

摘 要

在高层建筑、桥梁、海上平台和核电站等工程中广泛采用了桩基础。由于桩和土的相互作用，桩基础的荷载传递、变形及运动都很复杂，其非线性力学分析、数值模拟和实验都很困难。虽然已有许多论文分析了桩基的线性振动和动力响应，但对于桩基，特别是对于桩和土都是非线性弹性和粘弹性材料时的非线性动力学行为和非线性振动研究的论文很少。

本文在假设桩基和桩周土体材料均为非线性弹性和线性粘弹性材料的情况下，基于广义 Winkler 模型建立了桩基轴向和横向非线性动力学特性分析的数学模型，利用复模态分析法、多时间尺度法、伽辽金平均化方法以及非线性动力系统中的分析方法研究了桩基的线性和非线性动力学特性，包括振动特性、位移响应、分岔和混沌等，考察了材料和结构等多种参数对桩基动力学特性的影响，揭示了一些新现象，给出了一些新结果。主要研究工作和成果如下：

(1) 假定桩基材料和桩周土体材料均满足 3 次非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系，并根据广义 Winkler 模型，分别建立了分析桩基轴向和横向非线性动力学特性的偏微分方程，并给出了相应的初边值条件。

(2) 研究了桩基轴向和横向振动的振动模态及固有频率。采用复模态分析等方法，得到了线性粘弹性桩基轴向和横向振动的 n -阶振动模态、固有频率与振动响应的精确表达式。桩基轴向和横向振动的固有频率不仅与边界条件和粘性阻尼有关，而且也与桩周土体的刚度系数等有关。

(3) 假定桩基和桩周土体材料的线性粘弹性性质都比较弱的情况下，用四阶多时间尺度方法得到了一端固定、另一端自由的线性粘弹性桩基轴向自由振动的 n -阶固有频率和位移响应的近似表达式。研究表明，当阻尼比较小时，由四阶多尺度方法得到的固有频率近似值与由复模态法得到的精确值之间的误差很小。

(4) 假定桩基和桩周土体材料的非线性弹性性质都比较弱的情况下，利用多时间尺度法分析了桩基的非线性轴向和横向振动特性，得到了桩基非线性轴向自由振动和横向自由振动的 n -阶主频率和位移响应的近似表达式，给出了数值算例，考察了参数的影响。研究结果表明，非线性系统的 n -阶主频率不仅与线性系统的 n -

阶固有频率有关，而且也与振幅、阻尼系数和材料的非线性特征量有关；系统的响应中除含有主频率的谐波外，还含有 2 倍、3 倍的主频率的高次谐波和二个或三个主频率的和或差的谐波存在。

(5) 在假设桩基和土材料的非线性弹性和线性粘弹性性质都比较弱的情况下，用多时间尺度法得到了一端固定、另一端自由的桩基非线性轴向受迫振动系统主共振时的稳态幅频响应曲线和失稳边界曲线，分析了系统主共振时稳态响应的稳定性。给出了数值算例，绘制了粘性非线性系统前两阶固有频率附近的幅频响应曲线，讨论了非线性系数、粘性系数和激励振幅等参数对幅频响应曲线的影响。

(6) 假定桩基及桩周土体材料满足 3 次非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系，利用 Galerkin 平均化方法研究了给定桩顶竖向动位移的嵌岩桩的非线性轴向动力学行为。得到了不同参数时 Galerkin 简化系统的时程曲线、相平面图、功率谱图、Poincare 截面和分岔混沌图等。考察了参数对简化系统的动力学特性的影响。结果表明，嵌岩桩的非线性轴向运动形态，可以呈现周期运动、准周期运动、分岔或阵发性混沌运动等运动形态。

(7) 假定桩基及桩周土材料满足 3 次非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系，在桩顶给定横向动位移、动转角的条件下，利用 Galerkin 平均化方法研究了桩基的非线性横向运动的动力学行为。得到了简化系统的时程曲线、相平面图、功率谱图、Poincare 截面图和分岔混沌图，考察了参数对桩基横向非线性动力学特性的影响。研究表明，桩基的非线性横向运动形态可以呈现周期运动、准周期运动、分岔或阵发性混沌运动等运动形态。

关键词：桩基，非线性动力学特性，非线性振动，多时间尺度法，Galerkin 方法，固有频率，主共振，分岔和混沌

ABSTRACT

The pile foundations are widely used in engineering, such as, high-rise building, bridge, offshore platform and nuclear power station. It is very difficult to perform the nonlinear mechanical analysis, numerical simulation and experiment of piles due to the complexity of the interaction between the pile and the soil, the load transfer, deformation and motion. Although there are many papers on linear vibrations and the dynamic response of piles, there are few papers on nonlinear dynamic behaviors and nonlinear vibrations of piles, especially, both the materials of the pile and the soil are nonlinear elastic and viscoelastic ones.

In the present thesis, under the assumption that both the materials of the pile and the soil around the pile are nonlinear elastic and linear viscoelastic ones, the mathematics models analyzing the nonlinear dynamic characteristics of piles are established using generalized Winkler models, and the linear and nonlinear dynamic characteristics of piles are studied using the plural mode method, the method of multiple time scales, Galerkin method, bifurcation and chaos analysis method and so on. The effects of parameters on the nonlinear dynamic characteristics of piles are considered and some new results are given.

The main research contents are as follows:

(1) On the basis of generalized Winkler models, the nonlinear partial differential equation governing the nonlinear vibration of piles are derived under the assumption that both the materials of the pile and the soil around the pile obey nonlinear elastic and linear viscoelastic constitutive relations, and the relevant boundary conditions and the initial conditions are given.

(2) An accurate expressions of the n th-order vibration mode, the natural frequency and the displacement response of the axial and transverse vibration of piles are presented by the plural mode method. Results show that the natural frequency of the axial and transverse vibration of piles is related to not only the damping coefficient and the boundary conditions, but also the soil rigidity.

(3) When both the viscidities of materials of the pile and the soil around the pile are weak and the non-linearities of materials can be neglected, the approximate expressions of the n th-order natural frequency and the displacement response of the axial vibration of piles are obtained by the method of multiple time scales with order 4. Research results show that the natural frequency is related to not only the damping coefficient, but also the soil rigidity.

(4) Under the assumption that both the nonlinear characters of materials of the pile and the soil are weak, the approximate expressions of the n th-order main frequency and the displacement response of the nonlinear axial and transverse vibration of piles are obtained by the method of multiple time scales, respectively. Numerical examples are implemented and the effects of parameters are considered. Research results show that the main frequency of the nonlinear system is related to not only the natural frequency of linear vibration system, but also the amplitude, damping coefficient and nonlinearity of materials. There are high order harmonic waves with double and triple of the main frequency as well as sum and/or difference of 2 or 3 main frequencies besides the harmonic waves with the main frequency in the response of nonlinear systems.

(5) Under the assumption that all the nonlinear elastic characters and the linear viscoelastic characters of materials of the pile and the soil are weak, the steady-state frequency-response curves for the primary resonances of the nonlinear axial forced vibration of piles are presented by the method of multiple time scales. The stability of the steady-state response for the primary resonances of the nonlinear system is investigated. Numerical examples are given and the effects of the material nonlinearity, the damping coefficient and the amplitude of the excitation on the frequency-response curves are considered.

(6) Under the assumption that the axially periodic displacement at the top of pile is given, the nonlinear partial differential equation for motion of piles is derived under the assumption of both the materials of the pile and the soil around the pile obey nonlinear elastic and linear viscoelastic constitutive relations. The Galerkin method is used to

simplify the equation and to obtain a nonlinear ordinary differential equation. The methods in nonlinear dynamics are applied to solve the simplified dynamical system, and all the time-path curves, phase-trajectory diagrams, power spectrum, Poincare sections, and bifurcation and chaos diagrams of the simplified system are obtained. The effects of parameters on the dynamic characteristics of the system are also considered in detail. Research results show that a pile embedded in rock may present different motion shapes included periodic motion, quasi-periodic motion, bifurcation or chaotic motion and so no.

(7) The nonlinear transverse motion of piles embedded in rock is studied. Here, we assume that both the materials of the pile and soil obey nonlinear elastic and linear viscoelastic constitutive relations and that a transverse periodic displacement at the top of the pile is given. The initial-boundary value problem is firstly set up which is a nonlinear partial differential equation. Galerkin method is used to simplify the governing equation and to obtain a simplified dynamic system. All the time-path curves, phase-trajectory diagrams, power spectrum, Poincare sections, and bifurcation and chaos diagrams are obtained. The effects of parameters on the nonlinear characteristics are considered in detail. Research results show that a pile embedded in rock may present different motion shapes included periodic motion, quasi-periodic motion, bifurcation or chaotic motion and so no.

Keywords: piles, nonlinear dynamic characteristics, nonlinear vibration, method of multiple time scales, Galerkin method, natural frequency, primary resonances, bifurcation and chaos.

原创性声明

本人声明：所提交的论文是本人在导师指导下进行的研究工作。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已发表或撰写过的研究成果。参与同一工作的其他同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签名：胡春林 日期：2006.10.12

本论文使用授权说明

本人完全了解上海大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留论文及送交论文复印件，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

签名：胡春林 导师签名：程明 日期：2006.10.12

第一章 绪论

1.1 课题来源

本课题来源于国家自然科学基金项目，项目编号：50278051。也得到上海市重点学科建设项目(Y0103)和武汉理工大学相关科研项目的资助。

1.2 研究的背景和意义

高层建筑、重型厂房、机械基础、公路桥梁、水利设施和核电站等工程中，常会遇到桩基受到有动荷载的作用，使其产生振动。海洋钻井平台等近海工程的桩基经常受到波浪荷载、冰荷载和风荷载等强烈环境荷载的联合作用，因而可能发生较大的变位和振动。但是，由于桩和土的相互作用，桩基础的荷载传递、变形及运动都很复杂，其非线性力学分析、数值模拟及实验都很困难。长期以来，人们主要是靠定性分析、简化的数值分析和经验方法来解决实际问题。由于分析计算的精度比较低，不得不通过大量的现场试验或施工摸索来逐步修正设计方案，实际花费的代价非常之大，甚至至今仍有许多问题无法解决^[1-4]。近 20 年来由于桩基在工程中广泛的应用，特别是在一些地震多发的国家和地区，在一些与动荷载相关的桩土结构物设计计算等领域，人们对桩基动力学分析、数值模拟、试验检测等研究的兴趣大增，所以，桩基动力学已越来越引起了人们的密切关注^[5-10]。

粘弹性力学是现代连续统力学的一个重要组成部分，在材料工程、土木工程、岩土工程、海洋工程、宇航工程、生物工程、能源工程、机械工程和生物等工程中正愈来愈显示出非常广阔的应用前景。粘弹性材料既展现瞬时弹性效应又显示蠕变特征，与传统的弹性材料的最本质的不同是它们的力学性质强烈地依赖于时间和温度，材料具有记忆特征，变形或应力不仅与现时的应力值或应变值有关，而且与以往过去的历史有关，与应力率或应变率有关，在动态的情况下，还明显地依赖于频率，使得其理论分析和应用研究都显得十分困难。研究这种材料及其结构的动力学特性具有重要的理论意义和工程实用价值。

本课题综合利用数学、力学和工程科学中的理论和方法来解决桩基非线性振动及非线性动力学特性分析中的一些问题，希望在桩基动力学分析的非线性数学模型，桩基非线性振动和非线性动力学特性包括分岔和混沌现象等方面获得一些

新结果。

1.3 有关领域的研究现状

1.3.1 桩基动力学及振动研究

和桩基静力分析的理论和方法相比较,桩基动力学的研究发展相对显得不足,大约起步于二十世纪七十年代。Mizuno(1987)^[6]综述了日本地震过程中的桩基破坏形式,例如振动效应,液化及运动等,在其它地区的地震记录中这些破坏形式也都能观察到。因此需要对桩基进行详细的动力学分析,以提供桩基设计的更适当的理论基础。关于桩基动力学特性的研究已有不少工作,其中上世纪九十年代前的主要工作被系统总结在 Novak(1991)^[7]的综述报告中,并给出了约 150 余篇参考文献,系统介绍了单桩和群桩在地震载荷作用下线性和非线性动力学的一些理论、计算方法以及一些定性的结论,并比较了各种理论的优缺点,考察了桩-桩,土-桩-承台,土-桩-结构,土的液化及相互影响等。在 Miura(2002)^[8]的综述报告中,用许多桩基破坏的实例说明了桩基静动力学非线性分析的必要性,并指出桩基静动力学的非线性分析是桩基设计的更适当的理论基础。

连续介质力学方法是桩基动力学研究的最主要方法之一。连续介质力学方法基于连续介质理论来建立桩基动力学分析的数学模型,其中,桩和土的材料可以是弹性、粘弹性和弹塑性材料等。由于这种方法概念清楚、理论性强,因而在国际上比较流行,得到了比较广泛的认同,但用该法较难得到解析解或半解析解。

Tajimi(1969)^[6]采用了连续体模型来模拟土体,以后众多学者对这一理论方法作了进一步的研究。Novak(1974)^[11]基于平面应变假设,将土体看成线性粘弹性半空间体,运用连续介质力学,研究了在线性粘弹性土体中桩-土的相互作用,在其后的一系列文献^[12-13]中又发展和完善了他的理论。Matter 和 Poulos(1969, 1971)^[14-16]假定土体为连续弹性体,在弹性半空间中得到了垂直和水平单位荷载作用下土体位移的 Mindlin 积分解,讨论了单桩的力学特性。Novak(1978)^[17]等在假设桩土完全接触不分离和小变形等条件下,求得了桩周土体的动刚度和阻尼参数的表达式。Kuhlemeyer(1979)^[18]对土体模型进行了讨论,给出了桩纵向振动的复刚度,并将所得到的解析解结果和有限元计算结果作了对比,结果显示在工程上感兴趣的频率范围内,两者吻合较好。Novak(1983)^[19]等认为,在一定条件下 Novak 平面应变土

模型可以为常系数粘滞阻尼和频率无关线性弹簧并联（Vogit 体和 Maxwell 体）模型近似等效代替。Roesset(1984)^[20]等人基于非均匀土的假设，对桩基进行了动力学及参数的研究，并发展了有限元方法。Aboal-Ella(1993)^[21]将均匀土的平面应变方法推广到层状介质，得到了一个既简单又多用途的解。Nogami 与 Novak(1987)^[22,23]在考虑了桩土纵向共同作用的基础上，假设桩周土无径向位移，波同时从桩表面以纯剪切波的形式向桩周土径向辐射传播，桩尖为刚性支撑，求得了桩、土复刚度及桩土位移和频率的表达式。Rajapakse(1987)^[24]采用格林函数法分析了弹性半空间中桩及土的动力特性。Liu^[25]（1994）等采用有限元方法求解了横观各向异性成层土中桩的动力响应问题。Sen(1985)等、Kishnan(1983)等、Rajapakse(1988)、Mamoon(1990)等也分别用解析法或数值方法求解了成层土或非均质土条件下桩的简谐振动问题^[26-29]。Chau 和 Yang(2005)^[30]假设嵌岩桩桩周土体的内层土区是非线性的而内层土区之外为线性的粘弹性土体，建立了一种分析圆形桩在水平振动下的桩土非线性相互作用的力学模型。胡和程(2005)^[31]将桩-土系统看成一个嵌入桩基的粘弹性半空间，在空间柱坐标系中建立了非线性桩-土相互作用的数学模型—桩土耦合的非线性边值问题。在频率域内研究了水平振动下桩基的非线性动力学特性，研究了多种参数对桩基动力学特性的影响。

模型试验及现场试验研究方法是桩基静动力学研究的另一类主要方法。Novak(1974)^[32]利用小模型桩进行了桩基动力特性试验研究。Reese（1975）^[33]、O'Neill(1982)^[34]用试验方法得到了土的非线性作用曲线，对桩土的非线性行为进行了研究。Nabil(1990)^[35]、Okahara(1994)^[36]和 Rollins(1998)^[37]等用试验方法研究了受横向荷载作用的砂土和粘土中的桩基的特性。

地基反力系数法应用 Winkler 等地基模型，把桩周土离散为一个个单独作用的弹簧。某一弹簧受力时，仅该弹簧发生与作用力成正比例的压缩而和其他弹簧无关。这种把地基土看作非连续介质且地基反力系数在整个位移过程中均为常数的假定虽与实际不符，但和目前较复杂的一些其它解析方法相比较，它在许多情况(例如当基础的容许位移值较小时)仍可得出接近实际的结果。Nogami(1987)^[22]、El Naggar(1996)^[38]等相继对动力 Winkler 地基梁模型开展了一些研究。该模型的局限性是仅通过水平弹簧和水平阻尼器来考虑土对桩的动力作用，较难反映土中应力

波的传播及软化、液化等土体动力学性状变化。Blancy(1976)^[39]和 Kuhlemeyer (1979)^[40]在频率域内对线弹性桩-土系统的动力响应问题进行了分析。Angelides 和 Roesset(1981)^[41]在某种条件下提出了非线性粘弹性的线性化方法, 对非线性的桩-土系统进行了研究。

Matlock(1970)和 Reese(1975)^[33]考虑到土抗力集度 P 的非线性特点, 提出了反力—挠度曲线法, 即 P - Y 曲线法。 P - Y 曲线能够比较如实地把地基的非弹性性质, 及由地表开始的进行性破坏现象反映到桩基的计算中。它不仅可适用于静力的短期荷载和循环的反复荷载, 也适用于任意尺寸、刚度和嵌固状态的桩基在发生了弹性变形以至产生塑性变形和达到或超过剪切破坏时的内力和变位计算。在海域工程结构中, P - Y 曲线法已有较广泛的使用, 它克服了单一参数法(如 m 法)计算水平承载桩, 所得挠度、转角和桩身最大弯矩不能同时与桩的实测数据和边界条件很好地吻合的缺点, 解决了桩基发生大变位时土压力和位移成线性关系的求解方法与实际土的非线性反映不相适应的问题, 能比较全面地反映桩基的工作性状^[42-44]。Reese (1975)^[33]等人通过试验得到的土对桩的特殊曲线来描述土的非线性作用, 根据试桩资料提出试桩地区 P - Y 曲线与现场及室内试验参数的关系。Kraft(1981)^[45]、Gazioglous 和 O'Neill(1984)^[46]用各种理论 P - Y 曲线来描述不同性质的土层。

1984 年河海大学在上海近郊的饱和粘性土上完成了一系列不同尺度的受横向荷载桩的现场试验, 提出了粘土中横向静载桩 P - Y 曲线新的统一法和粘土中横向周期荷载桩的 P - Y 曲线统一法^[47,48]。章 (1991)^[49]等通过室内模型试验, 讨论了粘性土中 P - Y 曲线的计算方法。程 (1997)^[50,51]基于 P - Y 曲线法考虑桩土相互作用的高桩结构物, 对横向力作用下高桩结构物进行了分析。胡 (2001)^[52]等用 P - Y 曲线法计算了板桩结构。杨和张 (2002)^[53]对大变位条件下横向受力桩的 P - Y 曲线进行了研究。

P - Y 曲线法虽然原理简单、计算可信度较高、实用范围较广, 特别是对于复杂工况下桩基力学特性的研究, 有较大的用途。但是由于其试验成本昂贵, 故只能在部分工程中得到应用。

近十年, 人们对桩基非线性振动问题研究的兴趣有增无减。Balachandran 和

Nayfeh(1994)等^[54]总结了结构中的非线性相互作用现象,包括带有相互联系振荡器的结构的自由振动。El Naggar 和 Novak(1996)^[38]研究了在瞬态动力荷载和简谐荷载作用下桩的横向响应,考虑了桩-土交界面上的不连续条件和不同阻尼方式下的能量耗散。Nayfeh 和 Lacarbonara(1997)^[55]讨论了作用在非线性弹性基础上欧拉—伯努利梁的振动的近似分析方法,研究了主共振和次谐波共振。王和谢(1997)^[56]得到了有限长桩受迫振动问题的解析解;王和王等(2000)^[57]得到了任意变截面桩纵向振动的半解析解;刘 (2000)^[58]研究了非均匀土中多缺陷桩的轴向动力响应问题;黄和舒等(2002)^[59]综述了近几年桩基础抗震研究的现状;王和应(2003)^[60]探讨了广义 Voigt 土模型条件下桩的纵向振动响应与应用。

与线性系统的特殊情形相比,非线性系统具有更为复杂的性质。首先,线性系统研究中经常采用的叠加原理对非线性系统不适用。其次,非线性系统运动的周期不像线性系统那样仅由系统特性确定,一般还与初始条件等有关。第三,非线性系统可能具有多个平衡位置和稳态运动,系统的动力学行为既取决于这些平衡位置和稳态运动的稳定性,也与初始条件有关。第四,对工程中的非线性机械、结构和机电系统,系统的响应与激励频率存在复杂的依赖关系。最后,线性系统仅存在周期运动和准周期运动两种有限运动,非线性系统存在分岔和混沌等复杂运动现象。

1.3.2 结构稳定性分析及分岔与混沌

在近海工程与海港工程中大量采用的桩基结构物,在恶劣海况的强烈动荷载作用下可能会进入非线性状态并危及结构物的安全。因此,有必要对在动荷载作用下桩基的非线性特性给予高度的重视,并深入开展这方面的研究。

结构的稳定性研究一直受到人们的关注,取得了大量的成果^[61,62],从准静态问题到动力学问题都有较深入的研究。程和朱(1989,1991)^[62,63]在分支理论及数值方法的研究,为结构稳定性的进一步研究提供了新方法和新观点。Cederbaum(1991)等^[64]利用最大 Lyapunov 指数法,研究了非线性粘弹性层合薄板的动力稳定性问题,考察了材料参数和几何参数对粘弹性薄板动力稳定性的影响。Cederbaum(1992)等^[65]用多尺度法研究了粘弹性柱和板的稳定性问题,得到了激励参数的临界值。Drozdzov(1994)^[66]在粘弹性力学的稳定性分析方面做了较系统的研究工作,提出了

一系列的判定条件。程(2001)等^[67]根据稳定性分析的 Floquet 理论, 给出了粘弹性环形板在周期激励下的稳定性判断条件。

分岔现象是指非线性系统的定性行为随着系统参数的改变而发生质的变化。分岔理论的研究不仅揭示了系统的各种运动状态之间的相互联系和转化, 而且也与混沌密切相关, 成为非线性动力学的重要组成部分。混沌是非线性动力学系统中存在的除平衡态和准周期运动以外的另一种特殊的运动形式^[68]。

由于非线性数学模型通常不能得到解析解, 数值方法、实验方法和计算机模拟方法紧密相联, 相互交叉和渗透, 成为研究和分析非线性问题的重要手段^[69,70]。图形化方法具有直观、易于观察和理解的特点, 为分析系统内部的复杂行为提供了直观有效的手段。混沌研究的常用方法有: 利用直接数值结果考察时程曲线、相图轨迹和吸引子结构的不规则性, 功率谱, Poincare 映射, 分岔图、李雅普诺夫指数, 分维数, 测度熵或拓扑熵, 胞映射法等^[70-72]。

对粘弹性结构的混沌运动的研究已有大量的成果, 主要是对粘弹性梁柱、板和壳的混沌运动的研究^[73-77]。Touati(1994)等^[78]研究了大变形条件下非线性粘弹性板的混沌运动, 考察了各种参数对混沌性态的影响。Suire 和 Cederbaum (1995)等^[79]研究了受横向正弦分布简谐荷载作用下简支大变形线性粘弹性柱的混沌运动, 发现了进入混沌运动的三种途径, 随着荷载幅值的增加会出现倍周期分岔, 对于特定的中性面应力, 混沌可能会突然出现, 随着粘弹性系数的增加会出现准周期环面破裂。丁(1997,1999)等^[80,81]研究了粘弹性板、壳在有限变形条件下丰富的动力学行为。Chen 和 Cheng(1999)等^[74]研究了粘弹性结构的混沌行为及混沌控制问题。陈和程(2000)^[76,77]分析了粘弹性柱和梁的运动稳定性和混沌运动, 发现其中有发生混沌运动的可能。Yang 和 Chen(2005)^[82]研究了轴向加速运动的粘弹性梁横向运动的分岔和混沌行为。Yao 和 Zhang(2005)^[83]研究了悬臂梁非线性非平面运动的 Shilnikov 轨迹及混沌动力学等问题。Ma 和 Liu(2005)等^[84]分析了弹塑性梁的不对称稳定性问题。Zhang 和 Wang(2005)等^[85]研究了悬臂梁非线性非平面振动的分岔及混沌动力学问题。Emans 和 Wiercigroch(2005)等^[86]研究了受冲击力作用的悬臂梁的混沌动力学, 进行了结构非线性特性的影响分析。Han 和 Zheng(2005)^[87]研究了大变形梁的混沌响应及对二阶模态的影响。Chen 和 Yang(2006)^[88]基于四阶

Galerkin 截断方法研究了轴向运动粘弹性梁的横向非线性动力学行为等问题。

在粘弹性桩基非线性振动和混沌运动方面, 其研究发展相对显得不足。贾和闫等 (2000)^[89]研究了桩基结构非线性复杂动力学行为; 禹 (2001)^[90]分析了单桩在轴向扰力作用下的混沌运动; 程和任(2004,2005)^[91,92]讨论了非线性粘弹性桩的横向混沌运动; 胡和程等(2005,2006)^[93,94]研究了非线性粘弹性桩的纵向混沌运动, 讨论了材料及结构参数对桩基非线性动力学特性的影响。

1.3.3 桩基粘弹性力学行为的研究

粘弹性力学在工程中的应用非常广阔^[95-97], 对粘弹性材料及其结构的力学特性的研究正愈来愈受到人们的高度关注。Cederbaum(1991)^[64,65,98,99]和 Drozdov(1994, 1996)^[66,100,101]以及 Potapov(1992,1996)^[102-104]等分别从解析和数值方法的角度讨论了线性粘弹性结构的稳定性。杨(1988,1990)^[96,105,106]、沈(1990,1994)^[107,108]、秦(1994,1996)^[109,110]对粘弹性结构的动力响应、计算方法、数学理论作过一些研究。上海大学程昌钧教授领导的课题组在粘弹性力学的理论、方法和应用等方面进行系统和深入的研究, 其中, 包括对粘弹性问题的数学模型、粘弹性结构的变分原理与对应原理、求解粘弹性问题的计算方法, 以及粘弹性结构的物理非线性及几何非线性的静动力学问题进行了大量的研究, 取得了重要的进展^[111-127]

Novak(1978)等^[17]给出了均匀线性粘弹性土层的动反力解析解。他们考虑了土的材料阻尼, 系统分析了在所有振动模态下土的动力复刚度, 此解答采用了平面应变假设, 只适用于刚性柱体在无限介质中的情况。Anestise(1985)^[128,129]在 Novak 模型的基础上提出了非线性粘弹性模型, 分析了在非线性粘弹性情况下桩土的相互作用。王(1998)^[130]考虑了桩体粘性的变阻抗桩受迫振动问题的解析解; 王等(2000)^[131]得到了多层土中变截面弹性桩纵向振动问题的半解析解; 王等(2001)^[132]得到了粘弹性桩纵向振动的积分变换解; 王(2002)^[133]分析了成层广义 Voigt 地基中粘弹性桩基的纵向振动; 程、胡和任等也对粘弹性桩基的动力学问题进行了研究^[31,91-94]。有关桩基粘弹性力学行为的研究以及粘弹性桩基非线性动力学特性方面研究的文献较少, 因此, 有待于进一步的研究。

1.3.4 结构动力学分析的有关方法

多时间尺度方法、Galerkin 平均化方法和有限元方法等是分析结构动力学的一

些主要方法。

多时间尺度方法实际上是摄动理论中平均法的推广。平均法是利用两种不同的时间尺度,将系统的振动分解为快变和慢变两种过程。将标志运动的主要参数,如振幅和初相角,在快变过程的每个周期内平均化,然后着重讨论其慢变过程。为了提高平均法的计算精度,可以将时间尺度划分得更为精细,由此发展为20世纪60年代的多尺度法。1957年Strooke^[134]提出了多时间尺度的概念,经过Nayfeh^[135]等人的发展和完善,成为一种十分有效的近似计算方法。与传统的摄动法相比,多尺度方法的明显优点是不仅能计算周期运动,而且能计算耗散系统的衰减振动;不仅能计算稳态响应,分析稳态响应的稳定性,而且能计算非稳态过程。Eisley(1966)^[136]综述了弹性梁、环和弦的非线性变形;Nayfeh(1973)^[137]利用多尺度方法分析了特性沿其长度慢变的梁的非线性自由振动;Rossikhin和Shitikova(1995)^[138]用多尺度法研究了钢箱梁悬索桥的非线性自由振动,讨论了初始条件对振动过程的影响。Nayfeh和Lacarbonara(1997)^[139]用伽辽金法和多尺度法求解在非线性弹性地基上的欧拉—伯努利梁的偏微分方程,振幅和相位模态方程表明单模态离散的方法会导致错误。Oucini, Nayfeh和Pratt(1999)^[140]用摄动技术研究了正交平板的非线性自由振动问题,用多尺度方法获得了方程的近似解。Oz(2000)^[141]用多时间尺度法分析了轴向运动梁的非线性振动并进行了稳定性分析,得到了非线性频率依赖于振幅的结论,分析了稳态解的稳定性和分岔。Emam和Nayfeh(2004)^[142]使用多模态伽辽金离散将非线性控制方程简化为一系列时间常微分方程,用多时间尺度法求解离散方程得到了二阶近似解,对离散方程进行积分,研究了周期轨道的稳定性和分岔。Chen和Yang(2005)^[143]研究了轴向运动下粘弹性梁的横向振动中的主参数共振,用多时间尺度法来求解方程得到稳态响应,通过可解性条件消除久期项来得到振动振幅的封闭解。Mahmoodi, Khadem和Jalili(2006)^[144]用多尺度法来研究粘弹性碳纤维加固悬臂梁运动的非线性方程,从理论和实验上比较了系统振动的结果。

李和陈等(2002)^[145]利用多尺度法构造了一个内共振非线性模态,系统除存在单模态运动外还存在耦合模态运动,耦合内共振模态具有分岔特性。陈和孙(2003)^[146]考虑拉索垂度及几何非线性的影响,用多尺度法对斜拉索的面内外耦合

非线性振动方程进行求解, 得出了面内外一阶模态耦合振动特性。肖(2003)等^[147]研究在简谐激励力作用下的悬垂缆线的谐波共振, 用多尺度法研究了悬垂缆线的超谐波共振和次谐波共振。冯和胡(2004)^[148]采用多尺度法研究了系统参激共振时的非线性调制方程组的定常解及其稳定性问题。杨(2004)^[149,150]利用多尺度法分析了轴向运动梁的振动及稳定性问题, 研究了次谐波共振及组合共振时的分岔行为和稳定性以及受迫共振的跳跃现象。

Galerkin 平均化方法虽然精度比较低, 但由于它具有独特的优点, 例如计算工作量较小, 适用范围广等, 仍不失为分析非线性弹性和粘弹性动力学问题的一种行之有效的方法。

Cederbaum(1991,1992)^[64,99]、Abhyankar(1993)^[151]、Suire(1995)^[79]、Touati(1994, 1995)^[78,152]等利用 Galerkin 方法研究了一系列粘弹性结构的静动力学问题。Ding(1997)^[80]、程(1998)^[153]、张(2000)^[154]、陈(2001)^[155]等利用 Galerkin 方法研究了大量的非线性粘弹性结构的静动力学问题, 得到了一系列有意义的新结果。然而, 目前为止, 尚无理论上的严格证明, 证明低阶 Galerkin 截断的合理性, 尽管有若干直接或间接的数值结果可以判断其合理性, Abhyankar(1993)等^[151]用 Galerkin 方法得到非线性简支梁的动力学性态与直接求解非线性偏微分方程得到的结果定性一致。Chen 和 Cheng(2000)^[156]研究了 Leaderman 非线性本构关系描述的非线性粘弹性梁的动力学行为, 用数值方法比较了 1 阶和 2 阶 Galerkin 截断系统的动力学行为, 证明两者定性性质相同。文献[154,157-159]都从数值计算的角度研究了低阶 Galerkin 截断的合理性。

由于桩基非线性力学的分析十分复杂, 直接得到解析解和半解析解是很困难的。因此常常采用数值计算方法, 包括有限元方法、样条有限元方法、边界元方法、有限元耦合法、差分法耦合法, 以及近 10 多年发展起来的无网格方法和微分求积方法等^[160-165]。

有限元法除了能较好的描述土中应力波的传播之外, 在处理土性的变化上也具有一定的灵活性。但是, 这一方法通常需要较大的计算工作量。为了进行非线性分析, Gelides 和 Roessset(1951)^[6,20]研究了在侧向循环荷载作用于桩头条件下非线性土性对桩的动力响应的影响, 在桩附近区域采用有限元模型, 而在稍远处则

采用一致边界矩阵来体现辐射效果,同时采用一种等效线性化技术来估计土性随应变水平的变化。Ellison(1971)^[166]、Desai(1974)^[167]、Nogami(1974)^[168]、Christiano(1976)^[169]、O'Neill(1977)^[170]、Randolph(1981)^[171]、Faruque 和 Desai(1982)^[172]等利用有限元方法研究轴向力作用下的桩基的力学问题。Muqtadir 和 Desai(1986)^[173]利用三维有限元模型求解了双曲型本构模型下桩土的相互作用。Aristonous (1991)^[174]利用有限元方法系统研究了在弹塑性模型下的桩土滑移、间隙等对桩土相互作用的影响。Trochanics(1991)^[175]、Makris(1992)^[176]、Kimura(1995)^[177]、Badoni(1997)^[178]、Wu(1997)^[179,180]、Yan(1997)^[181]、Guin(1998)^[182]、Akihiko(1999)^[183]等利用有限元方法对群桩问题、横向力作用下的桩基力学等问题进行了研究,取得了一系列的研究成果。赵振东等(1997)^[184]分析了桩头作用有侧向脉冲荷载时桩土系统的非线性动力性能,采用了一个三维显式有限元程序 DYNA3D 来计算单桩的动力响应。Hsueh(2004)^[185]等用有限元程序 ABAQUS 分析了非线性桩-土-结构体系的横向运动特性;Liyanapathirana(2005)^[186]等用有限元方法进行了液化土中桩的地震性能分析;Liu(2005)^[187]等用有限元方法进行了柔性群桩和土之间相互作用的非线性分析;Anandarajah(2005)^[188]等用现场试验资料,结合等效线性有限元方法分析了桩和土之间非线性相互作用;Tang (2005)^[189]等用 H-adaptive 有限元方法进行了桩和土非线性相互作用分析。

虽然有限元法、有限差分法、边界元法等为解决岩土工程问题中具有其独特的优点,但一般需要采用大量的网格点,准备工作复杂,计算工作量大,耗时多,成本较高。研究表明,近 10 多年发展起来的无网格方法和微分求积方法是求解工程和科学中初-边值问题的比较有效的方法^[162-165],但是用它们来求解桩-土的非线性动力学问题还有待于进一步的研究。

由于非线性粘弹性系统的复杂性,使对结构动力响应、动力稳定性和动力学行为等问题的研究十分困难,目前关于这类问题的数学理论和数值方法还很不完善。虽然人们通常将桩基看作是梁和柱的模型,但由于桩周土可能是非线性粘弹性的,土对桩的反力的描述比较困难,因此,非线性粘弹性桩基的动力学行为(包括混沌运动)的研究显然是一个更为复杂的问题。尽管关于桩基动力学特性的研究已有不少工作,但对于粘弹性桩基非线性动力学特性方面研究的文献很少。在桩

基的理论分析与数值模拟的领域中,值得研究的课题仍相当多。而粘弹性桩基非线性动力学特性的研究是该研究领域的一个重要的热点和难点问题,有必要对其进行深入的研究。

1.4 本文的主要工作

本文假定桩基材料及桩周土材料均满足 3 次非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系,采用广义 Winkler 模型等建立桩基非线性动力学特性分析的数学模型,一般而言,这些模型是与时间相关的非线性偏微分方程组的初边值问题,对这类数学模型的求解和分析是很困难的。本研究拟采用近代数学和力学中的方法,例如,利用复模态分析法、多时间尺度法、伽辽金平均化方法以及非线性动力系统的方法等,对所建立的数学模型进行理论分析和数值模拟,以此研究桩基的线性和非线性动力学特性,包括桩基振动特性、位移响应、分岔和混沌等,并考察材料参数和结构参数等对桩基动力学特性的影响,揭示了一些新现象,给出了一些新结果。主要研究工作如下:

第一章论述了本文研究的背景和意义,重点对有关领域的研究现状进行了简要的综述。

第二章假定桩基材料及桩周土材料均满足 3 次非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系,基于广义 Winkler 模型,建立了分析桩基轴向及横向非线性动力学特性的数学模型。

第三章采用复模态分析等方法,得到了线性粘弹性桩基轴向及横向振动的 n -阶振动模态及固有频率的精确表达式。

第四章在假定桩基及桩周土的线性粘弹性性质都比较弱的情况下,用四阶多时间尺度方法得到了一端固定、另一端自由的桩基轴向自由振动的 n -阶固有频率和位移响应的近似表达式。

第五章在假设桩和土的非线性弹性性质比较弱的情况下,利用多时间尺度法分析桩基的非线性轴向振动特性,得到了桩基非线性轴向自由振动的 n -阶主频率和位移响应的近似表达式,给出了数值算例,考察了参数的影响。

第六章在假设桩和土的非线性弹性性质比较弱的情况下,利用多时间尺度法分析桩基的非线性横向振动特性,得到了桩基非线性横向自由振动的 n -阶主频率

和位移响应的近似表达式，给出了数值算例，考察了参数的影响。

第七章在假设桩基和土的非线性弹性和线性粘弹性性质都比较弱的情况下，用多时间尺度法得到了一端固定、另一端自由的桩基非线性轴向受迫振动系统主共振时的稳态幅频响应曲线和失稳边界曲线，分析了系统主共振时稳态响应的稳定性。给出了数值算例，考察了多种参数对粘性非线性系统前两阶固有频率附近的幅频响应曲线的影响，同时进一步考察了它们对稳态响应稳定性的影响。

第八章在假定桩基及桩周土材料满足 3 次非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系的条件下，导出了给定桩顶竖向动位移的嵌岩桩轴向运动的非线性偏微分方程；利用 Galerkin 平均化方法对数学模型进行了简化，并利用非线性动力系统的方法对简化后的系统进行数值模拟计算，得到不同参数时简化系统的时程曲线、相平面图、功率谱图、Poincare 截面及分岔混沌图等。考察了参数对非线性动力特性的影响。

第九章假设桩基材料的弹性是 3 次非线性的，而粘弹性是线性的情况下，导出了分析桩顶给定横向动位移和动转角的桩基非线性横向运动的数学模型；利用 Galerkin 平均化方法对数学模型进行了简化，并利用非线性动力系统的方法对简化后的系统进行了数值模拟计算，得到了简化系统的时程曲线、相平面图、功率谱图及 Poincare 截面图和分岔混沌图；考察了参数对桩基横向非线性动力特性的影响。

第十章进行了全面的总结和展望。

第二章 桩基非线性动力学分析的数学模型

2.1 前言

本章假定桩基及桩周土材料满足 3-次非线性弹性和线性粘弹性本构关系, 利用广义 Winkler 模型等建立了分析桩基轴向及横向非线性振动的非线性偏微分方程, 并给出了相应的边界条件和初始条件, 这是分析以后各章的基础。

2.2 桩基非线性轴向运动的数学模型

考虑嵌岩圆截面桩基的非线性轴向动力学问题。设桩长为 l , 直径为 d , 横截面面积为 A , 材料密度为 ρ , 并设桩的轴向向上为 X 轴的正方向, 桩底几何中心处为 X 轴的坐标原点, 如图 2.1 所示。

令 T 时刻桩基的轴向应力和轴向应变分别为 $\sigma(X, T)$ 和 $\varepsilon(X, T)$, 并且假设 $\sigma(X, T)$ 和 $\varepsilon(X, T)$ 满足如下的非线性弹性和线性粘弹性的本构关系^[90-92]:

$$\sigma = E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^2 + E_3\varepsilon^3 + \eta_u \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \quad (2.1)$$

式中, E_1 、 E_2 、 E_3 是材料的广义弹性模量, η_u 是粘性系数。对于小变形, 应变 $\varepsilon(X, T)$ 和轴向位移 $U(X, T)$ 有关系

$$\varepsilon(X, T) = \frac{\partial U(X, T)}{\partial X} \quad (2.2)$$

设因桩身轴向位移而引起的土体对桩的轴向抗力及阻尼与位移及位移速率之间满足如下的非线性关系^[89,92]

$$P_u(X, U, \frac{\partial U}{\partial T}) = a_u(k_{u1}U + k_{u2}U^2 + k_{u3}U^3) + c_u \frac{\partial U}{\partial T} \quad (2.3)$$

式中, k_{ui} 和 c_u 分别为桩周侧面单位面积上土的广义轴向刚度系数和轴向阻尼系数, a_u 是土抗力调整系数。

设桩基受到外部激励为 $F(X, T)$, 则能够得到桩基轴向运动的非线性微分方程

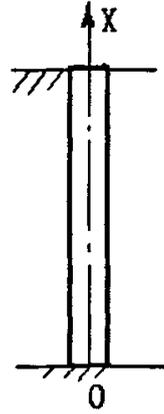


图 2.1 坐标系

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \pi d (c_u \frac{\partial U}{\partial T} + a_u k_{u1} U + a_u k_{u2} U^2 + a_u k_{u3} U^3) \\ & - \frac{\partial}{\partial X} [E_1 A \frac{\partial U}{\partial X} + E_2 A (\frac{\partial U}{\partial X})^2 + E_3 A (\frac{\partial U}{\partial X})^3 + \eta_u A \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial X}] = F(X, T) \end{aligned} \quad (2.4)$$

对于嵌岩桩，假设桩底固支，桩顶自由，故有端部条件

$$U|_{x=0} = 0 \quad (2.5a)$$

$$\left[E_1 \frac{\partial U}{\partial X} + E_2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + E_3 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^3 + \eta_u \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial T} \right] \Big|_{x=l} = 0 \quad (2.5b)$$

设 $U_0(X), V_0(X)$ 为桩基的初始位移和初始速度，初始条件为

$$U(X, T)|_{T=0} = U_0(X), \quad \frac{\partial U(X, T)}{\partial T} \Big|_{T=0} = V_0(X) \quad (2.6a)$$

