习题 1

1-1 有一动圈传声器的振膜可当作质点振动系统来对待,其固有频率为 f ，质量为 m ，求它的弹性系数。

解：由公式 $f_o = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K_m}{M_m}}$ 得：

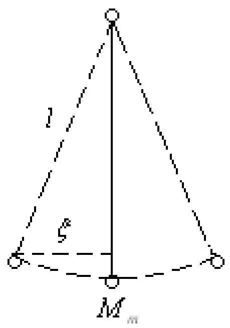
$$K_m = (2\pi f)^2 m$$

1-2 设有一质量 M_m 用长为 l 的细绳铅直悬挂着，绳子一端固定构成一单摆，如图所示，假设绳子的质量和弹性均可忽略。试问：

（1） 当这一质点被拉离平衡位置 ξ 时，它所受到的恢复平衡的力由何产生？并应怎样表示？

（2） 当外力去掉后，质点 M_m 在此力作用下在平衡位置附近产生振动，它的振动频率应如何表示？

（答： $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ ， g 为重力加速度）



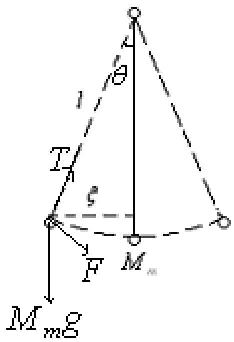


图 习题 1－2

解：（1）如右图所示，对 M_m 作受力分析：它受重力 $M_m g$ ，方向竖直向下；受沿绳方向的拉力 T ，这两力的合力 F 就是小球摆动时的恢复力，方向沿小球摆动轨迹的切线方向。

设绳子摆动后与竖直方向夹角为 θ ，则 $\sin\theta = \dfrac{\xi}{l}$

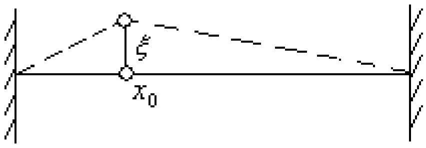
受力分析可得： $F = M_m g \sin\theta = M_m g \dfrac{\xi}{l}$

（2）外力去掉后(上述拉力去掉后)，小球在 F 作用下在平衡位置附近产生摆动，加速度的方向与位移的方向相反。由牛顿定律可知： $F = -M_m \dfrac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}$

则 $-M_m\dfrac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}=M_m g\dfrac{\xi}{l}$ 即 $\dfrac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{g}{l}\xi=0,$

$\therefore$ $\omega_0^2=\dfrac{g}{l}$ 即 $f_0=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}},$ 这就是小球产生的振动频率。

1-3 有一长为 $\boldsymbol{l}$ 的细绳，以张力 T 固定在两端，设在位置 x_0 处，挂着一质量 M_m，如图所示，试问：



(1) 当质量被垂直拉离平衡位置 ξ 时，它所受到的恢复平衡的力由何产生？并应怎样表示？

(2) 当外力去掉后，质量 M_m 在此恢复力作用下产生振动，它的振动频率应如何表示？

(3) 当质量置于哪一位置时，振动频率最低？

解：首先对 M_m 进行受力分析，见右图，

$$F_x=T\frac{l-x_0}{\sqrt{(l-x_0)^2+\varepsilon^2}}-T\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\varepsilon^2}}=0$$

（$\because \varepsilon\langle\langle x_0$ ，$\therefore x_0^2+\varepsilon^2\approx x_0^2,(l-x_0)^2+\varepsilon^2\approx(l-x_0)^2$ 。）

$$F_y=T\frac{\varepsilon}{\sqrt{(l-x_0)^2+\varepsilon^2}}+T\frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2+\varepsilon^2}}$$

$$\approx T\frac{\varepsilon}{l-x_0}+T\frac{\varepsilon}{x_0}$$

$$=\frac{Tl}{x_0(l-x_0)}\varepsilon$$

可见质量 M_m 受力可等效为一个质点振动系统，质量 $M=M_m$，弹性系数 $k=\dfrac{Tl}{x_0(l-x_0)}$。

（1）恢复平衡的力由两根绳子拉力的合力产生，大小为 $F=\dfrac{Tl}{x_0(l-x_0)}\varepsilon$，方向为竖直向下。

（2）振动频率为 $\omega=\sqrt{\dfrac{K}{M}}=\sqrt{\dfrac{Tl}{x_0(l-x_0)M_m}}$。

（3）对 ω 分析可得，当 $x_0=\dfrac{l}{2}$ 时，系统的振动频率最低。

1-4 设有一长为 l 的细绳，它以张力 T 固定在两端，如图所示。设在绳的 x_0 位置处悬有一质量为 M

的重物。求该系统的固有频率。提示：当悬有M时，绳子向下产生静位移ξ_0以保持力的平衡，并假定M离平衡位置ξ_0的振动ξ位移很小，满足$\xi<<\xi_0$条件。

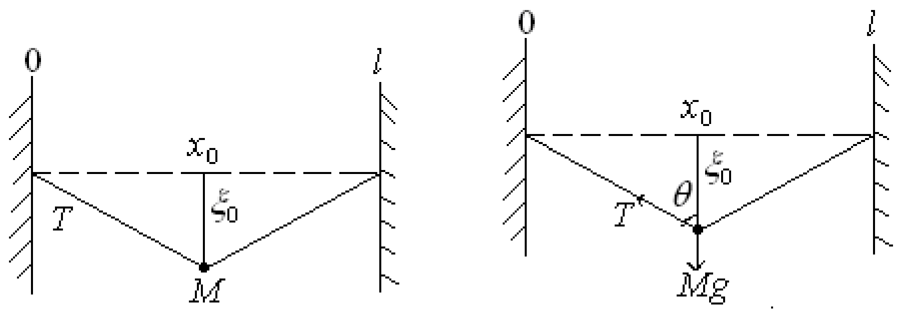


图 习题1－4

解：如右图所示，受力分析可得
$$\left.\begin{aligned} &2T\cos\theta = Mg \\ &\cos\theta = \frac{\xi_0}{\frac{1}{2}l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{4\pi}{l}\xi_0 = Mg$$

又$\xi<<\xi_0$，$T'\approx T$，可得振动方程为 $$-2T\frac{\xi_0+\xi}{\frac{l}{2}} = M\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}$$

即 $$M\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{4T}{l}\xi = -\frac{4T}{l}\xi_0$$

$$\therefore\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4T/l}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg}{\xi_0 M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\xi_0}}$$

1-5 有一质点振动系统，已知其初位移为ξ_0，初速度为零，试求其振动位移、速度和能量。

解：设振动位移$\varepsilon = \varepsilon_a\cos(\omega_0 t-\varphi)$，

速度表达式为$v = -\omega_0\varepsilon_a\sin(\omega_0 t-\varphi)$。

由于$\varepsilon\big|_{t=0} = \varepsilon_0$，$v\big|_{t=0} = 0$，

代入上面两式计算可得：

$$\varepsilon = \varepsilon_0\cos\omega_0 t\ ;$$

$$v = -\omega_0\varepsilon_0\sin\omega_0 t\ 。$$

振动能量$E = \frac{1}{2}M_m v_a^2 = \frac{1}{2}M_m\omega_0^2\varepsilon_a^2$。

1-6 有一质点振动系统，已知其初位移为ξ_0，初速度为v_0，试求其振动位移、速度、和能量。

解：如右图所示为一质点振动系统，弹簧的弹性系数为K_m，质量为M_m，取正方向沿x轴，位移为ξ。

则质点自由振动方程为 $\dfrac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2\xi=0,$ （其中$\omega_0^2=\dfrac{K_m}{M_m},$）

解得 $\xi=\xi_a\cos(\omega_0 t-\varphi_0),$

$$v=\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=\omega_0\xi_a\sin(\omega_0 t-\varphi_0+\pi)=\omega_0\xi_a\cos(\omega_0 t-\varphi_0+\frac{\pi}{2})$$

当$\xi|_{t=0}=\xi_0$，$v|_{t=0}=v_0$时， $\begin{cases}\xi_0=\xi_a\cos\varphi_0\\ v_0=\omega_0\xi_a\cos(\varphi_0-\dfrac{\pi}{2})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi_a=\dfrac{1}{\omega_0}\sqrt{\omega_0^2\xi_0^2+v_0^2}\\ \varphi_0=\arctan\dfrac{v_0}{\omega_0\xi_0}\end{cases}$

质点振动位移为$\xi=\dfrac{1}{\omega_0}\sqrt{\omega_0^2\xi_0^2+v_0^2}\cos(\omega_0 t-\arctan\dfrac{v_0}{\omega_0\xi_0})$

质点振动速度为$v=\sqrt{\omega_0^2\xi_0^2+v_0^2}\cos(\omega_0 t-\arctan\dfrac{v_0}{\omega_0\xi_0}+\dfrac{\pi}{2})$

质点振动的能量为$E=\dfrac{1}{2}M_m v_a^2=\dfrac{1}{2}M_m(\omega_0^2\xi_0^2+v_0^2)$

1-7 假定一质点振动系统的位移是由下列两个不同频率、不同振幅振动的叠加$\xi=\sin\omega t+\dfrac{1}{2}\sin 2\omega t$，试问：

(1) 在什么时候位移最大？

(2) 在什么时候速度最大？

解：$\because\ \xi=\sin\omega t+\dfrac{1}{2}\sin 2\omega t$，

$\therefore\ \dfrac{d\varepsilon}{dt}=\omega\cos\omega t+\omega\cos 2\omega t$

$\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2}=-\omega^2\sin\omega t-2\omega^2\sin 2\omega t$。

令$\dfrac{d\varepsilon}{dt}=0$，得：$\omega t=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$或$\omega t=2k\pi\pm\pi$，

经检验后得：$t=\dfrac{2k\pi\pm\pi/3}{\omega}$时，位移最大。

令$\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2}=0$，得： $\omega t=k\pi$或$\omega t=2k\pi\pm\arccos(-\dfrac{1}{4})$，

经检验后得：$t=\dfrac{2k\pi}{\omega}$时，速度最大。

1-8 假设一质点振动系统的位移由下式表示

$$\xi=\xi_1\cos(\omega t+\varphi_1)+\xi_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

试证明 $\xi=\xi_a\cos(\omega t+\varphi)$

其中 $\xi_a=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$， $\varphi=\arctan\dfrac{\xi_1\sin\varphi_1+\xi_2\sin\varphi_2}{\xi_1\cos\varphi_1+\xi_2\cos\varphi_2}$

证明： $\xi=\xi_1\cos(\omega t+\varphi_1)+\xi_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

$$=\xi_1\cos\omega t\cos\varphi_1-\xi_1\sin\omega t\sin\varphi_1+\xi_2\cos\omega t\cos\varphi_2-\xi_2\sin\omega t\sin\varphi_2$$

$$=\cos\omega t(\xi_1\cos\varphi_1+\xi_2\cos\varphi_2)-\sin\omega t(\xi_1\sin\varphi_1+\xi_2\sin\varphi_2)$$

设 $A=\xi_1\cos\varphi_1+\xi_2\cos\varphi_2$ ， $B=-(\xi_1\sin\varphi_1+\xi_2\sin\varphi_2)$

则 $\xi=A\cos\omega t+B\sin\omega t=\sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t+\varphi)$ （其中 $\varphi=\arctan(-\dfrac{B}{A})$ ）

又 $A^2+B^2=\xi_1^2\cos^2\varphi_1+\xi_2^2\cos^2\varphi_2+2\xi_1\xi_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2$

$$+\xi_1^2\sin^2\varphi_1+\xi_2^2\sin^2\varphi_2+2\xi_1\xi_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$=\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$

$$=\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

又 $\varphi=\arctan(-\dfrac{B}{A})=\arctan(\dfrac{\xi_1\sin\varphi_1+\xi_2\sin\varphi_2}{\xi_1\cos\varphi_1+\xi_2\cos\varphi_2})$

令 $\xi_a=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_1\xi_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

则 $\xi=\xi_a\cos(\omega t+\varphi)$

1-9 假设一质点振动系统的位移由下式表示

$$\varepsilon=\varepsilon_1\cos w_1t+\varepsilon_2\cos w_2t \qquad (w_2>w_1)$$

试证明

$$\varepsilon=\varepsilon_a\cos(w_1t+\varphi),$$

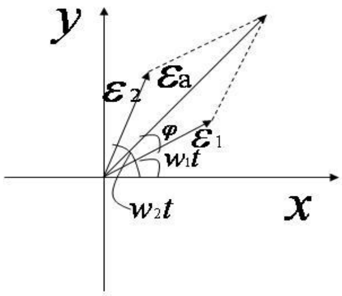
其中 $\varepsilon_a=\sqrt{\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2\cos(\Delta wt)},\varphi+\arctan\dfrac{\varepsilon_2\sin(\Delta wt)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2\cos(\Delta wt)},\Delta w=w_1-w_2.$

解： 因为位移是矢量，故可以用矢量图来表示。

由余弦定理知，

$$\varepsilon_a = \sqrt{\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\cos(w_2 t - w_1 t)}$$

$$= \sqrt{\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\cos(\Delta wt)}$$



其中，$\Delta w = w_2 - w_1$。

由三角形面积知，

$$\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2\sin\Delta wt = \frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_a\sin\varphi$$

得 $$\sin\varphi = \frac{\varepsilon_2\sin\Delta wt}{\varepsilon_a}$$

得 $$tg\varphi = \frac{\varepsilon_2\sin\Delta wt}{\sqrt{\varepsilon_a{}^2 - \varepsilon_2{}^2\sin^2\Delta wt}}$$

$$= \frac{\varepsilon_2\sin\Delta wt}{\sqrt{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\cos\Delta wt)^2}}$$

$$= \frac{\varepsilon_2\sin\Delta wt}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\cos\Delta wt}$$

故 $$\varphi = \frac{\varepsilon_2\sin\Delta wt}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\cos\Delta wt}$$

即可证。

1-10 有一质点振动系统，其固有频率 f_0 为已知，而质量 M_m 与弹性系数 K_m 待求，现设法在此质量 M_m 上附加一已知质量 m，并测得由此而引起的弹簧伸长 ξ_1，于是系统的质量和弹性系数都可求得，试证明之.

证 由胡克定理得 $mg = K_m\xi_1 \Rightarrow K_m = mg/\xi_1$

由质点振动系统固有频率的表达式 $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_m}{M_m}}$ 得，$M_m = \frac{K_m}{4\pi^2 f_0{}^2} = \frac{mg}{4\pi^2 f_0{}^2\xi_1}$.

纵上所述，系统的质量 M_m 和弹性系数 K_m 都可求解.

1-11 有一质点振动系统，其固有频率 f_0 为已知，而质量 M_m 与弹性系数待求，现设法在此质量 M_m 上附加一质量 m，并测得由此而引起的系统固有频率变为 f_0',于是系统的质量和弹性系数都可求得，试证明之。

解： 由 $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_m}{M_m}}$ 得 $K_m = (2\pi f_0)^2 M_m$

由 $f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_m}{M_m + m}}$ 得 $K_m = (2\pi f_0')^2(M_m + m,)$

联立两式，求得$M_m=\dfrac{mf_0'^2}{f_0^{\ 2}-f_0'^2}$，$K_m=\dfrac{4\pi^2 mf_0^{\ 2}f_0'^2}{f_0^{\ 2}-f_0'^2}$

1-12 设有如图 1-2-3 和图 1-2-4 所示的弹簧串接和并接两种系统，试分别写出它们的动力学方程，并求出它们的等效弹性系数。

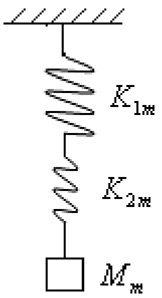


图 1-2-3

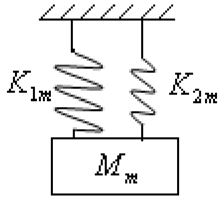


图 1-2-4

解： 串接时，动力学方程为$M_m\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2}+\dfrac{K_{1m}K_{2m}}{K_{1m}+K_{2m}}\varepsilon=0$，等效弹性系数为$K=\dfrac{K_{1m}K_{2m}}{K_{1m}+K_{2m}}$。

并接时，动力学方程为$M_m\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2}+(K_{1m}+K_{2m})\varepsilon=0$，等效弹性系数为$K=K_{1m}+K_{2m}$。

1-13 有一宇航员欲在月球表面用一弹簧秤称月球上一岩石样品。此秤已在地球上经过校验，弹簧压缩 0～100mm可称 0～1kg。宇航员取得一块岩石，利用此秤从刻度上读得为 0.4kg，然后，使它振动一下，测得其振动周期为 1s，试问月球表面的重力加速度是多少？而该岩石的实际质量是多少？

解：设该岩石的实际质量为M，地球表面的重力加速度为$g=9.8m/s^2$，月球表面的重力加速度为g'

由虎克定律知 $F_M=-Kx,$ 又 $F_M=-Mg$ 则 $K=\dfrac{Mg}{x}=\dfrac{1\times g}{0.1}=10g$

$T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{K}}=1$ 则 $M=\dfrac{10g}{4\pi^2}=\dfrac{10\times 9.8}{4\pi^2}\approx 2.5kg$

又$\dfrac{x}{x'}=\dfrac{1}{0.4}$ 则 $x'=0.04m$

$Mg'=Kx'$ 则 $g'=\dfrac{K}{M}x'=4\pi^2\times 0.04\approx 1.58m/s^2$

故月球表面的重力加速度约为$1.58m/s^2$，而该岩石的实际质量约为$2.5kg$。

1-14 试求证

$$a\cos\omega t+a\cos(\omega t+\delta)+a\cos(\omega t+2\delta)+\cdots+a\cos(\omega t+(n-1)\delta)$$

$$=a\frac{\sin n\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\cos\left\{\omega t+\frac{(n-1)}{2}\delta\right\}$$

证 $ae^{j\omega t}+ae^{j(\omega t+\delta)}+ae^{j(\omega t+2\delta)}+\cdots+ae^{j(\omega t+(n-1)\delta)}$

$$=ae^{j\omega t}(1+e^{j\delta}+)$$

$$=ae^{j\omega t}\frac{1-e^{jn\delta}}{1-e^{j\delta}}=ae^{j\omega t}\frac{1-\cos n\delta-j\sin n\delta}{1-\cos\delta-j\sin\delta}$$

$$=ae^{j\omega t}\frac{2\sin^2\frac{n\delta}{2}-j\sin n\delta}{2\sin^2\frac{\delta}{2}-j\sin\delta}=ae^{j\omega t}\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{n\delta}{2}-j\cos\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}-j\cos\frac{\delta}{2}}$$

$$=ae^{j\omega t}\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\cdot\frac{e^{-j(\frac{\pi}{2}-\frac{n}{2}\delta)}}{e^{-j(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\delta)}}=ae^{j\omega t}\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\cdot e^{j\frac{n-1}{2}\delta}=a\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\cdot e^{j(\omega t+\frac{n-1}{2}\delta)}$$

同时取上式的实部，结论即可得证。

1-15 有一弹簧 K_m 在它上面加一重物 M_m，构成一振动系统，其固有频率为 f_0，

(1) 假设要求固有频率比原来降低一半，试问应该添加几只相同的弹簧，并怎样联接？

(2) 假设重物要加重一倍，而要求固有频率 f_0 不变，试问应该添加几只相同的弹簧，并怎样联接？

解：固有频率 $f_o=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_m}{M_m}}$。

（1）$f_0\to\frac{f_0}{2}\quad\Rightarrow\quad K_m\to\frac{K_m}{4}$，故应该另外串接三根相同的弹簧；

（2）$\begin{cases}M_m\to\frac{M_m}{2}\\ f_0\to f_0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad K_m\to 2K_m$，故应该另外并接一根相同的弹簧。

1-16 有一直径为 d 的纸盆扬声器，低频时其纸盆一音圈系统可作质点系统来对待。现已知其总质量为 M_m，弹性系数为 K_m。试求该扬声器的固有频率。

解：该扬声器的固有频率为 $f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_m}{M_m}}$。

1-17 原先有一个 0.5 kg的质量悬挂在无质量的弹簧上，弹簧处于静态平衡中，后来又将一个 0.2 kg的质量附加在其上面，这时弹簧比原来伸长了 0.04m，当此附加质量突然拿掉后，已知这 0.5 kg质量的振幅在 1s 内减少到初始值的 1/e 倍，试计算：

（1）这一系统的力学参数 K_m，R_m，f_0'；

（2）当 0.2 kg的附加质量突然拿掉时，系统所具有的能量；

（3）在经过 1s 后，系统具有的平均能量。

解：（1）由胡克定理知，$K_m = mg/\varepsilon$

所以 $K_m = 0.2\times 9.8/0.04 = 49N/m$

$$e^{-\delta} = 1/e \Rightarrow \delta = 1$$

故 $$\delta = \frac{R_m}{2M_m} \Rightarrow R_m = 1N\cdot s/m$$

$$w_0{}' = \sqrt{w_0 - \delta^2} \Rightarrow f_0{}' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{49}{0.5} - 1} = 1.57Hz$$

（2）系统所具有的能量 $E = \frac{1}{2}K_m\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\times 49\times 0.04^2 = 0.0392J$

（3）平均能量 $E = \frac{1}{2}K_m\varepsilon_0{}^2 e^{-2\delta t} = 5.31\times 10^{-3}J$

1-18 试求当力学品质因素 $Q_m \le 0.5$ 时，质点衰减振动方程的解。假设初始时刻 $\xi = 0$，$v = v_0$，试讨论解的结果。

解：系统的振动方程为：

$$M_m\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + R_m\frac{d\varepsilon}{dt} + K_m\varepsilon = 0$$

进一步可转化为，设 $\delta = \frac{R_m}{2M_m}$，

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2\delta\frac{d\varepsilon}{dt} + \omega^2\varepsilon = 0$$

设：

$$\varepsilon = e^{i\gamma t}$$

于是方程可化为：

$$(-\gamma^2 + 2j\gamma\delta + \omega_0^2)e^{j\gamma t} = 0$$

解得：$\gamma = j(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})$

$\therefore$ $$\varepsilon = e^{-(\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}$$

方程一般解可写成：

$$\varepsilon = e^{-\delta t}(Ae^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}t})$$

$\because$ 存在初始条件：

$$\varepsilon|_{t=0}=0\text{，}\quad v|_{t=0}=v_0$$

代入方程计算得：

$$A=-\frac{v_0}{2\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}\text{，}\quad B=\frac{v_0}{2\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}$$

$\therefore$ 解的结果为： $\varepsilon=e^{-\delta t}(Ae^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}t}+Be^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}t})$

其中 $A=-\dfrac{v_0}{2\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}$，$B=\dfrac{v_0}{2\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}}$。

1-19 有一质点振动系统，其固有频率为 f_1，如果已知外力的频率为 f_2，试求这时系统的弹性抗与质量抗之比。

解：质点振动系统在外力作用下作强迫振动时弹性抗为 $\dfrac{K_M}{\omega}$，质量抗为 ωM_M

已知 $f_0=50Hz$，$f=300Hz$

则 $$\left(\frac{K_M}{\omega}\right)\Big/(\omega M_M)=\frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{K_M}{M_M}=\frac{\omega_0^2}{\omega^2}=\frac{4\pi^2f_0^2}{4\pi^2f^2}=\frac{(50)^2}{(300)^2}=\frac{1}{36}$$

1-20 有一质量为 0.4kg 的重物悬挂在质量为 0.3kg，弹性系数为 150N/m 的弹簧上，试问：

(1) 这系统的固有频率为多少？

(2) 如果系统中引入 5kg/s 的力阻，则系统的固有频率变为多少？

(3) 当外力频率为多少时，该系统质点位移振幅为最大？

(4) 相应的速度与加速度共振频率为多少？

解：(1) 考虑弹簧的质量， $f_0=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K_m}{M_m+M_s/3}}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{150}{0.4+0.3/3}}=2.76\text{Hz}$.

(2) 考虑弹簧本身质量的系统仍可作为质点振动系统，但此时系统的等效质量 M_m'为 $M_m+M_s/3$.

$$\delta=\frac{R_m}{2M_m'}=\frac{5}{2\times0.5}=5\text{，}\quad f_0'=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{150}{0.4+0.3/3}-5^2}=2.64\text{Hz}.$$

(3) 品质因素 $Q_m=\dfrac{\omega_0'M_m}{R_m}=\dfrac{16.58\times0.5}{5}=1.66$，

位移共振频率： $f_r=f_0'\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q_m^2}}=2.39\text{Hz}$.

(4) 速度共振频率： $f_r=f_0'=2.64\text{Hz}$，

加速度共振频率： $f_r = Q_m f_0' \sqrt{1-\frac{1}{2{Q_m}^2}} = 2.92\text{Hz}$.

1-21 有一质点振动系统被外力所策动，试证明当系统发生速度共振时，系统每周期的损耗能量与总的振动能量之比等于 $\frac{2\pi}{Q_m}$ 。

解：系统每个周期损耗的能量

$$\overline{E} = \overline{W}_F T = \frac{1}{2} R_m v_a^2 T$$

$$\therefore \qquad \frac{\overline{E}}{E} = \frac{\frac{1}{2} R_m v_a^2 T}{\frac{1}{2} M_m v_a^2} = \frac{R_m}{f M_m},$$

发生速度共振时， $f = f_0$ 。

$$\therefore \qquad \frac{\overline{E}}{E} = \frac{R_m}{f_0 M_m} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_0 M_m}{R_m}} = \frac{2\pi}{Q_m} 。$$

1-22 试证明：（1）质点作强迫振动时，产生最大的平均损耗功率的频率就等于系统的无阻尼固有频率 f_0；（2）假定 f_1 与 f_2 为在 f_0 两侧，其平均损耗功率比 f_0 下降一半时所对应的两个频率，则有 $Q_m = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$.

