{2883.22}})+0.15=0$，

得$\Phi(\frac{a-593.2}{\sqrt{2883.22}})=0.375$，即$\frac{a-593.2}{\sqrt{2883.22}}=-0.32$，且$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{E}(Y)}{\mathrm{d}a^2}=-0.4f(a)<0$，

故每天批发$a=593.2-0.32\times\sqrt{2883.22}=576$份报纸时，可使平均收益最大.

5． 从一大批次品率为 p 的产品中，有放回地抽取 n 个，其中次品 n_A 个.（1）n_A 是否为统计量？（2）计算 $\mathrm{E}(n_A)$、$\mathrm{D}(n_A)$.

解：（1）n_A是统计量，将第 i 次抽样结果记为 X_i，即 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次抽到次品},\\ 0, & \text{第 } i \text{ 次没有抽到次品},\end{cases}$ 有 $n_A=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；

（2）$n_A \sim B(n, p)$，故 $\mathrm{E}(n_A) = np$，$\mathrm{D}(n_A) = np(1-p)$.

6． 设随机变量 X 服从参数$\lambda = 5$ 的指数分布，试求 X 的上侧α 分位数 x_α：（1）$\alpha = 0.15$;（2）$\alpha = 0.95$.

解：因 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-5x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 有 $\alpha=P\{X\ge x_\alpha\}=\int_{x_\alpha}^{+\infty}5\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x=(-\mathrm{e}^{-5x})\Big|_{x_\alpha}^{+\infty}=\mathrm{e}^{-5x_\alpha}$，

故 $x_\alpha=-\dfrac{1}{5}\ln\alpha$，当$\alpha = 0.15$ 时，$x_{0.15}=-\dfrac{1}{5}\ln 0.15=0.3794$；当$\alpha = 0.95$ 时，$x_{0.95}=-\dfrac{1}{5}\ln 0.95=0.0103$.

习题 5.3

1． 求 $N(5, 16)$分布的上侧α 分位数：（1）$\alpha = 0.95$；（2）$\alpha = 0.05$；（3）$\alpha = 0.01$.

解：因 $\dfrac{X-5}{4}\sim N(0,1)$，且 $\alpha=P\{X\ge x_\alpha\}=P\{\dfrac{X-5}{4}\ge\dfrac{x_\alpha-5}{4}\}$，有 $\dfrac{x_\alpha-5}{4}=u_\alpha$，

则 $x_\alpha = 5 + 4u_\alpha = 5 + 4\Phi^{-1}(1-\alpha)$，

（1）$x_{0.95} = 5 + 4u_{0.95} = 5 + 4\times(-1.64) = -1.56$；

（2）$x_{0.05} = 5 + 4u_{0.05} = 5 + 4\times 1.64 = 11.56$；

（3）$x_{0.01} = 5 + 4u_{0.01} = 5 + 4\times 2.33 = 14.32$.

2． 查表求自由度为 7 的 t 分布的上侧α 分位数：（1）$\alpha = 0.95$；（2）$\alpha = 0.99$；（3）$\alpha = 0.05$；（4）$\alpha = 0.01$.

解：因 $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$，

（1）$t_{0.95}(7) = -t_{0.05}(7) = -1.8946$；

（2）$t_{0.99}(7) = -t_{0.01}(7) = -2.9980$；

（3）$t_{0.05}(7) = 1.8946$；

（4）$t_{0.01}(7) = 2.9980$.

3． 查表计算$\chi_\alpha^2(18)$：（1）$\alpha = 0.05$；（2）$\alpha = 0.99$.

解：（1）$\chi^2_{0.05}(18)=28.869$；

（2）$\chi^2_{0.99}(18)=7.015$.

4． 设$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，证明：$\mathrm{E}(\chi^2) = n$，$\mathrm{D}(\chi^2) = 2n$.

证：因$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，存在 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且都服从 $N(0, 1)$，使得 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$，

则 $\mathrm{E}(\chi^2)=\mathrm{E}(X_1^2)+\mathrm{E}(X_2^2)+\cdots+\mathrm{E}(X_n^2)=n\mathrm{E}(X_1^2)$，$\mathrm{D}(\chi^2)=\mathrm{D}(X_1^2)+\mathrm{D}(X_2^2)+\cdots+\mathrm{D}(X_n^2)=n\mathrm{D}(X_1^2)$，

因 $X_1 \sim N(0, 1)$，有 $\mathrm{E}(X_1) = 0$，$\mathrm{D}(X_1) = 1$，

故 $\mathrm{E}(X_1^2)=\mathrm{D}(X_1)+[\mathrm{E}(X_1)]^2=1$，即 $\mathrm{E}(\chi^2) = n$；

而 $\mathrm{D}(X_1^2)=\mathrm{E}(X_1^4)-[\mathrm{E}(X_1^2)]^2$，

且 $\mathrm{E}(X_1^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})=-\dfrac{x^3}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot 3x^2\mathrm{d}x$

$=0+3\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=3\mathrm{E}(X_1^2)=3$，

故 $\mathrm{D}(X_1^2)=\mathrm{E}(X_1^4)-[\mathrm{E}(X_1^2)]^2=3-1=2$，即 $\mathrm{D}(\chi^2)=2n$.

5． 求第一自由度为 4，第二自由度为 7 的 F 分布的上侧α 分位数：（1）$\alpha=0.95$；（2）$\alpha=0.99$；（3）$\alpha=0.05$；（4）$\alpha=0.01$.

解：因 $F_\alpha(n,m)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}$，

（1） $F_{0.95}(4,7)=\dfrac{1}{F_{0.05}(7,4)}=\dfrac{1}{6.09}=0.1642$；

（2） $F_{0.99}(4,7)=\dfrac{1}{F_{0.01}(7,4)}=\dfrac{1}{14.98}=0.0668$；

（3）$F_{0.05}(4,7)=4.12$；

（4）$F_{0.01}(4,7)=7.85$.

6． 证明 $F_\alpha(n,m)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}$.

证：设 $X\sim\chi^2(n)$，$Y\sim\chi^2(m)$，且 X 与 Y 相互独立，有 $F=\dfrac{X/n}{Y/m}\sim F(n,m)$，且 $\dfrac{1}{F}=\dfrac{Y/m}{X/n}\sim F(m,n)$，

则 $P\{F>F_{1-\alpha}(m,n)\}=P\{\dfrac{1}{F}<\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=1-\alpha$，即 $P\{\dfrac{1}{F}\ge\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}\}=\alpha$，

故 $F_\alpha(n,m)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(m,n)}$.

习题 5.4

1． 在总体 $N(12,4)$ 中随机抽取一容量为 36 的样本，求样本均值 $\overline{X}$ 落在 8.8 至 13.2 之间的概率.

解：因总体 $X\sim N(12,4)$，且样本容量 $n=36$，有 $\dfrac{\overline{X}-12}{2/\sqrt{36}}=\dfrac{\overline{X}-12}{1/3}\sim N(0,1)$，

故 $P\{8.8<\overline{X}<13.2\}=P\{-9.6<\dfrac{\overline{X}-12}{1/3}<3.6\}=\Phi(3.6)-\Phi(-9.6)=0.9998$.