为了便于分析并使初始时刻顶端自由的条件被满足，设初始位移满足

$$\frac{\partial U_0}{\partial X} \Big|_{x=l} = 0 \quad (2.6b)$$

引入无量纲变量和参数如下：

$$\begin{aligned} w = U/l, \quad x = X/l, \quad t = T \sqrt{E_1 / (\rho l^2)}, \quad c_1 = \pi d c_u \sqrt{l^2 / (E_1 \rho A^2)}, \\ k_{11} = \pi a_u d k_{u1} l^2 / (E_1 A), \quad \eta_1 = \eta_u \sqrt{l / (E_1 \rho l^2)}, \quad k_{22} = \pi a_u d k_{u2} l^3 / (E_1 A), \\ k_{33} = \pi a_u d k_{u3} l^4 / (E_1 A), \quad E_{22} = 2E_2 / E_1, \quad E_{33} = 3E_3 / E_1 \end{aligned}$$

于是，运动微分方程(2.4)，端部条件(2.5)和初始条件(2.6)化为无量纲化形式为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial w}{\partial t} + k_{11} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \\ & + k_{22} w^2 + k_{33} w^3 - E_{22} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E_{33} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \hat{F}(x, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{E_{22}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{E_{33}}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 + \eta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right] \Big|_{x=l} = 0 \quad (2.8)$$

$$w(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x), \quad \text{并且} \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \quad (2.9)$$

式(2.7)中的 \hat{F} 是外载荷的无量纲量。

2.3 桩基非线性横向运动的数学模型

考虑一桩长为 l ，外径为 D 、内径为 d_1 ，横截面面积为 A ，材料密度为 ρ 的圆形管桩，设初始静止。取坐标系如图2.2所示，桩顶中心处为坐标轴的原点，桩的轴向向下为 X 轴的正方向，水平向右为 Y 轴的正方向。设 T 时刻桩身中性轴在 Y 方向的横向位移为 $V(X, T)$ 。在桩顶承受一竖向静载荷 $P(T) = -P_0$ 。容易得到桩基横向运动的动力学方程为

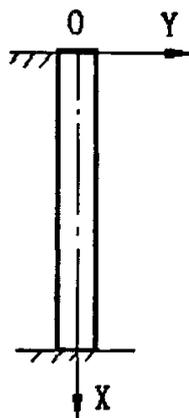


图 2.2 坐标系

$$\rho A \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial X^2} - \frac{\partial}{\partial X} \left[N(X, T) \frac{\partial V}{\partial X} \right] + Dp(X, V, \frac{\partial V}{\partial T}) = q(X, T) \quad (2.10)$$

式中， M, N 是弯矩和轴力， $q(X, T)$ 是横向作用于桩基上的外载荷， $p(X, V, \frac{\partial V}{\partial T})$ 是土对桩基的抗力。设土体对桩的横向抗力满足如下的非线性关系^[89,92]：

$$p(X, V, \frac{\partial V}{\partial T}) = a(k_1 V + k_2 V^2 + k_3 V^3) + c \frac{\partial V}{\partial T} \quad (2.11)$$

式中， c 为桩侧表面单位面积内土的横向阻尼系数， k_i 为桩侧表面单位面积内土的广义横向刚度系数； a 为土抗力调整系数。

如果桩侧摩阻力对桩的横向运动的影响较小，可设桩身轴力沿 X 轴按线性规律变化，即^[2,79]

$$N(X, T) = -P_0 [1 - (1 - \alpha)X / l] \quad (2.12)$$

其中， α 为常数，并且 $0 \leq \alpha \leq 1$ ；若忽略桩侧摩阻力的影响，则 $\alpha = 1$ ；一般 $P_0 \geq 0$ ，即桩顶恒受压。

假定桩基材料满足如下的非线性本构关系^[89,92]

$$\sigma = E_0 \left(\varepsilon + \text{sgn}(-\varepsilon) \beta \varepsilon^2 + \gamma \varepsilon^3 \right) + \eta \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \quad (2.13)$$

式中： $\sigma(X, T)$ 和 $\varepsilon(X, T)$ 分别为 T 时刻桩身的轴向应力和轴向应变； E_0 、 β 、 γ 是桩身材料的广义弹性系数； η 是粘性系数； $\text{sgn}()$ 是符号函数。对于小变形情况， ε 和桩的横向位移 $V(X, T)$ 的关系为

$$\varepsilon = -Y \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \quad (2.14)$$

这里 Y 是到中性轴的距离。由式(2.13)和式(2.14), 弯矩 $M = \iint_A Y \sigma dA$ 为

$$\begin{aligned} M = & -E_0 \pi \frac{D^4 - d_1^4}{64} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + E_0 \beta \frac{D^5 - d_1^5}{60} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^2 \\ & - E_0 \gamma \pi \frac{D^6 - d_1^6}{512} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^3 - \eta \pi \frac{D^4 - d_1^4}{64} \frac{\partial^3 V}{\partial X^2 \partial T} \end{aligned} \quad (2.15)$$

将式(2.11)、(2.12)、(2.15)代入式(2.10)中得到横向位移 $V(X, T)$ 满足的非线性运动微分方程

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} + E_0 \pi \frac{D^4 - d_1^4}{64} \frac{\partial^4 V}{\partial X^4} - 2E_0 \beta \frac{D^5 - d_1^5}{60} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^2 - 2E_0 \beta \frac{D^5 - d_1^5}{60} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \frac{\partial^4 V}{\partial X^4} \\ + 6E_0 \gamma \pi \frac{D^6 - d_1^6}{512} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^2 + 3E_0 \gamma \pi \frac{D^6 - d_1^6}{512} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^2 \frac{\partial^4 V}{\partial X^4} + \eta \pi \frac{D^4 - d_1^4}{64} \frac{\partial^3 V}{\partial X^2 \partial T} \\ + P_0 [1 - (1 - \alpha)X/l] \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - P_0 \frac{1 - \alpha}{l} \frac{\partial V}{\partial X} + aD(k_1 V + k_2 V^2 + k_3 V^3) + cD \frac{\partial V}{\partial T} = q(X, T) \end{aligned} \quad (2.16)$$

假设桩底浅嵌岩, 桩底水平位移及弯矩为零, 故有底端条件

$$V|_{x=l} = 0; \quad M|_{x=l} = 0 \quad (2.17)$$

假设桩头浅嵌固于承台或地基梁中, 桩顶水平位移及弯矩为零, 故有顶端条件

$$V|_{x=0} = 0; \quad M|_{x=0} = 0 \quad (2.18)$$

设 $U_0(X), V_0(X)$ 为桩基的初始位移和初始速度, 初始条件为

$$V(X, T)|_{T=0} = U_0(X), \quad \frac{\partial V(X, T)}{\partial T} \Big|_{T=0} = V_0(X) \quad (2.19a)$$

为了便于分析并使初始时刻端部无弯矩的条件被满足, 设初始位移满足条件

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial X^2} \Big|_{x=l} = 0 \quad (2.19b)$$

引入无量纲变量和参数如下:

$$\begin{aligned}
 w &= V/l, \quad t = kT, \quad x = X/l, \quad \beta_1 = E_0\beta(D^5 - d_1^5)/(30\rho Al^5 k^2), \\
 \gamma_1 &= 3\pi E_0\gamma(D^6 - d_1^6)/(512\rho Al^6 k^2), \quad \eta_1 = \pi\eta(D^4 - d_1^4)/(64\rho Al^4 k), \\
 p_0 &= P_0/(\rho Al^2 k^2), \quad k_{11} = aDk_1/(\rho Ak^2), \quad k_{22} = aDk_2/(\rho Ak^2), \\
 k_{33} &= aDk_3/(\rho Ak^2), \quad c_1 = cD/(\rho Ak), \quad \omega = \Omega/k
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

式中, $k = \sqrt{\pi E_0(D^4 - d_1^4)/(64\rho Al^4)}$ 。于是, 运动微分方程(2.16), 端部条件(2.17)(2.18)和初始条件(2.19)化为如下无量纲化形式:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \beta_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 - \beta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\gamma_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \gamma_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta_1 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \\
 + p_0 [1 - (1-\alpha)x] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - p_0 (1-\alpha) \frac{\partial w}{\partial x} + k_{11} w + k_{22} w^2 + k_{33} w^3 + c_1 \frac{\partial w}{\partial t} = \hat{q}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$w|_{x=1} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\beta_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\gamma_1}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \right] \Big|_{x=1} = 0 \tag{2.22}$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\beta_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\gamma_1}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \right] \Big|_{x=0} = 0 \tag{2.23}$$

$$w(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x) \tag{2.24}$$

并且初始位移在桩顶满足的条件为

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0 \tag{2.25}$$

式(2.21)中的 \hat{q} 是外载荷的无量纲量。

2.4 小结

本章利用广义 Winkler 模型等建立桩基非线性轴向及横向动力学特性分析的数学模型。假定桩基材料及桩周土材料分别满足 3 次非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系, 分别导出了分析桩基轴向及横向非线性运动的非线性偏微分方程。利用本章得到的非线性偏微分控制方程, 我们将在以后的各章节里, 详细讨论桩基非线性轴向及横向运动的动力学特性。

第三章 桩基轴向和横向振动模态与固有频率

3.1 前言

本章研究了桩基轴向和横向振动的振动模态与固有频率。采用复模态分析等方法,分别得到了在给定边界条件下线性粘弹性桩基轴向和横向振动的振动模态、固有频率与振动响应的精确表达式,得到了桩基的桩顶临界荷载公式。本章也是第四、五、六、七章的应用基础。

3.2 桩基轴向振动模态与固有频率

由式(2.7)-(2.9),不计非线性项,可得到线性粘弹性桩基的轴向自由振动的初边值问题为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial w}{\partial t} + k_{11} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad (3.1a)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.1b)$$

$$w(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x), \quad \text{并且} \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (3.1c)$$

考虑到有阻尼的衰减运动,设 n 阶模态函数为复数形式,取

$$w(x,t) = \phi_n(x) \cdot e^{(i\omega_{dn} - \delta_n)t} + \overline{\phi_n}(x) \cdot e^{-(i\omega_{dn} + \delta_n)t} \quad (3.2)$$

将(3.2)代入(3.1b)可得

$$\phi_n'(1) \cdot [e^{(i\omega_{dn} - \delta_n)t} + \eta_1 (i\omega_{dn} - \delta_n) e^{(i\omega_{dn} - \delta_n)t}] = 0$$

[]中的项是随时间而变化的,在任意的时刻,它一般不等于零,或者注意到条件

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0. \quad \text{因此,端部条件(3.1b)变为}$$

$$\phi_n(0) = 0, \quad \phi_n'(1) = 0 \quad (3.3)$$

将(3.2)代入式(3.1a)得

$$\begin{aligned} & (i\omega_{dn} - \delta_n)^2 \phi_n(x) + c_1 (i\omega_{dn} - \delta_n) \phi_n(x) \\ & + k_{11} \phi_n(x) - \phi_n''(x) - \eta_1 (i\omega_{dn} - \delta_n) \phi_n'(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

即

$$\frac{\phi_n''(x)}{\phi_n(x)} = \frac{(i\omega_{dn} - \delta_n)^2 + c_1(i\omega_{dn} - \delta_n) + k_{11}}{1 + \eta_1(i\omega_{dn} - \delta_n)} = -\beta_n^2 \quad (3.5)$$

上式的左边与 x 有关, 右边与 x 无关, 只可能等于常数, 记作 $-\beta_n^2$, 可得

$$\phi_n''(x) + \beta_n^2 \phi_n(x) = 0 \quad (3.6)$$

式(3.6)是二阶常微分方程, 其通解为:

$$\phi_n(x) = C_{1n}(e^{i\beta_n x} + C_{2n}e^{-i\beta_n x}) \quad (3.7)$$

其中 C_{1n}, C_{2n} 是与端部条件有关的待定复常数。

将式(3.7)代入端部条件(3.3) 可得

$$C_{1n}(1 + C_{2n}) = 0 \quad (3.8)$$

$$C_{1n}(\beta_n e^{i\beta_n} - C_{2n}\beta_n e^{-i\beta_n}) = 0 \quad (3.9)$$

以上两式可以写成矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_n e^{i\beta_n} & -\beta_n e^{-i\beta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

为了使原问题有非零解, 则线性代数方程的系数矩阵的行列式必须为零, 得

$$\beta_n e^{i\beta_n} + \beta_n e^{-i\beta_n} = 0 \quad (3.11)$$

也即, $\beta_n(2 \cos \beta_n) = 0$ 。 β_n 大于零的解为

$$\beta_n = (n - 1/2)\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.12)$$

由式(3.8)得 $C_{2n} = -1$ 。因此, 一端固定、一端自由的桩基轴向自由振动的第 n 阶模态为

$$\phi_n(x) = C_{1n}(e^{i(n-1/2)\pi x} - e^{-i(n-1/2)\pi x}) \quad (3.13)$$

也即

$$\phi_n(x) = 2i C_{1n} \sin((n - 1/2)\pi x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.14)$$

由(3.5)还可得

$$(i\omega_{dn} - \delta_n)^2 + (c_1 + \eta_1 \beta_n^2)(i\omega_{dn} - \delta_n) + (k_{11} + \beta_n^2) = 0 \quad (3.15)$$

因此,

$$-\delta_n + i\omega_{dn} = -\frac{c_1 + \eta_1 \beta_n^2}{2} \pm i \sqrt{(k_{11} + \beta_n^2) \cdot \left[1 - \left(\frac{c_1 + \eta_1 \beta_n^2}{2\sqrt{k_{11} + \beta_n^2}} \right)^2 \right]}$$

固有频率应为大于零的实数, 注意到当 $\zeta_n = (c_1 + \eta_1 \beta_n^2) / (2\sqrt{k_{11} + \beta_n^2}) = 1$ 时得 $\omega_{dn} = 0$; 当 $\zeta_n > 1$ 时 ω_{dn} 为复数, 均不合题意 (这实际上为无往复运动的过阻尼状态), 所以 $\zeta_n < 1$ 。因此, 应舍去根式前面的负号, 可得到阻尼系数

$$\delta_n = (c_1 + \eta_1 \beta_n^2) / 2 \quad (3.16)$$

桩基轴向阻尼振动的 n 阶固有频率

$$\omega_{dn} = \sqrt{k_{11} + \beta_n^2} \cdot \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad (\text{当 } \zeta_n < 1 \text{ 时}) \quad (3.17)$$

相对阻尼系数(即阻尼比)为

$$\zeta_n = \frac{c_1 + \eta_1 \beta_n^2}{2\sqrt{k_{11} + \beta_n^2}} = \frac{\delta_n}{\sqrt{k_{11} + \beta_n^2}} \quad (3.18)$$

同时周期为

$$T_{dn} = 2\pi / \omega_{dn} \quad (3.19)$$

将式(3.12)代入上面各式得桩基阻尼振动 n 阶固有频率的等价表达式

$$\omega_{dn} = \sqrt{k_{11} + (n-1/2)^2 \pi^2} \cdot \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{当 } \zeta_n < 1 \text{ 时}) \quad (3.20)$$

相对阻尼系数

$$\zeta_n = \frac{c_1 + \eta_1 \beta_n^2}{2\sqrt{k_{11} + \beta_n^2}} = \frac{c_1 + \eta_1 (n-1/2)^2 \pi^2}{2\sqrt{k_{11} + (n-1/2)^2 \pi^2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.21)$$

显然, 桩基轴向无阻尼振动的固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{k_{11} + (n-1/2)^2 \pi^2} \quad (3.22)$$

无阻尼振动的周期为

$$T_n = 2\pi / \omega_n \quad (3.23)$$

这样，桩基有阻尼轴向自由振动的主振动可表示为

$$\begin{aligned}
 w(x,t) &= \phi_n(x) \cdot e^{(i\omega_{dn} - \delta_n)t} + \overline{\phi_n}(x) \cdot e^{-(i\omega_{dn} + \delta_n)t} \\
 &= [\phi_n(x) \cdot e^{i\omega_{dn}t} + \overline{\phi_n}(x) \cdot e^{-i\omega_{dn}t}] \cdot e^{-\delta_n t} \\
 &= (e^{i(n-1/2)\pi x} - e^{-i(n-1/2)\pi x}) \cdot (C_{1n} e^{i\omega_{dn}t} - \overline{C_{1n}} e^{-i\omega_{dn}t}) e^{-\delta_n t} \quad (3.24) \\
 &= A_{0n} \sin((n-1/2)\pi x) \cdot e^{-\delta_n t} \sin(\omega_{dn}t + \theta_{0n})
 \end{aligned}$$

式中, $C_{1n} = -\frac{A_{0n}}{4} e^{i\theta_{0n}}$, A_{0n}, θ_{0n} 由系统初始条件确定的待定常数。

一般情况下, 桩基系统的自由振动是无穷多个主振动的叠加:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{0n} \sin((n-1/2)\pi x) \cdot e^{-\delta_n t} \sin(\omega_{dn}t + \theta_{0n})] \quad (3.25)$$

3.3 桩基横向振动模态与固有频率

由式(2.21)–(2.25), 不计非线性项并设 $\alpha=1$; 可得到在桩顶作用静荷载 p_0 时线性粘弹性桩基的横向自由振动控制方程和端部条件为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_{11} w + \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + c_1 \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (3.26)$$

$$w|_{x=1} = 0; \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right]_{x=1} = 0 \quad (3.27a)$$

$$w|_{x=0} = 0; \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right]_{x=0} = 0 \quad (3.27b)$$

$$w(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x) \quad (3.28a)$$

并且桩顶初始位移满足的条件为

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0 \quad (3.28b)$$

考虑到有阻尼的衰减运动, 设振动的复位移为

$$w(x,t) = \phi_n(x) \cdot e^{(i\omega_{dn} - \delta_n)t} + \overline{\phi_n}(x) \cdot e^{-(i\omega_{dn} + \delta_n)t} \quad (3.29)$$

式中, $\phi_n(x)$ 为振动模态。将式(3.29)代入式(3.26), 消去 $e^{(i\omega_{dn} - \delta_n)t}$, 可得

$$[1 + \eta_1(i\omega_{dn} - \delta_n)]\phi_n^{(4)} + p_0\phi_n'' + [(i\omega_{dn} - \delta_n)^2 + k_{11} + c_1(i\omega_{dn} - \delta_n)]\phi_n = 0 \quad (3.30)$$

如令

$$g^2 = \frac{p_0}{1 + \eta_1(i\omega_{dn} - \delta_n)}, \quad \alpha^4 = -\frac{(i\omega_{dn} - \delta_n)^2 + k_{11} + c_1(i\omega_{dn} - \delta_n)}{1 + \eta_1(i\omega_{dn} - \delta_n)} \quad (3.31)$$

则式(3.30)可写成

$$\phi_n^{(4)} + g^2\phi_n'' + \alpha^4\phi_n = 0 \quad (3.32)$$

设 $\phi_n(x) = B_n e^{\lambda x}$ 并代入(3.32), 即得

$$\lambda^4 + g^2\lambda^2 - \alpha^4 = 0 \quad (3.33)$$

因此, 本征方程的根为

$$\lambda_1 = i\beta_{1n}, \lambda_2 = -i\beta_{1n}, \lambda_3 = \beta_{2n}, \lambda_4 = -\beta_{2n}$$

其中

$$\beta_{1n} = \sqrt{\sqrt{\alpha^4 + g^4/4 + g^2/2}}, \quad \beta_{2n} = \sqrt{\sqrt{\alpha^4 + g^4/4 - g^2/2}} \quad (3.34)$$

将上面的四个根代入 $\phi_n(x) = B_n e^{\lambda x}$, 得方程的通解

$$\phi_n(x) = B_{1n} e^{i\beta_{1n}x} + B_{2n} e^{-i\beta_{1n}x} + B_{3n} e^{\beta_{2n}x} + B_{4n} e^{-\beta_{2n}x}$$

或者, 可得写成如下形式:

$$\phi_n(x) = C_{1n} \sin \beta_{1n}x + C_{2n} \cos \beta_{1n}x + C_{3n} \sinh \beta_{2n}x + C_{4n} \cosh \beta_{2n}x \quad (3.35)$$

其中, $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$ 是与端部条件有关的待定复常数。

注意到条件(2.28b), 端部条件(3.27)可化为

$$\phi_n(0) = 0, \phi_n''(0) = 0, \phi_n(1) = 0, \phi_n''(1) = 0 \quad (3.36)$$

将式(3.35)代入端部条件(3.36)可得:

$$C_{2n} + C_{4n} = 0 \quad (3.37a)$$

$$-\beta_{1n}^2 C_{2n} + \beta_{2n}^2 C_{4n} = 0 \quad (3.37b)$$

$$C_{1n} \sin \beta_{1n} + C_{3n} \sinh \beta_{2n} = 0 \quad (3.37c)$$

$$-\beta_{1n}^2 C_{1n} \sin \beta_{1n} + \beta_{2n}^2 C_{2n} \sinh \beta_{2n} = 0 \quad (3.37d)$$

由(3.37a)(3.37b)可得 $C_{2n} = C_{4n} = 0$ 。为了使问题有非零解，线性代数方程组(3.37c)(3.37d)的系数矩阵的行列式必须有零解，于是得频率方程

$$\begin{vmatrix} \sin \beta_{1n} & \sinh \beta_{2n} \\ -\beta_{1n}^2 \sin \beta_{1n} & \beta_{2n}^2 \sinh \beta_{2n} \end{vmatrix} = (\beta_{1n}^2 + \beta_{2n}^2) \sin \beta_{1n} \sinh \beta_{2n} = 0$$

即

$$\sin \beta_{1n} = 0 \quad \text{得} \quad \beta_{1n} = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.38)$$

将上式代入(3.37c)得到 $C_{3n} = 0$ 。同时根据(3.34)(3.31)可得

$$\begin{aligned} \alpha^4 &= (n\pi)^4 - g^2(n\pi)^2 \\ -\delta_n + i\omega_{dn} &= -\frac{c_1 + \eta_1(n\pi)^4}{2} \\ \pm i &\sqrt{(k_{11} + (n\pi)^4 - (n\pi)^2 p_0) \cdot \left[1 - \left(\frac{c_1 + \eta_1(n\pi)^4}{2\sqrt{k_{11} + (n\pi)^4 - (n\pi)^2 p_0}} \right)^2 \right]} \end{aligned}$$

这样，可得到无粘性桩基横向振动的固有角频率

$$\omega_n = \sqrt{k_{11} + (n\pi)^4 - (n\pi)^2 p_0} \quad (3.39)$$

相对阻尼系数(阻尼比)

$$\zeta_n = \frac{\delta_n}{\omega_n} = \frac{c_1 + \eta_1(n\pi)^4}{2\sqrt{k_{11} + (n\pi)^4 - (n\pi)^2 p_0}} \quad (3.40)$$

因此，阻尼系数为

$$\delta_n = \frac{c_1 + \eta_1(n\pi)^4}{2} \quad (3.41)$$

粘弹性桩基横向振动的固有角频率为

$$\omega_{dn} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad (3.42)$$

从(3.39)可看出，轴向压力可使频率降低，当 $P_0 \rightarrow P_{0cr}$ (或 $p_0 \rightarrow p_{0cr}$) 时，基频 $\omega_1 \rightarrow 0$ ，此时桩处于平衡分支状态。可得桩基的桩顶临界荷载公式

$$P_{0\sigma} = \rho A l^2 k^2 p_{0\sigma} = \rho A l^2 k^2 \frac{k_{11} + \pi^4}{\pi^2} = \frac{a D k_1 l^2}{\pi^2} + \frac{\pi^2 E_0 I}{l^2} \quad (3.43)$$

式中, $I = \frac{\pi(D^4 - d_1^4)}{64}$ 。若不考虑土的作用, $k_1 = 0$, 则上式化为两端铰支压杆失稳的欧拉公式。

在式(3.27)(3.28)端部条件下的桩基横向振动的第 n 阶模态为

$$\phi_n(x) = C_{1n} \sin n\pi x \quad (3.44)$$

式中, C_{1n} 是不为零的复数, 可由初始条件确定。

粘弹性桩基横向自由振动的主振动可表示为

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \phi_n(x) \cdot e^{(i\omega_{dn} - \delta_n)t} + \overline{\phi_n(x)} \cdot e^{-(i\omega_{dn} + \delta_n)t} \\ &= [\phi_n(x) \cdot e^{i\omega_{dn}t} + \overline{\phi_n(x)} \cdot e^{-i\omega_{dn}t}] \cdot e^{-\delta_n t} \\ &= \sin(n\pi x) \cdot (C_{1n} e^{i\omega_{dn}t} + \overline{C_{1n}} e^{-i\omega_{dn}t}) e^{-\delta_n t} \\ &= W_{0n} \sin(n\pi x) \cdot e^{-\delta_n t} \sin(\omega_{dn}t + \theta_{0n}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

式中, $C_{1n} = -i \frac{W_{0n}}{2} e^{i\theta_{0n}}$, W_{0n}, θ_{0n} 由系统初始条件确定的待定常数。

一般情况下, 粘弹性桩基系统的横向自由振动是无穷多个主振动的叠加

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [W_{0n} \sin(n\pi x) \cdot e^{-\delta_n t} \sin(\omega_{dn}t + \theta_{0n})] \quad (3.46)$$

3.4 小结

本章用复模态分析方法分别得到了一端固支、一端自由边界条件下线性粘弹性桩基轴向自由振动和两端铰支边界条件下线性粘弹性桩基横向自由振动的 n 阶振动模态、固有频率与振动响应的精确表达式。结果表明, 桩基横向振动的固有频率不仅与边界条件和粘性阻尼有关, 而且还与桩周土刚度系数和桩顶荷载有关。利用线性粘弹性桩基横向振动控制方程的平衡解, 得到了桩基的桩顶临界荷载公式。桩顶临界荷载不仅与边界条件、桩长、桩径和桩身弹性模量有关, 而且还与桩周土刚度系数有关。

第四章 求解固有频率的多时间尺度方法

4.1 前言

本章利用多时间尺度法研究线性粘弹性桩基的轴向自由振动问题。假定桩基及桩周土的材料分别满足微分型粘弹性本构关系。在桩基和土的粘性都比较弱的情况下,用四阶多时间尺度方法得到了一端固定、另一端自由的粘弹性桩基轴向自由振动的 n -阶固有频率和振动位移的近似表达式。

4.2 问题的数学描述

假定桩基及桩周土材料分别满足线性粘弹性本构关系,这时,(2.7)可化简得到线性粘弹性桩基轴向运动无量纲化形式的微分方程为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_{11} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} - c_1 \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.1)$$

对于桩顶自由的嵌岩桩,桩底位移为零,桩顶的轴力为零,端部条件(2.8)化为

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right]_{x=1} = 0 \quad (4.2a)$$

初始条件为(2.9),即

$$w(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x), \quad \text{并且} \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (4.2b)$$

4.3 多时间尺度法求解

假设式(4.1)中土和桩基的粘性为同阶小量,设 $\eta_1 = \varepsilon \eta_0$, $c_1 = \varepsilon c_0$, ε 为小参数,式(4.1)可写成为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_{11} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon \left[\eta_0 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} - c_0 \frac{\partial w}{\partial t} \right] \quad (4.3a)$$

端部条件(4.2a)化为

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon \eta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right]_{x=1} = 0 \quad (4.3b)$$

设(4.3a)的解可以近似地表示为

$$w(x, t, \varepsilon) = w_0(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \varepsilon^2 w_2(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \varepsilon^3 w_3(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \varepsilon^4 w_4(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) + \dots \quad (4.4)$$

式中, $T_n = \varepsilon^n t$, ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) 为不同尺度的时间变量。不同的时间尺度描述过程变化的不同节奏, 阶数愈低, 变化愈缓慢, 阶数愈高, 变化愈迅速。将不同尺度的时间变量视为独立变量, 则 $w(x, t, \varepsilon)$ 成为自变量 x 和 5 个独立时间变量 T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 的函数, 对时间的微分可按照 ε 的幂次展开为

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial T_3} + \varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial T_4} + \dots \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 (2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2}) + \varepsilon^3 (2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_3} + 2 \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_2}) \\ & + \varepsilon^4 (2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_3} + \frac{\partial^2}{\partial T_2^2}) + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

将(4.4)代入方程(4.3a), 并注意到(4.5)和(4.6), 比较 ε 同次幂的系数得到 0-阶至 4-阶线性偏微分方程

$$\varepsilon^0: \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0^2} + k_{11} w_0 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (4.7)$$

$$\varepsilon^1: \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + k_{11} w_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \eta_0 \frac{\partial^3 w_0}{\partial T_0 \partial x^2} - c_0 \frac{\partial w_0}{\partial T_1} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2: \frac{\partial^2 w_2}{\partial T_0^2} + k_{11} w_2 - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = & -2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0 \partial T_2} \\ & - \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_1^2} + \eta_0 (\frac{\partial^3 w_1}{\partial T_0 \partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial T_1 \partial x^2}) - c_0 (\frac{\partial w_1}{\partial T_0} + \frac{\partial w_0}{\partial T_1}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3: \frac{\partial^2 w_3}{\partial T_0^2} + k_{11} w_3 - \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} = & -2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0 \partial T_3} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_1 \partial T_2} \\ & + \eta_0 (\frac{\partial^3 w_2}{\partial T_0 \partial x^2} + \frac{\partial^3 w_1}{\partial T_1 \partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial T_2 \partial x^2}) - c_0 (\frac{\partial w_2}{\partial T_0} + \frac{\partial w_1}{\partial T_1} + \frac{\partial w_0}{\partial T_2}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4: \frac{\partial^2 w_4}{\partial T_0^2} + k_{11} w_4 - \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2} = & -2 \frac{\partial^2 w_3}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0 \partial T_3} - 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_1 \partial T_2} \\ & - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0 \partial T_4} - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_1 \partial T_3} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_2^2} + \eta_0 (\frac{\partial^3 w_3}{\partial T_0 \partial x^2} + \frac{\partial^3 w_2}{\partial T_1 \partial x^2} + \frac{\partial^3 w_1}{\partial T_2 \partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial T_3 \partial x^2}) \end{aligned}$$

$$-c_0 \left(\frac{\partial w_3}{\partial T_0} + \frac{\partial w_2}{\partial T_1} + \frac{\partial w_1}{\partial T_2} + \frac{\partial w_0}{\partial T_3} \right) \quad (4.11)$$

在依次求解过程中，利用消除久期项的附加条件和端部条件，可导出各阶近似解的表达式。特别地，可将 0-阶线性方程(4.7)的解写成复数形式

$$w_0(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) = \sum_{n=1}^{\infty} [\phi_n(x) A_n(T_1, T_2, T_3, T_4) e^{i\omega_n T_0} + \bar{\phi}_n(x) \bar{A}_n(T_1, T_2, T_3, T_4) e^{-i\omega_n T_0}] \quad (4.12)$$

其中， $\bar{(\cdot)}$ 表示 (\cdot) 的复共轭， $i = \sqrt{-1}$ 为虚数。

将式(4.12)代入式(4.8)得到:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + k_{11} w_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} [(-2i\phi_n \frac{\partial A_n}{\partial T_1} \omega_n + i\eta_0 \phi_n'' A_n \omega_n - ic_0 \phi_n A_n \omega_n) e^{i\omega_n T_0}] + cc \quad (4.13)$$

其中， ϕ_n'' 表示 $\phi_n(x)$ 对无量纲坐标 x 的2阶导数， cc 表示其左边各项的共轭项之和。比较齐次方程(4.7)和非齐次方程(4.13)可以看到，它们的左端形式完全相同，但是(4.7)有非零解 $\phi_n(x)$ 。因此，若要使非齐次方程(4.13)有解，必须满足可解性条件，即要求非齐次方程(4.13)的非齐次项的长期项与其伴随方程(4.7)的解 $\phi_n(x)$ 正交。因此，可解性条件为

$$\langle (-2i\phi_n \frac{\partial A_n}{\partial T_1} \omega_n + i\eta_0 \phi_n'' A_n \omega_n - ic_0 \phi_n A_n \omega_n) e^{i\omega_n T_0}, \phi_n \rangle = 0 \quad (4.14)$$

其中 $\langle f, g \rangle$ 为在区间 $[0,1]$ 上复函数的内积，定义如下

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \bar{g} dx \quad (4.15)$$

这里，取 $g = \phi_n(x)$ ， f 为式(4.13)右边的第1项（长期项）。由式(4.14)和(4.15)得到

$$-2i\omega_n \frac{\partial A_n}{\partial T_1} \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx + i\eta_0 A_n \omega_n \int_0^1 \phi_n'' \bar{\phi}_n dx - ic_0 A_n \omega_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx = 0$$

此式可化为

$$\frac{\partial A_n}{\partial T_1} - k_n A_n = 0 \quad (4.16)$$

其中,

$$k_n = \frac{\eta_0 \int_0^1 \phi_n' \bar{\phi}_n dx - c_0 \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx}{2 \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx} \quad (4.17)$$

由端部条件(4.3b)可得 $w_0|_{x=0} = 0, \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial T_0} \right]_{x=1} = 0$, 并注意到在端部初始

位移满足的条件, 不难求得线性方程(4.7)的固有频率

$$\omega_n = \sqrt{k_{11} + (n - \frac{1}{2})^2 \pi^2} \quad (4.18)$$

相应的模态为

$$\phi_n(x) = 2i C_{1n} \sin[(n - \frac{1}{2})\pi x] \quad (4.19)$$

将式(4.19)代入式(4.17)可得

$$k_n = -[c_0 + \eta_0(n - 1/2)^2 \pi^2]/2 = -\delta_{0n} \quad (4.20)$$

式中, $\delta_{0n} = (c_0 + \eta_0(n - 1/2)^2 \pi^2)/2$ 为线性自由振动系统的阻尼系数。

设 (4.16) 的解为 $A_n(T_1, T_2, T_3, T_4) = \alpha_n e^{i\gamma_n}$, 其中 $\alpha_n = \alpha_n(T_1, T_2, T_3, T_4)$, $\gamma_n = \gamma_n(T_1, T_2, T_3, T_4)$ 是时间尺度 T_1 的待定实函数。将其代入(4.16)得到 α_n, γ_n 满足的方程

$$\frac{\partial \alpha_n}{\partial T_1} - k_n \alpha_n + i \alpha_n \frac{\partial \gamma_n}{\partial T_1} = 0 \quad (4.21)$$

分开实部和虚部, 可知, γ_n 与 T_1 无关, 即 $\gamma_n = \gamma_n(T_2, T_3, T_4)$ 。且可得

$\alpha_n = c_{1n}(T_2, T_3, T_4) e^{k_n T_1}$, 其中, $c_{1n}(T_2, T_3, T_4)$ 为与 T_1 无关的量。因此,

$$A_n = \alpha_n e^{i\gamma_n} = c_{1n}(T_2, T_3, T_4) e^{k_n T_1} e^{i\gamma_n} = B_n(T_2, T_3, T_4) e^{-\delta_{0n} T_1} \quad (4.22)$$

其中, $B_n(T_2, T_3, T_4)$ 为与 T_1 无关的复函数。

将(4.20) (4.22)代入(4.12)可得

$$w_0(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) = \sum_{n=1}^{\infty} [B_n(T_2, T_3, T_4) \phi_n(x) e^{i\omega_n T_1 - \delta_{0n} T_1}] + cc \quad (4.23)$$

将式(4.19)(4.22)代入(4.13)可得

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + k_{11} w_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad (4.24)$$

方程(4.24)中已不含长期项, 它的一个特解为

$$w_1(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) = 0 \quad (4.25)$$

把式(4.23), (4.25)代入式(4.9)得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_2}{\partial T_0^2} + k_{11} w_2 - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} [(-2i \frac{\partial B_n}{\partial T_2} \phi_n \omega_n - B_n \phi_n \delta_{0n}^2 \\ - \eta_0 B_n \phi_n' \delta_{0n} + c_0 B_n \phi_n \delta_{0n}) e^{i\omega_n T_0 - d_n T_1}] + cc \end{aligned} \quad (4.26)$$

比较(4.24)与(4.26), (4.26)有解的条件(可解性条件)要求

$$-2i\omega_n \frac{\partial B_n}{\partial T_2} \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx - \delta_{0n}^2 B_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx - \eta_0 \delta_{0n} B_n \int_0^1 \phi_n' \bar{\phi}_n dx + c_0 \delta_{0n} B_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx = 0 \quad (4.27)$$

此式可化为

$$\frac{\partial B_n}{\partial T_2} + \delta_{0n} d_n B_n = 0 \quad (4.28)$$

其中,

$$d_n = \frac{\eta_0 \int_0^1 \phi_n' \bar{\phi}_n dx + (\delta_{0n} - c_0) \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx}{2i\omega_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx} \quad (4.29)$$

注意到 (4.19) 及相关的公式, 可得

$$d_n = \frac{\delta_{0n} - (c_0 + \eta_0(n-1/2)^2 \pi^2)}{2i\omega_n} = i(\zeta_{0n} - \frac{\delta_{0n}}{2\omega_n}) = i \frac{\zeta_{0n}}{2} \quad (4.30)$$

式中 $\zeta_{0n} = \delta_{0n} / \omega_n$ 表示线性阻尼振动系统的相对阻尼系数。

将式(4.28)中的慢变振幅 B_n 表示成极坐标形式

$$B_n = b_n e^{i\theta_n} \quad (4.31)$$

其中, b_n, θ_n 为只与 T_2, T_3, T_4 有关的量。

将 (4.31) 代入(4.28), 并利用(4.30), 分开实部与虚部, 可得 $\partial b_n / \partial T_2 = 0$ 。因此,

$b_n = b_{0n}^*(T_3, T_4)$ 与 T_2 无关。由于 $\frac{\partial \theta_n}{\partial T_2} + \frac{\delta_{0n} \zeta_{0n}}{2} = 0$ ，因此，我们有

$\theta_n = -\frac{\delta_{0n} \zeta_{0n}}{2} T_2 + \theta_{1n}(T_3, T_4)$ 。将 b_n, θ_n 代入(4.31) 得到

$$B_n = b_{1n}(T_3, T_4) e^{-i \delta_{0n} \zeta_{0n} T_2 / 2} \quad (4.32)$$

将(4.32)代入(4.23)得

$$\begin{aligned} w_0(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) &= \sum_{n=1}^{\infty} [b_{1n}(T_3, T_4) e^{-i \delta_{0n} \zeta_{0n} T_2 / 2} \phi_n(x) e^{i \omega_n T_0 - \delta_{0n} T_1}] + cc \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [b_{1n}(T_3, T_4) \phi_n(x) e^{i(\omega_n T_0 - \delta_{0n} \zeta_{0n} T_2 / 2) - \delta_{0n} T_1}] + cc \end{aligned} \quad (4.33)$$

方程(4.26)中已不含长期项，它的一个特解为

$$w_2(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) = 0 \quad (4.34)$$

将式(4.25), (4.33), (4.34)代入式(4.10)得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_3}{\partial T_0^2} + k_{11} w_3 - \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} [(-2i \phi_n \omega_n \frac{\partial b_{1n}}{\partial T_3} \\ &+ b_{1n} (-i \phi_n \delta_{0n}^2 \zeta_{0n} - i \eta_0 \phi_n' \delta_{0n} \zeta_{0n} / 2 + i c_0 \phi_n \delta_{0n} \zeta_{0n} / 2)) e^{i(\omega_n T_0 - \delta_{0n} \zeta_{0n} T_2 / 2) - \delta_{0n} T_1}] + cc \end{aligned} \quad (4.35)$$

注意到(4.35)的左端与方程(4.24)的形式相同，故方程(4.35)的可解性条件为

$$-2i \omega_n \frac{\partial b_{1n}}{\partial T_3} \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx + b_{1n} (-i \delta_{0n}^2 \zeta_{0n} \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx - i \eta_0 \frac{\delta_{0n} \zeta_{0n}}{2} \int_0^1 \phi_n' \bar{\phi}_n dx + i c_0 \frac{\delta_{0n} \zeta_{0n}}{2} \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx) = 0$$

将(4.19)代入上式可化简为

$$i \frac{\partial b_{1n}}{\partial T_3} = 0 \quad (4.36)$$

将式(4.36)中的慢变振幅 b_{n0} 表示成极坐标形式

$$b_{1n} = b_{2n}(T_3, T_4) e^{i \theta_{2n}(T_3, T_4)} \quad (4.37)$$

代入(4.36)，并分开实部与虚部，则可得 $\frac{\partial b_{2n}}{\partial T_3} = 0$ ，因此， $b_{2n}(T_3, T_4) = b_{2n}^*(T_4)$ ；

$b_{2n} \frac{\partial \theta_{2n}}{\partial T_3} = 0$ ，于是， $\theta_{2n} = \theta_{3n}(T_4)$ 。因此， $b_{1n} = b_{2n}^*(T_4) e^{i \theta_{3n}(T_4)} = b_{3n}(T_4)$

方程(4.35)中已不含长期项，它的一个特解为

$$w_3(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) = 0 \quad (4.38)$$

这样式(4.33)变为

$$\begin{aligned} w_0(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) &= \sum_{n=1}^{\infty} [b_{3n}(T_4)\phi_n(x)e^{i(\omega_n T_0 - \delta_{0n}\zeta_{0n}T_2/2) - \delta_{0n}T_1}] + cc \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [b_{3n}(T_4)\phi_n(x)e^{i\omega_n(1-\varepsilon^2\zeta_{0n}^2/2)T_0 - \delta_{0n}T_1}] + cc \end{aligned} \quad (4.39)$$

将式(4.26), (4.34), (4.38), (4.39)代入式(4.11)得到

$$\frac{\partial^2 w_4}{\partial T_0^2} + k_{11}w_4 - \frac{\partial^2 w_4}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} [(-2i\omega_n \frac{db_{3n}}{dT_4} + \frac{\delta_{0n}^2 \zeta_{0n}^2}{4} b_{3n})\phi_n(x)e^{i(\omega_n T_0 - \delta_{0n}\zeta_{0n}T_2/2) - \delta_{0n}T_1}] + cc \quad (4.40)$$

类似地, (4.40)有解的可解性条件为

$$-2i\omega_n \frac{db_{3n}}{dT_4} + \frac{\delta_{0n}^2 \zeta_{0n}^2}{4} b_{3n} = 0 \quad (4.41)$$

将式(4.41)中的慢变振幅 b_{3n} 表示成极坐标形式

$$b_{3n} = b_{4n}(T_4)e^{i\theta_{4n}(T_4)} \quad (4.42)$$

并代入(4.41), 并分开实部与虚部, 则可得 $\frac{db_{4n}}{dT_4} = 0$, 因此, $b_{4n}(T_4) = b_{0n}$ 为实常数;

$$2\omega_n \frac{d\theta_{4n}}{dT_4} + \frac{\delta_{0n}^2 \zeta_{0n}^2}{4} = 0, \text{ 得 } \theta_{4n} = -\frac{\delta_{0n}^2 \zeta_{0n}^2}{8\omega_n} T_4 + \theta_{0n}, \text{ 式中, } \theta_{0n} \text{ 是实常数.}$$

因此, 我们得到

$$b_{3n} = b_{0n} e^{-i\frac{\delta_{0n}^2 \zeta_{0n}^2}{8\omega_n} T_4 + i\theta_{0n}} = b_{0n} e^{-i\omega_n \zeta_{0n}^4 T_4 / 8 + i\theta_{0n}} \quad (4.43)$$