证明：（1）平均损耗功率为

$$\overline{W}_R = \frac{1}{T}\int_0^T W_R \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} R_m v_a^2 \quad （R_m \text{为力阻，} v_a \text{为速度振幅）}$$

质点强迫振动时的速度振幅为

$v_a = \frac{F_a Q_m z}{\omega_0 M_m \sqrt{z^2 + (z^2-1)^2 Q_m^2}}$,（$F_a$ 为外力振幅，ω_0 为固有频率，M_m 为质量，Q_m 为力学品质因素，频率比 $z = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$）

当 z =1 即 $f = f_0$ 时，发生速度共振，v_a 取最大值，产生最大的平均损耗功率。

（2） $\overline{W_R} = -\frac{1}{2} R_m v_a^2$

$$\overline{W}_{R\max} = -\frac{1}{2} R_m v_{a\max}^2 = -\frac{1}{2} R_m \frac{F_a^2 Q_m^2}{\omega_0^2 M_m^2}$$

$\overline{W_R} = \frac{1}{2}\overline{W}_{R\max}$ 　则 $-\frac{1}{2} R_m v_a^2 = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2} R_m \frac{{F_a}^2 Q_m^2}{\omega_0^2 M_m^2})$ 　即 　$2 v_a^2 = \frac{{F_a}^2 Q_m^2}{\omega_0^2 M_m^2}$ （1）

把 $v_a=\dfrac{F_aQ_mz}{\omega_0M_m\sqrt{z^2+(z^2-1)^2Q_m^2}}$，带入式（1），则 $z^2=(z^2-1)^2Q_m^2$（2）

由式（2）得 $-z=(z^2-1)Q_m$ 解得 $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4Q_m^2}}{2Q_m}$ 取 $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{1+4Q_m^2}}{2Q_m}$

$z=(z^2-1)Q_m$ 解得 $z=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4Q_m^2}}{2Q_m}$ 取 $z_2=\dfrac{1+\sqrt{1+4Q_m^2}}{2Q_m}$

则 $z_2-z_1=\dfrac{1}{Q_m}$ 即 $\dfrac{f_2}{f_0}-\dfrac{f_1}{f_0}=\dfrac{f_2-f_1}{f_0}=\dfrac{1}{Q_m}$

$$\therefore\ Q_m=\frac{f_0}{f_2-f_1}$$

1-23 有一质量为 0.4 kg的重物悬挂在质量可以忽略，弹性系数为 160N/m 的弹簧上，设系统的力阻为 2N·s/m，作用在重物上的外力为 $F_F=5\cos 8tN$。

（1）试求这一系统的位移振幅、速度与加速度振幅以及平均损耗功率；

（2）假设系统发生速度共振，试问这时外力频率等于多少？如果外力振幅仍为 5N，那么这时系统的位移振幅、速度与加速度振幅、平均损耗功率将为多少？

解：（1）由强迫振动方程 $M_m\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2}+R_m\dfrac{d\varepsilon}{dt}+K_m\varepsilon=F_F$，得

$$0.4\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}+2\frac{d\varepsilon}{dt}+160\varepsilon=5\cos 8t$$

则位移振幅 $\varepsilon_a=\dfrac{F_a}{\sqrt{(K_m-w^2M_m)^2+w^2{R_m}^2}}\approx 0.0369m$

速度振幅 $v_a=w\varepsilon_a=0.296m/s$

加速度振幅 $a_a=w^2\varepsilon_a=2.364m/s^2$

平均损耗功率 $P=-\dfrac{1}{2}R_m{v_a}^2=-0.0876(w)$

（2）速度共振时 $f_r=f_0^{'}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K_m}{R_m}-(\dfrac{R_m}{2M_m})^2}=3.158\text{Hz}$

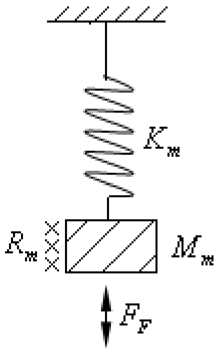
则位移振幅 $\varepsilon_a=\dfrac{F_a}{\sqrt{(K_m-w^2M_m)^2+w^2{R_m}^2}}\approx 0.126m$

速度振幅 $v_a=w\varepsilon_a=2.495m/s$

加速度振幅 $a_a = w^2\varepsilon_a = 49.6m/s^2$

平均损耗功率 $P = -\frac{1}{2}R_m v_a{}^2 = -6.225(w)$

1-24 试求出图 1-4-1 所示单振子系统，在 $t=0$，$\xi = v = 0$ 初始条件下，强迫振动位移解的表示式，并分别讨论 $\delta = 0$ 与 $\delta \neq 0$ 两种情形下，当 $\omega \to \omega_0$ 时解的结果。



解：对于强迫振动，解的形式为：

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0' t - \varphi_0) + \varepsilon_a \cos(\omega t - \theta)$$

其中 $\varepsilon_a = \frac{F_a}{\omega|Z_m|}$，$\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$。

初始条件：$\varepsilon = 0$，$v = 0$，

代入得：

$$\varepsilon_0 \cos\varphi_0 + \varepsilon_a \cos\theta = 0$$

$$-\delta\varepsilon_0 \cos\varphi_0 + \omega_0'\varepsilon_0 \sin\varphi_0 + \omega\varepsilon_a \sin\theta = 0$$

解得：

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_a}{\omega_0'}\sqrt{\delta^2(\cos\theta)^2 + \omega(\sin\theta)^2 + 2\delta\omega\cos\theta\sin\theta + \omega_0'^2(\cos\theta)^2}$$

$$\varphi_0 = \pi - \arccos\frac{\omega_0'\cos\theta}{\sqrt{\delta^2(\cos\theta)^2 + \omega^2(\sin\theta)^2 + 2\delta\omega\cos\theta\sin\theta + \omega_0'^2(\cos\theta)^2}}$$

令 $G = \sqrt{\delta^2(\cos\theta)^2 + \omega(\sin\theta)^2 + 2\delta\omega\cos\theta\sin\theta + \omega_0'^2(\cos\theta)^2}$

得：

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_a}{\omega_0'^2}Ge^{-\delta t}\cos(\omega_0' t - \varphi_0) + \varepsilon_a\cos(\omega t - \theta)\text{。}$$

当 $\delta = 0$ 时，$R_m = 0$，$\theta_0 = \arctan\frac{X_m}{R_m} = \frac{\pi}{2}$，$\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$，$\omega_0' = \omega$，

$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$，$\varepsilon_0 = \varepsilon_a$，

$$\therefore \quad \varepsilon = \varepsilon_a \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) + \varepsilon_a \cos(\omega t - \pi)$$

$$= -\varepsilon_a(\sin\omega_0 t + \cos\omega t)\text{。}$$

当 $\omega \to \omega_0$时，$\varepsilon_a \to \infty$，达到位移共振。

1-25 有一单振子系统，设在其质量块上受到外力$F_f = \sin^2 \frac{1}{2}\omega_0 t$的作用，试求其稳态振动的位移振幅。

解： 此单振子系统的强迫振动方程为

$$M_m \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + R_m \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + K_m \xi = F_F(t) = \sin^2(\frac{1}{2}\omega_0 t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\omega_0 t$$

则 $$M_m \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + R_m \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + K_m\xi = -\frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$M_m \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + R_m \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + K_m \xi = \frac{1}{2}\cos\omega_0 t \qquad (2)$$

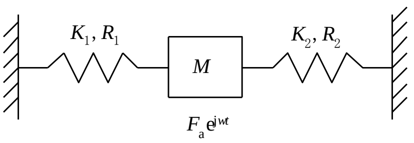
由式（1）得 $\xi = \frac{1}{2K_m}$

令$\xi = \xi_F e^{j\omega t}$代入式（2）得 $\xi_F = \dfrac{-\mathrm{j}\cdot\frac{1}{2}}{\omega_0\left[R_m + j(\omega_0 M_m - \frac{K_m}{\omega_0})\right]}$

则 $|\xi_F| = \dfrac{\frac{1}{2}}{\omega_0\left[R_m^2 + (\omega_0 M_m - \frac{K_m}{\omega_0})^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\omega_0 R_m}$

$\therefore \ \xi_A = \dfrac{1}{2K_m} - \dfrac{1}{2\omega_0 R_m}$

1-26 试求如图所示振动系统，质量块 M 的稳态位移表示式.



解： 对质量块进行受力分析，可得质量块 M 的运动方程为：

$$M\ddot{\xi} + (R_1 + R_2)\dot{\xi} + (K_1 + K_2)\xi = F_a e^{\mathrm{j}wt}$$

该方程式稳态解的一般形式为$\xi = \xi_a e^{\mathrm{j}wt}$，将其代入上式可得：

$$\xi_a = \frac{F_a}{jw[(R_1 + R_2) + j(M\omega - \frac{K_1 + K_2}{\omega})]} = |\xi_a| \cdot e^{\mathrm{j}(\frac{\pi}{2} + \theta_0)}$$

其中$|\xi_a|=\dfrac{F_a}{\omega\sqrt{(R_1+R_2)^2+\left(M\omega-\dfrac{K_1+K_2}{\omega}\right)^2}}$，$\theta_0=\arctan\dfrac{M\omega-\dfrac{K_1+K_2}{\omega}}{R_1+R_2}$.

故质量块的稳态位移表示式可以写为：

$\xi=|\xi_a|\cos(wt-\dfrac{\pi}{2}-\theta_0)$.

1-27 设有如图所示的耦合振动系统，有一外力$F_1=F_a e^{j\omega t}$作用于质量M_1上。M_1的振动通过耦合弹簧K_{12}引起M_2也随之振动，设M_1和M_2的振动位移与振动速度分别

图 1-4-1

为ξ_1，v_1与ξ_2，v_1。试分别写出M_1和M_2的振动方程，并求解方程而证明当稳态振动时

$$v_1=\frac{Z_2+Z_{12}}{Z_1Z_2+(Z_1+Z_2)Z_{12}}F_1 \text{与} v_2=\frac{Z_{12}}{Z_1Z_2+(Z_1+Z_2)Z_{12}}F_1。$$

其中

$$Z_1=j(\omega M_1-\frac{K_1}{\omega})+R_1,$$

$$Z_2=j(\omega M_2-\frac{K_2}{\omega})+R_2,$$

$$Z_{12}=-\frac{jK_{12}}{\omega}。$$

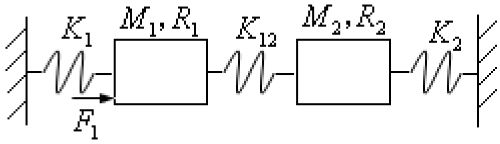


图 习题 1-27

解：对图中两个振子进行受力分析可得下列运动方程：

$$M_1\frac{d^2\varepsilon_1}{dt^2}+R_1\frac{d\varepsilon_1}{dt}+K_1\varepsilon_1+K_{12}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=F_1 \ M_2\frac{d^2\varepsilon_2}{dt^2}+R_2\frac{d\varepsilon_2}{dt}+K_2\varepsilon_2+K_{12}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)=0$$

设：

$$\varepsilon_1=Ae^{j\omega t}, \quad \varepsilon_2=Be^{j\omega t}$$

$$v_1=V_1e^{j\omega t}, \quad v_2=V_2e^{j\omega t}$$

于是方程可化为：

$$A(-M_1\omega^2+j\omega R_1+K_1+K_{12})-BK_{12}=F_a$$

$$B(-M_2\omega^2 + j\omega R_2 + K_2 + K_{12}) - AK_{12} = 0$$

设：

$$Z_1 = j(\omega M_1 - \frac{K_1}{\omega}) + R_1,\quad Z_2 = j(\omega M_2 - \frac{K_2}{\omega}) + R_2,\quad Z_{12} = -\frac{jK_{12}}{\omega}。$$

$\therefore$ 对上面的两个方程整理并求解可得

$$v_1 = \frac{Z_2 + Z_{12}}{Z_1 Z_2 + (Z_1 + Z_2)Z_{12}} F_1$$

$$v_2 = \frac{Z_{12}}{Z_1 Z_2 + (Z_1 + Z_2)Z_{12}} F_1$$

1-28 有一所谓压差式传声器，已知由声波引起在传声器振膜上产生的作用力振幅为：

$$F_a = Ap_a\omega，$$

其中 A 为常数，p_a 为传声器所在处声压的振幅对频率也为常数，如果传声器采用电动换能方式(动圈式)，并要求在一较宽的频率范围内，传声器产生均匀的开路电压输出，试问这一传声器的振动系统应工作在何种振动控制状态？为什么？

解： 压差式传声器产生的作用力振幅为 $F_a = Ap_a\omega$，其中 A， p_a 为常数，则 F_a 随 ω 变化。

电动换能方式传声器，其开路电压输出为 $E = Blv$，要使 E 均匀恒定，则要 v 恒定

系统处在质量控制区时 $v_a \approx \frac{F_a}{\omega M_m} = \frac{AP_a}{M_m}$ ，此时 v_a 与频率 ω 无关，故在一较宽的频率范围内，传声器将产生均匀的开路电压输出。

1-29 对上题的压差式传声器，如果采用静电换能方式(电容式)，其他要求与上题相同，试问这一传声器的振动系统应工作在何种振动控制状态？为什么？

解： 传声器开路输出电压 E 与振膜位移有如下关系：

$$E = \frac{E_0}{D}\varepsilon$$

$\because$ 只有在力阻控制区，

$$\varepsilon = \frac{F_a}{\omega R_m} = \frac{Ap_a}{R_m}，$$

即在此控制区，输出电压 E 与频率 ω 无关。

∴传声器的振动系统应工作在力阻控制区。

1-30 有一小型动圈扬声器，如果在面积为S_0的振膜前面加一声号筒，如图所示，已知在此情况下，振膜的辐射阻变为$R_r=\rho_0 C_0 S_0$（参见§5.5）。试问对这种扬声器，欲在较宽的频率范围内，在对频率为恒定的外力作用下，产生均匀的声功率，其振动系统应工作在何种振动控制状态？为什么？

解：动圈扬声器消耗于声辐射部分的平均损耗功率为 $\bar{W}=\frac{1}{2}R_r v_a^2=\frac{1}{2}\rho_0 C_0 S_0 v_a^2$

其中ρ_0，C_0，S_0均为常数，要使$\bar{W}$均匀，则v_a^2应不受的$\bar{W}$影响。故振动系统应工作在力阻控制区，此时$v_a \approx \frac{F_a}{R_m}$（其中$F_a$为频率恒定的外力，$R_m$也恒定）。

1-31 有一如图所示的供测试用动圈式振动台，台面M_m由弹簧K_m支撑着，现欲在较宽的频率范围内，在音圈上施加对频率恒定的电流时，能使台面M_m产生均匀的加速度，试问其振动系统应工作在何种振动控制状态？为什么？

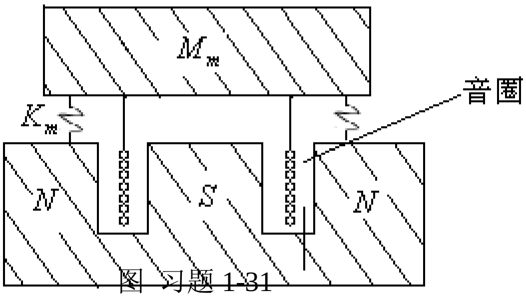
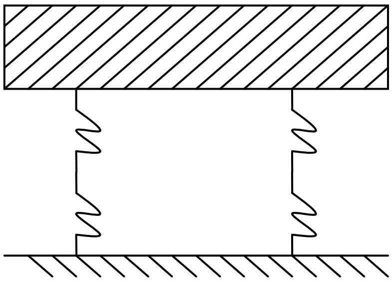


图 习题1-31

解：音圈通以I电流时，在磁场下产生电动力$F=B\ l\ I$，由$F=M_m a$可见，只有在质量控制区$a\approx\frac{F_a}{M_m}$时，产生的加速度与频率无关，是均匀的。

1-32 有一试验装置的隔振台，如图所示，已知台面的质量 M_m=1.5×10^3 kg，台面由四组相同的弹簧支撑，每组由两只相同的弹簧串联而成。已知每只弹簧在承受最大负荷为600 kg时，产生的位移3 ㎝，试求该隔振系统的固有频率，并问当外界基础振动的位移振幅为1 ㎜、频率为20Hz时，隔振台M_m将产生多大的位移振幅？



解： 每只弹簧的劲度系数 K=600×9.8/0.03=1.96×10^5 N/m

每组弹簧的总劲度 K_1=K/2

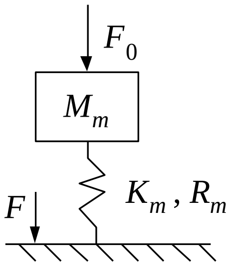
四组弹簧并联后的劲度 K_2=4 K_1=2 K =3.92×10^5 N/m

则固有频率 $f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_2}{M}}=2.57$ Hz

由振动方程$M_m\ddot{\xi}+K_m(\xi-\xi_0)=0$，将$\xi=\xi_a e^{jwt}$，$\xi_0=\xi_a{}^{'}e^{jwt}$代入得，

$$\xi_a=\frac{K\xi_a{}'}{K-w^2M}=0.0168\ \text{㎜}$$

1-33 设有如图所示的主动隔声系统，有一外力 $F_0=F_{10}e^{j\omega t}$ 作用于质量块 M_m 上，试求传递在基础上力 F 与 F_0 的振幅比.



解：对质量块进行受力分析，可得质量块 M_m 的振动方程为：

$$M_m\ddot{\xi}+R_m\dot{\xi}+K_m\xi=F_{10}e^{jwt}$$

其稳态解的一般形式为 $\xi=\xi_a\cos(\omega t-\theta)$.

其中 $\xi_a=\dfrac{F_{10}}{\omega|Z_m|}=\dfrac{F_{10}}{\omega\sqrt{R_m{}^2+\left(\omega M_m-\dfrac{K_m}{\omega}\right)^2}}$， $\theta=\arctan\dfrac{\omega M_m-\dfrac{K_m}{\omega}}{R_m}$.

弹簧传递给基础的作用力为 $F=K_m\cdot\xi=K_m\xi_a\cos(\omega t-\theta)$， 则 $F_a=\xi_aK_m$.

由此传递给基础的力 F 与 F_0 的振幅比 $D_F=\dfrac{F_a}{F_{10}}=\dfrac{K_m}{\omega\sqrt{R_m{}^2+\left(\omega M_m-\dfrac{K_m}{\omega}\right)^2}}$.

1-34 有一振动物体产生频率为 f，加速度振幅为 a_{10} 的振动，现用一动圈式加速度计去测量。假定已知加速度计振动系统的固有频率为 f_0，力学品质因素为 Q_m， 音圈导线总长为 l，磁隙中的磁通量密度为 B。试求该加速度计的开路输出电压将为多少？

解：动圈式加速度计测量

由 $Q_m=\dfrac{\omega_0M_m}{R_m}$ 得 $R_m=\dfrac{\omega_0M_m}{Q_m}$

由 $f_0=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K_m}{M_m}}$ 得 $K_m=4\pi^2f_0^2M_m$

则 $$E_a=Bl\frac{M_ma_{10}}{|Z_m|}=Bla_{10}\frac{M_m}{\left[R_m^2+(\omega M_m-\dfrac{K_m}{\omega})^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= Bla_{10}\frac{M_m}{\left[R_m^2+\omega^2M_m^2-2K_mM_m+\frac{K_m^2}{\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{Bla_{10}}{\left[\frac{4\pi^2f_0^2}{Q_m^2}+\omega^2-8\pi^2f_0^2+\frac{16\pi^4f_0^4}{\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

1-35 设有一调制形式的外力作用于单振子系统的质量上，此外力可表示成

$$F_F=F_a(1+h\sin\omega_1 t)\sin\omega t\,,$$

其中 h 为一常数，称为调制深度，试求振动系统的位移。

解：外力表达式为 $F_F=F_a(1+h\sin\omega_1 t)\sin\omega t$

$$=F_a\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2}F_ah[\cos(\omega_1+\omega)t+\cos(\omega_1-\omega)t]$$

用指数形式表示外力为 $F_F=F_ae^{j(\omega t-\frac{\pi}{2})}-\frac{1}{2}F_ahe^{j(\omega+\omega_1)t}+\frac{1}{2}F_ahe^{j(\omega-\omega_1)t}$

振子进行强迫振动，由式（1-5-14）得，振子系统的位移为

$$\varepsilon=\frac{F_a}{\omega|Z_1|}\cos(\omega t-\frac{\pi}{2}-\theta_1)+\frac{\frac{1}{2}hF_a}{(\omega-\omega_1)|Z_3|}\cos[(\omega-\omega_1)t-0-\theta_3-\frac{\pi}{2}]$$

$$-\frac{\frac{1}{2}hF_a}{(\omega+\omega_1)|Z_2|}\cos[(\omega+\omega_1)t-0-\theta_2-\frac{\pi}{2}]$$

其中：$\theta_1=\arctan\frac{\omega M_m-\frac{K_m}{\omega}}{R_m}$；

$$\theta_2=\arctan\frac{(\omega+\omega_1)M_m-\frac{K_m}{\omega+\omega_1}}{R_m}\,;$$

$$\theta_3=\arctan\frac{(\omega-\omega_1)M_m-\frac{K_m}{\omega-\omega_1}}{R_m}\,;$$

$$|Z_1|=\sqrt{R_m^2+(\omega M_m-\frac{K_m}{\omega})^2}\,;$$

$$|Z_2|=\sqrt{R_m^2+[(\omega+\omega_1)M_m-\frac{K_m}{\omega+\omega_1}]^2}\ ;$$

$$|Z_3|=\sqrt{R_m^2+[(\omega-\omega_1)M_m-\frac{K_m}{\omega-\omega_1}]^2}\ 。$$

1-36 设有一呈锯齿形式的外力作用于单振子的质量上，此力可表示为 $F_F=F_a(1-\frac{2t}{T})$（$kT\le t\le(1+k)T,k=0,1,2,\cdots$）

试求振动系统的位移。

解： 质点的振动方程为 $M_m\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}+R_m\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+K_m\xi=F_F(t)=F_a(1-\frac{2t}{T})$ （1）

又 $F_F(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t$,（$\omega=\frac{2\pi}{T}$） （2）

其中 $A_0=\frac{1}{T}\int_0^T F_F(t)\mathrm{d}t=0$

$A_n=\frac{2}{T}\int_0^T F_F(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t=0$

$B_n=\frac{2}{T}\int_0^T F_F(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t=\frac{2F_a}{n\pi}$

式（2）也可表示为 $F_F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\cos(n\omega t-\varphi_n)$ （3）

其中 $F_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}=\frac{2F_a}{n\pi}$ ， $\varphi_n=\arctan\frac{2F_a}{n\pi}$

把式（3）表示成为复数形式 $F_F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega t-\varphi_n)}$

则式（1）可写成 $M_m\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}+R_m\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+K_m\xi=\sum_{n=0}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega t-\varphi_n)}$ （4）

设 $\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n$，代入式（4）可得 $\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{\mathrm{j}n\omega Z_n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega t-\varphi_n)}$

其中 $Z_n=R_n+\mathrm{j}X_n=R_m+\mathrm{j}(n\omega M_m-\frac{K_m}{n\omega})$

取 ξ 的实部得 $\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{n\omega|Z_n|}\cos(n\omega t-\varphi_n-\theta_n-\frac{\pi}{2})$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2F_a}{\pi n^2\omega|Z_n|}\cos(n\omega t-\varphi_n-\theta_n-\frac{\pi}{2})$$

式中 $\left|Z_n\right| = \sqrt{R_m^2 + (n\omega M_m - \dfrac{K_m}{n\omega})^2}$

$$\theta_n = \arctan\frac{X_m}{R_m} = \arctan\frac{n\omega M_m - \dfrac{K_m}{n\omega}}{R_m}$$

1-37 设有如下形式的外力

$$F_F = \begin{cases} F_a, & kT \le t \le \left(k+\dfrac{1}{2}\right)T \\ -Fa, & (k+\dfrac{1}{2})T \le t \le (k+1)T \\ & (k=0,1,2,\cdots) \end{cases}$$

作用于单振子的质量上，试求振动系统位移.

解：将周期作用力展开成傅立叶级数，可得

$$F_F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

其中 $F_n = \sqrt{A_n^{\ 2} + B_n^{\ 2}}$， $\varphi_n = \arctan\dfrac{B_n}{A_n}$.

