第一章 习题解答与问题

一、习题解答

1 设 x>0，x 的相对误差限为 δ，求 $\ln x$ 的误差。

解：设 x的准确值为x^*，则有

$$(\,|x-x^*|/|x^*|\,)\ \leqslant\ \delta$$

所以

$$e(\ln x)=|\ln x-\ln x^*|=|x-x^*|\times|(\ln x)'|_{x=\xi}.\approx(\,|x-x^*|/|x^*|\,)\ \leqslant\ \delta$$

另解：

$$e(\ln x)=|\ln x-\ln x^*|=|\ln(x/x^*)|=|\ln((x-x^*+x^*)/x^*)|$$
$$=|\ln((x-x^*)/x^*+1)|\leqslant(\,|x-x^*|/|x^*|\,)\ \leqslant\ \delta$$

2 设 $x=-2.18$ 和 $y=2.1200$ 都是由准确值经四舍五入而得到的近似值。求绝对误差限 $\varepsilon(x)$ 和 $\varepsilon(y)$ 。

解：$|e(x)|=|e(-2.18)|\leqslant\ 0.005$，$|e(y)|=|e(2.1200)|\leqslant\ 0.00005$，所以

$\varepsilon(x)$=0.005， $\varepsilon(y)=0.00005$。

3 下近似值的绝对误差限都是 0.005，问各近似值有几位有效数字

$$x_1=1.38,\ x_2=-0.0312,\ x_3=0.00086$$

解：根据有效数字定义，绝对误差限不超过末位数半个单位。由题设知，x_1，x_2， x_3有效数末位数均为小数点后第二位。故x_1具有三位有效数字，x_2具有一位有效数字，x_3具有零位有效数字。

4 已知近似数 x 有两位有效数字，试求其相对误差限。

解：$|e_r(x)|\ \leqslant\ 5\times10^{-2}$。

5 设 $y_0=28$，按递推公式 $y_n=y_{n-1}-\sqrt{783}/100$ ($n=1，2，\cdots$) 计算到y_{100}。若取 $\sqrt{783}\approx27.982$ （五位有效数字），试问，计算 y_{100} 将有多大的误差？

解：由于初值 $y_0=28$ 没有误差，误差是由$\sqrt{783}\approx27.982$ 所引起。记 $x=27.982$，$\delta=x-\sqrt{783}$ 。则利用理论准确成立的递推式

$$y_n=y_{n-1}-\sqrt{783}/100$$

和实际计算中递推式

$$Y_n=Y_{n-1}-x/100\qquad(Y_0=y_0)$$

两式相减，得

$$e(Y_n)=Y_n-y_n=Y_{n-1}-y_{n-1}-(x-\sqrt{783})/100$$

所以，有

$$e(Y_n)=e(Y_{n-1})-\delta/100$$

利用上式求和

$$\sum_{n=1}^{100}e(Y_n)=\sum_{n=1}^{100}e(Y_{n-1})-\delta$$

化简，得

$$e(Y_{100})=e(Y_0)-\delta=\delta$$

所以，计算y_{100} 的误差界为

$$\varepsilon(Y_{100})\leq\delta=0.5\times0.001=5\times10^{-4}$$

6 求方程 $x^2-56x+1=0$ 的两个根，问要使它们具有四位有效数字，D=$\sqrt{b^2-4ac}$ 至少

要取几位有效数字？ 如果利用韦达定理，D又应该取几位有效数字？

解：在方程中，$a = 1$，$b = -56$，$c = 1$，故 D=$\sqrt{56^2-4}$ ≈55.96427，取七位有效数字。由求根公式

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-56+55.96427}{2} = \frac{-0.03573}{2}$$

具有四位有效数字，而

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-56-55.96427}{2} = \frac{-111.96427}{2}$$

则具有八位有效数字。

如果利用韦达定理，首先计算出x_2，利用

$$x_1 = \frac{1}{x_2} = \frac{2}{56+\sqrt{56^2-4}}$$

计算，只需取D=$\sqrt{56^2-4}$ ≈55.96 四位有效数字即可保证方程的两个根均具有四位有效数字。此时有，x_1=0.01786，x_2=55.98。

7 设 $s = \frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有±0.1 秒的误差，证明当 t 增加时 s 的绝对误差增加，而相对误差减小。

证明 由于$e(s) = g\,t\,e(t)$，$e_r(s) = 2\,e(t)\,/\,t$。而 $|e(t)| \leqslant 0.1$，所以，对这一问题，当t 增加时s的绝对误差增加，而相对误差减小。

8 序列$\{ y_n \}$满足递推关系 $y_n = 10y_{n-1} - 1$ ($n = 1$，2，……)。若取 $y_0 = \sqrt{2}$ ≈1.41（三位有效数字），按上述递推公式，从y_0计算到y_{10}时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解 取 $x_0 = 1.41$，记 $e(x_0) = 1.41 - \sqrt{2}$ 。根据

$$x_n = 10x_{n-1} - 1 \quad (n = 1，2，\cdots\cdots)$$

得

$$e(x_n) = 10e(x_{n-1}) \quad (n = 1，2，\cdots\cdots，10)$$

所以

$$e(x_{10}) = 10^{10}e(x_0)$$

从y_0计算到y_{10}时误差估计为： $|e(x_{10})| = 10^{10}\,|e(x_0)| \leqslant 0.5\times10^8$。

这是一个数值不稳定的算法。

9 $f(x) = \ln(x-\sqrt{x^2-1})$，求$f(30)$ 的值，若开平方用六位函数表，问求对数时误差有多大？若改用另一等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1}) = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

计算，求对数时误差有多大？

解 令 $y = x-\sqrt{x^2-1}$，则当 x=30 时，y=30 – 29.9833=0.0167 有三位有效数字，其相对误差为 10^{-3}。由第一题结论，求对数时误差为 10^{-3}。

若改用等价公式，令 $z = x+\sqrt{x^2-1}$，则当x=30 时，y=30 + 29.9833= 59.9833 有六位有效数字，其相对误差为 10^{-6}。由第一题结论，求对数时误差为 10^{-6}。

10 已知有求和式$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_i b_j$

（1） 试统计需要用多少次乘法和加法才能计算出该和式的值；

（2） 为了减少计算工作量，将和式作等价变换，变换后需要多少次乘法和加法。
解 （1）所用乘法次数：$1+2+3+\cdots\cdots+n = n(n+1)/2$，

加法次数：$[0+1+2+\cdots\cdots+(n-1)]+(n-1) = (n+2)(n-1)/2$；

（2）将和式等价变形为：$\sum_{i=1}^{n}[a_i\sum_{j=1}^{i}b_j]$

所用乘法为 n 次，加法次数不变，仍为$(n+2)(n-1)/2$。

11 试构造一个算法，对输入的数据 x_0，x_1，x_2，……，x_n，以及x（均为实数），算法输出为 $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)$ 的计算结果。
解 算法如下：

第一步：输入x；x_0，x_1，x_2，……，x_n，$M \leftarrow (x-x_0)$；$k \leftarrow 0$；

第二步：$M \leftarrow M\times(x-x_0)$；$k \leftarrow k+1$；

第三步：判断，若 $k \leqslant n$，则转第二步；否则输出 M，结束。

12 利用级数公式$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$可计算出无理数$\pi$ 的近似值。由于交错级数的部分和数列S_n 在其极限值上下摆动，故截断误差将小于第一个被舍去的项的绝对值 $|a_{n+1}|$。试分析，为了得到级数的三位有效数字近似值，应取多少项求和。
解 由部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$$

知，截断误差满足

$$|S_n-\frac{\pi}{4}|\le\frac{1}{2n+1}$$

显然，为了得到三位有效数字的近似值，绝对误差限应该为 $0.0005 = 5\times10^{-4}$。只需令

$$\frac{1}{2n+1}\le\frac{5}{10000}=\frac{1}{2000}$$

所以，当 $n\geqslant1000$ 时，部分和至少有三位有效数字。

二、例题

1．设$x_1 = 1.21$，$x_2 = 3.65$，$x_3 = 9.81$ 都具有三位有效位数，试估计数据：$x_1\times(x_2+x_3)$的误差限。

解：由于，$|e(x_1)|\leqslant0.5\times10^{-2}$，$|e(x_2)|\leqslant0.5\times10^{-2}$，$|e(x_3)|\leqslant0.5\times10^{-2}$，所以
$|e(x_2+x_3)|\leqslant10^{-2}$，
$|x_1\times(x_2+x_3)|\leqslant |x_1|\times10^{-2} + 0.5\times10^{-2}\times|x_2+x_3|=(1.21+0.5\times13.46)\times10^{-2}=7.94\times10^{-2}$。

2．设计算球体V允许其相对误差限为 $\varepsilon_r(V)=1\%$（或$|e_r(V)| \leqslant1/\%$），问测量球半径R的相对误差限$\varepsilon_r(R)$ 最大为多少?

解：由球体计算公式$\boldsymbol{V=\frac{4}{3}\pi R^3}$两端取全微分，得$dV=4\pi R^2 dR$。故有

$$\boldsymbol{e(V)\approx4\pi R^2e(R)},\quad \boldsymbol{e_r(V)\approx3e_r(R)}$$

当$\varepsilon_r(V)=1\%$ 时，测量球半径R的相对误差限$\varepsilon_r(R)$ 最大为 0.33%。

3．采用迭代法计算$\sqrt{7}$，取$x_0 = 2$，

$$\boldsymbol{x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{7}{x_n})},\ (n=0，1，2，3，\cdots\cdots)$$

若x_n是$\sqrt{7}$ 的具有n位有效数字的近似值，求证x_{n+1}是$\sqrt{7}$ 的具有 2n位有效数字的近似值。
证：由于

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+7/x_n)=\frac{1}{2}(\sqrt{x_n}-\sqrt{7}/\sqrt{x_n})^2+\sqrt{7}\geq\sqrt{7}\text{，}(n=0\text{，}1\text{，}2\text{，}\cdots)$$

所以

$$|x_{n+1}-\sqrt{7}|=\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{7})^2\leq\frac{1}{2\sqrt{7}}|x_n-\sqrt{7}|^2\text{，}(n=1\text{，}2\text{，}\cdots)$$

而x_n具有n位有效数，故

$$|x_n-\sqrt{7}|\leq\frac{1}{2}\times10^{1-n}$$

所以

$$|x_{n+1}-\sqrt{7}|\leq\frac{1}{2\sqrt{7}}|x_n-\sqrt{7}|^2\leq\frac{1}{2\sqrt{7}}\times\frac{1}{4}\times10^{2-2n}$$

由此得x_{n+1}的误差限

$$|x_{n+1}-\sqrt{7}|\leq\frac{1}{2}\times10^{1-2n}$$

故，x_{n+1}是$\sqrt{7}$ 的具有 2n位有效数字的近似值。

三、问题

1．假定 a_0，b_0是非负实数且$a_0\neq b_0$，按如下递推公式

$$\begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)\\ b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\end{cases}\qquad(n=0\text{，}1\text{，}2\text{，}\cdots\cdots)$$

产生的数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$称为高斯算术-几何平均数列。该数列可用于计算椭圆积分，试证明该数列的收敛性。

2．数学常数 e 是一个在数值计算中的重要常数，利用 $S_n=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ 可以计算 e 的近似值

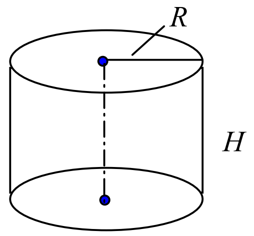
（1）设计一个算法，用尽可能少的乘除法次数计算S_n；

（2）分析算法的计算复杂度（运算次数和存贮单元数）；

（3）试估计用S_n计算e的近似值的载断误差误差界。

3．定积分$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan1=\frac{\pi}{4}$ 可以计算出无理数π 的值。将定积分表示为积分和近似用以计算π 的近似值。

4．一圆柱形容器的内底半径为 R，高为 H，



（1）由测量误差 $e(R)$ 和 $e(H)$，估计经计算所得的容器容积 V 的误差 $e(V)$；

（2）试分析以怎样的精度（相对误差限）测量圆柱形容器的底圆半径 R 和高 H，才能使容器容积的计算值精确到 1%

5． 建立积分 $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{5+x}dx$ （$n=1$，2，…，20）的递推

关系，并研究递推算法的数值稳定性。

6．计算两个多项式$P_n(x)$和$Q_m(x)$的乘积多项式$T_{n+m}(x)$的方法称为向量的卷积方法。设

$$P_n(x)=a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n x+a_{n+1}$$

$$Q_m(x)=b_1x^m+b_2x^{m-1}+\cdots\cdots+b_m x+b_{m+1}$$

再设

$$T_{n+m}(x)=d_1x^{n+m}+d_2x^{n+m-1}+\cdots\cdots+d_{n+m}x+d_{n+m+1}$$

分析由多项式$P_m(x)$的系数计算出多项式$P_m(x)$的系数的规律，设计算法，由输入数据

$$a_1，a_2，\cdots\cdots，a_m，a_{m+1}$$

$$b_1，b_2，\cdots\cdots，b_n，b_{n+1}$$

计算并输出数据

$$c_1，c_2，\cdots\cdots，c_{m+n}，b_{m+n+1}$$

7．在计算机上对调和级数$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$自左至右求和计算

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

当n很大时，S_n 将不随n 的增加而增加。试利用相对误差限和有效数字关系说明这一现象产生的原因。

8． Fibonacci数列最初两项为 $F_0=1$，$F_1=1$，其递推公式为：

$$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}，(n\geqslant 0)$$

（1） 利用数学归纳法证明 Fibonacci 数列的通项可以表示成：

$$\boldsymbol{F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]}；$$

（2）利用Fibonacci数列定义数列$\{x_n\}$，其通项为：$x_n=\frac{F_{n+1}}{F_n}$，试证明

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}x_n=(1+\sqrt{5})/2}$$

9．多项式剩余定理可叙述为：n 次多项式 $P(x)$ 被 $(x-c)$除所得余数 R 恰好等于多项式在 $x=c$ 处的值 $P(c)$，即

$$P(x)=(x-c)Q(x)+R$$

其中，$Q(x)$是 $n-1$ 次多项式。求证 $\boldsymbol{P'(c)=Q(c)}$。并利用多项式剩余定理计算

$$P(x)=x^7-2x^6-3x^4+4x^3-x^2+6x-1$$

在 $x=2$ 处的值 $P(2)$。

10．在多项式剩余定理中，令$b_n=R$，再令

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

$$Q(x)=b_0x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$$

（1）求证递推关系：

$$b_0=a_0$$

$$b_k=c\times b_{k-1}+a_k\quad(k=1，2，\cdots\cdots，n)$$

（2）根据上面递推关系，设计算法计算 $P(c)$ 和 $P'(c)$。

第二章 习题解答与问题

一、习题解答

1 用二分法求解下列方程，要求误差不超过 10^{-5}

（1）$x - \ln x = 2$ 在区间[2，4]内的根；

（2）$x\,e^x - 1 = 0$ 在区间[0，1]内的根；

（3）$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在区间[1，2]内的根。

解：（1）$x_{18} = 3.14618$。

二分法程序 2-1

```
a=2;b=4;k=0;
f=inline('x-log(x)-2');
ya=f(a);
while (b-a)>0.00001
    x0=.5*(a+b);y0=f(x0);
    if ya*y0<0
        b=x0;
    else
        a=x0;ya=y0;
    end
    k=k+1;
end
format long
disp([x0,k])
```

（2） $x_{17} = 0.567146$。（利用上面程序修改前两行）

（3） $x_{17} = 1.365226$。

2 证明方程 $1 - x - \sin x = 0$ 在区间[0，1]上有一根。使用二分法求误差不大于 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ 的根需二分多少次？

证明 令 $f(x) = 1 - x - \sin x$，则 $f(0) = 1$，$f(1) = -\sin 1$。于是 $f(0)\,f(1) < 0$，故所给方程在区间[0，1]上必有根。又因为

$$f'(x) = -1 - \cos x$$

所以，函数 $f(x)$ 在区间[0，1]内单减。故，方程在区间[0，1]内只有一个根。

利用二分法收敛定理，由

$$\frac{1-0}{2^{n+1}} \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

得 $2^n \ge 10^4$，所以二分法求根至少需 14 次二分计算能满足误差要求。

3 比较以下两种方法求 $e^x + 10x - 2 = 0$ 的根到三位小数所需要的计算量。

（1） 在区间[0，1]内用二分法；

（2） 用迭代法 $x_{n+1} = \frac{1}{10}(2 - e^{x_n})$，取初值 $x_0 = 0$。

解：（1）二分法迭代 11 次，$x_{11} = 0.090$。（利用第 1 题程序修改前两行）

（2）不动点迭代 5 次，$x_5 = 0.0905$。

不动点迭代程序

```
x0=0;k=0;er=1;
fi=inline('(2-exp(x))/10');
while er>0.0001
```

```
        x1=fi(x0);
        er=abs(x1-x0);
        x0=x1;k=k+1;
    end
    disp([x0,k])
```

4 给出求 $x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ 的迭代格式，并证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$。

解 取初值：$x_1=\sqrt{2}$，迭代格式：$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ （n=1，2，…… ）。