方程(4.40)中已不含长期项, 它的一个特解为

$$w_4(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) = 0 \quad (4.44)$$

因此, 式(4.39)进一步变为

$$w_0(x, T_0, T_1, T_2, T_3, T_4) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_{0n}\phi_n(x)e^{i\omega_n(T_0 - \zeta_{0n}^2 T_1/2 - \zeta_{0n}^4 T_4/8) + i\theta_{0n} - \delta_{0n}T_1}] + cc \quad (4.45)$$

或者, 等价地写成

$$w_0(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_{0n} \sin((n-1/2)\pi x) \cdot e^{-\varepsilon \delta_n t} \sin(\omega_{dn} t + \theta_{0n})] \quad (4.46)$$

由(4.4)可得到一端固定、另一端自由的粘弹性桩基轴向自由振动的位移的近似表达式

$$\begin{aligned} w(x, t, \varepsilon) = w_0(x, t, \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_{0n} \sin((n-1/2)\pi x) \cdot e^{-\varepsilon \delta_n t} \sin(\omega_{dn} t + \theta_{0n})] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_{0n} \sin((n-1/2)\pi x) \cdot e^{-\delta_n t} \sin(\omega_{dn} t + \theta_{0n})] \end{aligned} \quad (4.47)$$

式中, A_{0n}, θ_{0n} 为由初始条件确定的实常数; ω_{dn} 是受到阻尼影响的粘弹性桩基的第 n -阶固有频率

$$\omega_{dn} = \omega_n (1 - \varepsilon^2 \zeta_{0n}^2 / 2 - \varepsilon^4 \zeta_{0n}^4 / 8) = \omega_n (1 - \zeta_n^2 / 2 - \zeta_n^4 / 8) \quad (4.48)$$

式中, $\zeta_n = \varepsilon \zeta_{0n} = \frac{c_1 + \eta_1 (n-1/2)^2 \pi^2}{2\sqrt{k_{11} + (n-1/2)^2 \pi^2}}$, $\delta_n = \varepsilon \delta_{0n} = \frac{c_1 + \eta_1 (n-1/2)^2 \pi^2}{2}$, ω_n 为由(4.18)

给出的线性系统的固有频率。

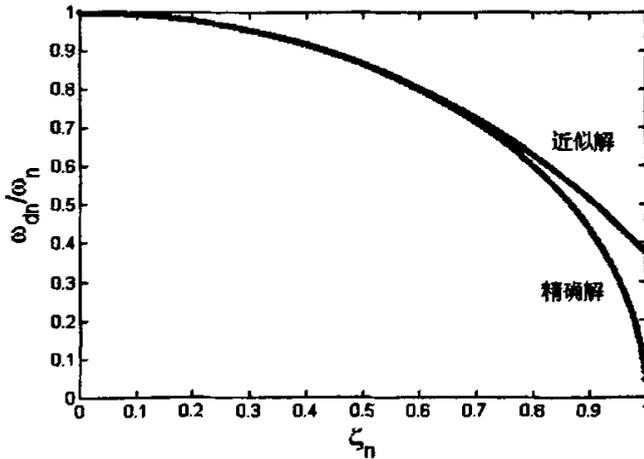


图 4.1 频率比与阻尼比的关系 (精确解和近似解的比较)

用复模态分析方法求解方程(4.1)可求得振动位移的表达式(3.25)与式(4.47)相同, 而桩基的第 n -阶固有频率的精确解(3.20)为

$$\omega_{dn} = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta_n^2} = \omega_n \cdot (1 - \zeta_n^2 / 2 - \zeta_n^4 / 8 - 3\zeta_n^6 / 48 - \dots) \quad (\text{当 } \zeta_n < 1 \text{ 时}) \quad (4.49)$$

因此, (4.48)是式(4.49)关于阻尼比 ζ_n 的4阶近似。

由式(4.48)算得的固有频率近似值与式(4.49)的精确值之间的比较见图4.1。

4.4 小结

多时间尺度法虽然是一种求解动力学微分方程的有效分析方法, 但用低阶多尺度方法可能得不到理想的结果。本文用四阶多尺度方法得到了一端固定、另一端自由的线性粘弹性桩基轴向自由振动的 n 阶固有频率关于粘弹性阻尼 ζ_n 的4阶近似表达式, 同时得到了桩基轴向自由振动的位移响应的近似表达式。固有频率不仅与粘弹性阻尼有关, 而且还与桩周土刚度系数有关。当阻尼比较大时, 由式(4.48)算得的固有频率近似值与式(4.49)的精确值之间的误差较大; 当阻尼比较小时, 两者的误差较小; 当阻尼比小于0.76时, 两者的误差小于3%。

第五章 桩基非线性轴向振动的多时间尺度分析

5.1 前言

本章在假设桩基和土的非线性弹性都比较弱的情况下,用多时间尺度法得到了一端固定、另一端自由的桩基非线性轴向自由振动的 n -阶主频率和位移的近似表达式,并给出了数值算例,考察了参数的影响,得到了一些有意义的新结论。

5.2 问题的数学描述

考虑嵌岩圆截面桩基的非线性轴向自由振动。在假设桩基和土分别满足非线性弹性和线性粘弹性的本构关系(2.1)及(2.2)和(2.3)的条件下,我们有一端固定,另一端自由的桩基轴向运动无量纲化形式的非线性微分方程(2.7)、端部条件(2.8)和初始条件(2.9)为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial w}{\partial t} + k_{11} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \\ + k_{22} w^2 + k_{33} w^3 - E_{22} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E_{33} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{E_{22}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{E_{33}}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 + \eta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right] \Big|_{x=1} = 0 \quad (2.8)$$

$$w(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x) \quad (2.9)$$

为了便于分析并使初始时刻顶端自由的条件被满足,设初始位移满足

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (2.10)$$

5.3 多时间尺度法求解

显然,要得到边值问题(2.7)-(2.10)的完全解是很困难的,我们拟用多尺度法来求该问题的近似解。在桩和土的非线性弹性均比较弱的条件下,可设 $k_{22} = \varepsilon k_{02}$,

$k_{33} = \varepsilon k_{03}$, $E_{22} = \varepsilon E_{02}$, $E_{33} = \varepsilon E_{03}$, ε 为小参数,方程(2.7)-(2.10)可写为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_{11} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + c_1 \frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon [-k_{02} w^2 - k_{03} w^3 + E_{02} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_{03} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}]$$

$$(5.1a)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\varepsilon E_{02}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\varepsilon E_{03}}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right] \Big|_{x=1} = 0 \quad (5.1b)$$

$$w(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x), \quad \text{而且} \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (5.1c)$$

令 $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ 为不同尺度的时间变量, 并设(5.1a)的近似解可以表示为

$$w(x,t,\varepsilon) = w_0(x,T_0,T_1) + \varepsilon w_1(x,T_0,T_1) + \dots \quad (5.2)$$

(5.2)式表达的振动过程包含了不同时间尺度的时间历程, 不同的时间尺度描述过程变化的不同节奏, 阶数愈低, 变化愈缓慢, 阶数愈高, 变化愈迅速。 $T_0 = t$ 为对应于线性系统以固有频率 ω_m 运动的快时间尺度, $T_1 = \varepsilon t$ 是由于桩土材料非线性造成的慢时间尺度。同时, 将不同尺度的时间变量视为独立变量, 则 $w(x,t,\varepsilon)$ 成为自变量 x 和 2 个独立时间变量 T_0, T_1 的函数。对时间的微分可按照 ε 的幂次展开为

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \dots \quad (5.4)$$

将(5.2)代入动力学方程(5.1a), 并注意到(5.3)和(5.4), 比较 ε 同次幂的系数得到 0-阶和 1-阶线性偏微分方程

$$\varepsilon^0: \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0^2} + k_{11} w_0 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial T_0 \partial x^2} + c_1 \frac{\partial w_0}{\partial T_0} = 0 \quad (5.5a)$$

$$\varepsilon^1: \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + k_{11} w_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial T_0 \partial x^2} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial T_0} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \eta_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial T_1 \partial x^2} - c_1 \frac{\partial w_0}{\partial T_1} - k_{02} w_0^2 - k_{03} w_0^3 + E_{02} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + E_{03} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (5.5b)$$

相应于变量 w_0, w_1 的端部条件为

$$w_0|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial T_0} \right) \Big|_{x=1} = 0 \quad (5.6a)$$

$$w_1|_{x=0} = 0, \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial T_0} \right) \Big|_{x=1} = - \left[\eta_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial T_1} + \frac{E_{02}}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{E_{03}}{3} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^3 \right] \Big|_{x=1} \quad (5.6b)$$

相应于变量 w_0, w_1 的初始条件为

$$w_0|_{T_0-T_1=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w_0}{\partial T_0} \Big|_{T_0-T_1=0} = v_0(x);$$

$$w_1|_{T_0-T_1=0} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial T_0} \Big|_{T_0-T_1=0} = - \frac{\partial w_0}{\partial T_1} \Big|_{T_0-T_1=0}, \quad \text{而且} \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (5.7)$$

在依次求解过程中, 利用消除久期项的附加条件和端部条件、初始条件, 可导出 0-阶和 1-阶方程的近似解表达式。特别地, 可将方程(5.5a)的位移写成复数形式

$$w_0(x, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^N [\phi_n(x) A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0 - \delta_n T_0} + \bar{\phi}_n(x) \bar{A}_n(T_1) e^{-i\omega_n T_0 - \delta_n T_0}] \quad (5.8)$$

其中, $N \geq 1$ 为整数, $\bar{(\cdot)}$ 表示 (\cdot) 的复共轭, $\delta_n = (c_1 + \eta_1 \beta_n^2)/2$ 为派生线性振动系统的阻尼系数, $\beta_n = (n-1/2)\pi$ 。

将式(5.8)代入式(5.5b), 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + k_{11} w_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial T_0 \partial x^2} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial T_0} = \sum_{n=1}^N \{ [(-2i\phi_n \omega_n + 2\phi_n \delta_n + \eta_1 \phi_n'' - c_1 \phi_n) \frac{\partial A_n}{\partial T_1} \\ & + (-3k_{03} \phi_n^2 \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_n' \phi_n' \bar{\phi}_n + E_{03} \phi_n'^2 \bar{\phi}_n'') A_n^2 \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0}] e^{i\omega_n T_0 - \delta_n T_0} \\ & + (-k_{02} \phi_n^2 + E_{02} \phi_n' \phi_n'') A_n^2 e^{2i\omega_n T_0 - 2\delta_n T_0} + (-k_{03} \phi_n^3 + E_{03} \phi_n'^2 \phi_n'') A_n^3 e^{3i\omega_n T_0 - 3\delta_n T_0} \\ & + (-k_{02} \phi_n \bar{\phi}_n + E_{02} \phi_n'' \bar{\phi}_n') A_n \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0} \} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [(-2k_{02} \phi_k \phi_n + E_{02} \phi_k' \phi_n'' + E_{02} \phi_k'' \phi_n') \\ & \cdot A_k A_n e^{i(\omega_n + \omega_k) T_0 - (\delta_k + \delta_n) T_0} + (-2k_{02} \phi_k \bar{\phi}_n + E_{02} \phi_k' \bar{\phi}_n'' + E_{02} \phi_k'' \bar{\phi}_n') A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_n - \omega_k) T_0 - (\delta_k + \delta_n) T_0}] \\ & + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [(-2k_{03} \phi_m \phi_k \phi_n + 2E_{03} \phi_m'' \phi_k' \phi_n') A_m A_k A_n e^{i(\omega_m + \omega_k + \omega_n) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + (-2k_{03} \phi_m \phi_k \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_m'' \phi_k' \bar{\phi}_n') A_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_m + \omega_k - \omega_n) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + (-2k_{03} \bar{\phi}_m \phi_k \phi_n + 2E_{03} \bar{\phi}_m'' \phi_k' \phi_n') \bar{A}_m A_k A_n e^{i(\omega_m + \omega_n - \omega_k) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + (-2k_{03} \bar{\phi}_m \phi_k \bar{\phi}_n + 2E_{03} \bar{\phi}_m'' \phi_k' \bar{\phi}_n') \bar{A}_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_m - \omega_n - \omega_k) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{n=1 \\ (n=q)}}^N [(-k_{03} \phi_q \phi_n^2 + E_{03} \phi_q'' \phi_n'^2) A_q A_n^2 e^{i(2\omega_n + \omega_q)T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & + (-2k_{03} \phi_q \phi_n \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_q' \phi_n' \bar{\phi}_n') A_q A_n \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & + (-k_{03} \bar{\phi}_q \phi_n^2 + E_{03} \bar{\phi}_q'' \phi_n'^2) \bar{A}_q A_n^2 e^{i(2\omega_n - \omega_q)T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0}] + cc
 \end{aligned} \quad (5.9)$$

其中, ϕ_n' 和 ϕ_n'' 表示 $\phi_n(x)$ 对变量 x 的 1-阶和 2-阶导数, cc 表示其左边各项的复共轭之和。比较齐次方程(5.5a)和非齐次方程(5.9)可以看到, 它们的左端形式完全相同, 但是齐次方程(5.5a)有非零解 $\phi_n(x)$ (即线性自由振动的 n -阶振型函数)。因此, 若要使非齐次方程(5.9)有解, 必须满足可解性条件, 即要求非齐次方程(5.9)的非齐次项的长期项与其伴随方程(5.5a)的解 $\phi_n(x)$ 正交。因此, 可解性条件为

$$\begin{aligned}
 & \langle [(-2i\phi_n \omega_n + 2\phi_n \delta_n + \eta_1 \phi_n'' - c_1 \phi_n) \frac{\partial A_n}{\partial T_1} \\
 & + (-3k_{03} \phi_n^2 \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_n' \phi_n'' \bar{\phi}_n' + E_{03} \phi_n'^2 \bar{\phi}_n'') A_n^2 \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0}] e^{i\omega_n T_0 - \delta_n T_0}, \phi_n \rangle = 0
 \end{aligned} \quad (5.10)$$

其中, $\langle f, g \rangle$ 为在区间 $[0, 1]$ 上复函数的内积, 定义如下

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \bar{g} dx \quad (5.11)$$

这里, 取 $g = \phi_n(x)$, f 为(5.9)右边的第 1 项(长期项)。由式(5.10)和(5.11)得到

$$\begin{aligned}
 & (-2i\omega_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx + 2\delta_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx + \eta_1 \int_0^1 \phi_n'' \bar{\phi}_n dx - c_1 \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx) \frac{\partial A_n}{\partial T_1} + (-3k_{03} \int_0^1 \phi_n^2 \bar{\phi}_n dx \\
 & + 2E_{03} \int_0^1 \phi_n' \phi_n'' \bar{\phi}_n' dx + E_{03} \int_0^1 \phi_n'^2 \bar{\phi}_n'' dx) A_n^2 \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0} = 0
 \end{aligned}$$

此式可化为

$$\frac{\partial A_n}{\partial T_1} - k_{3n} A_n^2 \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0} = 0 \quad (5.12)$$

其中,

$$k_{3n} = \frac{-3k_{03} \int_0^1 \phi_n^2 \bar{\phi}_n dx + 2E_{03} \int_0^1 \phi_n' \phi_n'' \bar{\phi}_n' dx + E_{03} \int_0^1 \phi_n'^2 \bar{\phi}_n'' dx}{2i\omega_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx - 2\delta_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx - \eta_1 \int_0^1 \phi_n'' \bar{\phi}_n dx + c_1 \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx} \quad (5.13)$$

利用端部条件(5.6a), 不难求得 0-阶系统(5.5a) (5.6a) (即派生线性系统有阻尼自由振动)的固有角频率

$$\omega_{dn} = \sqrt{k_{11} + (n-1/2)^2 \pi^2} \cdot \sqrt{1 - \xi_n^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (5.14)$$

式中, ξ_n 为 n -阶相对阻尼系数, 给定为

$$\xi_n = \frac{c_1 + \eta_1 \beta_n^2}{2\sqrt{k_{11} + \beta_n^2}} = \frac{c_1 + \eta_1 (n-1/2)^2 \pi^2}{2\sqrt{k_{11} + (n-1/2)^2 \pi^2}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (5.15)$$

相应的模态为

$$\phi_n(x) = 2iC_{1n} \sin[(n - \frac{1}{2})\pi x] \quad (5.16)$$

式中, $C_{1n} = -\frac{A_{0n}}{4} e^{i\theta_{0n}}$, A_{0n} , θ_{0n} 分别为派生线性系统的振幅和相位, 是由系统的初始条件确定的实常数。

将(5.16)代入(5.13)可得

$$k_{3n} = -\frac{3C_{1n} \bar{C}_{1n} (\beta_n^4 E_{03} + 3k_{03})}{2i\omega_{dn}} = i \frac{3A_{0n}^2 (\beta_n^4 E_{03} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} \quad (5.17)$$

设(5.12)的解为 $A_n = A_n(T_1) = \alpha_n e^{i\gamma_n}$, 其中 $\alpha_n = \alpha_n(T_1)$, $\gamma_n = \gamma_n(T_1)$ 是时间尺度 T_1 的待定函数。将其代入(5.12)得到 α_n, γ_n 满足的方程

$$\frac{d\alpha_n}{dT_1} + i\alpha_n \frac{d\gamma_n}{dT_1} - k_{3n} \alpha_n^3 e^{-2i\gamma_n} = 0 \quad (5.18)$$

分开实部和虚部, 得到

$$\frac{d\alpha_n}{dT_1} = 0 \quad (5.19)$$

$$\alpha_n \frac{d\gamma_n}{dT_1} = k_{3n}^1 \alpha_n^3 e^{-2i\gamma_n} \quad (5.20)$$

由(5.19)可得, $\alpha_n = \alpha_{0n}$ (为常数)。代入(5.20)并积分得 $\gamma_n = k_{3n}^1 \alpha_{0n}^2 T_1 e^{-2i\gamma_{0n}} + \gamma_{0n}$ (γ_{0n} 为常数)。因此, 得到

$$A_n = \alpha_n e^{i\gamma_n} = \alpha_{0n} e^{i k_{3n}^1 \alpha_{0n}^2 T_1 e^{-2i\gamma_{0n}} + i\gamma_{0n}} \quad (5.21)$$

将(5.21)和(5.16)代入(5.8)得

$$\begin{aligned}
 w_0(x, T_0, T_1) &= \sum_{n=1}^N \alpha_{0n} \phi_n(x) e^{i(\omega_n T_0 + k_{1n}^2 \alpha_{0n}^2 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) + i\gamma_{0n} - \delta_n T_0} + cc \\
 &= \sum_{n=1}^N \alpha_{0n} A_{0n} \sin[(n-1/2)\pi x] \sin[\omega_n T_0 + k_{1n}^2 \alpha_{0n}^2 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + \theta_{0n} + \gamma_{0n}] e^{-\delta_n T_0}
 \end{aligned} \quad (5.22)$$

当非线性特性比较弱时, 非线性项可以被忽略, 上式应和派生线性振动系统的解一致, 因此, 得 $\alpha_{0n} = 1, \gamma_{0n} = 0$ 。所以(5.21)和(5.22)化为

$$A_n = \alpha_n e^{i\gamma_n} = e^{ik_{1n}^2 T_1 e^{-2\delta_n T_0}} \quad (5.23)$$

$$w_0(x, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^N A_{0n} \sin[(n-1/2)\pi x] \sin\left[\omega_n T_0 + \frac{3A_{0n}^2(\beta_n^4 E_{03} + 3k_{03})}{32\omega_n} T_1 e^{-2\delta_n T_0} + \theta_{0n}\right] e^{-\delta_n T_0} \quad (5.24)$$

将(5.24)代入端部条件(5.6b), 并注意到(5.6a)(5.7), 则(5.6b)可简化为

$$w_1|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w_1}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial T_0} \right]_{x=1} = 0 \quad (5.6b)'$$

将(5.16)代入(5.9)可得

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + k_{11} w_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial T_0 \partial x^2} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial T_0} \\
 &= \sum_{n=1}^N [4C_{1n}^2 (k_{02} \sin^2 \beta_n x + E_{02} \beta_n^3 \cos \beta_n x \sin \beta_n x) \\
 &\quad \cdot A_n^2 e^{2i\omega_n T_0 - 2\delta_n T_0} + 8iC_{1n}^3 \sin \beta_n x (k_{03} \sin^2 \beta_n x + E_{03} \beta_n^4 \cos^2 \beta_n x) A_n^3 e^{3i\omega_n T_0 - 3\delta_n T_0} \\
 &\quad - 4C_{1n} \bar{C}_{1n} (k_{02} \sin^2 \beta_n x + E_{02} \beta_n^3 \cos \beta_n x \sin \beta_n x) A_n \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0}] + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [4C_{1k} C_{1n} (2k_{02} \sin \beta_k x \sin \beta_n x + E_{02} \beta_k \beta_n^2 \cos \beta_k x \sin \beta_n x + E_{02} \beta_k^2 \beta_n \sin \beta_k x \cos \beta_n x) \\
 &\quad A_k A_n e^{i(\omega_n + \omega_k) T_0 - (\delta_k + \delta_n) T_0} - 4C_{1k} \bar{C}_{1n} (2k_{02} \sin \beta_k x \sin \beta_n x + E_{02} \beta_k \beta_n^2 \cos \beta_k x \sin \beta_n x \\
 &\quad + E_{02} \beta_k^2 \beta_n \sin \beta_k x \cos \beta_n x) A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_n - \omega_k) T_0 - (\delta_k + \delta_n) T_0}] + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [16i C_{1m} C_{1k} C_{1n} \sin \beta_m x \\
 &\quad (k_{03} \sin \beta_k x \sin \beta_n x + E_{03} \beta_m^2 \beta_k \beta_n \cos \beta_k x \cos \beta_n x) A_m A_k A_n e^{i(\omega_m + \omega_k + \omega_n) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\
 &\quad - 16i C_{1m} C_{1k} \bar{C}_{1n} \sin \beta_m x (k_{03} \sin \beta_k x \sin \beta_n x + E_{03} \beta_m^2 \beta_k \beta_n \cos \beta_k x \cos \beta_n x) A_m A_k \bar{A}_n \\
 &\quad e^{i(\omega_m + \omega_k - \omega_n) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} - 16i \bar{C}_{1m} C_{1k} C_{1n} \sin \beta_m x (k_{03} \sin \beta_k x \sin \beta_n x \\
 &\quad + E_{03} \beta_m^2 \beta_k \beta_n \cos \beta_k x \cos \beta_n x) \bar{A}_m A_k A_n e^{i(\omega_m + \omega_k - \omega_n) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} + 16i \bar{C}_{1m} C_{1k} \bar{C}_{1n} \sin \beta_m x \\
 &\quad (k_{03} \sin \beta_k x \sin \beta_n x + E_{03} \beta_m^2 \beta_k \beta_n \cos \beta_k x \cos \beta_n x) \bar{A}_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_m - \omega_k - \omega_n) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{n=1 \\ (n=q)}}^N [8i C_{1q} C_{1n}^2 \sin \beta_q x (k_{03} \sin^2 \beta_n x + E_{03} \beta_q^2 \beta_n^2 \cos^2 \beta_n x) A_q A_n^2 e^{i(2\omega_n + \omega_q)T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & - 16i C_{1q} C_{1n} \bar{C}_{1n} \sin \beta_q x (k_{03} \sin^2 \beta_n x + E_{03} \beta_q^2 \beta_n^2 \cos^2 \beta_n x) A_q A_n \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} \quad (5.25) \\
 & - 8i \bar{C}_{1q} C_{1n}^2 \sin \beta_q x (k_{03} \sin^2 \beta_n x + E_{03} \beta_q^2 \beta_n^2 \cos^2 \beta_n x) \bar{A}_q A_n^2 e^{i(2\omega_n - \omega_q)T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0}] + cc
 \end{aligned}$$

方程(5.25)中已不含长期项，它的解为

$$\begin{aligned}
 w_1(x, T_0, T_1) = & \sum_{n=1}^N [\phi_n(x) A_n^* e^{i\omega_n T_0 - \delta_n T_0} + a_{1n}(x) A_n^2 e^{2i\omega_n T_0 - 2\delta_n T_0} + b_{1n}(x) A_n^3 e^{3i\omega_n T_0 - 3\delta_n T_0} \\
 & + a_{0n}(x) A_n \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0}] + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [d_{1kn}(x) A_k A_n e^{i(\omega_n + \omega_k)T_0 - (\delta_k + \delta_n)T_0} \\
 & + d_{2kn}(x) A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_n - \omega_k)T_0 - (\delta_k + \delta_n)T_0}] + \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [f_{1mln}(x) A_m A_l A_n e^{i(\omega_n + \omega_m + \omega_l)T_0 - (\delta_n + \delta_l + \delta_m)T_0} \\
 & + f_{2mln}(x) A_m A_l \bar{A}_n e^{i(\omega_n + \omega_m - \omega_l)T_0 - (\delta_n + \delta_l + \delta_m)T_0} + f_{3mln}(x) \bar{A}_m A_l A_n e^{i(\omega_n + \omega_m - \omega_l)T_0 - (\delta_n + \delta_l + \delta_m)T_0} \\
 & + f_{4mln}(x) \bar{A}_m A_l \bar{A}_n e^{i(\omega_n - \omega_m - \omega_l)T_0 - (\delta_n + \delta_l + \delta_m)T_0}] + \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{n=1 \\ (n=q)}}^N [g_{1qn}(x) A_q A_n^2 e^{i(2\omega_n + \omega_q)T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & + g_{2qn}(x) A_q A_n \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} + g_{3qn}(x) \bar{A}_q A_n^2 e^{i(2\omega_n - \omega_q)T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0}] + cc \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

式中 A_n^* 是个复数。将(5.26)代入(5.25)可得

$$\begin{aligned}
 & [k_{11} + (2i\omega_n - 2\delta_n)^2 + c_1(2i\omega_n - 2\delta_n)]a_{1n} - [1 + \eta_1(2i\omega_n - 2\delta_n)]a_{1n}^* \\
 & = 4C_{1n}^2(k_{02} \sin^2 \beta_n x + E_{02}\beta_n^3 \cos \beta_n x \sin \beta_n x) \quad (5.27a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [k_{11} + (3i\omega_n - 3\delta_n)^2 + c_1(3i\omega_n - 3\delta_n)]b_{1n} - [1 + \eta_1(3i\omega_n - 3\delta_n)]b_{1n}^* \\
 & = 8i C_{1n}^3(k_{03} \sin^3 \beta_n x + E_{03}\beta_n^4 \cos^2 \beta_n x \sin \beta_n x) \quad (5.28a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (k_{11} + 4\delta_n^2 - 2\delta_n c_1)a_{0n} - (1 - 2\delta_n \eta_1)a_{0n}^* = -4C_{1n} \bar{C}_{1n} (k_{02} \sin^2 \beta_n x + E_{02}\beta_n^3 \cos \beta_n x \sin \beta_n x) \quad (5.29a)
 \end{aligned}$$

.....

可分别求得上面方程的解为

$$a_{1n} = \alpha_{1n} e^{\sqrt{m_1/m_2}x} + \alpha_{2n} e^{-\sqrt{m_1/m_2}x} + A_{1n} \sin^2 \beta_n x + B_{1n} \cos \beta_n x \sin \beta_n x + C_{1n}^* \cos^2 \beta_n x \quad (5.27b)$$

$$b_{1n} = \alpha_{3n} e^{\sqrt{m_3/m_4}x} + \alpha_{4n} e^{-\sqrt{m_3/m_4}x} + E_{1n} \sin^3 \beta_n x + F_{1n} \cos^2 \beta_n x \sin \beta_n x \quad (5.28b)$$

$$a_{0n} = \alpha_{01n} e^{\sqrt{m_5/m_6}x} + \alpha_{02n} e^{-\sqrt{m_5/m_6}x} + A_{00n} \sin^2 \beta_n x + B_{0n} \cos \beta_n x \sin \beta_n x + C_{0n}^* \cos^2 \beta_n x \quad (5.29b)$$

其中, A_{1n} 、 B_{1n} 等为与桩和土的材料性质、几何尺寸、线性系统的固有频率 ω_{dn} 和阻尼系数 δ_n 等有关的系数, 它们被给定为

$$A_{1n} = \frac{4C_{1n}^2 k_{02} (m_1 + 2m_2 \beta_n^2)}{(m_1 + 2m_2 \beta_n^2)^2 - 4m_2^2 \beta_n^4}, \quad B_{1n} = \frac{4C_{1n}^2 E_{02} \beta_n^3}{m_1 + 4m_2 \beta_n^2}, \quad C_{1n}^* = \frac{8C_{1n}^2 k_{02} m_2 \beta_n^2}{(m_1 + 2m_2 \beta_n^2)^2 - 4m_2^2 \beta_n^4}$$

$$E_{1n} = \frac{8iC_{1n}^3 [(m_3 + 7m_4 \beta_n^2) k_{03} + 2m_4 E_{03} \beta_n^6]}{(m_3 + 3m_4 \beta_n^2)(m_3 + 7m_4 \beta_n^2) - 12m_4^2 \beta_n^4},$$

$$F_{1n} = \frac{8iC_{1n}^3 [6m_4 k_{03} \beta_n^2 + E_{03} (m_3 + 3m_4 \beta_n^2) \beta_n^4]}{(m_3 + 3m_4 \beta_n^2)(m_3 + 7m_4 \beta_n^2) - 12m_4^2 \beta_n^4}$$

$$A_{00n} = \frac{-4C_{1n} \bar{C}_{1n} k_{02} (m_5 + 2m_6 \beta_n^2)}{(m_5 + 2m_6 \beta_n^2)^2 - 4m_6^2 \beta_n^4}, \quad B_{0n} = \frac{-4C_{1n} \bar{C}_{1n} E_{02} \beta_n^3}{m_5 + 4m_6 \beta_n^2},$$

$$C_{0n}^* = \frac{-8C_{1n} \bar{C}_{1n} k_{02} m_6 \beta_n^2}{(m_5 + 2m_6 \beta_n^2)^2 - 4m_6^2 \beta_n^4}$$

$$m_1 = k_{11} + (2i\omega_{dn} - 2\delta_n)^2 + c_1(2i\omega_{dn} - 2\delta_n), \quad m_2 = 1 + \eta_1(2i\omega_{dn} - 2\delta_n)$$

$$m_3 = k_{11} + (3i\omega_{dn} - 3\delta_n)^2 + c_1(3i\omega_{dn} - 3\delta_n), \quad m_4 = 1 + \eta_1(3i\omega_{dn} - 3\delta_n)$$

$$m_5 = (k_{11} + 4\delta_n^2 - 2\delta_n c_1), \quad m_6 = (1 - 2\delta_n \eta_1)$$

由端部条件(5.6)(5.7)可直接得到 a_{1n}, b_{1n}, a_{0n} 等满足的端部条件

$$\begin{aligned} a_{1n} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{da_{1n}}{dx} \Big|_{x=1} = 0, \quad b_{1n} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{db_{1n}}{dx} \Big|_{x=1} = 0, \\ a_{0n} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{da_{0n}}{dx} \Big|_{x=1} = 0, \quad \dots \end{aligned} \quad (5.30)$$

因此, 将(5.27b)~(5.29b) 代入 (5.30), 得到 $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \alpha_{3n}, \alpha_{4n}, \alpha_{01n}, \alpha_{02n}$ 为

$$\alpha_{1n} = -\frac{B_{1n} \beta_n + C_{1n}^* \sqrt{m_1/m_2} e^{-\sqrt{m_1/m_2}}}{\sqrt{m_1/m_2} (e^{\sqrt{m_1/m_2}} + e^{-\sqrt{m_1/m_2}})}, \quad \alpha_{2n} = \frac{B_{1n} \beta_n - C_{1n}^* \sqrt{m_1/m_2} e^{\sqrt{m_1/m_2}}}{\sqrt{m_1/m_2} (e^{\sqrt{m_1/m_2}} + e^{-\sqrt{m_1/m_2}})}$$

$$\alpha_{3n} = -\frac{F_{1n}\beta_n}{\sqrt{m_3/m_4}(e^{\sqrt{m_3/m_4}} + e^{-\sqrt{m_3/m_4}})}, \quad \alpha_{4n} = \frac{F_{1n}\beta_n}{\sqrt{m_3/m_4}(e^{\sqrt{m_3/m_4}} + e^{-\sqrt{m_3/m_4}})}$$

$$\alpha_{01n} = -\frac{B_{0n}\beta_n + C_{0n}^*\sqrt{m_5/m_6}e^{-\sqrt{m_5/m_6}}}{\sqrt{m_5/m_6}(e^{\sqrt{m_5/m_6}} + e^{-\sqrt{m_5/m_6}})}, \quad \alpha_{02n} = \frac{B_{0n}\beta_n - C_{0n}^*\sqrt{m_5/m_6}e^{\sqrt{m_5/m_6}}}{\sqrt{m_5/m_6}(e^{\sqrt{m_5/m_6}} + e^{-\sqrt{m_5/m_6}})}$$

将(5.23)代入(5.26)，类似于(5.21)可令 $A_n^* = A_{0n}^* e^{ik_{1n}^1 A_{0n}^{*2} T_1 e^{-2\delta_n T_0} + i\theta_{0n}^* - \delta_n T_0}$ ，得

$$\begin{aligned} w_1(x, T_0, T_1) = & \sum_{n=1}^N [\phi_n(x) A_{0n}^* e^{i(\omega_{dn} T_0 + k_{3n}^1 A_{0n}^{*2} T_1 e^{-2\delta_n T_0}) + i\theta_{0n}^* - \delta_n T_0} \\ & + a_{1n}(x) e^{2i(\omega_{dn} T_0 + k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - 2\delta_n T_0} \\ & + b_{1n}(x) e^{3i(\omega_{dn} T_0 + k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - 3\delta_n T_0} + a_{0n}(x) e^{-2\delta_n T_0}] \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [d_{1kn}(x) e^{i(\omega_{dk} T_0 + \omega_{dn} T_0 + k_{3k}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} + k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - (\delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + d_{2kn}(x) e^{i(\omega_{dk} T_0 - \omega_{dn} T_0 + k_{3k}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} - k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - (\delta_k + \delta_n) T_0}] \\ & + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [f_{1mkn}(x) e^{i(\omega_{dm} T_0 + \omega_{dk} T_0 + \omega_{dn} T_0 + k_{3m}^1 T_1 e^{-2\delta_m T_0} + k_{3k}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} + k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + f_{2mkn}(x) e^{i(\omega_{dm} T_0 + \omega_{dk} T_0 - \omega_{dn} T_0 + k_{3m}^1 T_1 e^{-2\delta_m T_0} + k_{3k}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} - k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + f_{3mkn}(x) e^{i(\omega_{dm} T_0 + \omega_{dn} T_0 - \omega_{dk} T_0 + k_{3k}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} + k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{3m}^1 T_1 e^{-2\delta_m T_0}) - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + f_{4mkn}(x) e^{i(\omega_{dm} T_0 - \omega_{dn} T_0 - \omega_{dk} T_0 + k_{3k}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} - k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{3m}^1 T_1 e^{-2\delta_m T_0}) - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0}] \\ & + \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{(n \neq q)} [g_{1qn}(x) e^{i(2\omega_{dn} T_0 + \omega_{dq} T_0 + 2k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{3q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - (2\delta_n + \delta_q) T_0} \\ & + g_{2qn}(x) e^{i(\omega_{dq} T_0 + k_{3q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - (2\delta_n + \delta_q) T_0} \\ & + g_{3qn}(x) e^{i(2\omega_{dn} T_0 - \omega_{dq} T_0 + 2k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{3q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - (2\delta_n + \delta_q) T_0}] + cc \\ = & \sum_{n=1}^N \{A_{0n}^* A_{0n}^* \sin[(n-1/2)\pi x] \sin(\omega_{dn} T_0 + \frac{3A_{0n}^2 A_{0n}^{*2} (\beta_n^4 E_{03} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} T_1 e^{-2\delta_n T_0} + \theta_{0n}^* + \theta_{0n}^*) e^{-\delta_n T_0} \\ & - 2\sqrt{(a_{1n}^R)^2 + (a_{1n}^I)^2} \sin[2(\omega_{dn} T_0 + \frac{3A_{0n}^2 (\beta_n^4 E_{03} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{1n}] e^{-2\delta_n T_0} \\ & - 2\sqrt{(b_{1n}^R)^2 + (b_{1n}^I)^2} \sin[3(\omega_{dn} T_0 + \frac{3A_{0n}^2 (\beta_n^4 E_{03} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{2n}] e^{-3\delta_n T_0} + 2a_{0n}^R(x) e^{-2\delta_n T_0}\} \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{d_{1kn}^* \sin[(\omega_{dk} T_0 + \omega_{dn} T_0 + k_{3k}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} + k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{1kn}] e^{-(\delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + d_{2kn}^* \sin[(\omega_{dk} T_0 - \omega_{dn} T_0 + k_{3k}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} - k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{2kn}] e^{-(\delta_k + \delta_n) T_0}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{f_{1mkn}^{\circ} \sin[(\omega_{dm}T_0 + \omega_{dk}T_0 + \omega_{dn}T_0 \\
 & + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{2n}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} + k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_d T_0}) - \theta_{1mkn}] e^{-(\delta_n + \delta_k + \delta_d)T_0} \\
 & + f_{2mkn}^{\circ} \sin[(\omega_{dm}T_0 + \omega_{dk}T_0 - \omega_{dn}T_0 + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{2n}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} - k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_d T_0}) - \theta_{2mkn}] e^{-(\delta_n + \delta_k + \delta_d)T_0} \\
 & + f_{3mkn}^{\circ} \sin[(\omega_{dk}T_0 + \omega_{dn}T_0 - \omega_{dm}T_0 + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{2n}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} - k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_d T_0}) - \theta_{3mkn}] e^{-(\delta_n + \delta_k + \delta_d)T_0} \\
 & + f_{4mkn}^{\circ} \sin[(\omega_{dk}T_0 - \omega_{dn}T_0 - \omega_{dm}T_0 + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{2n}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} - k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_d T_0}) - \theta_{4mkn}] e^{-(\delta_n + \delta_k + \delta_d)T_0} \} \\
 & + \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^{N-1} \{g_{1qn}^{\circ} \sin[(2\omega_{dn}T_0 + \omega_{dq}T_0 + 2k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{2n}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - \theta_{1qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & + g_{2qn}^{\circ} \sin[(\omega_{dq}T_0 + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{2qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & + g_{3qn}^{\circ} \sin[(2\omega_{dn}T_0 - \omega_{dq}T_0 + 2k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{2n}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - \theta_{3qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)T_0} \}
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

式中, $\sin \theta_{1n} = \frac{a_{1n}^R}{\sqrt{(a_{1n}^R)^2 + (a_{1n}^I)^2}}$, $\sin \theta_{2n} = \frac{b_{1n}^R}{\sqrt{(b_{1n}^R)^2 + (b_{1n}^I)^2}}$. $A_{0n}^{\circ}, \theta_{0n}^{\circ}$ 是由初始条件确

定的实数。将(5.31)(5.24)代入初始条件(5.7)得,

$$A_{0n}^{\circ} A_{0n} \sin[(n-1/2)\pi x] \sin(\theta_{0n} + \theta_{0n}^{\circ}) + 2a_{1n}^R + 2b_{1n}^R + 2a_{0n}^R + \dots = 0 \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{0n}^{\circ} A_{0n} \sin[(n-1/2)\pi x] [\omega_{dn} \cos(\theta_{0n} + \theta_{0n}^{\circ}) - \delta_n \sin(\theta_{0n} + \theta_{0n}^{\circ})] - 4a_{1n}^I \omega_{dn} - 4\delta_n a_{1n}^R \\
 & - 6b_{1n}^I \omega_{dn} - 6\delta_n b_{1n}^R - 4a_{0n}^R \delta_n + A_{0n} \sin[(n-1/2)\pi x] \frac{3A_{0n}^2 (\beta_n^I E_{03} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} \cos \theta_{0n} + \dots = 0
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

当 $N = n = 1$ 时, 上两式中的省略部分为零。求解方程(5.32)和(5.33)可得 $A_{0n}^{\circ}, \theta_{0n}^{\circ}$ 。

将式(5.24)、(5.31)代入(5.2), 并令 $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ 得振动系统的响应:

$$\begin{aligned}
 w(x, t, \varepsilon) = & \sum_{n=1}^N \{A_{0n} \sin[(n-1/2)\pi x] \sin[\omega_{dn}^{\text{NL}} t + \theta_{0n}^{\circ}] e^{-\delta_n t} \\
 & - 2\varepsilon \sqrt{(a_{1n}^R)^2 + (a_{1n}^I)^2} \sin[2\omega_{dn}^{\text{NL}} t - \theta_{1n}^{\circ}] e^{-2\delta_n t} - 2\varepsilon \sqrt{(b_{1n}^R)^2 + (b_{1n}^I)^2} \sin[3\omega_{dn}^{\text{NL}} t - \theta_{2n}^{\circ}] e^{-3\delta_n t} \\
 & + 2\varepsilon a_{0n}^R e^{-2\delta_n t} + \varepsilon A_{0n}^{\circ} A_{0n} \sin[(n-1/2)\pi x] \sin[\omega_{dn}^{\text{NL}} (A_{0n}^{\text{R}2} + (1 - A_{0n}^{\text{I}2}) \omega_{dn} / \omega_{dn}^{\text{NL}}) t + \theta_{0n} + \theta_{0n}^{\circ}] e^{-\delta_n t} \} \\
 & + \varepsilon \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{d_{1kn}^{\circ} \sin[(\omega_{dk}^{\text{NL}} + \omega_{dn}^{\text{NL}}) t - \theta_{1kn}^{\circ}] e^{-(\delta_k + \delta_n) t} + d_{2kn}^{\circ} \sin[(\omega_{dk}^{\text{NL}} - \omega_{dn}^{\text{NL}}) t - \theta_{2kn}^{\circ}] e^{-(\delta_k + \delta_n) t} \} \\
 & + \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{f_{1mkn}^{\circ} \sin[(\omega_{dm}^{\text{NL}} + \omega_{dk}^{\text{NL}} + \omega_{dn}^{\text{NL}}) t - \theta_{1mkn}^{\circ}] e^{-(\delta_m + \delta_k + \delta_n) t} \\
 & + f_{2mkn}^{\circ} \sin[(\omega_{dm}^{\text{NL}} + \omega_{dk}^{\text{NL}} - \omega_{dn}^{\text{NL}}) t - \theta_{2mkn}^{\circ}] e^{-(\delta_m + \delta_k + \delta_n) t} \\
 & + f_{3mkn}^{\circ} \sin[(\omega_{dk}^{\text{NL}} + \omega_{dn}^{\text{NL}} - \omega_{dm}^{\text{NL}}) t - \theta_{3mkn}^{\circ}] e^{-(\delta_m + \delta_k + \delta_n) t} \\
 & + f_{4mkn}^{\circ} \sin[(\omega_{dk}^{\text{NL}} - \omega_{dn}^{\text{NL}} - \omega_{dm}^{\text{NL}}) t - \theta_{4mkn}^{\circ}] e^{-(\delta_m + \delta_k + \delta_n) t} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + f_{4mn}^* \sin[(\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL} - \omega_{dm}^{NL})t - \theta_{4mn}] e^{-(\delta_n + \delta_k + \delta_m)t} \\
 & + \varepsilon \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{(n=q)} [g_{1qn}^* \sin[(2\omega_{dn}^{NL} + \omega_{dq}^{NL})t - \theta_{1qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)t} \\
 & + g_{2qn}^* \sin[\omega_{dq}^{NL} t - \theta_{2qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)t} + g_{3qn}^* \sin[(2\omega_{dn}^{NL} - \omega_{dq}^{NL})t - \theta_{3qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)t} \}
 \end{aligned} \quad (5.34)$$