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F_F(t)\mathrm{d}t = 0,$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T F_F(t)\cos nwt\mathrm{d}t = 0,$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T F_F(t)\sin nwt\mathrm{d}t = \frac{2F_a}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases} \dfrac{4F_a}{n\pi} & n\text{为奇数} \\ 0 & n\text{为偶数} \end{cases}.$$

由此 $F_n = B_n$， $\varphi_n = \dfrac{\pi}{2}(n\text{为奇数})$， 即

$$F_1 = \frac{4}{\pi}F_a,\ F_3 = \frac{4}{3\pi}F_a,\ F_5 = \frac{4}{5\pi}F_a,\ \cdots, F_n = \frac{4}{n\pi}F_a;$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2},\ \varphi_3 = \frac{\pi}{2}_a,\ \varphi_5 = \frac{\pi}{2},\ \cdots, \varphi_n = \frac{\pi}{2}(n\text{为奇数}).$$

由(1-5-14)得质点振动系统得位移

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n}{n\omega\left|Z_n\right|}\cos(nwt - \varphi_n - \theta_n - \frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{4F_a}{\omega\pi\left|Z_1\right|}\cos(wt - \theta_1 - \pi) + \frac{4F_a}{9\omega\pi\left|Z_3\right|}\cos(3wt - \theta_3 - \pi) + \cdots \frac{4F_a}{n^2\omega\pi\left|Z_n\right|}\cos(nwt - \theta_n - \pi)\ (n\ \text{为奇数})$$

习题 2

2-1 有一质量为m，长为l的细弦以F的张力张紧，试问：

(1) 当弦作自由振动时其基频为多少？

(2) 设弦中点位置基频的位移振幅是B，求基频振动的总能量。

(3) 距细弦一端$l/4$处的速度振幅为多少？

解：(1) 简正频率 $f_n = \dfrac{n}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\delta}}$，且线密度$\delta = \dfrac{m}{l}$

$\therefore$ 基频 $f_1 = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\delta}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{T}{ml}}$。

(2) 基频振动的总能量$E_1 = \dfrac{16T\eta_0^2}{l\pi^2} = \dfrac{16TB^2}{l\pi^2}$。

(3) 弦的位移的总和形式$\eta(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \cos(\omega_n t - \varphi_n)$

速度表达式为$v(t,x) = \dfrac{\partial \eta(t,x)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}(-B_n\omega_n \sin k_n x)\sin(\omega_n t - \varphi_n)$

$\therefore$ 距一端$0.25m$处的速度振幅$V_a\Big|_{x=\frac{l}{4}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot 2\pi \cdot \dfrac{n}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\delta}}\sin(\dfrac{n\pi}{l}\cdot\dfrac{l}{4})$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sqrt{\frac{T}{ml}} \sin\frac{n\pi}{4}$$

$$V_a\Big|_{x=\frac{3l}{4}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\delta}}\sin(\frac{n\pi}{l}\cdot\frac{3l}{4})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sqrt{\frac{T}{ml}} \sin\frac{3n\pi}{4}$$

2-2 长为l的弦两端固定，在距一端为x_0处拉开弦以产生η_0的静位移，然后释放。

(1) 求解弦的振动位移；

（2）以 $x_0 = l/3$ 为例，比较前三个振动方式的能量。

解：弦的振动位移形式为：

$$\eta(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (C_n \cos\omega_n t + D_n \sin\omega_n t)$$

其中 $k_n = \dfrac{n\pi}{l}$， $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{l}$， $C_n = B_n \cos\varphi_n$， $D_n = B_n \sin\varphi_n$

（1）由初始条件可得：$\eta(t=0) = \begin{cases} \dfrac{\eta_0}{x_0} x & (0 \le x \le x_0) \\ \dfrac{\eta_0}{l - x_0}(l - x) & (x_0 \le x \le l) \end{cases}$

$$v(t=0) = (\frac{\partial \eta}{\partial t})_{t=0} = 0 \qquad (0 \le x \le l)$$

又 $\begin{cases} C_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \eta_0(x) \sin k_n x dx \\ D_n = \dfrac{2}{l\omega_n}\displaystyle\int_0^l v_0(x) \sin k_n x dx \end{cases}$

则 $C_n = \dfrac{2}{l}\left[\displaystyle\int_0^{x_0} \dfrac{\eta_0}{x_0} x \sin k_n x dx + \int_{x_0}^{l} \dfrac{\eta_0}{l - x_0}(l - x)\sin k_n x dx\right] = \dfrac{2\eta_0 l^2}{n^2\pi^2 x_0 (l - x_0)} \sin\dfrac{n\pi}{l} x_0$

$D_n = 0$

则 $\sin\varphi_n = 0 \qquad \varphi_n = n\pi$

$B_n = C_n$

$$\eta(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{2\pi}{l} x \cos(\omega_n t - \varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\eta_0 l^2}{n^2\pi^2 x_0 (l - x_0)} \sin\frac{n\pi}{l} x_0 \sin\frac{2\pi x}{l} \cos\frac{n\pi c}{l} t$$

（2） $E_n = \dfrac{n^2\pi^2 c^2 \delta}{4l} B_n^2 = \dfrac{n^2\pi^2 T}{4l} B_n^2$

当 $x_0 = \dfrac{1}{3} l$ 时， $B_n = C_n = \dfrac{2\eta_0 l^2}{n^2\pi^2 \dfrac{l}{3}(l - \dfrac{l}{3})} \sin\dfrac{n\pi}{l} \cdot \dfrac{l}{3} = \dfrac{9\eta_0}{n^2\pi^2} \sin\dfrac{n\pi}{3}$

则 $E_1 = \dfrac{\pi^2 T}{4l}(\dfrac{9\eta_0}{\pi^2} \sin\dfrac{\pi}{3})^2 = \dfrac{243 T \eta_0^2}{16\pi^2 l}$

$$E_2 = \frac{243 T \eta_0^2}{64\pi^2 l}$$

$$E_3 = 0$$

2-3 长为l的弦两端固定，在初始时刻以速度v_0敲击弦的中点，试求解弦的振动位移。

解：弦的振动位移表达式为

$$\eta(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin k_n x(C_n\cos\omega_n t+D_n\sin\omega_n t)$$

$\therefore$ 可得速度表达式为

$$v(t,x)=\frac{\partial\eta(t,x)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sin k_n x(-\omega_n C_n\sin\omega_n t+\omega_n D_n\cos\omega_n t)$$

由题可得初始条件：

$$\eta\big|_{t=0}=0\text{；}\quad \frac{\partial\eta}{\partial t}\Big|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{2v_0}{l}x & ,0\le x\le\dfrac{l}{2}\\ 2v_0-\dfrac{2v_0}{l}x & ,\dfrac{l}{2}<x\le l\end{cases}$$

通过傅立叶变换可得：

$$C_n=0\text{；}$$

$$D_n=\frac{4v_0}{kl^3\omega_n^3}(-\sin kl+2\sin\frac{kl}{2})\text{。}$$

$\therefore$ 位移表达式为$\eta(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin k_n x\sin\omega_n t$

其中$D_n=\dfrac{4v_0}{kl^3\omega_n^3}(-\sin kl+2\sin\dfrac{kl}{2})$。

2-4 长为l的弦两端固定，在初始时刻以速度v_0敲击弦的中心，试证明外力传给 弦的初动能等于弦作自由振动时所有振动方式振动能的总和。

解：初始条件$\begin{cases}\eta_{(t=0)}=0\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t}\Big|_{t=0}^{x=\frac{l}{2}}=v_0\end{cases}$

弦的总位移为$\eta(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin k_n x(C_n\cos\omega_n t+D_n\sin\omega_n t)$,

其中$C_n=B_n\cos\varphi_n,D_n=B_n\sin\varphi_n$，（$\omega_n=\dfrac{n\pi c}{l},\ k_n=\dfrac{\omega_n}{c}$）

又$D_n=\dfrac{2}{l\omega_n}\int_0^l v_0(x)\sin k_n x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{l\omega_n}\int_0^l v_0\sin k_n x\mathrm{d}x=\dfrac{2v_0 l}{n^2\pi^2 c}(1-\cos n\pi)$

$C_n=0$

当 n 为偶数时，$D_2 = D_4 = D_6 = \cdots = 0$

当 n 为奇数时，$D_1 = \dfrac{4v_0 l}{\pi^2 c}$，$D_3 = \dfrac{1}{9}\dfrac{4v_0 l}{\pi^2 c}$，$D_5 = \dfrac{1}{25}\dfrac{4v_0 l}{\pi^2 c}$，$\cdots$

故 $B_n = D_n$，$\varphi_n = 0$

又弦振动时的总能量为 $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{T}{4l} n^2 \pi^2 B_n^2) = \dfrac{4Tv_0^2 l}{\pi^2 c^2}(1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{25}+\cdots)$

$$= \frac{4Tv_0^2 l}{\pi^2 c^2}(\frac{\pi^2}{8}) = \frac{Tv_0^2 l}{2c^2} = \frac{Tv_0^2 l}{2}\frac{\delta}{T} = \frac{1}{2}v_0^2(l\delta)$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 = E_{k_0} \qquad （c^2 = \frac{T}{\delta}）$$

外力传给弦的初始动能为 $E_{k_0} = \dfrac{1}{2}mv_0^2$

2-5 设有一根弦，一端固定而另一端延伸到无限远(即认为没有反射波回来)，假设在离固定端距离 l 处，施加一垂直于弦的力 $F = F_a e^{j\omega t}$，试求在 $x = l$ 力作用点的左、右两方弦上的位移表达式。

提示：在弦的力作用点处，应有连接条件：

$$\xi_1 = \xi_2 \text{ 和 } T\frac{\partial \xi_1}{\partial x} - T\frac{\partial \xi_2}{\partial x} = F \text{。}$$

2-6 有长为 l，线密度为 σ 的弦。其一端经一无摩擦的滑轮悬挂一重物 M，已知弦所受的张力 T，如图所示。试求

（1） 该弦作自由振动时的频率方程；

（2） 假设此重物 M 比弦的总质量大很多时，求该弦的基频近似值。

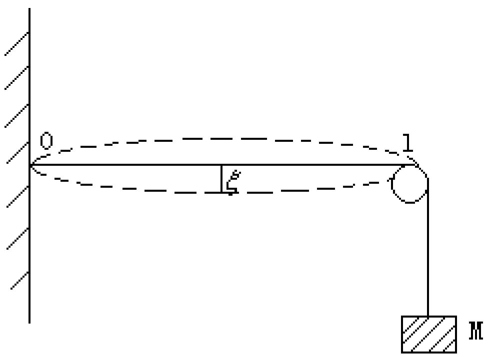


图 2－6

解：（1）由题意可知其初始条件和边界条件为
$$\begin{cases} \xi|_{x=0} = 0 \\ -T\dfrac{\partial \xi}{\partial x}|_{x=l} = M\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}|_{x=l} \end{cases}$$

弦的振动位移为 $\xi(t,x) = (A\cos\dfrac{u}{c}x + B\sin\dfrac{u}{c}x)\cos(ut-\varphi)$（其中 $u = \omega_n = 2\pi f_n$）

当 $\xi|_{x=0} = 0$ 时，得 $A = 0$ 则 $\xi(t,x) = B\sin\dfrac{u}{c}x\cos(ut-\varphi)$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -Bu\sin\frac{u}{c}x\sin(ut-\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -Bu^2 \sin\frac{u}{c}x\cos u(t-\varphi)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = B\frac{u}{c}\cos\frac{u}{c}x\cos u(t-\varphi)$$

带入边界条件可得： $-TB\frac{u}{c}\cos\frac{u}{c}l\cos(ut-\varphi) = -MBu^2\sin\frac{u}{c}l\cos(ut-\varphi)$

即 $\tan\frac{u}{c}l = \frac{T}{Mcu}$

$$\frac{u}{c}l\tan\frac{u}{c}l = \frac{T}{Mcu}\frac{u}{c}l = \frac{Tl}{Mc^2} = \frac{\delta l}{M} = \frac{M_S}{M}$$

（其中$c=\sqrt{\frac{T}{\delta}}$，弦的质量为$M_s$，线密度为$\delta$）

令$r=\frac{u}{c}l$，$\beta=\frac{M_S}{M}$，则$r\tan r=\beta$，这就是弦作自由振动时的频率方程。

（2）当$M_m << m$时$\beta<<1$，故可近似为 $\gamma\tan\gamma = \gamma\left[\gamma+\frac{\gamma^3}{3}\right] = \gamma^2+\frac{\gamma^4}{3}$

则 $r\tan r=\beta$ 可简化为 $\gamma^2+\frac{\gamma^4}{3}=\beta$.求解这一代数方程，可得近似关系为

$$\gamma^2 = \beta\left(1-\frac{\beta}{3}\right).$$

$\because$ $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots$ $(x^2<1)$ 且$\beta<<1$

$\therefore$ $\frac{1}{1+\frac{\beta}{3}} \approx 1-\frac{\beta}{3}$

则 $r^2 = \beta\cdot\frac{1}{1+\frac{\beta}{3}} = \frac{M_S}{M}\cdot\frac{1}{1+\frac{M_s}{3M}} = M_s\cdot\frac{1}{M+\frac{M_s}{3}}$

又$r=\frac{u}{c}l=\frac{2\pi f_n}{c}l$，$c=\sqrt{\frac{T}{\delta}}, M_s=\delta l$

则 $f_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{c}{l}\sqrt{M_s\cdot\frac{1}{M+\frac{M_s}{3}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{T}{\delta l^2}\cdot M_s\cdot\frac{1}{M+\frac{M_s}{3}}}$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{T}{lM_s}\cdot M_s\cdot\frac{1}{M+\frac{M_s}{3}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_m}{M+\frac{M_s}{3}}}$$ （其中$K_m=\frac{T}{l}$）

2-7 长为l的棒一端固定一端自由，如果在初始时刻有沿棒的轴向力作用于自由端，使该端产生静

位移 ξ_0，然后释放. 试求棒作纵振动时各次振动方式的位移振幅.

解： 由(2-2-7)式得棒的纵振动一般表达式为

$$\xi(t,x)=(A\cos kx+B\sin kx)\cos(\omega t-\varphi).$$

由棒一端固定一端自由的边界条件得

$$\begin{cases}\xi\,|_{x=0}=0 & (1)\\ \left.\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x=l}=0 & (2)\end{cases}$$

由(1)式 $\Rightarrow A\cos(wt-\varphi)=0\Rightarrow A=0.$

由(2)式 $\Rightarrow kB\cos kl\cos(wt-\varphi)=0\Rightarrow\cos kl=0\Rightarrow k_n=(n-\dfrac{1}{2})\dfrac{\pi}{l}\quad(n=1,2,3,\cdots).$

由此各阶简正频率对应的位移表达式为

$$\xi_n(t,x)=B_n\sin k_nx\cos(\omega_nt-\varphi_n).$$

棒的总位移为各简正频率位移之和，即 $\xi(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin k_nx\cos(\omega_nt-\varphi_n)$.

棒的初始条件为

$$\begin{cases}\xi\,|_{t=0}=x\cdot\dfrac{\xi_0}{l} & (3)\\ \left.\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & (4)\end{cases}$$

由(4) $\Rightarrow\sin\varphi_n=0\Rightarrow\varphi_n=n\pi$.

由(3) $\Rightarrow B_n\cos(-\varphi_n)=\dfrac{2}{l}\int_0^l\xi_0(x)\sin k_nx\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow B_n=(-1)^n\cdot\frac{2}{l}\int_0^l x\cdot\frac{\xi_0}{l}\sin k_nx\mathrm{d}x=-\frac{2\xi_0}{(n\pi-\frac{\pi}{2})^2}.$$

2-8 有一长 1m、截面为 $1\times10^{-4}\mathrm{m}^2$ 的铝棒(ρ=2.7×103kg/m^3)，两端自由.

(1) 试求棒作纵振动时的基频，并指出在棒的哪一个位置位移振幅最小？

(2) 如果在一端负载着 0.054kg 的重物，试问棒的基频变为多少？位移振幅最小的位置变到何处？

解： 由(2-2-7)式得棒的纵振动一般表达式为

$$\xi(t,x)=(A\cos kx+B\sin kx)\cos(\omega t-\varphi).$$

由棒两端自由的边界条件得

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 & (1) \\ \left.\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 & (2) \end{cases}$$

由(1)式$\Rightarrow Bk\cos(wt-\varphi)=0 \Rightarrow B=0$.

由(2)式$\Rightarrow kA\sin kl\cos(wt-\varphi)=0 \Rightarrow \sin kl=0 \Rightarrow k_n=\dfrac{n\pi}{l} \quad (n=1,2,3,\cdots)$

$\Rightarrow f_n=\dfrac{\omega_n}{2\pi}=\dfrac{k_n c}{2\pi}=\dfrac{nc}{2l}$.

(1) 棒作纵振动的基频为 $f_1=\dfrac{c}{2l}=\dfrac{1}{2\times 1}\sqrt{\dfrac{6.85\times 10^{10}}{2.7\times 10^{3}}}=2520\,\text{Hz}$.

该简正频率下的位移表达式为：$\xi_1(t,x)=A_1\cos k_1 x\cos(\omega_1 t-\varphi_1)$.

当$\cos k_1 x=0$，即$x=(n-\dfrac{1}{2})l$时，位移振幅最小且为零，由于 x 的取值范围为[0, l]，得知$x=\dfrac{l}{2}=0.5$ m 的点位移振幅最小.

(2) 当在一端负载时，由(2-2-25)得$\dfrac{\tan kl}{kl}=-\dfrac{M_m}{m}=-0.2$，即$\tan k=-0.2k$，利用数值方法可以求得 k_1=2.65.

该简正频率下的位移表达式为：$\xi_1(t,x)=A_1\cos k_1 x\cos(\omega_1 t-\varphi_1)$.

当$\cos k_1 x=0$，即$x=\dfrac{(n-\frac{1}{2})\pi}{2.65}$时，位移振幅最小且为零，由于 x 的取值范围为[0, l]，得知 x_1=0.59m 的点位移振幅最小.

2-9 有一长为 l 的棒一端固定一端有一质量负载 M_{m}。

（1）试求棒作纵振动时的频率方程；

（2）如果棒的参数与 2-8 相同，试求其基频，并指出在棒的哪一位置位移振幅最大？

解：（1）棒的位移方程为

$$\eta(t,x)=(A\cos kx+B\sin kx)\cos(wt-\varphi)$$

由边界条件得：

$$\begin{cases} \eta(x=0)=0 \\ ES(\dfrac{\partial \eta}{\partial x})_{x=l}=-M_m(\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2})_{x=l} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ \dfrac{ctgkl}{kl}=\dfrac{M_m}{m} \end{cases}$$

故频率方程为：$ctgkl=\dfrac{M_m}{m}kl$

（2）将 2-8 参数代入得

$$ctgkl = 0.2kl, (\frac{M_m}{m} = 0.2)$$

$$\Rightarrow ctgk = 0.2k$$

由牛顿迭代法知： $k_1 = 1.3138$

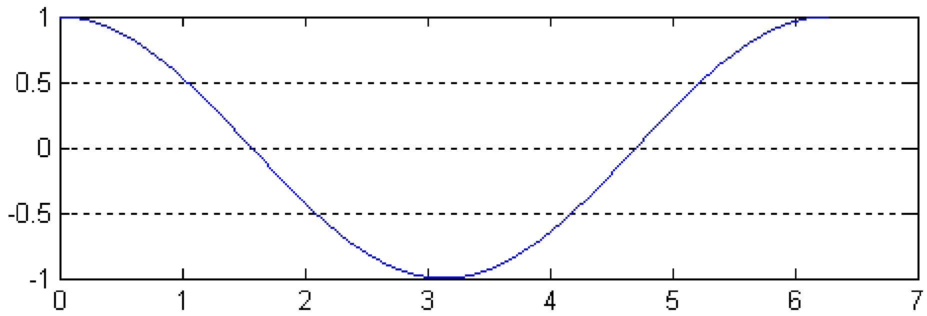
则 $f_1 = \frac{k_1 c}{2\pi} = 1.05 \times 10^3$ （Hz）

基频振幅为：$\eta_1 = B\sin k_1 x, (0 \le x \le 1)$

当 x=1 时， $\sin k_1 x$ 达到最大，即振幅最大。

2-10 试分别画出两端自由和两端固定的棒，作 n=1, 2 模式的自由纵振动时，它们的位移振幅随位置 x 的分布图。

解：两端自由的棒：



两端固定的棒:

2-11 设有一长为l，两端自由的棒作纵振动。假设其初始时刻的位移分布为$\xi_0(x) = \cos\frac{\pi}{l}x$，初速度 $v_0(x) = 0$。求该棒振动位移表示式。

解：棒做纵振动时，其方程的解为：

$$\zeta = (A\cos kx + B\sin kx)\cos(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = k(-A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t - \varphi)$$

两端自由，即不受应力作用，$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial x}\big|_{x=0} = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x}\big|_{x=l} = 0 \Rightarrow kl = n\pi \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{l} \Rightarrow f_n = \frac{nc}{2l} \end{cases}$

所以，$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos k_n x \cos(\omega_n - \varphi_n)$

$$v=\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos k_n x[-\omega_n\sin(\omega_n t-\varphi_n)]$$

$$\left.\begin{array}{r}\zeta_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos k_n x\cos(-\varphi_n)=\cos\frac{\pi}{l}x\Rightarrow A_n\cos\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\cos\frac{\pi}{l}x\cos k_n xdx\\ v_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos k_n x(\omega_n\sin\varphi_n)=0\Rightarrow A_n\omega_n\sin\varphi_n=0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_n\cos\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\cos\frac{\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n=2,3,\cdots\end{cases}\\ \sin\varphi_n=0\Rightarrow\varphi_n=n\pi\end{cases}$$

即 $A_1\cos\varphi_1=1\Rightarrow A_1=-1,\qquad A_n=0,(n=2,3,\cdots)$

所以 $\zeta=-\cos\frac{\pi}{l}x\cos(\frac{\pi c}{l}t-\pi)$

2-12 设有一端自由，一端固定的细棒在作纵振动，假设固定端取在坐标的原点，即 $x=0$ 处，而自由端取在 $x=l$ 处。试求该棒作自由振动时的简正频率，并与(2-2-20)式作一比较。

附：

$$f_n=(2n-1)\frac{c}{4l}\quad(n=1,2,3,\cdots)。\qquad(2\text{-}2\text{-}20)$$

解：棒的振动位移表达式 $\varepsilon(t,x)=(A_n\cos k_n x+B_n\sin k_n x)\cos(\omega t-\varphi)$

边界条件：$\varepsilon|_{x=0}=0$；$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}|_{x=l}=0$，

代入位移表达式解得：$A_n=0$；

$$k_n=\frac{2n-1}{2l}\pi。$$

于是可推出

$$f_n=(2n-1)\frac{c}{4l}\ (n=1,2,3,\cdots)。$$

若将自由端置于原点，固定端置于 $x=l$ 处，同样能得出与（2-2-20）相同的结论。

2-13 长为 l 的棒一端固定一端受沿棒轴方向的简谐力作用（ $F=F_a\cos\omega t$ ）。

（1）试求棒作纵振动时的位移表达式；

（2）证明当频率较低或棒较短时此棒相当于集中系统的一个弹簧，其弹性系数为 $K_m=\frac{ES}{l}$ 。

解：棒纵振动位移的一般表达式为：$\zeta=(A\cos kx+B\sin kx)\cos(\omega t-\varphi)$

满足边界条件：$\begin{cases}\zeta|_{x=0}=0\Rightarrow A=0\\ -ES(\frac{\partial\zeta}{\partial x})|_{x=l}=F_A\cos\omega t\Rightarrow B=-\frac{F_A}{ESk\cos kl}\cdot\frac{\cos\omega t}{\cos(\omega t-\varphi)}\end{cases}$

所以，$\zeta=-\dfrac{F_A}{ESk\cos kl}\cdot\dfrac{\cos\omega t}{\cos(\omega t-\varphi)}\cdot\sin kl\cdot\cos(\omega t-\varphi)=-\dfrac{F}{ESk\cos kl}\sin kx$

当频率较低或棒很短时，即 $kl<<1$时， $\cos kl\approx 1$， $\sin kx\approx kx\approx kl$

有 $\zeta\approx-\dfrac{F}{ESk\cdot 1}\cdot kl\approx-\dfrac{F}{ES}l\Rightarrow F=-\dfrac{ES}{l}\zeta$

即棒相当于集中系统的一个弹簧，其弹性系数为 $\dfrac{ES}{l}$。

2-14 长为 l 的棒一端钳定一端自由在进行横振动，设已知基频时自由端的位移振幅为 η_0，试求以 η_0 来表示的棒的基频位移。

解：设棒在 $x=0$ 端钳定， $x=l$ 端自由，于是边界条件可写为：

$$\eta\big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}\Big|_{x=0}=0,$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\Big|_{x=l}=0,\quad \frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\Big|_{x=l}=0。$$

代入横振动方程

$$\eta(t,x)=[Ach\frac{\omega}{v}x+Bsh\frac{\omega}{v}x+C\cos\frac{\omega}{v}x+D\sin\frac{\omega}{v}x]\cos(\omega t-\varphi)$$

可得 $A=-C$， $B=-D$，并有如下关系

$$A(ch\frac{\omega}{v}l+\cos\frac{\omega}{v}l)+B(sh\frac{\omega}{v}+\sin\frac{\omega}{v}l)=0$$

$$A(sh\frac{\omega}{v}l-\sin\frac{\omega}{v}l)+B(ch\frac{\omega}{v}+\cos\frac{\omega}{v}l)=0$$

设 $\mu=\dfrac{\omega}{v}l$，并用简正值（n=1, 2, 3, ⋯）代表 μ 的一系列根值。

$\therefore$ $$B_n=A_n\frac{\sin\mu_n-sh\mu_n}{\cos\mu_n+ch\mu_n},\quad \cos\mu_n sh\mu_n=-1$$

$\because$ 自由端基频位移振幅 $\eta_0=A_1Y_1(l)$

$$=A_1[(ch\mu_1-\cos\mu_1)+\frac{\sin\mu_1-sh\mu_1}{\cos\mu_1+ch\mu_1}(sh\mu_1-\sin\mu_1)]$$

$$=A_1\frac{2\sin\mu_1 sh\mu_1-2}{\cos\mu_1+ch\mu_1}$$

$\therefore$ $$A_1=\frac{\eta_0(\cos\mu_1+ch\mu_1)}{2(sh\mu_1\sin\mu_1-1)}$$

$\therefore$ 基频位移 $\eta_1(t,x)=A_1Y_1(x)\cos(\omega_1 t-\varphi_1)$，

其中：$Y_1(x)=(ch\frac{\mu_1}{l}x-\cos\frac{\mu_1}{l}x)+\frac{\sin\mu_1-sh\mu_1}{\cos\mu_1+ch\mu_1}(sh\frac{\mu_1}{l}x-\sin\frac{\mu_1}{l}x)$

$A_1=\frac{\eta_0(\cos\mu_1+ch\mu_1)}{2(sh\mu_1\sin\mu_1-1)}$。

2-15 长为l的棒一端钳定一端自由，如果初始时刻使棒具有位移$\eta_{t=0}=\frac{\eta_0}{l}x$，试解棒作横振动的位移表达式。

解：初始条件和边界条件为：$\eta_{x=0}=0$（1）；　　$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_{x=0}=0$ (2)

$\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)_{x=l}=0$ (3);　　$\left(\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right)_{x=l}=0$ (4)

$\eta_{t=0}=\frac{\eta_0}{l}x$ (5);　　$\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_{t=0}=0$ (6)

棒作横振动的总位移位为：

$$\eta(t,x)=\left[A\cosh\frac{\omega}{v}x+B\sinh\frac{\omega}{v}x+C\cos\frac{\omega}{v}x+D\sin\frac{\omega}{v}x\right]\sin(\omega t-\varphi)\quad（7）$$

把（1）、（2）代入（7）得　$A=-C,B=-D$

则　$$\eta(t,x)=\left[A(\cosh\frac{\omega}{v}x-\cos\frac{\omega}{v}x)+B(\sinh\frac{\omega}{v}x-\sin\frac{\omega}{v}x)\right]\sin(\omega t-\varphi)\quad（8）$$

把（5）、（6）代入（8）得

$$\left[A(\cosh\frac{\omega}{v}x-\cos\frac{\omega}{v}x)+B(\sinh\frac{\omega}{v}x-\sin\frac{\omega}{v}x)\right]\cos\varphi=\frac{\eta_0}{l}x$$

$$\left[A(\cosh\frac{\omega}{v}x-\cos\frac{\omega}{v}x)+B(\sinh\frac{\omega}{v}x-\sin\frac{\omega}{v}x)\right]\omega\sin\varphi=0$$

即　$\sin\varphi=0$　即$\varphi=n\pi$

$$A(\cosh\frac{\omega}{v}x-\cos\frac{\omega}{v}x)+B(\sinh\frac{\omega}{v}x-\sin\frac{\omega}{v}x)=\frac{\eta_0}{l}x$$

$\therefore$　$\eta(t,x)=\frac{\eta_0}{l}x\cos(\omega t-n\pi)$

2-16 长为l的棒两端自由，求棒作横振动的频率方程。

解：棒作横振动的位移方程为：

$$\eta(t,x)=[Ach\frac{w}{v}x+Bsh\frac{w}{v}x+C\cos\frac{w}{v}x+D\sin\frac{w}{v}x]\cos(wt-\varphi)$$

由边界条件得：$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0,\left.\dfrac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right|_{x=0}=0\\ \left.\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0,\left.\dfrac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right|_{x=l}=0\end{cases}$，

$\Rightarrow A=C,B=D$

$$\begin{cases}A(ch\dfrac{w}{v}l-\cos\dfrac{w}{v}l)+B(sh\dfrac{w}{v}l-\sin\dfrac{w}{v}l)=0\\ A(sh\dfrac{w}{v}l+\sin\dfrac{w}{v}l)+B(ch\dfrac{w}{v}l-\cos\dfrac{w}{v}l)=0\end{cases}$$

要使方程有解，则

$$\begin{vmatrix}ch\dfrac{w}{v}l-\cos\dfrac{w}{v}l & sh\dfrac{w}{v}l-\sin\dfrac{w}{v}l\\ sh\dfrac{w}{v}l+\sin\dfrac{w}{v}l & ch\dfrac{w}{v}l-\cos\dfrac{w}{v}l\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow ch\frac{w}{v}l\cos\frac{w}{v}l=1$$

2-17 长为 l 的棒两端钳定，求棒作横振动的振动频率方程.