首先证明数列有上界。显然， $x_1< 2$。设对k ，有 $x_k<2$ 成立，则对于(k+1)有

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2$$

由数学归纳法知，对任意n 有 $x_n< 2$。故数列有上界。

现证明数列单增。由

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{2+x_n}}{x_n}>\frac{\sqrt{x_n+x_n}}{x_n}=\sqrt{\frac{2}{x_n}}>1$$

知，数列单调增加。由极限定理，该数列必有极限，设为 x^*，由

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_n}$$

得

$$x^*=\sqrt{2+x^*}$$

化为二次方程，求出两个根分别为：– 1 和 2，舍去负根，得x^* =2 。

5 取 $x_0=0.5$，求方程 $x=e^{-x}$ 的根。分别用简单迭法和Aitken加速方法求解，要求误差 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-5}$。

解：用简单迭代法，迭代公式为

$$x_0=0.5，x_{k+1}=e^{-x_k}\quad(k=0，1，\cdots\cdots)$$

计算结果如下表

0.60653065	0.54523921	0.57970309	0.56006462	0.57117214	0.56486294
0.56843804	0.56640945	0.56755963	0.56690721	0.56727719	0.56706735
0.56718636	0.56711886	0.56715714	0.56713543	0.56714774	0.56714076

当k=17 时，$|x_{18}-x_{17}|=|0.56714076-0.56714774|\le 10^{-5}$。故取

$$x^*\approx 0.56714076$$

MATLAB 程序如下

```
    x0=0.5;er=1;k=0;
    while er>0.00001
        x=exp(-x0);
        er=abs(x-x0);
        x0=x;k=k+1;
    end
```

用 Aitken 加速方法，迭代公式为

$$\begin{cases} y_n=\exp(-x_n),\ z_n=\exp(-y_n) \\ x_{n+1}=z_n-\dfrac{(z_n-y_n)^2}{z_n-2y_n+x_n} \end{cases}\quad(n=0，1，\cdots\cdots)$$

仍取$x_0=0.5$，计算数据如下

k	1	2	3
x_k	0.56762387	0.56714331	0.56714329

当k=2 时，$|x_3-x_2|=|0.56714329-0.56714331|\le 10^{-5}$。故取

$$x^*\approx 0.56714329$$

MATLAB 程序如下

```
x=0.5;er=1;k=0;
while er>0.00001
    y=exp(-x);z=exp(-y);
    x0=z-(y-z)^2/(z-2*y+x);
    er=abs(x-x0);
    x=x0;k=k+1;
    u(k)=x;
end
```

6　应用牛顿迭代法于方程 $x^3-a=0$，导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式，并讨论其收敛阶。

解：令 $f(x)=x^3-a$，则牛顿迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3-a}{3x_n^2}=\frac{2}{3}x_n+\frac{a}{3x_n^2}$$

故迭代函数为

$$\varphi(x)=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3x^2}$$

而

$$\varphi'(x)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\frac{a}{x^3}，\quad \varphi''(x)=2\frac{a}{x^4}$$

将 $x^*=\sqrt[3]{a}$ 代入，得 $\varphi'(x^*)=0$，$\varphi''(x^*)=2/\sqrt[3]{a}$

故用牛顿迭代法求解方程 $x^3-a=0$，导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代是二阶收敛。

7　用牛顿迭代法求解Leonardo方程 $x^3+2x^2+10x-20=0$，要求 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-5}$。

解：令 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20$，则牛顿迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^3+2x_n^2+10x_n-20}{3x_n^2+4x_n+10}$$

容易验证 $f(1)f(2)<0$，故方程在[1，2]区间内至少有一根。取初值x_0=1，计算结果如下

1.4117647　　1.3693364　　1.3688081　　1.3688081

取初值x_0=2，计算结果如下

1.4666666　　1.3715120　　1.3688102　　1.3688081

取初值x_0=1.5，计算结果如下

1.3736263　　1.3688148　　1.3688081

由此可知，方程在区间[1，2]内有一根，其近似值为

$$x^*\approx 1.3688081$$

注：用 MATLAB 求多项式零点命令 roots([1　2　10　–20])可得该方程的三个根近似值

x_1 = -1.6844 + 3.4313i，x_2 = -1.6844 - 3.4313i，x_3 = 1.3688

8　已知方程 $x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近有根，试判断下列迭代格式的收敛性。

（1）$x_{n+1}=1+1/x_n^2$；（2）$x_{n+1}=1/\sqrt{x_n-1}$；（3）$x_{n+1}=\sqrt[3]{1+x_n^2}$。

解：（1）$\varphi(x)=1+1/x^2$，$\varphi'(x)=-2/x^3$，在 $x_0=1.5$ 附近有$|\varphi'(x)|<1$成立，故迭代格式收敛；

（2）$\varphi(x)=1/\sqrt{x-1}$，$\boldsymbol{\varphi'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{(x-1)^3}}}$，在 $x_0=1.5$ 附近有$|\varphi'(x)|\ge 1$成立，故

迭代格式不收敛；

（3）$\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$，$\boldsymbol{\varphi'(x)=\dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}}$，在 $x_0=1.5$ 附近有$|\varphi'(x)|<1$成立，故迭代格式收敛。

9　应用牛顿迭代法于方程 $f(x)=1-\dfrac{a}{x^2}$=0，导出求平方根$\sqrt{a}$的迭代公式，并用此公式计算$\sqrt{115}$。

解：因为 $f'(x)=\dfrac{2a}{x^3}$，所以牛顿迭代公式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{1-a/x_n^2}{2a/x_n^3}=\frac{3}{2}x_n-\frac{x_n^3}{2a}$$

取初值x_0 =11，迭代计算 4 次后得

10.71304347826087　10.72378910023906　10.72380529472693　10.72380529476361

取

$$\sqrt{115}\approx 10.7238052947$$

已经得到 12 位有效数字。

10　证明由迭代格式 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}$（$n=0$，1，……）产生的迭代序列 $\{x_n\}$，对任意的 x_0>0，均收敛于$\sqrt{2}$。

证明：对迭代格式，得 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2x_n}(x_n^2+2)$，等式两端同减$\sqrt{2}$，并进行配方，得

$$x_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2x_n}(x_n-\sqrt{2})^2$$

同理可得

$$x_{n+1}+\sqrt{2}=\frac{1}{2x_n}(x_n+\sqrt{2})^2$$

将上面两式相除，得

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{x_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{(x_n+\sqrt{2})^2}$$

反复递推，得

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{2}}{x_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{(x_n-\sqrt{2})^2}{(x_n+\sqrt{2})^2}=[\frac{x_{n-1}-\sqrt{2}}{x_{n-1}-\sqrt{2}}]^{2^2}=\cdots=[\frac{x_0-\sqrt{2}}{x_0+\sqrt{2}}]^{2^{n+1}}$$

令

$$q=\frac{x_0-\sqrt{2}}{x_0+\sqrt{2}}$$

则有

$$\frac{x_n-\sqrt{2}}{x_n+\sqrt{2}}=q^{2^n}$$

化简，得

$$x_n = \sqrt{2}\frac{1+q^{2^n}}{1-q^{2^n}}$$

对任意的x_0>0，由于 $|q|<1$，故迭代序列收敛于$\sqrt{2}$。

11 解方程 $12-3x+2\cos x=0$ 的迭代格式为 $x_{n+1}=4+\frac{2}{3}\cos x_n$

（1） 证明：对任意 $x_0\in R$，均有 $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ （为方程的根）；

（2） 取$x_0=4$，用此迭代法求方程根的近似值，误差不超过 10^{-3}；

（3） 此迭代法的收敛阶是多少？

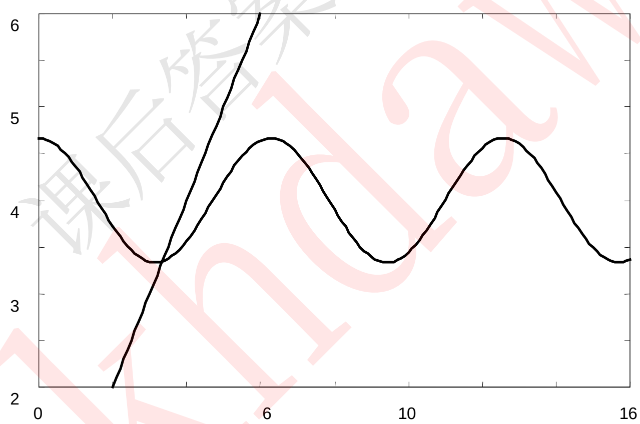
解：(1) 令 $\varphi(x)=4+\frac{2}{3}\cos x$，则 $\varphi'(x)=-\frac{2}{3}\sin x$。故对任意$x\in R$，均有$|\varphi'(x)|<1$ ，所以迭代过程收敛。即对任意 $x_0\in R$，均有 $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$。

（3） 取$x_0=4$，用迭代法计算得

3.5642　3.3920　3.3541　3.3483　3.3475

当k=5 时，有不等式 $|x_5-x_4|\le 10^{-3}$成立，取方程根的近似值

$$x^*\approx 3.3475$$



利用 MATLAB 绘图命令，将 $y=x$ 和 $y=4+\frac{2}{3}\cos x$ 绘制曲线。观察可知方程只有一个根。

（4） 由于 $\varphi'(x)=-\frac{2}{3}\sin x$ 在$x^*\approx 3.3475$ 附近不为零，故迭代法是一阶收敛。

二、例题

1．求证：二分法得到的数列$\{x_n\}$线性收敛。

证 由二分法误差估计定理，得

$$|x_n-x^*|\le \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$$

而

$$x_{n+1}-x^*=(x_n-x^*)+(x_{n+1}-x_n)$$

所以

$$\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=1+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x^*}$$

容易证明，$|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{2^{n+2}}(b-a)$，故

$$\frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_n-x^*|}\geq(\frac{b-a}{2^{n+2}})/(\frac{b-a}{2^{n+1}})=\frac{1}{2}$$

显然，当$x_n>x^*$时，$x_{n+1}<x_n$，当$x_n<x^*$时，$x_{n+1}>x_n$。故

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x^*}=-\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x^*}\right|$$

所以

$$\frac{|x_{n+1}-x^*|}{|x_n-x^*|}=\left|1+\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x^*}\right|=\left|1-\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x^*}\right|\right|\leq\frac{1}{2}$$

故二分法是线性收敛。

2．．设x^* 是非线性方程 $f(x)=0$ 的单根，证明在牛顿迭代法中，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

解：由于x^* 是 $f(x)=0$ 的单根，故当$x_n\approx x^*$时， $f'(x_n)\neq 0$，利用Tylor展开式

$$f(x)=f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)+\frac{(x-x_n)^2}{2}f''(\xi_n)$$

其中，ξ_n 介于x和x_n之间。上式中取$x=x^*$，由牛顿迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

得

$$x_{n+1}-x^*=(x^*-x_n)^2\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x^*,\quad \lim_{n\to\infty}\xi_n=x^*$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

3．设a为正实数，试建立求$\frac{1}{a}$的牛顿迭代公式，要求在迭代公式中不含有除法运算，并考虑迭代公式产生的数列$\{x_n\}$的收敛性。

解 构造函数 $f(x)=\frac{1}{x}-a$，由于$\frac{1}{a}$是该函数的零点，且 $f'(x)=-1/x^2$，对方程 $f(x)=0$ 应用牛顿迭代公式，得

$$x_{n+1}=x_n(2-a\,x_n)\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

该迭代函数不含有除法运算。由迭代公式，得

$$1-a\,x_{n+1}=1-a\,x_n(2-a\,x_n)=(1-a\,x_n)^2,\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

递推，得

$$1-ax_n=(1-ax_0)^{2^n}\text{，}(n=0，1，2，\cdots)$$

解得

$$x_n=\frac{1}{a}[1-(1-ax_0)^{2^n}]$$

所以数列{ x_n }收敛的充要条件为：$|1-a\,x_0|<1$。即

$$0<x_0<2/a$$

三、问题

1 分析下列方程，确定方程的全部隔根区间

（1）$x\sin x=1$；（2）$\sin x-e^{-x}=0$；（3）$x=\tan x$；（4）$x^2-e^{-x}=0$。

2．假定二分法开始的区间为[50，63]，问需要进行多少次二分，才能使所求根的相对误差精度达到 10^{-12}。

3．设二分法开始的区间为[a，b]，二分法计算过程中产生的区间序列为：

$$[a_1，b_1]，[a_2，b_2]，\cdots\cdots，[a_n，b_n]，\cdots\cdots$$

记 $x_n=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，试证明：$|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{2^{n+2}}(b-a)$。

4．应用牛顿迭代公式分别导出求方程

$$f(x)=x^n-a=0$$
$$f(x)=1-a/x^n$$

的解 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代格式，并求极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-\sqrt[n]{a}}{(x_k-\sqrt[n]{a})^2}$$

5．对于复变量 $z=x+i\,y$ 的复值函数 $f(z)$ 应用牛顿迭代公式

$$z_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

时为避开复数运算分出实部和虚部。令

$$z_n=x_n+i\,y_n，f(z_n)=A_n+i\,B_n，f'(z_n)=C_n+i\,D_n$$

证明

$$x_{n+1}=x_n-\frac{A_nC_n+B_nD_n}{C_n^2+D_n^2}，\quad y_{n+1}=y_n+\frac{A_nD_n-B_nC_n}{C_n^2+D_n^2}$$

6．证明：对于 $C>0$，迭代格式

$$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3C)}{3x_n^2+C}\quad(n=0，1，2，\cdots\cdots)$$

是计算 $x^*=\sqrt{C}$ 的三阶方法。

7．设数列{ x_n }具有一阶收敛速度，其极限值为 x^*，试利用近似关系

$$\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}\approx\frac{x_{n+2}-x^*}{x_{n+1}-x^*}$$

推导使数列收敛加速的计算公式

（1）$x^*\approx x_{n+2}-\frac{(x_{n+2}-x_{n+1})^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$；（2）$x^*\approx x_n-\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$

8．证明割线法迭代公式可写为如下形式

$$x_{n+2}=\frac{x_n f(x_{n+1})-x_{n+1}f(x_n)}{f(x_{n+1})-f(x_n)}$$

9．设x^*是$f(x)=0$ 的二重根，证明

（1）牛顿迭代法只是线性收敛；

（2）修改的牛顿迭代公式 $x_{n+1}=x_n-2\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 具有二阶收敛性。

10．对于二元方程$G(x，y)=0$，已知（x_0，y_0）满足方程。如果$G_y(x_0,y_0)\neq 0$，则根据隐函数存在定理，在点x_0附近有函数$y=y(x)$，对于接近于x_0的自变量x，试构造牛顿迭代法计算隐函数值的迭代格式。

设割线法迭代数列$\{x_n\}$收敛到非线性方程 $f(x)=0$ 的单根x^*。用牛顿插值公式

$f(x)=f(x_n)+(x-x_n)f[x_n,x_{n-1}]+(x-x_n)(x-x_{n-1})f''(\xi_n)$计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{n+1}-x^*)}{(x_n-x^*)(x_{n-1}-x^*)}$$

第三章 习题解答与问题

一、习题解答

1．用高斯消元法解下列方程组

（1）$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3=5 \\ 3x_1+4x_2+7x_3=6 \\ x_1+3x_2+3x_3=5 \end{cases}$；（2）$\begin{cases} 2x_1-4x_2+2x_3-4x_4=3 \\ -4x_1+10x_2+2x_3+5x_4=-5 \\ 2x_1+2x_2+12x_3-5x_4=-2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3+12x_4=-4 \end{cases}$

解：（1）约化增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ & -1/2 & -1/2 & -3/2 \\ & 3/2 & 1/2 & 5/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 \\ & -1/2 & -1/2 & -3/2 \\ & & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

得上三角方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3=5 \\ -0.5x_2-0.5x_3=-1.5 \\ -x_3=-2 \end{cases}$$

回代求解得，

$$x_1=-4\ ,\ x_2=1\ ,\ x_3=2$$

（2）约化增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -4 & 3 \\ -4 & 10 & 2 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & 12 & -5 & -2 \\ 4 & 5 & -5 & 12 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -4 & 3 \\ & 2 & 6 & -3 & 1 \\ & 6 & 10 & -1 & -5 \\ & 13 & -9 & 20 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -4 & 3 \\ & 2 & 6 & -3 & 1 \\ & & -8 & 8 & -8 \\ & & -48 & 79/2 & -33/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & -4 & 3 \\ & 2 & 6 & -3 & 1 \\ & & -8 & 8 & -8 \\ & & & -17/2 & 63/2 \end{bmatrix}$$

得上三角方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+2x_3-4x_4=3 \\ 2x_2+6x_3-3x_4=1 \\ -8x_3+8x_4=-8 \\ -8.5x_4=-31.5 \end{cases}$$

回代求解得

$$x_1=99/34,\ x_2=52/17,\ x_3=-46/17\ ,\ x_4=-63/17$$

2．设A对称且$a_{11}\neq 0$，经过高斯消元法一步后，A约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

证明A_2 是对称矩阵。

证 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ ，经过高斯消元第一步后，得$(n-1)$阶矩阵$A_2=(b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$，其中

$$b_{ij}=a_{i+1,j+1}-\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,j+1}$$