2． 求总体 $N(30,9)$ 的容量分别为 10 和 15 的两个独立样本均值差的绝对值大于 1 的概率.

解：看作双总体 $X\sim N(30,9)$，$Y\sim N(30,9)$，样本容量分别为 $n=10$，$m=15$，且相互独立，

则 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(30-30)}{\sqrt{\dfrac{9}{10}+\dfrac{9}{15}}}=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{1.5}}\sim N(0,1)$，

故 $P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>1\}=P\{\dfrac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\sqrt{1.5}}>0.8165\}=2[1-\Phi(0.82)]=2\times(1-0.7939)=0.4122$.

3． 分别从方差为 20 和 35 的两个正态总体中抽取容量为 8 和 10 的两个独立样本 $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{10}$，试估计 $P\{S_x^2\ge 2S_y^2\}$.

解：双总体 $X\sim N(\mu_x, 20)$，$Y\sim N(\mu_y, 35)$，样本容量分别为 $n=8$，$m=10$，且相互独立，

则 $\dfrac{S_x^2/20}{S_y^2/35}=1.75\dfrac{S_x^2}{S_y^2}\sim F(7,9)$，

故 $P\{S_x^2\ge 2S_y^2\}=P\{1.75\dfrac{S_x^2}{S_y^2}\ge 3.5\}=0.0423$.

注：最后一步利用 MATLAB 软件计算积分，程序如下：

建立 fdis.m 文件：

```
function y=fdis(x)
n=7;m=9;
y=gamma((n+m)/2)/gamma(n/2)/gamma(m/2)*(n/m)^(n/2)*x.^(n/2-1).*(1+n/m*x).^(-(n+m)/2);   % F 分布密度
```

命令窗口输入：

```
p=1-quadl(@fdis,0,3.5)
```

4. 设总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \cdots, X_n$ 为 X 的样本．如果利用样本讨论与总体期望 μ 有关的概率问题，应选取哪个统计量？选用哪个抽样分布？

解：讨论总体期望 μ，应选取样本均值 $\overline{X}$，

当 σ^2 已知时，选用 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，当 σ^2 未知时，选用 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$.

5. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 与 $Y_1, \cdots, Y_m$ 分别为来自正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，且两样本相互独立．如果利用样本讨论与两总体~~样本~~均值差 $\mu_1-\mu_2$ 有关的概率问题，应选取哪个统计量？选用哪个抽样分布？如果利用样本讨论与两总体~~样本~~方差比 σ_1^2/σ_2^2 有关的概率问题，应选取哪个统计量？选用哪个抽样分布？

解：讨论两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$，应选取样本均值差 $\overline{X}-\overline{Y}$，

当 σ_1^2 和 σ_2^2 已知时，选用 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}\sim N(0,1)$，

当 σ_1^2 和 σ_2^2 未知但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，选用 $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)$.

复习题五

1. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本，下列样本函数何时是统计量，何时不是统计量．

（1）$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-2\overline{X}$；（2）$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(aX_i+b)^2$；（3）$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[X_i-\mathrm{E}(X_i)]^2$；（4）$\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}-\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}$；

（5）$\dfrac{\max\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}-\min\limits_{1\le i\le n}\{X_i\}}{\sqrt{\mathrm{D}(\overline{X})}}$.

解：（1）不含未知参数，是统计量；

（2）含参数 a, b，当参数 a, b 已知时，是统计量，当 a, b 未知时，不是统计量；

（3）含 $\mathrm{E}(X_i)=\mathrm{E}(X)$，当总体期望 $\mathrm{E}(X)$ 已知时，是统计量，当 $\mathrm{E}(X)$ 未知时，不是统计量；

（4）不含未知参数，是统计量；

（5）含 $\mathrm{D}(\overline{X})=\dfrac{1}{n}\mathrm{D}(X)$，当总体方差 $\mathrm{D}(X)$ 已知时，是统计量，当 $\mathrm{D}(X)$ 未知时，不是统计量．

2．　设 $X_1, \cdots, X_n$ 为总体 X 的样本，$\overline{X^2}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，在下列情形下求 $\mathrm{E}(\overline{X^2})$．

（1）X 服从参数为 $p = 0.6$ 的两点分布，；（2）X 服从参数 $\lambda = 7$ 的泊松分布；（3）$X \sim N(3, 16)$.

解：因 $\mathrm{E}(X_i^2)=\mathrm{D}(X_i)+[\mathrm{E}(X_i)]^2=\mathrm{D}(X)+[\mathrm{E}(X)]^2$，有 $\mathrm{E}(\overline{X^2})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^2)=\mathrm{D}(X)+[\mathrm{E}(X)]^2$，

（1）因 $X \sim (0\text{-}1)$，有 $\mathrm{E}(X) = p = 0.6$，$\mathrm{D}(X) = pq = 0.24$，故 $\mathrm{E}(\overline{X^2})=0.24+0.6^2=0.6$；

（2）因 $X \sim P(7)$，有 $\mathrm{E}(X) = \lambda = 7$，$\mathrm{D}(X) = \lambda = 7$，故 $\mathrm{E}(\overline{X^2})=7+7^2=56$；

（3）因 $X \sim N(3, 16)$，有 $\mathrm{E}(X) = \mu = 3$，$\mathrm{D}(X) = \sigma^2 = 16$，故 $\mathrm{E}(\overline{X^2})=16+3^2=25$．

3．　设 $X \sim N(\mu, 4)$，$\overline{X}$ 为样本均值，试求样本容量 n 为多少时，才能使 $P\{|\overline{X}-\mu|<0.1\}\ge 0.9$？

解：因 $X \sim N(\mu, 4)$，有 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

则 $P\{|\overline{X}-\mu|<0.1\}=P\{\dfrac{-0.1}{2/\sqrt{n}}<\dfrac{\overline{X}-\mu}{2/\sqrt{n}}<\dfrac{0.1}{2/\sqrt{n}}\}=\Phi(\dfrac{0.1}{2/\sqrt{n}})-\Phi(\dfrac{-0.1}{2/\sqrt{n}})=2\Phi(\dfrac{0.1\sqrt{n}}{2})-1\ge 0.9$，

得 $\Phi(\dfrac{0.1\sqrt{n}}{2})\ge 0.95$，$\dfrac{0.1\sqrt{n}}{2}\ge u_{0.05}=1.64$，$\sqrt{n}\ge 32.8$，故 $n \ge 1075.84$，取 $n \ge 1076$.

4．　设 $X \sim N(15, 9)$，$\overline{X}$，S^2 分别为样本均值和样本方差，样本容量 $n = 6$，求 a，使概率 $P\{\overline{X}\le a\}=0.9$．

解：因 $X \sim N(15, 3^2)$，且 $n = 6$，有 $\dfrac{\overline{X}-15}{3/\sqrt{6}} \sim N(0,1)$，

则 $P\{\overline{X}\le a\}=P\{\dfrac{\overline{X}-15}{3/\sqrt{6}}\le\dfrac{a-15}{3/\sqrt{6}}\}=\Phi(\dfrac{a-15}{3/\sqrt{6}})=0.9$，得 $\dfrac{a-15}{3/\sqrt{6}}=u_{0.1}=1.28$，故 $a = 16.57$.