解：由(2-2-57)式得棒的横振动一般表达式为

$$\eta(t,x)=\left[A\cosh\frac{\omega}{v}x+B\sinh\frac{\omega}{v}x+C\cos\frac{\omega}{v}x+D\sin\frac{\omega}{v}x\right]\cos(wt-\varphi)$$

其中 $v=\sqrt{\omega ck}$. 由棒两端钳定的边界条件得

$$\begin{cases}\eta|_{x=0}=0 \qquad \left.\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{x=0}=0 & (1)\\ \eta|_{x=l}=0 \qquad \left.\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{x=l}=0 & (2)\end{cases}$$

由(1)⇒A=－C　　B=－D

由(2)⇒ $A\left(\sinh\dfrac{\omega}{v}l+\sin\dfrac{\omega}{v}l\right)+B\left(\cosh\dfrac{\omega}{v}l-\cos\dfrac{\omega}{v}l\right)=0$

$A\left(\cosh\dfrac{\omega}{v}l-\cos\dfrac{\omega}{v}l\right)+B\left(\sinh\dfrac{\omega}{v}l-\sin\dfrac{\omega}{v}l\right)=0$

这是一个二元一次方程组，若 A，B 为非零解，则它们的系数行列式应等于零，即

$$\begin{vmatrix}\sinh\dfrac{\omega}{v}l+\sin\dfrac{\omega}{v}l & \cosh\dfrac{\omega}{v}l-\cos\dfrac{\omega}{v}l\\ \cosh\dfrac{\omega}{v}l-\cos\dfrac{\omega}{v}l & \sinh\dfrac{\omega}{v}l-\sin\dfrac{\omega}{v}l\end{vmatrix}=0$$

由此可化得 $\cosh\dfrac{\omega}{v}l-\cos\dfrac{\omega}{v}l=1$，这是一频率方程，可用图解法求解。设 $\mu_n=\dfrac{\omega}{v}l$ 表示方程的一系列根，此时简正频率 $f_n=\dfrac{ck}{2\pi l^2}\mu_n{}^2$.

2-19 已知铝能承受最大张应力为P，密度为ρ，如果现在用这种材料制成厚度为h的膜，试求膜能承受的最大张力为多少？如果将其绷在半径为r的框架上，试问这种膜振动的基频最高能达到多少？

解：膜能承受的最大的张力$T = Ph$，

当半径为r时，膜的基频达最大，大小为

$$f_1 = \frac{2.405}{2\pi r}\sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \frac{2.405}{2\pi r}\sqrt{\frac{Ph}{\rho h}} = \frac{2.405}{2\pi r}\sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

2-21 求解周界固定的矩形膜作自由振动时的简正频率以及简正振动方式，如果膜的边长为 1：2，试计算最小四个泛频与基频的比值。

解：膜的振动方程为：$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$ （*）

设：$\eta(x,y;t) = \eta_a(x,y)e^{j\omega t}$

代入方程（*）得：$\frac{\partial\eta_a(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial\eta_a(x,y)}{\partial y^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\eta_a(x,y)$

2-23 设有一圆环形膜，其在外周$r = a$与内周$r = b$处固定，试证明该圆环膜自由振动的频率方程为

$$J_0(\varphi y)N_0(y) - J_0(y)N_0(\varphi y) = 0$$

其中$\varphi y = ka$， $y = kb$。

证明：圆环形膜的振动方程为：$\eta(t,r) = R(r)e^{j\omega t}$

其中$R(r) = AJ_0(kr) + BJ_0(kr)$。

由外周$r = a$与内周$r = b$处固定得边界条件

$$\eta\big|_{r=a} = 0， \quad \eta\big|_{r=b} = 0，$$

代入方程得 $AJ_0(ka) + BN_0(ka) = 0$，

$AJ_0(kb) + BN_0(kb) = 0$，

整理得 $J_0(ka)N_0(kb) - N_0(ka)J_0(kb) = 0$。

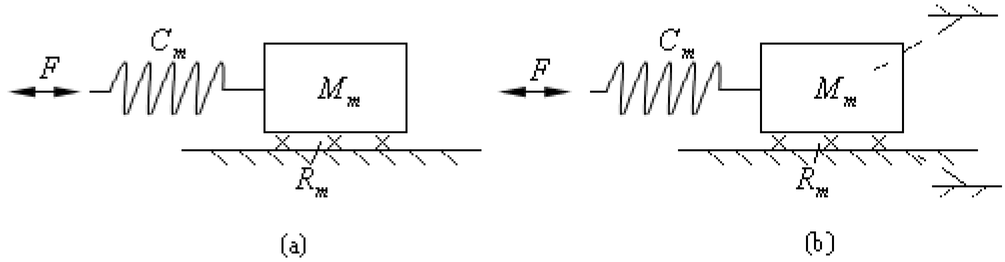
从而可得该圆环膜自由振动的频率方程为

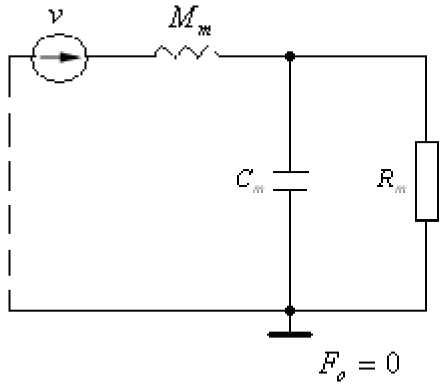
$$J_0(\varphi y)N_0(y) - J_0(y)N_0(\varphi y) = 0$$

其中$\varphi y = ka$， $y = kb$。

习题 3

3-1 如图 3-4-2 所示的隔振系统，试画出其阻抗型类比线路图，并运用线路图来讨论此系统的隔振性能。





(c)

解：阻抗型类比线路图如（c）图所示。

下面分析一下系统的隔振性能，

利用克希霍夫电路定律，在M_m路径中有

$$v=\frac{F_1-F}{j\omega M_m}$$

在M_m后面的分支点有

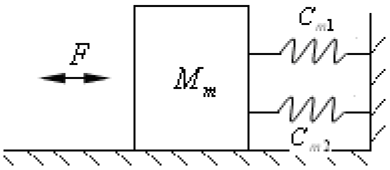
$$v=\frac{F}{\frac{1}{j\omega C_m}}+\frac{F}{\frac{1}{R_m}}=j\omega C_m F+R_m F$$

合并两式即得

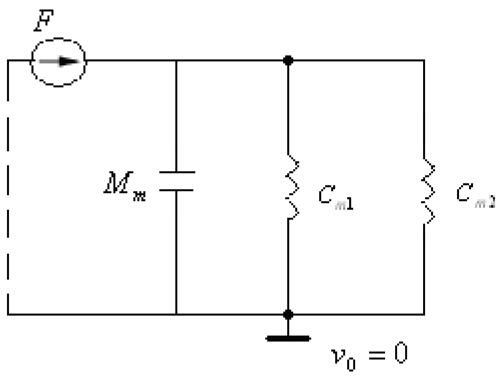
$$\frac{F_1-F}{j\omega M_m}=j\omega C_m F+R_m F$$

经整理得

3-3 试画出如图(a)所示的弹簧并联相接的力学系统的导纳型类比线路图，并从线路图求出系统的等效弹性系统。



(a)



(b)

图 习题3-3

解：导纳型类比线路图如（b）图所示。

下面分析一下系统的隔振性能，

利用克希霍夫电路定律，在 M_m 路径中有

$$v = \frac{F_1 - F}{j\omega M_m}$$

在 M_m 后面的分支点有

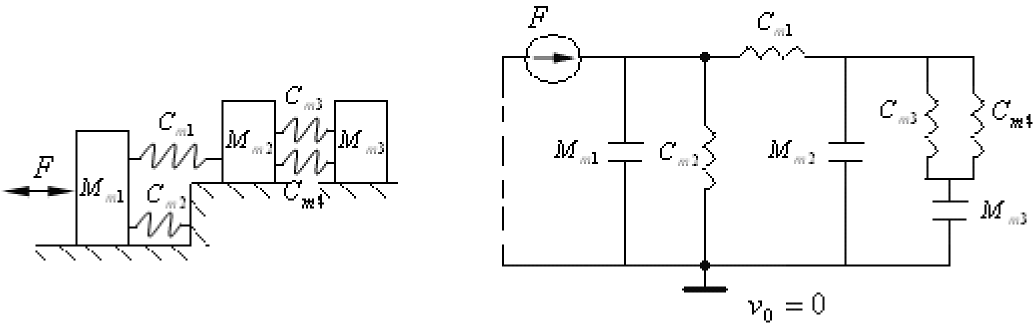
$$v = \frac{F}{\frac{1}{j\omega C_m}} + \frac{F}{\frac{1}{R_m}} = j\omega C_m F + R_m F$$

合并两式即得

$$\frac{F_1 - F}{j\omega M_m} = j\omega C_m F + R_m F$$

经整理得

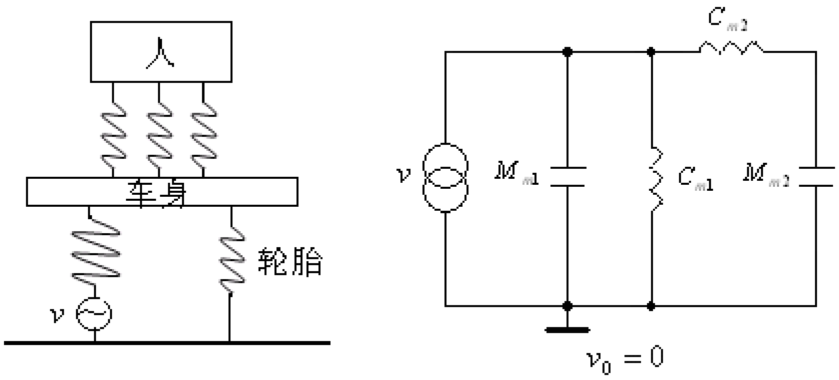
3-5 试画出如图(a)所示力学系统的导纳类比线路图(力阻都忽略不计)。



(a) (b)

图 习题3-5

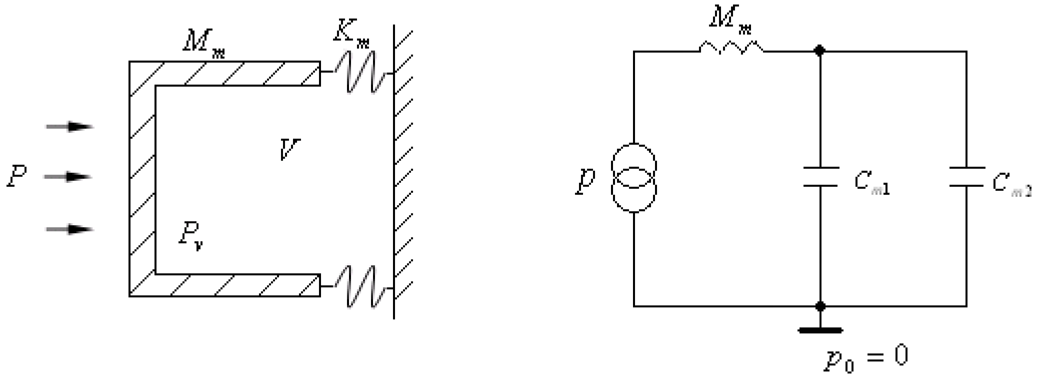
3-7 (a)图中示意画出了自行车的简化力学模型，如果由于路面不平整，使一只轮胎得到一垂直方向的速度 $v = v_a \cos\omega t$ ，试画出该系统的导纳型力学类比线路图。



(a) (b)

图 习题3-7

3-9 有一简单的护耳罩结构如图(a)所示，耳罩与人头之间形成一体积为V的空腔，耳罩的质量为M_m，有效面积为S，它与人头之间以弹性系数为K_m的软垫接触，假设耳罩外有一声压为p的声波作用，在耳罩内产生的声压为p_v，试求出耳罩的传声比$\left|\frac{p_v}{p}\right|$，并分析护耳罩的传声规律。



(a) (b)

图 习题3-9

3-11 有一耳机，其振膜的固有频率原设计在f_1，测试时将耳机压紧在一个模仿人耳体腔体积为V的小盒子上进行，如图所示。求这时系统的固有频率，设振膜有效质量为m，有效面积为S。

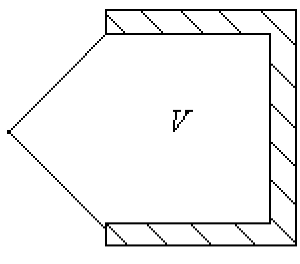
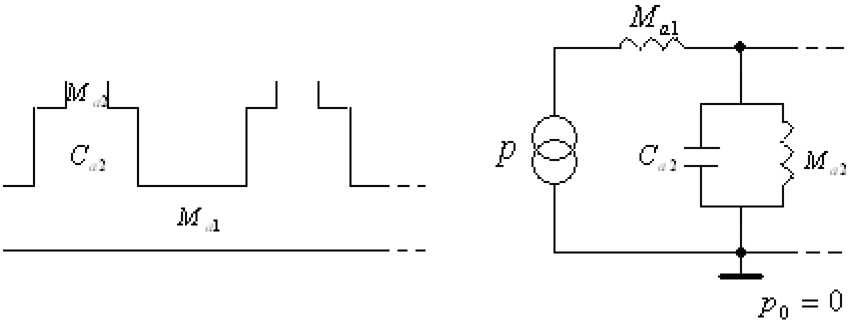


图 习题3-11

3-14 试画出如图(a)所示带通声滤波器的类比线路图，并求出其截止频率。

图 习题3-14



(a) (b)

3-16 如图为一压强式电容传声器结构示意图，背电极上打有许多小孔，构成声阻尼元件 M_{a1}，R_{a1}，试画出其类比线路图。

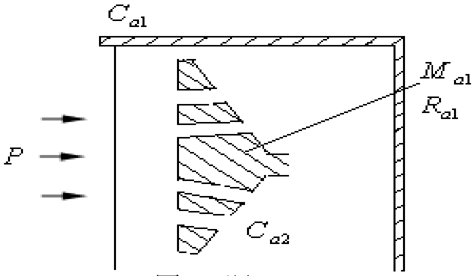
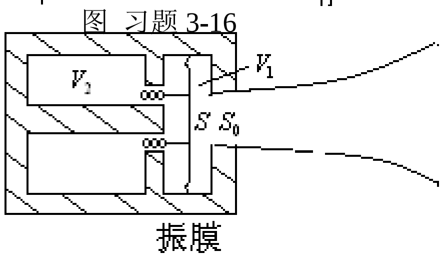


图 习题 3-16

3-18 号筒式扬声器的简单结构如图(a)所示，有动圈式换能得到的交变力 F 作用在振膜上，振膜的质量、力顺及面积分别为 M_m，C_m 和 S，C_{a1} 和 C_{a2} 分别为前室和后室的声容，S_0 为号筒吼部面积，假设已知吼部的声辐射阻抗为 $R_{ra}=\dfrac{\rho_0 C_0}{S_0}$，试画出号筒式扬声器的类比线路图。



(a)

图 习题 3-18

习题 4

4-1 试分别在一维及三维坐标里，道德质点速度 v 的波动方程。

解：小振幅声波一维波动方程：

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial t}, (1) \\ -\rho_0 \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial \rho'}{\partial t}, (2) \\ p = {c_0}^2 \rho', (3) \end{cases}$$

由（3）得 $\rho' = \dfrac{1}{{c_0}^2} p$ 代入（2）得

$$-\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad (4)$$

（4）对 x 求导，得

$$-\rho_0 c_0{}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}, \qquad (5)$$

（1）对 t 求导，得 $\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t}$， （6）

（5）与（6）相加，得 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0{}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

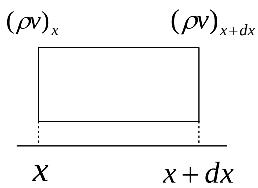
三维波动方程：

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -grad p, \\ -div(\rho_0 v) = \frac{\partial \rho'}{\partial t}, \\ p = c_0{}^2 \rho', \end{cases}$$

推导方法与一维相似，得

$$grad(div(v)) = \frac{1}{c_0{}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

4-2 如果媒质中存在体积流源，单位时间内流入单位体积里的质量为 $\rho_0 q(x,y,z,t)$，试导出有流源分布时的声波方程.



解：由于媒质中存在体积流源，媒质的连续性方程发生改变.

首先考虑在一维 x 方向上的连续性方程

$$m_{流入} = (\rho v_x)_x S - (\rho v_x)_{x+\mathrm{d}x} S + \rho_0 q_x \cdot S\mathrm{d}x$$

$$= (-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \rho_0 q_x) \cdot S\mathrm{d}x$$

$$m_{增加} = \frac{\partial \rho}{\partial t} S\mathrm{d}x$$

由质量守恒可得

$$(-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \rho_0 q_x) \cdot S\mathrm{d}x = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot S\mathrm{d}x.$$

即 $$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \rho_0 q_x = \frac{\partial \rho'}{\partial t}.$$

将其扩展到三维的情况

$$-\mathrm{div}(\rho_0 v)+\rho_0 q=\frac{\partial \rho'}{\partial t} \qquad (1)$$

再由媒质的运动方程和物态方程得

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}=-\mathrm{grad}\, p \qquad (2)$$

$$p=c_0^{\ 2}\rho' \qquad (3)$$

对(1)式两边同时求导得

$$-\mathrm{div}(\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t})+\mathrm{div}(\rho_0 \frac{\partial q}{\partial t})=\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}.$$

将(2)式和(3)代入上式得

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, p)+\mathrm{div}(\rho_0 \frac{\partial q}{\partial t})=\frac{1}{c_0^{\ 2}}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

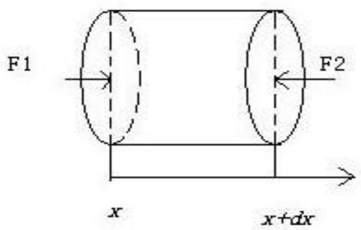
可记为

$$\nabla^2 p=\frac{1}{c_0^{\ 2}}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\mathrm{div}(\rho_0 \frac{\partial q}{\partial t}).$$

上式即为有流源分布时的声波方程.

4-3 如果媒质中有体力分布，设作用在单位体积媒质上的体力为 *F(x,y,z,t)*,试导出有体力分布时的声波方程。

解：体力影响运动方程：首先考虑一维情况，取一足够小体积元



F_1=（P_0+p）$S+F_xSdx$，F_2= -（P_0+p+dp）$S-F_{x+dx}Sdx$

则合力为$-(\frac{\partial p}{\partial x}Sdx+\frac{\partial F}{\partial x}Sdx)$，由牛顿第二定律，得

$$-(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x})Sdx=\rho Sdx\frac{\partial v}{\partial t}\Rightarrow \rho\frac{\partial v}{\partial t}=-(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x})$$

再推广至三维情况，并考虑小振幅声波，得

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}=-grad(p+F)$$

另两个方程仍为：$-div(\rho_0 v)=\frac{\partial \rho'}{\partial t}$

$$p = c_0{}^2 \rho'$$

由以上三式可推出：$\nabla^2 (p+F) = \dfrac{1}{c_0{}^2} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

4-4 如果在没有声扰动时媒质静态密度是不均匀的，即 $\rho_0 = \rho_0(x,y,z)$，试证明这种情况下的声波方程为

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = gradp \cdot grad(\ln \rho_0) \text{。}$$

证明：在密度不均匀的条件下的三维声波方程为：

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -gradp \quad （1）$$

$$-[div(\rho \vec{v}) + \vec{v} grad\rho] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad （2）$$

$$p = c_o^2 \rho' \quad （3）$$

在小振幅的情况下，经线性规划，（1）式和（2）式的三维线性方程可化为

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = -gradp \quad （4）$$

$$-[div(\rho_0 \vec{v}) + \vec{v} grad\rho_0] = \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad （5）$$

（3）式不变，其中的系数 c_0^2 是决定于媒质平衡态参数的一个常数。

将（3）式对 t 求导并代入（5）式得：

$$-[div(\rho_0 \vec{v}) + \vec{v} grad\rho_0] = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t} \quad （6）$$

（6）式对 t 求导得：

$$-[div(\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} grad\rho_0] = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad （7）$$

（4）式代入上式，且 $div(gradp) = \nabla^2 p$

∴ $$\nabla^2 p - \frac{gradp}{\rho_0} grad\rho_0 = \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

即 $$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = gradp \cdot grad(\ln \rho_0)$$

4-5 一无限长圆柱形声源沿半径方向作均匀胀缩振动时，其辐射声波波阵面是圆柱形的，设径向半径为 r、单位长度圆柱形波阵面面积为 $S = 2\pi r$，试求出这种声场里声波方程的具体形式。

解：因为为无限长圆柱，产生无限的均匀圆柱声场（即波振面的形状在传播过程中保持一定，且传播方向不变沿$\vec{r}$方向），所以仅取单位长度的被一很小的立体角所割出的空间作为研究对象。在r处，其波振面面积为$S=2\pi r$，单位时间内流入质量为ρvS。

在$r+dr$处，ρ,v,S发生变化，单位时间内流出质量为

$$(\rho vS)_{r+dr}=(\rho vS)_r+\frac{\partial(\rho vS)}{\partial r}dr$$

所以单位时间流入体积元的质量为$(\rho vS)_r-(\rho vS)_{r+dr}=-\frac{\partial(\rho vS)}{\partial r}dr$，

因为传播仅在$\vec{r}$方向，而且仅考虑小振幅情形，此时运动方程为

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial r}$$

又因为该体积元内质量近似等于ρSdr，单位时间内质量变为$\frac{\partial(\rho Sdr)}{\partial t}$，

由质量守恒定律有$-\frac{\partial(\rho vS)}{\partial r}dr=\frac{\partial(\rho Sdr)}{\partial t}$　①

因为$\rho=\rho_0+\rho'$，所以①式可以写为$-\rho_0\frac{\partial(vS)}{\partial r}=S\frac{\partial\rho'}{\partial t}$　②

②式两边同乘$\frac{c_0^2}{S}$，变为$-\rho_0\frac{c_0^2}{S}(S\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial S}{\partial r})=c_0^2\frac{\partial\rho'}{\partial t}$　③

又物态方程为$p=c_0^2\rho'\rightarrow\frac{\partial p}{\partial t}=c_0^2\frac{\partial\rho'}{\partial t}$　④

由③和④推出，$\frac{\partial p}{\partial t}=-\rho_0c_0^2[\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial(\ln S)}{\partial r}]$

两边对t求导得，$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-\rho_0c_0^2[\frac{\partial^2 v}{\partial r\partial t}+\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial(\ln S)}{\partial r}]$　⑤

由运动方程得，$\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial r}=-\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}$，代入⑤式，得，$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-c_0^2[-\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}-\frac{\partial p}{\partial r}\cdot\frac{\partial(\ln S)}{\partial r}]$

整理得　$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

4-6 如果声波的波阵面按幂指数规律变化，即$S=S_0(1+a_nx)^n$，其中S_0为$x=0$处的面积，a_n为常数，试导出这时声波方程的具体形式。

解：特殊形式的声波方程为：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial(\ln S)}{\partial r}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

由于$S=S_0(1+a_nx)^n$，代入上面的方程得：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial[\ln S_0(1+a_n x)^n]}{\partial r}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

整理得这时声波方程的具体形式为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{na_n}{1+a_n x}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

4-7 试问夏天（温度高达40^0C）空气中声速比冬天（设温度为0^0C）时高出多少？如果平面波声压保持不变，媒质密度也近似认为不变，求上述两种情况下声强变化的百分率及声强级差。

解：(1) 对于空气$\gamma=1.402$，标准大气压$P_0=1.013\times10^5 P_a$，$T_0=273+t$

$\mu=29\times10^{-3}kg/mol$，$R=8.31J/k\cdot mol$

则声速为 $c_0=\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}=\sqrt{\frac{\gamma R}{\mu}T_0}$,

$c_0(0℃)=\sqrt{\frac{\gamma R}{\mu}273}=331.6\,\mathrm{m/s}$

则 $c_0(t℃)\approx331.6+0.6t$ (m/s).