因为A是对称矩阵，所以 $a_{i+1,j+1}=a_{j+1,i+1}$，$a_{i+1,1}=a_{1,i+1}$，$a_{1,j+1}=a_{j+1,1}$，故

$$b_{ji}=a_{j+1,i+1}-\frac{a_{j+1,1}}{a_{11}}a_{1,i+1}=a_{i+1,j+1}-\frac{a_{1,i+1}}{a_{11}}a_{j+1,1}=b_{ij}$$

所以矩阵A_2是对称矩阵。

另证：由于高斯消元法一步后不改变矩阵 A 的第一行元素，所以可将原对称矩阵 A 写为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}$$

形式。其中，A_1是对称矩阵。利用Frobenius矩阵

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{1} & \\ -\boldsymbol{m}_1 & \boldsymbol{I}_{n-1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{m}_1=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}_{11}}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{m}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T=\boldsymbol{A}_1-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}_{11}}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T$$

是对称矩阵。

3．设方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\ 5x_1+4x_2+10x_3=0\\ 3x_1-0.1x_2+x_3=2\end{cases}$

（1） 试用 Gauss 全主元法求解；（2）用 Gauss 列主元法求解。

解：（1）用 P=[1，2，3]记录未知元次序。由增广矩阵

$$[A\quad b]=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{10} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & -\mathbf{0.1} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{bmatrix}$$

在系数矩阵A中选取绝对值最大元 $a_{23}=10$。交换第一行第二行，并交换第一列和第三列。

$$[A\quad b]\to\begin{bmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{10} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & -\mathbf{0.1} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\mathbf{10} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & -\mathbf{0.1} & \mathbf{3} & \mathbf{2}\end{bmatrix}$$

修改 P，将 P 的第一元素和第三元素换位，置 P←[3，2，1]。然后进行第一轮消元，得

$$\begin{bmatrix}\mathbf{10} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & -\mathbf{0.1} & \mathbf{3} & \mathbf{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}10 & 4 & 5 & 0\\ & 4/5 & -1/2 & 1\\ & -1/2 & 5/2 & 2\end{bmatrix}$$

在系数矩阵的右下子矩阵中选取绝对值最大元 $a_{33}=5/2$。交换第二行第三行，并交换第二列和第第三列。

$$\begin{bmatrix}10 & 4 & 5 & 0\\ & 4/5 & -1/2 & 1\\ & -1/2 & 5/2 & 2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}10 & 4 & 5 & 0\\ & -1/2 & 5/2 & 2\\ & 4/5 & -1/2 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}10 & 5 & 4 & 0\\ & 5/2 & -1/2 & 2\\ & -1/2 & 4/5 & 1\end{bmatrix}$$

修改 P，将 P 的第二元素和第三元素换位，置 P←[3，1，2]。然后进行第二轮消元，得

$$\begin{bmatrix}10 & 5 & 4 & 0\\ & 5/2 & -1/2 & 2\\ & -1/2 & 4/5 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}10 & 5 & 4 & 0\\ & 5/2 & -1/2 & 2\\ & & 7/10 & 7/5\end{bmatrix}$$

得三角形方程组

$$\begin{cases}10x_3 + 5x_1 + 4x_2 = 0\\ 2.5x_1 - 0.5x_2 = 2\\ 0.7x_2 = 1.4\end{cases}$$

回代求解，得

$$x_3 = -7/5\ ,\ x_1 = 6/5\ ,\ x_2 = 2$$

利用乱序后的未知元次序记录数组P=[3，1，2]，得$p_1=3$，$p_2 = 1$，$p_3 = 2$。由y_{p1} ← $-7/5$，y_{p2} ← $6/5$，y_{p3} ← 2。 整序后输出

$$y = [6/5\ ,\ 2,\ -7/5]$$

即得方程组未知元按原次序x_1，x_2，x_3的数据结果。

（2）由增广矩阵第一列选主元，并首轮消元得

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 10 & 0\\ 3 & -0.1 & 1 & 2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}5 & 4 & 10 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 1\\ 3 & -0.1 & 1 & 2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}5 & 4 & 10 & 0\\ & 6/5 & 1 & 1\\ & -5/2 & -5 & 2\end{bmatrix} \rightarrow$$

第二列后两个元素选主元，并消元得

$$\begin{bmatrix}5 & 4 & 10 & 0\\ & 6/5 & 1 & 1\\ & -5/2 & -5 & 2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}5 & 4 & 10 & 0\\ & -5/2 & -5 & 2\\ & 6/5 & 1 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}5 & 4 & 10 & 0\\ & -5/2 & -5 & 2\\ & & -7/5 & 49/25\end{bmatrix}$$

得三角方程

$$\begin{cases}5x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 0\\ -\dfrac{5}{2}x_2 - 5x_3 = 2\\ -\dfrac{7}{5}x_3 = \dfrac{49}{25}\end{cases}$$

回代求解，得

$$x_1 = 6/5\ ,\ x_2 = 2\ ,\ x_3 = -7/5$$

4．利用矩阵 A 的 LU 分解法求解方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 5 & 3 & -2\\ -2 & -2 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{4}\\ \mathbf{7}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

解：用高斯消元法分解矩阵 A

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 5 & 3 & -2\\ -2 & -2 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 3 & -3\\ 1 & 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

由此得矩阵 A 的 LU 分解

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 5 & 3 & -2\\ -2 & -2 & 3 & 5\\ 1 & 3 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -2 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ & 1 & 1 & 2\\ & & 3 & -3\\ & & & 3\end{bmatrix}$$

第一步，顺代过程求解下三角方程组

$$\begin{bmatrix}1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -2 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 7\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

得：$y_1 = 4$，$y_2 = -1$，$y_3 = 9$，$y_4 = -3$。

第二步，回代过程求解上三角方程组

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ & 1 & 1 & 2\\ & & 3 & -3\\ & & & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -1\\ 9\\ -3\end{bmatrix}$$

得：$x_1 = 2$，$x_2 = -1$，$x_3 = 2$，$x_4 = -1$。

5．设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 5 & 7\end{bmatrix}$，试求解以下问题

（1） 解$Ax=b$，其中 $b = [30，40，43，57]^T$；

（2） 利用三角分解求 A^{-1}。

解：（1）$x_1 = 1$，$x_2 = 2$，$x_3 = 3$，$x_4 = 4$。

（2）用E表示四阶单位矩阵，记E的四个列向量分别为 e_1，e_2，e_3，e_4，设A^{-1}的四个列向量分别为X_1，X_2，X_3，X_4，则有 $A[X_1，X_2，X_3，X_4] = E$。故求A^{-1}等价于求解四个同系数矩阵的方程组

$$AX_1 = e_1，\ AX_2 = e_2，\ AX_3 = e_3，\ AX_4 = e_4$$

高斯消元法分解矩阵 A

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&4&5\\4&5&5&7\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&-1&-2&-3\\3&2&-1&-1\\4&3&1&1\end{bmatrix}$$

由此得矩阵 A 的 LU 分解

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&4&5\\4&5&5&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\2&1&&\\3&2&1&\\4&3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&-1&-2&-3\\&&-1&-1\\&&&1\end{bmatrix}=LU$$

现分别求解四个下三角方程组

$$LY_1=e_1,\ LY_2=e_2,\ LY_3=e_3,\ LY_4=e_4$$

得

$$Y_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\1\end{bmatrix},\ Y_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\-1\end{bmatrix},\ Y_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\ Y_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

分别求解四个上三角方程组

$$UX_1=Y_1,\ UX_2=Y_2,\ UX_3=Y_3,\ UX_4=Y_4$$

得

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}\mathbf{-3}\\\mathbf{3}\\\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\end{bmatrix},\ X_2=\begin{bmatrix}3\\-4\\3\\-1\end{bmatrix},\ X_3=\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\-1\end{bmatrix},\ X_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

故

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-3&3&-2&1\\3&-4&3&-1\\-2&3&0&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

6．用追赶法求解下列方程组

$$\begin{bmatrix}-4&1&&\\1&-4&1&\\&1&-4&1\\&&1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

解：首先对系数矩阵进行三角分解（Crout 分解）

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 1 & \\ & 1 & -4 & 1 \\ & & 1 & -4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-4 & -1/4 & & \\ 1 & -15/4 & -4/15 & \\ & 1 & -56/15 & -15/56 \\ & & 1 & -209/56\end{bmatrix}$$

所以

$$A=\begin{bmatrix}-4 & & & \\ 1 & -15/4 & & \\ & 1 & -56/15 & \\ & & 1 & -209/56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1/4 & & \\ & 1 & -4/15 & \\ & & 1 & -15/56 \\ & & & 1\end{bmatrix}$$

解下三角方程组

$$\begin{bmatrix}-4 & & & \\ 1 & -15/4 & & \\ & 1 & -56/15 & \\ & & 1 & -209/56\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

得

$$[y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]^T=[-1/4 \quad -1/3 \quad -5/14 \quad -4/11]^T$$

解上三角方程组

$$\begin{bmatrix}1 & -1/4 & & \\ & 1 & -4/15 & \\ & & 1 & -15/56 \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/4\\ -1/3\\ -5/14\\ -4/11\end{bmatrix}$$

得

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T=[-4/11 \quad -5/11 \quad -5/11 \quad -4/11]^T$$

7.（1）设$P\in R^{n\times n}$ 非奇异，$\|x\|$ 是R^n 上的一种向量范数，定义 $\|x\|_p=\|Px\|$。试证明$\|x\|_p$ 也是R^n 上的一种向量范数；

（2）设 $A\in R^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，定义 $\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)}$，证明$\|x\|_A$ 是R^n上的一种向量范数。

证：（1）由于P是非奇异矩阵，故当x为非零向量时，Px也是非零向量（否则，由Px=0 得 x=0 与x是非零向量矛盾）。故$\|x\|_p=\|Px\|>0$，且 $\|x\|_p=0$ 的充分必要条件是 $x=0$；

$\|\lambda x\|_p=\|P(\lambda x)\|=\|\lambda Px\|=|\lambda|\cdot\|Px\|=|\lambda|\cdot\|x\|_p$

$\|x+y\|_p=\|P(x+y)\|=\|Px+Py\|\leqslant\|Px\|+\|Py\|=\|x\|_p+\|y\|_p$

由上可知，$\|\cdot\|_p$满足范数三条公理，故，$\|x\|_p$ 是R^n 上的一种向量范数。

（2）由于矩阵A对称正定， 故存在下三角矩阵L，使得 $A=LL^T$，且L是非奇异矩阵。所以，

$$\|\mathbf{x}\|_A^2=(Ax,\ x)=x^TAx=x^TLL^Tx=\|\mathbf{L}^T\mathbf{x}\|_2^2$$

故，$\|x\|_A=\|L^Tx\|_2$。由（1）的结论知，$\|x\|_A$ 是R^n上的一种向量范数。

8．设 $A\in R^{n\times n}$，如果$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ （$i=1，2，\cdots，n$）成立，则称A为对角占优矩阵。

若A为对角占优矩阵，经过Gauss 消元法一步后，A具有如下形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

证明：A_2是对角占优矩阵。

证 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ ，经过高斯消元第一步后，得$(n-1)$阶矩阵$A_2=(b_{ij})_{(n-1)\times(n-1)}$，其中

$$b_{ij}=a_{i+1,j+1}-\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,j+1}$$

于是

$$|b_{ii}|=|a_{i+1,i+1}-\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,i+1}|\geq|a_{i+1,i+1}|-|\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,i+1}|$$

其中

$$|a_{i+1,i+1}|\geq\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n-1}|a_{i+1,j+1}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|a_{i+1,j+1}|+|a_{i+1,1}|$$

而

$$|a_{i+1,1}|-|\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,i+1}|=|a_{i+1,1}\frac{a_{11}}{a_{11}}|-|\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,i+1}|$$

$$\geq|\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}|\cdot\sum_{j=2}^{n}|a_{1,j}|-|\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,i+1}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,j+1}|$$

所以

$$|b_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|a_{i+1,j+1}|+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,j+1}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}(|a_{i+1,j+1}|+|\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,j+1}|)$$

故

$$|b_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|a_{i+1,j+1}-\frac{a_{i+1,1}}{a_{11}}a_{1,j+1}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|b_{ij}|$$

9．设 $A=\begin{bmatrix}0.6 & 0.5\\ 0.1 & 0.3\end{bmatrix}$，计算 A 的行和范数，列和范数，2-范数及 F-范数。

解：$\|A\|_\infty=1.1$，$\|A\|_1=0.8$，$\|A\|_2=0.6853$ ，$\|A\|_F=0.8426$

10．设 X 是 n 维向量，A 是 $n\times n$ 阶矩阵。求证：

（1）$\|\boldsymbol{X}\|_\infty\leq\|\boldsymbol{X}\|_1\leq \boldsymbol{n}\|\boldsymbol{X}\|_\infty$；（2）$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F\leq\|A\|_2\leq\|A\|_F$。

证：（1）设 $X=[x_1，x_2，\cdots\cdots，x_n]^T$，则 $\|X\|_1=|x_1|+|x_2|+\cdots\cdots+|x_n|$。

因为

$$\|X\|_1\leq n\max_{1\leq k\leq n}|x_k|=n\|X\|_\infty \quad 及 \quad \|X\|_1\geq\max_{1\leq k\leq n}|x_k|=\|X\|_\infty$$

所以，$\| \boldsymbol{X} \|_\infty \le \| \boldsymbol{X} \|_1 \le \boldsymbol{n} \| \boldsymbol{X} \|_\infty$。

（2）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则 $A^TA=(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj})_{n\times n}$，该矩阵的迹（主对角元之和）为

$$tr(A^TA)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}a_{kj}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2=\| A \|_F$$

根据矩阵特征值理论，n阶方阵A^TA的特征值之和等于A^TA的迹，即

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A^TA)=tr(A^TA)=\| A \|_F$$

所以

$$\| A \|_2^2=\lambda_{\max}(A^TA)\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A^TA)=\| A \|_F^2$$

$$\| A \|_2^2=\lambda_{\max}(A^TA)\ge\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A^TA)=\frac{1}{n}\| A \|_F^2$$

由上两式得

$$\frac{1}{n}\| A \|_F^2\le\| A \|_2^2\le\| A \|_F^2 \quad 或 \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\| A \|_F\le\| A \|_2\le\| A \|_F$$

11．设 $X\in R$ ，$X=(x_1，x_2，\cdots\cdots，x_n)^T$，求证 $\lim\limits_{p\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}=\| X \|_\infty$。

证明：因为

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\le n\max_{1\le i\le n}|x_i|^p \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\ge\max_{1\le i\le n}|x_i|^p$$

故

$$\max_{1\le i\le n}|x_i|\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}\le\sqrt[p]{n}\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

或

$$\| X \|_\infty\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}\le\sqrt[p]{n}\| X \|_\infty$$

由于 $\lim\limits_{p\to\infty}\sqrt[p]{n}=1$，所以对上式取极限，得

$$\lim_{p\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}=\| X \|_\infty$$

12．设$B\in R^{n\times n}$，I 是n阶单位矩阵，如果 $\| B \|<1$，证明，$\| I-(I-B)^{-1} \|\le\dfrac{\| B \|}{1-\| B \|}$

证 首先证明不等式：$\| (I-B)^{-1} \|\le\dfrac{1}{1-\| B \|}$

由 $(I-B)(I-B)^{-1}=I$，得

$$(I-B)^{-1}-B(I-B)^{-1}=I$$

移项，得

$$(I-B)^{-1}=I+B(I-B)^{-1}$$

两边取范数，得

$$\|(I-B)^{-1}\| \leqslant \|I\| + \|B\|\,\|(I-B)^{-1}\|$$

由于 $\|I\|=1$，整理上面不等式，得

$$\|(I-B)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|B\|} \qquad (*)$$

仍由 $(I-B)(I-B)^{-1}=I$，得

$$(I-B)^{-1}-B(I-B)^{-1}=I$$

移项，得

$$I-(I-B)^{-1}=-B(I-B)^{-1}$$

两边取范数，得

$$\|I-(I-B)^{-1}\| \leqslant \|B\|\,\|(I-B)^{-1}\|$$

由不等式（*）得

$$\|I-(I-B)^{-1}\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}$$

13．设 $A=\begin{bmatrix}100 & 99\\ 99 & 98\end{bmatrix}$，计算$A$的条件数$\mathrm{Cond}(A)_v$ $(v=1,\infty)$

解：先求 A 的逆矩阵，因为 $\det(A)=-1$，所以

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-98 & 99\\ 99 & -100\end{bmatrix}$$

故

$$\mathrm{Cond}(A)_1=\|A\|_1\|A^{-1}\|_1=199\times199$$
$$\mathrm{Cond}(A)_\infty=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=199\times199$$

14．求下面两个方程的解，并利用矩阵的条件数估计$\dfrac{\|\delta X\|}{\|X\|}$

（1）$\begin{bmatrix}240 & -319\\ -179 & 240\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$，即 $Ax=b$；

（2）$\begin{bmatrix}240 & -319.5\\ -179.5 & 240\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$，即 $(A+\delta A)(X+\delta X)=b$