5．　设 $X \sim N(\mu, 9)$，$\overline{X}$，S^2 分别为样本均值和样本方差，$n = 10$．求 a：

（1）使概率 $P\{\overline{X}\le a\}=0.9$，应该用什么分布？能否求出？

（2）使概率 $P\{S^2<a\}=0.9$.

解：因 $X \sim N(\mu, 3^2)$，有 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{3/\sqrt{10}} \sim N(0,1)$，$\dfrac{(10-1)S^2}{9}=S^2 \sim \chi^2(9)$，

（1）应该用正态分布，$P\{\overline{X}<a\}=P\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{3/\sqrt{10}}<\dfrac{a-\mu}{3/\sqrt{10}}\}=\Phi(\dfrac{a-\mu}{3/\sqrt{10}})=0.9$，即 $\dfrac{a-\mu}{3/\sqrt{10}}=1.28$，

故 $a = \mu + 1.2143$，当给出 μ 值时，可以求出 a 的值；

（2）应该用$\chi^2(9)$ 分布，$P\{S^2 \ge a\} = 0.1$，故$a = \chi^2_{0.1}(9) = 14.684$.

6． 设$X \sim N(12, 9)$，$Y \sim N(16, 38)$，$\overline{X}, \overline{Y}, S_x^2, S_y^2$分别为来自总体$X$与$Y$的两独立样本的均值和方差，样本容量分别为 6 和 8．（1）求概率$P\{\overline{Y} - \overline{X} \le 7\}$；（2）求 a，使概率$P\{\overline{Y} - \overline{X} \le a\} = 0.9$；（3）求 b，使概率$P\{\frac{S_x^2}{S_y^2} \le b\} = 0.95$.

解：因$X \sim N(12, 9)$，$Y \sim N(16, 38)$，且样本容量$n = 6$，$m = 8$，

则$\dfrac{(\overline{Y} - \overline{X}) - (16 - 12)}{\sqrt{\dfrac{9}{6} + \dfrac{38}{8}}} = \dfrac{(\overline{Y} - \overline{X}) - 4}{2.5} \sim N(0,1)$，$\dfrac{S_x^2/9}{S_y^2/38} \sim F(5,7)$，

（1）$P\{\overline{Y} - \overline{X} \le 7\} = P\{\dfrac{(\overline{Y} - \overline{X}) - 4}{2.5} \le 1.2\} = \Phi(1.2) = 0.8849$；

（2）$P\{\overline{Y} - \overline{X} \le a\} = P\{\dfrac{(\overline{Y} - \overline{X}) - 4}{2.5} \le \dfrac{a-4}{2.5}\} = \Phi(\dfrac{a-4}{2.5}) = 0.9$，得$\dfrac{a-4}{2.5} = 1.28$，故$a = 7.2$；

（3）$P\{\dfrac{S_x^2}{S_y^2} \le b\} = 1 - P\{\dfrac{S_x^2/9}{S_y^2/38} > \dfrac{38}{9}b\} = 0.95$，即$\dfrac{38}{9}b = F_{0.05}(5,7) = 3.97$，故$b = 0.9403$.

7． 设$X_1, \cdots, X_5$为来自总体$N(20, 9)$的样本，求：（1）$P\{\max(X_1, \cdots, X_5) > 21.5\}$；（2）$P\{\min(X_1, \cdots, X_5) > 21.5\}$.

解：（1）$P\{\max(X_1, \cdots, X_5) > 21.5\} = 1 - P\{\max(X_1, \cdots, X_5) \le 21.5\} = 1 - P\{X_1 \le 21.5, \cdots, X_5 \le 21.5\}$
$= 1 - P\{X_1 \le 21.5\} \cdots P\{X_5 \le 21.5\} = 1 - [F(21.5)]^5 = 1 - [\Phi(0.5)]^5 = 1 - 0.6915^5 = 0.8419$；

（2）$P\{\min(X_1, \cdots, X_5) > 21.5\} = P\{X_1 > 21.5, \cdots, X_5 > 21.5\} = P\{X_1 > 21.5\} \cdots P\{X_5 > 21.5\}$
$= [1 - F(21.5)]^5 = [1 - \Phi(0.5)]^5 = (1 - 0.6915)^5 = 0.0028$.

8． 设$X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$，试证明统计量$T = \dfrac{X_{n+1} - \overline{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \sim t(n-1)$.

解：因$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，$X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$，且$\overline{X}$与$X_{n+1}$相互独立，即$X_{n+1} - \overline{X}$服从正态分布，

且$E(X_{n+1} - \overline{X}) = E(X_{n+1}) - E(\overline{X}) = \mu - \mu = 0$，$D(X_{n+1} - \overline{X}) = D(X_{n+1}) + D(\overline{X}) = \sigma^2 + \dfrac{\sigma^2}{n} = \dfrac{n+1}{n}\sigma^2$，

则$X_{n+1} - \overline{X} \sim N(0, \dfrac{n+1}{n}\sigma^2)$，即$\dfrac{X_{n+1} - \overline{X}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}} \sim N(0,1)$，

因$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，

故根据 t 分布的定义得 $\dfrac{\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}}\sim t(n-1)$.

9. 设 X_1, X_2 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本，求 $Y=\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$ 的分布.

解：因 $X_1\sim N(0, \sigma^2)$，$X_2\sim N(0, \sigma^2)$，且相互独立，

有 $\mathrm{E}(X_1)=\mathrm{E}(X_2)=0$，$\mathrm{D}(X_1)=\mathrm{D}(X_2)=\sigma^2$，$\mathrm{Cov}(X_1, X_2)=0$，

则 $\mathrm{E}(X_1+X_2)=\mathrm{E}(X_1)+\mathrm{E}(X_2)=0$，$\mathrm{D}(X_1+X_2)=\mathrm{D}(X_1)+\mathrm{D}(X_2)=2\sigma^2$，

$\mathrm{E}(X_1-X_2)=\mathrm{E}(X_1)-\mathrm{E}(X_2)=0$，$\mathrm{D}(X_1-X_2)=\mathrm{D}(X_1)+\mathrm{D}(X_2)=2\sigma^2$，

$\mathrm{Cov}(X_1+X_2, X_1-X_2)=\mathrm{Cov}(X_1, X_1)-\mathrm{Cov}(X_1, X_2)+\mathrm{Cov}(X_2, X_1)-\mathrm{Cov}(X_2, X_2)=\mathrm{D}(X_1)-\mathrm{D}(X_2)=0$，

因 (X_1, X_2) 服从二维正态分布，X_1+X_2 与 X_1-X_2 都是 X_1 与 X_2 的线性组合，

有(X_1+X_2, X_1-X_2) 也服从二维正态分布，即 $X_1+X_2\sim N(0, 2\sigma^2)$，$X_2-X_2\sim N(0, 2\sigma^2)$，且相互独立，

则 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，即 $\dfrac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，$\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，且相互独立，

故 $Y=\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}=\dfrac{\dfrac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}\Big/1}{\dfrac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}\Big/1}\sim F(1,1)$.

10. 设 $X_1, \cdots, X_6$ 是来自正态总体 $N(0, 3)$ 的样本，试确定常数 a 和 b，使得随机变量 $Y=a(X_1+X_2)^2+b(X_3-X_4+X_5+X_6)^2$ 服从自由度为 2 的 χ^2 分布.