非线性系统的第 n - 阶主频率为

$$\omega_{dn}^{NL} = \omega_{dn} + \frac{3Q_3 A_{0n}^2}{32\omega_{dn}} e^{-2\delta_n t} \quad (5.35)$$

式中, Q_3 是一个描述桩基和土的非线性特征量, 给定为

$$Q_3 = \varepsilon(\beta_n^4 E_{03} + 3k_{03}) = (n-1/2)^4 \pi^4 E_{33} + 3k_{33} \quad (5.36)$$

由(5.35)可见, 非线性系统的第 n - 阶主频率 ω_{dn}^{NL} 不仅与派生线性振动系统的 n - 阶固有频率 ω_{dn} 和阻尼系数 δ_n 有关, 而且也与振幅 A_{0n} 和非线性特征量 Q_3 有关。

由式(5.34)可见, 非线性系统的响应中除基频为 ω_{dn}^{NL} 的谐波以外, 还在 ε 项中含有频率为 $2\omega_{dn}^{NL}$ 、 $3\omega_{dn}^{NL}$ 的高次谐波和频率为 $\omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dm}^{NL} + \omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dm}^{NL} + \omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL} - \omega_{dm}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL} - \omega_{dm}^{NL}$ 、 $2\omega_{dn}^{NL} + \omega_{dq}^{NL}$ 、 $2\omega_{dn}^{NL} - \omega_{dq}^{NL}$ 、 ω_{dq}^{NL} ($n \neq q$) 的谐波存在。非线性系统响应的相位角也不同于派生线性系统的相位角 θ_{0n} 。由于粘性的影响, 系统的响应随着时间而衰减, 但是各项的衰减速度不同。由于非线性的影响使系统的振动零点发生变化, 对称轴线发生偏移。非线性项对式(5.34)中右边第 5 项的频率的影响也较复杂。

5.4 数值计算与结果分析

对式(5.34)(5.35)进行数值计算, 参考文献[1,2]中的有关试验数据, 取定如下计算参数: $l = 20$ m, $d = 0.35$ m, $\rho = 2.4 \times 10^3$ kg/m³, $E_1 = 2.1 \times 10^{10}$ Pa、 $E_2 = 5.5 \times 10^{12}$ Pa、 $E_3 = 2.5 \times 10^{14}$ Pa, $\eta_n = 1.0 \times 10^5$ N·s/m² (对无粘性桩基材料取 $\eta_n = 0$), $k_{s1} = 2.1 \times 10^6$ N/m³, $k_{s2} = 0.65 \times 10^8$ N/m⁴, $k_{s3} = 0.65 \times 10^9$ N/m⁵ (对线性材料取 $E_2 = E_3 = k_{s2} = k_{s3} = 0$), $c_n = 5.76 \times 10^2$ N·s/m³ (对无粘性地基土材料取 $c_n = 0$),

$A_{0n} = 0.002$, $\theta_{0n} = \pi/2$, $n=1$ (或取 $n=2$), $\alpha_n = 1, \varepsilon = 0.01, x=1$ 。并且由此可以算得 $Q_3 = 3.87 \times 10^5$ (当 $n=1$)和 $Q_3 = 1.78 \times 10^7$ (当 $n=2$)。数值计算结果见下列图中。

图 5.1 和图 5.2 分别为当 $n=1$ 和 $n=2$ 时无粘性的非线性系统在 Q_3 取不同值时振幅与频率的关系曲线。可见, Q_3 的影响是很明显的。

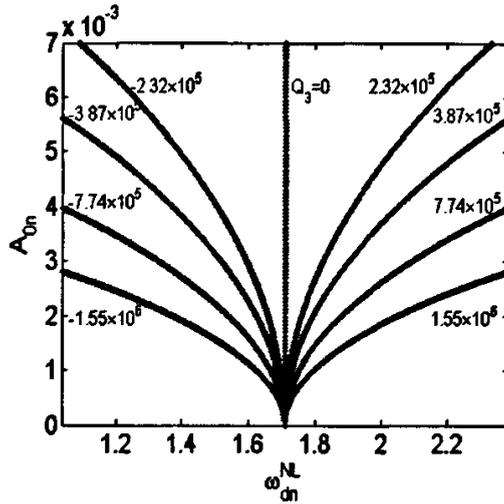


图 5.1 无粘性非线性系统的振幅与频率关系曲线($n=1$)

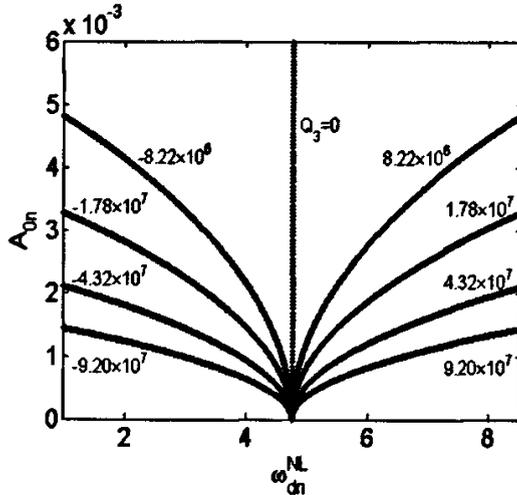


图 5.2 无粘性非线性系统的振幅与频率关系曲线($n=2$)

图 5.3 和图 5.4 分别为当 $n=1$ 和 $n=2$ 时的粘性非线性系统在不同时刻频率比与振幅的关系, 可见, 频率比随初始振幅的增加而快速增加; 图 5.5 和图 5.6 分别

为当 $n=1$ 和 $n=2$ 时的粘性非线性系统在不同振幅时频率比与时间的关系曲线，可见，频率比随时间的增加而迅速衰减；图 5.7 和图 5.8 分别为当 $n=1$ 和 $n=2$ 时粘性非线性系统在不同时刻频率比与 Q_3 的关系曲线，可见，频率比随 Q_3 的增加而线性增加。

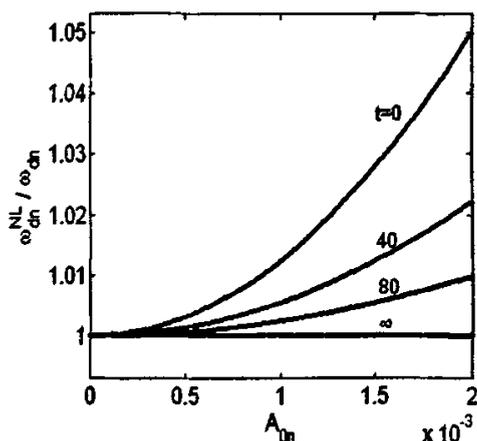


图 5.3 不同时刻粘性非线性系统的频率比与振幅的关系 ($n=1$)

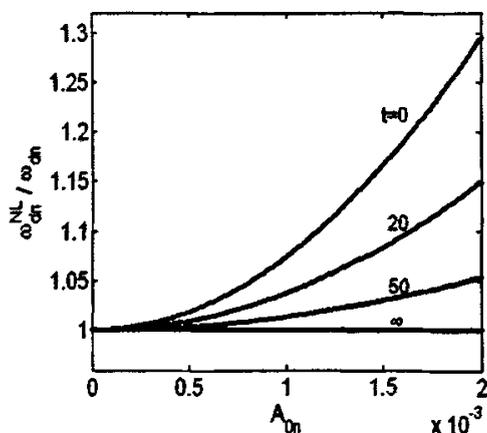


图 5.4 不同时刻粘性非线性系统频率比与振幅的关系 ($n=2$)

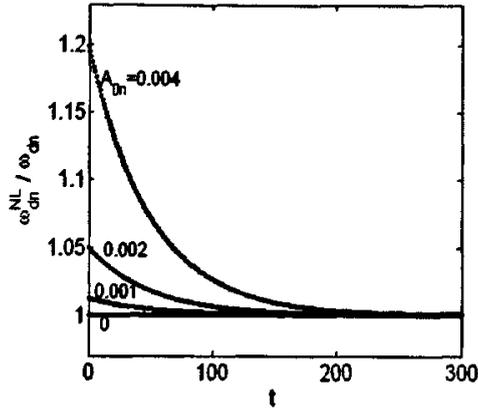


图 5.5 不同振幅时粘性非线性系统频率比与时间的关系 ($n=1$)

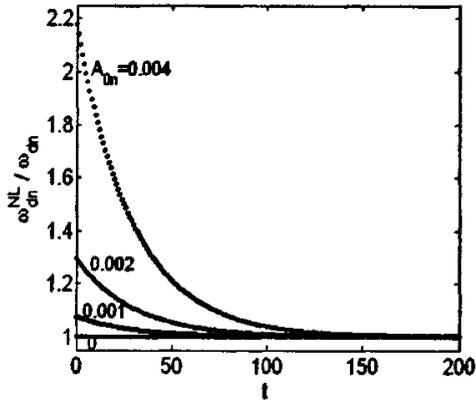


图 5.6 不同振幅时粘性非线性系统频率比与时间的关系 ($n=2$)

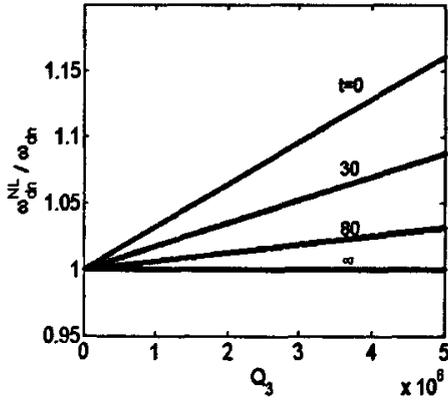


图 5.7 不同时刻粘性非线性系统的频率比与 Q_3 的关系 ($n=1$)

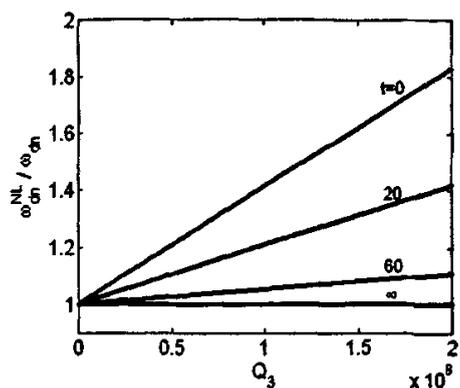


图 5.8 不同时刻粘性非线性系统频率比与 Q_3 的关系 ($n=2$)

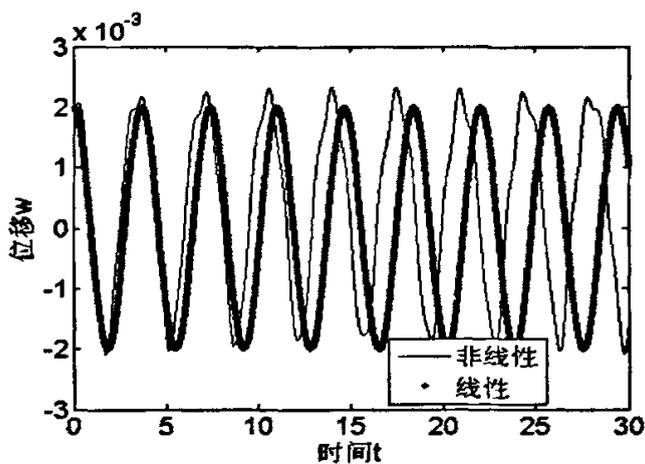


图 5.9 无粘性线性与非线性系统时程曲线 ($N=n-1$)

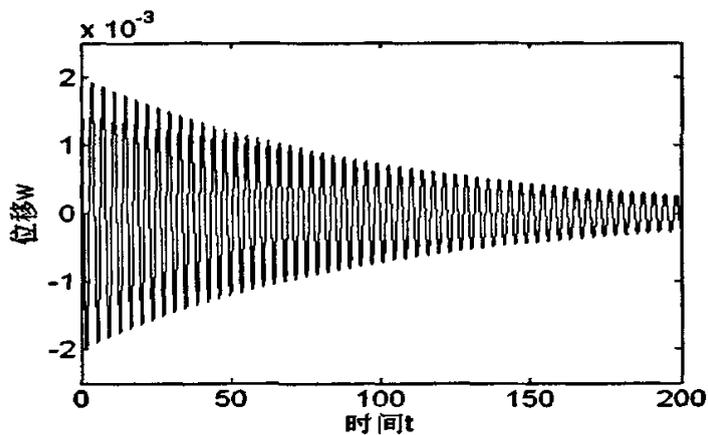


图 5.10a 粘性线性系统的时程曲线 ($N=n-1$)

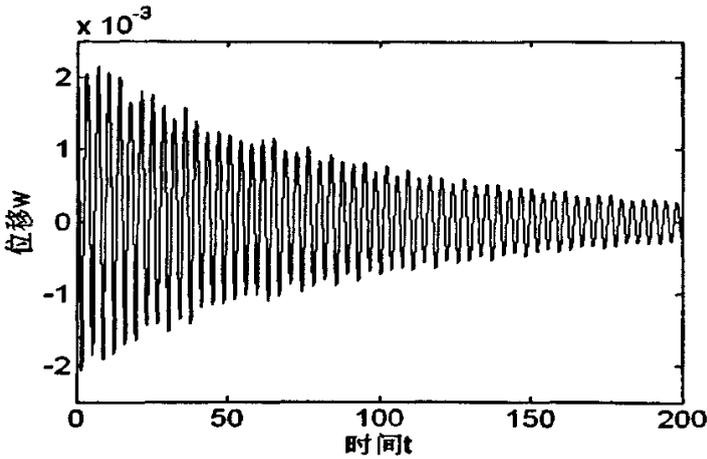


图 5.10b 粘性非线性系统的时程曲线 ($N = n = 1$)

图 5.9 和图 5.10 为无粘性和有粘性的线性与非线性系统的时程曲线。可见，无粘性线性系统的振动是周期的，频率也保持不变；无粘性非线性系统的振动是近似周期的，振幅略有波动，并大于线性系统的振幅，振动频率也大于线性系统，振动零点也有变化。粘性线性系统的振幅以一个不变的频率有规则地衰减；粘性非线性系统的振幅也迅速地衰减，但并不是很有规则，振幅略有波动，振动频率及振动零点也稍有变化。

5.5 小结

本章假定桩基及桩周土材料的非线性弹性都比较弱的情况下，用多时间尺度法研究了一端固定、另一端轴向自由的端部条件下桩基的非线性轴向自由振动问题，求出了桩基轴向振动 n -阶主频率和位移响应的近似表达式。研究结果表明，非线性系统的 n -阶主频率不仅与派生线性振动系统的 n -阶固有频率有关，而且也与振幅、阻尼系数和材料的非线性特征量有关；非线性系统的响应中除主频率为 ω_{dn}^{NL} 的谐波以外，还在小量 ε 项中含有频率为 $2\omega_{dn}^{NL}$ 、 $3\omega_{dn}^{NL}$ 的高次谐波和频率为 $\omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dm}^{NL} + \omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dm}^{NL} + \omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL} - \omega_{dm}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL} - \omega_{dm}^{NL}$ 、 $2\omega_{dn}^{NL} + \omega_{dq}^{NL}$ 、 $2\omega_{dn}^{NL} - \omega_{dq}^{NL}$ 、 ω_{dq}^{NL} ($n \neq q$) 的谐波存在，还受到其它较复杂频率的干扰。系统的振动零点也会发生变化，对称轴线会发生偏移，系统响应的相位角也与派生线性系统的相位角不同。由于粘性的影响，系统的响应随着时间而衰减，

衰减速度与派生线性系统是有差别的。值得说明的是，若采用单模态的方法(即去掉式(5.8)中的求和号)，则会导致某些非线性效应的失真，得不到应有的结论。

第六章 桩基非线性横向振动的多时间尺度分析

6.1 前言

本章假定桩基及桩周土的材料分别满足非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系，利用第二章导出的分析桩基非线性横向振动的偏微分方程，在假设桩基和土的非线性弹性都比较弱的情况下，用多时间尺度法研究了桩基的非线性横向自由振动，得到了 n -阶主频率和位移响应的近似表达式，并给出了数值算例，考察了参数的影响，得到了一些有益的新结论。

6.2 问题的数学描述

考虑一桩长为 l ，外径为 D 、内径为 d_1 ，横截面面积为 A ，材料密度为 ρ 的圆形管桩，设初始静止，时间为 T ，在桩顶承受一静荷载。设桩顶几何中心处为坐标 X 轴的原点，桩的轴向向下为 X 轴的正方向，水平向右为 Y 轴的正方向，坐标系如图 2.2 所示。设因桩身弯曲而引起的土体对桩的横向抗力及阻尼与位移及速度之间满足的非线性关系为(2.11)，同时，假设桩基的轴向应力 $\sigma(X,T)$ 和轴向应变 $\varepsilon(X,T)$ 满足的非线性弹性和线性粘弹性的本构关系为(2.13)。为了明确起见，设桩底浅嵌岩，桩头浅嵌固于承台或地基梁，即桩底和桩顶的水平位移及弯矩都为零。当 $q=0$ 时，由第二章的模型得到桩基横向振动无量纲化形式的非线性微分方程(2.21)、端部条件(2.22)(2.23)以及初始条件(2.24)(2.25)，即

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \beta_1 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 - \beta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\gamma_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \gamma_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta_1 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \\ & + p_0 [1 - (1-\alpha)x] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - p_0 (1-\alpha) \frac{\partial w}{\partial x} + k_{11} w + k_{22} w^2 + k_{33} w^3 + c_1 \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$w|_{x=1} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\beta_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\gamma_1}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \right] \Big|_{x=1} = 0 \quad (2.22)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\beta_1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\gamma_1}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \right] \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.23)$$

$$w(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x) \quad (2.24)$$

为了便于分析并使初始时刻端部无弯矩的条件被满足, 设初始位移满足

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \Big|_{x=1} = 0 \quad (2.25)$$

6.3 多时间尺度法求解

显然, 要得到边值问题(2.21)-(2.25)的完全解是很困难的。我们拟用多时间尺度法来得到该问题的近似解。若设 $\alpha = 1$, 在桩和土的非线性弹性均比较弱的条件下, 可设 $k_{22} = \varepsilon k_{02}$, $k_{33} = \varepsilon k_{03}$, $\beta_1 = \varepsilon \beta_{01}$, $\gamma_1 = \varepsilon \gamma_{01}$, ε 为小参数, 方程(2.21)可重新写成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_{11} w + \eta_1 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + c_1 \frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon [-k_{02} w^2 - k_{03} w^3 \\ + \beta_{01} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 + \beta_{01} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 2\gamma_{01} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 - \gamma_{01} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}] \end{aligned} \quad (6.1)$$

而(2.22), (2.23)可写成为

$$w|_{x=1} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\varepsilon \beta_{01}}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\varepsilon \gamma_{01}}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \right] \Big|_{x=1} = 0 \quad (6.2a)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\varepsilon \beta_{01}}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\varepsilon \gamma_{01}}{3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^3 \right] \Big|_{x=0} = 0 \quad (6.2b)$$

而(2.24)不变, 重新写为

$$w(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x) \quad (6.3)$$

令 $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ 为不同尺度的时间变量, 并设(6.1)的近似解可以表示为

$$w(x,t,\varepsilon) = w_0(x,T_0,T_1) + \varepsilon w_1(x,T_0,T_1) + \dots \quad (6.4)$$

由(6.4)式表达的振动过程包含了不同时间尺度的时间历程, 不同的时间尺度描述过程变化的不同节奏, 阶数愈低, 变化愈缓慢, 阶数愈高, 变化愈迅速。 $T_0 = t$

为对应于线性系统以固有频率 ω_n 运动的快时间尺度, $T_1 = \varepsilon t$ 是由于桩和土的材料非线性造成的慢时间尺度。同时, 将不同尺度的时间变量视为独立变量, 则 $w(x, t, \varepsilon)$ 成为自变量 x 和 2 个独立时间变量 T_0, T_1 的函数。对时间的微分可按照 ε 的幂次展开为

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \dots \quad (6.6)$$

将(6.4)代入动力学方程(6.1), 并注意到(6.5)和(6.6), 比较 ε 同次幂的系数得到 0-阶和 1-阶线性偏微分方程

$$\varepsilon^0: \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + p_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + k_{11} w_0 + \eta_1 \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^4 \partial T_0} + c_1 \frac{\partial w_0}{\partial T_0} = 0 \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: & \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + p_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + k_{11} w_1 + \eta_1 \frac{\partial^5 w_1}{\partial x^4 \partial T_0} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial T_0} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \eta_1 \frac{\partial^5 w_0}{\partial x^4 \partial T_1} - c_1 \frac{\partial w_0}{\partial T_1} \\ & -k_w w_0^2 - k_w w_0^3 + \beta_{01} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right)^2 + \beta_{01} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2\gamma_{01} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right)^2 - \gamma_{01} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (6.8)$$

相应于变量 w_0, w_1 的端部条件为

$$w_0|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial T_0} \right]_{x=0} = 0 \quad (6.9a)$$

$$w_0|_{x=l} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial T_0} \right]_{x=l} = 0 \quad (6.9b)$$

$$w_1|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial T_0} \right)_{x=0} = - \left[\eta_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial T_1} - \frac{\beta_{01}}{2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\gamma_{01}}{3} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^3 \right]_{x=0} \quad (6.10a)$$

$$w_1|_{x=l} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial T_0} \right)_{x=l} = - \left[\eta_1 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial T_1} - \frac{\beta_{01}}{2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\gamma_{01}}{3} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^3 \right]_{x=l} \quad (6.10b)$$

相应于变量 w_0, w_1 的初始条件为

$$w_0|_{T_0-T_1=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial w_0}{\partial T_0} \right|_{T_0-T_1=0} = v_0(x); \quad w_1|_{T_0-T_1=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w_1}{\partial T_0} \right|_{T_0-T_1=0} = -\left. \frac{\partial w_0}{\partial T_1} \right|_{T_0-T_1=0} \quad (6.11)$$

同时, 初始位移在端部满足的条件(6.3)仍成立。

在依次求解过程中, 利用消除久期项的附加条件和端部条件、初始条件, 可导出问题(6.1)-(6.3)的近似解的表达式。

将 0-阶方程(6.7)的位移写成复数形式

$$w_0(x, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^N [\phi_n(x) A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0 - \delta_n T_0} + \bar{\phi}_n(x) \bar{A}_n(T_1) e^{-i\omega_n T_0 - \delta_n T_0}] \quad (6.12)$$

其中, $N \geq 1$ 为整数, $\bar{(\cdot)}$ 表示 (\cdot) 的复共轭, $\delta_n = \frac{c_1 + \eta_1(n\pi)^4}{2}$ 为派生线性振动系统

的阻尼系数, $\beta_{1n} = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)。

将式(6.12)代入式(6.8)得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + p_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + k_{11} w_1 + \eta_1 \frac{\partial^5 w_1}{\partial x^4 \partial T_0} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial T_0} = \sum_{n=1}^N \{ [(-2i\phi_n \omega_n + 2\phi_n \delta_n - \eta_1 \phi_n^{(4)}) \\ & - c_1 \phi_n] \frac{\partial A_n}{\partial T_1} + (-3k_{03} \phi_n^2 \bar{\phi}_n - 4\gamma_{01} \phi_n^2 \bar{\phi}_n^m \phi_n^m - 2\gamma_{01} (\phi_n^m)^2 \bar{\phi}_n^m - \gamma_{01} (\phi_n^m)^2 \bar{\phi}_n^{(4)} - 2\gamma_{01} \bar{\phi}_n^m \phi_n^m \phi_n^{(4)}) \\ & A_n^2 \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0} \} e^{i\omega_n T_0 - \delta_n T_0} + (-k_{02} \phi_n^2 + \beta_{01} (\phi_n^m)^2 + \beta_{01} \phi_n^m \phi_n^{(4)}) A_n^2 e^{2i\omega_n T_0 - 2\delta_n T_0} \\ & + (-k_{03} \phi_n^3 - 2\gamma_{01} \phi_n^m (\phi_n^m)^2 - \gamma_{01} (\phi_n^m)^2 \phi_n^{(4)}) A_n^3 e^{3i\omega_n T_0 - 3\delta_n T_0} \\ & + (-k_{02} \phi_n \bar{\phi}_n + \beta_{01} \phi_n^m \bar{\phi}_n^m + \beta_{01} \bar{\phi}_n^m \phi_n^{(4)}) A_n \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0} \} \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [(-2k_{02} \phi_k \phi_n + \beta_{01} \phi_k^{(4)} \phi_n^m + \beta_{01} \phi_k^m \phi_n^{(4)} + 2\beta_{01} \phi_k^m \phi_n^m) A_k A_n e^{i(\omega_k + \omega_n) T_0 - (\delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + (-2k_{02} \phi_k \bar{\phi}_n + \beta_{01} \phi_k^{(4)} \bar{\phi}_n^m + \beta_{01} \phi_k^m \bar{\phi}_n^{(4)} + 2\beta_{01} \phi_k^m \bar{\phi}_n^m) A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_k - \omega_n) T_0 - (\delta_k + \delta_n) T_0}] \\ & + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [(-2k_{03} \phi_m \phi_k \phi_n - 4\gamma_{01} \phi_m^m \phi_k^m \phi_n^m - 2\gamma_{01} \phi_m^{(4)} \phi_k^m \phi_n^m) A_m A_k A_n e^{i(\omega_m + \omega_k + \omega_n) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + (-2k_{03} \phi_m \phi_k \bar{\phi}_n - 4\gamma_{01} \phi_m^m \phi_k^m \bar{\phi}_n^m - 2\gamma_{01} \phi_m^{(4)} \phi_k^m \bar{\phi}_n^m) A_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_m + \omega_k - \omega_n) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + (-2k_{03} \bar{\phi}_m \phi_k \phi_n - 4\gamma_{01} \bar{\phi}_m^m \phi_k^m \phi_n^m - 2\gamma_{01} \bar{\phi}_m^{(4)} \phi_k^m \phi_n^m) \bar{A}_m A_k A_n e^{i(\omega_m - \omega_k + \omega_n) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + (-2k_{03} \bar{\phi}_m \phi_k \bar{\phi}_n - 4\gamma_{01} \bar{\phi}_m^m \phi_k^m \bar{\phi}_n^m - 2\gamma_{01} \bar{\phi}_m^{(4)} \phi_k^m \bar{\phi}_n^m) \bar{A}_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_m - \omega_k - \omega_n) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0}] \\ & + \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^N [(-k_{03} \phi_q \phi_n^2 - 2\gamma_{01} \phi_q^m (\phi_n^m)^2 - \gamma_{01} \phi_q^{(4)} (\phi_n^m)^2) A_q A_n^2 e^{i(2\omega_n + \omega_q) T_0 - (2\delta_n + \delta_q) T_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+(-2k_{03}\phi_q\phi_n\bar{\phi}_n - 4\gamma_{01}\phi_q^*\phi_n^*\bar{\phi}_n^* - 2\gamma_{01}\phi_q^{(4)}\phi_n^*\bar{\phi}_n^*)A_qA_n\bar{A}_ne^{i\omega_nT_0-(2\delta_n+\delta_q)T_0} \\
 &+(-k_{03}\bar{\phi}_q\phi_n^2 - 2\gamma_{01}\bar{\phi}_q^*(\phi_n^*)^2 - \gamma_{01}\bar{\phi}_q^{(4)}(\phi_n^*)^2)A_qA_n^2e^{i(2\omega_n-\omega_{qn})T_0-(2\delta_n+\delta_q)T_0}] + cc
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

其中, ϕ_n' 和 ϕ_n'' 表示 $\phi_n(x)$ 对变量 x 的 1-阶和 2-阶导数, cc 表示其左边各项的复共轭之和。比较齐次方程(6.7)和非齐次方程(6.13)可以看到, 它们的左端形式完全相同, 但是齐次方程(6.7)有非零解 $\phi_n(x)$ (即线性自由振动的 n -阶振型函数)。因此, 若要使非齐次方程(6.13)有解, 必须满足可解性条件, 即要求非齐次方程(6.13)的非齐次项的长期项与其伴随方程(6.7)的解 $\phi_n(x)$ 正交。因此, 可解性条件为

$$\begin{aligned}
 &\langle [(-2i\phi_n\omega_{qn} + 2\phi_n\delta_n - \eta_1\phi_n^{(4)} - c_1\phi_n)\frac{\partial A_n}{\partial T_1} + (-3k_{03}\phi_n^2\bar{\phi}_n - 4\gamma_{01}\phi_n^*\phi_n^*\bar{\phi}_n^* \\
 &- 2\gamma_{01}(\phi_n^*)^2\bar{\phi}_n^* - \gamma_{01}(\phi_n^*)^2\bar{\phi}_n^{(4)} - 2\gamma_{01}\bar{\phi}_n^*\phi_n^*\phi_n^{(4)})A_n^2\bar{A}_ne^{-2\delta_nT_0}]e^{i\omega_nT_0-\delta_nT_0}, \phi_n \rangle = 0
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

其中 $\langle f, g \rangle$ 为在区间 $[0,1]$ 上复函数的内积, 定义如下

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f\bar{g}dx \tag{6.15}$$

这里, 取 $g = \phi_n(x)$, f 为(6.13)右边的第 1 项 (长期项)。由式(6.14)和(6.15)得到

$$\begin{aligned}
 &(-2i\omega_{qn}\int_0^1\phi_n\bar{\phi}_n dx + 2\delta_n\int_0^1\phi_n\bar{\phi}_n dx - \eta_1\int_0^1\phi_n^{(4)}\bar{\phi}_n dx - c_1\int_0^1\phi_n\bar{\phi}_n dx)\frac{\partial A_n}{\partial T_1} \\
 &+(-3k_{03}\int_0^1\phi_n^2\bar{\phi}_n dx - 4\gamma_{01}\int_0^1\phi_n^*\phi_n^*\bar{\phi}_n^* dx - 2\gamma_{01}\int_0^1(\phi_n^*)^2\bar{\phi}_n^* dx \\
 &- \gamma_{01}\int_0^1(\phi_n^*)^2\bar{\phi}_n^{(4)} dx - 2\gamma_{01}\int_0^1\bar{\phi}_n^*\phi_n^*\phi_n^{(4)} dx)A_n^2\bar{A}_ne^{-2\delta_nT_0} = 0
 \end{aligned}$$

此式可化为

$$\frac{\partial A_n}{\partial T_1} - k_{3n}A_n^2\bar{A}_ne^{-2\delta_nT_0} = 0 \tag{6.16}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 k_{3n} = &[-3k_{03}\int_0^1\phi_n^2\bar{\phi}_n dx - 4\gamma_{01}\int_0^1\phi_n^*\phi_n^*\bar{\phi}_n^* dx - 2\gamma_{01}\int_0^1(\phi_n^*)^2\bar{\phi}_n^* dx - \gamma_{01}\int_0^1(\phi_n^*)^2\bar{\phi}_n^{(4)} dx \\
 &- 2\gamma_{01}\int_0^1\bar{\phi}_n^*\phi_n^*\phi_n^{(4)} dx] / (2i\omega_{qn}\int_0^1\phi_n\bar{\phi}_n dx - 2\delta_n\int_0^1\phi_n\bar{\phi}_n dx + \eta_1\int_0^1\phi_n^{(4)}\bar{\phi}_n dx + c_1\int_0^1\phi_n\bar{\phi}_n dx)
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

利用端部条件(6.9), 并注意到(6.3), 不难求得 0-阶系统(6.7)(6.9) (即派生线性系统有阻尼自由振动) 的固有角频率

$$\omega_{qn} = \sqrt{k_{11} + (n\pi)^4 - (n\pi)^2 p_0} \cdot \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{6.18}$$

式中, ζ_n 为 n -阶相对阻尼系数, 给定为

$$\zeta_n = \frac{\delta_n}{\omega_n} = \frac{c_1 + \eta_1(n\pi)^4}{2\sqrt{k_{11} + (n\pi)^4 - (n\pi)^2 p_0}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.19)$$

相应的模态为

$$\phi_n(x) = C_{1n} \sin n\pi x \quad (6.20)$$

式中, $C_{1n} = -i \frac{W_{0n}}{2} e^{i\theta_{0n}}$, W_{0n}, θ_{0n} 分别为派生线性系统的振幅和相位, 是由系统的初始条件确定的实常数。

将(6.20)代入(6.17)可得

$$k_{3n} = \frac{-3W_{0n}^2(n^8\pi^8\gamma_{01} + 3k_{03})}{16[c_1 + n^4\pi^4\eta_1 + 2(-\delta_n + i\omega_{dn})]} = i \frac{3W_{0n}^2(n^8\pi^8\gamma_{01} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} \quad (6.21)$$

设(6.16)的解为 $A_n = A_n(T_1) = \alpha_n e^{i\gamma_n}$, 其中 $\alpha_n = \alpha_n(T_1), \gamma_n = \gamma_n(T_1)$ 是时间尺度 T_1 的待定函数。将其代入(6.16)得到 α_n, γ_n 满足的方程

$$\frac{d\alpha_n}{dT_1} + i\alpha_n \frac{d\gamma_n}{dT_1} - k_{3n}\alpha_n^3 e^{-2i\gamma_n} = 0 \quad (6.22)$$

分开实部和虚部, 得到

$$\frac{d\alpha_n}{dT_1} = 0 \quad (6.23)$$

$$\alpha_n \frac{d\gamma_n}{dT_1} = k_{3n}^1 \alpha_n^3 e^{-2i\gamma_n} \quad (6.24)$$

由(6.23)可得, $\alpha_n = \alpha_{0n}$ (为常数)。代入(6.24)并积分得 $\gamma_n = k_{3n}^1 \alpha_{0n}^2 T_1 e^{-2i\gamma_{0n}} + \gamma_{0n}$

(γ_{0n} 为常数)。因此, 得到

$$A_n = \alpha_n e^{i\gamma_n} = \alpha_{0n} e^{ik_{3n}^1 \alpha_{0n}^2 T_1 e^{-2i\gamma_{0n}} + i\gamma_{0n}} \quad (6.25)$$

将(6.25)和(6.20)代入(6.12)得

$$w_0(x, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^N \alpha_{0n} \phi_n(x) e^{i(\omega_{dn} T_0 + k_{3n}^1 \alpha_{0n}^2 T_1 e^{-2i\gamma_{0n}}) + i\gamma_{0n} - \delta_n T_0} + cc$$

$$= \sum_{n=1}^N \alpha_{0n} W_{0n} \sin[n\pi x] \sin(\omega_{0n} T_0 + k_{1n}^1 \alpha_{0n}^2 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + \theta_{0n} + \gamma_{0n}) e^{-\delta_n T_0} \quad (6.26)$$

当非线性比较弱时, 非线性项可以被忽略时, 上式应和派生线性振动系统的解一致, 于是, 得 $\alpha_{0n} = 1, \gamma_{0n} = 0$ 。因此, (6.25)和(6.26)化为

$$A_n = \alpha_n e^{i r_n} = e^{i k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}} \quad (6.27)$$

$$w_0(x, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^N W_{0n} \sin[n\pi x] \sin\left[\omega_{0n} T_0 + \frac{3W_{0n}^2 (n^8 \pi^8 \gamma_{01} + 3k_{03})}{32\omega_{0n}} T_1 e^{-2\delta_n T_0} + \theta_{0n}\right] e^{-\delta_n T_0} \quad (6.28)$$

将(6.28)代入端部条件(6.10), 并注意到(6.9), (6.3), 则(6.10)可简化为

$$w_1|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial T_0} \right]_{x=0} = 0 \quad (6.29a)$$

$$w_1|_{x=1} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \eta_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial T_0} \right]_{x=1} = 0 \quad (6.29b)$$

将(6.20)代入(6.13)可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + p_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + k_{11} w_1 + \eta_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^4 \partial T_0} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial T_0} = \sum_{n=1}^N [C_{1n}^2 (-k_{02} \sin^2 n\pi x \\ & + \beta_{01} n^6 \pi^6 \cos 2n\pi x) A_n^2 e^{2i\omega_{0n} T_0 - 2\delta_n T_0} + C_{1n}^3 \sin n\pi x (-k_{03} \sin^2 n\pi x + 2\gamma_{01} n^8 \pi^8 \cos^2 n\pi x \\ & - \gamma_{01} n^8 \pi^8 \sin^2 n\pi x) A_n^3 e^{3i\omega_{0n} T_0 - 3\delta_n T_0} + C_{1n} \bar{C}_{1n} (-k_{02} \sin^2 n\pi x + \beta_{01} n^6 \pi^6 \cos 2n\pi x) A_n \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0}] \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{ C_{1k} C_{1n} [(-2k_{02} - \beta_{01} k^4 n^2 \pi^6 - \beta_{01} k^2 n^4 \pi^6) \sin k\pi x \sin n\pi x \\ & + 2\beta_{01} k^3 n^3 \pi^6 \cos k\pi x \cos n\pi x] A_k A_n e^{i(\omega_{0k} + \omega_{0n}) T_0 - (\delta_k + \delta_n) T_0} + C_{1k} \bar{C}_{1n} [(-2k_{02} - \beta_{01} k^4 n^2 \pi^6 \\ & - \beta_{01} k^2 n^4 \pi^6) \sin k\pi x \sin n\pi x + 2\beta_{01} k^3 n^3 \pi^6 \cos k\pi x \cos n\pi x] A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_{0k} - \omega_{0n}) T_0 - (\delta_k + \delta_n) T_0} \} \\ & + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{ 2C_{1m} C_{1k} C_{1n} \sin m\pi x [(-k_{03} - \gamma_{01} m^4 k^2 n^2 \pi^8) \sin k\pi x \sin n\pi x \\ & + 2\gamma_{01} m^2 k^3 n^3 \pi^8 \cos k\pi x \cos n\pi x] A_m A_k A_n e^{i(\omega_{0m} + \omega_{0k} + \omega_{0n}) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} + 2C_{1m} C_{1k} \bar{C}_{1n} \sin m\pi x \\ & [(-k_{03} - \gamma_{01} m^4 k^2 n^2 \pi^8) \sin k\pi x \sin n\pi x + 2\gamma_{01} m^2 k^3 n^3 \pi^8 \cos k\pi x \cos n\pi x] A_m A_k \bar{A}_n \\ & e^{i(\omega_{0m} + \omega_{0k} - \omega_{0n}) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} + 2\bar{C}_{1m} C_{1k} C_{1n} \sin m\pi x [(-k_{03} - \gamma_{01} m^4 k^2 n^2 \pi^8) \sin k\pi x \sin n\pi x \\ & + 2\gamma_{01} m^2 k^3 n^3 \pi^8 \cos k\pi x \cos n\pi x] \bar{A}_m A_k A_n e^{i(\omega_{0m} + \omega_{0k} - \omega_{0n}) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\ & + 2\bar{C}_{1m} C_{1k} \bar{C}_{1n} \sin m\pi x [(-k_{03} - \gamma_{01} m^4 k^2 n^2 \pi^8) \sin k\pi x \sin n\pi x \\ & + 2\gamma_{01} m^2 k^3 n^3 \pi^8 \cos k\pi x \cos n\pi x] \bar{A}_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_{0m} - \omega_{0k} - \omega_{0n}) T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{n=1 \\ (n=q)}}^N \{C_{1q} C_{1n}^2 \sin q\pi x [(-k_{03} - \gamma_{01} q^4 n^4 \pi^8) \sin^2 n\pi x + 2\gamma_{01} q^2 n^6 \pi^8 \cos^2 n\pi x] \\
 & A_q A_n^2 e^{i(2\omega_{2n} + \omega_{2q})T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} + 2C_{1q} C_{1n} \bar{C}_{1n} \sin q\pi x [(-k_{03} - \gamma_{01} q^4 n^4 \pi^8) \sin^2 n\pi x \\
 & + 2\gamma_{01} q^2 n^6 \pi^8 \cos^2 n\pi x] A_q A_n \bar{A}_n e^{i\omega_{2n} T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} + \bar{C}_{1q} C_{1n}^2 \sin q\pi x [(-k_{03} - \gamma_{01} q^4 n^4 \pi^8) \sin^2 n\pi x \\
 & + 2\gamma_{01} q^2 n^6 \pi^8 \cos^2 n\pi x] \bar{A}_q A_n^2 e^{i(2\omega_{2n} - \omega_{2q})T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} \} + cc
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

方程(6.30)中已不含长期项，它的解为

$$\begin{aligned}
 w_1(x, T_0, T_1) = & \sum_{n=1}^N [\phi_n(x) A_n^* e^{i\omega_{2n} T_0 - \delta_n T_0} + a_{1n}(x) A_n^2 e^{2i\omega_{2n} T_0 - 2\delta_n T_0} + b_{1n}(x) A_n^3 e^{3i\omega_{2n} T_0 - 3\delta_n T_0} \\
 & + a_{0n}(x) A_n \bar{A}_n e^{-2\delta_n T_0}] + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [d_{1kn}(x) A_k A_n e^{i(\omega_{2k} + \omega_{2n})T_0 - (\delta_k + \delta_n)T_0} \\
 & + d_{2kn}(x) A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_{2k} - \omega_{2n})T_0 - (\delta_k + \delta_n)T_0}] + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [f_{1mkn}(x) A_m A_k A_n e^{i(\omega_{2m} + \omega_{2k} + \omega_{2n})T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n)T_0} \\
 & + f_{2mkn}(x) A_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_{2m} + \omega_{2k} - \omega_{2n})T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n)T_0} + f_{3mkn}(x) \bar{A}_m A_k A_n e^{i(\omega_{2m} + \omega_{2k} - \omega_{2n})T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n)T_0} \\
 & + f_{4mkn}(x) \bar{A}_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_{2m} - \omega_{2k} - \omega_{2n})T_0 - (\delta_m + \delta_k + \delta_n)T_0}] + \sum_{q=1}^N \sum_{\substack{n=1 \\ (n=q)}}^N [g_{1qn}(x) A_q A_n^2 e^{i(2\omega_{2n} + \omega_{2q})T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & + g_{2qn}(x) A_q A_n \bar{A}_n e^{i\omega_{2n} T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0} + g_{3qn}(x) \bar{A}_q A_n^2 e^{i(2\omega_{2n} - \omega_{2q})T_0 - (2\delta_n + \delta_q)T_0}] + cc
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

式中， A_n^* 是复数。将(6.31)代入(6.30)可得

$$\begin{aligned}
 & [k_{11} + (2i\omega_{2n} - 2\delta_n)^2 + c_1(2i\omega_{2n} - 2\delta_n)]a_{1n} + p_0 a_{1n}^* + [1 + \eta_1(2i\omega_{2n} - 2\delta_n)]a_{1n}^{(4)} \\
 & = C_{1n}^2 (-k_{02} \sin^2 n\pi x + \beta_{01} n^6 \pi^6 \cos 2n\pi x)
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
 & [k_{11} + (3i\omega_{2n} - 3\delta_n)^2 + c_1(3i\omega_{2n} - 3\delta_n)]b_{1n} + p_0 b_{1n}^* + [1 + \eta_1(3i\omega_{2n} - 3\delta_n)]b_{1n}^{(4)} \\
 & = C_{1n}^3 \sin n\pi x [-k_{03} \sin^2 n\pi x + 2\gamma_{01} n^8 \pi^8 (1 - \sin^2 n\pi x) - \gamma_{01} n^8 \pi^8 \sin^2 n\pi x]
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}
 & (k_{11} + 4\delta_n^2 - 2\delta_n c_1)a_{0n} + p_0 a_{0n}^* + (1 - 2\delta_n \eta_1)a_{0n}^{(4)} \\
 & = C_{1n} \bar{C}_{1n} (-k_{02} \sin^2 n\pi x + \beta_{01} n^6 \pi^6 \cos 2n\pi x)
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

.....