解：（1）$x_1=4$，$x_2=3$；

（2）$x_1=8$，$x_2=6$；取 1-范数，则 $\|\delta X\|_1=|8-4|+|6-3|=7$，$\|X\|_1=4+3=7$，

故 $\dfrac{\|\delta X\|}{\|X\|}=1$。记

$$A=\begin{bmatrix}240 & -319\\ -179 & 240\end{bmatrix}$$

则由 $\|A\|=499$，得

$$A^{-1}=\frac{1}{499}\begin{bmatrix}240 & 319\\ 179 & 240\end{bmatrix}$$

所以 1-范数意义下的条件数为

$$\mathrm{Cond}(A)_1=\|A\|_1\|A^{-1}\|_1=559\times(559/499)=626.2144$$

而

$$\| \delta A \|_1 = 0.5，\| A \|_1 = 559$$

所以

$$\mathrm{Cond}(A)_1 \frac{\| \delta A \|_1}{\| A \|_1} = \| A \|_1 \| A^{-1} \|_1 \frac{\| \delta A \|_1}{\| A \|_1} = 559\times (559/ 499)\times 0.5 /559= 0.5601$$

根据系数矩阵扰动对解的误差估计式，得

$$\frac{\| \delta X \|_1}{\| X \|_1} \le \frac{Cond(A)_1}{1 - Cond(A)_1 \| \delta A \|_1 / \| A \|_1} \frac{\| \delta A \|_1}{\| A \|_1} = \frac{0.5601}{1-0.5601} = 1.2734$$

二、例题

1．设$m\times n$阶矩阵A的各列线性无关，则有$A=QR$，其中R为单位上三角方阵，$Q^TQ=D$为对角阵。

证：因A的各列线性无关，可知A^TA为对称正定矩阵，则必有LDL^T分解，即$A^TA=LDL^T$。记$Q=A(L^T)^{-1}$，从而$A= QL^T$，容易验证

$$Q^TQ=L^{-1}A^TA(L^T)^{-1}=L^{-1}LDL^T (L^T)^{-1}=D$$

令$R=L^T$，则是R单位上三角矩阵，则有$A=QR$成立。

2．若矩阵 A 是 n 阶对称矩阵，则 $\rho(A) = \| A \|_2$。

证明：设λ 是A的任一特征值，由于A对称，故λ^2 是矩阵A^TA的特征值，即

$$\lambda(A^TA) = \lambda(A^2) = [\lambda(A)]^2$$

由 2-范数计算公式

$$\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)} = \sqrt{\max_{1\le j\le m}[\lambda_j(A)]^2} = \max_{1\le j\le n} |\lambda_j(A)| = \rho(A)$$

3．设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为可逆上三角矩阵，证明A^{-1}仍为上三角矩阵，并构造求A^{-1}的算法。

解：由求逆公式 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，其中

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

这里，A_{ij}为a_{ij} 的代数余子式。因为A为上三角矩阵，故当$i > j$ 时，a_{ij}=0，从而$i < j$时，A_{ij}=0，所以A^{-1}是上三角矩阵。

设 A 的逆矩阵为 X，则有 $AX=I$，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

分析右端矩阵的第 k 列向量中前 k 个元素，得等式（k = 1，2，……，n ）

$$a_{kk}x_{kk}=1,\quad \sum_{s=i}^{k}a_{is}x_{sk}=0,（i=k–1，……，1）$$

由于 A 的主对角元不为零，解得

$$x_{kk}=\frac{1}{a_{kk}},\quad x_{ik}=-\frac{1}{a_{ii}}\sum_{s=i+1}^{k}a_{is}x_{sk},（i=k–1，……，1）$$

根据上面公式，得 X 矩阵第 k 列由下向上顺序依次求出的算法

①$x_{11}=1/a_{11}$；$k\leftarrow 1$；$i\leftarrow 1$；

② $k\leftarrow k+1$；$x_{kk}\leftarrow\dfrac{1}{a_{kk}}$；

③ $i\leftarrow i-1$，$x_{ik}\leftarrow -\dfrac{1}{a_{ii}}\sum_{s=i+1}^{k}a_{is}x_{sk}$；

④ 判断，若 $i>1$，则转③，否则转⑤；

⑤ 判断，若 $k<n$，则转②，否则转⑥；

⑥ 输出 x_{ij} ($i=1，2，\cdots，n$；$j=i，i+1，\cdots，n$)，结束。

三、问题

1．给定矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

（1）求 Q 的 2-范数；（2）Q 的 2-范数意义下的条件数；

2．对 n 阶矩阵 A，设 A 的顺序主子式都不为零，试证明消元过程中出现的 Frobenius 矩阵有如下性质

（1） 对于 $k<j$，有 $F_k^{-1}F_j^{-1}=I+m_ke_k^T+m_je_j^T$；

（2） $\boldsymbol{F_1^{-1}F_2^{-1}\cdots F_{n-1}^{-1}=I+m_1e_1^T+m_2e_2^T+\cdots+m_{n-1}e_{n-1}^T}$

3．对任意x，$y\in R^n$，利用向量范数的三角形不等式证明：

$$|\|\boldsymbol{x}\|-\|\boldsymbol{y}\||\le\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|。$$

4．证明矩阵 A 的谱半径与 A 的范数有如下关系

$$\rho(A)\ \leqslant\ \|A\|$$

其中，$\|A\|$为A的任何一种算子范数。

5．设已经给定一个n次多项式$Q(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$，如果某一$n$阶矩阵$A$的特征多项式恰好等于$Q(x)$，则称$A$为$Q$的友阵。试证明$Q$的友阵为

$$A=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{bmatrix}$$

6.设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为可逆下三角矩阵，证明A^{-1}仍为下三角矩阵，并构造求A^{-1}的算法。

7．设 x 是 n 维向量，求证向量范数的等价性

（1）$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$；（2）$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$

8．考虑 n 阶方阵和 n 维向量

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & -1 \\ & & & & 1\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}1 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ \vdots \\ 1/2^{n-1}\end{bmatrix}$$

（1）计算Ax，$\|Ax\|_2$和$\|x\|_2$；

（2）计算$\|A^{-1}\|_\infty$；

（3）计算$Cond_\infty(A)$。

解：（1）$Ax=[1，1，\cdots，1]^T/2^{n-1}$

$$\|Ax\|_2=\frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{n}$$

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}1/2^{2k}}=\sqrt{(1-1/4^n)/(1-1/4)}=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{3}}\sqrt{4^n-1}$$

第四章 习题解答与问题

一、习题解答

1.设方程组

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12,\\ -x_1+4x_2+2x_3=20,\\ 2x_1+3x_2+10x_3=3.\end{cases}$$

(1)考察用 Jacobi 迭代法、G-S 迭代法解此方程组的收敛性.

(2)用 Jacobi 迭代法及 G-S 迭代法解此方程组,要求当$\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|_\infty<10^{-4}$时迭代终止.

解（1）方程组的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}5&2&1\\-1&4&2\\2&3&10\end{bmatrix}$$

是对角占优矩阵，故其 Jacobi 迭代和 G－S 迭代均收敛。

（2）此方程组的 Jacobi 迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\dfrac{2}{5}x_2^{(k)}-\dfrac{1}{5}x_3^{(k)}-\dfrac{12}{5}\\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}x_1^{(k)}-\dfrac{1}{2}x_3^{(k)}+5\\ x_3^{(k+1)}=-\dfrac{1}{5}x_1^{(k)}-\dfrac{3}{10}x_2^{(k)}+\dfrac{3}{10}\end{cases}$$

取初值$x^{(0)}=[0，0，0]^T$进行迭代计算，得近似解为

$$X^{(18)}=(-3.9999964,2.9999739,1.9999999)^T$$

$$\left\|X^{(18)}-X^{(17)}\right\|_\infty\approx 0.414468\times10^{-4}$$

此方程组的 G－S 迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=-\dfrac{2}{5}x_2^{(k)}-\dfrac{1}{5}x_3^{(k)}-\dfrac{12}{5}\\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)}-\dfrac{1}{2}x_3^{(k)}+5\\ x_3^{(k+1)}=-\dfrac{1}{5}x_1^{(k+1)}-\dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)}+\dfrac{3}{10}\end{cases}$$

取初值$x^{(0)}=[0，0，0]^T$进行迭代计算，迭代 8 次达到精度要求，得近似解为

$$X^{(8)}=(-4.000036,2.999985,2.000003)^T$$

$$\left\|X^{(8)}-X^{(7)}\right\|_\infty\approx 0.9155273\times10^{-4}$$

2.设有方程组

$$(1)\ \begin{cases}x_1+0.4x_2+0.4x_3=1,\\ 0.4x_1+x_2+0.8x_3=2,\\ 0.4x_1+0.8x_2+x_3=3.\end{cases}\qquad (2)\ \begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=1,\\ x_1+x_2+x_3=1,\\ 2x_1+2x_2+x_3=1.\end{cases}$$

试考察求解上述方程组的 Jacobi 迭代法及 G-S 迭代法的收敛性.

解：(1)

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.4\\ 0.4 & 1 & 0.8\\ 0.4 & 0.8 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B_J}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-0.4} & \mathbf{-0.4}\\ \mathbf{-0.4} & \mathbf{0} & \mathbf{-0.8}\\ \mathbf{-0.4} & \mathbf{-0.8} & \mathbf{0}\end{bmatrix},\ B_{G-S}=\begin{bmatrix}0 & -0.4 & -0.4\\ 0 & 0.16 & -0.64\\ 0 & 0.032 & 0.672\end{bmatrix}$$

$\rho(B_J)$=1.0928，$\rho(B_{G-S})$=0.6283。所以，Jacobi 迭代法不收敛，而 G-S 迭代法收敛。

(2) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$，$B_J=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix}$，$B_{G-S}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$\rho(B_J)$=1.2604e-005，$\rho(B_{G-S})$=2。所以，Jacobi 迭代法收敛，而 G-S 迭代法不收敛。

3．设 $A=(a_{ij})_{2\times2}$，为二阶矩阵，且 $a_{11}a_{22}\neq0$，试证明求解方程组 $Ax=b$ 的Jacobi迭代及Gauss-Seidel迭代法同时收敛或发散。

证明：设 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$，则

$$B_J=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0\end{bmatrix},\quad B_{G-S}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\\ 0 & \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I-B_J|=\begin{vmatrix}\lambda & \dfrac{a_{12}}{a_{11}}\\ \dfrac{a_{21}}{a_{22}} & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\ \rightarrow\ \lambda^2=\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$$

所以 $\rho(B_J)<1\ \Leftrightarrow\ \left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$

$$|\lambda I-B_{G-S}|=\begin{vmatrix}\lambda & \dfrac{a_{12}}{a_{11}}\\ 0 & \lambda-\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}})\quad\rightarrow\quad\lambda=0\ \text{或}\ \lambda=\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$$

所以 $\rho(B_J)<1\ \Leftrightarrow\ \left|\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right|<1$。由此可得 $\rho(B_J)<0\Leftrightarrow\rho(B_{G-S})<1$，即两种迭代法同时收敛或同时发散。

4．设线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{2}\\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \boldsymbol{a}\end{bmatrix}$$

试求能使 Jacobi 迭代收敛的 a 的取值范围。

解：当 $a\neq0$ 时 Jacobi 迭代矩阵为

$$B_J=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{a} & -\frac{3}{a}\\ -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{2}{a}\\ \frac{3}{a} & -\frac{2}{a} & 0\end{bmatrix}，\ |\lambda I-B_J|=\begin{vmatrix}\lambda & \frac{1}{a} & \frac{3}{a}\\ \frac{1}{a} & \lambda & \frac{2}{a}\\ -\frac{3}{a} & \frac{2}{a} & \lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=0，\ \lambda_{2,3}=\pm\frac{2\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{a}}$$

当 $a<-2$ 或 $a>2$ 时 Jacobi 迭代法收敛。

5.设有方程组 $Ax=b$，其系数矩阵主对角元 $a_{ii}\neq 0$ （$i=1，2，\cdots，n$）。

（1） 证明解方程组的 Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{11}\lambda & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22}\lambda & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn}\lambda\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

的根满足 $|\lambda|<1$。

（2） 证明解方程组的 Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{11}\lambda & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n}\\ \boldsymbol{a}_{21}\lambda & \boldsymbol{a}_{22}\lambda & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{a}_{n1}\lambda & \boldsymbol{a}_{n2}\lambda & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn}\lambda\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

的根满足 $|\lambda|<1$。

（1）证明：将系数矩阵分解，使得$A=D-L-U$，其中，$D=diag(a_{11}，a_{22}，\cdots，a_{nn})$是$A$的主对角元组成的对角矩阵，$L=(l_{ij})_{n\times n}$，和$U=(u_{ij})_{n\times n}$分别是下三角矩阵和上三角矩阵于是Jacobi迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_J=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$$

该矩阵的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_J|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})|=|\boldsymbol{D}^{-1}(\lambda\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}))|$$

所以，特征值满足

$$|\lambda\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})|=\mathbf{0}$$

即

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{11}\lambda & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n}\\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22}\lambda & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{a}_{n1} & \boldsymbol{a}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{nn}\lambda\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

所以迭代法收敛的充要条件是上面高次方程的根模$|\lambda|<1$。

（2）证明：将系数矩阵分解，使得 $A=D-L-U$，于是 G-S 迭代法的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_{G-S}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$$

该矩阵的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_{G-S}|=|\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}|=|(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}(\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U})|$$

所以，特征值满足

$$|\lambda(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}|=\mathbf{0}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \cdots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

所以迭代法收敛的充要条件是上面高次方程的根模$|\lambda|<1$。

6.用 SOR 方法解方程组(分别取松弛因子$\omega=1.03,\omega=1,\omega=1.1$)

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ -x_1-4x_2-x_3=4, \\ -x_1+4x_3=-3. \end{cases}$$

精确解$X^*=(\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})^T$,要求当$\|X^*-X^{(k)}\|_\infty<5\times10^{-6}$时迭代终止,并且对每一个$\omega$值确定迭代次数.

解：将所给方程变形为

$$\begin{cases} x_1=1-x_2-x_3, \\ x_2=1-\frac{1}{4}x_1-\frac{1}{4}x_3, \\ x_3=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x_2 \end{cases}$$

其 SOR 迭代法为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=(1-\omega)x_1^{(k)}+\omega(1-x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)}=(1-\omega)x_2^{(k)}+\omega(1-\frac{1}{4}x_1^{(k+1)}-\frac{1}{4}x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)}=(1-\omega)x_3^{(k)}+\omega(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

$$(\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

取$\omega=1.03$，初值$X^{(0)}=(0,0,0)^T$，迭代 5 次达到精度要求，

$$X^{(5)}=(0.5000043,0.1000001,-0.499999)^T$$

取$\omega=1$，初值$X^{(0)}=(0,0,0)^T$，迭代 6 次达到精度要求，

$$X^{(6)}=(0.5000038,0.1000002,-0.499995)^T$$

取$\omega=1.1$，初值$X^{(0)}=(0,0,0)^T$，迭代 6 次达到精度要求，

$$X^{(6)}=(0.500035,0.0999989,-0.5000003)^T。$$

7． SOR 方法解方程组(取$\omega=0.9$)

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3=-12,\\-x_1+4x_2+2x_3=20,\\2x_1-3x_2+10x_3=3.\end{cases}$$

要求当 $\left\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\right\|_\infty<10^{-4}$ 时迭代终止.

解　解次方程的 SOR 迭代法为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=(1-\omega)x_1^{(k)}+\omega(-\dfrac{12}{5}-\dfrac{2}{5}x_2^{(k)}-\dfrac{1}{5}x_3^{(k)}),\\x_2^{(k+1)}=(1-\omega)x_2^{(k)}+\omega(5+\dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)}-\dfrac{1}{2}x_3^{(k)})\\x_3^{(k+1)}=(1-\omega)x_3^{(k)}+\omega(\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{5}x_1^{(k+1)}+\dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)})\end{cases}$$

$$k=0,1,2,\cdots\cdots$$

当 $\omega=0.9$ 时，迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=0.1x_1^{(k)}+0.9(-\dfrac{12}{5}-\dfrac{2}{5}x_2^{(k)}-\dfrac{1}{5}x_3^{(k)}),\\x_2^{(k+1)}=0.1x_2^{(k)}+0.9(5+\dfrac{1}{4}x_1^{(k+1)}-\dfrac{1}{2}x_3^{(k)})\\x_3^{(k+1)}=0.1x_3^{(k)}+0.9(\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{5}x_1^{(k+1)}+\dfrac{3}{10}x_2^{(k+1)})\end{cases}$$

取初值 $X^{(0)}=(0,0,0)^T$，代入进行计算得

$$X^{(8)}=(-4.000027,0.2999987,0.2000003)^T。$$

8． 有方程组 $Ax=b$,其中 A 为对称正定阵,且有迭代公式

$$\boldsymbol{X^{(k+1)}=X^{(k)}+\omega(b-AX^{(k)})}\quad(k=1，2，\cdots\cdots)$$

讨论使迭代序列收敛的 ω 的取值范围.