解：因 $X_i\sim N(0, 3)$，$i=1, \cdots, 6$，且相互独立，有 $\mathrm{E}(X_i)=0$，$\mathrm{D}(X_i)=3$，

则 X_1+X_2 和 $X_3-X_4+X_5+X_6$ 都服从正态分布，

且 $\mathrm{E}(X_1+X_2)=\mathrm{E}(X_1)+\mathrm{E}(X_2)=0$，$\mathrm{D}(X_1+X_2)=\mathrm{D}(X_1)+\mathrm{D}(X_2)=6$，

$\mathrm{E}(X_3-X_4+X_5+X_6)=\mathrm{E}(X_3)-\mathrm{E}(X_4)+\mathrm{E}(X_5)+\mathrm{E}(X_6)=0$，

$\mathrm{D}(X_3-X_4+X_5+X_6)=\mathrm{D}(X_3)+\mathrm{D}(X_4)+\mathrm{D}(X_5)+\mathrm{D}(X_6)=12$，

即 $X_1+X_2\sim N(0, 6)$，$X_3-X_4+X_5+X_6\sim N(0, 12)$，且相互独立，

得 $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{6}}\sim N(0,1)$，$\dfrac{X_3-X_4+X_5+X_6}{\sqrt{12}}\sim N(0,1)$，$\dfrac{(X_1+X_2)^2}{6}+\dfrac{(X_3-X_4+X_5+X_6)^2}{12}\sim\chi^2(2)$，

故 $a=\dfrac{1}{6}$，$b=\dfrac{1}{12}$.

概率论第六章习题解答

习题 6.1

1． 求下列总体分布中参数的矩估计：

（1） $f(x;\theta)=\begin{cases}2\theta x+1-\theta, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中$\theta<1$；

（2）$f(x;p)=p(1-p)^{x-1}$，$x=1,2,\cdots$；其中 $0<p<1$；

（3） $f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2}\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, & x\ge\theta_1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中$-\infty<\theta_1<+\infty$，$\theta_2>0$.

解：（1）因$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x(2\theta x+1-\theta)\mathrm{d}x=\left(\frac{2\theta}{3}x^3+\frac{1-\theta}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{2\theta}{3}+\frac{1-\theta}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\theta}{6}$，有$\theta=6\,\mathrm{E}(X)-3$，

故θ的矩估计为$\hat{\theta}=6\overline{X}-3$；

（2）因$\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{x=1}^{\infty}x\cdot p(1-p)^{x-1}=p\sum\limits_{x=1}^{\infty}x\cdot q^{x-1}=p\sum\limits_{x=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}q^x=p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\sum\limits_{x=1}^{\infty}q^x=p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{q}{1-q}\right)=p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$，

故$p=\dfrac{1}{\mathrm{E}(X)}$，$p$的矩估计为$\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$；

（3）因$\mathrm{E}(X)=\int_{\theta_1}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta_2}\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\mathrm{d}x=\int_{\theta_1}^{+\infty}x\cdot(-1)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}=-x\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\Big|_{\theta_1}^{+\infty}+\int_{\theta_1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\mathrm{d}x$

$$=-x\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\Big|_{\theta_1}^{+\infty}-\theta_2\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\Big|_{\theta_1}^{+\infty}=\theta_1+\theta_2,$$

且$\mathrm{E}(X^2)=\int_{\theta_1}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{\theta_2}\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\mathrm{d}x=\int_{\theta_1}^{+\infty}x^2\cdot(-1)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}=-x^2\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\Big|_{\theta_1}^{+\infty}+\int_{\theta_1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\cdot 2x\mathrm{d}x$

$$=-x^2\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\Big|_{\theta_1}^{+\infty}+2\theta_2\int_{\theta_1}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta_2}\mathrm{e}^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}\mathrm{d}x=\theta_1^2+2\theta_2\mathrm{E}(X)=\theta_1^2+2\theta_1\theta_2+2\theta_2^2,$$

则$\mathrm{D}(X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=\theta_1^2+2\theta_1\theta_2+2\theta_2^2-(\theta_1+\theta_2)^2=\theta_2^2$，

即$\theta_2=\sqrt{\mathrm{D}(X)}$，$\theta_1=\mathrm{E}(X)-\sqrt{\mathrm{D}(X)}$，

故θ_1和θ_2的矩估计为$\hat{\theta}_1=\overline{X}-S_n$，$\hat{\theta}_2=S_n$.

2． 求下列总体分布中参数的极大似然估计：

（1）$f(x;\theta)=\theta(1-\theta)^{x-1}$，$x=1,2,\cdots$；其中 $0<\theta<1$；

（2）$f(x;\lambda)=\dfrac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$x=0,1,2,\cdots$；其中$\lambda>0$；

（3）$f(x;\mu,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x=0$；其中$-\infty<\mu<+\infty$，$\sigma>0$.

解：（1）$L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=\theta(1-\theta)^{x_1-1}\cdot\theta(1-\theta)^{x_2-1}\cdots\theta(1-\theta)^{x_n-1}=\theta^n(1-\theta)^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n}$，

即 $\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-\theta)$，令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=n\cdot\dfrac{1}{\theta}+(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n)\cdot\dfrac{-1}{1-\theta}=0$，得 $\theta=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\bar{x}}$，

故θ的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\overline{X}}$；

（2）$L(\lambda)=f(x_1;\lambda)f(x_2;\lambda)\cdots f(x_n;\lambda)=\dfrac{\lambda^{x_1}}{x_1!}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^{x_2}}{x_2!}\mathrm{e}^{-\lambda}\cdots\dfrac{\lambda^{x_n}}{x_n!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\dfrac{\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!x_2!\cdots x_n!}\mathrm{e}^{-n\lambda}$，

即 $\ln L(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln\lambda-\ln(x_1!x_2!\cdots x_n!)-n\lambda$，令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\dfrac{1}{\lambda}-n=0$，得 $\lambda=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$，

故λ 的极大似然估计为 $\hat{\lambda}=\overline{X}$；

（3）$L(\mu,\sigma^2)=f(x_1;\mu,\sigma^2)f(x_2;\mu,\sigma^2)\cdots f(x_n;\mu,\sigma^2)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_1}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_2}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_n}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n x_1x_2\cdots x_n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

即 $\ln L(\mu,\sigma^2)=-\dfrac{n}{2}(\ln 2\pi+\ln\sigma^2)-\ln(x_1x_2\cdots x_n)-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$，

令 $\dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}2(\ln x_i-\mu)\cdot(-1)}{2\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-n\mu}{\sigma^2}=0$，得 $\mu=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$，

再令 $\dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0$，得 $\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2$，

故μ 和σ^2 的极大似然估计为 $\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i$，$\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln X_i-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i)^2$.