分别求得上面方程，可得到它们的解为

$$a_{1n} = \alpha_{1n} e^{-\eta_1 x} + \alpha_{2n} e^{\eta_1 x} + \alpha_{3n} e^{-\eta_2 x} + \alpha_{4n} e^{\eta_2 x} + A_{1n} \sin^2 n\pi x + B_{1n} \cos 2n\pi x \tag{6.35}$$

$$b_{1n} = \alpha_{5n} e^{-q_1 x} + \alpha_{6n} e^{q_2 x} + \alpha_{7n} e^{-q_3 x} + \alpha_{8n} e^{q_4 x} + E_{1n} \sin n\pi x + F_{1n} \sin^3 n\pi x \quad (6.36)$$

$$a_{0n} = \alpha_{01n} e^{-q_1 x} + \alpha_{02n} e^{q_2 x} + \alpha_{03n} e^{-q_3 x} + \alpha_{04n} e^{q_4 x} + A_{00n} \sin^2 n\pi x + B_{00n} \cos 2n\pi x \quad (6.37)$$

.....

其中, A_{1n} 、 B_{1n} 等为与桩和土的材料性质、几何尺寸、线性系统的固有频率 ω_{dn} 和阻尼系数 δ_n 等有关的系数, 它们被给定为

$$A_{1n} = \frac{-k_{02} C_{1n}^2}{m_1}, B_{1n} = \frac{C_{1n}^2 (2k_{02} n^2 \pi^2 p_0 - 8k_{02} n^4 \pi^4 m_2 + \beta_{01} n^6 \pi^6 m_1)}{m_1 (m_1 + 16n^4 \pi^4 m_2 - 4n^2 \pi^2 p_0)}$$

$$E_{1n} = \frac{2C_{1n}^3 [3k_{03} n^2 \pi^2 p_0 - 30k_{03} n^4 \pi^4 m_4 + \gamma_{01} n^8 \pi^8 m_3 - 9\gamma_{01} n^{12} \pi^{12} m_5]}{9n^4 \pi^4 p_0^2 + m_3^2 - 10n^2 \pi^2 m_3 p_0 - 90n^6 \pi^6 m_4 p_0 + 82n^4 \pi^4 m_3 m_4 + 81n^8 \pi^8 m_4^2}$$

$$F_{1n} = \frac{C_{1n}^3 (3\gamma_{01} n^8 \pi^8 + k_{03})}{m_3 - 9n^2 \pi^2 p_0 + 81n^4 \pi^4 m_4}$$

$$A_{00n} = \frac{-C_{1n} \bar{C}_{1n} k_{02}}{m_5}, B_{00n} = \frac{C_{1n} \bar{C}_{1n} (2k_{02} n^2 \pi^2 p_0 - 8k_{02} n^4 \pi^4 m_6 + \beta_{01} n^6 \pi^6 m_5)}{m_5 (m_5 + 16n^4 \pi^4 m_6 - 4n^2 \pi^2 p_0)}$$

$$q_1 = \sqrt{\frac{p_0 + \sqrt{-4m_1 m_2 + p_0^2}}{2m_2}}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{-p_0 + \sqrt{-4m_1 m_2 + p_0^2}}{2m_2}}$$

$$q_3 = \sqrt{\frac{p_0 + \sqrt{-4m_3 m_4 + p_0^2}}{2m_4}}, \quad q_4 = \sqrt{\frac{-p_0 + \sqrt{-4m_3 m_4 + p_0^2}}{2m_4}},$$

$$q_5 = \sqrt{\frac{p_0 + \sqrt{-4m_5 m_6 + p_0^2}}{2m_6}}, \quad q_6 = \sqrt{\frac{-p_0 + \sqrt{-4m_5 m_6 + p_0^2}}{2m_6}}$$

$$m_1 = k_{11} + (2i\omega_{dn} - 2\delta_n)^2 + c_1(2i\omega_{dn} - 2\delta_n), \quad m_2 = 1 + \eta_1(2i\omega_{dn} - 2\delta_n)$$

$$m_3 = k_{11} + (3i\omega_{dn} - 3\delta_n)^2 + c_1(3i\omega_{dn} - 3\delta_n), \quad m_4 = 1 + \eta_1(3i\omega_{dn} - 3\delta_n)$$

$$m_5 = (k_{11} + 4\delta_n^2 - 2\delta_n c_1), \quad m_6 = (1 - 2\delta_n \eta_1), \quad \dots\dots$$

由端部条件(6.11)(6.29)可得到

$$\begin{aligned}
 a_{1n}|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 a_{1n}}{dx^2} \right|_{x=1} = 0, \quad b_{1n}|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 b_{1n}}{dx^2} \right|_{x=1} = 0, \quad a_{0n}|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 a_{0n}}{dx^2} \right|_{x=1} = 0 \\
 a_{1n}|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2 a_{1n}}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad b_{1n}|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2 b_{1n}}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad a_{0n}|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{d^2 a_{0n}}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \\
 \dots\dots
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

将(6.35)~(6.37)代入(6.38), 得到系数 $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \alpha_{3n}, \alpha_{4n}$ 等的表达式为

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1n} &= \frac{e^n(-2n^2\pi^2 A_{1n} + 4n^2\pi^2 B_{1n} + B_{1n}q_2^2)}{(1+e^n)(q_1^2 - q_2^2)}, \quad \alpha_{2n} = \frac{-2n^2\pi^2 A_{1n} + 4n^2\pi^2 B_{1n} + B_{1n}q_2^2}{(1+e^n)(q_1^2 - q_2^2)} \\
 \alpha_{3n} &= \frac{e^{2n}(-2n^2\pi^2 A_{1n} + 4n^2\pi^2 B_{1n} + B_{1n}q_1^2)}{(1+e^{2n})(-q_1^2 + q_2^2)}, \quad \alpha_{4n} = \frac{-2n^2\pi^2 A_{1n} + 4n^2\pi^2 B_{1n} + B_{1n}q_1^2}{(1+e^{2n})(-q_1^2 + q_2^2)} \\
 \alpha_{5n} &= 0, \quad \alpha_{6n} = 0, \alpha_{7n} = 0, \quad \alpha_{8n} = 0 \\
 \alpha_{01n} &= \frac{e^{6n}(-2n^2\pi^2 A_{00n} + 4n^2\pi^2 B_{00n} + B_{00n}q_6^2)}{(1+e^{6n})(q_5^2 - q_6^2)}, \quad \alpha_{02n} = \frac{-2n^2\pi^2 A_{00n} + 4n^2\pi^2 B_{00n} + B_{00n}q_6^2}{(1+e^{6n})(q_5^2 - q_6^2)} \\
 \alpha_{03n} &= \frac{e^{6n}(-2n^2\pi^2 A_{00n} + 4n^2\pi^2 B_{00n} + B_{00n}q_5^2)}{(1+e^{6n})(-q_5^2 + q_6^2)}, \quad \alpha_{04n} = \frac{-2n^2\pi^2 A_{00n} + 4n^2\pi^2 B_{00n} + B_{00n}q_5^2}{(1+e^{6n})(-q_5^2 + q_6^2)}
 \end{aligned}$$

将(6.39)代入(6.43), 类似于(6.25)可令 $A_n^* = A_{0n}^* e^{ik_{3n}^1 A_{0n}^2 T_n e^{-2A_n T_0} + i\theta_{0n}^*}$, 得

$$\begin{aligned}
 w_1(x, T_0, T_1) &= \sum_{n=1}^N [\phi_n(x) A_{0n}^* e^{i(\omega_{0n} T_0 + k_{3n}^1 A_{0n}^2 T_n e^{-2A_n T_0}) + i\theta_{0n}^* - \delta_n T_0} + a_{1n}(x) e^{2i(\omega_{0n} T_0 + k_{3n}^1 T_n e^{-2A_n T_0}) - 2\delta_n T_0} \\
 &+ a_{0n}(x) e^{-2\delta_n T_0} + b_{1n}(x) e^{3i(\omega_{0n} T_0 + k_{3n}^1 T_n e^{-2A_n T_0}) - 3\delta_n T_0}] \\
 &+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [d_{1kn}(x) e^{i(\omega_{0n} T_0 + \omega_{0n} T_0 + k_{3k}^1 T_k e^{-2A_k T_0} + k_{3n}^1 T_n e^{-2A_n T_0}) - (\delta_k + \delta_n) T_0} \\
 &+ d_{2kn}(x) e^{i(\omega_{0n} T_0 - \omega_{0n} T_0 + k_{3k}^1 T_k e^{-2A_k T_0} - k_{3n}^1 T_n e^{-2A_n T_0}) - (\delta_k + \delta_n) T_0}] \\
 &+ \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [f_{1mkn}(x) e^{i(\omega_{0m} T_0 + \omega_{0m} T_0 + \omega_{0m} T_0 + k_{3m}^1 T_m e^{-2A_m T_0} + k_{3k}^1 T_k e^{-2A_k T_0} + k_{3n}^1 T_n e^{-2A_n T_0}) - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\
 &+ f_{2mkn}(x) e^{i(\omega_{0m} T_0 + \omega_{0m} T_0 - \omega_{0m} T_0 + k_{3m}^1 T_m e^{-2A_m T_0} + k_{3k}^1 T_k e^{-2A_k T_0} - k_{3n}^1 T_n e^{-2A_n T_0}) - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\
 &+ f_{3mkn}(x) e^{i(\omega_{0m} T_0 + \omega_{0m} T_0 - \omega_{0m} T_0 + k_{3k}^1 T_k e^{-2A_k T_0} + k_{3n}^1 T_n e^{-2A_n T_0} - k_{3m}^1 T_m e^{-2A_m T_0}) - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0} \\
 &+ f_{4mkn}(x) e^{i(\omega_{0m} T_0 - \omega_{0m} T_0 - \omega_{0m} T_0 + k_{3k}^1 T_k e^{-2A_k T_0} - k_{3n}^1 T_n e^{-2A_n T_0} - k_{3m}^1 T_m e^{-2A_m T_0}) - (\delta_m + \delta_k + \delta_n) T_0}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{(n=q)} \{g_{1qn}(\cdot) e^{i(2\omega_{dn}T_0 + \omega_{dq}T_0 + 2k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{3q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - (2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & + g_{2qn}(x) e^{i(\omega_{dq}T_0 + k_{3q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - (2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & + g_{3qn}(x) e^{i(2\omega_{dn}T_0 - \omega_{dq}T_0 + 2k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{3q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - (2\delta_n + \delta_q)T_0} \} + cc \\
 = & \sum_{n=1}^N \{A_{0n}^* W_{0n} \sin(n\pi x) \sin[\omega_{dn}T_0 + \frac{3W_{0n}^2 A_{0n}^2 (n^8 \pi^8 \gamma_{01} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} T_1 e^{-2\delta_n T_0} + \theta_{0n} + \theta_{0n}^*] e^{-\delta_n T_0} \\
 & - 2\sqrt{(a_{1n}^R)^2 + (a_{1n}^I)^2} \sin[2(\omega_{dn}T_0 + \frac{3W_{0n}^2 (n^8 \pi^8 \gamma_{01} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{1n}] e^{-2\delta_n T_0} \\
 & - 2\sqrt{(b_{1n}^R)^2 + (b_{1n}^I)^2} \sin[3(\omega_{dn}T_0 + \frac{3W_{0n}^2 (n^8 \pi^8 \gamma_{01} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{2n}] e^{-3\delta_n T_0} + 2a_{0n}^R e^{-2\delta_n T_0} \} \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{d_{1kn}^* \sin[(\omega_{dn}T_0 + \omega_{dn}T_0 + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{1kn}] e^{-(\delta_n + \delta_k)T_0} \\
 & + d_{2kn}^* \sin[(\omega_{dn}T_0 - \omega_{dn}T_0 + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{2kn}] e^{-(\delta_n + \delta_k)T_0} \} \\
 & + \sum_{m=1}^N \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{n=l+1}^N \{f_{1mkn}^* \sin[(\omega_{dn}T_0 + \omega_{dn}T_0 + \omega_{dn}T_0 + k_{1m}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{1mkn}] e^{-(\delta_n + \delta_k + \delta_l)T_0} \\
 & + f_{2mkn}^* \sin[(\omega_{dn}T_0 + \omega_{dn}T_0 - \omega_{dn}T_0 + k_{1m}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{2mkn}] e^{-(\delta_n + \delta_k + \delta_l)T_0} \\
 & + f_{3mkn}^* \sin[(\omega_{dn}T_0 + \omega_{dn}T_0 - \omega_{dn}T_0 + k_{1m}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{3mkn}] e^{-(\delta_n + \delta_k + \delta_l)T_0} \\
 & + f_{4mkn}^* \sin[(\omega_{dn}T_0 - \omega_{dn}T_0 - \omega_{dn}T_0 + k_{1m}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{4mkn}] e^{-(\delta_n + \delta_k + \delta_l)T_0} \} \\
 & + \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{(n=q)} \{g_{1qn}^* \sin[(2\omega_{dn}T_0 + \omega_{dq}T_0 + 2k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{3q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - \theta_{1qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & + g_{2qn}^* \sin[(\omega_{dq}T_0 + k_{3q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - \theta_{2qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)T_0} \\
 & + g_{3qn}^* \sin[(2\omega_{dn}T_0 - \omega_{dq}T_0 + 2k_{3n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{3q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - \theta_{3qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)T_0} \}
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

式中, $\sin \theta_{1n} = \frac{a_{1n}^R}{\sqrt{(a_{1n}^R)^2 + (a_{1n}^I)^2}}$, $\sin \theta_{2n} = \frac{b_{1n}^R}{\sqrt{(b_{1n}^R)^2 + (b_{1n}^I)^2}}$. A_{0n}^*, θ_{0n}^* 是由初始条件确

定的实数。将(6.39)(6.28)代入初始条件(6.11)得,

$$A_{0n}^* W_{0n} \sin(n\pi x) \sin(\theta_{0n} + \theta_{0n}^*) + 2a_{1n}^R + 2b_{1n}^R + 2a_{0n}^R + \dots = 0 \tag{6.40}$$

$$\begin{aligned}
 & A_{0n}^* W_{0n} \sin(n\pi x) [\omega_{dn} \cos(\theta_{0n} + \theta_{0n}^*) - \delta_n \sin(\theta_{0n} + \theta_{0n}^*)] - 4a_{1n}^I \omega_{dn} - 4\delta_n a_{1n}^R \\
 & - 6b_{1n}^I \omega_{dn} - 6\delta_n b_{1n}^R - 4a_{0n}^R \delta_n + \sin(n\pi x) \frac{3W_{0n}^3 (n^8 \pi^8 \gamma_{01} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} \cos \theta_{0n} + \dots = 0
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

当 $N=1, n=1$ 时, 上两式中的省略部分为零。求解方程(6.40)和(6.41)可得

$$A_{0n}^*, \theta_{0n}^* .$$

将式(6.28)、(6.39)代入(6.4)得到

$$\begin{aligned}
 w(x, t, \varepsilon) &= w_0(x, T_0, T_1) + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1) + \dots \\
 &= \sum_{n=1}^N \{ W_{0n} \sin(n\pi x) \sin[\omega_{dn} T_0 + \frac{3W_{0n}^2 (n^8 \pi^8 \gamma_{01} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} T_1 e^{-2\delta_n T_0} + \theta_{0n}^*] e^{-\delta_n T_0} \\
 &\quad + \varepsilon A_{0n}^* W_{0n} \sin(n\pi x) \sin[\omega_{dn} T_0 + \frac{3W_{0n}^2 A_{0n}^2 (n^8 \pi^8 \gamma_{01} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} T_1 e^{-2\delta_n T_0} + \theta_{0n}^* + \theta_{0n}^*] e^{-\delta_n T_0} \\
 &\quad - 2\varepsilon \sqrt{(a_{1n}^R)^2 + (a_{1n}^I)^2} \sin[2(\omega_{dn} T_0 + \frac{3W_{0n}^2 (n^8 \pi^8 \gamma_{01} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{1n}^*] e^{-2\delta_n T_0} \\
 &\quad - 2\varepsilon \sqrt{(b_{1n}^R)^2 + (b_{1n}^I)^2} \sin[3(\omega_{dn} T_0 + \frac{3W_{0n}^2 (n^8 \pi^8 \gamma_{01} + 3k_{03})}{32\omega_{dn}} T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{2n}^*] e^{-3\delta_n T_0} + 2\varepsilon a_{0n}^R e^{-2\delta_n T_0} \} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{ d_{1kn}^* \sin[(\omega_{dk} T_0 + \omega_{dn} T_0 + k_{1k}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{1kn}^*] e^{-(\delta_k + \delta_n) T_0} \\
 &\quad + d_{2kn}^* \sin[(\omega_{dk} T_0 - \omega_{dn} T_0 + k_{1k}^1 T_1 e^{-2\delta_k T_0} - k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{2kn}^*] e^{-(\delta_k + \delta_n) T_0} \} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{ f_{1mln}^* \sin[(\omega_{dk} T_0 + \omega_{dl} T_0 + \omega_{dn} T_0 + k_{1m}^1 T_1 e^{-2\delta_m T_0} + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} + k_{1l}^1 T_1 e^{-2\delta_l T_0}) - \theta_{1mln}^*] e^{-(\delta_m + \delta_n + \delta_l) T_0} \\
 &\quad + f_{2mln}^* \sin[(\omega_{dk} T_0 + \omega_{dl} T_0 - \omega_{dn} T_0 + k_{1m}^1 T_1 e^{-2\delta_m T_0} + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{1l}^1 T_1 e^{-2\delta_l T_0}) - \theta_{2mln}^*] e^{-(\delta_m + \delta_n + \delta_l) T_0} \\
 &\quad + f_{3mln}^* \sin[(\omega_{dk} T_0 + \omega_{dl} T_0 - \omega_{dn} T_0 + k_{1m}^1 T_1 e^{-2\delta_m T_0} + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{1l}^1 T_1 e^{-2\delta_l T_0}) - \theta_{3mln}^*] e^{-(\delta_m + \delta_n + \delta_l) T_0} \\
 &\quad + f_{4mln}^* \sin[(\omega_{dk} T_0 - \omega_{dl} T_0 - \omega_{dn} T_0 + k_{1m}^1 T_1 e^{-2\delta_m T_0} - k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0} - k_{1l}^1 T_1 e^{-2\delta_l T_0}) - \theta_{4mln}^*] e^{-(\delta_m + \delta_n + \delta_l) T_0} \} \\
 &\quad + \sum_{q=1}^N \sum_{n=q}^N [g_{1qn}^* \sin[(2\omega_{dq} T_0 + \omega_{dn} T_0 + 2k_{1q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0} + k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{1qn}^*] e^{-(2\delta_q + \delta_n) T_0} \\
 &\quad + g_{2qn}^* \sin[(\omega_{dq} T_0 + k_{1q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0}) - \theta_{2qn}^*] e^{-(2\delta_q + \delta_n) T_0} \\
 &\quad + g_{3qn}^* \sin[(2\omega_{dq} T_0 - \omega_{dn} T_0 + 2k_{1q}^1 T_1 e^{-2\delta_q T_0} - k_{1n}^1 T_1 e^{-2\delta_n T_0}) - \theta_{3qn}^*] e^{-(2\delta_q + \delta_n) T_0} \}
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

将 $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ 代入上式得系统的近似位移

$$\begin{aligned}
 w(x, t, \varepsilon) &= \sum_{n=1}^N \{ W_{0n} \sin(n\pi x) \sin(\omega_{dn}^{\text{NL}} t + \theta_{0n}^*) e^{-\delta_n t} - 2\varepsilon \sqrt{(a_{1n}^R)^2 + (a_{1n}^I)^2} \sin(2\omega_{dn}^{\text{NL}} t - \theta_{1n}^*) e^{-2\delta_n t} \\
 &\quad - 2\varepsilon \sqrt{(b_{1n}^R)^2 + (b_{1n}^I)^2} \sin(3\omega_{dn}^{\text{NL}} t - \theta_{2n}^*) e^{-3\delta_n t} + 2\varepsilon a_{0n}^R e^{-2\delta_n t} \\
 &\quad + \varepsilon A_{0n}^* W_{0n} \sin(n\pi x) \sin[\omega_{dn}^{\text{NL}} (A_{0n}^2 + (1 - A_{0n}^2) \omega_{dn} / \omega_{dn}^{\text{NL}}) t + \theta_{0n}^* + \theta_{0n}^*] e^{-\delta_n t} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{d_{1kn}^* \sin[(\omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL})t - \theta_{1kn}] e^{-(\delta_k + \delta_n)t} + d_{2kn}^* \sin[(\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL})t - \theta_{2kn}] e^{-(\delta_k + \delta_n)t}\} \\
 & + \varepsilon \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N \{f_{1mkn}^* \sin[(\omega_{dm}^{NL} + \omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL})t - \theta_{1mkn}] e^{-(\delta_m + \delta_k + \delta_n)t} \\
 & + f_{2mkn}^* \sin[(\omega_{dm}^{NL} + \omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL})t - \theta_{2mkn}] e^{-(\delta_m + \delta_k + \delta_n)t} \\
 & + f_{3mkn}^* \sin[(\omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL} - \omega_{dm}^{NL})t - \theta_{3mkn}] e^{-(\delta_m + \delta_k + \delta_n)t} \\
 & + f_{4mkn}^* \sin[(\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL} - \omega_{dm}^{NL})t - \theta_{4mkn}] e^{-(\delta_m + \delta_k + \delta_n)t}\} \\
 & + \varepsilon \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^{n \neq q} \{g_{1qn}^* \sin[(2\omega_{dn}^{NL} + \omega_{dq}^{NL})t - \theta_{1qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)t} \\
 & + g_{2qn}^* \sin[\omega_{dq}^{NL}t - \theta_{2qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)t} + g_{3qn}^* \sin[(2\omega_{dn}^{NL} - \omega_{dq}^{NL})t - \theta_{3qn}] e^{-(2\delta_n + \delta_q)t}\}
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

非线性系统的第 n -阶主频率为

$$\omega_{dn}^{NL} = \omega_{dn} + \frac{3Q_3 W_{0n}^2}{32\omega_{dn}} e^{-2\delta_n t} \tag{6.44}$$

式中, Q_3 是一个描述桩基和土的非线性特征量, 给定为

$$Q_3 = \varepsilon(n^8 \pi^8 \gamma_{01} + 3k_{03}) = n^8 \pi^8 \gamma_1 + 3k_{33} \tag{6.45}$$

由(6.44)可见, 非线性系统的第 n -阶主频率 ω_{dn}^{NL} 不仅与派生线性振动系统的 n -阶固有频率 ω_{dn} 和阻尼系数 δ_n 有关, 而且也与振幅 W_{0n} 和非线性特征量 Q_3 有关。

由式(6.43)可见, 非线性系统的响应中除基频为 ω_{dn}^{NL} 的谐波以外, 还在 ε 项中含有频率为 $2\omega_{dn}^{NL}$ 、 $3\omega_{dn}^{NL}$ 的高次谐波和频率为 $\omega_{dk}^{NL} + \omega_{dm}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dm}^{NL}$ 、 $\omega_{dm}^{NL} + \omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dm}^{NL} + \omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} + \omega_{dm}^{NL} - \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dm}^{NL} - \omega_{dn}^{NL}$ 、 $2\omega_{dn}^{NL} + \omega_{dq}^{NL}$ 、 $2\omega_{dn}^{NL} - \omega_{dq}^{NL}$ 、 ω_{dq}^{NL} ($n \neq q$) 的谐波存在。非线性系统响应的相位角也不同于派生线性系统的相位角 θ_{0n} 。由于粘性的影响, 系统的响应随时间而衰减, 但是各项的衰减速度不同。由于非线性的影响使系统的振动零点发生变化, 对称轴线发生偏移。非线性项对(6.43)中右边第 5 项的频率的影响也较复杂。

6.4 数值计算与结果分析

对式(6.43)(6.44)进行数值计算, 参考文献[1,2]中的有关试验数据, 取定如下计算参数: $l = 15 \text{ m}$, $D = 0.35 \text{ m}$, $d_1 = 0$, $\rho = 2.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $E_0 = 2.1 \times 10^{10} \text{ Pa}$, $A = 0.0962 \text{ m}^2$, $a = 0.2$, $P_0 = 6.5 \times 10^5 \text{ N}$, $\alpha = 1$; $W_{0n} = 0.002$, $\theta_{0n} = \pi/2$, $n = 1$ (或取 $n = 2$), $\varepsilon = 0.01$, $x = 0.5$.

下面分四种情形分别给出其它已知参数, 同时给出计算中需要用到的一些无量纲参数:

(1) 粘性线性系统

$\gamma = 0$ 、 $\beta = 0$ 、 $\eta = 1.02 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ 、 $k_1 = 4.2 \times 10^6 \text{ N/m}^3$ 、 $k_2 = 0 \text{ N/m}^4$ 、 $k_3 = 0 \text{ N/m}^5$ 、 $c = 0.8 \times 10^3 \text{ Ns/m}^3$ 。计算得到的其它无量纲参数为: $k = 1.15$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $p_0 = 9.45$, $\eta_1 = 5.59 \times 10^{-6}$, $c_1 = 1.05$, $k_{11} = 192.43$, $k_{22} = 0$, $k_{33} = 0$, $k_{02} = 0$, $k_{03} = 0$, $\beta_{01} = 0$, $\gamma_{01} = 0$, 当 $n = 1$ 时, $\beta_n = 3.14$, $\delta_n = 0.53$, $\omega_n = 14.02$, $\zeta_n = 0.04$, $\omega_{0n} = 14.01$, $Q_3 = 0$ 。

(2) 粘性非线性系统

$\gamma = 1.19 \times 10^4$ 、 $\beta = 2.62 \times 10^2$ 、 $\eta = 1.02 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$ 、 $k_1 = 4.2 \times 10^6 \text{ N/m}^3$ 、 $k_2 = -1.3 \times 10^6 \text{ N/m}^4$ 、 $k_3 = 1.3 \times 10^9 \text{ N/m}^5$ 、 $c = 0.8 \times 10^3 \text{ Ns/m}^3$ 。计算得到的其它无量纲参数为: $k = 1.15$, $\beta_1 = 4.15$, $\gamma_1 = 2.43$, $p_0 = 9.45$, $\eta_1 = 5.59 \times 10^{-6}$, $c_1 = 1.05$, $k_{11} = 192.43$, $k_{22} = -8.93 \times 10^4$, $k_{33} = 1.34 \times 10^7$, $k_{02} = -8.93 \times 10^6$, $k_{03} = 1.34 \times 10^9$, $\beta_{01} = 415.13$, $\gamma_{01} = 242.96$, 当 $n = 1$ 时, $\beta_n = 3.14$, $\delta_n = 0.53$, $\omega_n = 14.02$, $\zeta_n = 0.04$, $\omega_{0n} = 14.01$, $Q_3 = 4.02 \times 10^7$, $\omega_{0n}^{\text{NL}} = 15.09$ ($t=0$ 时)。另外, 当 $n = 2$ 时, $Q_3 = 4.61 \times 10^7$ 。

(3) 无粘性线性系统

$\gamma = 0$ 、 $\beta = 0$ 、 $\eta = 0$ 、 $k_1 = 4.2 \times 10^6 \text{ N/m}^3$ 、 $k_2 = 0 \text{ N/m}^4$ 、 $k_3 = 0 \text{ N/m}^5$ 、

$c = 0 \text{Ns/m}^3$ 。计算得到的其它无量纲参数为： $k = 1.15$ ， $\beta_1 = 0$ ， $\gamma_1 = 0$ ， $p_0 = 9.45$ ， $\eta_1 = 0$ ， $c_1 = 0$ ， $k_{11} = 192.43$ ， $k_{22} = 0$ ， $k_{33} = 0$ ， $k_{02} = 0$ ， $k_{03} = 0$ ， $\beta_{01} = 0$ ， $\gamma_{01} = 0$ ，当 $n = 1$ 时， $\beta_n = 3.14$ ， $\delta_n = 0$ ， $\omega_n = 14.02$ ， $\zeta_n = 0$ ， $\omega_{dn} = 14.02$ ， $Q_3 = 0$ 。

(4) 无粘性非线性系统

$\gamma = 1.19 \times 10^4$ 、 $\beta = 2.62 \times 10^2$ 、 $\eta = 0$ 、 $k_1 = 4.2 \times 10^6 \text{ N/m}^3$ 、 $k_2 = -1.3 \times 10^8 \text{ N/m}^4$ 、 $k_3 = 1.3 \times 10^9 \text{ N/m}^5$ 、 $c = 0 \text{Ns/m}^3$ 。计算得到的其它无量纲参数为： $k = 1.15$ ， $\beta_1 = 4.15$ ， $\gamma_1 = 2.43$ ， $p_0 = 9.45$ ， $\eta_1 = 0$ ， $c_1 = 0$ ， $k_{11} = 192.43$ ， $k_{22} = -8.93 \times 10^4$ ， $k_{33} = 1.34 \times 10^7$ ， $k_{02} = -8.93 \times 10^6$ ， $k_{03} = 1.34 \times 10^9$ ， $\beta_{01} = 415.13$ ， $\gamma_{01} = 242.96$ ，当 $n = 1$ 时， $\beta_n = 3.14$ ， $\delta_n = 0$ ， $\omega_n = 14.02$ ， $\zeta_n = 0$ ， $\omega_{dn} = 14.02$ ， $Q_3 = 4.02 \times 10^7$ ， $\omega_{dn}^{\text{NL}} = 15.10$ 。另外，当 $n = 2$ 时， $Q_3 = 4.61 \times 10^7$ 。

硬土的刚度系数可高达 10^7N/m^3 ，极软土的刚度系数接近为 0，所以 k_{11} 的变化范围取 $0 \sim 2.29 \times 10^3$ 。当 $n = 1$ 时和当 $n = 2$ 时，由式(6.18)(令 $\omega_{dn} = 0$)可以反算得到无量纲荷载最大值分别为 $p_0 = 241$ 和 $p_0 = 97$ 。

当 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时，对于桩顶的不同静荷载，根据(6.18)得到的粘性线性系统频率与土的刚度的关系曲线分别示在图 6.1 和图 6.2 中。可见，粘性线性系统的固有频率随土的刚度的增大而增大，随桩顶静荷载 p_0 的增大而减少。同时，图 6.3--图 6.10 示出了由公式(6.44)的计算结果，其中，图 6.3 和图 6.4 分别为在 Q_3 的不同值时，无粘性非线性系统的振幅与频率的关系曲线。可见，非线性特征量 Q_3 的影响是很明显的。

当 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时，图 6.5 和图 6.6 分别为不同时刻粘性非线性系统频率比与振幅的关系，可见，频率比随初始振幅的增加而快速增加；图 6.7 和图 6.8 分别为不同振幅时粘性非线性系统频率比与时间的关系，可见，频率比随时间的增加而迅速衰减；图 6.9 和图 6.10 分别为不同时刻粘性非线性系统的频率比与非线性特征量 Q_3 的关系，可见，频率比随 Q_3 的增加而增加。

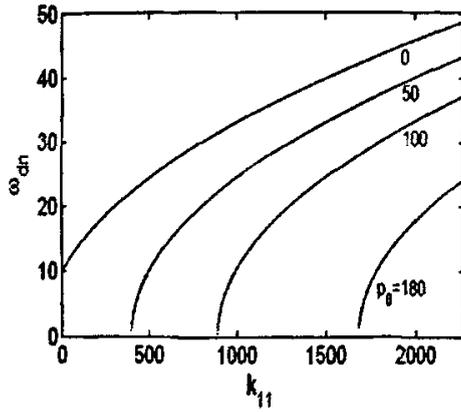


图 6.1 粘性线性系统的频率与土的刚度系数的关系 ($n=1$)

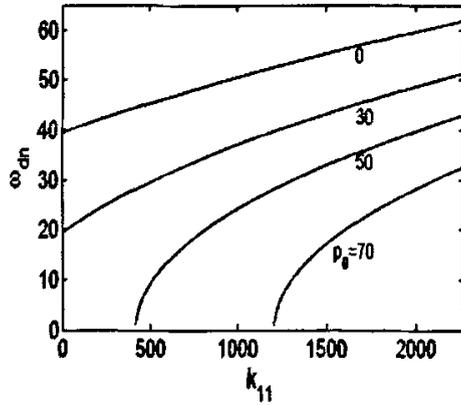


图 6.2 粘性线性系统的频率与土的刚度系数的关系 ($n=2$)

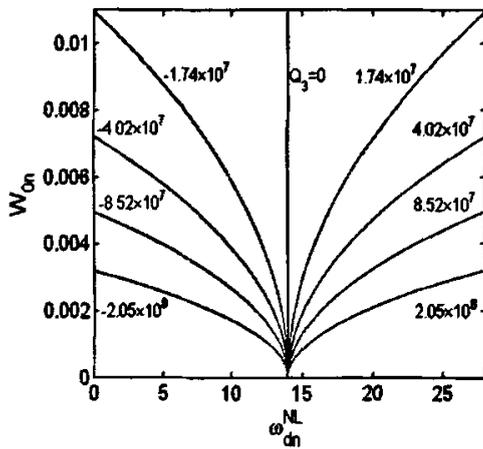


图 6.3 无粘性非线性系统振幅与频率关系曲线 ($n=1$)

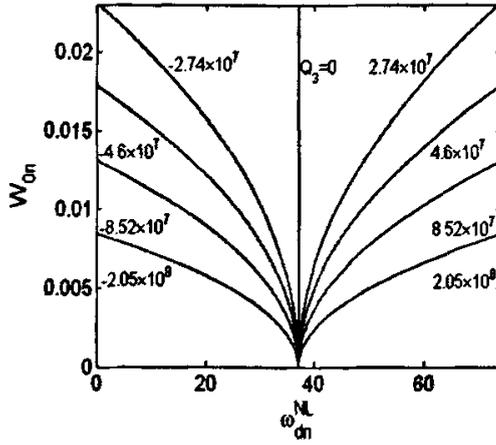


图 6.4 无粘性非线性系统振幅与频率关系曲线 ($n = 2$)

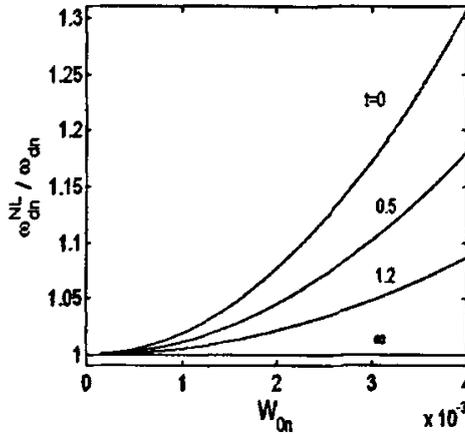


图 6.5 不同时刻粘性非线性系统频率比与振幅的关系 ($n = 1$)

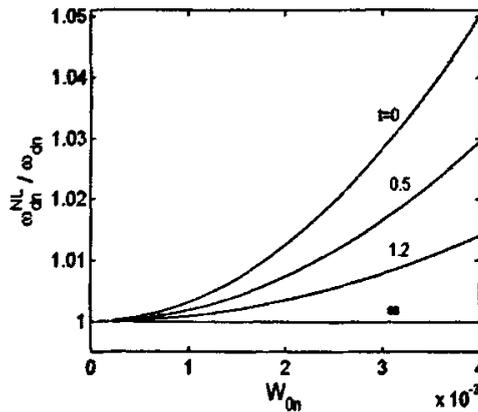


图 6.6 不同时刻粘性非线性系统频率比与振幅的关系 ($n = 2$)

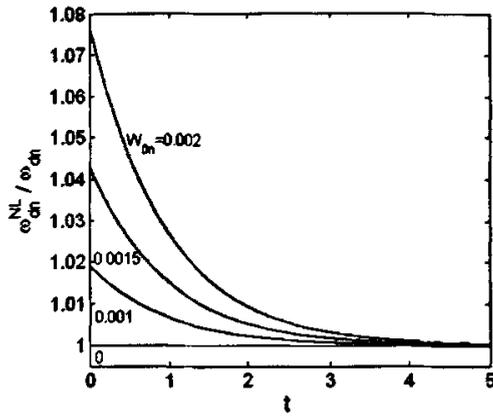


图 6.7 不同振幅时粘性非线性系统频率比与时间的关系 ($n=1$)

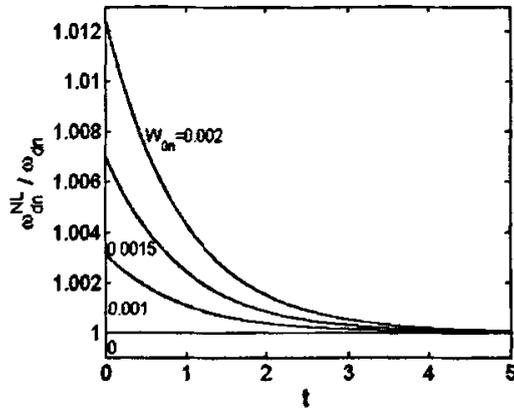


图 6.8 不同振幅时粘性非线性系统频率比与时间的关系 ($n=2$)

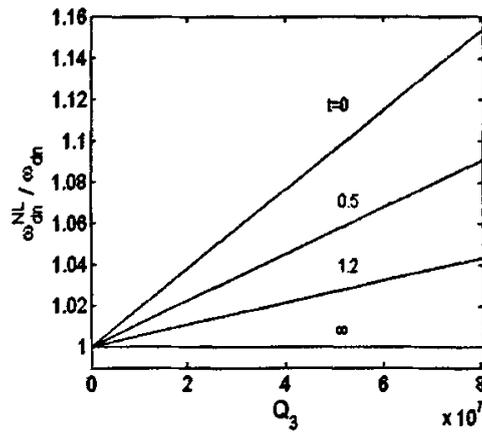


图 6.9 不同时刻粘性非线性系统频率比与 Q_3 的关系 ($n=1$)

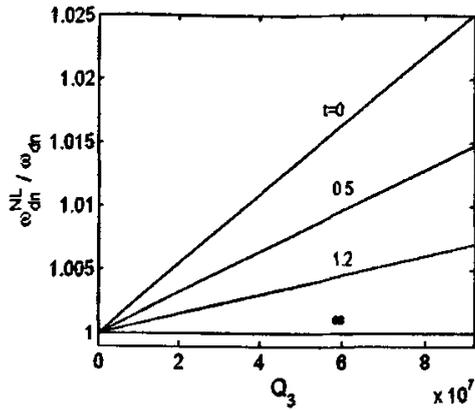


图 6.10 不同时刻粘性非线性系统频率比与 Q_3 的关系 ($n=2$)

当取 $n=N-1$ 时，由公式(6.43)的计算结果见图 6.11-图 6.12，其中，图 6.11 和图 6.12 为无粘性和粘性的线性与非线性系统的时程曲线，可见，无粘性线性系统的振动是周期的，频率也保持不变；非线性系统的振动是近似周期的，振幅略有波动，并大于线性系统的振幅，振动频率也大于线性系统，振动零点也有变化。粘性线性系统的振幅以一个不变的频率有规则地衰减；粘性非线性系统的振幅迅速地衰减，但并不是很有规则，振幅略有波动，振动频率及振动零点也稍有变化。

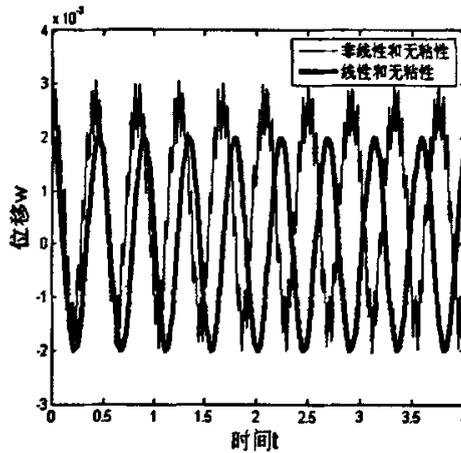
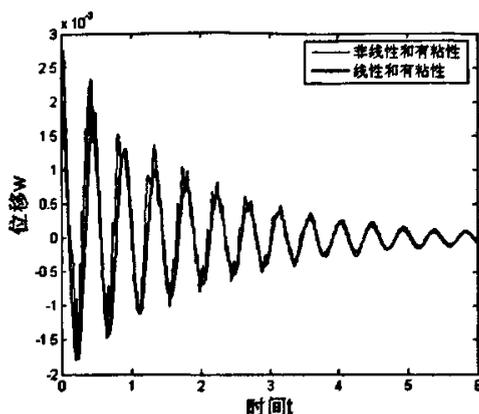
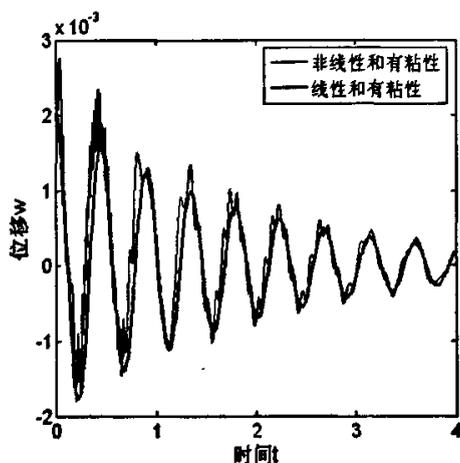


图 6.11 无粘性线性与非线性系统时程曲线 ($n=N-1$)