解：因为

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}+\omega(b-AX^{(k)})\qquad(*)$$

即

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}+\omega b-\omega AX^{(k)}=(I-\omega A)X^{(k)}+\omega b$$

迭代矩阵为 $\boldsymbol{B=I-\omega A}$，设 A 的特征值为 λ，因 A 对称正定，故 $\lambda>0$，则 B 矩阵的特征多项式为

$$|\boldsymbol{\mu I-B}|=|(\boldsymbol{\mu-1)I+\omega A}|$$

显然，B 矩阵的特征值为 $\mu=\mathbf{1}-\omega\lambda$，由 $|\mu|<\mathbf{1}$ 解得：$\mathbf{0}<\omega<\mathbf{2}/\lambda$。

设 $\rho(A)=\lambda_1$，则当 $0<\omega<\dfrac{2}{\rho(A)}$ 时，$\rho(I-\omega A)<1$，当然，$0<\omega<\dfrac{2}{\|A\|}$ 时，也有

$$\rho(I-\omega A)<1$$

此时迭代序列(*)式收敛。

二、例题

1．求证，若 A 是严格主对角占优矩阵，则求解方程组 $AX=b$ 的高斯-赛德尔迭代法收敛。

证明：高斯-赛德尔迭代矩阵为 $(D-L)^{-1}U$，该矩阵的特征方程为

$$|\lambda I-(D-L)^{-1}U|=0$$

由于$|(D-L)^{-1}|\neq 0$，故特征方程可化为

$$|\lambda(D-L)-U|=0$$

左端的行列式对应的矩阵为

$$C(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn}\end{bmatrix}$$

当$|\lambda|>1$ 时，利用 A 矩阵的主对角占优性质，得

$$|\lambda a_{ii}|=|\lambda|\times|a_{ii}|>|\lambda|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|\lambda|\times|a_{ij}|\geq\sum_{j=1}^{i-1}|\lambda a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|$$

故 $C(\lambda)$也是严格主对角占优矩阵。由于严格主对角占优矩阵的行列式不为零，故λ不是特征方程

$$|\lambda(D-L)-U|=0$$

的根。所以当A是严格主对角占优矩阵时，$(D-L)^{-1}U$的特征值必然满足：$|\lambda|<1$，从而高斯-赛德尔迭代矩阵普半径小于 1，迭代法收敛。

2．设 A 是一个可逆矩阵，矩阵序列满足

$$X_{k+1}=X_k(2I-AX_k)，(k=0，1，2，\cdots\cdots)$$

证明当 $\rho(I-AX_0)<1$时，$\lim\limits_{k\to\infty}X_k=A^{-1}$。

证明：由$X_{k+1}=X_k(2I-AX_k)$，得

$$I-AX_{k+1}=I-AX_k(2I-AX_k)=(I-AX_k)^2$$

于是

$$\begin{aligned}I-AX_k&=(I-AX_{k-1})^2\\ &=(I-AX_{k-2})^{2\times 2}\\ &=\cdots\cdots\\ &=(I-AX_0)^{2^k}\end{aligned}$$

解得

$$X_k=A^{-1}[I-(I-AX_0)^{2^k}]，(k=0，1，2，\cdots\cdots)$$

当 $\rho(I-AX_0)<1$时

$$\lim_{k\to\infty}(I-AX_0)^{2^k}=0$$

因而，$\lim\limits_{k\to\infty}X_k=\lim\limits_{k\to\infty}A^{-1}[I-(I-AX_0)^{2^k}]=A^{-1}$

3．证明，当$|\lambda|<1$ 时，二阶约当块

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{bmatrix}$$

的方幂J^m极限值为零。

证明：由于

$$J^2=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 2\lambda\\ & \lambda^2\end{bmatrix}$$

假设

$$J^k=\begin{bmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ & \lambda^k\end{bmatrix}$$

则有

$$J^{k+1}=\begin{bmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ & \lambda^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k\\ & \lambda^{k+1}\end{bmatrix}$$

由数学归纳法知

$$J^m=\begin{bmatrix}\lambda^m & m\lambda^{m-1}\\ & \lambda^m\end{bmatrix}$$

而$|\lambda|<1$，故 $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda^m=0$。所以 $\lim\limits_{m\to\infty}J^m=0$。

三、问题

1．设 A 是 n 阶可逆矩阵，有 A 的一个近似逆 D，令 $R=I-AD$ ，如果 $\|R\|\le q<1$ ，试证明

（1）$A^{-1}=D(I+R+R^2+\cdots\cdots)$；

（2）任意给定n阶矩阵X_0，由迭代格式$X_{k+1}=X_kR+D$ （$k=0$，1，2，…… ）产生的矩阵序列$\{X_k\}$收敛到矩阵A^{-1}；

（3）对矩阵序列$\{X_k\}$，有误差估计式

$$\|X_k-A^{-1}\|\le\frac{q}{1-q}\|X_k-X_{k-1}\|$$

2．给定线性方程组 $AX=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$$

用迭代公式：$X^{(k+1)}=X^{(k)}+\omega(b-AX^{(k)})$求解方程组时，$\omega$ 取多大可使迭代收敛最快？

3．设n阶方阵A有n个正的实特征值：$\lambda_1>\lambda_2>\cdots\cdots>\lambda_n$。Richardson迭代公式为

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}+\omega(b-AX^{(k)})$$

试证明：

（1）当 $0<\omega<2/\lambda_1$时，迭代公式收敛；

（2）ω 最佳取值为 $2/(\lambda_1+\lambda_n)$；对应的最佳谱半径为 $\rho=(\lambda_1-\lambda_n)/(\lambda_1+\lambda_n)$

4．证明，A 是严格对角占优矩阵，则 A 的行列式不为零。

5．证明，当$|\lambda|<1$ 时，三阶约当块

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{bmatrix}$$

的方幂J^m极限值为零。

6．将方程组 $Ax=b$ 中的系数矩阵 A 分裂为 $A=D-L-U$。证明：Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代格式可以写成如下形式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}(b - A\,x^{(k)})$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (D - L\,)^{-1}(b - A\,x^{(k)})$$

7．设 A 是对称矩阵，将 A 分裂为 $A = D - L - U$。Gauss-Seidel 迭代格式的向前和向后两种形式分别为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (D - L\,)^{-1}(b - A\,x^{(k)})$$
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (D - U\,)^{-1}(b - A\,x^{(k)})$$

如果将向前和向后迭代格式交替进行，则有

$$x^{(k+2)} = x^{(k)} + M^{-1}(b - A\,x^{(k)})$$

试证明：$M^{-1} = (D - U)^{-1}D(D - L)^{-1}$。

8．设 $h = 1/(n+1)$，证明 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2-h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2-h^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2-h^2 & -1 \\ & & & -1 & 2-h^2 \end{bmatrix}$$

是对称正定矩阵。

第五章 习题解答与问题

一、习题解答

1．求经过 $A(0，1)$，$B(1，2)$，$C(2，3)$三个样点的插值多项式

解：令$x_0 = 0$，$x_1 = 1$，$x_2 = 2$，则有$f(x_0)=1$，$f(x_1)=2$，$f(x_2)=3$，由Lagrange二次插值公式

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \times 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \times 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \times 3 = x+1$$

2．已知函数 $y = f(x)$的数据如下表

x	0	1	2	3
y	1	3	9	27

试作一个三次插值多项式$P_3(x)$,利用$P_3(x)$计算 $\sqrt{3}$

解：令$x_k = k$ $(k = 0，1，2，3)$，则根据函数表有$f(x_k)= 3^k$。构造差商表

x	$f(x)$			
0	1			
1	3	2		
2	9	6	2	
3	27	18	6	4/3

根据 Newton 插值公式

$$P_3(x) = 1 + 2x + 2x(x-1) + \frac{4}{3}x(x-1)(x-2)$$

$$= 1 + x\{2 + (x-1)[2 + \frac{4}{3}(x-2)]\}$$

由于被插值函数 $f(x) = 3^x$，故取 $x = 1/2$，便得

$$\sqrt{3} \approx P_3(1/2) = 1 + \frac{1}{2}\{2 + (\frac{1}{2} - 1)[2 + \frac{4}{3}(\frac{1}{2} - 2)]\} = 2$$

3．已知函数 $y = f(x)$的数据如下表

x	-1	0	1
y	-1	0	1
y'		0	

解：由于x=0 是二重零点，令$H_3(x)= x^2(a\,x + b\,)$。又由$H_3(-1)= -1$，$H_3(1)=1$ 得方程组

$$\begin{cases} b-a=-1 \\ a+b=1 \end{cases}$$ 解之：$a=1$，$b=0$

所以，$H_3(x)=x^3$。

4．设被插值函数$f(x)$在区间$[x_0, x_1]$上具有 2 阶连续导数，求证：两点线性插值函数$L(x)$的误差界满足不等式

$$|R(x)| \le \max_{x_0 \le x \le x_1} |f''(x)| \frac{(x_1-x_0)^2}{8}$$

证：由拉格朗日插值误差定理，得

$$R(x)=f(x)-L(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

令$h(x)=(x-x_0)(x-x_1)$，求导数并令其为零，可得极值点$x^*=0.5\times(x_0+x_1)$。显然这是函数$|h(x)|$在所讨论区间内的最大值点，故

$$|R(x)| \le \max_{x_0 \le x \le x_1} |f''(x)| \frac{(x_1-x_0)^2}{8}$$

5．若给出 $\sin x$ 在区间$[0,\pi]$上的等距结点的数值表，用线性插值计算表中没有的数据时，希望截断误差小于 5×10^{-3}，问函数表中自变量数据的步长应取多少为好？

解：设应取的步长为 h，利用第 4 题的结论，只须

$$\frac{h^2}{8} \le 5\times10^{-3}$$

所以，应取 $h=0.2$。

6．常用对数表中，只能查出 $\lg N$ 的值，其中N 是具有形式：$a_1a_2a_3.a_4$ 的实数。试研究线性插值计算近似值的误差界。

解：由 N 的取值形式可知，对数表中函数自变量取值的步长为 $h=0.1$。而

$$(\lg x)''=-\frac{1}{x^2\ln 10}$$

由第 4 题结论，线性插值计算近似值的误差界

$$|R(N)| \le \frac{0.01}{8[N]^2\ln 10}$$

7．证明两点三次 Hermite 插值余项是

$$R_3(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2, \qquad \xi\in(x_k, x_{k+1})$$

并由此求出分段三次 Hermite 插值的误差限.

证明：由插值条件知

$R(x_k)=R'(x_k)=0,\ R(x_{k+1})=R'(x_{k+1})=0$

取x异于x_k和x_{k+1}，设$R(x) = f(x) - H(x)=C(x)(x - x_k)^2(x - x_{k+1})^2$ 构造辅助函数，

$$F(t) = f(t) - H(t) - C(x)(t - x_k)^2(t - x_{k+1})^2$$

显然，$F(t)$有三个零点x_k, x, x_{k+1},由Roll定理知,存在$F'(t)$的两个零点t_0,t_1 满足$x_k<t_0<t_1<x_{k+1}$,

而x_k和x_{k+1} 也是$F'(x)$的零点,故$F'(x)$至少有四个相异零点．反复应用Roll定理,得$F^{(4)}(t)$至少有一个零点设为ξ。由此得

$$F^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - C(x)4! = 0$$

所以，$C(x) = \dfrac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)$，故 $R(x) = \dfrac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - x_k)^2(x - x_{k+1})^2$

对于等距离节点（步长取为 h），分段 Hermite 插值的误差余项为

$$|R(x)| \le \frac{1}{4!} \max | f^{(4)}(\xi)(x - x_k)^2(x - x_{k+1})^2 |$$

8．求一个次数不高于 4 次的多项式 $P(x)$,使它满足:$P(0)=0$，$P'(0)=0$，$P(1)=1$，$P'(1)=1$，$P(2)=1$，并写出其余项表达式．

解：由题意 $P(x) = x^2(ax^2 + bx + c)$，由插值条件得方程组

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ 4a + 3b + +2c &= 1 \\ 4(4a + 2b + c) &= 1 \end{aligned}$$

求解，得 $a=1/4$，$b=-3/2$，$c=9/4$。所以

$$P(x) = x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right)$$

插值余项为 $R(x) = \dfrac{1}{5!} f^{(5)}(\xi)x^2(x - 1)^2(x - 2)$

9．设 $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$，在$-5\le x\le 5$ 上取 $n = 10$，按等距结点求分段线性插值函数$I_h(x)$，

计算各结点间中点处的$I_h(x)$和$f(x)$ 的值，并估计误差。

解：因为 $f(x_k) = 1/(1+ k^2)$，$(k = -5$，…，-1，0，1，…，$5)$分段线性插值函数为

$$I_h(x) = \sum_{k=-5}^{5} l_k(x)\frac{1}{1 + k^2}$$

其中，分段线性插值的基函数为

$$l_k(x)=\begin{cases} x-x_{k-1}, & x\in(x_{k-1},x_k) \\ x_{k+1}-x, & x\in(x_k,x_{k+1}) \\ 0\quad, & x\notin(x_{k-1},x_{k+1}) \end{cases}$$

对于某一节点中点$x_{k0}=(x_k+x_{k+1})/2=k+0.5$，于是

$$f(x_{k0})=\frac{1}{1+(k+0.5)^2},\quad I_h(x_{k0})=0.5\left(\frac{1}{1+k^2}+\frac{1}{1+(k+1)^2}\right)$$

因为

$$R_1(x)=f(x)-I_h(x)=\frac{f''(\xi_k)}{2}(x-x_k)(x-x_{k+1})$$

所以

$$|R_1(x)|=|f(x)-I_h(x)|\le\frac{1}{2}\max|f''(x)|\frac{h}{2}\frac{h}{2}=\frac{h^2}{8}\max|f''(x)|$$

10．已知二元函数$u(x,y)$在四个点$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_1)$，$P_3(x_2,y_2)$，$P_4(x_1,y_2)$处的函数值为u_1，u_2，u_3，u_4，试推导双线性插值函数

$$u_h(x,y)=a+bx+cy+dxy$$

的表达式。

解：令$w=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$，$v=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$，则利用基函数得

$$u_h(w,v)=(1-w)(1-v)u_1+w(1-v)u_2+wvu_3+(1-w)vu_4$$

所以，有

$$u_h(x,y)=\frac{(x_2-x)(y_2-y)}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}u_1+\frac{(x-x_1)(y_2-y)}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}u_2+\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}u_3+\frac{(x_2-x)(y_2-y)}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}u_4$$

二、例题

1．在代数插值问题中，x_0，x_1，……，x_n是$(n+1)$个互异的插值结点，由这$(n+1)$个结点构造拉格朗日插值基函数

$$l_0(x),\ l_1(x),\ \cdots\cdots,\ l_n(x)$$

试证明恒等式：$l_0(x)+l_1(x)+\cdots\cdots+l_n(x)=1$。

证明：记$P(x)=l_0(x)+l_1(x)+\cdots\cdots+l_n(x)-1$，由于拉格朗日基函数在插值结点处满足

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\ne k\end{cases}$$

故对所有插值结点有

$$l_0(x_k)+l_1(x_k)+\cdots\cdots+l_n(x_k)=1,\ (k=0,1,2,\cdots\cdots,n)$$

所以，有$(n+1)$个等式

$$P(x_k)=0，(k=0，1，2，\cdots\cdots，n)$$

成立。而 $P(x)$是 n 次多项式，由上可知它有$(n+1)$个不同的零点，故根据代数基本定理知，必有 $P(x)=0$ 成立。即

$$l_0(x)+l_1(x)+\cdots\cdots+l_n(x)=1$$

2．设$f(x)$是$(n+1)$次多项式且最高次项系数为 1，取互异的插值结点x_0，x_1，……，x_n，构造插值多项式$P_n(x)$，试证明：$f(x)=P_n(x)+(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$。

证明：由拉格朗日插值公式，得

$$f(x)=l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+\cdots+l_n(x)f(x_n)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中，$\omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$。由于$f(x)$是$(n+1)$次多项式且最高次项系数为 1，故它的$(n+1)$阶导数为$(n+1)!$，拉格朗日插值余项为$\omega_n(x)$，记插值多项式

$$P_n(x)=l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+\cdots+l_n(x)f(x_n)$$

故有$f(x)=P_n(x)+\omega_n(x)$，即

$$f(x)=P_n(x)+(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$$

3．利用牛顿插值公式推导 3 次幂和公式：$P(n)=\sum_{k=1}^{n}k^3$。

解：计算 $P(n)$的前七个初值如下

n	1	2	3	4	5	6	7
$P(n)$	1	9	36	100	225	441	784

构造差商表

n	$P(n)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商	五阶差商
1	1					
2	9	8				
3	36	27	19/2			
4	100	64	37/2	3		
5	225	125	61/2	4	1/4	
6	441	216	91/2	5	1/4	0
7	784	343	127/2	6	1/4	0

由于五阶以上的差商全部为零，根据牛顿插值公式，得

$$P(n)=1+8(n-1)+\frac{19}{2}(n-1)(n-2)+3(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$+\frac{1}{4}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