3．设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^\theta, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求参数θ 的极大似然估计与矩法估计，并看看它们是否一致？今获得样本观测值为 0.4, 0.7, 0.27, 0.55,

0.68, 0.31, 0.45, 0.83．试分别求θ的极大似然估计值与矩估计值．

解：因$L(\theta)=f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=(\theta+1)x_1^{\theta}\cdot(\theta+1)x_2^{\theta}\cdots(\theta+1)x_n^{\theta}=(\theta+1)^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta}$，

即$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\ln(x_1x_2\cdots x_n)$，令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=n\cdot\dfrac{1}{\theta+1}+\ln(x_1x_2\cdots x_n)=0$，

则$\theta=-\dfrac{n}{\ln(x_1x_2\cdots x_n)}-1=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$，

故θ的极大似然估计为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$；

因$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}\mathrm{d}x=(\theta+1)\cdot\left.\dfrac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\right|_0^1=\dfrac{\theta+1}{\theta+2}$，有$\theta=\dfrac{2\mathrm{E}(X)-1}{1-\mathrm{E}(X)}$，

故θ的矩法估计为$\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$；

显然参数θ的极大似然估计与矩法估计不一致；

又因样本观测值为 0.4, 0.7, 0.27, 0.55, 0.68, 0.31, 0.45, 0.83，有$\overline{x}=\dfrac{1}{8}(0.4+0.7+\cdots+0.83)=0.52375$，

故θ的极大似然估计值为$\hat{\theta}=-\dfrac{8}{\ln 0.4+\ln 0.7+\cdots+\ln 0.83}-1=0.3982$，

θ的矩估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{2\times 0.52375-1}{1-0.52375}=0.0997$．

习题 6.2

1． 设容量为 3 的随机样本X_1, X_2, X_3取自概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta^{-1}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

的总体．证明$\hat{\theta}_1=4X_{(1)}$和$\hat{\theta}_2=4X_{(3)}/3$都是$\theta$的无偏估计量．

证：总体X的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta,\\ 1, & x\ge\theta,\end{cases}$$

则容量为 3 的样本的最小顺序统计量$X_{(1)}$的分布函数和密度函数为

$$F_{(1)}(x;\theta)=1-[1-F(x;\theta)]^3=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\left(1-\dfrac{x}{\theta}\right)^3, & 0\le x<\theta,\\ 1, & x\ge\theta,\end{cases}$$

$$f_{(1)}(x;\theta)=F'_{(1)}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3}{\theta^3}(\theta-x)^2, & 0<x<\theta,\\ 0 & \text{其他},\end{cases}$$

且最大顺序统计量 $X_{(3)}$ 的分布函数和密度函数为

$$F_{(3)}(x;\theta)=[F(x;\theta)]^3=\begin{cases}0, & x<0,\\ \left(\dfrac{x}{\theta}\right)^3, & 0\le x<\theta,\\ 1, & x\ge\theta,\end{cases}\quad f_{(3)}(x;\theta)=F'_{(3)}(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

得 $\mathrm{E}(\hat{\theta}_1)=4\mathrm{E}(X_{(1)})=4\int_0^\theta x\cdot\dfrac{3}{\theta^3}(\theta-x)^2\mathrm{d}x=\dfrac{12}{\theta^3}\int_0^\theta(\theta^2x-2\theta x^2+x^3)\mathrm{d}x=\dfrac{12}{\theta^3}\left(\theta^2\dfrac{x^2}{2}-2\theta\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^\theta=\theta$，

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}_2)=\frac{4}{3}\mathrm{E}(X_{(3)})=\frac{4}{3}\int_0^\theta x\cdot\frac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}x=\frac{4}{\theta^3}\int_0^\theta x^3\mathrm{d}x=\frac{4}{\theta^3}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^\theta=\theta,$$

故 $\hat{\theta}_1=4X_{(1)}$ 和 $\hat{\theta}_2=4X_{(3)}/3$ 都是 θ 的无偏估计量.

2． 设总体 X 服从伯努利分布 $B(1, p)$，p 为未知参数（$0 < p < 1$）. 样本 $X_1, \cdots, X_n$ 来自于 X.（1）证明：当 $n = 1$ 时，p^2 不存在无偏估计；（2）若 $n \ge 2$，求 p^2 的一个无偏估计量.

解：（1）当 $n = 1$ 时，样本 X_1 的概率分布为

$$X_1\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix},$$

则任何统计量 $T = T(X_1)$的数学期望为

$$\mathrm{E}(T) = T(0)\cdot(1-p) + T(1)\cdot p = T(0) + [T(1) - T(0)]\cdot p \ne p^2,$$

故当 $n = 1$ 时，p^2 不存在无偏估计；

（2）若 $n \ge 2$，有样本均值 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i$，样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$，

则 $\mathrm{E}(\bar{X})=\mathrm{E}(X)=p$，$\mathrm{E}(S^2)=\mathrm{D}(X)=p(1-p)=p-p^2$，即 $\mathrm{E}(\bar{X}-S^2)=\mathrm{E}(\bar{X})-\mathrm{E}(S^2)=p^2$，

故 $\bar{X}-S^2$ 是 p^2 的一个无偏估计量.

3． 设从均值为 μ，方差为 σ^2（> 0）的总体 X 中分别抽取容量为 n_1, n_2 的两个独立样本，样本均值分别为 $\bar{X}_1$ 和 $\bar{X}_2$. 试证：对于任意满足条件 $a + b = 1$ 的常数 a 和 b，$\hat{\mu}=a\bar{X}_1+b\bar{X}_2$ 都是 μ 的无偏估计，并确定 a、b 使方差 $\mathrm{D}(\hat{\mu})$ 达到最小.

解：因 $\mathrm{E}(\bar{X}_1)=\mathrm{E}(\bar{X}_2)=\mu$，$\mathrm{D}(\bar{X}_1)=\dfrac{\sigma^2}{n_1}$，$\mathrm{D}(\bar{X}_2)=\dfrac{\sigma^2}{n_2}$，有 $\mathrm{E}(\hat{\mu})=a\mathrm{E}(\bar{X}_1)+b\mathrm{E}(\bar{X}_2)=a\mu+b\mu=(a+b)\mu$，

故当 $a + b = 1$ 时，$\mathrm{E}(\hat{\mu})=\mu$，$\hat{\mu}=a\bar{X}_1+b\bar{X}_2$ 都是 μ 的无偏估计；

又 $\mathrm{D}(\hat{\mu})=a^2\mathrm{D}(\bar{X}_1)+b^2\mathrm{D}(\bar{X}_2)=a^2\cdot\dfrac{\sigma^2}{n_1}+(1-a)^2\cdot\dfrac{\sigma^2}{n_2}=\left[\dfrac{a^2}{n_1}+\dfrac{(1-a)^2}{n_2}\right]\sigma^2=\dfrac{(n_1+n_2)a^2-2n_1a+n_1}{n_1n_2}\sigma^2$，

令 $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{D}(\hat{\mu})}{\mathrm{d}a}=\dfrac{2(n_1+n_2)a-2n_1}{n_1n_2}\sigma^2=0$，得 $a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$，且 $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{D}(\hat{\mu})}{\mathrm{d}a^2}=\dfrac{2(n_1+n_2)}{n_1n_2}\sigma^2>0$，

故当 $a=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$，$b=1-a=\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ 时，方差 $\mathrm{D}(\hat{\mu})$ 达到最小.

4. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自均值为 θ 的指数分布的样本，其中 θ 未知．证明下列三个估计量

$$T_1=\frac{1}{3}(X_1+X_2)+\frac{1}{6}(X_3+X_4)，T_2=\frac{1}{10}(6X_1+5X_2-4X_3+3X_4)，T_3=2X_1-X_2+3X_3-3X_4，$$

均为 θ 的无偏估计量，并说明上述估计量中哪个最有效.

证：因总体 X 服从均值为 θ 的指数分布，即 $X\sim \mathrm{e}(1/\theta)$，有 $\mathrm{E}(X)=\theta$，$\mathrm{D}(X)=\theta^2$，

则 $\mathrm{E}(T_1)=\dfrac{1}{3}[\mathrm{E}(X_1)+\mathrm{E}(X_2)]+\dfrac{1}{6}[\mathrm{E}(X_3)+\mathrm{E}(X_4)]=\dfrac{1}{3}(\theta+\theta)+\dfrac{1}{6}(\theta+\theta)=\theta$，

$\mathrm{E}(T_2)=\dfrac{1}{10}[6\mathrm{E}(X_1)+5\mathrm{E}(X_2)-4\mathrm{E}(X_3)+3\mathrm{E}(X_4)]=\dfrac{1}{10}(6\theta+5\theta-4\theta+3\theta)=\theta$，

$\mathrm{E}(T_3)=2\mathrm{E}(X_1)-\mathrm{E}(X_2)+3\mathrm{E}(X_3)-3\mathrm{E}(X_4)=2\theta-\theta+3\theta-3\theta=\theta$，

故 T_1, T_2, T_3 均为 θ 的无偏估计量；

又 $\mathrm{D}(T_1)=\dfrac{1}{9}[\mathrm{D}(X_1)+\mathrm{D}(X_2)]+\dfrac{1}{36}[\mathrm{D}(X_3)+\mathrm{D}(X_4)]=\dfrac{1}{9}(\theta^2+\theta^2)+\dfrac{1}{36}(\theta^2+\theta^2)=\dfrac{5}{18}\theta^2$，

$\mathrm{D}(T_2)=\dfrac{1}{100}[36\mathrm{D}(X_1)+25\mathrm{D}(X_2)+16\mathrm{D}(X_3)+9\mathrm{D}(X_4)]=\dfrac{1}{100}(36\theta^2+25\theta^2+16\theta^2+9\theta^2)=\dfrac{43}{50}\theta^2$，

$\mathrm{D}(T_3)=4\mathrm{D}(X_1)+\mathrm{D}(X_2)+9\mathrm{D}(X_3)+9\mathrm{D}(X_4)=4\theta^2+\theta^2+9\theta^2+9\theta^2=23\theta^2$，

显然 $\mathrm{D}(T_1)<\mathrm{D}(T_2)<\mathrm{D}(T_3)$，

故 T_1 最有效，T_2 其次，T_3 最差.

5. 设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量，且 $\mathrm{D}(\hat{\theta})>0$，试证：$(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

证：因 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量，即 $\mathrm{E}(\hat{\theta})=\theta$，有 $\mathrm{E}[(\hat{\theta})^2]=D(\hat{\theta})+[\mathrm{E}(\hat{\theta})]^2=D(\hat{\theta})+\theta^2>\theta^2$，

故 $(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

习题 6.3

1. 随机地从一批零件中抽取 10 个，测得其长度（单位：cm）为：2.13, 2.14, 2.12, 2.13, 2.11, 2.15, 2.14, 2.13, 2.12, 2.13．假设该批零件的长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，试求总体均值 μ 的置信系数为 95%的置信区间：（1）若已知 $\sigma=0.01$；（2）若 σ 未知.

解：（1）单个正态总体，已知 σ，估计 μ，总体均值 μ 的点估计为 $\bar{X}$，枢轴量为 $U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，

置信系数 $1-\alpha=0.95$，置信区间为 $(\bar{X}-u_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+u_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$，

因 $\bar{x}=\dfrac{1}{10}(2.13+2.14+\cdots+2.13)=2.13$，$\sigma=0.01$，$n=10$，$u_{0.025}=1.96$，

故 μ 的置信系数 95%的置信区间为 $(2.13-1.96\times\dfrac{0.01}{\sqrt{10}}, 2.13+1.96\times\dfrac{0.01}{\sqrt{10}})=(2.1238, 2.1362)$；

（2）单个正态总体，未知 σ，估计 μ，总体均值 μ 的点估计为 $\bar{X}$，枢轴量为 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

置信系数 $1-\alpha=0.95$，置信区间为 $(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}})$，

因 $\bar{x}=\dfrac{1}{10}(2.13+2.14+\cdots+2.13)=2.13$，

$s^2=\dfrac{1}{9}[(2.13-2.13)^2+(2.14-2.13)^2+\cdots+(2.13-2.13)^2]=0.0115^2$，$n=10$，$t_{0.025}(9)=2.2622$，

故μ 的 95%置信区间为 $(2.13-2.2622\times\dfrac{0.0115}{\sqrt{10}},2.13+2.2622\times\dfrac{0.0115}{\sqrt{10}})=(2.1217,2.1383)$.

2．为估计制造某件产品所需的单件平均工时（单位：小时），现制造了五件，记录所需工时为：10.5, 11, 11.2, 12.5, 12.8．设制造单件产品所需工时服从正态分布，试求单件平均工时的置信系数 95%的置信区间．

解：单个正态总体，未知σ，估计μ，总体均值μ 的点估计为 $\bar{X}$，枢轴量为 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，

置信系数 $1-\alpha=0.95$，置信区间为 $(\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}},\bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}})$，

因 $\bar{x}=\dfrac{1}{5}(10.5+11+\cdots+12.8)=11.6$，

$s^2=\dfrac{1}{4}[(10.5-11.6)^2+(11-11.6)^2+\cdots+(12.8-11.6)^2]=0.9975^2$，$n=5$，$t_{0.025}(4)=2.7764$，

故μ 的 95%置信区间为 $(11.6-2.7764\times\dfrac{0.9975}{\sqrt{5}},11.6+2.7764\times\dfrac{0.9975}{\sqrt{5}})=(10.3615,12.8385)$.

3．设有两台机床用来生产规格相同的铝合金薄板．随机选取每台机床轧制的产品若干张，测得它们的厚度（单位：cm）如下：

机器 I：0.243, 0.238, 0.248, 0.245, 0.236, 0.241, 0.239，

机器 II：0.261, 0.254, 0.255, 0.257, 0.253, 0.250，

设两台机床所生产的薄板的厚度服从方差相等的正态分布．试给出两台机床生产的铝合金薄板平均厚度差的置信系数为 95%的置信区间．

解：两个正态总体，未知 σ_x^2,σ_y^2（但 $\sigma_x^2=\sigma_y^2$），估计$\mu_x-\mu_y$，均值差$\mu_x-\mu_y$ 的点估计为 $\bar{X}-\bar{Y}$，

枢轴量为 $T=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{n+m-2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}\sim t(n+m-2)$，

置信系数 $1-\alpha=0.95$，置信区间为 $(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n+m-2)\cdot\sqrt{\dfrac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{n+m-2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}})$，

因 $\bar{x}=\dfrac{1}{7}(0.243+0.238+\cdots+0.239)=0.2414$，$\bar{y}=\dfrac{1}{6}(0.261+0.254+\cdots+0.250)=0.255$，

$s_x^2=\dfrac{1}{6}[(0.243-0.2414)^2+(0.238-0.2414)^2+\cdots+(0.239-0.2414)^2]=0.0042^2$，

$s_y^2=\dfrac{1}{5}[(0.261-0.255)^2+(0.254-0.255)^2+\cdots+(0.250-0.255)^2]=0.0037^2$，

$n=7$，$m=6$，$t_{0.025}(11)=2.2010$，

故μ 的 95%置信区间为

$$(0.2414-0.255\pm2.2010\cdot\sqrt{\frac{6\times0.0042^2+5\times0.0037^2}{11}}\cdot\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{6}})=(-0.0185,-0.0087)\ .$$

4. 由容量为 15，取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的随机样本算得 $\bar{x}=3.2, s^2=4.24$，确定σ^2和σ的置信系数 90%的置信区间.