图 6.12.1 粘性线性与非线性系统时程曲线 ($n = N - 1$)图 6.12.2 粘性线性与非线性系统时程曲线 ($n = N - 1$)

6.5 小结

本章假定桩基及桩周土材料的非线性弹性均比较弱的情况下，利用第二章导出的分析桩基横向自由振动的非线性偏微分方程，用多时间尺度法研究了桩基的非线性横向自由振动，求出了 n -阶主频率和位移响应的近似表达式。研究结果表明，非线性系统的 n -阶主频率不仅与派生线性振动系统的 n -阶固有频率有关，而且还与振幅、阻尼系数和材料非线性特征量有关；非线性系统的响应中除基频为 ω_{dn}^{NL} 的谐波以外，还在 ε 项中含有频率为 $2\omega_{dn}^{NL}$ 、 $3\omega_{dn}^{NL}$ 的高次谐波和频率为 $\omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dm}^{NL} + \omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dm}^{NL} + \omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL}$ 、 $\omega_{dk}^{NL} + \omega_{dn}^{NL} - \omega_{dm}^{NL}$ 、

$\omega_{dk}^{NL} - \omega_{dn}^{NL} - \omega_{dm}^{NL}$ 、 $2\omega_{dn}^{NL} + \omega_{dq}^{NL}$ 、 $2\omega_{dn}^{NL} - \omega_{dq}^{NL}$ 、 ω_{dq}^{NL} ($n \neq q$) 的谐波存在, 并受到其它较复杂频率的干扰; 系统的振动零点也会发生变化, 对称轴线发生偏移, 系统响应的相位角也与派生线性系统的相位角不同; 由于粘性的影响, 系统的响应随着时间而衰减, 衰减速度与派生线性系统是有差别的。

第七章 桩基非线性轴向受迫振动

7.1 前言

本章在假设桩基和土体材料的非线性弹性性质和线性粘弹性性质都比较弱的情况下,用多时间尺度法得到了一端固定、另一端自由的桩基非线性轴向受迫振动系统主共振时的稳态幅频响应曲线和失稳边界曲线,分析了系统主共振时稳态响应的稳定性,给出了数值算例,考察了参数的影响,得到了一些有意义的新结论。

7.2 问题的数学描述

考虑嵌岩圆截面桩基的非线性轴向受迫振动。假设桩基和土体材料分别满足非线性弹性和线性粘弹性的本构关系(2.1)及(2.2)和(2.3),假设桩基受到一种周期外部激励 $F(X,T) = F_0 \cos \Omega_0 T$, 我们有一端固定,另一端自由的桩基轴向运动无量纲形式的非线性微分方程(2.7)、端部条件(2.8)和初始条件(2.9)为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial w}{\partial t} + k_{11} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \\ + k_{22} w^2 + k_{33} w^3 - E_{22} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E_{33} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f_1 \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{E_{22}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{E_{33}}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 + \eta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right] \Big|_{x=1} = 0 \quad (2.8)$$

$$w(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x) \quad (2.9)$$

为了便于分析并使初始时刻顶端自由的条件被满足,设初始位移满足

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (2.10)$$

其中, $f_1 \cos \omega_0 t$ 为受迫力, ω_0 为激励频率, $f_1 = F_0 l / (E_1 A)$, $\omega_0 = \Omega_0 \sqrt{\rho l^2 / E_1}$ 。

7.3 多时间尺度法求解

显然,要得到边值问题(2.7)-(2.10)的完全解是很困难的,我们拟用多时间尺度法来求该问题的近似解。若桩和土的非线性弹性性质及线性粘弹性性质都比较弱

时, 可设 $k_{22} = \varepsilon k_{02}$, $k_{33} = \varepsilon k_{03}$, $E_{22} = \varepsilon E_{02}$, $E_{33} = \varepsilon E_{03}$, $\eta_1 = \varepsilon \eta_0$, $c_1 = \varepsilon c_0$,

同时设外部激励幅值也为小量 $f_1 = \varepsilon f_0$, ε 为小参数, 方程(2.7)-(2.10)可写成为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_{11} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon \left[\eta_0 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} - c_0 \frac{\partial w}{\partial t} - k_{02} w^2 - k_{03} w^3 \right. \\ \left. + E_{02} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_{03} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_0 \cos \omega_0 t \right] \end{aligned} \quad (7.1a)$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\varepsilon E_{02}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\varepsilon E_{03}}{3} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^3 \right] \Big|_{x=1} = 0 \quad (7.1b)$$

$$w(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0(x), \quad \text{而且} \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (7.1c)$$

令 $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ 为不同尺度的时间变量, 并设(7.1a)的近似解可以表示为

$$w(x, t, \varepsilon) = w_0(x, T_0, T_1) + \varepsilon w_1(x, T_0, T_1) + \dots \quad (7.2)$$

(7.2)式表达的振动过程包含了不同时间尺度的时间历程, 不同的时间尺度描述过程变化的不同节奏, 阶数愈低, 变化愈缓慢, 阶数愈高, 变化愈迅速。 $T_0 = t$ 为对应于线性系统以固有频率 ω_{in} 运动的快时间尺度, $T_1 = \varepsilon t$ 是由于桩基和土的材料非线性造成的慢时间尺度。同时, 将不同尺度的时间变量视为独立变量, 则 $w(x, t, \varepsilon)$ 成为自变量 x 和2个独立时间变量 T_0, T_1 的函数。对时间的微分可按照 ε 的幂次展开为

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \dots \quad (7.4)$$

将(7.2)代入动力学方程(7.1a), 并注意到(7.3)和(7.4), 比较 ε 同次幂的系数得到0阶和1阶线性偏微分方程

$$\varepsilon^0: \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0^2} + k_{11} w_0 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (7.5a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + k_{11} w_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = & -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \eta_0 \frac{\partial^3 w_0}{\partial T_0 \partial x^2} - c_0 \frac{\partial w_0}{\partial T_0} \\ & - k_{02} w_0^2 - k_{03} w_0^3 + E_{02} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + E_{03} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + f_0 \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (7.5b)$$

相应于变量 w_0, w_1 的端部条件为

$$w_0|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w_0}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad (7.6a)$$

$$w_1|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w_1}{\partial x} \right|_{x=1} = - \left[\eta_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial T_0} + \frac{E_{02}}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{E_{03}}{3} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^3 \right]_{x=1} \quad (7.6b)$$

相应于变量 w_0, w_1 的初始条件为

$$\begin{aligned} w_0|_{T_0=T_1=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{\partial w_0}{\partial T_0} \right|_{T_0=T_1=0} = v_0(x); \\ w_1|_{T_0=T_1=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w_1}{\partial T_0} \right|_{T_0=T_1=0} = - \left. \frac{\partial w_0}{\partial T_1} \right|_{T_0=T_1=0} \quad \text{而且} \quad \left. \frac{\partial u_0}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

在依次求解过程中，利用消除久期项的附加条件和端部条件、初始条件，可导出 0-阶和 1-阶方程的近似解表达式。特别地，可将方程(7.5a)的位移写成复数形式

$$w_0(x, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^N [\phi_n(x) A_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} + \bar{\phi}_n(x) \bar{A}_n(T_1) e^{-i\omega_n T_0}] \quad (7.8)$$

其中， $N \geq 1$ 为整数， $\bar{(\cdot)}$ 表示 (\cdot) 的复共轭。

将式(7.8)代入式(7.5b)，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + k_{11} w_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = & \sum_{n=1}^N \{ [-2i\phi_n \omega_n \frac{\partial A_n}{\partial T_1} + i\omega_n (\eta_0 \phi_n'' - c_0 \phi_n) A_n \\ & + (-3k_{03} \phi_n^2 \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_n' \phi_n'' \bar{\phi}_n + E_{03} \phi_n'^2 \bar{\phi}_n'') A_n^2 \bar{A}_n] e^{i\omega_n T_0} \\ & + (-k_{02} \phi_n^2 + E_{02} \phi_n' \phi_n'') A_n^2 e^{2i\omega_n T_0} + (-k_{03} \phi_n^3 + E_{03} \phi_n'^2 \phi_n'') A_n^3 e^{3i\omega_n T_0} \\ & + (-k_{02} \phi_n \bar{\phi}_n + E_{02} \phi_n'' \bar{\phi}_n') A_n \bar{A}_n \} + \frac{1}{2} f_0 e^{i\omega_0 T_0} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [(-2k_{02} \phi_k \phi_n + E_{02} \phi_k' \phi_n'' + E_{02} \phi_k'' \phi_n') \\ & \cdot A_k A_n e^{i(\omega_k + \omega_n) T_0} + (-2k_{02} \phi_k \bar{\phi}_n + E_{02} \phi_k' \bar{\phi}_n'' + E_{02} \phi_k'' \bar{\phi}_n') A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_k - \omega_n) T_0}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [(-2k_{03} \phi_m \phi_k \phi_n + 2E_{03} \phi_m' \phi_k' \phi_n') A_m A_k A_n e^{i(\omega_m + \omega_k + \omega_n) T_0} \\
 & + (-2k_{03} \phi_m \phi_k \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_m'' \phi_k' \bar{\phi}_n') A_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_m + \omega_k - \omega_n) T_0} \\
 & + (-2k_{03} \bar{\phi}_m \phi_k \phi_n + 2E_{03} \bar{\phi}_m'' \phi_k' \phi_n') \bar{A}_m A_k A_n e^{i(\omega_k + \omega_n - \omega_m) T_0} \\
 & + (-2k_{03} \bar{\phi}_m \phi_k \bar{\phi}_n + 2E_{03} \bar{\phi}_m'' \phi_k' \bar{\phi}_n') \bar{A}_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_k - \omega_n - \omega_m) T_0}] \\
 & + \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^N \sum_{(n=q)} [(-k_{03} \phi_q \phi_n^2 + E_{03} \phi_q'' \phi_n'^2) A_q A_n^2 e^{i(2\omega_n + \omega_q) T_0} \\
 & + (-2k_{03} \phi_q \phi_n \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_q'' \phi_n' \bar{\phi}_n') A_q A_n \bar{A}_n e^{i\omega_q T_0} \\
 & + (-k_{03} \bar{\phi}_q \phi_n^2 + E_{03} \bar{\phi}_q'' \phi_n'^2) \bar{A}_q A_n^2 e^{i(2\omega_n - \omega_q) T_0}] + cc
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

其中, ϕ_n' 和 ϕ_n'' 表示 $\phi_n(x)$ 对变量 x 的 1-阶和 2-阶导数, cc 表示其左端各项的复共轭之和。

当激励频率 ω_0 接近未扰线性系统固有频率 ω_n 时, 则可能发生共振现象。为了分析共振点附近的响应情况, 引入频率差 ω_r 或调谐参数 σ 来表示 ω_0 与 ω_n 的关系

$$\omega_0 = \omega_n + \omega_r = \omega_n + \varepsilon\sigma \tag{7.10}$$

将其代入(7.9), 得到

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + k_{11} w_1 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^N \{ [-2i \phi_n \omega_n \frac{\partial A_n}{\partial T_1} + i \omega_n (\eta_0 \phi_n'' - c_0 \phi_n') A_n \\
 & + (-3k_{03} \phi_n^2 \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_n' \phi_n'' \bar{\phi}_n' + E_{03} \phi_n'^2 \bar{\phi}_n'') A_n^2 \bar{A}_n] e^{i\omega_n T_0} \\
 & + (-k_{02} \phi_n^2 + E_{02} \phi_n' \phi_n'') A_n^2 e^{2i\omega_n T_0} + (-k_{03} \phi_n^3 + E_{03} \phi_n'^2 \phi_n'') A_n^3 e^{3i\omega_n T_0} \\
 & + (-k_{02} \phi_n \bar{\phi}_n + E_{02} \phi_n'' \bar{\phi}_n') A_n \bar{A}_n \} + \frac{1}{2} f_0 e^{i\sigma T_1} e^{i\omega_n T_0} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [(-2k_{02} \phi_k \phi_n + E_{02} \phi_k' \phi_n'' + E_{02} \phi_k'' \phi_n') \\
 & \cdot A_k A_n e^{i(\omega_k + \omega_n) T_0} + (-2k_{02} \phi_k \bar{\phi}_n + E_{02} \phi_k' \bar{\phi}_n'' + E_{02} \phi_k'' \bar{\phi}_n') A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_k - \omega_n) T_0}] \\
 & + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=k+1}^N [(-2k_{03} \phi_m \phi_k \phi_n + 2E_{03} \phi_m'' \phi_k' \phi_n') A_m A_k A_n e^{i(\omega_m + \omega_k + \omega_n) T_0} \\
 & + (-2k_{03} \phi_m \phi_k \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_m'' \phi_k' \bar{\phi}_n') A_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_m + \omega_k - \omega_n) T_0} \\
 & + (-2k_{03} \bar{\phi}_m \phi_k \phi_n + 2E_{03} \bar{\phi}_m'' \phi_k' \phi_n') \bar{A}_m A_k A_n e^{i(\omega_k + \omega_n - \omega_m) T_0} \\
 & + (-2k_{03} \bar{\phi}_m \phi_k \bar{\phi}_n + 2E_{03} \bar{\phi}_m'' \phi_k' \bar{\phi}_n') \bar{A}_m A_k \bar{A}_n e^{i(\omega_k - \omega_n - \omega_m) T_0}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{q=1}^N \sum_{n=1}^N [(-k_{03} \phi_q \phi_n^2 + E_{03} \phi_q'' \phi_n'^2) A_q A_n^2 e^{i(2\omega_n + \omega_q) T_0} \\
 & + (-2k_{03} \phi_q \phi_n \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_q' \phi_n' \bar{\phi}_n') A_q A_n \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} \\
 & + (-k_{03} \bar{\phi}_q \phi_n^2 + E_{03} \bar{\phi}_q'' \phi_n'^2) \bar{A}_q A_n^2 e^{i(2\omega_n - \omega_q) T_0}] + cc
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

比较齐次方程(7.5a)和非齐次方程(7.11)可以看到, 它们的左端形式完全相同, 但是齐次方程(7.5a)有非零解 $\phi_n(x)$ (即线性自由振动的 n 阶振型函数)。因此, 若要使非齐次方程(7.11)有解, 必须满足可解性条件, 即要求非齐次方程(7.11)的非齐次项的长期项与其伴随方程(7.5a)的解 $\phi_n(x)$ 正交。因此, 可解性条件为

$$\begin{aligned}
 & \langle [-2i\omega_n \frac{\partial A_n}{\partial T_1} + i\omega_n (\eta_0 \phi_n'' - c_0 \phi_n) A_n \\
 & + (-3k_{03} \phi_n^2 \bar{\phi}_n + 2E_{03} \phi_n' \phi_n'' \bar{\phi}_n' + E_{03} \phi_n'^2 \bar{\phi}_n'') A_n^2 \bar{A}_n + \frac{1}{2} f_0 e^{i\sigma T_1}] e^{i\omega_n T_0}, \phi_n \rangle = 0
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

其中, $\langle f, g \rangle$ 为在区间 $[0, 1]$ 上复函数的内积, 定义如下

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \bar{g} dx \tag{7.13}$$

这里, 取 $g = \phi_n(x)$, f 为(7.9)右边的第 1 项(长期项)。由式(7.10)和(7.11)得到

$$\begin{aligned}
 & -2i\omega_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx \frac{\partial A_n}{\partial T_1} + i\omega_n (\eta_0 \int_0^1 \phi_n'' \bar{\phi}_n dx - c_0 \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx) A_n + (-3k_{03} \int_0^1 \phi_n^2 \bar{\phi}_n^2 dx \\
 & + 2E_{03} \int_0^1 \phi_n' \phi_n'' \bar{\phi}_n' dx + E_{03} \int_0^1 \phi_n'^2 \bar{\phi}_n'' dx) A_n^2 \bar{A}_n + \frac{1}{2} f_0 e^{i\sigma T_1} \int_0^1 \bar{\phi}_n dx = 0
 \end{aligned}$$

此式可化为

$$\frac{\partial A_n}{\partial T_1} + k_{2n} A_n - k_{3n} A_n^2 \bar{A}_n + \frac{1}{2} k_{4n} f_0 e^{i\sigma T_1} = 0 \tag{7.14}$$

其中,

$$k_{2n} = \frac{-(\eta_0 \int_0^1 \phi_n'' \bar{\phi}_n dx - c_0 \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx)}{2 \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx} \tag{7.15a}$$

$$k_{3n} = \frac{-3k_{03} \int_0^1 \phi_n^2 \bar{\phi}_n^2 dx + 2E_{03} \int_0^1 \phi_n' \phi_n'' \bar{\phi}_n' dx + E_{03} \int_0^1 \phi_n'^2 \bar{\phi}_n'' dx}{2i\omega_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx} \tag{7.15b}$$

$$k_{4n} = -\frac{\int_0^1 \bar{\phi}_n dx}{2i\omega_n \int_0^1 \phi_n \bar{\phi}_n dx} \quad (7.15c)$$

利用端部条件(7.6a), 不难求得 0-阶系统(7.5a) (7.6a) (即派生线性系统自由振动的固有频率

$$\omega_n = \sqrt{k_{11} + (n-1/2)^2 \pi^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (7.16)$$

相应的模态为

$$\phi_n(x) = 2iC_{1n} \sin[(n-\frac{1}{2})\pi x] \quad (7.17)$$

式中, $C_{1n} = -\frac{A_{0n}}{4} e^{i\theta_{0n}}$, A_{0n} , θ_{0n} 分别为派生线性系统的振幅和相位, 是由系统的初始条件确定的实常数。

将(7.17)代入(7.15)可得

$$k_{2n} = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}\eta_0(n-1/2)^2 \pi^2 - \delta_n / \varepsilon \quad (7.18a)$$

$$k_{3n} = i \frac{3A_{0n}^2 (\beta_n^4 E_{03} + 3k_{03})}{32\omega_n} = i \frac{3A_{0n}^2 Q_3}{32\varepsilon\omega_n} \quad (7.18b)$$

$$k_{4n} = \frac{4\sin(\beta_n^2/4)\cos\theta_{0n} - 4i\sin(\beta_n^2/4)\sin\theta_{0n}}{\beta_n A_{0n} \omega_n} \quad (7.18c)$$

式中, $\delta_n = (c_1 + \eta_1 \beta_n^2)/2$ 为派生线性振动系统的阻尼系数, $\beta_n = (n-1/2)\pi$,

$Q_3 = \beta_n^4 E_{33} + 3k_{33}$ 是一个描述桩基和土的材料非线性特征的量。

7.4 稳态幅频响应

设(7.14)的解为 $A_n = A_n(T_1) = \alpha_n e^{i\gamma_n}$, 其中 $\alpha_n = \alpha_n(T_1)$, $\gamma_n = \gamma_n(T_1)$ 是时间尺度 T_1 的待定函数。将其代入(7.14)得到 α_n, γ_n 满足的方程

$$\frac{d\alpha_n}{dT_1} + i\alpha_n \frac{d\gamma_n}{dT_1} + k_{2n}\alpha_n - k_{3n}\alpha_n^3 + \frac{1}{2}k_{4n}f_0 e^{i(\sigma T_1 - \gamma_n)} = 0 \quad (7.19)$$

分开实部和虚部, 得到

$$\frac{d\alpha_n}{dT_1} + k_{2n}\alpha_n + \frac{1}{2}f_0(k_{4n}^R \cos\theta_n - k_{4n}^I \sin\theta_n) = 0 \quad (7.20a)$$

$$-\alpha_n \frac{d\theta_n}{dT_1} + \alpha_n \sigma - k_{3n}^I \alpha_n^3 + \frac{1}{2}f_0(k_{4n}^R \sin\theta_n + k_{4n}^I \cos\theta_n) = 0 \quad (7.20b)$$

式中, $\theta_n = \sigma T_1 - \gamma_n$.

对于稳态响应, 幅值 α_n 及新相位 θ_n 必须是常数, 所以如果存在稳态响应, 幅值 α_n 及相位 θ_n 需满足条件

$$\frac{d\alpha_n}{dT_1} - k_{2n}\alpha_n - \frac{1}{2}f_0(k_{4n}^R \cos\theta_n - k_{4n}^I \sin\theta_n) = 0 \quad (7.21a)$$

$$\frac{d\theta_n}{dT_1} - \sigma + k_{3n}^I \alpha_n^2 + \frac{1}{2\alpha_n}f_0(k_{4n}^R \sin\theta_n + k_{4n}^I \cos\theta_n) = 0 \quad (7.21b)$$

从(7.21)式中消去 θ_n , 得到因第 n -阶模态共振的幅值响应 α_n 与调谐参数 σ 的关系

$$(k_{2n}\alpha_n)^2 + (\alpha_n\sigma - k_{3n}^I \alpha_n^3)^2 = \frac{1}{4}f_0^2[(k_{4n}^R)^2 + (k_{4n}^I)^2] \quad (7.22)$$

将(7.18)代入(7.22), 并消去 ε 可得

$$(\delta_n \alpha_n)^2 + (\omega_r \alpha_n - \frac{A_{0n}^2 Q_3}{32\omega_n} \alpha_n^3)^2 = \frac{1}{4}f_0^2[(k_{4n}^R)^2 + (k_{4n}^I)^2] \quad (7.23)$$

由(7.22)或(7.23)式可以得到桩基轴向受迫振动的响应曲线, 即 $\alpha_n - \omega$ 曲线。

可见, 桩基非线性轴向受迫振动的响应不仅与派生线性振动系统的 n -阶固有频率 ω_n 、土刚度 k_{11} 和阻尼系数 δ_n 有关, 而且也与振幅 A_{0n} 、相位 θ_{0n} 和非线性特征量 Q_3 有关。

7.5 稳态响应的稳定性

在(7.21)式中令 $\alpha_n \neq 0$ 可以研究稳态响应的稳定性。根据隐函数存在定理, (7.21)

在稳态解处的 Jacob 矩阵 (消去 θ_n 化简后) 可写为

$$J = \begin{pmatrix} -k_{2n} & -\sigma\alpha_n + k_{3n}^1\alpha_n^3 \\ \frac{1}{\alpha_n}(\sigma - 3k_{3n}^1\alpha_n^2) & -k_{2n} \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

它的特征方程为

$$\lambda^2 + 2k_{2n}\lambda + k_{2n}^2 + (\sigma - k_{3n}^1\alpha_n^2)(\sigma - 3k_{3n}^1\alpha_n^2) = 0 \quad (7.25)$$

其中, λ 为特征值。根据 Routh-Hurwitz 判据, 当下面不等式

$$k_{2n}^2 + (\sigma - k_{3n}^1\alpha_n^2)(\sigma - 3k_{3n}^1\alpha_n^2) > 0 \quad (7.26)$$

成立时, 特征方程(7.25)式的所有的根有负的实部, 在这个条件下, 由(7.21)决定的稳态解是稳定的, 否则是不稳定的。因此, 失稳边界为

$$k_{2n}^2 + (\sigma - k_{3n}^1\alpha_n^2)(\sigma - 3k_{3n}^1\alpha_n^2) = 0 \quad (7.27)$$

将(7.18)代入上式, 并消去 ϵ 可得

$$\delta_n^2 + \left(\omega, -\frac{A_{0n}^2 Q_3}{32\omega_n} \alpha_n^2\right) \left(\omega, -\frac{3A_{0n}^2 Q_3}{32\omega_n} \alpha_n^2\right) = 0 \quad (7.28)$$

可见失稳边界曲线与 n -阶固有频率 ω_n 、阻尼系数 δ_n 、振幅 A_{0n} 和非线性特征量 Q_3 均有关。在这个边界内的区域的运动是不稳定。

响应曲线与失稳边界曲线的交点, 即稳态响应状态稳定与不稳定的临界点可以由(7.23)及(7.28)二式的共解得到

$$\frac{d\alpha_n}{d\omega} = \frac{\omega_n \alpha_n - \frac{A_{0n}^2 Q_3}{32\omega_n} \alpha_n^3}{\delta_n^2 + \left(\omega, -\frac{A_{0n}^2 Q_3}{32\omega_n} \alpha_n^2\right) \left(\omega, -\frac{3A_{0n}^2 Q_3}{32\omega_n} \alpha_n^2\right)} \quad (7.29)$$

该微分在交点处趋于无穷, 也就是说在临界点处的切线与 α_n 轴平行。

7.6 数值计算与结果分析

对式(7.23)和(7.28)进行数值计算, 参考文献[1,2]中的有关试验数据, 取定如下计算参数: $l=20$ m, $d=0.35$ m, $\rho=2.4 \times 10^3$ kg/m³, $E_1=2.1 \times 10^{10}$ Pa、 $E_2=5.5 \times 10^{12}$ Pa、 $E_3=2.5 \times 10^{14}$ Pa, $\eta_n=1.0 \times 10^6$ N·s/m², $k_{n1}=2.1 \times 10^6$ N/m³,

$$k_{u2} = 0.65 \times 10^8 \text{ N/m}^4, \quad k_{u3} = 0.65 \times 10^9 \text{ N/m}^5, \quad c_u = 5.76 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m}^3, \quad a_u = 1, \\ F_0 = 5 \times 10^5 \text{ N}, \quad A_{0n} = 0.002, \quad \theta_{0n} = \pi/2, \quad (7.30)$$

由此可以进一步算得：当 $n=1$ 时， $\omega_n = 1.71$ ， $\delta_n = 0.10$ ， $Q_3 = 3.87 \times 10^5$ ；
当 $n=2$ 时， $\omega_n = 4.76$ ， $\delta_n = 0.17$ ， $Q_3 = 1.78 \times 10^7$ 。而 $f_1 = 0.005$ 。

由(7.23)可绘制图 7.1 和图 7.2，此即粘性非线性系统受到外激励而产生的前两阶固有频率附近的响应。图中所示的是一种典型的振幅跳跃的非线性现象，当激励频率接近线性系统固有频率，即频率差 ω_r 接近零时，产生共振从而响应幅值变大；当频率差 ω_r 超过零时，同一激励频率对应于的振幅有多个不同的值，运动状态具有不稳定性。

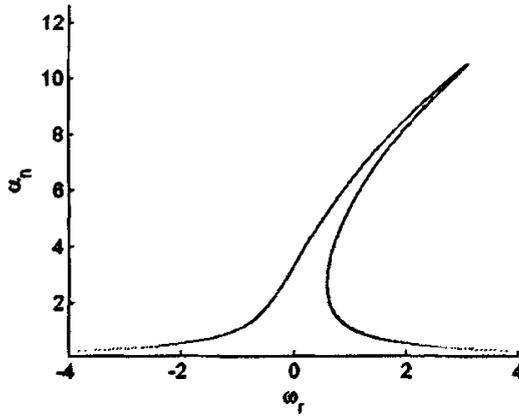


图 7.1 粘性非线性系统的幅频响应曲线 ($n = 1$)

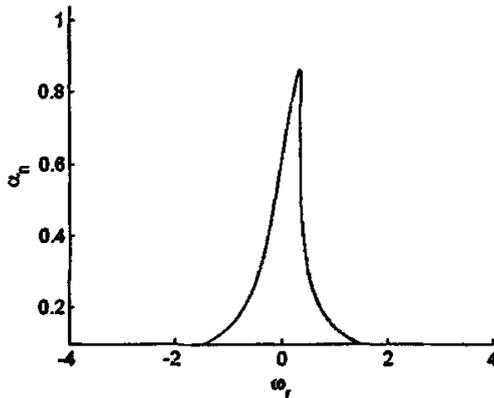


图 7.2 粘性非线性系统的幅频响应曲线 ($n = 2$)

若只改变非线性系数 Q_3 , 保持(7.30)中的其它系数不变, 可得到图 7.3 和图 7.4, 它们显示了非线性系数 Q_3 对幅频响应的影响。可见, 随着非线性系数 Q_3 的增大, 幅频响应曲线向右弯曲。

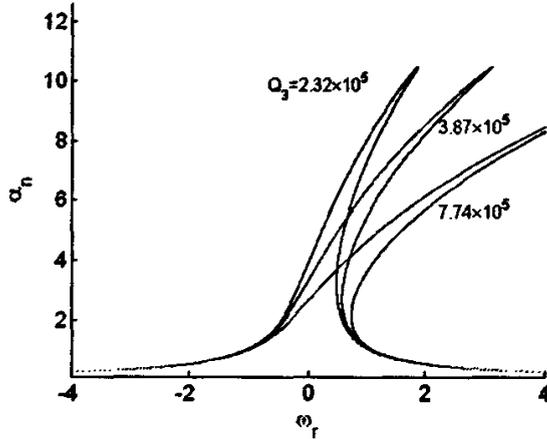


图 7.3 非线性系数 Q_3 对幅频响应曲线的影响 ($n = 1$)

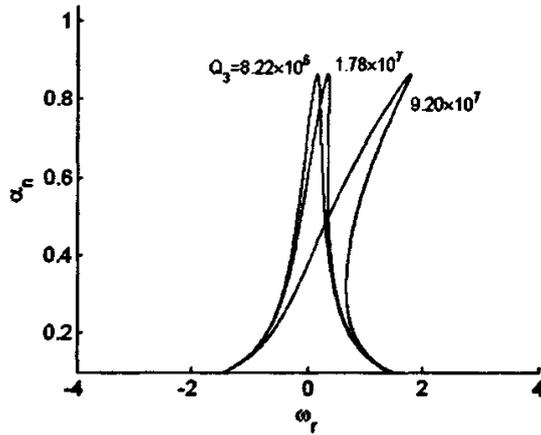


图 7.4 非线性系数 Q_3 对幅频响应曲线的影响 ($n = 2$)

若只改变粘性系数 δ_n , 保持(7.30)中的其它系数不变, 可得到图 7.5 和图 7.6, 它们显示了粘性系数 δ_n 对幅频响应的影响。可见, 粘性阻尼抑制了响应振幅的增大, 较大的阻尼对应于较小的响应振幅。

若只改变激励振幅 f_1 , 保持(7.30)中的其它系数不变, 可得到图 7.7 和图 7.8,

它们显示了激励振幅对幅频响应的影响。可见，激励振幅增大导致响应振幅增大。

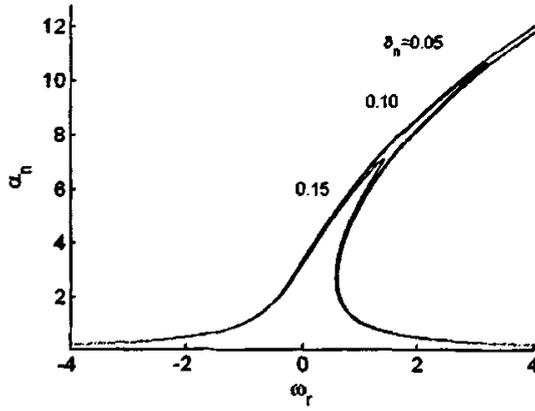


图 7.5 粘性系数 δ_n 对幅频响应曲线的影响 ($n = 1$)

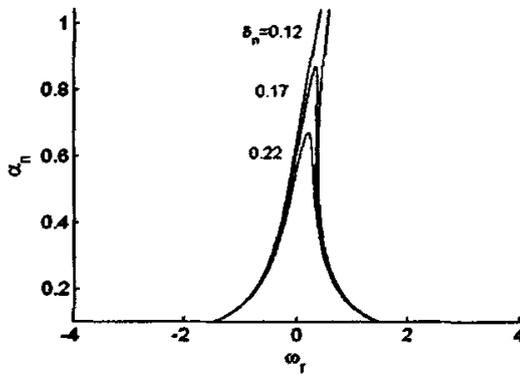


图 7.6 粘性系数 δ_n 对幅频响应曲线的影响 ($n = 2$)

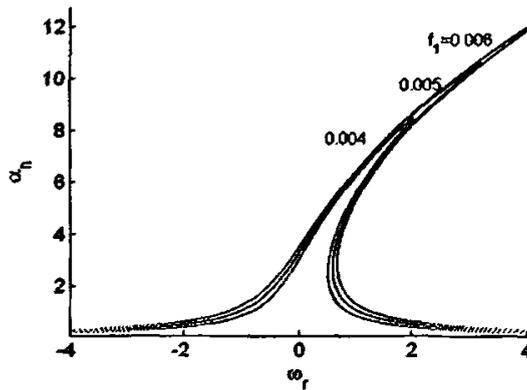


图 7.7 激励振幅 f_1 对幅频响应曲线的影响 ($n = 1$)

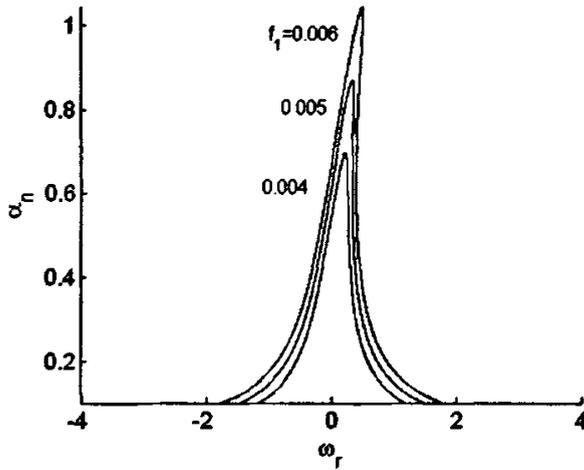


图 7.8 激励振幅 f_1 对幅频响应曲线的影响 ($n = 2$)

下面进一步考察稳态响应的稳定性。图 7.9 和图 7.10 中，实线表示由式(7.23)所得到的响应曲线，而虚线表示由式(7.28)所得到的失稳边界，在这个失稳边界内的区域稳态响应是不稳定的，在不稳定的区域内会出现跳跃现象。

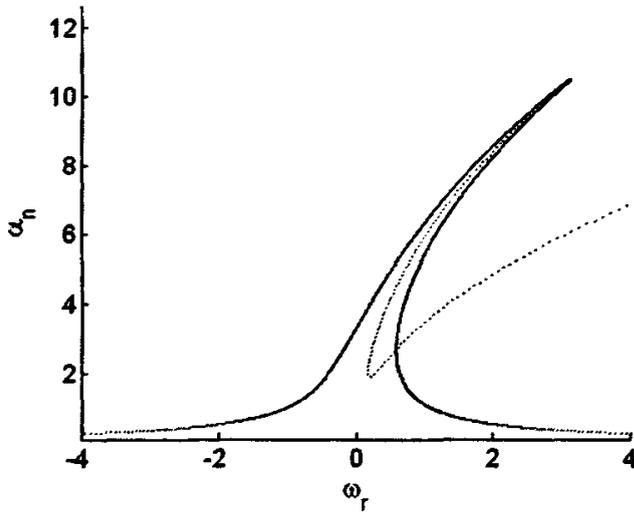


图 7.9 粘性非线性系统稳态响应的稳定性 ($n = 1$)

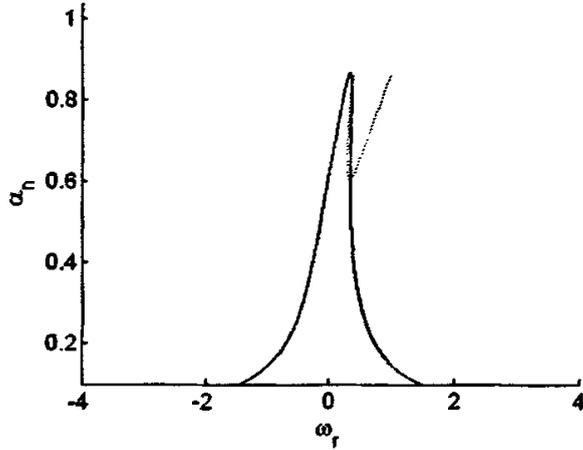


图 7.10 粘性非线性系统稳态响应的稳定性 ($n = 2$)

若只改变非线性系数 Q_3 ，保持(7.30)中的其它系数不变，可得到图 7.11 和图 7.12；若只改变粘性系数 δ_n ，保持(7.30)中的其它系数不变，可得到图 7.13 和图 7.14；若只改变激励振幅 f_1 ，保持(7.30)中的其它系数不变，可得到图 7.15 和图 7.16。可见，如果减小非线性系数 Q_3 、增大阻尼 δ_n 或减小激励振幅 f_1 ，可能不发生振幅跳跃和出现多个不同幅值的非线性现象。

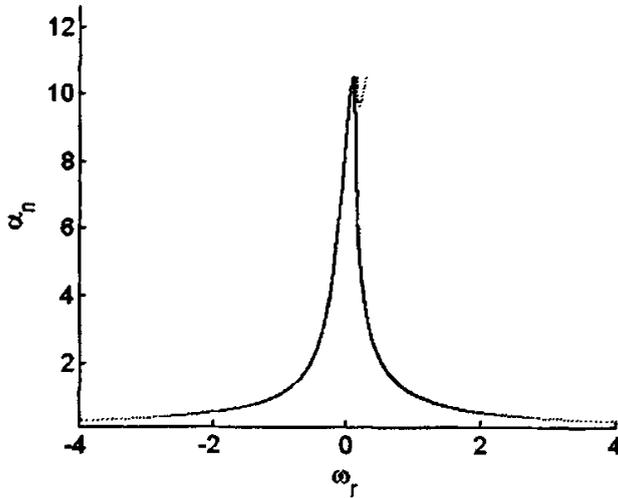


图 7.11 非线性系数 Q_3 对稳态响应稳定性的影响 ($n = 1, Q_3 = 1.5 \times 10^4$)

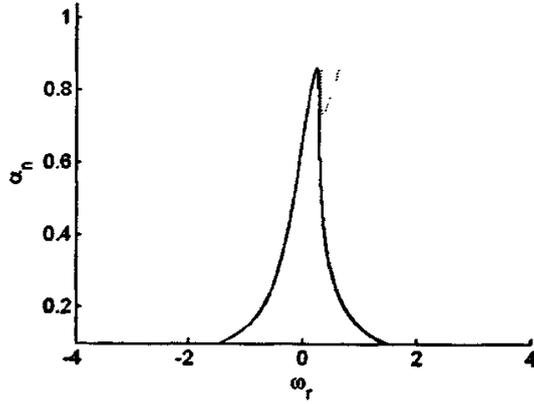


图 7.12 非线性系数 Q_3 对稳态响应稳定性的影响 ($n = 2$, $Q_3 = 1.2 \times 10^7$)

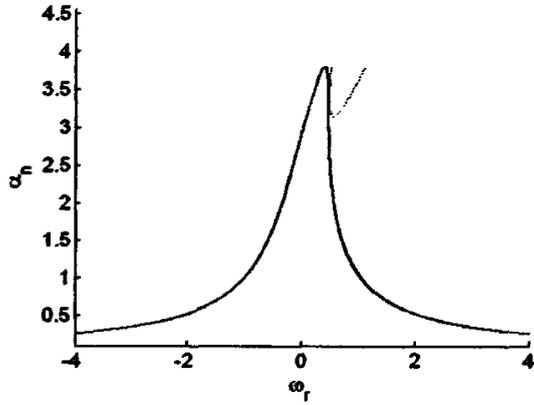


图 7.13 粘性系数 δ_n 对稳态响应稳定性的影响 ($n = 1$, $\delta_n = 0.28$)

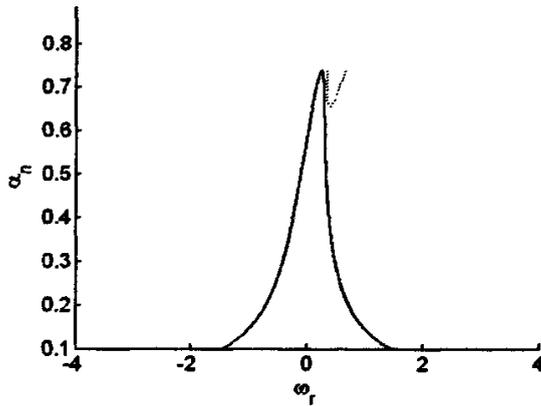


图 7.14 粘性系数 δ_n 对稳态响应稳定性的影响 ($n = 2$, $\delta_n = 0.20$)

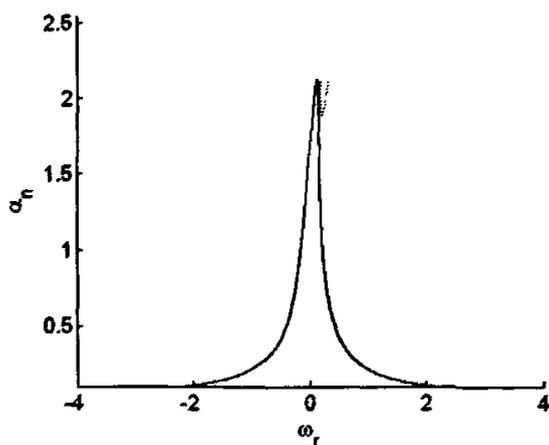


图 7.15 激励振幅 f_1 对稳态响应稳定性的影响 ($n = 1$, $f_1 = 0.001$)

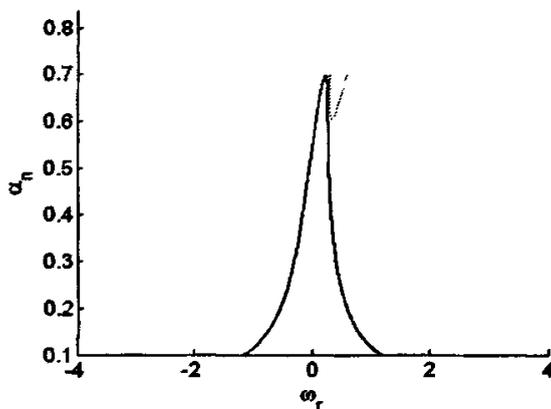


图 7.16 激励振幅 f_1 对稳态响应稳定性的影响 ($n = 2$, $f_1 = 0.004$)

7.7 小结

本章在假设桩基和土的非线性弹性、线性粘弹性都比较弱的情况下，用多时间尺度法得到了一端固定、另一端自由的桩基非线性轴向受迫振动系统主共振时的稳态幅频响应曲线和失稳边界曲线，分析了系统主共振时稳态响应的稳定性。给出了数值算例，绘制了粘性非线性系统前两阶固有频率附近的幅频响应曲线，讨论了非线性系数 Q_3 、粘性系数 δ_n 和激励振幅 f_1 对幅频响应的影响。

桩基非线性轴向受迫振动的响应曲线不仅与派生线性振动系统的 n -阶固有频率 ω_n 、土刚度 k_{11} 和阻尼系数 δ_n 有关，而且也与振幅 A_{0n} 、相位 θ_{0n} 和非线性特征量

Q_3 有关。失稳边界曲线与 n -阶固有频率 ω_n 、阻尼系数 δ_n 、振幅 A_{0n} 和非线性特征量 Q_3 有关。从幅频响应曲线中可见到一种典型的振幅跳跃的非线性现象，当激励频率接近线性系统固有频率时，产生共振从而响应幅值增大；当激励频率超过线性系统固有频率时，同一激励频率对应于振幅的多个不同值，运动状态具有不稳定性。随着非线性系数 Q_3 的增大，响应曲线峰值向右弯曲。粘性阻尼会抑制响应振幅的增大。激励振幅增大导致响应振幅增大。如果减小非线性系数、增大阻尼或减小激励振幅，可能不发生振幅跳跃和出现多个不同幅值的非线性现象。

第八章 桩基的非线性轴向混沌运动

8.1 前言

本章假设嵌岩桩桩身材料及桩周土体材料均服从非线性弹性和线性粘弹性本构关系, 利用第二章导出的分析桩基轴向非线性动力学的偏微分方程, 在给定桩顶竖向动位移和底端固定的条件下, 用 Galerkin 平均化方法对控制方程进行了简化, 并应用非线性动力学的数值方法, 对简化后的系统进行了数值计算, 得到了简化系统的时程曲线、相平面图、功率谱图、Poincare 截面图及分岔混沌图, 考察了材料及结构参数对桩基非线性动力学特性的影响。

8.2 土—桩系统的动力学模型

考虑嵌岩圆截面桩基的非线性轴向运动的动力学特性。设桩长为 l 、直径为 d 、横截面面积为 A 、材料密度为 ρ 。坐标系如图 2.1 所示, 即取桩基的轴向向上为 X 轴的正方向, 桩底几何中心处为坐标系的原点。假设桩基材料满足非线性弹性和线性粘弹性的本构关系(2.1), 假设土体对桩基的轴向抗力及阻尼与位移及速率之间满足的非线性关系为(2.3), 则由第二章可得到分析嵌岩桩非线性动力学特性的微分方程为(2.4), 即

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \pi d (c_u \frac{\partial U}{\partial T} + a_u k_{u1} U + a_u k_{u2} U^2 + a_u k_{u3} U^3) \\ & - \frac{\partial}{\partial X} [E_1 A \frac{\partial U}{\partial X} + E_2 A (\frac{\partial U}{\partial X})^2 + E_3 A (\frac{\partial U}{\partial X})^3 + \eta_u A \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial X}] = 0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

对于嵌岩桩, 桩底位移为零, 底端条件为

$$U|_{X=0} = 0 \quad (8.2a)$$

设桩顶给定位移

$$U|_{X=l} = -U_0(1 - \cos \omega T) \quad (8.2b)$$

其中, U_0 及频率 ω 是常数。

假设初始状态时, 桩基处于静止, 初始条件为

$$U(X,T)|_{T=0} = 0, \quad \frac{\partial U(X,T)}{\partial T} \Big|_{T=0} = 0 \quad (8.3)$$

8.3 问题的求解

为了便于分析, 引入无量纲变量和参数 $w = U/l$, $x = X/l$, $t = T\sqrt{E_1/(\rho l^2)}$,
 $c_1 = \pi d c_u \sqrt{l^2/(E_1 \rho A^2)}$, $k_{11} = \pi a_u d k_{u1} l^2/(E_1 A)$, $\eta_1 = \eta_u \sqrt{l/(E_1 \rho l^2)}$,
 $k_{22} = \pi a_u d k_{u2} l^3/(E_1 A)$, $k_{33} = \pi a_u d k_{u3} l^4/(E_1 A)$, $E_{22} = 2E_2/E_1$, $E_{33} = 3E_3/E_1$,
 $w_0 = U_0/l$, $\Omega = \omega \sqrt{\rho l^2/E_1}$.