整理，得

$$P(n)=1+(n-1)(8+(n-2)(\frac{19}{2}+(n-3)(3+(n-4)/4)))$$

$$=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\frac{n^2}{4}(n+1)^2=[\frac{n}{2}(n+1)]^2$$

4．设x_0，x_1，……，x_n是$(n+1)$个互异的插值结点，$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$，而$P(x)$为次数不超过$n$的多项式，求证有理函数可分解为部分分式，即

$$\frac{P(x)}{\omega(x)}=\sum_{j=0}^{n}\frac{A_j}{x-x_j}$$

其中，A_0，A_1，……，A_n都是常数。

证明：以x_0，x_1，……，x_n为插值结点，构造$P(x)$的插值函数。因为$P(x)$是次数不超过n的多项式，由插值余项定理知

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n}l_j(x)P(x_j)$$

而

$$l_j(x)=\frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)}$$

所以

$$\frac{P(x)}{\omega(x)}=\frac{1}{\omega(x)}\sum_{j=0}^{n}\frac{\omega(x)}{(x-x_j)\omega'(x_j)}P(x_j)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(x-x_j)}\frac{P(x_j)}{\omega'(x_j)}$$

记$A_j=\dfrac{P(x_j)}{\omega'(x_j)}$（$j=0$，1，…，$n$），则$A_0$，$A_1$，……，$A_n$都是常数，且有

$$\frac{P(x)}{\omega(x)}=\sum_{j=0}^{n}\frac{A_j}{x-x_j}$$

5．设x_0，x_1，……，x_n是$(n+1)$个互异的插值结点，$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$，试证明$n$阶差商的函数值表达式

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$$

证明：拉格朗日插值基函数可写为：$l_k(x)=\dfrac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$，由

$$L_n(x)=l_0(x)f(x_0)+l_1(x)f(x_1)+\cdots+l_n(x)f(x_n)$$

知，$L_n(x)$中x^n的系数为：$\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$，而牛顿插值公式中$x^n$的系数为$f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$，

由插值函数的唯一性知，拉格朗日插值函数与牛顿插值函数相等。对比x^n的系数，便有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$$

三、问题

1．在代数插值问题中，x_0，x_1，……，x_n是$(n+1)$个互异的插值结点，由这$(n+1)$个插值结点构造拉格朗日插值基函数

$$l_0(x)，l_1(x)，\cdots\cdots，l_n(x)$$

试证明恒等式：

$$x_0^k l_0(x)+x_1^k l_1(x)+\cdots\cdots+x_n^k l_n(x)=x^k，(k=1，2，\cdots\cdots，n)$$

2．设$f(x)$是n次多项式，取$(n+1)$个互异的插值结点x_0，x_1，……，x_n，构造插值多项式$P_n(x)$，试证明恒等式：$f(x) = P_n(x)$ 。

3．利用$\sqrt{100}=10$，$\sqrt{121}=11$，构造线性插值函数计算$\sqrt{115}$的近似值，估计近似值的误差并指出有效数位数。

6．证明一阶差商的对称性：$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$，进一步证明二阶差商的对称性。

7．证明n阶差商$f[x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n]$ 具有对称性，即对于x_0，x_1，……，x_n的任意一种排列x_{j0}，x_{j1}，……，x_{jn}，都有

$$f[x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n]=f[x_{j0}, x_{j1}, \cdots\cdots, x_{jn}]$$

8．设x_0，x_1，……，x_n，是互异的插值结点，记$\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，

$F_{nk}(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x-x_j)$，$l_k(x)$ 为第k个拉格朗日插值基函数，试证明：

(1) $\omega_n'(x_k)=F_{nk}(x_k)$；(2) $l_k(x)=\frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)}$

9．将有理函数$\frac{3x^2+x+1}{x^3-6x^2+11x-6}$表示为部分分式的和

$$\frac{a_0}{x-x_0}+\frac{a_1}{x-x_1}+\frac{a_2}{x-x_2}$$

10． 设x_0，x_1，……，x_n ($n>2$) 是互异的插值结点，对于$f(x) = x^2$，试计算该函数的一阶、二阶和三阶差商。

10．设x_0，x_1，……，x_n 是互异的插值结点，$l_0(x)$ 为对应于x_0的拉格朗日插值基函数，试证明

$$l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\cdots+\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}$$

进一步分析其它的拉格朗日插值基函数的牛顿插值表达式。

11．利用牛顿插值公式求 2 次幂和：$P(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2$.

12．已知函数 $f(x)\in C[-1，1]$，构造线性插值函数时，利用切比雪夫结点做插值结点会使插值余项绝对值更小，试求出区间[–1，1]上的切比雪夫结点。

13．考虑三个插值条件构造 2 次埃尔米特函数的存在唯一性问题，给定插值条件：$f(x_0)=y_0$，$f'(x_1)=m_1$，$f(x_2)=y_2$，插值结点应满足什么条件能使插值问题有唯一解。

14．构造带导数条件的二次插值多项式公式

（1）$f(0)=y_0$，$f(1)=y_1$，$f'(0)=m_0$；

（2）$f(0)=y_0$，$f(1)=y_1$，$f'(1)=m_1$；

第六章 习题解答与问题

一、习题解答

1．用最小二乘法求解超定方程组

$$\begin{cases} 2x+4y=11 \\ 3x-5y=3 \\ x+2y=6 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$$

解：超定方程组的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

将方程两端同乘以系数矩阵的转置矩阵，可得正规方程组

$$\begin{bmatrix} 30 & 3 \\ 3 & 49 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 93 \\ 69 \end{bmatrix}$$

解之，得 $x = 2.9774$，$y = 1.2259$。

2．观测一个作直线运动的物体，测得以下数据：

时间 t	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 S	0	10	30	50	80	110

在表中，时间单位为秒，距离单位为米。假若加速度为常数，求这物体的初速度和加速度。

解：设物体运动的初速度和加速度分别为v_0和a，初始时刻距离为 0，则距离函数为

$$S(t)=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

用后 5 个点的数据作曲线拟合

t	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
S	10	30	50	80	110

可得，$v_0 =$ 10.6576，$a =$ 4.6269

3．用最小二乘法求一个形如 $y = A e^{Bx}$ 的经验公式，使与下列数据相拟合

x	1	2	3	4
y	60	30	20	15

解：令 $z = \ln y$，则 $z = \ln A + Bx$。数据变换如下

x	1	2	3	4
$z = \ln y$	4.0943	3.4012	2.9957	2.7081

由最小二乘法作线性拟合得，$\ln A = 4.4409$，$B = -0.4564$。所以 A =84.8528。故，所求经难公式为 $= 84.25\, e^{-0.4564x}$ 。

4 已知实验观测数据$(x_i，y_i)$ （$i = 1，2，\cdots，m$)。令

$$\varphi_0(x)=1，\varphi_1(x)=x-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i$$

取拟合函数为

$$\varphi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)$$

试利用曲线拟合的最小二乘法确定组合系数 a_0，a_1 （推导出计算公式）。

解：记

$$\vec{\varphi}_0=[\varphi_0(x_1)\quad \varphi_0(x_2)\quad \cdots\quad \varphi_0(x_m)]^T$$
$$\vec{\varphi}_1=[\varphi_1(x_1)\quad \varphi_1(x_2)\quad \cdots\quad \varphi_1(x_m)]^T$$
$$\vec{y}=[y_1\quad y_2\quad \cdots\quad y_m]^T$$

显然，$\vec{\varphi}_0$ 是元素全为“1”的列向量。将所有实验数据的 X 坐标代入拟合函数，并令其分别等于实验数据的 Y 坐标值，得超定方程组

$$[\vec{\varphi}_0\quad \vec{\varphi}_1]\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\vec{y}$$

将方程组两端同乘以矩阵$[\vec{\varphi}_0\quad \vec{\varphi}_1]^T$，得正规方程组

$$\begin{bmatrix}(\vec{\varphi}_0,\vec{\varphi}_0) & (\vec{\varphi}_0,\vec{\varphi}_1)\\ (\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_0) & (\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_{10})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\vec{\varphi}_0,\vec{y})\\ (\vec{\varphi}_1,\vec{y})\end{bmatrix}$$

记 $\bar{x}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i$，由于系数矩阵中两个非对角元素为

$$(\vec{\varphi}_0,\vec{\varphi}_1)=(\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_0)=\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{m}x_i-m\bar{x}=0$$

所以

$$a_0=\frac{(\vec{\varphi}_0,\vec{y})}{(\vec{\varphi}_0,\vec{\varphi}_0)}，\quad a_1=\frac{(\vec{\varphi}_1,\vec{y})}{(\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_1)}$$

5．对某个物体的长度测量n次后，得n个近似值 x_1，x_2，……x_m，通常取平均值作为所求长度的值。试用最小二乘法原理说明其理由。

解：利用最小二乘原理，设物体的长度为 x，记

$$\delta_k=x-x_k\ (k=1，2，\cdots\cdots，m)$$

则残差平方和为

$$\boldsymbol{S(x)=\sum_{k=1}^{m}(x-x_k)^2}$$

为了求上面函数极小值，由极值必要条件，令 $S'(x)=0$，得

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{m}(x-x_k)=0}$$

由此得

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}x_k}$$

6．求 $f(x)=e^x$ 在区间[–1，1]上的三次最佳逼近多项式。

解：利用勒让德多项式作基函数，即 $P(x)=a_0\,p_0(x)+a_1\,p_1(x)+a_2\,p_2(x)+a_3\,p_3(x)$，其

中

$$p_0(x)=1，p_1(x)=x，$$

$$p_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}，\quad p_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$$

利用正交性，得系数为

$$a_n=\frac{(p_n,f)}{(p_n,p_n)}=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}p_n(x)f(x)dx\ (n=0，1，2，3)$$

而

$$\int_{-1}^{1}p_0(x)f(x)dx=\int_{-1}^{1}e^x dx=e-e^{-1}$$

$$\int_{-1}^{1}p_1(x)f(x)dx=\int_{-1}^{1}xe^x dx=2e^{-1}$$

$$\int_{-1}^{1}p_2(x)f(x)dx=\int_{-1}^{1}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})e^x dx=e-7e^{-1}$$

$$\int_{-1}^{1}p_3(x)f(x)dx=\int_{-1}^{1}(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)e^x dx=37e^{-1}-5e$$

$$a_0=\frac{1}{2}\times(e-e^{-1})\approx 1.1752，\quad a_1=\frac{3}{2}\times 2e^{-1}\approx 1.1036，$$

$$a_2=\frac{5}{2}\times(e-7e^{-1})\approx 0.3578，\quad a_3=\frac{7}{2}\times(37e^{-1}-5e)\approx 0.0705$$

所以，

$$P(x)=1.1752+1.1036\,x+0.3578(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})+0.0705(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x)$$

$$=0.9963+0.9978\,x+0.5367\,x^2+0.1762\,x^3$$

7．在著名的高次插值的龙格反例中，$f(x)=\dfrac{1}{5+x^2}$ 在区间[–5，5]上的 10 次拉格朗日插值出现振荡现象。为了使插值余项极小化，可以利用切比雪夫多项式的极性。试推导 11 次切比雪夫多项式零点所对应[–5，5]的上的插值结点。

解：由 11 次切比雪夫多项式零点，得

$$x_k=5\cos(\frac{2k+1}{11}\frac{\pi}{2})\ (k=0，1，2，\cdots\cdots，10)$$

二、例题

1．已知实验数据如下：

X	1	2	3	4
Y	10	30	50	80

求二次多项式拟合函数$P(x)=a+b\,x^2$

2．利用数据表

t	–2	–1	0	1	2
y	y_{k-2}	y_{k-1}	y_k	y_{k+1}	y_{k+2}

构造五点二次拟合函数$P(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$时，需求超定方程组的最小二乘解，试列出超定方程组并导出对应的正规方程组（不用求解正规方程组）。

解：$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{k-2} \\ y_{k-1} \\ y_k \\ y_{k+1} \\ y_{k+2} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

其中，$b_1 = y_{k-2} + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + y_{k+2}$，$b_2 = -2y_{k-2} - y_{k-1} - y_{k+1} + 2y_{k+2}$，
$b_3 = 4y_{k-2} + y_{k-1} + y_{k+1} + 4y_{k+2}$
3.
练习题
1．设B点是线段AC上的一点，记AB长为x_1，BC长为x_2，经测量得数据如下：

AB=15.5，BC=6.1，AC=20.9

试用最小二乘原理计算出 x_1，x_2的长度。

2．求 a，b 使$\int_0^{\pi/2}[ax+b-\sin x]^2 dx$ 最小。

3．已知插值条件：$H(x_0)=y_0$，$H(x_1)=y_1$，$H'(x_1)=m_0$，$H(x_2)=y_2$，为了求三次插值函数，根据拉格朗日插值的思想，写出的四个基函数满足的插值表，并分别求出四个三次基函数。

习题七　习题解答与问题

一、习题解答

1．对给定的结点x_0，x_1，插值型求积公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

试证明：求积系数为

$$A_0 = \frac{b-a}{x_1-x_0}(x_1 - \frac{a+b}{2}),\quad A_1 = \frac{b-a}{x_1-x_0}(\frac{a+b}{2} - x_0)$$

证明：

$$A_0 = \int_a^b \frac{x_1-x}{x_1-x_0}dx = \frac{1}{x_1-x_0}[(b-a)x_1 - \frac{1}{2}(b^2-a^2)] = \frac{b-a}{x_1-x_0}(x_1 - \frac{a+b}{2})$$

$$A_1 = \int_a^b \frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx = \frac{1}{x_1-x_0}[\frac{1}{2}(b^2-a^2) - (b-a)x_0] = \frac{b-a}{x_1-x_0}(\frac{a+b}{2} - x_0)$$

2．确定下列求积公式中的待定参数，使其代数精度尽可能高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

（1）$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$；

（2）$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$；

（3）$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]$；

（4）$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + ah^2[f'(0) - f'(h)]$

解：（1）将$f(x)=1$，x，x^2，分别代入求积分式，并令其左、右相等

$$A_{-1} + A_0 + A_1 = 2h$$
$$-h(A_{-1} - A_1) = 0$$
$$h^2(A_{-1} + A_1) = 2h^2/3$$

解得 $A_{-1} = A_1 = \frac{1}{3}h$，$A_0 = \frac{4}{3}h$，所得求积公式至少具有 2 阶代数精度。又因为

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{h}{3}(-h)^3 + \frac{h}{3}h^3,\quad \int_{-1}^{1} x^4 dx \neq \frac{h}{3}(-h)^4 + \frac{h}{3}h^4$$

故求积公式

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(-h) + 4f(0) + f(h)]$$

具有 3 阶代数精度。

（2）将$f(x)=1$，x，x^2，分别代入求积分式，并令其左、右相等

$$A_{-1} + A_0 + A_1 = 4h$$
$$-h(A_{-1} - A_1) = 0$$
$$h^2(A_{-1} + A_1) = 16h^3/3$$

解得，$A_{-1} = A_1 = \frac{8}{3}h$，$A_0 = -\frac{4}{3}h$，故求积公式

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx \frac{8}{3}h[f(-h)-4f(0)+f(h)]$$

至少有 2 阶代数精度。又因为

$$\int_{-2h}^{2h} x^3 dx = \frac{8}{3}h[(-h)^3+h^3]，\int_{-2h}^{2h} x^4 dx = \frac{2^6 h^5}{5} \neq \frac{16h^5}{3} = \frac{8}{3}h[(-h)^4+h^4]$$

故，所得求积公式具有 3 阶代数精度。

（3）将$f(x) = 1$ 代入可知，求积公式准确成立。故将$f(x) = x$，x^2代入公式并令其左、右相等，得

$$-1 + 2x_1 + 3x_2 = 0$$

$$1/3 + 2x_1^2/3 + 3x_2^2/3 = 2/3$$

得方程组

$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

$$2x_1^2 + 3x_2^2 = 1$$

求解，得

$$x_1 = \frac{1 \mp \sqrt{6}}{5}，x_2 = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{15}$$

分别取$x_1 = 0.6899$，$x_2 = -0.1266$，或 $x_1 = -0.2899$，$x_2=0.5266$。故有

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(0.6899)+3f(-0.1266)]$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}[f(-1)+2f(-0.2899)+3f(0.5266)]$$

（4）显然$f(x) = 1$，x准确满足求积公式。将$f(x) = x^2$ 代入，并令左、右两端相等，得

$$\frac{1}{3}h^3 = \frac{h}{2}[0+h^2]+ah^2[0-2h]$$

整理并求解得$a = 1/12$，所以有求积公式

$$\int_0^h f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(h)]+ah^2[f'(0)-f'(h)]$$

容易验证，$f(x) = x^3$准确满足求积公式，而将$f(x) = x^4$代入知，求积公式不能准确成立。故这一求积公式具有 3 阶代数精度。

3．分别运用梯形公式、Simpson 公式、Cotes 公式计算积分$\int_0^1 e^x dx$，并估计各种方法的误差（要求小数点后至少保留 5 位）。

解：梯形公式：$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{2}[e^0+e] = 1.85914$

误差：$|R[e^x]| = |\frac{1}{12}e^{\xi}| \leq \frac{1}{12}e = 0.22652$

Simpson 公式：$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{6}[e^0+4e^{0.5}+e] = 1.71886$