$c_0(40^0C)=331.6+0.6\times40\ m/s$

$\therefore$ $\Delta c_0=c_0(40^0C)-c_0(0^0C)=24m/s$

（2）声强$I=\frac{\overline{W}}{S}=\bar{\varepsilon}c_0$

又平面波声压不变，媒质密度也不变，则$\bar{\varepsilon}=\frac{p_e^2}{\rho_0c_0^2}$不变

则$\Delta I\%=\frac{\bar{\varepsilon}c_0(40^0C)-\bar{\varepsilon}c_0(0^0C)}{\bar{\varepsilon}c_0(0^0C)}\times100\%=7.24\%$

又 $\mathrm{SIL}=10\log_{10}\frac{I}{I_{\mathrm{ref}}}(\mathrm{dB})$

则 $\Delta SIL=SIL(40^0C)-SIL(0^0C)=10\log_{10}\frac{I(40^0C)}{I_{\mathrm{ref}}}-10\log_{10}\frac{I(0^0C)}{I_{\mathrm{ref}}}$

$=10\log_{10}\frac{I(40^0C)}{I(0^0C)}=10\log_{10}\frac{\bar{\varepsilon}c_0(40^0C)}{\bar{\varepsilon}c_0(0^0C)}=0.3\,dB$

4-8 如果两列声脉冲到达人耳的间隔时间约在$(1/20)s$以上时，听觉上可以区别出来，试问人离一垛

高墙至少要多远的距离才能听到自己讲话的回声？

解：设高墙距人 L 米，

$$\therefore\ \frac{2L}{c_0} \geq \frac{1}{20}$$

$$\therefore\ L \geq \frac{c_0}{20} \approx 8.6(m)$$

因此人离一垛高墙至少要 $8.6m$ 的距离才能听到自己讲话的回声。

4-9 （1）试导出空气中由于声压 p 引起的绝对温度的升高 ΔT 的表达式。

（2）试问在 20^0C 、标准大气压的空气里，$80dB$ 的平面声波引起的温度变化幅值为多少？

解：（1）对理想气体有 $P_0V = \frac{M}{\mu}RT_0$

又 $P = P_0 + \Delta P \quad T = T_0 + \Delta T$

则 $(P_0 + \Delta P)V = \frac{M}{\mu}R(T_0 + \Delta T)$

$$\frac{P_0}{P_0 + \Delta P} = \frac{T_0}{T_0 + \Delta T} \quad 即 \quad \Delta T = \frac{\Delta P}{P_0}T_0$$

（2） $\mathrm{SPL} = 20\log_{10}\frac{p_{\mathrm{e}}}{p_{\mathrm{ref}}}(\mathrm{dB})$

由题得 $80 = 20\log_{10}\frac{p_{\mathrm{e}}}{p_{\mathrm{ref}}}$ 则 $p_{\mathrm{e}} = 0.2P_a$ 即 $P = 0.2\sqrt{2}P_a$

则 $\Delta P = 0.2\sqrt{2}P_a$

$$\Delta T = \frac{\Delta P}{P}T_0 = \frac{0.2\sqrt{2}}{1.01\times 10^5}\times(273+20) = 8.2\times 10^{-4}K$$

4-10 在 20^oC 的空气里，求频率为 1000Hz、声压级为 0dB 的平面声波的质点位移幅值，质点速度幅值，声压幅值及平均能量密度各为多少？如果声压级为 120dB，上述各量又为多少？为了使空气质点速度有效值达到与声速相同的数值，借用线性声学结果估计需要多大的声压级?

解：由 $\mathrm{SPL} = 20\log_{10}\frac{p_e}{p_{ref}}$ $\quad (p_{ref} = 2\times 10^{-5}\mathrm{pa})$ 得 $p_e = p_{ref}10^{\frac{\mathrm{SPL}}{20}}$.

则：声压幅值 $p_a = \sqrt{2}p_e$；质点速度幅值 $v_a = \frac{p_a}{\rho_0 c_0}$；

质点位移幅值$\xi_a = \dfrac{v_a}{\omega}$；平均能量密度$\bar{\varepsilon} = \dfrac{{p_e}^2}{\rho_0 {c_0}^2}$.

(1) SPL＝0dB

$p_a = 2.828\times10^{-5}$ pa；$v_a = 6.815\times10^{-8}$ m/s；$\xi_a = 1.085\times10^{-11}$ m；

$\bar{\varepsilon} = 2.813\times10^{-15}$ J/m^3.

(2) SPL＝120dB

$p_a = 28.28$ pa；$v_a = 0.0682$ m/s；$\xi_a = 1.085\times10^{-5}$ m；$\bar{\varepsilon} = 2.813\times10^{-3}$ J/m^3.

(3) $v_e = \dfrac{p_e}{\rho_0 c_0} = c_0 \Rightarrow p_e = \rho_0 {c_0}^2$，则$\mathrm{SPL} = 20\log_{10}\dfrac{p_e}{p_{ref}} = 197$ dB.

4-11 在 20℃的空气里，有一平面声波，已知其声压级为$74dB$，试求其有效声压、平均声能量密度和声强。

解：声压级$SPL = 20\lg\dfrac{p_e}{p_{ref}} = 74(dB)$，

$\therefore$ 有效声压 $p_e = 0.1(Pa)$，

平均声能量密度$\bar{\varepsilon} = \dfrac{p_e^2}{\rho_0 c_0^2} = \dfrac{0.1^2}{415\times344} \approx 6.9\times10^{-8}(J\cdot m^{-3})$，

声强$I = \bar{\varepsilon}c_0 = \dfrac{p_e^2}{\rho_0 c_0} \approx 2.4\times10^{-5}(W\cdot s^{-2})$。

4-12 如果在水中与空气中具有同样的平面波质点速度幅值，问水中声强将比空气中声强大多少倍？

解：水中平面波质点速度幅值为v_{a1}，声压为P_{a1}，声强为I_1

空气中平面波质点速度幅值v_{a2}，声压为P_{a2}，声强为I_2

则 $v_{a1} = v_{a2}$，又$P_{a1} = v_{a1}\rho_1 c_1$，$P_{a2} = v_{a2}\rho_2 c_2$

则 $\dfrac{P_{a2}}{P_{a1}} = \dfrac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$ 又 $I = \dfrac{1}{2}P_a v_a$

$\therefore$ $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{P_{a2}}{P_{a1}} = \dfrac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} = \dfrac{1.480\times10^6}{415} \approx 3566$ 倍

4-13 欲在声级为 120dB 的噪声环境中通电话，假设耳机再加一定电功率时在耳腔中能产生 110dB 的声压，如果在耳机外加上的耳罩能隔掉 20dB 噪声，问此时在耳腔中通话信号声压比噪声大多少倍？

解： 耳机内信号声压 $P_{信}=P_{ref}\cdot 10^{110/20}$，

到达耳机的噪声声压 $P_{噪}=P_{ref}\cdot 10^{(120-20)/20}$

所以 $P_{信}/P_{噪}=10^{110/20}/10^{100/20}=3.16$

4-14 已知两声压级幅度之比为 2，5，10，100，求它们声压级之差.已知两声压级之差为 1dB，3dB，6dB，10dB，求声压幅值之比.

解：已知声压幅值比，则声压级之差为

$$\Delta\mathrm{SPL}=20\log_{10}\frac{p_{e1}}{p_{ref}}-20\log_{10}\frac{p_{e2}}{p_{ref}}=20\log_{10}\frac{p_{e1}}{p_{e2}}=20\log_{10}\frac{p_{a1}}{p_{a2}}.$$

已知声压级之差，则声压幅值比为 $\frac{p_{a1}}{p_{a2}}=10^{\frac{\Delta\mathrm{SPL}}{20}}$.

(1) 当声压幅值比分别为 2，5，10，100 时，声压级之差分别为 6.02dB，14.0dB，20dB，40dB.

(2) 当声压之差分别为 1dB，3dB，6dB，10dB 时，声压幅值之比分别为 1.1220，1.4125，1.9953，3.1623.

4-15 20℃时空气和水的特性阻抗分别为 $R_1=415Pa\cdot s/m$ 及 $R_2=1.48\times10^6 Pa\cdot s/m$，计算平面声波由空气垂直入射于水面上时反射声压大小及声强透射系数。

解：声压反射系数 $r_p=\frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}\approx1$，

声强透射系数 $r_I=\frac{I_t}{I_i}=\frac{p_{ta}^2/2\rho_2c_2}{p_{ia}^2/2\rho_1c_1}=\frac{R_1}{R_2}t_p^2=\frac{4R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\approx1.21\times10^{-3}$。

4-16 水和泥沙的特性阻抗分别为 $1.48\times10^6 P_a\cdot s/m$ 及 $3.2\times10^6 P_a\cdot s/m$，求声波由水垂直入射于泥沙时，在分界面上反射声压与入射声压之比及声强透射系数。

解: 水的特性阻抗为 $R_1=1.48\times10^6 P_a\cdot s/m$

泥沙的特性阻抗为 $R_2=3.2\times10^6 P_a\cdot s/m$

当声波由水垂直入射于泥沙时，在分界面上反射声压与入射声压之比为

$$r_p=\frac{p_{\mathrm{ra}}}{p_{\mathrm{ia}}}=\frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}\approx0.37$$

声强透射系数为 $t_I=\frac{I_t}{I_{i\,1}}=\frac{4R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\approx0.86$

4-17 声波由空气以 $\theta_i=30^\circ$ 斜入射于水中，试问折射角为多大？分界面上反射波声压于入射波声压

之比为多少？平均声能量流透射系数为多少？

解： $\dfrac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}=\dfrac{c_1}{c_2}$,查表知 $c_1=344m/s$， $c_2=1483m/s$

又 $\dfrac{c_2}{c_1}\sin\theta_i=\dfrac{1483}{344}\sin 30^\circ\approx 2.16>1$，所以发生全反射现象

反射波声压于入射波声压之比为 $r_p=\dfrac{|P_r|}{|P_i|}=1$

平均声能量流透射系数为 $t_w=\dfrac{t_I\cos\theta_t}{\cos\theta_i}=0$

4-18 试求空气中厚为 1mm 的铁板对 200Hz 及 2000Hz 声波的声强透射系数 t_I(考虑垂直入射).

解： 由(4-10-41)知声强透射系数为

$$t_I=\frac{4}{4\cos^2 k_2D+(R_{12}+R_{21})^2\sin^2 k_2D}.$$

(1) f＝200Hz 时， $k_2=\dfrac{\omega}{c}=\dfrac{2\pi\cdot 200}{4350}=0.2889$， $k_2D=2.889\times10^{-4}$.

由于 $k_2D<<1$，则 $\cos k_2D\approx 1,\sin k_2D\approx 0$， $\Rightarrow t_I\approx 1$.

(2) f=2000Hz 时，分析过程同上， $t_I\approx 1$.

4-19 空气中有一木质板壁，厚为 h，试问频率为 f 的声波的隔声量有多少？

解：隔声量 $TL=-42+20\lg f+20\lg M$

$$=-42+20\lg f+20\lg\rho h$$

其中 ρ 表示木质板壁的密度。

4-20 一骨导送话器的外壳用厚 $1mm$ 的铁皮做成，试求这外壳对 $1000Hz$ 气导声波的隔声量。

解： 对于铁，其厚度为 $D=1mm=10^{-3}m$， $\rho=7.70\times10^3 kg/m^3$， $c=3.70\times10^3 m/s$

$$R=\rho c=28.49\times10^6 N\cdot s/m^3,\quad M=\rho D=7.7kg/m^2$$

对于空气 $R_0=\rho_0c_0=415N\cdot s/m^3$

则 $R_{21}=\dfrac{R_0}{R}\ll 1$, $\dfrac{2\pi D}{\lambda_2}=\dfrac{D\omega}{c_0}<0.5$ （$\omega=2\pi f=2000\pi Hz$）

则所求隔声量为 $\mathrm{TL}=10\log 10\left[1+\left(\dfrac{\omega M}{2R_0}\right)^2\right]\approx 35.3dB$

4-21 房间隔墙厚度 20 ㎝，密度 ρ =2000 kg/m^3，试求 100Hz 及 1000Hz 声波的隔声量分别为多少？如墙的厚度增加一倍，100Hz 声波的隔声量为多少？如不是增加厚度，而是用相同材料切成双层墙，中间距 10 ㎝，这时对 100Hz 声波的隔声量为多少？

解：由质量定律 TL=-42+20*lgf*+20*lgM*$_2$,得

TL_1=-42+20*lg*100+20*lg*（0.2×200）=50dB

TL_2=-42+20*lg*1000+20*lg*（0.2×200）=70dB

墙厚度增加一倍，即 D=0.4m，故此时

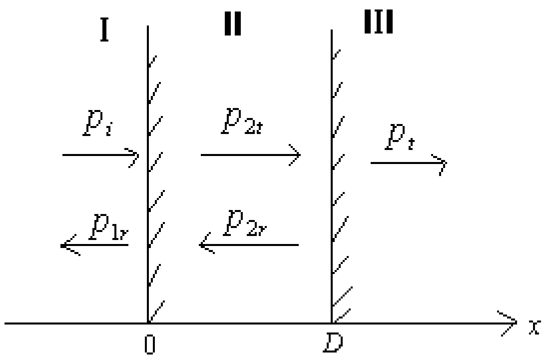
TL_1=-42+20*lg*100+20*lg*（0.4×200）=56dB

双层墙时，$TL = 20\lg\dfrac{wM}{R_1} + 20\lg\dfrac{wM}{2R_1}kD$

$$= 20\lg\frac{100\times2000\times0.2}{1.21\times344} + 20\lg(\frac{100\times2000\times0.2}{2\times1.21\times344}\times\frac{100}{344}\times0.1)$$

=43dB

4-23 试导出三层媒质的声强透射系数（4－10－43）式。



解: 设一厚度为D，特性阻抗为$R_2=\rho_2c_2$的中间层媒质置于特性阻抗为$R_1=\rho_1c_1$与$R_3=\rho_3c_3$中，如图所示。

则 $\begin{cases} p_i = p_{ia}e^{j(\omega t-k_1x)} \\ \upsilon_i = \upsilon_{ia}e^{j(\omega t-k_1x)} \end{cases}$； $\begin{cases} p_{1r} = p_{1ra}e^{j(\omega t+k_1x)} \\ \upsilon_{1r} = p_{1ra}e^{j(\omega t+k_1x)} \end{cases}$； $\begin{cases} p_{2t} = p_{2ta}e^{j(\omega t-k_2x)} \\ \upsilon_{2t} = p_{2ta}e^{j(\omega t-k_2x)} \end{cases}$；

$\begin{cases} p_{2r} = p_{2ra}e^{j(\omega t+k_2x)} \\ \upsilon_{2r} = \upsilon_{2ra}e^{j(\omega t+k_2x)} \end{cases}$； $\begin{cases} p_t = p_{ta}e^{j[\omega t-k_3(x-D)]} \\ \upsilon_t = \upsilon_{ta}e^{j[\omega t-k_3(x-D)]} \end{cases}$

其中 $\upsilon_{ia} = \dfrac{p_{ia}}{R_1}, \upsilon_{1ra} = -\dfrac{p_{1ra}}{R_1}, \upsilon_{2ta} = \dfrac{p_{2ta}}{R_2}, \upsilon_{2ra} = -\dfrac{p_{2ra}}{R_2}, \upsilon_{ta} = \dfrac{p_{ta}}{R_3}$

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, k_2 = \frac{\omega}{c_2}, k_3 = \frac{\omega}{c_3}$$

当 $x=0$ 时，$\begin{cases} p_{\mathrm{ia}}+p_{\mathrm{1ra}}=p_{\mathrm{2ta}}+p_{\mathrm{2ra}} \\ \upsilon_{\mathrm{ia}}+\upsilon_{\mathrm{1ra}}=\upsilon_{\mathrm{2ta}}+\upsilon_{\mathrm{2ra}} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} p_{\mathrm{ia}}+p_{\mathrm{1ra}}=p_{\mathrm{2ta}}+p_{\mathrm{2ra}} \\ \dfrac{p_{\mathrm{ia}}}{R_1}-\dfrac{p_{\mathrm{1ra}}}{R_1}=\dfrac{p_{\mathrm{2ta}}}{R_2}-\dfrac{p_{\mathrm{2ra}}}{R_2} \end{cases}$ （1）

当 $x=D$ 时，$\begin{cases} p_{2t}+p_{2r}=p_t \\ \upsilon_{2t}+\upsilon_{2r}=\upsilon_t \end{cases}$ 即 $\begin{cases} p_{\mathrm{2ta}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2D}+p_{\mathrm{2ra}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_2D}=p_{\mathrm{ta}} \\ \dfrac{p_{\mathrm{2ta}}}{R_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2D}-\dfrac{p_{\mathrm{2ra}}}{R_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_2D}=\dfrac{p_{\mathrm{ta}}}{R_3} \end{cases}$ （2）

由（1）得 $2R_2\,p_{\mathrm{ia}}=(R_1+R_2)\,p_{\mathrm{2ta}}-(R_1-R_2)\,p_{2r}$ (3)

由（2）得 $\begin{cases} p_{\mathrm{2ta}}=\dfrac{R_3+R_2}{2R_3}p_{ta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_2D} \\ p_{\mathrm{2ra}}=\dfrac{R_3-R_2}{2R_3}p_{ta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2D} \end{cases}$ (4)

把（4）代入（3）得

$$2R_2p_{\mathrm{ia}}=(R_1+R_2)\frac{R_3+R_2}{2R_3}p_{ta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_2D}-(R_1-R_2)\frac{R_3-R_2}{2R_3}p_{ta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2D}$$

则 $\left|\dfrac{p_{\mathrm{ta}}}{p_{\mathrm{ia}}}\right|^2=\left|\dfrac{4R_2R_3}{(R_1+R_2)(R_3+R_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_2D}-(R_1-R_2)(R_3-R_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2D}}\right|^2$

$$=\left|\frac{4R_2R_3}{\left[(R_1+R_2)(R_3+R_2)-(R_1-R_2)(R_3-R_2)\right]\cos k_2D+j\left[(R_1+R_2)(R_3+R_2)+(R_1-R_2)(R_3-R_2)\sin k_2D\right]}\right|^2$$

$$=\left|\frac{4R_2R_3}{2R_2(R_1+R_3)\cos k_2D+j2(R_2^2+R_1R_3)\sin k_2D}\right|^2$$

$$=\frac{4R_2^2R_3^2}{R_2^2(R_1+R_3)^2\cos^2 k_2D+(R_2^2+R_1R_3)^2\sin^2 k_2D}$$

$$=\frac{4R_3^2}{(R_1+R_3)^2\cos^2 k_2D+(R_2+\frac{R_1R_3}{R_2})^2\sin^2 k_2D}$$

则 $t_I=\dfrac{|p_{\mathrm{ta}}|^2}{|p_{\mathrm{ia}}|^2}\cdot\dfrac{R_1}{R_3}=\dfrac{4R_1R_3}{(R_1+R_3)^2\cos^2 k_2D+(R_2+\frac{R_1R_3}{R_2})^2\sin^2 k_2D}$

4-24 有不同频率的两列声波，它们的声压可分别表示为 $p_1=p_{1a}\cos(\omega_1t-k_1x-\varphi_1)$，$p_2=p_{2a}\cos(\omega_2t-k_2x-\varphi_2)$，这里初相位角 φ_1 及 φ_2 为常数，试求它们的合成声场的平均能量密度.

解：由题意可知，这两列声波是不相关的，由(4-12-11)可知合成声场的平均能量密度为

$$\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}_1+\bar{\varepsilon}_2=\frac{{p_{1a}}^2+{p_{2a}}^2}{2\rho_0{c_0}^2}.$$

4-25 试计算入射声波与反射声波振幅相等的平均驻波声场中的平均能量密度。

解： 入射声波与反射声波频率相同，设入射声波为 $p_i = p_a e^{j(\omega t - kx)}$，反射声波为 $p_i = p_a e^{j(\omega t + kx)}$。

合成的声场为 $p = p_i + p_r = 2p_a \cos kx e^{j\omega t}$。

平均声能量密度 $\bar{\varepsilon} = \dfrac{(2p_a \cos kx)^2}{2\rho_0 c_0^2} = \dfrac{2p_a^2}{\rho_0 c_0^2}\cos^2 kx$

4-26 设有一沿 x 方向的平面驻波，其驻波声压可表示为 $p = p_{ia}e^{j(\omega t - kx)} + p_{ra}e^{j(\omega t + kx)}$，若已知 $p_{ra} = p_{ia}e^{j\frac{\pi}{2}}$，试求该驻波声场的平均声能量密度 $\bar{\varepsilon}$ 和平均声能量流密度（声强）I。

解： 由题意得 $p = p_{ia}e^{j(\omega t - kx)} + p_{ra}e^{j(\omega t + kx)} = p_{ia}e^{j(\omega t - kx)} + p_{ia}e^{j(\omega t + kx + \frac{\pi}{2})}$

$= p_{ia}e^{j(\omega t - kx)} + p_{ia}e^{j(\omega t - (-kx - \frac{\pi}{2}))} = p_1 + p_2$

两列波的相位差 $\varphi = (-kx - \dfrac{\pi}{2}) - kx = -2kx - \dfrac{\pi}{2}$

两列波的平均声能量密度分别为 $\bar{\varepsilon}_1 = \dfrac{p_{\mathrm{ia}}^2}{2\rho_0 c_0^2}$，$\bar{\varepsilon}_2 = \dfrac{p_{\mathrm{ia}}^2}{2\rho_0 c_0^2}$

该驻波声场的平均声能量密度 $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 + \dfrac{p_{\mathrm{ia}}p_{\mathrm{ia}}}{\rho_0 c_0^2}\cos\varphi = \dfrac{p_{\mathrm{ia}}^2}{2\rho_0 c_0^2} + \dfrac{p_{\mathrm{ia}}^2}{2\rho_0 c_0^2} + \dfrac{p_{\mathrm{ia}}^2}{\rho_0 c_0^2}\cos(-2kx - \dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{p_{\mathrm{ia}}^2}{\rho_0 c_0^2}\left[1 + \cos(2kx + \dfrac{\pi}{2})\right] = \dfrac{p_{\mathrm{ia}}^2}{\rho_0 c_0^2}(1 - \sin 2kx)$

该驻波声场的平均声能量流密度 $I = \bar{\varepsilon}c_0 = \dfrac{p_{\mathrm{ia}}^2}{\rho_0 c_0}(1 - \sin 2kx)$

4-27 某测试环境本底噪声声压级 40dB，若被测声源在某位置上产生的声压级 70dB，试问置于该位置上的传声器接收到的总声压级为多少？如本底噪声也为 70dB，总声压级又为多少？

解：（1）$L_P = 10\lg\dfrac{P_e^2}{P_{ref}^2} \Rightarrow P_e^2 = P_{ref}^2 \cdot 10^{\frac{L_P}{10}}$

所以 $P_e^2 = P_{1e}^2 + P_{2e}^2 = P_{ref}^2 \cdot (10^{\frac{40}{10}} + 10^{\frac{70}{10}})$

总声压级 $L_P = 10\lg\dfrac{P_e^2}{P_{ref}^2} = 10\lg(10^{\frac{40}{10}} + 10^{\frac{70}{10}}) \approx 70$ dB

（2）总声压级 $L_P = 10\lg\dfrac{P_e^2}{P_{ref}^2} = 10\lg(10^{\frac{70}{10}} + 10^{\frac{70}{10}}) \approx 73$ dB

4-28 房间内由 n 个人各自无关地朗读，假如每个人单独时在某位置均产生 L_j (dB)的声音，那么 n 个人同时朗读时在该位置上总声压级应为多少？

解： n 各人同时朗读的声音是互不相关的，满足能量叠加原理.

由(4-12-14)得该位置上总声压级为

$$\mathrm{SPL}=10\log_{10}(10^{\frac{L_j}{10}}+10^{\frac{L_j}{10}}+\cdots 10^{\frac{L_j}{10}})$$

$$=10\log_{10}(n\cdot 10^{\frac{L_j}{10}})$$

$$=10\log_{10}(n)+L_j \quad (\mathrm{dB}).$$

习题 5

5-1 有一声管在末端放一待测吸声材料, 现用频率为$500Hz$的平面声波, 测得管中的驻波比G等于10, 并确定离材料表面$0.25m$处出现第一个声压极小值. 试求该吸声材料的法向声阻抗率以及法向吸声系数.