于是, 式(8.1)可化为无量纲形式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial w}{\partial t} + k_{11} w - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \eta_1 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + k_{22} w^2 \\ & + k_{33} w^3 - E_{22} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E_{33} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

引入代换

$$v(x,t) = w(x,t) + xw_0(1 - \cos \Omega t) \quad (8.5)$$

可得到以 v 表示的控制方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial v}{\partial t} - \eta_1 \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} + k_{11} v + k_{22} [v - xw_0(1 - \cos \Omega t)]^2 + k_{33} [v - xw_0(1 - \cos \Omega t)]^3 \\ & - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - E_{22} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - w_0(1 - \cos \Omega t) \right] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - E_{33} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - w_0(1 - \cos \Omega t) \right]^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & - c_1 x w_0 \Omega \sin \Omega t - k_{11} x w_0 (1 - \cos \Omega t) - x w_0 \Omega^2 \cos \Omega t = 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

端部条件(8.2)变为

$$v(x,t)|_{x=0} = 0, \quad v(x,t)|_{x=1} = 0 \quad (8.7)$$

方程(8.6)是非线性的, 通常难以求解。这里, 采用 Galerkin 方法对问题进行简化, 并用非线性动力学中的方法, 对 Galerkin 截断系统的动力学特性进行分析。由边界条件(8.7), 可设问题的解有如下形式

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin n\pi x \quad (8.8)$$

若取 $n=1$ ，并令 $u(t) = u_1(t)$ ，则将式(8.8)代入(8.6)后两边同乘以 $\sin \pi x$ ，并在 $[0,1]$ 上积分，可以得到无量纲函数 $u(t)$ 满足的非线性微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + C_{11} \frac{du}{dt} + A_1 u^3 + (A_{20} + A_{21} \cos \Omega t) u^2 + (A_{30} + A_{31} \cos \Omega t + A_{32} \cos^2 \Omega t) u + \\ F_{10} + F_{11} \sin \Omega t + F_{12} \cos \Omega t + F_{13} \cos^2 \Omega t + F_{14} \cos^3 \Omega t = 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

式中，无量纲参量给定为

$$\begin{aligned} C_{11} &= c_1 + \eta_1 \pi^2; \quad A_{30} = k_{11} + \pi^2 - (k_{22} + E_{22} \pi^2) w_0 + (k_{33} - \frac{3k_{33}}{2\pi^2} + E_{33} \pi^2) w_0^2; \\ A_{31} &= \frac{3k_{33}}{\pi^2} w_0^2 - 2k_{33} w_0^2 - 2E_{33} \pi^2 w_0^2 + k_{22} w_0 + E_{22} \pi^2 w_0; \quad A_1 = \frac{3k_{33}}{4} + \frac{1}{4} E_{33} \pi^4; \\ A_{20} &= \frac{8k_{22}}{3\pi} - \frac{4k_{33}}{\pi} w_0; \quad A_{32} = E_{33} \pi^2 w_0^2 + k_{33} w_0^2 - \frac{3k_{33}}{2\pi^2} w_0^2; \\ F_{10} &= -\frac{2}{\pi} k_{11} w_0 + k_{22} (\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}) w_0^2 + k_{33} (\frac{12}{\pi^3} - \frac{2}{\pi}) w_0^3; \quad A_{21} = \frac{4k_{33}}{\pi} w_0; \\ F_{11} &= -\frac{2}{\pi} c_1 w_0 \Omega; \quad F_{12} = \frac{2}{\pi} k_{11} w_0 - 4k_{22} (\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}) w_0^2 - 6k_{33} (\frac{6}{\pi^3} - \frac{1}{\pi}) w_0^3 - \frac{2}{\pi} w_0 \Omega^2; \\ F_{13} &= k_{22} (\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^3}) w_0^2 + 6k_{33} (\frac{6}{\pi^3} - \frac{1}{\pi}) w_0^3; \quad F_{14} = -2k_{33} (\frac{6}{\pi^3} - \frac{1}{\pi}) w_0^3. \end{aligned}$$

初始条件相应变为

$$u(t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{du(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (8.10)$$

研究表明^[159-162]，低阶 Galerkin 截断系统在一定程度上能够较好地描述粘弹性结构的动力学行为，因此为了方便，取 $n=1$ 。如果为了比较，也可以取 $n=2$ 或 $n=3$ 等。

8.4 数值实例和结果分析

采用变步长 Runge-Kutta 方法，在初始条件式(8.10)下方程(8.9)进行数值求解。计算中取参数如下：

$$\begin{aligned} l=20\text{m}, \quad d=0.35\text{m}, \quad \rho=2.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad E_1=2.1 \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad E_2=5.5 \times 10^{12} \text{ Pa}, \\ E_3=2.5 \times 10^{14} \text{ Pa}, \quad \eta_n=1.0 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2, \quad k_{n1}=2.1 \times 10^6 \text{ N/m}^3, \quad k_{n2}=0.65 \times 10^8 \text{ N/m}^4, \end{aligned}$$

$$k_{u3} = 0.65 \times 10^9 \text{ N/m}^3, \quad \dot{c}_u = 5.76 \times 10^2 \text{ N}\cdot\text{s/m}^3, \quad a_u = 1, \quad \omega = 7\pi, \quad U_0 = 0.032 \text{ m} \quad (8.11)$$

并可算得无量纲量 $\Omega = 0.1487$, $T = 2\pi/\Omega = 42.2577$, $w_0 = 0.0022$, $C_{11} = 0.0255$, 进而可求得方程(8.9)中的无量纲系数。数值计算结果示于图 8.1~图 8.4 中。

图 8.1 为系统的时程曲线, 图 8.2 的相平面图, 它是经过 600 个循环(每经过周期时间 T 为一个循环)得到的扭结在一起的不封闭的轨线, 图 8.3 是功率谱, 它是出现噪声背景宽峰连续谱, 图 8.4 中的 Poincare 映射图是成片的有层次结构的密集点, 因此, 说明截断系统的运动是混沌的。

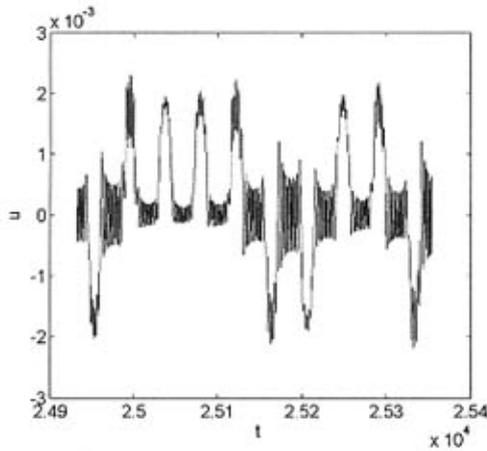


图 8.1 系统的时程曲线

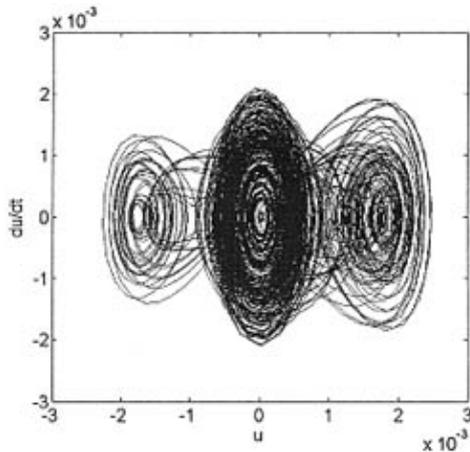


图 8.2 系统的相平面图

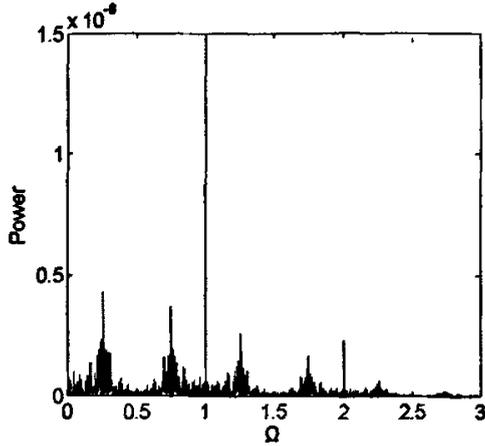


图 8.3 系统的功率谱图

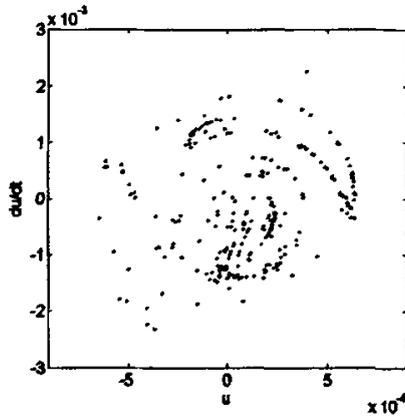


图 8.4 系统的 Poincaré 截面图

为了考察参数对动力学特性的影响，假设桩顶位移幅值 w_0 (或 U_0) 是可变的，保持(8.11)中的其余参数不变，可得到图 8.5 所示的位移 u 随参数 w_0 变化的分岔图。可见，当 $w_0 < 0.0011$ 时，简化系统的运动是周期的；当 $0.0011 \leq w_0 < 0.0015$ 时，系统的运动是准周期的，当 $w_0 = 0.0015$ 时进入分岔运动状态，随着 w_0 的继续增加，运动呈现分岔和阵发性混沌状态。如果只改变粘性参数 C_{11} (或 c_u, η_u)，保持(8.11)中的其余参数不变，可得到图 8.6 所示的分岔图。可见，当 $C_{11} < 0.06$ 时，系统进入分岔运动和阵发性混沌运动状态，当 $C_{11} \geq 0.06$ 时，系统的运动是周期的，因此，增加粘性，可使系统保持周期运动。

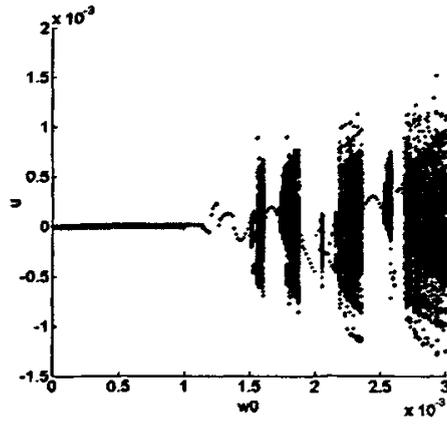


图 8.5 位移 u 随参数 w_0 变化的分岔图

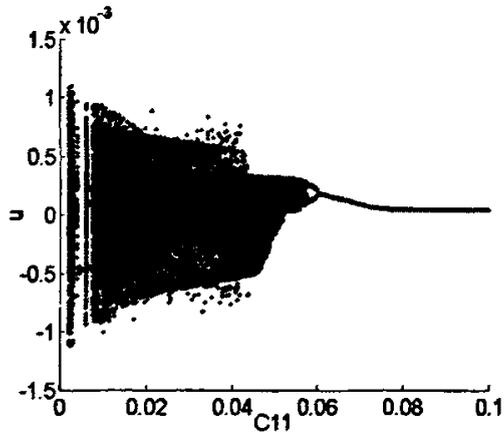


图 8.6 位移 u 随参数 C_{11} 变化的分岔图

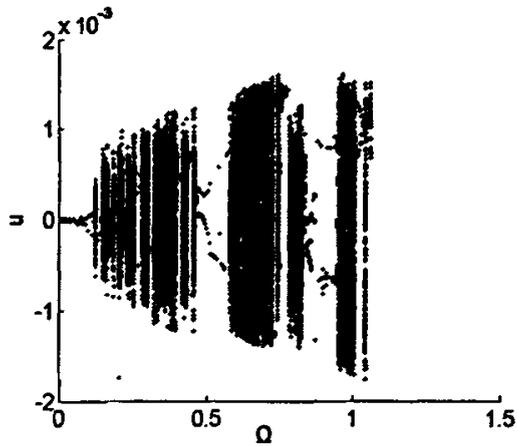


图 8.7 位移 u 随参数 Ω 变化的分岔图

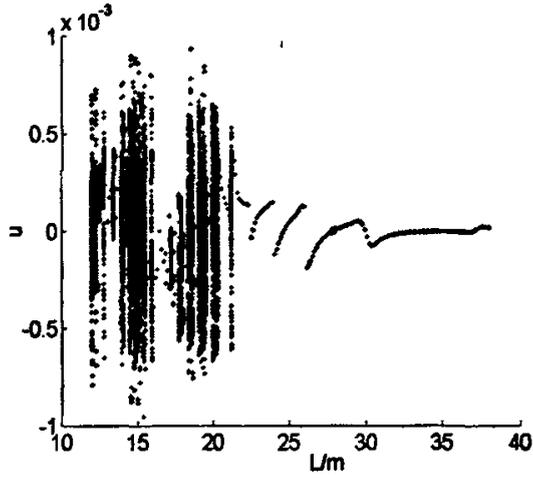


图 8.8 位移 u 随参数 l 变化的分岔图

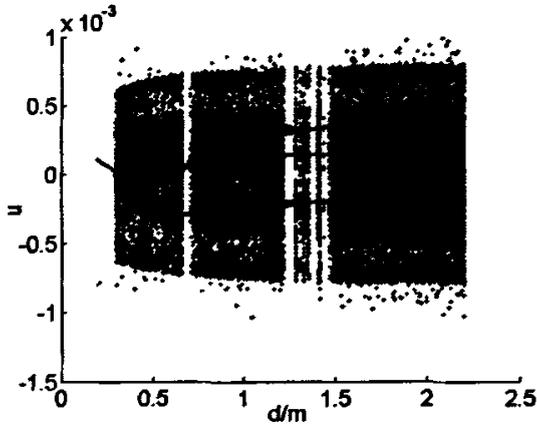


图 8.9 位移 u 随参数 d 变化的分岔图

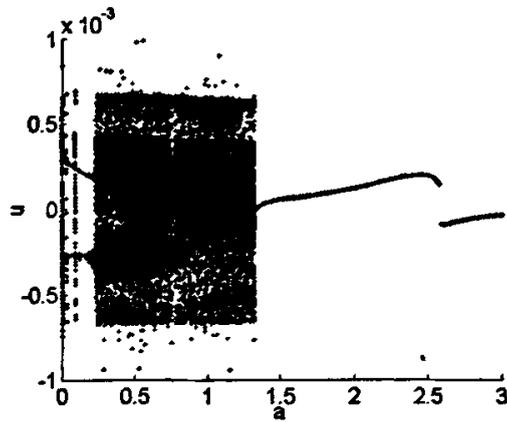


图 8.10 位移 u 随参数 a 变化的分岔图

如果改变激励频率 Ω (或 ω),保持(8.11)中的其余参数不变,可得到图 8.7 所示的分岔图。当 $\Omega \leq 0.06$ 时,系统的运动是周期的;随着 Ω 的增加系统可以发生周期运动、准周期运动并进入分岔或阵发性混沌运动状态。如果改变桩基的长度 l ,保持其余参数不变,可得到图 8.8 所示的位移随参数 l 的分岔图。当 $l \geq 21.8$ m 时,系统的运动是周期的;随着参数 l 的减小,系统可以发生准周期运动并进入分岔或阵发性混沌运动状态。如果改变桩径 d ,保持其余参数不变,可得到图 8.9 所示的分岔图。随着参数 d 的增大,系统的运动形式可以发生周期运动、准周期运动并进入分岔或混沌运动状态。如果改变(8.1)中的可调参数 a_s ,保持(8.11)中的其余参数不变,可得到图 8.10 所示的分岔图。随着参数 a_s 的减小,运动形式可以是周期运动、准周期运动、分岔或阵发混沌运动。说明在土的反力比较大的情况下(对应于桩周土质较好时),桩基的轴向振动一般为周期运动,只有当桩周土较软弱时,运动才可能进入分岔或混沌。

8.5 小结

在给定桩顶竖向动态位移及有阻尼非线性弹性土体作用的条件下,非线性嵌岩桩的轴向运动形态,可以呈现周期运动、准周期运动、分岔或阵发性混沌运动。这些运动形态与系统的参数有密切的关系,如果桩顶动位移幅值足够大、桩身粘性系数和桩周土的阻尼系数都较小、桩顶位移频率较高、桩周土较软弱、桩较短和较粗时,运动形态可能进入分岔或阵发混沌运动。

第九章 桩基的非线性横向混沌运动

9.1 前言

本章考察嵌岩桩的非线性横向动力学特性。假设嵌岩桩桩身材料和桩周土体材料均满足非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系，利用第二章导出的分析桩基横向非线性动力学特性的偏微分控制方程，用 Galerkin 方法对方程进行简化，得到了一个简化的动力学系统；利用非线性动力学的方法得到了简化系统的时程曲线、相平面图、功率谱图、Poincare 截面图及分岔混沌图，最后考察了材料和结构参数对桩基非线性动力学特性的影响。

9.2 土—桩系统的动力学模型

考虑桩长为 l 、外径为 D 、内径为 d_1 、横截面面积为 A 、材料密度为 ρ 的嵌岩圆形桩，并设初始时刻桩基处于静止状态。取坐标系如图 9.1，桩顶几何中心处为坐标的原点， X 轴向下，而 Y 轴水平向右。

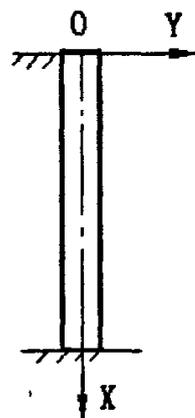


图 9.1 嵌岩桩

假设桩基材料服从如非线性本构关系(2.13)，在小变形情况，应变 ε 和位移 $V(X, T)$ 的关系为(2.14)；设土的材料也

一种非线性弹性和线性粘弹性材料，根据 Winkler 模型，土对桩的横向抗力由式(2.11)给定；当 $q = 0$ 时，可得到桩基横向运动的非线性微分方程为(2.16)，即

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} + E_0 \pi \frac{D^4 - d_1^4}{64} \frac{\partial^4 V}{\partial X^4} - 2E_0 \beta \frac{D^5 - d_1^5}{60} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial X^3} \right)^2 - 2E_0 \beta \frac{D^5 - d_1^5}{60} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^4} \\ & + 6E_0 \pi \frac{D^6 - d_1^6}{512} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial X^3} \right)^2 + 3E_0 \pi \frac{D^6 - d_1^6}{512} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right)^2 \frac{\partial^4 V}{\partial X^4} + \eta \pi \frac{D^4 - d_1^4}{64} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \frac{\partial^2 V}{\partial T} \\ & + P_0 [1 - (1 - \alpha)X/l] \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - P_0 \frac{1 - \alpha}{l} \frac{\partial V}{\partial X} + aD(k_1 V + k_2 V^2 + k_3 V^3) + cD \frac{\partial V}{\partial T} = 0 \end{aligned} \quad (9.1)$$

对于嵌岩桩，有如下底端条件

$$V|_{x=l} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial X}|_{x=l} = 0 \quad (9.2a)$$

给定桩顶位移和转角, 在 $X=0$ 处有端部条件

$$V|_{x=0} = Y_m(1 - \cos \omega T), \quad \frac{\partial V}{\partial X}|_{x=0} = -\frac{2Y_m}{l}(1 - \cos \omega T) \quad (9.2b)$$

其中: Y_m 、 ω 是常数。

同时, 初始条件为

$$V(X, T)|_{T=0} = 0, \quad \frac{\partial V(X, T)}{\partial T}|_{T=0} = 0 \quad (9.3)$$

引入代换

$$v = V - \left(\frac{l-X}{l}\right)^2 Y_m(1 - \cos \omega T) \quad (9.4)$$

设 $P_0 = 0$, $a = 1$, 则方程(9.1)和端部条件(9.2)变为变量 v 的如下方程和条件:

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} + cD \frac{\partial v}{\partial T} + 3E_0 \gamma \pi \frac{D^6 - d_1^6}{512} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}\right)^2 \frac{\partial^4 v}{\partial X^4} - 2E_0 \beta_0 \frac{D^5 - d_1^5}{60} \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \frac{\partial^4 v}{\partial X^4} \\ & + 3E_0 \gamma \pi \frac{D^6 - d_1^6}{512} \frac{4}{l^2} Y_m(1 - \cos \omega T) \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \frac{\partial^4 v}{\partial X^4} + E_0 \pi \frac{D^4 - d_1^4}{64} \frac{\partial^4 v}{\partial X^4} \\ & - 2E_0 \beta_0 \frac{D^5 - d_1^5}{60} \frac{2}{l^2} Y_m(1 - \cos \omega T) \frac{\partial^4 v}{\partial X^4} + 3E_0 \gamma \pi \frac{D^6 - d_1^6}{512} \frac{4}{l^4} Y_m^2(1 - \cos \omega T)^2 \frac{\partial^4 v}{\partial X^4} \\ & + 6E_0 \gamma \pi \frac{D^6 - d_1^6}{512} \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial X^3}\right)^2 - 2E_0 \beta_0 \frac{D^5 - d_1^5}{60} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial X^3}\right)^2 \\ & + 6E_0 \gamma \pi \frac{D^6 - d_1^6}{512} \frac{2}{l^2} Y_m(1 - \cos \omega T) \left(\frac{\partial^3 v}{\partial X^3}\right)^2 + \eta \pi \frac{D^4 - d_1^4}{64} \frac{\partial^5 v}{\partial X^4 \partial T} + k_1 D v \\ & + 2k_2 D \left(\frac{l-X}{l}\right)^2 Y_m(1 - \cos \omega T)v + 3k_3 D \left(\frac{l-X}{l}\right)^4 Y_m^2(1 - \cos \omega T)^2 v \\ & + k_2 D v^2 + 3k_3 D \left(\frac{l-X}{l}\right)^2 Y_m(1 - \cos \omega T)v^2 + k_3 D v^3 + cD \omega \left(\frac{l-X}{l}\right)^2 Y_m \sin \omega T \\ & + \rho A \omega^2 \left(\frac{l-X}{l}\right)^2 Y_m \cos \omega T + k_1 D \left(\frac{l-X}{l}\right)^2 Y_m(1 - \cos \omega T) \\ & + k_2 D \left(\frac{l-X}{l}\right)^4 Y_m^2(1 - \cos \omega T)^2 + k_3 D \left(\frac{l-X}{l}\right)^6 Y_m^3(1 - \cos \omega T)^3 = 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial X} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial X} \right|_{x=l} = 0 \quad (9.6)$$

9.3 问题的求解

方程(9.5)是非线性的,通常难以求解。我们采用 Galerkin 方法对问题进行简化。研究表明^[159-162],对于粘弹性结构,低阶 Galerkin 截断系统在一定程度上能够比较好地描述结构长时间的力学行为。因此,为了满足端部条件(9.6),方程(9.5)的解可取如下形式:

$$v(X, T) = lw(T) \left(1 - \cos \frac{2\pi X}{l}\right) \quad (9.7)$$

将式(9.7)代入式(9.5),两边同乘以 $(1 - \cos \frac{2\pi X}{l})$,并在 $[0, l]$ 上积分,得到变量 $w(T)$ 满足的微分方程

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 w}{dT^2} + \left(\frac{Dc}{\rho A} + \frac{16\eta\pi^5}{3\rho Al^4} \frac{D^4 - d_1^4}{64} \right) \frac{dw}{dT} + \left(\frac{64E_0\gamma\pi^9}{\rho Al^6} \frac{D^6 - d_1^6}{512} + \frac{35l^2 k_2 D}{12\rho A} \right) w^3 \\ & + \left[\frac{5k_2 D}{3\rho A} + \frac{24\pi^2 - 49}{\pi^2} \frac{5k_3 D}{72\rho A} Y_m (1 - \cos \omega T) \right] w^2 + \left[\frac{16E_0\gamma\pi^5}{3\rho Al^4} \frac{D^4 - d_1^4}{64} + \frac{k_1 D}{\rho A} \right. \\ & + \left. \left(\frac{8\pi^2 - 15}{\pi^2} \frac{k_2 D}{12\rho A} Y_m - \frac{64E_0\beta_0\pi^4}{3\rho Al^6} \frac{D^5 - d_1^5}{60} Y_m \right) (1 - \cos \omega T) + \left(\frac{D^6 - d_1^6}{512} \frac{64E_0\gamma\pi^5}{\rho Al^8} Y_m^2 \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{32\pi^4 - 200\pi^2 + 315}{\pi^4} \frac{3k_3 D}{160\rho A} Y_m^2 (1 - \cos \omega T)^2 \right] w + \frac{2\pi^2 - 3}{\pi^2} \frac{Dc\omega}{9\rho l A} Y_m \sin \omega T \\ & + \frac{2\pi^2 - 3}{\pi^2} \frac{\omega^2}{9l} Y_m \cos \omega T + \frac{2\pi^2 - 3}{\pi^2} \frac{k_1 D}{9\rho l A} Y_m (1 - \cos \omega T) \\ & + \frac{2\pi^4 - 10\pi^2 + 15}{\pi^4} \frac{k_2 D}{15\rho l A} Y_m^2 (1 - \cos \omega T)^2 \\ & + \left. \frac{4\pi^6 - 42\pi^4 + 210\pi^2 - 315}{\pi^6} \frac{k_3 D}{42\rho l A} Y_m^3 (1 - \cos \omega T)^3 = 0 \right. \quad (9.8) \end{aligned}$$

设 $t = BT$, $B = \frac{Dc}{\rho A} + \frac{16\eta\pi^5}{3\rho Al^4} \frac{D^4 - d_1^4}{64}$,可以得到无量纲位移函数 $w(t)$ 满足的非线性

微分方程

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{dw}{dt} + \left(A_{10} + A_{11} \cos \Omega t + A_{12} \cos^2 \Omega t \right) w + \left(A_{20} + A_{21} \cos \Omega t \right) w^2 + A_3 w^3 + \\ & F_{10} + F_{11} \sin \Omega t + F_{21} \cos \Omega t + F_{22} \cos^2 \Omega t + F_{23} \cos^3 \Omega t = 0 \quad (9.9) \end{aligned}$$

式中,所有的系数都是无量纲的,它们被给定为

$$\begin{aligned}
 A_{10} &= E_{11} - E_{22}V_m + E_{33}V_m^2 + k_{11} + \frac{8\pi^2 - 15}{12\pi^2}k_{12}V_m + \frac{96\pi^4 - 600\pi^2 + 945}{160\pi^4}k_{13}V_m^2 \\
 A_{11} &= E_{22}V_m - 2E_{33}V_m^2 - \frac{8\pi^2 - 15}{12\pi^2}k_{12}V_m - \frac{96\pi^4 - 600\pi^2 + 945}{80\pi^4}k_{13}V_m^2, \\
 A_{21} &= -\frac{120\pi^2 - 245}{72\pi^2}k_{13}V_m, \quad A_{12} = E_{33}V_m^2 + \frac{96\pi^4 - 600\pi^2 + 945}{160\pi^4}k_{13}V_m^2, \\
 A_{20} &= \frac{5}{3}k_{12} + \frac{120\pi^2 - 245}{72\pi^2}k_{13}V_m, \quad A_3 = \pi^4 E_{33} + \frac{35}{12}k_{13}, \\
 F_{10} &= \frac{2\pi^2 - 3}{9\pi^2}k_{11}V_m + \frac{2\pi^4 - 10\pi^2 + 15}{15\pi^4}k_{12}V_m^2 + \frac{4\pi^6 - 42\pi^4 + 210\pi^2 - 315}{42\pi^6}k_{13}V_m^3 \\
 F_{21} &= \frac{2\pi^2 - 3}{9\pi^2}\Omega^2V_m - \frac{2\pi^2 - 3}{9\pi^2}k_{11}V_m - \frac{4\pi^4 - 20\pi^2 + 30}{15\pi^4}k_{12}V_m^2 - \frac{4\pi^6 - 42\pi^4 + 210\pi^2 - 315}{14\pi^6}k_{13}V_m^3 \\
 F_{11} &= c_1V_m, \quad F_{22} = \frac{2\pi^4 - 10\pi^2 + 15}{15\pi^4}k_{12}V_m^2 + \frac{4\pi^6 - 42\pi^4 + 210\pi^2 - 315}{14\pi^6}k_{13}V_m^3 \\
 F_{23} &= -\frac{4\pi^6 - 42\pi^4 + 210\pi^2 - 315}{42\pi^6}k_{13}V_m^3, \quad \Omega = \frac{\omega}{B}, \quad E_{11} = \frac{16E_0\pi^5}{3B^2\rho Al^4} \frac{D^4 - d_1^4}{64}, \\
 E_{22} &= \frac{64E_0\beta\pi^4}{3B^2\rho Al^5} \frac{D^5 - d_1^5}{60}, \quad E_{33} = \frac{64E_0\pi^5}{B^2\rho Al^6} \frac{D^6 - d_1^6}{512}, \quad k_{11} = \frac{Dk_1}{B^2\rho A}, \quad k_{12} = \frac{Dk_2 l}{B^2\rho A}, \\
 k_{13} &= \frac{Dk_3 l^2}{B^2\rho A}, \quad c_1 = \frac{2\pi^2 - 3}{9\pi^2} \frac{Dc\omega}{B^2\rho A}, \quad V_m = \frac{Y_m}{l}
 \end{aligned} \tag{9.10}$$

相应的初始条件(9.3)变为

$$w|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=0} = 0 \tag{9.11}$$

9.4 数值实例和结果分析

在初始条件(9.11)下,采用变步长 Runge-Kutta 方法对方程(9.9)和(9.10)进行数值求解,并应用非线性动力学的方法分析已求得的数值结果,得到给定参数情况下简化系统的时程曲线、相平面图、功率谱图、Poincare 截面映射图和分岔混沌图。

在计算中取定如下参数:

$$\begin{aligned}
 D = 1.0\text{m}, \quad d_1 = 0, \quad l = 6\text{m}, \quad \rho = 2.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad E_0 = 2.1 \times 10^{10} \text{ Pa}, \quad \beta = 2.62 \times 10^2, \\
 \gamma = 1.19 \times 10^4, \quad \eta = 1.0 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2, \quad k_1 = 4.2 \times 10^6 \text{ N/m}^3, \quad k_2 = -1.3 \times 10^8 \text{ N/m}^4, \\
 k_3 = 1.3 \times 10^9 \text{ N/m}^5, \quad c = 0.8 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{s/m}^3, \quad \omega = 10\pi, \quad Y_m = 69 \text{ mm}
 \end{aligned}
 \tag{9.12}$$

同时, 得到 $B = 5.2880 \text{ 1/s}$, $\Omega = 5.9409$, $V_m = 0.0115$ 。因此, 方程(9.9)的系数均可求出。

图 9.2 至图 9.5 示出了描述非线性粘弹性桩基横向混沌运动的时程曲线、相平面图、功率谱和 Poincare 截面。可见简化系统的运动是混沌的。

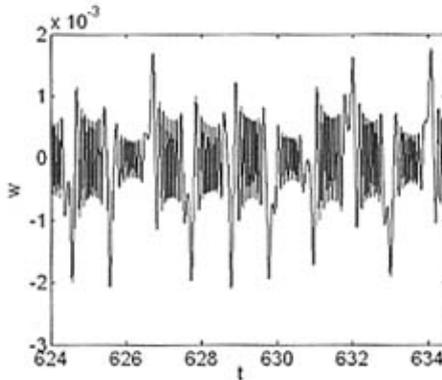


图 9.2 系统的时程曲线

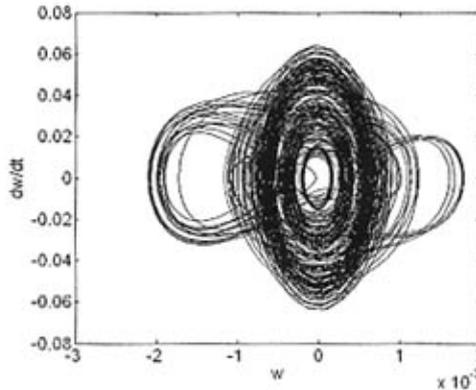


图 9.3 系统的相平面图

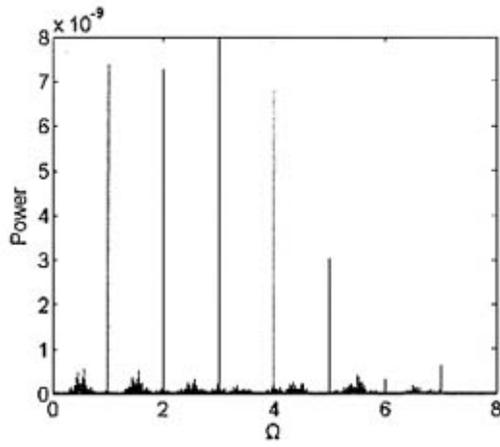


图 9.4 系统的功率谱

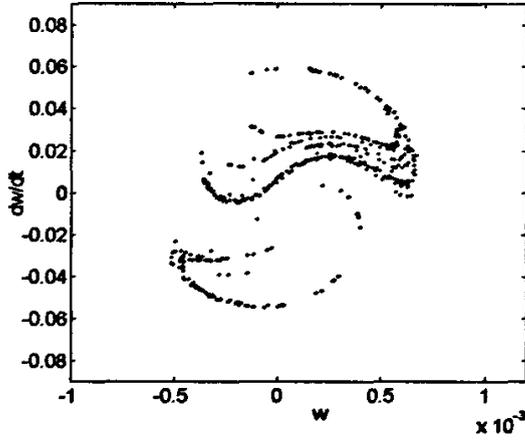


图 9.5 系统的 Poincaré 截面

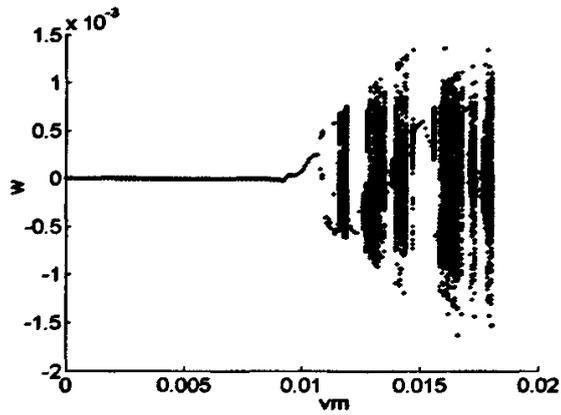
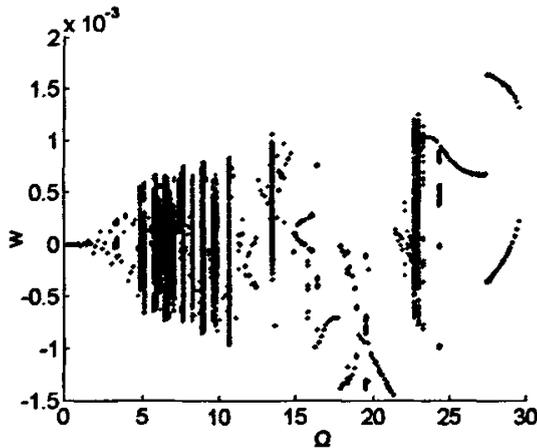


图 9.6 位移 w 随参数 V_m 变化的分岔图

图 9.7 位移 w 随参数 Ω 变化的分岔图

为了考察参数对系统动力学特性的影响，假设桩顶位移参数 V_m (或 Y_m) 是可变的，而保持(9.10)中的其余参数不变，可得到图 9.6 所示的分岔图。可见当 $V_m < 0.01$ ，简化系统的运动是周期的；而当 $0.01 \leq V_m < 0.011$ 时，系统的运动是准周期；当 $V_m = 0.011$ 时进入分岔运动状态；随着参数 V_m 的继续增大，运动呈现出分岔和阵发性混沌状态。说明桩基小变形振动一般都为周期运动，只有当桩顶位移幅值参数足够大时，运动形态才可能是准周期的或混沌的。

假设桩顶振动位移频率 Ω (或 ω) 是可变的，而保持(9.10)中其余参数不变，可得到图 9.7 所示的分岔图。可见，当 $\Omega < 1.2$ ，系统的运动是周期的；当 $1.2 \leq \Omega < 5.1$ ，运动是准周期的或分岔的；当 $5.1 \leq \Omega < 11$ ，呈现出了阵发混沌运动；而当 $\Omega \geq 11$ ，运动是准周期们或分岔的。

假设粘性参数 B (或粘性系数 η 和阻尼系数 c) 是可变的，而保持(9.10)中的其余参数不变，可得到图 9.8 所示的分岔图。可见，当 $B \geq 22.5$ ，运动是周期的；而当 $B < 6.5$ 或 $10.1 < B < 14.9$ 时，呈现出了阵发混沌运动。对于其它的 B 值，运动是准周期的或分岔的。

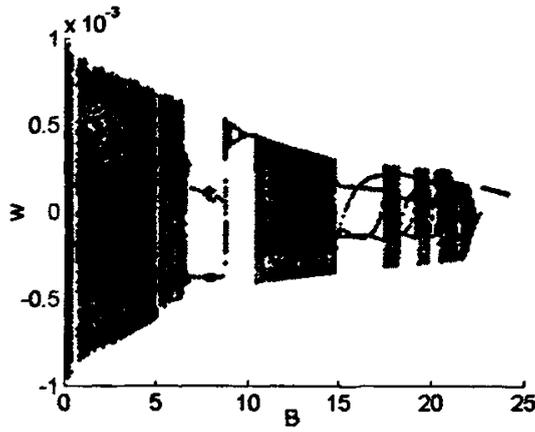


图 9.8 位移 w 随参数 B 变化的分岔图

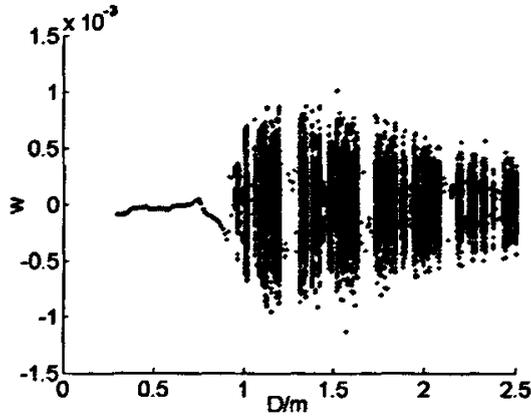


图 9.9 位移 w 随参数 D 变化的分岔图

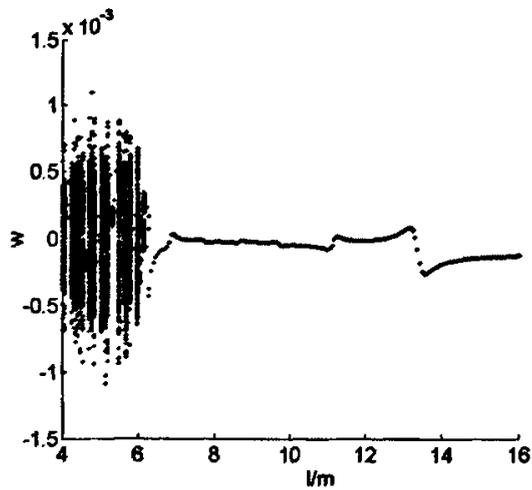


图 9.10 位移 w 随参数 l 变化的分岔图

假设桩基的直径 D 是可变的,而保持(9.10)中其余参数不变,可得到图 9.9 所示的分岔图。可见,当 $D \leq 0.88 \text{ m}$,运动是周期的;而当 $D > 0.88 \text{ m}$ 时,运动是分岔的和呈现出阵发混沌运动。

假设桩基的长度 l 是可变的,而保持(9.10)中其余参数不变,可得到图 9.10 所示的分岔图。可见,当 $l \geq 6.2 \text{ m}$,运动是周期的;而当 $l < 6.2 \text{ m}$ 时,运动形态是分岔的和呈现出阵发混沌运动。