误差：$|R[e^x]| = |\frac{1}{90\times 2^5}e^{\xi}| \leq \frac{1}{90\times 2^5}e = 0.00094385$

Cotes 公式（略）

4．推导下列三种矩形求积公式

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$$

解：将定积分转化为积分上限（或积分下限）函数

（1）令 $F_1(x)=\int_a^x f(t)dt$，显然 $F_1(a)=0$，$F_1(b)=\int_a^b f(t)dt$。

利用泰勒中值定理，有

$$F_1(b)=F_1(a)+(b-a)F_1'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}F_1''(\xi)$$

由于，$F_1'(a)=f(a)$，$F_1''(\xi)=f'(\xi)$。所以

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$$

（2）令 $F_2(x)=\int_x^b f(t)dt$，则 $F_2(b)=0$，$F_2(a)=\int_a^b f(t)dt$。

利用泰勒中值定理

$$F_2(a)=F_2(b)+(a-b)F_2'(b)+\frac{(a-b)^2}{2}F_2''(\eta)$$

由于 $F_2'(b)=-f(b)$，$F_2''(\eta)=-f'(\eta)$。所以

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(b)-\frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta)$$

（3）由泰勒中值定理

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+(x-\frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2f''(\xi)$$

积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2f''(\xi)dx$$

由积分第二中值定理

$$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2f''(\xi)dx=f''(\gamma)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx=\frac{1}{12}f''(\gamma)(b-a)^3$$

故

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\gamma)}{24}(b-a)^3$$

5．给定积分 $I=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$

（1）利用复合梯形公式计算上述积分值，使其截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$，至少应把区间多少等分；

（2）取同样的求积结点，改用复合 Simpson 公式计算时，截断误差是多少？
（3）要求截断误差不超过 10^{-6}，如果用复合Simpson公式计算，应取多少个函数值？

解：由于 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}=\int_0^1\cos(xt)dt$，所以

$$f^{(k)}(x)=\int_0^1\frac{d^k}{dx^k}\cos(xt)dt=\int_0^1 t^k\cos(xt+\frac{k\pi}{2})dt$$

故

$$|f^{(k)}(x)|\le\int_0^1 t^k|\cos(xt+\frac{k\pi}{2})|dt\le\int_0^1 t^k dt=\frac{1}{k+1}$$

（1）对复合梯形公式，有

$$|R[f]|=\frac{(b-a)^3}{12n^2}|f''(\eta)|\le\frac{1}{12n^2}\frac{1}{3}$$

为了使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times10^{-3}$，只须 $18n^2\ge1000$，解得 $n\ge8$。故用复合梯形公式计算时，取 8 等分即可。

（2）将区间[0，1]8 等分，改用复合 Simpson 公式，由于 $h=1/8=0.125$，所以

$$|R[f]|=\frac{b-a}{180}h^4|f^{(4)}(\eta)|\le\frac{1}{180}(\frac{1}{8})^4\frac{1}{5}=1/3686400\approx2.7127\times10^{-7}$$

（3）为了使截断误差不超过 10^{-6}，只须 $900n^4\ge1000000$，解得 $n\ge6$。故用复合梯形公式计算时，取 6 等分即可，故应取 7 个函数值。

7．用下列方法计算积分 $\int_1^3\frac{1}{y}dy$

（1）Romberg 算法；
（2）三点及五点 Gauss-Legndre 求积公式；
（3）将积分区间分成四等分，用复合两点 Gauss 公式。

解：（1）略

（2）区间变换：$x=t+2$，得 $x_0=1.2255$，$x_1=2.0000$，$x_2=2.7745$

三点 Gauss-Legndre 求积公式

$$\int_1^3\frac{1}{y}dy\approx0.5556/1.2255+0.8887/2+0.5556/2.7745=1.0980$$

区间变换：$x=t+2$，得 $x_0=1.0939$，$x_1=1.4616$，$x_2=2.$，$x_3=2.5384$，$x_4=2.9061$，

五点 Gauss-Legndre 求积公式

$$\int_1^3\frac{1}{y}dy\approx0.2369/1.0939+0.4786/1.4616+0.5688/2.+0.4786/2.5384+0.2369/2.9061=1.0985$$

（3）略

9．证明求积公式

$$\int_1^3 f(x)dx\approx\frac{1}{9}[5f(2-\sqrt{3/5})+8f(2)+5f(2+\sqrt{3/5})]$$

具有 5 次代数精度。

证：令 $x=t+2$，则

$$\int_1^3 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(t+2)dt=\int_{-1}^1 f(x+2)dx$$

三阶 Legendre 多项式 $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$ 的零点为

$$x_0=-\sqrt{\frac{3}{5}},\ x_1=0,\ x_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

故，以三个零点为求积结点，构造插值型求积公式的系数

$$A_0=\int_{-1}^{1}\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx,\quad A_1=\int_{-1}^{1}\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx$$

$$A_2=\int_{-1}^{1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx$$

经计算，得

$$A_0=\frac{5}{9},\ A_1=\frac{8}{9},\ A_2=\frac{5}{9}$$

所以求积公式

$$\int_1^3 f(x)dx\approx\frac{1}{9}[5f(2-\sqrt{3/5})+8f(2)+5f(2+\sqrt{3/5})]$$

必具有 5 阶代数精度。

10 设$\{\varphi_n(x)\}$是区间$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式序列，x_j（$j=0,1,\cdots,n$）为$\varphi_{n+1}(x)$的零点，$\int_a^b \rho f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$为Gauss型求积公式。$l_j(x)$ ($j=0,1,\cdots,n$) 是以$\{x_j\}$为结点的Lagrange插值基函数，证明：

（1）当 $0\le k,\ l\le n,\ k\ne l$ 时，$\sum_{j=0}^{n}A_j\varphi_k(x_j)\varphi_l(x_j)=0$；

（2）$\int_a^b\rho(x)l_k(x)l_m(x)dx=0$；

（3）$\sum_{k=0}^{m}\int_a^b\rho(x)l_k^2(x)dx=\int_a^b\rho(x)dx$

证：(1) 因为$\int_a^b\rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$是Gauss型求积公式，故对于次数不超过 $2n+1$ 的多项式均准确成立。由于$\varphi_k(x)\varphi_l(x)$是$k+l$次的多项式，$k+l\le 2n$，故对于$\varphi_k(x)\varphi_l(x)$，求积公式准确成立，即有

$$\int_a^b\rho(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx=\sum_{j=0}^{n}A_j\varphi_k(x_j)\varphi_l(x_j)$$

又由于 $k\ne l$ 时，有$\int_a^b\rho(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx=0$，因此

$$\sum_{j=0}^{n}A_j\varphi_k(x_j)\varphi_l(x_j)=0\quad(0\le k,\ l\le n,\ k\ne l)$$

(2) $l_k(x)$，$l_m(x)$是n次Lagrage插值基函数，满足$l_k(x_j)=\delta_{kj}$，$l_m(x_j)=\delta_{mj}$，且$l_k(x)l_m(x)$是 2n 次多项式，故

$$\int_a^b\rho(x)l_k(x)l_m(x)dx=\sum_{j=0}^{n}A_jl_k(x_j)l_m(x_j)$$

当$k\neq m$时，$l_k(x_j)l_m(x_j)=0$ ($j=0$，1，⋯，n)，因此

$$\int_a^b \rho(x)l_k(x)l_m(x)dx=0$$

（3）因求积公式是 Gauss 型的，故对 $2n$ 次多项式$l_k^2(x)$ ($k=0$，1，2，⋯，n)，求积公式是精确的，即有

$$\int_a^b \rho(x)l_k^2(x)dx=\sum_{j=0}^{n}A_j l_k^2(x_j)$$

又因为$l_k(x_j)=\delta_{kj}$，所以

$$\int_a^b \rho(x)l_k^2(x)dx=A_k>0\ (k=0，1，2，\cdots，n)$$

而当$f(x)=1$ 时，求积公式准确成立，有

$$\int_a^b \rho(x)dx=\sum_{j=0}^{n}A_j$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}\int_a^b \rho(x)l_k^2(x)dx=\int_a^b \rho(x)dx$$

二、例题

1．取$h=(b-a)/2$，令$x_0=a$，$x_1=a+h$，$x_2=a+2h=b$。求证：

$$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx=0$$

证：引入变换 $x=a+th$，则

$$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx=h^4\int_0^2 t(t-1)(t-2)dt$$

令 $t=u+1$，由于奇函数在对称区间上积分值为零，故有

$$\int_0^2 t(t-1)(t-2)dt=\int_{-1}^1 (u+1)u(u-1)du=0$$

所以$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx=0$。

2．对任意三次多项式$P_3(x)$，试证明：用Simpson公式计算$P_3(x)$的数值积分，其求积误差

$$R[P_3(x)]=\int_a^b P_3(x)dx-\frac{b-a}{6}[P_3(a)+4P_3(\frac{a+b}{2})+P_3(b)]=0$$

证：设三次多项式为：$P_3(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$，则$P_3^{(3)}(x)=6a_0$。取$h=(b-a)/2$，令$x_0=a$，$x_1=a+h$，$x_2=a+2h=b$。则三点拉格朗日插值误差为：

$$R_3(x)=\frac{P_3^{(3)}(x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

所以，数值积分的求积误差为

$$R[P_3(x)]=\int_a^b \frac{6a_0}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx$$

利用前一题的结论，上面积分为零。故求积误差为零。

3．设 D 平面多边形区域，边界曲线为$\varGamma$，由曲线积分格林公式可得区域 D 的面积

$$S=\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}-ydx+xdy$$

其中 Γ 的方向为逆时方向，试证明任意多边形的面积公式

$$S=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix}x_j & y_j\\ x_{j+1} & y_{j+1}\end{vmatrix}$$

其中，$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，……，$(x_n，y_n)$为多边形的顶点，秩序按逆时针方向排列，且$(x_{n+1}，y_{n+1})=(x_1，y_1)$。

证：任取多边形的一条边 Γ_j，起点坐标为（x_j，y_j），终点坐标为（x_{j+1}，y_{j+1}），则 Γ_j 的参数方程为

$$x=x_j+t(x_{j+1}-x_j)，y=y_j+t(y_{j+1}-y_j)\qquad t\in(0，1)$$

由于

$$\int_{\Gamma_j}-ydx=-(x_{j+1}-x_j)\int_0^1[y_j+(y_{j+1}-y_j)t]dt$$

$$=-(x_{j+1}-x_j)[y_j+\frac{1}{2}(y_{j+1}-y_j)]$$

$$\int_{\Gamma_j}xdy=(y_{j+1}-y_j)\int_0^1[x_j+(x_{j+1}-x_j)t]dt$$

$$=(y_{j+1}-y_j)[x_j+\frac{1}{2}(x_{j+1}-x_j)]$$

所以

$$\int_{\Gamma_j}-ydx+xdy=-(x_{j+1}-x_j)y_j+(y_{j+1}-y_j)x_j$$

$$=x_jy_{j+1}-y_jx_{j+1}=\begin{vmatrix}x_j & y_j\\ x_{j+1} & y_{j+1}\end{vmatrix}$$

即得计算公式。

4．推导数值求导公式

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)]$$

的截断误差。

解：由 Taylor 级数，得

$$f(x_0+h)=\sum_{k=0}^{4}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+O(h^5)$$

$$f(x_0-h)=\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+O(h^5)$$

两式相减，得

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)+\frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_0)+O(h^4)$$

取 $2h$ 代替 h，得

$$\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-2h)}{4h}=f'(x_0)+\frac{4\times h^2}{6}f^{(3)}(x_0)+O(h^4)$$

将前一式乘 4 减去第二式，整理得

$$\frac{8}{4h}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]-\frac{1}{4h}[f(x_0+2h)-f(x_0-2h)]=3f'(x_0)+O(h^4)$$

所以

$$f'(x_0)=\frac{1}{12h}[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)]+O(h^4)$$

即该数值求导公式的截断误差为：$O(h^4)$

5．设函数$f(x)$在区间$[a，b]$上具有五阶连续导函数。取$h=(b-a)/n$，令$x_0=a$，$x_j=a+jh$。求证，下面计算数值导数的差分格式具有 4 阶精度

$$\frac{1}{6}[f'(x_{j-1})+4f'(x_j)+f'(x_{j+1})]=\frac{f(x_{j+1})-f(x_{j-1})}{2h}$$

证：由 Taylor 展开式，得

$$\frac{f(x_{j+1})-f(x_{j-1})}{2h}=f'(x_j)+\frac{h^2}{6}f^{(3)}(x_j)+O(h^4)$$

而利用三阶导数的二阶中心差商，有

$$\frac{f'(x_{j+1})-2f'(x_j)+f'(x_{j-1})}{h^2}=f^{(3)}(x_j)+O(h^2)$$

代入前式，得

$$\frac{f(x_{j+1})-f(x_{j-1})}{2h}=f'(x_j)+\frac{h^2}{6}\frac{f'(x_{j+1})-2f'(x_j)+f'(x_{j+1})}{h^2}+O(h^4)$$

整理，得

$$\frac{1}{6}[f'(x_{j+1})+4f'(x_j)+f'(x_{j-1})]=\frac{f(x_{j+1})-f(x_{j-1})}{2h}+O(h^4)$$

故，所给差分格式具有 4 阶精度。

三、问题

1．复合梯形公式与复合 Simpson 公式之间有如下关系

$$S_{2m}=\frac{1}{3}[4T_{2m}-T_m]$$

2．利用两点 Hermite 插值公式推导带导数的数值积分公式

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-\frac{(b-a)^2}{12}[f'(b)-f'(a)]+R[f]$$

其中，求积余项为 $R[f]=\frac{(b-a)^5}{720}f^{(4)}(\eta)$。

3．取$h=(b-a)/3$，令$x_0=a$，$x_j=a+jh$ （$j=0$，1，2，3）。利用两点插值公式求下面开型数值求积公式的系数A_1、A_2

$$\int_a^b f(x)dx\approx A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$$

4．给定h，记$x_j=x_0+j\,h$。求如下数值求导公式的截断误差

(1) $f'(x_0) \approx \dfrac{1}{2h}[-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)]$

(2) $f'(x_2) \approx \dfrac{1}{2h}[f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)]$

(3) $f'(x_0) \approx \dfrac{1}{12h}[-25f(x_0)+48f(x_1)-36f(x_2)+16f(x_3)-3f(x_4)]$

5．设函数$f(x)$在区间$[a，b]$上具有五阶连续导函数。取$h=(b-a)/n$，令$x_0=a$，$x_j=a+jh$。求证，下面数值二阶导数的差分格式具有 4 阶精度

$$\frac{1}{12}[f''(x_{j-1})+10f''(x_j)+f''(x_{j+1})]=\frac{f(x_{j+1})-2f(x_j)+f(x_{j-1})}{h^2}$$

习题八　习题解答与问题

一、习题解答

1.取步长 h = 0.2,用欧拉方法解初值问题

$$\begin{cases} y' = -y - xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (0 \le x \le 0.6)$$

解：由$f(x，y) = -y - x\,y^2$ ，欧拉公式为

$$y_{n+1} = y_n + h[-y_n - x_n\,y_n^{\,2}]$$

即

$$y_{n+1} = (1-h)y_n - h\,x_n\,y_n^{\,2}$$

由$y_0 = 1$ 计算，得

$$y_1 = 0.8，\ y_2 = 0.6144，\ y_3 = 0.4613$$

2.用梯形公式解初值问题

$$\begin{cases} y' = 8 - 3y \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad (1 \le x \le 2)$$

取步长 h = 0.2,小数点后至少保留 5 位.

解：由 $f(x，y) = 8 - 3\,y$，梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + 0.5h[(8 - 3\,y_n) + (8 - 3\,y_{n+1})]$$

将 h = 0.2 代入并整理，得

$$\boldsymbol{y_{n+1} = \frac{7}{13}y_n + \frac{16}{13}}$$

由$y_0 = 2$ 计算，得

$$y_1 = 2.30769，y_2 = 2.47337，y_3 = 22.56258，y_4 = .61062，y_5 = 2.63649$$

3.用改进的欧拉公式计算初值问题

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}y - \dfrac{1}{x}y^2 \\ y(1) = 0.5 \end{cases} \qquad (1 < x < 1.5)$$

取步长 h = 0.1,并与精确解 $y(x) = \dfrac{x}{1+x}$ 比较.

解：改进的 Euler 公式为

$$\boldsymbol{\tilde{y}_{n+1} = y_n + h\frac{y_n(1-y_n)}{x_n}}$$

$$\boldsymbol{y_{n+1} = y_n + 0.5h[\frac{y_n(1-y_n)}{x_n} + \frac{\tilde{y}_n(1-\tilde{y}_n)}{x_{n+1}}]}$$

由$y_0 = 0.5$ 计算得

	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
y_n	0.5000	0.5238	0.5455	0.5653	0.5834	0.6001
$y(x_n)$	0.5000	0.5238	0.5455	0.5652	0.5833	0.6000
$y_n - y(x_n)$	0	0.2570×10^{-4}	0.4503×10^{-4}	0.5962×10^{-4}	0.7066×10^{-4}	0.7902×10^{-4}

4.写出用梯形公式求解初值问题

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的计算格式,取步长 $h=0.1$,并求 $y(0.2)$ 的近似值,要求迭代误差不超过 10^{-5} .