解: 由公式（5-1-9）得

$$0.25=(1+\sigma)\frac{c_0}{4f}$$

其中$c_0=344m/s$， $f=500Hz$

计算得$\sigma=0.453$。

声压反射系数$\left|r_p\right|=\frac{G+1}{G-1}=\frac{9}{11}$

因此，可得法向声阻抗率$Z_s=\left(\frac{1+\left|r_p\right|e^{j\sigma\pi}}{1-\left|r_p\right|e^{j\sigma\pi}}\right)\rho_0c_0=401.6+j321.8$

法向吸声系数$\alpha=\frac{4R_s\rho_0c_0}{(R_s+\rho_0c_0)^2+X_s^2}=0.87$

5-2 试求在末端有声学负载的声管中，相邻的声压极大值与极小值之间的距离。

解：对于末端有声学负载的声管中

$$2k\left(x+\sigma\frac{\lambda}{4}\right)=\pm(2n+1)\pi \quad (n=0,1,2,\cdots), \qquad \text{总声压有极小值}$$

$$2k\left(x+\sigma\frac{\lambda}{4}\right)=\pm 2n\pi \quad (n=0,1,2,\cdots), \qquad \text{总声压有极大值}$$

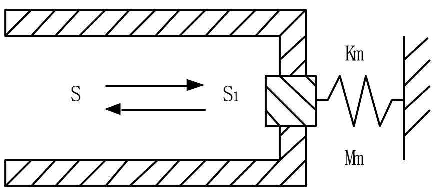
取$n=0$，管中声压极小值的位置为 $(-x)_{\min}=(1+\sigma)\frac{\lambda}{4}$

管中声压极大值的位置为 $(-x)_{\max}=\sigma\frac{\lambda}{4}$

则相邻声压极大值与极小值之间的距离为

□$=\left|(-x)_{\max}-(-x)_{\min}\right|=\frac{\lambda}{4}$

5-3 设在面积为 S 的声管的末端装一面积为 S1 的活塞式振子，如图所示，假定活塞质量为 Mm ，弹簧的弹性系数为 Km ，力阻很小可以忽略。试求管中的声压反射系数。



5-4 设在声管末端的刚性壁前D距离处放一穿孔板, 见图所示, 穿孔板的面积与声管面积相同都为S, 假定穿孔板的穿孔总面积为S_0, 板的厚度为l, 试证该穿孔板共振结构的共振频率为

$$f_r=\frac{c_0}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma}{Dl}},$$

其中$\sigma=\frac{S_0}{S}$称为穿孔率。

解：结构中腔体的声容 $C_a = \frac{V}{\rho_0 c_0^2} = \frac{DS}{\rho_0 c_0^2}$；

声质量 $M_a = \frac{\rho_0 l}{S_0}$，

因此共振频率 $f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{C_a M_a}} = \frac{c_0}{2\pi}\sqrt{\frac{\sigma}{Dl}}$

5-5 设共振式吸声结构的品质因素 $Q_R = \frac{\omega_r M_a}{R'}$，其中总声压 $R' = R_a + \rho_0 c_0 / S$。试证明它与（5－1－28）式等效。

解： $Q_R = \frac{\omega_r M_a}{R'} = \frac{\omega_r M_a}{R' = R_a + \rho_0 c_0 / S}$ ，

其中声质量 $M_a = \frac{\rho_0 l}{S_0}$，声阻 $R_a = \frac{x_s \rho_0 c_0}{S}$，声容 $C_a = \frac{V}{\rho_0 c_0^2} = \frac{SD}{\rho_0 c_0^2}$

共振频率 $\omega_r = 2\pi f_r = \sqrt{\frac{1}{M_a C_a}} = \sqrt{\frac{S_0 c_0^2}{lSD}}$

则 $$Q_R = \frac{\sqrt{\frac{S_0 c_0^2}{lSD}}\frac{\rho_0 l}{S_0}}{\frac{x_s \rho_0 c_0}{S} + \frac{\rho_0 c_0}{S}} == \frac{\rho_0 c_0 \sqrt{\frac{l}{S_0 SD}}}{\frac{\rho_0 c_0}{S}(x_s + 1)} == \frac{\sqrt{\frac{lS}{S_0 D}}}{x_s + 1} == \frac{2\pi D\sqrt{\frac{lS}{S_0 D}}}{2\pi D(x_s + 1)}$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{\frac{l\,S\,D}{S_0}}}{2\pi D(x_s + 1)} = \frac{2\pi c_0\sqrt{\frac{lSD}{S_0 c_0^2}}}{2\pi D(x_s + 1)} = \frac{2\pi c_0 / \omega_r}{2\pi D(x_s + 1)} = \frac{\lambda}{2\pi D(x_s + 1)}$$

其中（$\lambda = \frac{c_0}{f_r} = \frac{2\pi c_0}{\omega_r}$）

5-6 设在声管末端放一穿孔板共振吸声结构，见 5－4 题的图，已知其共振频率为 500Hz，空腔深度 D=5cm，假设要求该吸声结构的吸声频带宽度为 2，试求该结构的声阻率比 x_s 以及在频率为 250，500，1 000Hz 时的吸声系数.

解：由(5-1-30)知吸声频带宽度为 $z_1 - z_2 = \frac{1}{Q_R}$，由此 $Q_R = \frac{1}{2}$.

由课本(5-1-28)知：$Q_R = \frac{\lambda}{(1 + x_s)2\pi D}$，得

$$x_s = \frac{\lambda}{2\pi D Q_R} - 1 = \frac{c}{2\pi f D Q_R} - 1 = \frac{344}{0.5 \times 2 \times 3.14 \times 0.05 \times 500} - 1 = 3.38$$

共振吸声系数$\alpha_r=\dfrac{4x_s}{(1+x_s)^2}=0.70$，由(5-1-29)知$\alpha=\dfrac{\alpha_r z^2}{z^2+[(z^2-1)Q_R]^2}$，

当f＝250Hz，z＝0.5，α＝0.45；

当f＝500Hz，z＝1，α＝0.70；

当f＝1000Hz，z＝2，α＝0.45.

5-8 设在面积为S_1的管中充有ρ_1c_1的流体，而在面积为S_2的管中充有ρ_2c_2的流体，而两根管子用极薄的材料隔开，假定声波从S_1管中传来，S_2管延伸无限，见图所示，试求在S_2管中的声功率透射系数。

解：设$\begin{cases}p_i=Ae^{j(\omega t-kx)}\\ p_r=Be^{j(\omega t-kx)}\\ p_t=Ce^{j(\omega t-kx)}\end{cases}$，则$\begin{cases}v_i=\dfrac{A}{\rho_1c_1}e^{j(\omega t-kx)}\\ v_r=\dfrac{B}{\rho_1c_1}e^{j(\omega t-kx)}\\ v_t=\dfrac{C}{\rho_2c_2}e^{j(\omega t-kx)}\end{cases}$

在分界面处应满足声压连续和体积速度连续的边界条件

即$\begin{cases}A+B=C\\ (\dfrac{A}{\rho_1c_1}-\dfrac{B}{\rho_1c_1})S_1=\dfrac{C}{\rho_2c_2}S_2\end{cases}$，

可以推出

声压透射系数为：$t_p=\left|\dfrac{C}{A}\right|=\dfrac{2S_1}{S_1+S_2\dfrac{\rho_1c_1}{\rho_2c_2}}$

声功率透射系数为：$t_w=\dfrac{I_tS_2}{I_iS_1}=\dfrac{\dfrac{C^2}{2\rho_2c_2}S_2}{\dfrac{A^2}{2\rho_1c_1}S_1}=\dfrac{4S_1S_2\rho_1c_1\rho_2c_2}{(\rho_2c_2S_1+\rho_1c_1S_2)^2}$

5-9 试画出 S_{12} =10 与 S_{12} =5 两种情形扩张管式消声器的消声量 TL 随（kl）的变化曲线。

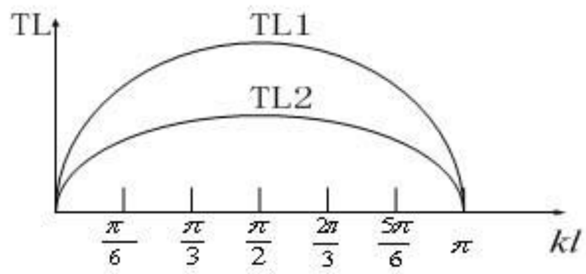
解：（1）S_{12}=10，S_{21}=0.1

所以$TL_1=10\lg[1+\dfrac{1}{4}(10-0.1)^2\sin^2 kl]=10\lg(1+24.5025\sin^2 kl)$（dB）

（2）S_{12}=5，S_{21}=0.2

所以$TL_2=10\lg[1+\dfrac{1}{4}(5-0.2)^2\sin^2 kl]=10\lg(1+5.76\sin^2 kl)$（dB）

消声量 TL 随（kl）在一个周期$[0,\pi]$的变化曲线如下：



5-10 设在一通风管道中传播着一频率为$1000Hz$的声波，声压级为$100dB$. 现准备采用扩张式消声器, 把该声音消去 20 分贝, 试问扩张管的长度, 扩张管与主管的面积比应如何设计？

解：根据公式（5-2-11）

$$TL = 10\lg[1+\frac{1}{4}(S_{12}-S_{21})^2(\sin kD)^2]$$

根据实际情况应使D取值尽量小，扩张比尽量小。

当$D=(2n-1)\frac{\lambda}{4}$时，消声量达到极大值，

扩张管长度$D=\frac{\lambda}{4}=\frac{c_0}{4f}=\frac{344}{4000}=0.086(m)$

此时，由$20=10\lg[1+\frac{1}{4}(S_{12}-S_{21})^2]$得$S_{12}=\frac{S_2}{S_1}=19.95$。

因此，当扩张管长取$0.086m$，扩张管与主管横截面面积之比为 19.95 时，能把声音消去$20dB$。

5-12 试证明在计及声阻R_b时，共振式消声器的消声量公式为

$$\mathrm{TL}=10\log_{10}\left[1+\frac{1+4x_s}{4x_s^{\ 2}+\frac{1}{\beta^2 z^2}(z^2-1)^2}\right]$$

其中$x_s=\frac{R_b S}{\rho_0 c_0}$。

解：由式(5-3-7)和(5-3-9)知，共振式消声器的消声量公式为

$$TL=10\log_{10}\left[\frac{\left(\frac{\rho_0 c_0}{2S}+R_b\right)^2+X_b^{\ 2}}{R_b^{\ 2}+X_b^{\ 2}}\right]=10\log_{10}\left[1+\frac{\frac{\rho_0^{\ 2}c_0^{\ 2}}{4S^2}+\frac{\rho_0 c_0}{S}R_b}{R_b^{\ 2}+X_b^{\ 2}}\right]$$

下面进一步对上式括号内部分进行化简，对$\frac{\frac{\rho_0^{\ 2}c_0^{\ 2}}{4S^2}+\frac{\rho_0 c_0}{S}R_b}{R_b^{\ 2}+X_b^{\ 2}}$中各元素均除以$\frac{\rho_0^{\ 2}c_0^{\ 2}}{4S^2}$，就可以写为

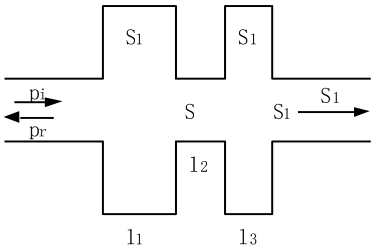
$$\frac{1+4x_s}{4x_s{}^2+\mathrm{X_b}{}^2\dfrac{4S^2}{\rho_0c_0}};$$

其中，$\mathrm{X_b}=M_\mathrm{b}\omega-\dfrac{1}{\omega C_\mathrm{b}}=\dfrac{1}{\omega C_\mathrm{b}}(\omega^2M_\mathrm{b}C_\mathrm{b}-1)=\dfrac{\rho_0c_0{}^2}{\omega V_\mathrm{b}}(z^2-1)$，则

$$\mathrm{X_b}{}^2\frac{4S^2}{\rho_0{}^2c_0{}^2}=\frac{4S^2c_0{}^2}{\omega^2V_\mathrm{b}{}^2}(z^2-1)^2=\frac{1}{\dfrac{\omega_r{}^2V_\mathrm{b}{}^2}{4S^2c_0{}^2}\cdot\dfrac{\omega^2}{\omega_r{}^2}}(z^2-1)^2=\frac{1}{\beta^2z^2}(z^2-1)^2$$

将以上各式代入消声量公式结论即可得到证明。

5-15 有一如图所示的双节扩张管，已知它们的长为$\mathrm{l}_1=\dfrac{\lambda}{2}$，$\mathrm{l}_2=\dfrac{\lambda}{4}$，$\mathrm{l}_3=\dfrac{\lambda}{4}$，主管面积为 S，两扩张管面积都为 S_1，试求消声量 TL。



解：分别在 x=0,l_1,l_2,l_3 处根据声压连续和体积速度连续列方程，即可解出消声量 TL。过程略。

5-18 在上题的号筒喉部装一面积相同的活塞声源，其振动频率为 1000Hz，如果已知它向号筒中辐射的平均声功率为 1W，试求活塞声源的位移振幅，如果将号筒拿掉，把活塞置于一块大的障板上，并且活塞的位移振幅保持不变，试问这时它能向空间辐射多少平均声功率？

解：(1) 由(5-5-7)知 $S(x)=S_0e^{\delta x}$，则 $\delta=\dfrac{1}{x}\mathrm{In}\left(\dfrac{\mathrm{S(x)}}{\mathrm{S_0}}\right)=\mathrm{In}100=4.6052$.

指数号筒的截至频率 $f_c=\dfrac{\delta c_0}{4\pi}=126\mathrm{Hz}$，声源频率 f =1000Hz>f_c，由(5-5-19)可得声源的速度振幅

$$u_a=\left[\frac{2\overline{W}}{\rho_0c_0S_0\sqrt{1-\left(\dfrac{\delta}{2k}\right)^2}}\right]^{0.5}=1.97\,\mathrm{m/s}$$，则位移振幅为$\xi_a=\dfrac{u_a}{\omega}=3.13\times10^{-4}\,\mathrm{m}$.

(2) $ka_0=\dfrac{2\pi f}{c}a_0=0.37<0.5$，

则声源的平均辐射功率为$\overline{W}=\dfrac{1}{4}\rho_0c_0S_0(ka_0)^2u_a{}^2=0.0673\,\mathrm{W}$.

5-25 有一矩形管内充空气，管子的截面积为 $l_x\times l_y=0.1\times0.08m^2$，在管口有一声源产生频率从

$1000Hz$～$2000Hz$的振动，管的另一端延伸无限。试讨论管中声波的传播情况

解： 由 $f_{n_xn_y}=\frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2+\left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2}$

得 $f_{10}=\frac{343}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{0.1}\right)^2}=1715Hz$， $f_{01}=\frac{343}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{0.08}\right)^2}=2143.75Hz$

当$1000Hz<f<1715Hz$时，管中传播的是一束沿z轴方向，波阵面为一维平面波的$(0,0)$次波。

当$1715Hz<f<2000Hz$时，管中传播的是沿x轴程一定夹角方向斜向传播，并经壁面不断反射而进行着的平面波$(1,0)$次高次波。

5-27 假设在一矩形管的管口$z=0$处声源的振速分布为$u(t)=u_0\sin\frac{\pi}{l_x}xe^{j\omega t}$，试求前三个简正波的声压振幅。

解： 管中传播的波的形式为 $p_{n_xn_y}=A_{n_xn_y}\cos k_xx\cos k_yy\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_zz)}$

在$z=0$处， $p_{n_xn_y}=A_{n_xn_y}\cos k_xx\cos k_yy$

又在$z=0$处，$u(t)=u_0\sin\frac{\pi}{l_x}xe^{j\omega t}$

则 $B_{00}=\frac{1}{l_xl_y}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}u_0\sin\frac{\pi}{l_x}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}u_0$

$$B_{10}=\frac{2}{l_xl_y}=\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}u_0\sin\frac{\pi}{l_x}x\cos\frac{\pi}{l_x}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$B_{01}=\frac{2}{l_xl_y}\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}u_0\sin\frac{\pi}{l_x}x\cos\frac{\pi}{l_y}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

又 $A_{n_xn_y}=\frac{\rho_0}{k_z}B_{n_xn_y}$

则 （1）对于$(0,0)$次简正波， $c_z=c_0$

$$p_{a00}=A_{n_xn_y}\cos k_xx\cos k_y=A_{n_xn_y}\cos\frac{n_x\pi}{l_x}x\cos\frac{n_y\pi}{l_x}y$$

$$=A_{00}=\frac{\rho_0\omega}{k_z}B_{00}=\frac{2\rho_0c_0}{\pi}u$$

（2）对于 $(1,0)$ 次简正波，$c_z = \dfrac{c_0}{\sqrt{1-\dfrac{\pi^2 c_0^2}{\omega^2}(\dfrac{1}{l_x})^2}}$

$$p_{a10} = A_{10}\cos\frac{\pi}{l_x}x = \frac{\rho_0\omega}{k_z}B_{10}\cos\frac{\pi}{l_x}x$$

（3）对于 $(0,1)$ 次简正波，$c_z = \dfrac{c_0}{\sqrt{1-\dfrac{\pi^2 c_0^2}{\omega^2}(\dfrac{1}{l_y})^2}}$

$$p_{a01} = A_{01}\cos\frac{\pi}{l_y}y = \frac{\rho_0\omega}{k_z}B_{01}\cos\frac{\pi}{l_y}y$$

习题 6

6-1 对于脉动球源，在满足 $kr_0<<1$ 的情况下，如使球源半径比原来增加一倍，表面振速及频率仍保持不变，试问其辐射声压增加多少分贝？如果在 $kr_0<<1$ 的情况下使球源半径比原来增加一倍，振速不变，频率也不变，试问声压增加多少分贝？

解：点声源声压 $P=\dfrac{A}{r}e^{j(wt-kr)}=\dfrac{\rho_0 c_0 k r_0^{\,2} u_a}{r[1+(kr_0)^2]}(kr_0+j)e^{j(wt-kr)}$

（1）当 $kr_0<<1$ 时，$P=j\dfrac{\rho_0 c_0 k r_0^{\,2} u_a}{r}e^{j(wt-kr)}$

球源半径比原来增加一倍，即 $P'=j\dfrac{\rho_0 c_0 k (2r_0)^2 u_a}{r}e^{j(wt-kr)}$

$$=4j\frac{\rho_0 c_0 k r_0^{\,2} u_a}{r}e^{j(wt-kr)}=4P$$

$\Rightarrow P_a{}'=4P_a\Rightarrow P_e{}'=4P_e$

所以 $L_P=20\lg\dfrac{4P_e}{P_{ref}}=20\lg\dfrac{P_e}{P_{ref}}+20\lg 4$

故辐射声压增加了 $20\lg 4$=12dB

（2）当 $kr_0>>1$ 时，$P=\dfrac{\rho_0 c_0 r_0 u_a}{r}e^{j(wt-kr)}$

球源半径比原来增加一倍，即 $P'=2\dfrac{\rho_0 c_0 r_0 u_a}{r}e^{j(wt-kr)}=2P$

$\Rightarrow P_a{}'=2P_a\Rightarrow P_e{}'=2P_e$

所以 $L_P=20\lg\dfrac{2P_e}{P_{ref}}=20\lg\dfrac{P_e}{P_{ref}}+20\lg 2$

故辐射声压增加了 $20\lg 2$=6dB

6-2 设以离开脉动球源中心为 r 的地方作参考点，试求距离为 $2r$，$4r$，$10r$ 等位置上的声压级之差等于多少分贝？观察者从距球心为 1m 及 10m 的地方，分别移动同样的距离 Δr＝1m，观察到的声压级的变化相等吗？如果不等，问各等于多少？

解：距离脉动球源中心分别为 r_1、r_2($r_1<r_2$)的两点声压级之差为

$$\Delta L=20\log_{10}\frac{p_{e1}}{p_{ref}}-20\log_{10}\frac{p_{e2}}{p_{ref}}=20\log_{10}\frac{p_{e1}}{p_{e2}}=20\log_{10}\frac{r_2}{r_1}$$

(1) 当 r_1＝r，r_2=$2r$ 时，ΔL=$20\log_{10}2$=6dB；

$r_2=4r$ 时，$\Delta L=20\log_{10}4=12\text{dB}$；

$r_2=10r$ 时，$\Delta L=20\log_{10}10=20\text{dB}$.

(2) 当 $r_2=r_1+1$，$r_1=1$ 时，$\Delta L=20\log_{10}2=6\text{dB}$；

$r_1=100$ 时，$\Delta L=20\log_{10}1.01=0.086\text{dB}$。

6-3 已知脉动球源半径为 $0.01m$，向空气中辐射频率为 $1000Hz$ 的声波，设表面振速幅值为 $0.05m/s$，求距球心 $50m$ 处的声压及声压级为多少？该处质点位移幅值、速度幅值为多少？辐射声功率为多少？

解： 球面波声压表达式为 $p=\dfrac{A}{r}e^{j(\omega t-kx)}$，

其中 $A=\dfrac{\rho_0 c_0 k r_0^2}{1+(kr_0)^2}u_a(kr_0+j)=|A|e^{j\theta}$，

$|A|=\dfrac{\rho_0 c_0 k r_0^2}{\sqrt{1+(kr_0)^2}}u_a$，$\theta=\arctan(\dfrac{1}{kr_0})$。

代入数值计算得

$$|A|=0.037(Pa\cdot m),\quad \theta=79.65^\circ$$

求距球心 $50m$ 处的声压 $p_a=\dfrac{|A|}{r}=7.4\times10^{-4}Pa$

声压级 $SPL=20\lg\dfrac{p_e}{p_{ref}}=20\lg\dfrac{7.4\times10^{-4}}{\sqrt{2}\times2\times10^{-2}}=28.35(dB)$

速度幅值 $v_a=\dfrac{p_a}{\rho_0 c_0}\dfrac{\sqrt{1+(kr)^2}}{kr}=1.78\times10^{-6}(m/s)$

位移幅值 $\varepsilon_a=\dfrac{v_a}{\omega}=2.83\times10^{-10}(m)$

辐射声功率 $\overline{W}_r=\dfrac{1}{2}R_r u_a^2=\dfrac{1}{2}\rho_0 c_0\dfrac{(kr_0)^2}{1+(kr_0)^2}S_0 u_a^2=2.10\times10^{-5}(W)$

6-4 空气中一半径为 r_0 的脉动球源，辐射 f Hz 的声波，欲在距球心 r 的地方得到声压级 L_p，问球源表面振速的幅值应为多少？辐射声功率为多大？

解： 由 $L_p=20\log_{10}\dfrac{p_{\mathrm{e}}}{p_{\mathrm{ref}}}$ 得 $p_{\mathrm{e}}=p_{\mathrm{ref}}\cdot10^{L_p/20}$ 则 $p_{\mathrm{a}}=\sqrt{2}p_{\mathrm{e}}=\sqrt{2}p_{\mathrm{ref}}\cdot10^{L_p/20}$

又 $|A|=\dfrac{\rho_0 c_0 k r_0^2 u_a}{\sqrt{1+(kr_0)^2}}$，$p_a=\dfrac{|A|}{r}$ ，（$k=\dfrac{\omega}{c_0}=\dfrac{2\pi f}{c_0}$）

$$v_{ra}=\frac{p_a r\sqrt{1+(kr_0)^2}}{\rho_0 c_0 k r_0^2}=0.19m/s$$

$$\bar{W}=\frac{2\pi}{\rho_0 c_0}\left|A\right|^2=\frac{2\pi}{\rho_0 c_0}(rp_a)^2=3.04\times10^{-4}W$$

6-5 设一演讲者在演讲时辐射声功率 $\overline{W}_r=10^{-3}W$，如果人耳听音时感到满意的最小有效声压 $p_e=0.1Pa$，求在无限空间中听众离开演讲者可能的最大距离。

解：辐射声功率 $\overline{W}_r=4\pi r^2\frac{p_e^2}{\rho_0 c_0}$，代入数值得：

$$10^{-3}=4\pi r^2\cdot\frac{0.1^2}{415}$$

得：$r=1.82(m)$，

因此，最大距离为$1.82m$。

6-7 半径为 0.005m 的脉动球向空气中辐射 f =100Hz 时的声波，球源表面振速幅值为 0.008m/s，试求辐射声功率。

解：平均辐射声功率 $\overline{w}=\frac{2\pi}{\rho_0 c_0}\left|A\right|^2$，即

$$\overline{w}=\frac{2\pi}{\rho_0 c_0}\frac{{\rho_0}^2{c_0}^2k^2{r_0}^4{u_a}^2}{1+(k{r_0}^2)}=\frac{2\pi\rho_0 c_0 k^2{r_0}^4{u_a}^2}{1+(k{r_0}^2)}$$

由于 $kr_0=\frac{w}{c_0}r_0=\frac{2\pi\times100}{344}\times0.005\approx9.13\times10^{-3}<<1$

所以 $\overline{w}=2\pi\rho_0 c_0 k^2{r_0}^4{u_a}^2\approx3.49\times10^{-10}$（J）

6-8 设有两个半径为$0.005m$的脉动球中心相距$15cm$，两个球面振速均匀为$u=0.008e^{j2\pi100t}$，试问总辐射声功率为多少？与 6−7 题结果相比较，说明了什么？

解：两个小球总辐射声功率

$$\overline{W}=\overline{W}_1+\overline{W}_2=\rho_0 c_0 S_0(kr_0)^2(1+\frac{\sin kl}{kl})u_a^2=1.38\times10^{-9}(W)$$

其中：$r_0=0.005m$，$l=0.15m$。

6-10 将频率为 100Hz，辐射声功率 0.1W 的点声源放在宽广的水面附近的空气中，试求：

(1) 在离声源 1km 远处水面附近的声压；

(2) 离声源 1km 垂直高处的声压。

解： 由(6-1-22)得 $\overline{W}=\frac{2\pi}{\rho_0 c_0}|A|^2$，则 $|A|=\sqrt{\frac{\overline{W}\rho_{0c}c_0}{2\pi}}=8.13Pa$.

(1) 因为是宽广的水面，沿水面附近传播的声波不发生反射，离声源 1km 处点的声压为 $p_a=\frac{|A|}{r}=0.008pa$.

(2) 水相对于空气是绝对硬边界，可以假设垂直入射到水面的声波发生全反射，且假设声源是很贴近水面的，则 $p_a=\frac{2|A|}{r}=0.163pa$.