9.5 小结

本章研究了嵌岩桩的非线性横向运动的动力学特性。假设桩和土的材料均服从非线性弹性和线性粘弹性本构关系,在桩顶给定周期位移的条件下,建立了分析嵌岩桩非线性横向运动的动力学特性的初边值问题的非线性偏微分方程,用 Galerkin 方法对控制方程进行了简化,得到了一个简化了的动力系统。用 Runge-Kutta 方法和非线性动力学方法去求解和分析这个简化的动力系统,得到了简化系统的时程曲线、相平面图、功率谱图、Poincare 截面图及分岔混沌图,研究了各种参数对桩基非线性动力学特性的影响。研究表明,非线性嵌岩桩的横向运动形态,可以呈现周期运动、准周期运动、分岔或阵发性混沌运动。这些运动形态与系统的参数有密切的关系,如果桩顶振动位移幅值参数足够大、桩身粘性系数和桩周土的阻尼系数都较小、桩顶位移频率较高、桩较短和较粗时,运动形态可能进入分岔或阵发性混沌运动。

第十章 结论和展望

10.1 结论

在假设桩基和桩周土体材料均为非线性弹性和线性粘弹性材料的情况下,基于广义 Winkler 模型建立桩基轴向和横向非线性动力学特性分析的数学模型,利用复模态分析法、多时间尺度法、伽辽金平均化方法以及非线性动力系统中的应用方法研究了桩基的线性和非线性动力学特性,包括桩基振动特性、位移响应、分岔和混沌等,考察了材料参数和结构参数等多种参数对桩基动力学特性的影响,揭示了一些新现象,给出了一些新结果。主要研究工作和成果如下:

(1) 假定桩基材料和桩周土材料均满足3次非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系,并根据广义 Winkler 模型,分别建立了分析桩基轴向和横向非线性动力学特性的偏微分方程,并给出了相应的初边值条件。

(2) 采用复模态分析等方法,得到了线性粘弹性桩基轴向及横向振动的 n -阶振动模态、固有频率及振动响应的精确表达式。桩基轴向及横向振动的固有频率不仅与边界条件和粘性阻尼有关,而且也与桩周土的刚度系数等有关。

(3) 假定桩基和桩周土材料的线性粘弹性性质都比较弱的情况下,用四阶多时间尺度方法得到了一端固定、另一端自由的线性粘弹性桩基轴向自由振动的 n -阶固有频率和位移响应的近似表达式。固有频率不仅与粘弹性阻尼有关,而且还与桩周土刚度系数有关。当阻尼比较小时,由四阶多尺度方法得到的固有频率近似值与由复模态法得到的精确值之间的误差较小;当阻尼比较大时,两者的误差较大。

(4) 假定桩基和桩周土材料的非线性弹性性质都比较弱的情况下,利用多时间尺度法分析了桩基的非线性轴向及横向振动特性,得到了桩基非线性轴向自由振动及横向自由振动的 n -阶主频率和位移响应的近似表达式,给出了数值算例,考察了参数的影响。研究表明,非线性系统的 n -阶主频率不仅与线性系统的 n -阶固有频率有关,而且也与振幅、阻尼系数和材料的非线性特征量有关;系统的响应中除含有主频率的谐波外,还含有2倍、3倍的主频率的高次谐波和二个或多个主频率的和或差的谐波存在,也受到其它复杂频率的干扰。系统的振动零点也

会发生变化,对称轴线会发生偏移,系统响应的相位角也与派生线性系统的相位角不同。由于粘性的影响,系统的响应随着时间而衰减,衰减速度与派生线性系统是有差别的。特别是,若采用单模态的方法(即去掉式(5.8)中的求和号),则会导致某些非线性效应的失真,得不到合理的结论。

(5) 在假设桩基和土的非线性弹性和线性粘弹性性质都比较弱的情况下,用多时间尺度法得到了一端固定、另一端自由的桩基非线性轴向受迫振动系统主共振时的稳态幅频响应曲线和失稳边界曲线,分析了系统主共振时稳态响应的稳定性。给出了数值算例,绘制了粘性非线性系统前两阶固有频率附近的幅频响应曲线,讨论了参数对幅频响应曲线的影响,并进一步讨论了它们对稳态响应稳定性的影响。研究表明,桩基非线性轴向受迫振动的响应曲线和失稳边界曲线不仅与派生线性振动系统的 n -阶固有频率 ω_n 、土刚度 k_{11} 和阻尼系数 δ_n 有关,而且也与振幅 A_{0n} 、相位 θ_{0n} 和非线性特征量 Q_3 有关。对于一定的参数,从幅频响应曲线中可见到振幅跳跃和具有多个不同幅值的非线性现象。

(6) 假定桩基及桩周土材料满足 3 次非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系,利用 Galerkin 平均化方法研究了给定桩顶竖向动位移的嵌岩桩的非线性轴向动力学行为。得到了不同参数时 Galerkin 简化系统的时程曲线、相平面图、功率谱图、Poincare 截面及分岔混沌图等。考察了参数对系统的动力学特性的影响。结果表明,嵌岩桩的非线性轴向运动形态,可以呈现周期运动、准周期运动、分岔或阵发性混沌运动。这些运动形态与系统的参数有密切的关系,如果桩顶振动位移幅值足够大、桩身粘性系数和桩周土的阻尼系数都较小、桩顶位移频率较高、桩周土较软弱、桩较短和较粗时,运动形态可能进入分岔或阵发性混沌运动。

(7) 假定桩基及桩周土材料满足 3 次非线性弹性和微分型线性粘弹性本构关系,在桩顶给定横向动位移、动转角及非线性弹性土体作用的条件下,利用 Galerkin 平均化方法研究了具有非线性本构关系的桩基的非线性横向动力学行为。得到了简化系统的时程曲线、相平面图、功率谱图及 Poincare 截面图和分岔混沌图;考察了参数对桩基横向非线性动力特性的影响。研究表明,桩基的非线性横向运动形态,可以呈现周期运动、准周期运动、分岔或阵发性混沌运动等。如果桩顶振动位移幅值足够大、桩身粘性系数和桩周土的阻尼系数都较小、桩顶位移频率较

高、桩较短和较粗时，运动形态可能进入分岔或阵发性混沌运动。

10.2 展望

由于桩和土的相互作用，桩基础的荷载传递、变形及运动、土的本构关系的描述等都很复杂，所以桩-土系统的非线性静动力学分析、数值模拟及实验都很困难，而桩基础的应用又是如此的重要和广泛，因此，在桩-土系统的力学特性的分析中存在许多非常重要的课题值得人们去深入的研究。就作者在本文中涉及到的内容而言，认为还存在以下一些问题值得进一步扩充和深入的研究：

(1) 结合试验等方法研究土的非线性粘弹性本构关系和非线性 P-Y 曲线；

(2) 结合数值计算的方法，研究各种边界条件下桩基的非线性动力学特性，考虑轴向振动与横向振动的非线性耦合效应，考虑几何非线性问题，考虑高阶剪切效应和扭转效应等以便提供桩基设计的更适当的依据；

(3) 进一步研究桩基的非线性强迫振动，讨论超谐波共振，次谐波共振和组合共振等，以便进一步揭示桩基的非线性振动特性；

(4) 用高阶 Galerkin 截断方法研究粘弹性桩基的非线性动力学行为等问题，发展多自由度和高维动力系统的理论和方法；

(5) 发展桩-土系统非线性静动力学分析的多种建模的理论、数值模拟方法、试验方法以及检测方法，以便于互相补充和验证。

(6) 结合工程实际，进一步深化桩基的建模理论及数值方法的研究，特别是在将理论成果应用于桩基工程的设计与检测中更应该进行深入的工作

参考文献

- [1] 宰金珉, 宰金璋. 高层建筑基础分析与设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993
- [2] Poulos, H.G. and Davis, E.H. *Pile Foundation Analysis and Design* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1980.
- [3] 赵锡宏. 上海高层建筑桩筏与桩箱基础设计理论[M]. 上海: 同济大学出版社, 1989.
- [4] 王雪峰, 吴世明. 桩基动测技术[M]. 北京: 科学出版社, 2001.8-54
- [5] 桩基工程手册编写委员会. 桩基工程手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1995
- [6] Mizuno, H. Pile damage during earthquakes in Japan (1923-1983)[J]. *Dynamic Response of Pile Foundations*. ASCE, Geotech. Special Publ. 11 (Edited by T. Nogami), 1987, 53-78.
- [7] Novak, M. Piles under dynamic loads. *Proceedings of Second International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics* [M]. Japan 1991: 2433-2456
- [8] Miura F. Lessons from Damage to Pile Foundation Caused by Past Earthquake in Japan and the Necessity of Nonlinear Analyses of Pile foundation. *Proceedings of the 4th international conference on nonlinear mechanics* [M]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 109-115
- [9] 高大钊, 赵春风, 徐斌. 桩基础的设计方法与施工技术[M]. 机械工业出版社, 1999.
- [10] 刘金励. 桩基础设计与计算[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1990
- [11] Novak, M. Dynamic stiffness and damping of pile[J]. *Canad. Geotech. J.* 1974, 11: 574-598.
- [12] Novak, M. Soil-pile interaction in horizontal vibration[J]. *Earthquake Engineering and Structure Dynamics*, 1977, 5: 263-281
- [13] Novak, M., Sheta, M. Dynamic response of piles and pile groups. *Proc.2nd Int. Conf. on Numerical Methods in Offshores Piling*, Univ. of Texas at Austria, 1982: 489-507.
- [14] Mattes, N. S., and Poulos, H. G. Settlement of single compressible pile[J]. *Soil Mech. And Found. Div., ASCE*, 1969, 95(1): 189-207.
- [15] Poulos, H. G. Behavior of laterally loaded piles : I-single piles[J]. *Soil Mech. and Found. Div., ASCE*, 1971a, 97(5): 711-731.

- [16] Poulos, H. G. Behavior of laterally loaded piles : II-pile groups[J], Soil Mech. and Found. Div., ASCE, 1971b, 97(5): 733-752.
- [17] Novak, M. and Nogami, T. Impedance functions of piles in layer media[J]. Geotech. Engg. Div. ASCE, 1978, 104(4): 953~959
- [18] Kuhlemeyer, R. Vertical vibration of pile[J]. J. Geotecch. Engrg. Div, ASCE, 1979, 105(2): 273~287
- [19] Novak, M. and El shamouby, B. Stiffness constants of single piles[J]. J. Gextech. Engg. Div. ASCE, 1983, 109(7): 961~971
- [20] Roesset, J. M. Dynamic stiffness of pile groups. Analysis and design of pile foundations[J]. J. R. Meyer, ed., ASCE, New York, N. Y., 1984: 263-286.
- [21] Aboal-Ella and Ggazetas. Kinematics seismic response and bending of free-head piles in laagered soil[J]. Geotechnique 1993.43(2):207-222
- [22] Nogami, T., Novak, M. Time domain axial response of dynamically loaded single piles[J]. J. Geotech. Engg. Div. ASCE, 1987, 112(11): 1241~1252
- [23] Nogami, T., Novak, M. Dynamic response of vertically loaded nonlinear pile foundations[J]. J. Getotech. Engg. Div. ASCE, 1989, 113(2): 147~180
- [24] Rajiapakse, R.K. N.D. A note on the elastic dynamic load transfer problem[J]. Int. J. Solids structures, 1988, 24(9): 963~972
- [25] Liu, W.M. and Novak, M. Dynamic response of single piles embedded in transversely isotropic layered media[J]. Earyhq. Engrg. Struck. Dyn, 1994, 23: 1239~1257
- [26] Kishnan, R, Gazetas, G and Velez, A. Static and dynamic lateral defluxion of pile in non—homogeneous soils stratum[J]. Geotechnique, 1983, 33(3): 307~325
- [27] Sen,R, Davies, T. G and Banerjee, P. K. Dynamic analysis of piles groups embedded in homogeneous soils[J]. Earehq. Engrg. Struct. Dyn, 1985. 13: 53~65
- [28] Rajiapakse, R.K.N.D. and Shah A.H. On the lateral harmonic motion of an elastic bar embedded in an elastic half-space[J]. Int. J. Solids Structures, 1987, 23(2): 287~303
- [29] Mamoom, S.M. Kaynia, A.M. and Banerjee, P.K. Frequency domain dynamic analysis of piles

- and pile groups[J]. *J. Meth. Engrg. Div, ASCE*, 1990, 116(10): 2237~2257
- [30] Chau, K.T., Yang, X. Nonlinear interaction of soil-pile in horizontal vibration[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2005, 131(8): 847-858
- [31] 胡育佳, 程昌钧. 水平振动下桩基的非线性动力学特性[J]. *应用数学和力学*, 2005,26(6): 645-652 (Hu Yu-jia, Cheng Chang-jun, Yang Xiao, Characteristics of piles under horizontal vibration, *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, 26 (6): 700-708.)
- [32] Novak M., Grigg R. F. Dynamic experiments with small pile foundations[J], *Canadian Geotech. J.*, 1976, 13(4): 327-386.
- [33] Reese, L. C., Cox, W. R., and Koop, F. D. Field testing and analysis of laterally loaded piles in stiff clay[J]. *Proc.7th Offshore Tech. Conf., ASCE et al.*, 1975: 671-690.
- [34] O'Neill, M. W., Hawkins, R. A. and Mahar, L. J. Load transfer mechanisms in piles and pile groups[J]. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 1982, 108(12): 1605-1623.
- [35] Nabil F. Behavior of laterally loaded bored piles in cemented sands[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1990, 116(11): 1678-1799
- [36] Okahara, et al. Horizontal loading tests group piles and its stimulation analysis[J]. *Structure Engineering Letters*, JSCE, 1994, 39A
- [37] Rollins, et al. Lateral load behavior of full-scale pile group in clay[J]. *Proc. of ASCE*, 1998, I 24, GT5
- [38] El Naggar, M.H., Novak, M. Nonlinear analysis for dynamic lateral pile response[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1996, 15(4): 233-244
- [39] Blaney, G. M., Kausel, E. and Rosset J. M. Dynamic stiffness of the pile[J]. *Proc. of 2nd Int. Conf. On Numerical Methods in Geomechanics, Blacksburg*, 1976: 1001-1012.
- [40] Kuhlemeyer, R.L. Vertical vibration of pile[J]. *ASCE J. Geotech. Engrg. Div.*, 1979, 105(GT2): 273-288.
- [41] Angelides and Roesset. Nonlinear lateral dynamic stiffness of pile[J], *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 1981, 107(GT110): 1443-1460.
- [42] 谢耀峰, 水平荷载下群桩 P-Y 曲线的试验研究[J]. *土工基础*, 1996, (2): 27-34

- [43] 谢耀峰. 横向承载群桩性状及承载力研究[J]. 岩土工程学报, 1996, (6): 39-45
- [44] 谢耀峰. 大变位水平承载高桩性状的研究[J]. 土木工程学报, 2000, 4(33): 74-79.
- [45] Kraft Jr. L. M., Ray, R. P. and Kagawa, T. Theoretical t-z curves[J]. J. Geotech. Engrg. Div., ASCE, 1981, 107(11): 1543-1562.
- [46] Gazioglou, S. M. and O'Neill, M. W. Evaluation of p-y relationships in cohesive soils. Analysis and design of pile foundations[J]. J. R. Meyer, ed., ASCE, New York, N. Y., 1984: 192-213.
- [47] 田平等. 粘土中横向周期性荷载桩的 P-Y 曲线统一法[J]. 河海大学学报, 1993, (1): 9-14
- [48] 王惠初等. 粘土中横向静载桩 P-Y 曲线的一种新的统一法[J]. 河海大学学报, 1991, (1): 9-17
- [49] 章连洋等. 粘性土中 P-Y 曲线的计算新方法[J]. 港口工程, 1991, (2): 29-35
- [50] 程泽坤. 关于 P-Y 曲线法分析横向力作用下高桩结构物的讨论[J]. 港工技术, 1997, (3): 53-57
- [51] 程泽坤. 基于 P-Y 曲线法考虑桩土相互作用的高桩结构物分析[J]. 海洋工程, 1998, (2): 5-9
- [52] 胡立万, 郝军, 陈鹭纛. 用 P-Y 曲线法计算板桩结构[J]. 港工技术, 2001, (1): 24-26
- [53] 杨国平, 张志明. 对大变位条件下横向受力桩 P-Y 曲线的研究[J]. 水运工程, 2002, (7): 40-45
- [54] Balachandran, B. Nayfeh, A.H., Smith, S.W., Pappa, R.S. Identification of nonlinear interactions in structures[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1994, 17(2): 257-262
- [55] Nayfeh, A.H., Lacarbonara, W. On the discretization of distributed-parameter systems with quadratic and cubic nonlinearities[J]. Nonlinear Dynamics, 1997, 13(3): 203-220
- [56] 王奎华, 谢康和. 有限长桩受迫振动问题解析解及应用[J]. 岩土工程学报, 1997, 19 (6): 27-35
- [57] 王腾, 王奎华, 谢康和. 任意段变截面桩纵向振动的半解析解及应用[J]. 岩土工程学报, 2000, 22 (6): 654-658
- [58] 刘东甲. 不均匀土中多缺陷桩的轴向动力响应[J]. 岩土工程学报, 2000, 22 (4): 391-395
- [59] 黄雨, 舒翔, 叶为民, 唐益群. 桩基础抗震研究的现状[J]. 工业建筑, 2002, 7(32): 50-53.

- [60] 王奎华, 应宏伟. 广义 Voigt 土模型条件下桩的纵向振动响应与应用[J]. 固体力学学报, 2003, 24(3): 293-303.
- [61] 武际可, 苏先榘. 弹性系统的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1994
- [62] 朱正佑, 程昌钧. 分支问题的数值计算方法[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1989
- [63] 程昌钧, 朱正佑. 结构的屈曲与分叉[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1991.
- [64] Cederbaum G, Aboudi J. Dynamic instability of shear-deformable viscoelastic laminated plates by Lyapunov exponents[J]. *Int. J. Solids Structures*, 1991, 28(3): 317-327
- [65] Cederbaum G, Moon M. Stability properties of a viscoelastic column under a periodic force[J]. *J. Appl. Mech.*, 1992, 59(16): 16-19
- [66] Drozdov A. D., Kolmanovskii V. B. *Stability in Viscoelasticity*[M]. Elsevier Science, Amsterdam, 1994
- [67] 程昌钧, 范晓军. 粘弹性环形板的临界载荷及其动力稳定性[J]. 力学学报, 2001, 33(3): 365-376
- [68] 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [69] 陈安华, 刘德顺, 郭迎福. 振动诊断的动力学理论与方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 2003.
- [70] 刘延柱, 陈立群. 非线性动力学[M]. 上海交通大学出版社, 2000.
- [71] 胡海岩. 应用非线性动力学[M]. 北京: 航空工业出版社, 2000.
- [72] 闻邦椿, 李以农. 非线性振动理论中的解析方法及工程应用[M]. 辽宁: 东北大学出版社, 2001
- [73] 朱正佑, 李根国, 程昌钧. 具有分数导数本构关系的粘弹性梁的静动力学行为分析[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(1): 1-10 (Zhu Zheng-you, Li Gen-guo, Cheng Changjun. Dynamical and quasi-static analysis for viscoelastic Timoshenko beam with fractional derivative constitutive relation. *Applied Math & Mech*, 2002, 23(1): 1-12)
- [74] Chen L. Q., Cheng C. J. Controlling chaotic oscillations of viscoelastic plates by linearization via output feedback[J]. *Appl. Math. Mech.*, 1999, 20(12): 1324-1330
- [75] Chen L. Q., Cheng C. J., Zhang N H. Chaotic motion of nonlinear viscoelastic beams[J]. *J. of*

- Shanghai Univ., 2000, 4(4): 7-10
- [76] 陈立群, 程昌钧. 非线性粘弹性梁的动力学行为[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(9): 897-902 (Chen Liqun, Cheng Changjun. Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic beams. Appl. Math. Mech., 2000, 21(9): 995-1001)
- [77] 陈立群, 程昌钧. 非线性粘弹性柱的稳定性和混沌运动[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(9): 890-896. (Chen Liqun, Cheng Changjun. Stability and chaotic motion in columns of nonlinear viscoelastic material. Appl. Math. Mech., 2000, 21(9): 987-994)
- [78] Touati D., Cederbaum G. Dynamic stability of nonlinear viscoelastic plates[J]. Int. J. Solids Struct., 1994, 31(17): 2367-2376
- [79] Suire G., Cederbaum G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear bars under harmonic excitations[J]. Int. J. Mech. Sci., 1995, 37(3): 753-772
- [80] Ding Rui. The dynamic analysis of viscoelastic structure[D]. Doctoral Dissertation of Lanzhou University, 1997
- [81] 丁睿, 朱正佑, 程昌钧. 粘弹性柱壳的若干动力学性质[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(3): 221-228 (Ding Rui, Zhu Zheng-you, Cheng Chang-jun. Some dynamical properties of a viscoelastic cylindrical shell. Appl. Math. Mech., 1999, 20(3): 233-241)
- [82] Yang, Xiao-Dong, Chen, Li-Qun Bifurcation and chaos of an axially acceleration viscoelastic beam[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 23(1): 249-258
- [83] Yao, Minghui, Zhang, Wei Multipulse Shilnikov orbits and chaotic dynamics for nonlinear nonplanar motion of a cantilever beam[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2005, 15(12): 3923-3952
- [84] Ma, G.W., Liu, Y.M., Zhao, J., Li, Q.M. Dynamic asymmetrical instability of elastic-plastic beams[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2005, 47(1): 43-62
- [85] Zhang, Wei, Wang, F., Yao, M. H. Global bifurcations and chaotic dynamics in nonlinear nonplanar oscillations of a parametrically excited cantilever beam[J]. Nonlinear Dynamics, 2005, 40(3): 251-279
- [86] Emans, J., Wiercigroch, M., Krivtsov, A. M. Cumulative effect of structural nonlinearities:

- Chaotic dynamics of cantilever beam system with impacts[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(5): 1661-1670
- [87] Han, Q., Zheng, X. Chaotic response of a large deflection beam and effect of the second order mode[J]. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 2005, 24(6): 944-956
- [88] Chen, Li-Qun, Yang, Xiao-Dong Transverse nonlinear dynamics of axially accelerating viscoelastic beams based on 4-term Galerkin truncation[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 27(3): 748-757
- [89] 贾启芬, 闫民, 陈予恕. 桩基结构非线性复杂动力学行为[J]. *天津大学学报*, 2000, 33(2): 545-548
- [90] 禹金云. 混凝土单桩在轴向扰力作用下的混沌运动[J]. *振动与冲击*, 2001, 20(4): 6-9.
- [91] 程昌钧, 任九生, 粘弹性桩的混沌分析[J], *力学季刊*, 2004, 25 (3) : 349-354
- [92] 程昌钧, 任九生, 地基波动影响下非线性粘弹性桩的混沌运动分析[J], *动力学与控制学报*, 2005, 3(1): 29-33
- [93] 胡春林, 程昌钧. 粘弹性桩的竖向混沌运动[J]. *岩土力学* 2005, 26 (10): 1541-1544
- [94] 胡春林, 彭华中, 程昌钧. 材料及结构参数对基桩非线性纵向振动的影响[J]. *武汉理工大学学报*. 2006, 28(4): 71-74.
- [95] 程昌钧, 朱媛媛. 弹性力学 (修订版) [M]. 上海大学出版社, 2005.
- [96] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 湖北: 华中理工大学出版社, 1990
- [97] 克里斯坦森, R. M., 老亮译, 粘弹性力学引论[M]. 科学出版社, 1990.
- [98] Cederbaum G. Dynamic instability of viscoelastic orthotropic laminated plates[J]. *Composite Struct.*, 1991, 19(2): 131-144
- [99] Cederbaum G. Parametric excitation of viscoelastic plates[J]. *Mech. Struct. Math.* 1992, 20(1): 37-51
- [100] Drozdov A. D. Stability of nonhomogeneous aging viscoelastic bodies under dynamic loading[J]. *Nonlinear Anal.*, 1995, 24(9): 1361-1375
- [101] Drozdov A. D. Almost sure stability of viscoelastic structural members driven by random loads[J]. *J. Sound and Vibration*, 1996, 197(3): 293-307

- [102] Potapov V. D. Stability of viscoelastic rod subjected to a random stationary longitudinal force[J]. *J. Appl. Math. Mech.*, 1992, 56(1): 90-95
- [103] Potapov V. D. Almost sure stability of a viscoelastic column under random load[J]. *J. Sound and Vibration*, 1994, 173(3): 301-308
- [104] Potapov V. D. Stability of elastic viscoelastic system under a random perturbations of their parameters[J]. *Arch. Appl. Mech.*, 1996, 66(4): 273-283
- [105] 杨挺青. 非线性粘弹性理论中的单积分型本构关系[J]. *力学进展*, 1988, 18(1): 52-60
- [106] 杨挺青, 杨正. 粘弹性基支粘弹性板轴对称问题的动力响应[J]. *力学学报*, 1990, 22(2): 217-222
- [107] 沈亚鹏, 薛奇. 平面粘弹性大变形问题的研究[J]. *上海交通大学学报*, 1990, 24(5): 7-15
- [108] 沈亚鹏, 李录贤, 王晓明. 粘弹性准静态、动态问题的数值解法[J]. *力学进展*, 1994, 25(2): 265-272
- [109] Qin T H. Breakdown of solutions to nonlinear wave equation with a viscoelastic boundary condition[J]. *Arabian J. Sci. Engrg.*, 1994, 19(2A): 195-202
- [110] Qin T H. Global existence of weak solutions to the boundary value problem for a three-dimensional viscoelastic dynamic system[J]. *J. Elasticity*, 1996, 136: 359-381
- [111] 朱媛媛, 程昌钧. 粘弹性矩形板的稳定性分析[J]. *固体力学学报*, 1996, 17(3): 257-262
- [112] Cheng Chang-jun, Zhang Neng-hui. Variational principles on static-dynamic analysis of viscoelastic thin plates with applications[J]. *Int. J. Solids and Structures*, 1998, 35(33): 4491-4505
- [113] 程昌钧, 张能辉. 粘弹性矩形板的混沌与超混沌行为[J]. *力学学报*, 1998, 30(6): 690-699
- [114] Kai-yu Xu, Chang-jun Cheng. The subharmonic bifurcation of a viscoelastic circular cylindrical shell[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 17: 159-171.
- [115] Chang-jun Cheng, Xian-yao Chen. Inverse Scattering for inhomogeneous viscoelastic media[J]. *J. Math. Phys.*, 2000, 41(5): 2839-2850
- [116] Cheng Chang-jun, Fan Xiao-jun. A method for calculating the Liapunov exponent spectrum of a periodically excited non-autonomous dynamical system[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*,

- 2000, 13(3): 254-261
- [117] Li-Qun Chen, Chang-Jun Cheng. Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic columns based on 2-order Galerkin truncation[J]. *Mechanics Research Communications*, 2000,27(4): 413-419
- [118] 程昌钧, 范晓军. 粘弹性圆薄板的动力学行为[J]. *固体力学学报*, 2000, 21(4): 306-312
- [119] 陈立群, 程昌钧, 张能辉. 大挠度非线性粘弹性梁的混沌运动[J]. *工程力学*, 2001, 18(1): 1-6
- [120] Cheng Chang-jun, Zhang Neng-hui. Dynamical Behavior of Viscoelastic Cylindrical Shells under Axial Pressures[J]. *Appl. Math. Mech.*, 2001,22(1): 1-8
- [121] Chang-jun Cheng, Xiao-jun Fan. Non-linear mathematical theory of perforated viscoelastic thin plates with its applications[J]. *Int. J. Solids and Structures*, 2001,38: 6627-6642
- [122] 程昌钧, 范晓军. 粘弹性环形板的临界载荷及其动力稳定性[J]. *力学学报*, 2001, 33(3): 365-376.
- [123] 程昌钧, 卢华勇. 粘弹性 Timoshenko 梁的变分原理和静动力学行为分析[J]. *固体力学学报*, 2002, 23(2): 190-198
- [124] Zhang Neng-hui, Cheng Chang-jun. Two-mode Galerkin approach in dynamic stability analysis of viscoelastic plates[J]. *Appl. Math. And Mech.*, 2003, 24(3): 247-255
- [125] Sheng Dong-fa, Cheng Chang-jun. Generalized variational principles for viscoelastic thin and thick plates with damage[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2004,17(1): 65-73
- [126] Dong-Fa Sheng, Chang-Jun Cheng. Dynamical behaviors of nonlinear viscoelastic thick plates with damage[J]. *Int. Journal of Solids and Structures*, 2004, 41: 7287-7308
- [127] 盛冬发, 程昌钧, 扶名福. 考虑损伤的粘弹性梁的纯弯曲[J]. *固体力学学报*, 2004, 25(4): 383-388
- [128] Anestis, S. Impedances of soil layer with disturbed boundary zone[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1985, 112(3): 363-369.
- [129] Anestis, S. Vertical and torsional of foundations in inhomogeneous media[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1987, 114(9): 1002-1021.
- [130] 王奎华. 考虑了桩体粘性的变阻抗桩受迫振动问题的解析解[J]. *振动工程学报*, 1998, 12

- (4): 513-520
- [131] 王宏志, 陈云敏, 陈仁朋. 多层土中变截面桩的振动问题半解析解[J]. 振动工程学报, 2000, 13(2): 660-665
- [132] 王腾, 王奎华, 谢康和. 粘弹性桩纵向振动问题的积分变换解[J]. 工业建筑, 2001, 31(1): 42-45.
- [133] 王奎华. 成层广义 Voigt 地基中粘弹性桩纵向振动分析与应用[J]. 浙江大学学报. 2002, 36(3): 565-571.
- [134] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001
- [135] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations. New York: John Wiley & Sons Co, 1979
- [136] Easley, J G. Nonlinear deformation of elastic beams, rings and strings[J]. Appl. Mech. Surveys, 1966, 285-290
- [137] Nayfeh, A H. Nonlinear transverse vibrations of beams with properties that vary along the length[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1973, 53: 766-770
- [138] Rossikhin, Y. A., Shitikova, M.V. Analysis of nonlinear free vibrations of suspension bridges[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 186(3): 369-393
- [139] Nayfeh, A.H., Lacarbonara, W. On the discretization of distributed-parameter systems with quadratic and cubic nonlinearities[J]. Nonlinear Dynamics, 1997, 13(3): 203-220
- [140] Oueini, S.S., Nayfeh, A.H., Pratt, J.R. Review of development and implementation of an active nonlinear vibration absorber[J]. Archive of Applied Mechanics, 1999, 69(8): 585-620
- [141] Oz, H.R. On the nonlinear transverse vibrations and stability of an axially accelerating beam[J]. Mathematical and Computational Applications, 2000, 5(3): 157-167
- [142] Emam, S A. Nayfeh, A H. Nonlinear responses of buckled beams to subharmonic-resonance excitations[J]. Nonlinear Dynamics, 2004, 35(2): 105-122
- [143] Chen, Li-Qun, Yang, Xiao-Dong. Steady-state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed: Comparison of two nonlinear models[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(1): 37-50
- [144] Mahmoodi, S.N. Khadem, S.E.; Jalili, N. Theoretical development and closed-form solution of

- nonlinear vibrations of a directly excited nanotube-reinforced composite cantilevered beam[J].
Archive of Applied Mechanics, 2006, 75(2-3): 153-163
- [145] 李欣业, 陈予恕, 吴志强, 陈芳启. 多自由度内共振系统非线性模态的分岔特性[J].
力学学报, 2002, 34(3): 401-407
- [146] 陈水生, 孙炳楠. 斜拉桥拉索模态耦合非线性共振响应特性[J]. 工程力学, 2003,
20(1): 137-143
- [147] 肖锡武, 肖光华, Jacques Druetz. 简谐激励力作用下悬垂缆线的谐波共振[J]. 振动与
冲击, 2003, 22 (4): 62-65
- [148] 冯志华, 胡海岩. 直线运动柔性梁非线性动力学—组合参数共振与内共振联合激
励[J]. 振动工程学报, 2004, 17(3): 254-257
- [149] 杨晓东. 轴向运动粘弹性梁的横向振动分析[D]. 上海大学博士学位论文, 2004
- [150] 杨晓东, 陈立群. 变速运动粘弹性梁稳定性的直接多尺度分析[J]. 振动工程学报, 2005,
18(2): 223-226
- [151] Abhyankar N S., Hall E K., Hanagud S V. Chaotic vibrations of beams: numerical solution of
partial differential equation[J]. J. Appl. Mech., 1993, 60: 167-174
- [152] Touati D., Cederbaum G. Influence of large deflection on the dynamic stability of nonlinear
viscoelastic plates[J]. Acta Mech., 1995, 113(2): 215-231
- [153] 程昌钧, 张能辉. 粘弹性矩形板的混沌与超混沌行为[J]. 力学学报, 1998, 30(6): 690-699
- [154] 张能辉. 粘弹性结构的非线性分析[D]. 上海大学博士后研究报告, 2000
- [155] 陈立群, 程昌钧, 张能辉. 具有几何和物理非线性粘弹性梁的混沌运动[J]. 工程力学,
2001, 18(1): 1-6
- [156] Chen L. Q., Cheng C. J. Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic columns based on
2-order Galerkin truncation[J]. Mech. Research Comm., 2000, 27(4): 413-419
- [157] 李根国. 具有分数导数型本构关系的粘弹性结构的静动力学行为分析[D]. 上海大学博
士学位论文, 2001
- [158] 陈立群, 程昌钧. 关于基于 Galerkin 截断的粘弹性结构动力学行为研究[J]. 自然杂志,
1999, 21(1): 1-4.

- [159] 张新华, 徐建学. 非线性 Galerkin 方法在梁的非线性动力学性态分析中的应用[J]. 工程力学, 1996, 21(8): 24-30
- [160] 钟万勰, 何穷, 刘正兴. 数值计算方法[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1991
- [161] 江见鲸. 钢筋混凝土结构非线性有限元分析[M]. 陕西: 陕西科学出版社, 1994
- [162] Belytschko T. et. al, Element-free Galerkin methods. International Journal for Numerical Method[J] in Engrg, 1994, 37:229-256
- [163] 宋康祖, 陆明万. 固体力学中无网格方法[J]. 力学进展, 2000, 30: 55-64
- [164] Bellman R.E., Casti J. Differential quadrature and long term integration[J]. J. Math. Anal. Appl. 1971, 34: 235-238.
- [165] Bellman,R.E, Kashef, B.G, Casti J. Differential quadrature:A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations[J]. J. Comput. Phys., 1972, 10: 40-52
- [166] Ellison, R. D., D'Appoionia, E. and Thiers, G. R. Load-deformation mechanism for bored piles[J]. J. Soil Mech. And Found. Div., ASCE, 1971, 97(4): 661-679.
- [167] Desai, C. S., Numerical design-society for piles in sands[J]. J. Geotech. Engrg.Div., ASCE, 1974;100(6):613-635.
- [168] Nogami T, Novak M. Soil-pile interaction in vertical vibration [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1974, 5: 277-293
- [169] Christiano, P., Rergstad, G, and Ellison, R. Behavior of driven piles parte1: Numerical analysis, part II: Deformation and failure mechanisms[J]. Proc.2nd Iranian Conf. On Civ. Engrg., Iran society of Civil Engineers, 1976, 3: 1778-1834.
- [170] O'Neill, M. W., Ghazzaly, O. L., and Ha, H. B. Analysis of three-dimensional pile groups with non-linear soil response and pile-soil-pile interaction[J]. Proc.9th Offshore Tech. Conf., ASCE et al., 1977: 245-256.
- [171] Randolph, M. F. The response of flexible piles to lateral loading[J]. Geotechnique, Loadon, England, 1981, 31(2): 247-259
- [172] Faruque, M. O. and Desai, C. S. 3-D material and geometric nonlinear analysis of piles[J]. Proc. Second Int. Conf. on Numerical Methods in Offshore Piling. Univ. of Texas. 1982:

553-575.

- [173] Muqtadir, A. and Ddsai, C. S. Three-dimensional analysis of a pile-group foundation[J]. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 1986, 10(1): 41-58.
- [174] Aristonous M. Three-dimensional nonlinear study of pile[J]. *Journal of the Geotechnical Engineering*, 1991, 117: 429-447.
- [175] Trochanics, et al. 3-D nonlinear study of piles[J], *ASCE*, 1991, 117,GT3
- [176] Makris, N. Gazetas, G. Dynamical pile-soil-pile interaction. II: Lateral and seismic response[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1992, (1): 145-162
- [177] Kimura, et al. 3-D finite element analysis of the ultimate behavior of laterally loaded cast-in-place piles[J]. *Numerical Methods in Geomechanics*, 1995, (2): 7-13
- [178] Badoni, D., Makris, N. Pile-to-pile Interaction in the time domain--Nonlinear axial group response under harmonic loading[J]. *Geotechnique*, 1997, 47(2): 299-317.
- [179] Wu G, Finn LWD. Dynamic elastic analysis of the pile foundations using finite element method in the frequency domain[J]. *Can. Geotech.J.* 1997, (34): 34-43.
- [180] Wu G. Finn LWD. Dynamic nonlinear analysis of pile foundations using finite element method in the frequency domain[J]. *Can. Geotech. J.* 1997, (34): 44-52.
- [181] Yan W. D, Lian Finn. Dynamic nonlinear analysis of pile foundations using finite element method in the time domain[J]. *Can. Geotech*, 1997, (34): 44-52
- [182] Guin, J. Banerjee, P. K. Coupled soil-pile-structure interaction analysis under seismic excitation[J]. *Journal of Structure Engineering*, 1998, 124(4): 434-444.
- [183] Akihiko Waka, Shingo Gose and Keizo Ugai 3-D elastic-plastic finite element analysis of pile foundations subject to lateral loading[J]. *J. Geot. Engng*, 1999, 39(1): 23-29
- [184] 赵振东, 傅铁铭, 土岐宪三. 桩头侧向集中荷载作用下桩-土系统的非线性动力性能分析[J]. *地震工程与工程振动*, 1997, (3): 100-109
- [185] Hsueh, Chao-Kuang, Lin, San-Shyan, Chern, Shuh-Gi. Lateral performance of drilled shaft considering nonlinear soil and structure material behavior[J]. *Journal of Marine Science and Technology*, 2004, 12(1): 62-70

- [186] Liyanapathirana, D.S., Poulos, H.G. Pseudostatic approach for seismic analysis of piles in liquefying soil[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2005, 131(12): 1480-1487
- [187] Liu, Jie, Li, Q.S., Wu, Zhe. Nonlinear analysis of interaction between flexible pile group and soil[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2005, 20(5): 575-587
- [188] Anandarajah, A., Zhang, J., Ealy, C. Calibration of dynamic analysis methods from field test data[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2005, 25(7-10): 763-772
- [189] Tang, Xiaowei, Sato, T. H-adaptivity applied to liquefiable soil in nonlinear analysis of soil-pile interaction[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2005, 25(7-10): 689-699

攻读博士学位期间发表和完成的论文

- [1] 非线性粘弹性基桩纵向混沌运动[J]. 岩土力学. 2005, 26 (10): 1541-1544. (EI 收录, AN: 05479496988, 第一作者)
- [2] On safety monitoring of raft foundation under sloping bedrock conditions[J]. Progress In Safety Science And Technology. International Symposium on Safety Science and Technology. Science Press. 2004, (4): 689~692. (EI 收录, AN: 05058814219, 第一作者)
- [3] 材料及结构参数对基桩非线性纵向振动的影响[J]. 武汉理工大学学报. 2006, 28(4): 71-74. (EI 收录, AN: 06229913310, 第一作者)
- [4] 桩基非线性轴向振动的多时间尺度分析[J]. 振动与冲击. (已录用, 第一作者)
- [5] Nonlinear dynamic characteristics of piles embedded in rock[J]. J. of Shanghai University (English Edition). 2007 (已录用, 第一作者)
- [6] 砂土液化场地桩基地震反应分析[J]. 振动与冲击. 2007, (3) (已录用, 第一作者)
- [7] 桩周土及桩间距对桩基地震反应的影响[J]. 武汉理工大学学报. 2006, 28(10) (已录用, 第一作者)
- [8] 基于 P-Y 曲线的基桩内力与变形分析[J]. 土工基础. 2006, 20(1): 45-48. (第一作者)
- [9] 一类非线性振动系统混沌运动的数值分析. 国外建材科技. 2005, 26 (1): 55-57 (第一作者)
- [10] 复杂地质条件下高层建筑桩筏基础监测与综合分析[J]. 岩土力学. 2003, 24 (4): 673-676. (第一作者)
- [11] Nonlinear transverse free vibrations of piles [J]. J. Sound and Vibration. (已投稿, 第一作者)

致 谢

本文是在导师程昌钧教授的悉心指导和热情关怀下完成的。程老师博大精深的学识、高瞻远瞩的学术眼光、敏锐的学术洞察力、严谨求实的治学态度以及对科学事业的无私奉献精神给我留下了极为深刻的印象。程老师对教学科研工作的极端负责、对学生严格要求又满怀热忱的态度、勤勉的工作作风以及勇于创新与开拓的精神是我永远学习的榜样。上海大学朱正佑教授也在学业上给予了亲切关怀和精心指导，在此，谨向程老师和朱老师致以崇高的敬意和最诚挚的感谢！

由著名科学家、教育家、中科院院士钱伟长教授任所长的上海市应用数学和力学研究所及力学系是一个自强不息、求实创新和特色鲜明的集体，40多位教授学者都富有进取敬业的精神和开放活跃的学术思想。我参加过80余场Seminar、专题讲座和讨论会等，使我从中受益匪浅。刘高联院士、戴世强教授、周哲玮教授、郭兴明教授、钱跃竑教授、陈立群教授、杨骁教授、罗仁安教授、马杭教授、张俊乾教授、朱卫平副教授等给我留下了深刻的印象。感谢麦穗一、秦志强等老师的关心和支持，感谢力学所为我们提供了良好的学习及工作环境。

感谢课题组的张志良博士、盛冬发博士、任九生博士、李晶晶博士、胡育佳博士、李莹博士、陈海胜硕士等，大家在学术上互相支持与帮助。

三年来，与邹声华、张志良、刘荣万、冯秀芳、胡礼才、陈西豪、曹晓夏、李博等博士朝夕相处，彼此增强学习的信心和力量，值得珍藏在记忆深处。

本人在完成论文期间，得到武汉理工大学土木工程与建筑学院领导、老师们和胡胜刚、陈中学、彭华中、王茂丽等硕士的大力支持，在此一并致谢。

感谢妻子和女儿对本人学习和工作的支持和理解，感谢双方父母亲、兄弟姐妹和其他亲属始终给予我的关心和鼓励。

感谢所有关心我、支持我和帮助过我的老师、同学、亲人和朋友们。

作者的研究工作得到国家自然科学基金项目(50278051)、上海市重点学科建设项目(Y0103)和武汉理工大学相关科研项目的资助，在此鸣谢！

作者：胡春林

2006年7月