解：单个正态总体，估计σ^2，总体方差σ^2的点估计为 S^2，枢轴量为 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，

置信系数 $1-\alpha=0.90$，置信区间为 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$，

因 $s^2=4.24$，$n=15$，$\chi^2_{0.05}(14)=23.685$，$\chi^2_{0.95}(14)=6.571$，

故σ^2的 90%置信区间为 $\left(\dfrac{14\times4.24}{23.685},\dfrac{14\times4.24}{6.571}\right)=(2.5062, 9.0336)$；

σ的 90%置信区间为 $(\sqrt{2.5062},\sqrt{9.0336})=(1.5831, 3.0056)$.

5. 设有两个化验员 A 和 B 独立对某种聚合物中的含氯量用同一种方法各做了 10 次测定，其测定值的方差分别为 $s_A^2=0.512, s_B^2=0.665$. 假定各自的测定值均服从正态分布，方差分别为σ_A^2和σ_B^2，求$\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$的置信系数为 0.90 的置信区间.

解：两个正态总体，估计$\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$，方差比$\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$的点估计为$\dfrac{S_A^2}{S_B^2}$，枢轴量为 $F=\dfrac{S_A^2/\sigma_A^2}{S_B^2/\sigma_B^2}\sim F(n-1,m-1)$，

置信系数 $1-\alpha=0.90$，置信区间为

$$\left(\frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1,m-1)},\frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)}\right)=\left(\frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}(n-1,m-1)},\frac{S_A^2}{S_B^2}\cdot F_{\alpha/2}(m-1,n-1)\right),$$

因 $s_A^2=0.512, s_B^2=0.665$，$n=10$，$m=10$，$F_{0.05}(9,9)=3.18$，

故$\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$的置信系数为 0.90 的置信区间为 $\left(\dfrac{0.512}{0.665}\times\dfrac{1}{3.18},\dfrac{0.512}{0.665}\times3.18\right)=(0.2421, 2.4484)$.

6. 设枪弹的速度（单位：米/秒）服从正态分布．为了比较两种枪弹的速度，在相同的条件下进行了速度测定．算得数据如下：

枪弹甲：$m=110$，$\bar{x}=2810$，$s_x=121.41$；枪弹乙：$n=100$，$\bar{y}=2682$，$s_x=105.06$.

试求这两种枪弹的平均速度之差的置信系数近似为 95%的置信区间.

解：两个正态总体，未知σ_x^2,σ_y^2（大样本），估计$\mu_x-\mu_y$，均值差$\mu_x-\mu_y$的点估计为 $\bar{X}-\bar{Y}$，

大样本情形下枢轴量为$T=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{m}+\dfrac{S_y^2}{n}}}\dot{\sim}N(0,1)$，

置信系数 $1-\alpha=0.95$，置信区间为 $\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{S_x^2}{m}+\dfrac{S_y^2}{n}},\bar{X}-\bar{Y}+u_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{S_x^2}{m}+\dfrac{S_y^2}{n}}\right)$，

因 $m=110$，$\bar{x}=2810$，$s_x=121.41$，$n=100$，$\bar{y}=2682$，$s_x=105.06$，$u_{0.025}=1.96$，

故$\mu_x-\mu_y$的 95%置信区间为$(2810-2682\pm 1.96\times\sqrt{\frac{121.41^2}{110}+\frac{105.06^2}{100}})=(97.36,158.64)$.

复习题六

1． 设$X_1,\cdots,X_n$为来自总体X的样本，X的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta^2}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中θ（>0）是未知参数．试求参数θ的矩估计量．

解：因$E(X)=\int_0^\theta x\cdot\frac{2}{\theta^2}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\theta^2}(\frac{\theta}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3)\Big|_0^\theta=\frac{2}{\theta^2}(\frac{\theta^3}{2}-\frac{\theta^3}{3})=\frac{\theta}{3}$，有$\theta=3E(X)$，

故θ的矩估计为$\hat{\theta}=\bar{X}$.

注：此题有误，密度函数非零取值范围应为$0<x<\theta$.

2． 伯莱托（Pareto）分布是常用于研究收入的模型，其分布函数为

$$F(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\theta_1}{x}\right)^{\theta_2}, & x\ge\theta_1,\\ 0, & x<\theta_1,\end{cases}$$

其中$\theta_1>0$，$\theta_2>0$．若随机样本$X_1,\cdots,X_n$取自该分布，求θ_1与θ_2的极大似然估计量．

解：伯莱托分布的密度函数为

$$f(x;\theta_1,\theta_2)=F'(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\theta_2\cdot\dfrac{\theta_1^{\theta_2}}{x^{\theta_2+1}}, & x\ge\theta_1,\\ 0, & x<\theta_1,\end{cases}$$

则$L(\theta_1,\theta_2)=f(x_1;\theta_1,\theta_2)f(x_2;\theta_1,\theta_2)\cdots f(x_n;\theta_1,\theta_2)=\theta_2\frac{\theta_1^{\theta_2}}{x_1^{\theta_2+1}}\cdot\theta_2\frac{\theta_1^{\theta_2}}{x_2^{\theta_2+1}}\cdots\theta_2\frac{\theta_1^{\theta_2}}{x_n^{\theta_2+1}}=\theta_2^n\frac{\theta_1^{n\theta_2}}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta_2+1}}$，

即$\ln L(\theta_1,\theta_2)=n\ln\theta_2+n\theta_2\ln\theta_1-(\theta_2+1)\ln(x_1x_2\cdots x_n)$，显然$\theta_1$越大，$\ln L(\theta_1,\theta_2)$就越大，且$x_i\ge\theta_1$，

故θ_1的极大似然估计量为$\hat{\theta}_1=\min\{X_1,\cdots,X_n\}=X_{(1)}$；

令$\frac{\partial\ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}=n\cdot\frac{1}{\theta_2}+n\ln\theta_1-\ln(x_1x_2\cdots x_n)=0$，得$\theta_2=\frac{n}{\ln(x_1x_2\cdots x_n)-n\ln\theta_1}=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\ln x_i-\ln\theta_1}$，

故θ_2的极大似然估计量为$\hat{\theta}_2=\frac{1}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n\ln X_i-\ln X_{(1)}}$.