6-11 两个频率相同、源强分别为 Q_{01} 和 Q_{02} 的同相振动点声源相距 l 排列，如图 6-11 所示。证明离声源很远处的声压为

$$p=j\frac{k\rho_0 c_0}{4\pi r}e^{j(\omega t-kr)}[(Q_{01}+Q_{02})\cos(\frac{\pi\cos\theta l}{\lambda})+j(Q_{01}-Q_{02})\sin(\frac{\pi\cos\theta l}{\lambda})]$$

解： 在点 P 的声压有 $p=p_1+p_2$

$$=\frac{A_1}{r_1}e^{j(\omega t-kr_1)}+\frac{A_2}{r_2}e^{j(\omega t-kr_2)}$$

其中 $A_i=\frac{\rho_0 c_0 k r_0^2}{1+(kr_0)^2}u_a(kr_0+j)$，$i=1,2$。

对两个点声源 $k_0 r<<1$，因此可得 $A_i\approx\rho_0 c_0 k r_0^2 u_a\cdot j$。

$$p=\frac{jk\rho_0 c_0 r_0^2}{r_1}u_{a1}e^{j(\omega t-kr_1)}+\frac{jk\rho_0 c_0 r_0^2}{r_2}u_{a2}e^{j(\omega t-kr_2)} \qquad (*)$$

在离声源很远处，有

$$r_1=r-\Delta,\quad r_2=r+\Delta$$

其中 $\Delta=\frac{l}{2}\cos\theta$。

$$p=\frac{jk\rho_0 c_0 r_0^2}{r_1}e^{j(\omega t-kr)}(u_{a1}e^{jk\Delta}+u_{a2}e^{-jk\Delta})$$

再将 $Q_0=4\pi r_0^2 u_a$，$k\Delta=\frac{\pi l}{\lambda}\cos\theta$ 代入（*）式得

$$p=\frac{jk\rho_0 c_0}{4\pi r}e^{j(\omega t-kr)}[(Q_{01}+Q_{02})\cos(\frac{\pi l\cos\theta}{\lambda})+j(Q_{01}-Q_{02})\sin(\frac{\pi l\cos\theta}{\lambda})]$$

6-12 两个频率相同，源强分别为 Q_{01} 和 Q_{02} 的振动点声源相距 l 排列，如果令 $Q_{01}=-Q_{02}$，即两个点

源组成偶极子，证明所得的结果与（6－2－3）式相同。如果令$Q_{01}=Q_{02}$，即两个相等源强的同相点源，证明所得结果与（6－3－2）相同。

解：（1）当$Q_{01}=-Q_{02}$时

$$r_{+}\approx r+\frac{l}{2}\cos\theta \ ,\quad r_{-}\approx r-\frac{l}{2}\cos\theta$$

设点声源Ⅰ在p处产生声压为p_1，点声源Ⅱ在p处产生声压为p_2，在点p得总声压为p。

$$p_1=\frac{A_1}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr_1)}=\frac{A_1}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[\omega t-k(r+\frac{l}{2}\cos\theta)\right]}=\frac{A_1}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}e^{-jk\frac{l}{2}\cos\theta}$$

其中 $A_1=\frac{\rho_0 c_0 k r_{01}^2}{1+(kr_{01})^2}u_{1a}(kr_{01}+\mathrm{j})$ （$kr_{01}\ll 1$）

$$\approx j\rho_0 c_0 k r_{01}^2 u_{1a}=j\frac{\rho_0 c_0 k}{4\pi}Q_{01}\qquad (Q_{01}=4\pi r_{01}^2 u_{1a})$$

$$p_2=\frac{A_2}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr_2)}=\frac{A_2}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[\omega t-k(r+\frac{l}{2}\cos\theta)\right]}=\frac{A_2}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}e^{jk\frac{l}{2}\cos\theta}$$

其中 $A_2=\frac{\rho_0 c_0 k r_{02}^2}{1+(kr_{02})^2}u_{2a}(kr_{02}+\mathrm{j})$ （$kr_{02}\ll 1$）

$$\approx j\rho_0 c_0 k r_{02}^2 u_{2a}=j\frac{\rho_0 c_0 k}{4\pi}Q_{02}\qquad (Q_{02}=4\pi r_{02}^2 u_{2a})$$

$$\therefore\ p=p_1+p_2=\frac{A_1}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}e^{-jk\frac{l}{2}\cos\theta}+\frac{A_2}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}e^{jk\frac{l}{2}\cos\theta}$$

$$=j\frac{\rho_0 c_0 k}{4\pi r}Q_{01}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}\left[e^{-jk\frac{l}{2}\cos\theta}-e^{jk\frac{l}{2}\cos\theta}\right]\qquad (r_{01}\approx r,\ r_{02}\approx r,\ Q_{01}=-Q_{02})$$

$$=\frac{A}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}\left(-2j\sin\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)\right)\qquad \left(\text{其中 }A=j\frac{\rho_0 c_0 k}{4\pi}Q_{01}=j\rho_0 c_0 k r_{01}^2 u_{1a}\right)$$

（2）当$Q_{01}=Q_{02}$时

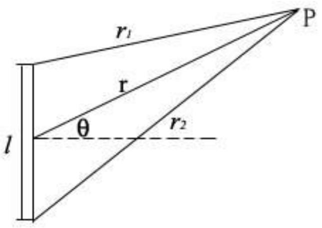
$$p=p_1+p_2=\frac{A_1}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}e^{-jk\frac{l}{2}\cos\theta}+\frac{A_2}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}e^{jk\frac{l}{2}\cos\theta}$$

$$=j\frac{\rho_0 c_0 k}{4\pi r}Q_{01}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}\left[e^{-jk\frac{l}{2}\cos\theta}+e^{jk\frac{l}{2}\cos\theta}\right]\qquad (r_{01}\approx r,\ r_{02}\approx r,\ Q_{01}=Q_{02})$$

$$=\frac{A}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}\,2\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)\qquad \left(\text{令 }\Delta=\frac{l}{2}\sin\theta\right)$$

$$=\frac{A}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}\frac{\sin 2k\Delta}{\sin k\Delta}\qquad \left(\text{其中 }A=j\frac{\rho_0 c_0 k}{4\pi}Q_{01}=j\rho_0 c_0 k r_{01}^2 u_{1a}\right)$$

6-13 求两个频率相同，源强相等，相位差$\dfrac{\pi}{2}$的点声源相距为 l 时的远场辐射声压。



解：

$$P = P_1 + P_2 = j\frac{k\rho_0 c_0 Q_0}{4\pi r_1}e^{j(wt-kr_1)} + j\frac{k\rho_0 c_0 Q_0}{4\pi r_2}e^{j(wt-kr_2)}$$

又 $r_1 \approx r - \dfrac{l}{2}\sin\theta$， $r_2 \approx r + \dfrac{l}{2}\sin\theta$，振幅部分 r_1、r_2 可用 r 来代替，则

$$P = j\frac{k\rho_0 c_0 Q_0}{4\pi r}e^{j(wt-kr)}(e^{jk\Delta} + e^{-jk\Delta})\text{，令 }\Delta = \frac{l}{2}\sin\theta$$

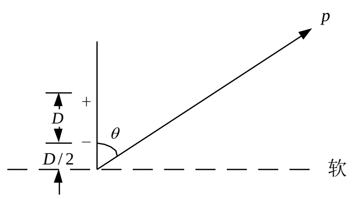
$$= j\frac{k\rho_0 c_0 Q_0}{4\pi r}e^{j(wt-kr)}[(\cos k\Delta - \sin k\Delta) - j(\cos k\Delta - \sin k\Delta)]$$

$$= j\frac{k\rho_0 c_0 Q_0}{4\pi r}e^{j(wt-kr)}\sqrt{2}(\cos k\Delta - \sin k\Delta)e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$= j\frac{\sqrt{2}k\rho_0 c_0 Q_0}{4\pi r}(\cos k\Delta - \sin k\Delta)e^{j(wt-kr-\frac{\pi}{4})}$$

6-14 证明如图所示的绝对软分界面前偶极子的远场辐射声压为

$$p = \mathrm{j}\frac{2kAD}{r}\cos\theta \cdot e^{-\mathrm{j}kr}\cos(kD\cos\theta)e^{\mathrm{j}wt}.$$



解：由镜像原理知，绝对软边界对声源的影响等效于一个反相的的虚声源. 由声压叠加原理得远场任意 p 点得声压表达式为

$$p = \left(\frac{A}{r_+}e^{\mathrm{j}(wt-kr_+)} - \frac{A}{r_-}e^{\mathrm{j}(wt-kr_-)}\right) + \left(\frac{A}{r_+'}e^{\mathrm{j}(wt-kr_+')} - \frac{A}{r_-'}e^{\mathrm{j}(wt-kr_-')}\right)$$

其中， $r_+ \approx r - \dfrac{3D}{2}\cos\theta$， $r_- \approx r - \dfrac{D}{2}\cos\theta$， $r_+' \approx r + \dfrac{D}{2}\cos\theta$， $r_-' \approx r + \dfrac{3D}{2}\cos\theta$.

考虑远场的声压时，即假设 r>>D，则由四个小球源辐射的声波达到观察点 p 时，振幅差别甚小，可用 r 代替 r_+，r_-，r_+'，r_-'，但是它们对相位的差异不能忽略.

$$p = \left(\frac{A}{r}e^{\mathrm{j}(wt-kr+\frac{3kD}{2}\cos\theta)} - \frac{A}{r}e^{\mathrm{j}(wt-kr+\frac{kD}{2}\cos\theta)}\right) + \left(\frac{A}{r}e^{\mathrm{j}(wt-kr-\frac{kD}{2}\cos\theta)} - \frac{A}{r}e^{\mathrm{j}(wt-kr-\frac{3kD}{2}\cos\theta)}\right)$$

$$=\frac{A}{r}e^{\mathrm{j}(wt-kr)}\left[\left(e^{\mathrm{j}\frac{3kD}{2}\cos\theta}-e^{\mathrm{j}\frac{kD}{2}\cos\theta}\right)+\left(e^{-\mathrm{j}\frac{kD}{2}\cos\theta}-e^{-\mathrm{j}\frac{3kD}{2}\cos\theta}\right)\right]$$

$$=\frac{A}{r}e^{\mathrm{j}(wt-kr)}\left[e^{\mathrm{j}k\mathrm{D}\cos\theta}\left(e^{\mathrm{j}\frac{kD}{2}\cos\theta}-e^{-\mathrm{j}\frac{kD}{2}\cos\theta}\right)+e^{-\mathrm{j}k\mathrm{D}\cos\theta}\left(e^{\mathrm{j}\frac{kD}{2}\cos\theta}-e^{-\mathrm{j}\frac{kD}{2}\cos\theta}\right)\right]$$

$$=\frac{A}{r}e^{\mathrm{j}(wt-kr)}\left(e^{\mathrm{j}\frac{kD}{2}\cos\theta}-e^{-\mathrm{j}\frac{kD}{2}\cos\theta}\right)\left(e^{\mathrm{j}k\mathrm{D}\cos\theta}+e^{-\mathrm{j}k\mathrm{D}\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{A}{r}e^{\mathrm{j}(wt-kr)}\cdot 2\mathrm{j}\sin(\frac{kD}{2}\cos\theta)\cdot 2\cos(k\mathrm{D}\cos\theta)$$

由于 kD<<1，可将 $\sin(\frac{kD}{2}\cos\theta)$ 近似为 $\frac{kD}{2}\cos\theta$，由此

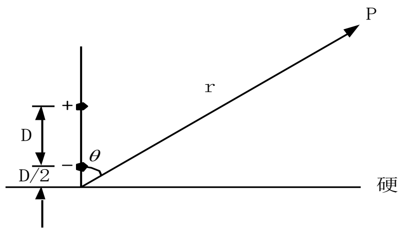
上式 $=\frac{A}{r}e^{\mathrm{j}(wt-kr)}\cdot \mathrm{j}kD\cos\theta\cdot 2\cos(k\mathrm{D}\cos\theta)$

$$=\mathrm{j}\frac{2kAD}{r}\cos\theta e^{-\mathrm{j}kr}\cos(k\mathrm{D}\cos\theta)e^{\mathrm{j}wt}$$

由此结论得证.

6-15 证明如图所示的刚性壁面前偶极子的远场辐射声压为

$$\mathrm{p}=\mathrm{j}\frac{2\mathrm{kAD}}{\mathrm{r}}\cos\theta\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{jkr}}\,\mathrm{j}\sin(\mathrm{kD}\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}$$



证明：由镜像原理知，绝对硬边界对声源的影响等效于一个同相的的虚声源。根据同相小球声场叠加，分别得两个相距 3D 的正相小球声场

$$P_1=\frac{A}{r}e^{j(wt-kr)}\cdot 2\cos(\frac{3kD}{2}\cos\theta)$$

两个相距 D 的负相小球声场

$$P_2=-\frac{A}{r}e^{j(wt-kr)}\cdot 2\cos(\frac{kD}{2}\cos\theta)$$

则远场 $P=P_1+P_2=\frac{2A}{r}e^{j(wt-kr)}\cdot[\cos(\frac{3kD}{2}\cos\theta)-\cos(\frac{kD}{2}\cos\theta)]$

$$=-\frac{4A}{r}e^{j(wt-kr)}\sin(kD\cos\theta)\sin(\frac{kD}{2}\cos\theta)$$

又 $\sin(\frac{kD}{2}\cos\theta)\approx\frac{kD}{2}\cos\theta$，故得

$$P=-\frac{2kAD}{r}\cos\theta\cdot e^{-jkr}\cdot j\sin(kD\cos\theta)e^{jwt}$$

即得证。

6-16 由声柱指向特性（6-3-23）式出发，证明长度为 L 的均匀直线声源的指向特性为

$$D(\theta)=\left|\frac{\sin(\frac{\pi L}{\lambda}\sin\theta)}{\frac{\pi L}{\lambda}\sin\theta}\right|。$$

证明： 由 n 个体积速度相等，相位相同，两两相距 l 的小脉动球源组成的声柱的指向特性为

$$D(\theta)=\left|\frac{\sin kn\Delta}{n\sin k\Delta}\right|$$

长度为 L 的均匀直线声源，利用极限将直线声源等效为 n （$n\to\infty$）个小脉动球源。

$$D(\theta)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin kn\Delta}{n\sin k\Delta}\right|$$

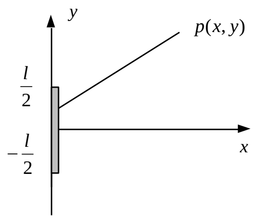
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin[\frac{2\pi}{\lambda}n\frac{L}{2(n-1)}\sin\theta]}{n\sin[\frac{2\pi}{\lambda}\frac{L}{2(n-1)}\sin\theta]}\right|$$

$$=\left|\sin\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{\pi d}{\lambda(n-1)}\sin\theta}\right|$$

$$=\left|\frac{\sin(\frac{\pi L}{\lambda}\sin\theta)}{\frac{\pi L}{\lambda}\sin\theta}\right|$$

证毕。

6-18 试用点源组合的方法求解有限长线声源均匀辐射时的声压。



解： 由点源组合法可将线声源看成是无数个点声源的组合. 首先计算任意点声源在点 p 处产生的声压：

$$p^{'}(x,y)=\frac{A}{r_i}e^{j(wt-kr_i)}，其中\ r_i=\sqrt{x^2+(y-y_i)^2}\ .$$

由声压的叠加原理得线声源在 p 点的声压为：

$$p(x,y)=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{A}{r_i}e^{\mathrm{j}(wt-kr_i)}dy_i$$

$$=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{A}{\sqrt{x^2+(y-y_i)^2}}e^{\mathrm{j}(wt-k\sqrt{x^2+(y-y_i)^2})}dy_i\,.$$

6-19 如将一列很长的火车近似看作无限长线声源，设单位长度的声功率为W_1，地面为声学刚性平面，求距离火车垂直距离r_0处的p_e^2（不计火车的运动），讨论p_e与r_0的关系。（提示：$r_0=r_1\cos\theta$，$dx\cos\theta=r_1d\theta$）

解：建立模型如右图所示，设火车首尾与观察点的连线与垂线r_0的夹角分别为θ_1和θ_2。

取一小微元dx

又 $r_0=r_1\cos\theta$， $dx\cos\theta=r_1d\theta$

$$dp_e^2=2\times\frac{\rho_0c_0}{4\pi r_1^2}dW=\frac{\rho_0c_0}{2\pi r_1^2}W_1dx$$

将$dx\cos\theta=r_1d\theta$代入并两边积分得：

$$p_e^2=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\rho_0c_0}{2\pi r_1^2}dW$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\rho_0c_0}{2\pi}W_1\frac{\cos^2\theta}{r_0^2}\cdot\frac{r_0}{\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{W_1\rho_0c_0}{2\pi r_0}(\theta_2-\theta_1)$$

将火车看作无限长，则有

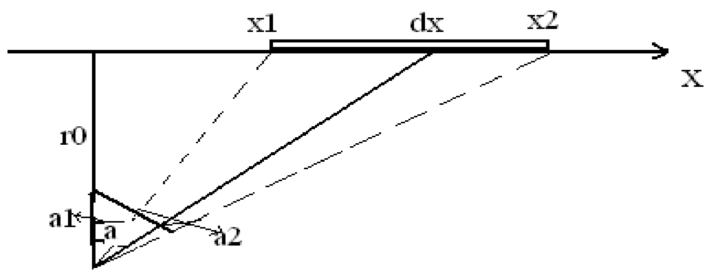
$$\theta_1=-\frac{\pi}{2}，\quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

因此可得p_e与r_0的关系为

$$p_e^2=\frac{W_1\rho_0c_0}{2r_0}$$

6-20 如将火车近似看作有限长线声源，设单位长度得声功率为W_1，地面为声学刚性平面，火车首尾与观察点连线的夹角（对于垂线r_0）分别为α_1和α_2，距离火车垂直距离r_0处得p_e^2（不计火车的运动），证明

$$p_e^2 = \frac{W_1 \rho_0 c_0}{2\pi r_0}(\alpha_2 - \alpha_1)$$



解： $p = \frac{|A|}{r} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kr + \theta)}$， $p_e = \frac{|A|}{\sqrt{2} r}$

$p_e^2 = \frac{|A|^2}{2r^2}$， $\bar{W} = \frac{2\pi}{\rho_0 c_0}|A|^2$

则 $p_e^2 = \frac{\bar{W} \rho_0 c_0}{4\pi r^2}$ 又 $x = r_0 \tan\alpha$， $dx = r_0 \sec^2 \alpha d\alpha$

$$\therefore\ p^2 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\bar{W} \rho_0 c_0}{4\pi (r_0^2 + x^2)} dx = \frac{\bar{W} \rho_0 c_0}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{r_0^2 (1 + \tan^2 \alpha)} r_0 \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$= \frac{\bar{W} \rho_0 c_0}{4\pi r_0}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

6-21 设有一半径为α是圆形声源，总输出声功率为W，已知每一面元是辐射声功率都相同，而它们的相位却是无规而各不相干。试求该声源中心轴上z处的平方平均声压。

解： 已知每一面元相位是无规且各不相干的，

因此，总平方平均声压 $\bar{p}^2 = \iint_D \frac{\rho_0 c_0}{4\pi r^2} dW$

$$= \iint_D \frac{\rho_0 c_0}{4\pi r^2} \frac{W}{\pi a^2} dS$$

$$= \iint_D \frac{\rho_0 c_0 W}{4\pi a^2} \frac{1}{z^2 + \rho^2} dS \quad = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{\rho_0 c_0 W}{4\pi a^2} \frac{\rho}{z^2 + \rho^2} d\rho$$

$$= \frac{W \rho_0 c_0}{4\pi a^2} \ln[1 + (\frac{a}{z})^2]$$

6-22 有一直径为 30 ㎝纸盆扬声器嵌在无限大障板上向空气中辐射声波，假设它可以看作是活塞振

动，试分别画出它们在 100Hz 与 1000Hz 时的指向性图。当 f=1000Hz 时，主声束角宽度为多少？此扬声器临界距离 z_g 为多少？

解： $D(\theta)=\dfrac{(p_A)_\theta}{(p_A)_{\theta=0}}=\left|\dfrac{2J_1(k\alpha\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right|$

$k=\dfrac{2\pi f}{c_0}=0.0183f$，半径 $a=\dfrac{d}{2}=0.15m$

$f_1=100Hz$，$k_1=1.83$，$k_1a=0.27<1$

$f_2=1000Hz$，$k_2=18.3$，$k_2a=2.7\approx3$

作图如 $p_{348}\ (a),(b)$

$\theta=2\arcsin0.16\dfrac{\lambda}{a}=2\arcsin0.16\dfrac{c_0}{fa}=2\arcsin0.16\dfrac{344}{1000\times0.15}=43^0$

$z_g=\dfrac{a^2}{\lambda}=\dfrac{a^2f}{c_0}=\dfrac{0.15^2\times1000}{344}\approx0.065m$

6-24 已知活塞表面的振速为为

$$u(t,\rho)=u_0(1-\frac{\rho^2}{a^2})^n\cdot e^{j\omega t}$$

证明离活塞很远处的辐射声压为

$$p=j\frac{\omega\rho_0u_0}{r}e^{j(\omega t-kr)}\cdot2^nn!\frac{a^2J_{n+1}(ka\sin\theta)}{(ka\sin\theta)^{\theta+1}}\text{。}$$

证明：面元在观察点 P 产生的声压为 $dp=j\dfrac{k\rho_0c_0}{2\pi h}u_adSe^{j(\omega t-kh)}$

对整个活塞表面积分可得整个活塞的辐射声压为

$$p=\iint dp=\iint_S j\frac{k\rho_0c_0}{2\pi h}u_ae^{j(\omega t-kh)}dS \qquad (*)$$

从图中可看出有

$$h^2=r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\hat{\rho,r}),$$

在离活塞很远处有 $r>>a$，上式则可近似为

$$h=r-\rho\cos(\hat{\rho,r})$$

由解析几何可得

$$\cos(\rho \hat{,} r)=\frac{\vec{\rho}\cdot\vec{r}}{|\rho||r|}=\sin\theta\cos\varphi$$

于是（*）式可化为

$$p=j\frac{\omega\rho_0 u_0}{2\pi r}e^{j(\omega t-kr)}\int_0^a \rho(1-\frac{\rho^2}{a^2})^n d\rho\int_0^{2\pi}e^{jk\rho\sin\theta\cos\varphi}d\varphi \qquad (**)$$

柱贝塞尔函数有下列性质：

$$J_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{jx\cos\varphi}d\varphi，\quad \int xJ_n(x)dx=xJ_{n+1}(x)$$

通过以上性质对（**）式积分可得辐射声压为

$$p=j\frac{\omega\rho_0 u_0}{r}e^{j(\omega t-kr)}\cdot 2^n n!\frac{a^2 J_{n+1}(ka\sin\theta)}{(ka\sin\theta)^{\theta+1}}$$

6-26 半径为$15cm$的活塞嵌在无限大障板上向空气中辐射声波，已知振速幅值$u_a=0.002m/s$，求$f=300Hz$时轴上$1m$处的声压级，辐射声功率及同振质量。

解：低频时，活塞轴线上的声压幅值为

$$p_{Na}=2\rho_0 c_0 u_a\sin\frac{k}{2}(R-z)$$

因此声压级为

$$SPL=20\lg\frac{p_{Na}}{\sqrt{2}p_e}=20\lg\frac{2\rho_0 c_0 u_a\sin\frac{k}{2}(R-z)}{\sqrt{2}p_e}$$

已知$u_a=0.002m/s$， $a=0.15m$， $z=1m$， $\rho_0 c_0=415Pa\cdot s/m$， $f=300Hz$

又有：$k=\dfrac{2\pi f}{c_0}$， $R=\sqrt{a^2+z^2}$，

代入以上数值计算得$SPL=65.1dB$。

习题 7

7-1 有一压强式动圈传声器，已知其振膜的有效半径为$a=10^{-2}m$，振膜的质量$M_m=2\times10^{-4}kg$，固有频率 $f_0=300Hz$，振动系统的力学品质因素$Q_m=2$，音圈导线长度$l=3m$，磁隙是磁通量密度$B=1Wb/m^2$，假定有频率为$100Hz$，$300Hz$，$1000Hz$有效声压都为$1Pa$的声波依次垂直作用在振膜上，试问该传声器的开路输出有效电压将各为多少？

解：对 $f_1=100Hz$的声波，

$$F_a=Pa\cdot S=\sqrt{2}Pe\cdot\pi 0.01^2=4.44\times10^{-4}(N)；\quad z=\frac{f_1}{f_0}=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$$

代入$v_a=\dfrac{F_aQ_mz}{\omega_0M_m\sqrt{z^2+(z^2-1)^2Q_m^2}}$计算的$v_a=4.34\times10^{-4}(m/s)$，

因此，开路输出有效电压$E_e=Blv_e=\dfrac{Blv_a}{\sqrt{2}}=9.21\times10^{-4}(V)$。

同样的方法可求得：$f_2 = 300Hz$时，$E_e = 5.00\times10^{-4}(V)$；

$f_2 = 1000Hz$时，$E_e = 8.10\times10^{-4}(V)$。

7-2 有一压强式电容传声器，振膜由镍做成，已知其半径为$a = 10^{-2}$ m，厚度$h = 10^{-5}$m,振膜与背极间的距离$D = 10^{-5}$ m，施加的极化电压$E_0 = 200V$，假定有一频率为 200Hz 有效声压为 1Pa 的声波作用在振膜上，试问该传声器的开路输出有效电压为多少？

解： $S = \pi a^2 = \pi\times(10^{-2})^2 m^2$，$h = 10^{-5} m$，　$D = 10^{-5}$ m，$E_0 = 200V$，$f = 200Hz$

$M_m = \rho S h = 8.8\times0\pi\times10^{-6}\,k$，$p_e = 1p_a$，$p_a = \sqrt{2}p_a$

由 $F = p_a S e^{j(\omega t - kr)}$ 得 $F_a = |F| = p_a S = \sqrt{2}\pi\times10^{-6} N$

由 $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K_m}{M_m}}$ 得 $K_m = 4\pi^2 f^2 M_m = 43.7\, N/s$

又 $\xi_a = \dfrac{F_a}{K_m} = 1.02\times10^{-5} m$

由 $E_a = \dfrac{E_0}{D}\xi_a$ 得 $E_e = \dfrac{E_a}{\sqrt{2}} = \dfrac{E_0}{\sqrt{2}D}\xi_a = 144V$

7-3 有一压差式动圈传声器，已知振膜的有效半径 a=2×10^{-2}m. 假设有一频率为 4000Hz 的声波分别以法线(θ=0°)与切线方向(θ=90°)入射，试问该传声器在此两种入射情况下的开路输出电压相差多少分贝(不计频散效应).

解　传声器输出电压 E 与振膜的位移 ε 的关系式：$E = \dfrac{E_0}{D}\xi$. 其中 D 为振膜与背极之间的静态距离，E_0 为在它们之间的极化电压。振膜位移和振膜上作用力的关系式：$\xi = \dfrac{F}{K_m}$.