解：由梯形公式为： $y_{n+1}=y_n-\frac{h}{2}[y_n+y_{n+1}]$，故计算格式为

$$y_{n+1}=\frac{2-h}{2+h}y_n$$

故，y_1 =0.9048，y_2 =0.8186。

5.试建立求解初值问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=a \end{cases}$$

的如下差分格式:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3f_n-f_{n-1})$$

解：利用线性插值公式，得

$$f(x,y)\approx\frac{1}{h}[(x_n-x)f_{n-1}+(x-x_{n-1})f_n]$$

积分，得

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y)dx\approx\frac{1}{h}[\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x_n-x)dx\,f_{n-1}+\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_{n-1})dx\,f_n$$

$$=h[-\frac{1}{2}f_{n-1}+\frac{3}{2}f_n]$$

所以，有

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3f_n-f_{n-1})$$

6.对初值问题

$$\begin{cases} y'=-y \\ y(0)=1 \end{cases}$$

证明用梯形公式所求得的近似解为

$$y(nh)\approx y_n=(\frac{2-h}{2+h})^n \qquad (x=nh)$$

证明当 $h\to 0$ 时,它收敛于精确解 e^{-x} .

证明：由梯形公式，得

$$y_{n+1}=y_n-\frac{h}{2}[y_n+y_{n+1}]$$

所以

$$y_{n+1}=\frac{2-h}{2+h}y_n$$

故

$$y_n=(\frac{2-h}{2+h})^n y_0=(\frac{2-h}{2+h})^n$$

由于

$$(\frac{2-h}{2+h})^n=(1-\frac{2h}{2+h})^{\frac{2+h}{2h}nh\frac{2}{2+h}}=(1-\frac{2h}{2+h})^{\frac{2+h}{2h}x_n\frac{2}{2+h}}$$

利用极限

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$$

得

$$\lim_{h\to 0}(\frac{2-h}{2+h})^n=\lim_{h\to 0}(1-\frac{2h}{2+h})^{\frac{2+h}{2h}x_n\frac{2}{2+h}}=e^{-x_n}$$

即，当$h\to 0$时,它收敛于精确解e^{-x}

7.写出用四阶经典龙格-库塔方法求解初值问题

$$\begin{cases} y'=8-3y \\ y(0)=2 \end{cases}$$

的计算公式，取步长$h=0.2$,并计算$y(0.4)$的近似值,小数点后至少保留4位.

8.证明公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{9}(2K_1+3K_2+4K_3), \\ K_1=f(x_n,y_n), \\ K_2=f(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1), \\ K_3=f(x_n+\frac{3}{4}h,y_n+\frac{3}{4}hK_2). \end{cases}$$

至少是三阶方法.

证：只须证明公式的局部截断误差为$O(h^4)$即可。

容易验证

$$y''(x_n)=f_x(x_n,y_n)+f_y(x_n,y_n)y'(x_n)$$

$$y'''(x_n)=f_{xx}(x_n,y_n)+2f_{xy}(x_n,y_n)y'(x_n)+f_{yy}(x_n,y_n)[y'(x_n)]^2 \\ +f_y(x_n,y_n)y''(x_n)$$

于是

$$K_1=f(x_n,y_n)=y'(x_n)$$

$$K_2=y'(x_n)+\frac{h}{2}y''(x_n)+\frac{h^2}{8}y'''(x_n)-\frac{h^2}{8}y''(x_n)f_y(x_n,y_n)+O(h^3)$$

$$K_3=y'(x_n)+\frac{3}{4}hy''(x_n)+\frac{3}{4}\frac{h^2}{2}y''(x_n)f_y(x_n,y_n) \\ +\frac{1}{2}(\frac{3}{4}h)^2y'''(x_n)-\frac{1}{2}(\frac{3}{4}h)^2y''(x_n)f_y(x_n,y_n)+O(h^3)$$

所以

$$\frac{h}{9}(2K_1+3K_2+4K_3)=hy'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)+\frac{1}{6}h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

故

$$y_{n+1}=y_n+hy'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)+\frac{1}{6}h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

而

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)+\frac{1}{6}h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

比较两式，知公式的局部截断误差至少是四阶，因此该公式至少是三阶方法。

9.证明

$$y_{n+1}=\frac{1}{3}(4y_n-y_{n-1})+\frac{2}{3}hy'_{n+1}$$

是二阶公式.

证：由于 $y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(x_{n+1})-\frac{1}{3}(4y_n-y_{n-1})-\frac{2}{3}hy'_{n+1}$，由 Taylor 展开式，得

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)+O(h^3)$$

$$y(x_{n-1})=y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)+O(h^3)$$

$$y'(x_{n+1})=y'(x_n)+hy''(x_n)+O(h^2)$$

代入局部截断误差表达式，得

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{2}{3}hy'(x_n)+\frac{2}{3}h^2y''(x_n)-\frac{2}{3}hy'_{n+1}+O(h^3)$$

即

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{2}{3}hy'(x_{n+1})-\frac{2}{3}hy'_{n+1}+O(h^3)$$

10 就初值问题 $y'=ax+b$，$y(0)=0$ 导出改进欧拉方法的近似解的表达式,并与准确解 $y=\frac{1}{2}ax^2+bx$ 相比较.

解：由改进欧拉方法

$$y_{n+1}=y_n+0.5\,h\,[\,f(x_n,\ y_n)+f(x_{n+1},\ y_n+h\,f(x_n,\ y_n))]$$

得

$$y_{n+1}=y_n+0.5\,h\,[(\,ax_n+b)+(\,ax_{n+1}+b)]$$

将 $x_n=n\,h$ 代入，得

$$y_{n+1}=y_n+0.5\,h\,[a(2n+1)h+2b]=y_n+0.5\,a(2n+1)\,h^2+bh$$

对上式两端做求和运算

$$\sum_{n=0}^{N-1}y_{n+1}=\sum_{n=0}^{N-1}y_n+0.5ah^2\sum_{n=0}^{N-1}(2n+1)+b(Nh)$$

化简，并注意 $y(0)=0$，得

$$y_N=0.5\,a\,h^2[(N-1)N+N]+b(Nh)$$

所以

$$y_N=0.5\,a\,h^2N^2+b\,(Nh)=0.5\,a\,(x_N)^2+b(x_N)^2$$

即

$$y_n=\frac{1}{2}ax_n^2+bx_n,\quad y(x_n)=\frac{1}{2}ax_n^2+bx_n$$

所以，改进欧拉公式所得数值解与原问题的解析解相同。

11.证明线性多步法

$$y_{n+1}+(b-1)y_n-by_{n-1}=\frac{1}{4}h[(b+3)f_{n+1}+(3b+1)f_{n-1}]$$

当$b\neq 1$时方法为二阶的，当 b = -1 时方法为三阶的.

证：由于

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=y(x_{n+1})-[(1-b)y_n+b\,y_{n-1}+0.25\,h(b+3)f_{n+1}+(3b+1)f_{n-1}]$$

将 Taylor 展式

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)+\frac{1}{3!}h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

$$y(x_{n-1})=y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{1}{2}h^2y''(x_n)-\frac{1}{3!}h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

$$y'(x_{n+1})=y'(x_n)+hy''(x_n)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_n)+O(h^3)$$

$$y'(x_{n-1})=y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{1}{2}h^2y'''(x_n)+O(h^3)$$

代入局部截断误差表达式，注意到$y(x_n)=y_n$和$y(x_{n-1})=y_{n-1}$，得

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=-\frac{1}{3}(b+1)h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

故，当$b\neq 1$时方法为二阶的，当 b = -1 时方法为三阶的.

12.用经典四阶龙格-库塔方法计算初值问题

$$\begin{cases}y'=-20y\\ y(0)=1\end{cases}\quad(0\le x\le 1)$$

试分析当步长分别取 $h=0.1$ 及 $h=0.2$ 时,计算的稳定性.

解：由于 $f(x,y)=-20y$，所以

$K_1=-20y_n$

$K_2=-20(y_n+0.5\times h\,K_1)=-20y_n+200\,h\,y_n$

$K_3=-20(y_n+0.5\times h\,K_2)=-20y_n+200\,h\,y_n-2000h^2y_n$

$K_4=-20(y_n+h\,K_3)=-20y_n+400\,h\,y_n-4000h^2y_n+40000h^3y_n$

所以，四阶龙格-库塔方法为

$$y_{n+1}=y_n+h(K_1+2K_2+2K_3+K_4)/6$$
$$=(1-20h+200h^2-4000h^3/3+20000h^4/3)\,y_n$$

当步长分别取 $h=0.1$ 及 0.2 时,分别计算

$$(1-20h+200h^2-4000h^3/3+20000h^4/3)=0.3333$$
$$(1-20h+200h^2-4000h^3/3+20000h^4/3)=5$$

所以，步长取 $h=0.1$ 时稳定，而步长取 $h=0.2$ 时不稳定。

二、例题

1．定积分$\int_a^b f(x)dx$ 的计算问题可化为初值问题：$y'=f(t)$，$y(a)=0$。证明：欧拉公式

计算结果为复合左矩阵公式：$\boldsymbol{y(b) \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)h}$。

证：取$h=(b-a)/n$，$t_k = a + kh$，(k =0，1，…，n)。由欧拉公式，得

$$y_{k+1} = y_k + h\,f(t_k) \qquad (\,k = 0，1，\cdots，n)$$

求和，得

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} y_k + h\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)}$$

化简即得

$$\boldsymbol{y(b) \approx y_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)h}$$

2．1926 年荷兰数学家范德堡(van der Pol)构造了研究无线电热离子振荡器性态的模型

$$y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$$

其中 μ 是正的物理常数，这是电路理论中用到的非线性微分方程．如果引入新变量

$$y_1 = y, \quad y_2 = y' + \mu(\frac{y^3}{3} - y)$$

可以将范德堡方程化为一阶常微分方程组的形式。试利用新变量推导一阶常微分方程组。

解：对引入的新变量求导数，得

$$y_1' = y'，\quad y_2' = y'' + \mu(y^2 - 1)y'$$

代入原微分方程 $y'' + \mu(y^2 - 1)y' + y = 0$，得

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - \mu(y_1^3/3 - y_1) \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

3．道森(*Dawson*)积分是一个积分上限函数

$$f(x) = \exp(-x^2)\int_0^x \exp(t^2)dt$$

试找出 $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的关系，将求该函数值的计算转化为一个常微分方程初值问题

解：令 $y = f(x)$，则将 $f(x) = \exp(-x^2)\int_0^x \exp(t^2)dt$ 两端对自变量求导数可得

$$f'(x) = -2x\exp(-x^2)\int_0^x \exp(t^2)dt + \exp(-x^2)\exp(x^2)$$

$$= -2xf(x) + 1$$

由定积分性质，显然有 $f(0)=0$。所以，函数 $y = f(x)$ 满足常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = 1 - 2xy \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

4．常微分方程两点边值问题如下

$$-u''(x)+u(x)=e^x(\sin x-2\cos x),\quad 0\le x\le\pi$$
$$u(0)=0,\ \ u(\pi)=0$$

取正整数n，令$h=\dfrac{\pi}{n+1}$，$x_j=jh$，($j=0$，1，…，$n+1$)。记$f(x)=e^x(\sin x-2\cos x)$。试利用二阶导数的四阶精度差分格式

$$\frac{1}{12}[u''(x_{j-1})+10u''(x_j)+u''(x_{j+1})]=\frac{u(x_{j+1})-2u(x_j)+u(x_{j-1})}{h^2}$$

推导出求常微分方程数值解的三点差分格式

$$-(12-h^2)u_{j-1}+(24+10h^2)u_j-(12-h^2)u_{j+1}=h^2(f_{j-1}+10f_j+f_{j+1})$$
$$(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

解：将微分方程在三个点上取值，得

$$-u''(x_{j-1})+u(x_{j-1})=f(x_{j-1})$$

$$-u''(x_j)+u(x_j)=f(x_j)$$

$$-u''(x_{j+1})+u(x_{j+1})=f(x_{j+1})$$

将第一式乘 1/12，第二式乘 10/12，第三式乘 1/12 相加，得

$$-\frac{1}{h^2}(u_{j-1}-2u_j+u_{j+1})+\frac{1}{12}(u_{j-1}+10u_j+u_{j+1})=\frac{1}{12}(f_{j-1}+10f_j+f_{j+1})$$

整理，即得

$$-(12-h^2)u_{j-1}+(24+10h^2)u_j-(12-h^2)u_{j+1}=h^2(f_{j-1}+10f_j+f_{j+1})$$

5．Adamas公式是求一阶常微分方程$y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$的多步法中较简单格式，推导下面两步显格式和隐格式

（1）$y_{n+2}=y_{n+1}+h[3f(x_{n+1},\ y_{n+1})-f(x_n,\ y_n)]/2$；

（2）$y_{n+2}=y_{n+1}+h[5f(x_{n+2},\ y_{n+2})+8f(x_{n+1},\ y_{n+1})-f(x_n,\ y_n)]/12$

解：(1) 在区间$[x_n,\ x_{n+1}]$上对函数$f(x,\ y)$做线性插值，得

$$f(x,y)\approx\frac{1}{h}[(x_{n+1}-x)f_n+(x-x_n)f_{n+1}]$$

积分，得

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}}f(x,y)dx\approx\frac{1}{h}f_n\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}}(x_{n+1}-x)dx+\frac{1}{h}f_{n+1}\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}}(x-x_n)dx$$

引入变换，$x=x_{n+1}+th$，得

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}}(x_{n+1}-x)dx=-h^2\int_0^1 tdt=-h^2/2$$

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}}(x-x_n)dx=h^2\int_0^1(t+1)dt=3h^2/2$$

所以

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x,y)dx \approx -\frac{1}{2}hf_n + \frac{3}{2}hf_{n+1}$$

将微分方程 $y' = f(x,y)$ 积分

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} y'(x)dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x,y)dx$$

得

$$y(x_{n+2}) - y(x_{n+1}) \approx h(3f_{n+1} - f_n)/2$$

由此得

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h[3f(x_{n+1},\ y_{n+1}) - f(x_n,\ y_n)]/2$$

（2）在区间$[x_n,\ x_{n+2}]$上对函数$f(x,\ y)$做二次插值，得

$$f(x,y) \approx \frac{1}{2h^2}[B_n(x)f_n - 2B_{n+1}(x)f_{n+1} + B_{n+2}(x)f_{n+2}]$$

其中，

$$B_n(x)=(x-x_{n+1})(x-x_{n+2})$$
$$B_{n+1}(x)=(x-x_n)(x-x_{n+2})$$
$$B_{n+2}(x)=(x-x_n)(x-x_{n+1})$$

引入变换，$x = x_{n+1} + th$，积分得

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} B_n(x)dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (x-x_{n+1})(x-x_{n+2})dx = h^3\int_0^1 t(t-1)dt = -h^3/6$$

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} B_{n+1}(x)dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (x-x_n)(x-x_{n+2})dx = h^3\int_0^1 (t^2-1)dt = -2h^3/3$$

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} B_{n+2}(x)dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} (x-x_n)(x-x_{n+1})dx = h^3\int_0^1 (t+1)tdt = 5h^3/6$$

所以

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} [B_n(x)f_n - 2B_{n+1}(x)f_{n+1} + B_{n+2}f_{n+2}]dx = \frac{1}{6}h^3[5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n]$$

将微分方程 $y' = f(x,y)$ 积分

$$\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} y'(x)dx = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} f(x,y)dx$$

得

$$y(x_{n+2}) - y(x_{n+1}) \approx h(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)/12$$

由此得

$$y_{n+2} = y_{n+1} + h[5f(x_{n+2},\ y_{n+2}) + 8f(x_{n+1},\ y_{n+1}) - f(x_n,\ y_n)]/12$$

三、问题

1．初值问题 $\begin{cases} y' = ax + b & x > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 有解 $y(x) = 0.5ax^2 + bx$。若取：$x_n = nh$，y_n为欧拉方法得到的数值解。试证明

$$y(x_n) - y_n = 0.5\,a\,h\,x_n$$

2．对于函数 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$，试设计一个算法，用四阶龙格—库塔公式计算出该函数在 [0, 3] 区间上的 31 个等距点处的函数值.

3．当用四阶龙格—库塔公式计算某些特殊类型的常微分方程初值问题时，会有简单的计算公式出现，试推导出计算下面两种类型的常微分方程初值问题特殊公式

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$； (2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

4．将线性常系数非齐次高阶常微分方程初值问题

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + a_{n-1} y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_0 y = f(x)$$

$$y(x_0) = \alpha_0，y^{(k)} = \alpha_k\ (k = 1，2，\cdots，n-1)$$

转化为一阶线性常微分方程组问题，并写出矩阵形式。

5．写出用修改的欧拉法求问题

$$\begin{cases} \boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x \quad 0 \le x \le 3} \\ \boldsymbol{y(0) = 0,\ y'(0) = -0.5} \end{cases}$$

的计算格式。