3． 设总体X的概率密度为

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}4\alpha^{-3}\pi^{-1/2}x^2e^{-x^2/\alpha^2}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

试求参数α的矩估计和极大似然估计，并证明矩估计量是无偏的．

解：因$E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot 4\alpha^{-3}\pi^{-1/2}x^2e^{-x^2/\alpha^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}2\alpha^{-1}\pi^{-1/2}x^2\cdot(-1)\mathrm{d}e^{-x^2/\alpha^2}$

$$=-2\alpha^{-1}\pi^{-1/2}x^2\mathrm{e}^{-x^2/\alpha^2}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2\alpha^{-1}\pi^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/\alpha^2}\mathrm{d}(x^2)=0+(-2\alpha\pi^{-1/2}\mathrm{e}^{-x^2/\alpha^2})\Big|_0^{+\infty}=2\alpha\pi^{-1/2},$$

故$\alpha=\dfrac{\mathrm{E}(X)}{2\sqrt{\pi}}$，$\alpha$ 的矩估计为 $\hat{\alpha}=\dfrac{\overline{X}}{2\sqrt{\pi}}$；

因$L(\alpha)=f(x_1;\alpha)f(x_2;\alpha)\cdots f(x_n;\alpha)=4\alpha^{-3}\pi^{-1/2}x_1^2\mathrm{e}^{-x_1^2/\alpha^2}\cdot4\alpha^{-3}\pi^{-1/2}x_2^2\mathrm{e}^{-x_2^2/\alpha^2}\cdots4\alpha^{-3}\pi^{-1/2}x_n^2\mathrm{e}^{-x_n^2/\alpha^2}$

$$=4^n\alpha^{-3n}\pi^{-n/2}(x_1x_2\cdots x_n)^2\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^n x_i^2\Big/\alpha^2},$$

即$\ln L(\alpha)=n\ln4-3n\ln\alpha-\dfrac{n}{2}\ln\pi+2\ln(x_1x_2\cdots x_n)-\dfrac{1}{\alpha^2}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$，

令$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}=-3n\cdot\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{2}{\alpha^3}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2=0$，得$\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{3n}\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}$，

故α 的极大似然估计为$\hat{\alpha}=\sqrt{\dfrac{2}{3n}\sum\limits_{i=1}^n X_i^2}$；

4．设总体 X 的密度函数为

$$f(x;\lambda)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\lambda|},\quad -\infty<x<+\infty,$$

试求参数λ（$-\infty<\lambda<+\infty$）的极大似然估计量.

解：$L(\lambda)=f(x_1;\lambda)f(x_2;\lambda)\cdots f(x_n;\lambda)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x_1-\lambda|}\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x_2-\lambda|}\cdots\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x_n-\lambda|}=\dfrac{1}{2^n}\mathrm{e}^{-\sum\limits_{i=1}^n|x_i-\lambda|}$，

即$\ln L(\lambda)=-n\ln2-\sum\limits_{i=1}^n|x_i-\lambda|$，设顺序统计量为 $x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)}$，并且记 $x_{(0)}$为$-\infty$，$x_{(n+1)}$为$+\infty$，

不妨设 $x_{(k)}\le\lambda<x_{(k+1)}$，$k=0,1,\cdots,n-1,n$，

则$\ln L(\lambda)=-n\ln2-\sum\limits_{i=1}^k(\lambda-x_i)-\sum\limits_{i=k+1}^n(x_i-\lambda)=-n\ln2-k\lambda+\sum\limits_{i=1}^k x_i-\sum\limits_{i=k+1}^n x_i+(n-k)\lambda$

$$=-n\ln2+(n-2k)\lambda+\sum_{i=1}^k x_i-\sum_{i=k+1}^n x_i,$$

若$k<\dfrac{n}{2}$，有 $n-2k<0$，$\ln L(\lambda)$关于λ 单调增加，若$k>\dfrac{n}{2}$，有 $n-2k<0$，$\ln L(\lambda)$关于λ 单调减少，

当 n 为偶数时，取$k=\dfrac{n}{2}$，$\ln L(\lambda)$在 $x_{\left(\frac{n}{2}\right)}\le\lambda<x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ 时达到最大，（由连续性知$\lambda=x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$时也达到最大），

故当 n 为偶数时，λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda}$ 为区间$[X_{\left(\frac{n}{2}\right)},X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}]$上的任何值；

当 n 为奇数时，取$k=\dfrac{n-1}{2}$，$\ln L(\lambda)$在 $x_{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\le\lambda<x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ 时单调增加，

取$k=\dfrac{n+1}{2}$，$\ln L(\lambda)$在 $x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\le\lambda<x_{\left(\frac{n+3}{2}\right)}$ 时单调减少，

即 $\ln L(\lambda)$ 在 $\lambda = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ 时达到最大，

故当 n 为奇数时，λ 的极大似然估计量 $\hat{\lambda} = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

5．设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \cdots, X_n$ 是 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，求常数 c 和 d，使 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 与 $d\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|$ 分别为 σ^2 和 σ 的无偏估计.

解：因 $\mathrm{E}(X_i)=\mu$，$\mathrm{E}(X_i^2)=\mathrm{D}(X_i)+[\mathrm{E}(X_i)]^2=\sigma^2+\mu^2$，

则 $\mathrm{E}\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=c\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{E}(X_{i+1}^2+X_i^2-2X_iX_{i+1})=c\sum_{i=1}^{n-1}[\mathrm{E}(X_{i+1}^2)+\mathrm{E}(X_i^2)-2\mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_{i+1})]$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}[(\sigma^2+\mu^2)+(\sigma^2+\mu^2)-2\mu^2]=c\cdot(n-1)\cdot 2\sigma^2=2c(n-1)\sigma^2,$$

故当 $c=\dfrac{1}{2(n-1)}$ 时，$\mathrm{E}\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=\sigma^2$，$\dfrac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计；

因 $X_i-\overline{X}=X_i-\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j=\dfrac{n-1}{n}X_i-\dfrac{1}{n}\sum_{j\neq i}X_j$，有 $X_i-\overline{X}$ 服从正态分布，

且 $\mathrm{E}(X_i-\overline{X})=\mathrm{E}(X_i)-\mathrm{E}(\overline{X})=\mu-\mu=0$，

$$\mathrm{D}(X_i-\overline{X})=\frac{(n-1)^2}{n^2}\mathrm{D}(X_i)+\frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i}\mathrm{D}(X_j)=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

则 $X_i-\overline{X}\sim N(0,\dfrac{n-1}{n}\sigma^2)$，$\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\sigma}\sim N(0,1)$，

记 $Y=\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\sigma}$，有 $Y\sim N(0,1)$，

则 $\mathrm{E}(|Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=2\int_0^{+\infty}y\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=-2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}$，

即 $\mathrm{E}(|X_i-\overline{X}|)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\sigma$，$\mathrm{E}(d\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|)=d\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(|X_i-\overline{X}|)=d\cdot n\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\sigma$，

故当 $d=\sqrt{\dfrac{2n(n-1)}{\pi}}$ 时，$\mathrm{E}\left[d\sum_{i=1}^{n}|X_i-X|\right]=\sigma$，$\sqrt{\dfrac{2n(n-1)}{\pi}}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\overline{X}|$ 为 σ 的无偏估计.