利用(7-1-5)式可得两种入射情况下开路输出电压差为：$\Delta L_E = 20\log_{10}(\dfrac{F_1}{F_2}) = 20\log_{10}\left[\dfrac{\dfrac{J_1(ka\sin\theta_1)}{ka\sin\theta_1}}{\dfrac{J_1(ka\sin\theta_2)}{ka\sin\theta_2}}\right]$，

其中 θ_1=0°，θ_2=90° .

由于 θ_1=0°, 计算$\dfrac{J_1(ka\sin\theta_1)}{ka\sin\theta_1}$时用到了罗比达求导法则. 计算可得 ΔL_E＝2.4dB.

7-4 有一利用压差原理做成的动圈传声器，振膜前后的声程差已知为$\Delta = 4\times10^{-2} m$。假设传声器的力学参数与声波的作用情况同题 7−1 完全一样，试求该传声器的开路输出电压，如果要求传声器在上述

频率范围内开路灵敏度（开路输出电压与作用声压之比）均匀，则传声器振动系统的固有频率与力学品质因素应作怎样的改变？

解： $F_a = |P_a| kS\Delta \cos\theta \dfrac{\sqrt{1+k^2r^2}}{kr}$

由题可得 $kr >> 1$，上式可化为 $F_a \approx |P_a| kS\Delta \cos\theta$，

当 $f = 100Hz$ 时，代入数值计算得 $F_a = \dfrac{8\sqrt{2}\pi^2}{343}\cos\theta \times 10^{-4}$，

代入 $v_a = \dfrac{F_a Q_m z}{\omega_0 M_m \sqrt{z^2 + (z^2-1)^2 Q_m^2}}$ 进一步计算得 $v_a = 3.18\cos\theta \times 10^{-5}(m/s)$

因此 $E_e = Blv_e = \dfrac{Blv_a}{\sqrt{2}} = 6.75\cos\theta \times 10^{-5}(V)$

类似的计算可得，当 $f = 300Hz$ 时，$E_e = 1.10\cos\theta \times 10^{-3}(V)$；

当 $f = 1000Hz$ 时，$E_e = 5.80\cos\theta \times 10^{-4}(V)$

7-5 有一点声源向空间辐射 200Hz 的声波，现将一压差式传声器依次放在离声源 0.01m 与 1m 处进行测量，试问测得的开路输出电压将差多少分贝？

解： $\dfrac{(F_\mathrm{a})_\mathrm{N}}{(F_\mathrm{a})_\mathrm{F}} = \dfrac{c_0}{\omega r_\mathrm{N}} \dfrac{(p_\mathrm{a})_\mathrm{N}}{(p_\mathrm{a})_\mathrm{F}}$.　$r_N = 0.01m$，$c_0 = 344\,m/s$，$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 200$

$\because$ 作用在传声器上的声压振幅保持不便，即 $|p_a|_N = |p_a|_F$

$\therefore$ $\dfrac{(F_\mathrm{a})_\mathrm{N}}{(F_\mathrm{a})_\mathrm{F}} = \dfrac{c_0}{\omega r_\mathrm{N}}$

又 $\xi_a = \dfrac{F_a}{K_m}$　则 $\dfrac{(\xi_a)_\mathrm{N}}{(\xi_a)_\mathrm{F}} = \dfrac{c_0}{\omega r_\mathrm{N}}$

$E_a = \dfrac{E_0}{D}\xi_a$　则 $\dfrac{(E_a)_\mathrm{N}}{(E_a)_\mathrm{F}} = \dfrac{(\xi_a)_\mathrm{N}}{(\xi_a)_\mathrm{F}} = \dfrac{c_0}{\omega r_\mathrm{N}} = 27.4$

则 $\square = 20\lg|E_a|_N - 20\lg|E_a|_F = 20\lg\dfrac{(E_a)_\mathrm{N}}{(E_a)_\mathrm{F}} = 20\lg 27.4 = 28.8dB$

7-6 将一压差传声器垂直置于平面驻波场中(θ=0)，此声场的声压可表示为 $p=2p_a\sin kx\cos\omega t$.试导出振膜上作用力的表达式，并讨论在声压波节与波腹处作用力的变化情况.

解： 由题意知 $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 2p_a k\cos kx\cos\omega t$，$\theta$=0，$\Delta$ 为压差式传声器振膜前后相隔的距离.　由式(7-1-7)得作用在振膜上的合力为

$$F = -S\frac{\partial p}{\partial x}\Delta\cos\theta$$

$$= -2S\Delta p_a k\cos kx\cos\omega t\ .$$

(1) 声压波节处 sinkx=0，则 coskx=±1，得作用力 $F = \pm 2S\Delta p_a k\cos\omega t$.

(2) 声压波腹处 sinkx=±1，则 coskx=0，得作用力 F=0 .

7-9 对一压强与压差复合式电容传声器，试问应怎样来选择其力学振动系统与声学系统的参数，使传声器的开路灵敏度在一较宽的频率范围内保持均匀的频率特性？

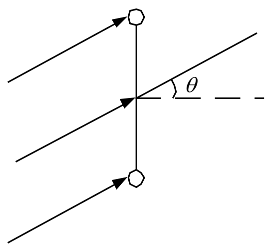
解: 将系统设计在立力阻控制区，且其参数固有频率 f_0，频带宽度 Δf 与力学品质因素 Q_m 有 $\Delta f = \dfrac{f_0}{Q_m}$ 的关系，所以只要让 Q_m 较小，固有频率 f_0 较大，则课使传声器的开路灵敏度在一较宽的频率范围内保持均匀的频率特性。

7-10 有一压强与压差复合式电容传声器，试问应怎样来选择其力学振动系统与声学系统的参数，使传声器的开路灵敏度在一较宽的频率范围内保持均匀的频率特性？

解： 要选择参数使得 $B = \dfrac{\Delta}{c_0 C_{\mathrm{a}} R_{\mathrm{a}}} = 1$，

即 $\Delta = c_0 C_{\mathrm{a}} R_{\mathrm{a}}$，其中 Δ 为振膜前后相隔的距离。

7-11 有两个相同的小型压强式传声器，相距为 d. 它们的开路输出串联相接，由此构成一复合接受系统，现将它置于平面声场中与声波入射方向成 θ 角，如图所示. 试求这一复合接收系统的接收指向特性 D.



解： 设声压式传声器 A 距离声源的距离为 r，则传声器 B 距离声源的距离为 $r+d\sin\theta$. 由式(7-1-5)得(书上是对点声源推导的，同样适用于平面波)两个传声器振膜上作用力的表达式分别为

$$F_A = (p_a S)e^{\mathrm{j}(\omega t - kr)}\left[\frac{2\mathrm{J}_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]$$

$$F_B = (p_a S)e^{\mathrm{j}(\omega t - kr - kd\sin\theta)}\left[\frac{2\mathrm{J}_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right].$$

由题意知两个传声器的开路输出串联相接，得

$$F=F_A+F_B=(p_aS)e^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}\left[\frac{2\mathrm{J}_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right](1+e^{\mathrm{j}(-kd\sin\theta)}).$$

由指向性的定义得

$$D=\frac{(F_a)_\theta}{(F_a)_{\theta=0}}=\left|\left[\frac{2\mathrm{J}_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right](1+e^{\mathrm{j}(-kd\sin\theta)})\right|=\sqrt{1+2\cos(kd\sin\theta)}\left|\left[\frac{2\mathrm{J}_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]\right|$$

7-13 将 7-11 题的两个传声器扩展为n个传声器，它们之间的相距都为d，试证明这一n个小型传声器构成的接收系统的指向特性等于

$$D=\frac{\sin(\frac{n}{2}kd\cos\theta)}{n\sin(\frac{kd}{2}\cos\theta)}。$$

习题 8

8-1 有一$l_x \times l_y \times l_z = 10m \times 7m \times 4m$的矩形房间，已知室内的平均吸声系数$\overline{\alpha} = 0.2$，试求该房间的平均自由程，房间常数与混响时间（忽略空气吸收）。

解： 平均自由成程$\overline{L} = \frac{L}{N} = \frac{4V}{S} = \frac{4l_x l_y l_z}{2(l_x l_y + l_x l_z + l_y l_z)}$

$$= \frac{4 \times 10 \times 7 \times 4}{2(4 \times 10 + 10 \times 7 + 4 \times 7)} = 4.058(m)$$

房间常数 $R = \frac{S\overline{\alpha}}{1-\overline{\alpha}} = \frac{2(l_x l_y + l_y l_z + l_x l_z)}{1-\overline{\alpha}}$

$= \frac{2 \times (10 \times 7 + 10 \times 4 + 7 \times 4)}{1-0.2} = 69(m^2)$

混响时间 $T_{60} = 0.161 \frac{V}{-S\ln(1-\overline{\alpha})}$

$= 0.161 \frac{10 \times 7 \times 4}{-2(70 \times 40 \times 28) \times \ln 0.8} = 0.732(s)$

8-2 有一$l_x \times l_y \times l_z = 6m \times 7m \times 5m$的混响室。室内除了有一扇 4 ㎡的木门外，其他壁面都由磨光水泥做成，已知磨光水泥的平均吸声系数在 250Hz 时为 0.01，在 4000Hz 时为 0.02，木门的平均吸声系数在此二频率分别为 0.05 与 0.1。假定房间的温度为 20℃，相对湿度为 50％。试求该混响在此两频率时的混响时间。

解： 房间的温度为$20^0 C$，相对温度为50%，在$4000Hz$时，空气声强吸收系数$2\alpha = 0.006m^{-1}$

$\overline{\alpha} = \frac{S_1\alpha_1 + S_2\alpha_2}{S}$，　其中 $S = 214m^2$，$S_1 = 210m^2$，$S_2 = 4m^2$

当 $f = 250Hz$ 时，$\overline{\alpha}_1 = \frac{210 \times 0.01 + 4 \times 0.05}{214} = 0.0107$

当 $f = 4000Hz$ 时，$\overline{\alpha}_2 = \frac{210 \times 0.02 + 4 \times 0.1}{214} = 0.0215$

$\overline{\alpha}_1 < 0$.∵，$\overline{\alpha}_2 < 0.2$

故 $T_{60} = 0.161 \frac{V}{S\overline{\alpha} + 8\alpha V}$，又$V = 210m^3$

当 $f = 250Hz$ 时，2α 可忽略，则$T_{60} = 0.161 \frac{210}{214 \times 0.0107} = 14.77s$

当 $f = 4000Hz$ 时，$2\alpha = 0.006m^{-1}$

则 $T_{60} = 0.161 \frac{210}{214 \times 0.0215 + 4 \times 0.006 \times 210} = 3.507s$

8-3 有一混响室已知空室时的混响时间为T_{60}，现在在某一壁面上铺上一层面积为S'，平均吸声系数为a_{i}'的吸声材料，并测得该时室内的混响时间为T_{60}'，试证明这层吸声材料的平均吸声系数可用下式求得

$$\mathrm{a}_{\mathrm{i}}' = \frac{0.161\mathrm{V}}{\mathrm{S}_{\mathrm{i}}'}\left(\frac{1}{\mathrm{T}_{60}'} - \frac{1}{\mathrm{T}_{60}}\right) + \mathrm{a}_{\mathrm{i}}$$

证明：吸声材料覆盖前$T_{60} = \dfrac{0.161V}{S\alpha_i}$，吸声材料覆盖后$T_{60}{}' = \dfrac{0.161V}{S\overline{\alpha_i}}$

其中$\overline{\alpha_i} = \dfrac{\alpha_i(S - S') + \alpha_i{}' S'}{S}$

可得$S\alpha_i = \dfrac{0.161V}{T_{60}}$，$\alpha_i(S - S') + \alpha_i{}' S' = \dfrac{0.161V}{T_{60}{}'}$

两式相减，得 $S'(\alpha_i{}' - \alpha_i) = 0.161V(\dfrac{1}{T_{60}{}'} - \dfrac{1}{T_{60}})$

即得 $\alpha_i{}' = \dfrac{0.161V}{S_i{}'}(\dfrac{1}{T_{60}{}'} - \dfrac{1}{T_{60}}) + \alpha_i$

8-4 有一体积为$40m^3$的小型混响室，已知其平均吸声系数为$\overline{\alpha} = 0.02$，现要把它当作高噪声室用，希望在室内产生$140dB$的稳态混响声压级，试问要求声压辐射多少平均声功率？

解：忽略空气吸收，$S = 2(l_x l_y + l_y l_z + l_x l_z) \geq 6\sqrt[3]{l_x^2 l_y^2 l_z^2} = 6\sqrt[3]{V^2} = 70.176(m^2)$，

房间常数$R = \dfrac{S\overline{\alpha}}{1-\overline{\alpha}} \geq \dfrac{70.176\times 0.02}{1-0.02} = 1.432(m^2)$，

由$SPL = 10\lg\overline{W} + 10\lg\rho_0 c_0 + 94 + 10\lg\dfrac{4}{R}$

此SPL为稳态混响声压级，

$-10\lg\overline{W} = 10\lg\rho_0 c_0 + 94 + 10\lg\dfrac{4}{R} - SPL$

取$\rho_0 c_0 = 415\,N\cdot s/m^3$

$$\begin{aligned}10\lg\overline{W} &= SPL - 10\lg\rho_0 c_0 - 94 - 10\lg\frac{4}{R}\\ &\geq 140 - 10\lg 45 - 94 - 10\lg\frac{4}{1.432}\\ &= 15.358(dB)\end{aligned}$$

故$\overline{W} \geq 10^{\frac{15.358}{10}} = 34.343(W)$，即要求声源辐射的平均声功率为$34.343W$。

8-5 将一产生噪声的机器放在体积为 V 的混响室中，测得室内的混响时间为T_{60}以及在离机器的较远处的混响声压有效值为 p_e，试证明该机器的平均辐射功率可由下式算出

$$\overline{W}=10^{-4}p_e^2\frac{V}{T_{60}}W \text{。}$$

解：由$\overline{\varepsilon_R}=\dfrac{4\overline{W}}{Rc_0}$ ， $\overline{\varepsilon}=\dfrac{p_e^2}{\rho_0 c_0^2}$.得 $p_e^2=\dfrac{4}{R}\overline{W}\rho_0 c_0$

又 $\dfrac{4}{R}\approx\dfrac{4T_{60}}{0.161V}$. 则 $p_e^2=\dfrac{4T_{60}}{0.161V}\overline{W}\rho_0 c_0=\dfrac{4\times 415}{0.161V}\overline{W}T_{60}=10^4\dfrac{\overline{W}T_{60}}{V}$

则 $\overline{W}=10^{-4}\dfrac{p_e^2 V}{T_{60}}$

8-6 有一体积为 $l_x\times l_y\times l_z$＝30m×15m×7m 的厅堂，要求它在空场时的混响时间为 2s.

(1) 试求室内的平均吸声系数.

(2) 如果希望在该厅堂达到 80dB 的稳态混响声压级，试问要求声源辐射多少平均声功率(假设声源为无指向性的)？

(3) 假设厅堂中坐满 400 个观众，已知每个听众的吸声单位为 $S\alpha_j$＝0.5m^2，问该时室内的混响时间变为多少？

(4) 如果声源的平均辐射功率维持不变，那么该时室内稳态混响声压级变为多少？

解： V=$l_x\times l_y\times l_z$＝30×15×7=3150m^3

S=2($l_x\times l_y+l_x\times l_z+l_y\times l_z$)=1530m^2

(1) 由(8-1-10)得$T_{60}\approx 0.161\dfrac{V}{S\overline{\alpha}}$， 则$\overline{\alpha}=0.161\dfrac{V}{ST_{60}}=0.166$.

(2) 由(8-1-23)得 $R=\dfrac{S\overline{\alpha}}{1-\overline{\alpha}}=303.873\,\mathrm{m}^2$，

由(8-1-27)得 $\mathrm{SWL}=\mathrm{SPL}-10\log_{10}\left(\dfrac{4}{R}\right)=98.8\,\mathrm{dB}$.

(3) $\overline{\alpha'}=\dfrac{S\overline{\alpha}+400\cdot S\alpha_j}{S}=\overline{\alpha}+\dfrac{400\times 0.5}{1530}=0.296$

由(8-1-9)得 $T_{60}=0.161\dfrac{V}{-S\ln(1-\overline{\alpha'})}=0.943\,\mathrm{dB}$.

(4) $R=\dfrac{S\overline{\alpha'}}{1-\overline{\alpha'}}=644.531\,\mathrm{m}^2$

$$\mathrm{SPL}=\mathrm{SWL}+10\log_{10}\left(\frac{4}{R}\right)=76.7\ \mathrm{dB}.$$

(5) $$\mathrm{SPL}=\mathrm{SWL}+10\log_{10}\left(\frac{1}{4\pi r^2}+\frac{4}{R}\right)$$

r=3m 时，SPL=80.6dB；

r=10m 时，SPL=77.3dB.

8-7 有一噪声很高的车间测得室内混响时间为T_{60}，后来经过声学处理在墙壁上铺上吸声材料，室内的混响时间就降为T''_{60}。试证明，此车间内在声学处理前后的稳态混响时间声压级差为

$$\Delta L_p=10\log_{10}(\frac{T''_{60}}{T_{60}})。$$

证明： 由 $\frac{4}{R}\approx\frac{4T_{60}}{0.161V}$，

处理前车间的稳态混响声压级可表示为

$$SPL=10\lg\overline{W}+10\lg\rho_0c_0+94+10\lg\frac{4T_{60}}{0.161V},$$

式中$\overline{W}$为声源平均辐射声功率。

声学处理后，同一噪声源辐射的稳态混响声压级为

$$SPL'=10\lg\overline{W}+10\lg\rho_0c_0+94+10\lg\frac{4T_{60}'}{0.161V}。$$

此车间在声学处理前后的稳态混响时间声压级差为

$$\Delta L_p=SPL'-SPL=10\lg\frac{4T_{60}'}{0.161W}-10\lg\frac{T_{60}}{0.161W}=10\lg\frac{T_{60}'}{T_{60}}$$

8-8 测量各类机器的噪声可在混响室内进行，因此常需已知混响室的房间常数 R。设有一无指向性的标准声源（即可已知其在自由声场中的输出声功率）置于混响室的中央位置并在离其 r 距离处，用测试传声器测得其声压级为 L，而在同样距离 r 处其产生的自由声场声压级已知为L_0，试证明该混响室的房间常数 R 可用如下公式计算

$$R=\frac{16\pi r^2}{\log_{10}^{-1}(\frac{L-L_0}{10})-1}$$

解：室内声场，直达声为 $p_e^2=\dfrac{\overline{W}\rho_0 c_0}{4\pi r^2}$

混响声为 $p_e^2=\overline{W}\rho_0 c_0\left(\dfrac{1}{4\pi r^2}+\dfrac{4}{R}\right)$

$$L_0=10\lg\frac{P_e^2}{p_{ref}^2}=10\lg\frac{\overline{W}\rho_0 c_0/(4\pi r^2)}{p_{ref}^2}$$

$$L=10\lg\frac{P_e^2}{p_{ref}^2}=10\lg\frac{\overline{W}\rho_0 c_0(\frac{1}{4\pi r^2}+\frac{4}{R})}{p_{ref}^2}$$

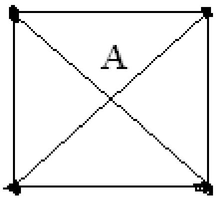
则 $L-L_0=10\lg(1+\dfrac{16\pi r^2}{R})$

$$\frac{L-L_0}{10}=\lg(1+\frac{16\pi r^2}{R})$$

$$\lg^{-1}(\frac{L-L_0}{10})=1+\frac{16\pi r^2}{R}$$

$$R=\frac{16\pi r^2}{\lg^{-1}(\frac{L-L_0}{10})-1}$$

8-11 在一房间常数为 20 ㎡的大房间中央处有四个点声源成正方排列，如图所示，假定每一声源发出了$5\times10^{-2}W$ 功率的无规噪声，试问在它们中心位置 A 点的声压级有多少？



解：设每一声源在 A 点的平均声能密度为

$$\overline{\varepsilon_i}=\overline{\varepsilon}_D+\overline{\varepsilon_R}=\frac{\overline{W}}{4\pi r^2 c_0}+\frac{4\overline{W}}{Rc_0}$$

又每个声源发出无规噪声，故在 A 点叠加后，A 点的平均声能密

度为 $\overline{\varepsilon}=4\overline{\varepsilon_i}=\dfrac{\overline{W}}{\pi r^2 c_0}+\dfrac{16\overline{W}}{Rc_0}$

又 $\bar{\varepsilon}=\dfrac{p_e^2}{\rho_0 c_0^2}$.

则 $p_e^2=\rho_0 c_0^2(\dfrac{\overline{W}}{\pi r^2 c_0}+\dfrac{16\overline{W}}{Rc_0})=\overline{W}\rho_0 c_0(\dfrac{1}{\pi r^2}+\dfrac{16}{R})$

$$=5\times10^{-2}\times400\times(\frac{1}{\pi\times(\sqrt{2})^2}+\frac{16}{20})=19.18$$

$$\mathrm{SPL}=10\log_{10}\frac{p_e^2}{p_{ref}^2}=10\log_{10}\frac{19.18}{(2\times10^{-5})^2}=1$$

8-12 有一 $l_x\times l_y\times l_z$＝6m×5m×4m 混响室六面都是刚性的. 假设在室内分别发出中心频率为 50Hz，100Hz，1000Hz，4000Hz，带宽为 10Hz 的声波，试问它们分别能在室内激起多少个简正振动方式？

解： V=$l_x\times l_y\times l_z$＝6×5×4=120m^3

S=2($l_x\times l_y+l_x\times l_z+l_y\times l_z$)=148m^2

L=4($l_x+l_y+l_z$)＝4(6+5+4)=60m^3

由(8-2-6)得在频率 f 附近的 df 频带内的简正频率数

$$\mathrm{d}N=\left(\frac{4\pi f^2V}{3c_0^3}+\frac{\pi fS}{4c_0^2}+\frac{L}{8c_0}\right)\mathrm{d}f$$

(1) f=50Hz，dN=1；

(2) f=100Hz，dN=2；

(3) f=1000Hz，dN=133；

（4） f=4000Hz，dN=2000.

8-13 试问在上题的房间中，在 $95Hz$～$105Hz$ 频带内将包含哪几个驻波方式？

解： $V=120m^3$， $S=148m^2$， $L=60m$， $df=10Hz$

$$\mathrm{d}N=\left(\frac{4\pi f^2V}{c_0^3}+\frac{\pi fS}{2c_0^2}+\frac{L}{8c_0}\right)\mathrm{d}f=\left(\frac{4\pi\times100^2\times120}{344^2}+\frac{\pi\times100\times148}{2\times344^2}+\frac{60}{8\times344}\right)\times10$$

$$=5$$

$$f_{n_x n_y n_z}=\frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2+\left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2+\left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2}$$

(1, 1,时 $|f_n|=97.0Hz$

(2, 0,时 $|f_n|=103.4Hz$

(2, 2,时 $|f_n|=99.4Hz$

(3 , 0 ,时 $\left|f_n\right| = 96.2Hz$

(3 , 1 ,时 $\left|f_n\right| = 102.1Hz$

8-17 在一矩形房间的一个顶角上装上强度为 Q_0 的点声源，试证明对整个房间的位置取有效声压平方的平均为

$$\overline{p_e^{\,2}} = \left(\frac{\rho_0 c_0^{\,2} Q_0 \omega}{V}\right)^2 \sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z} D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z} \frac{1}{2(\omega^2 - \omega^2_{n_x n_y n_z})}.$$

解： 由(8-2-50)得 $p = -\rho_0 c_0^{\,2}\dfrac{\omega Q_0}{V}\mathrm{j}\sum_{n_x=0}\sum_{n_y=0}\sum_{n_z=0} D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z} \dfrac{\Psi_{n_x n_y n_z}}{(\omega^2 - \omega^2_{n_x n_y n_z})} e^{\mathrm{j}wt}$.

由题意知： $\overline{p_e^{\,2}} = \dfrac{\int p_e^{\,2}(x,y,z)\mathrm{d}V}{\mathrm{V}} = \dfrac{1}{2}\left(\rho_0 c_0^{\,2}\dfrac{\omega Q_0}{V}\right)^2 \dfrac{\int\left(\sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z} D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z}\dfrac{\Psi_{n_x n_y n_z}}{(\omega^2 - \omega^2_{n_x n_y n_z})}\right)^2 dV}{V}$ (1)

其中 $\Psi_{n_x n_y n_z} = \cos\dfrac{n_x \pi}{l_x}x \cdot \cos\dfrac{n_y \pi}{l_y}y \cdot \cos\dfrac{n_z \pi}{l_z}z$. 由三角函数的正交性知，当 $n_x n_y n_z$ 和 $n_x' n_y' n_z'$ 不同时 $\int \Psi_{n_x n_y n_z}\Psi_{n_x' n_y' n_z'}\mathrm{d}V = 0$. 则

$$\int\left(\sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z} D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z}\frac{\Psi_{n_x n_y n_z}}{(\omega^2 - \omega^2_{n_x n_y n_z})}\right)^2 dV$$

$$= \int\sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z}(D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z})^2 \frac{\Psi^2_{n_x n_y n_z}}{(\omega^2 - \omega^2_{n_x n_y n_z})^2} dV$$

$$= \sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z}\left(\frac{D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z}}{\omega^2 - \omega^2_{n_x n_y n_z}}\right)^2 \int \Psi^2_{n_x n_y n_z} dV$$

$$= \sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z}\left(\frac{D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z}}{\omega^2 - \omega^2_{n_x n_y n_z}}\right)^2 \cdot \frac{V}{D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z}}$$

$$= V\sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z} D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z}\frac{1}{(\omega^2 - \omega^2_{n_x n_y n_z})^2}$$

将上式代入(1)式，可得 $\overline{p_e^{\,2}} = \left(\dfrac{\rho_0 c_0^{\,2} Q_0 \omega}{V}\right)^2 \sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z} D_{n_x} D_{n_y} D_{n_z}\dfrac{1}{2(\omega^2 - \omega^2_{n_x n_y n_z})^2}$.