

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

习题一

$$1. (1) \quad (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (2) \quad (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$2. (1) \quad x^2 - 2xy + y^2, \quad (2) \quad x^2 - y^2 + z^2 + 2xz.$$

3. 写出二次型 $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ 对应的矩阵。

解：
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4. 写出二次型 $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ 对应的二次型的矩阵表示，其中

$$a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

解：
$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = x^T \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} x, \quad \text{其中 } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

习题二

1. (1) 解：二次型对应的对称矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

计算 $|\lambda I - A| = 0$, 求得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ 。

对于 $\lambda_1 = 2$, 求 $(\lambda I - A)x = 0$, 得 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 单位化为 $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

对于 $\lambda_2 = 4$, 求 $(\lambda I - A)x = 0$, 得 $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 单位化为 $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$,

故

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad f = 2x'^2 + 4y'^2,$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad f = 2x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2.$$

2 解: (1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{3}{4}x_2^2$
 $= (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 = y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2.$

满秩变换 $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = y_1, x_2 = y_2.$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad f = x'^2 - y'^2 + 8z'^2.$$

3. (1) 将 $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 4yz = 5$ 配方, $(z-2y)^2 - 2y^2 - 4xy + 3x^2 = 5,$

作变换 $z_1 = z - 2y, y_1 = y, x_1 = x$ 得到 $(z_1)^2 - 2y_1^2 - 4x_1y_1 + 3x_1^2 = 5,$

再次配方 $(z_1)^2 - 2(y_1 - x_1)^2 + 5x_1^2 = 5,$ 作变换 $z_2 = z_1, y_2 = y_1 - x_1, x_2 = x_1$

得到 $(z_2)^2 - 2(y_2)^2 + 5x_2^2 = 5,$ 可见曲面为单叶双曲面。

(2) 作变换 $z = z_1, x = x_1 - y_1, y = x_1 + y_1.$ 可知曲面为马鞍面。

习题三

1. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ 正定

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{不定}$$

$$2. \quad (1) \quad \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = A \quad A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -5t^2 - 4t, \quad |A| = 1 - t^2$$

$$A \text{ 正定} \Rightarrow -\frac{4}{5} < t < 0$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & t \end{pmatrix} = A, \quad A = 2$$

$$|A| = 2t - 1$$

$$A \text{ 正定} \Rightarrow t > \frac{1}{2}$$

$$3. \quad \text{证明: 对于任意的 } n \text{ 维列非零向量 } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ 由于 } A, B \text{ 正定, 于是有}$$

$$x^T A x > 0, \quad x^T B x > 0$$

从而 $x^T (A + B)x > 0$, 这表明 $A + B$ 是正定阵。

习题一

1. 解下列非齐次线性方程组:

$$\text{解: (1) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{故原方程组的解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t_2 - \frac{1}{3} \\ t_1 - \frac{2}{3}t_2 + \frac{11}{3} \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } t_1, t_2 \in R.$$

$$(2) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{所以原方程组的解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t - \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3}t + \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3}t + \frac{2}{3} \\ t \end{pmatrix}, \text{ 其中 } t \in R.$$

$$(3) B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

故原方程组无解。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

故原方程组有唯一解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 。

2. 下列齐次线性方程组

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解: $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$, 其中 $t \in \mathbb{R}$ 。

$$(2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

解: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

故原方程组只有零解。

3. 用矩阵初等变换确定 λ 取何值时, 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多个解?

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - \lambda r_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & -\lambda^2 + 1 & -\lambda^3 + 1 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 & \lambda^2 - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & -\lambda^2 + 1 & -\lambda^3 + 1 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2)(\lambda - 1) & (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1) \end{pmatrix}$$

当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, 有唯一解;

当 $\lambda = -2$ 时, 无解;

当 $\lambda = 1$ 时, 有无穷解.

解二: 系数行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$

当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, 有唯一解;

当 $\lambda = -2$ 时, $\text{rank}(A) = 2$, $\text{rank}(A|b) = 3$, 无解;

当 $\lambda = 1$ 时, $\text{rank}(A) = 1$, $\text{rank}(A|b) = 1$, 有无穷解.

4. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. 解: x_1, x_2, x_3 满足的线性方程组为

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 500 \\ x_1 + x_2 = 300 \\ -x_1 + x_3 = 200 \end{cases}$$

其解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 + t \\ 500 - t \\ t \end{pmatrix}$, $200 \leq t \leq 500$; x_3 的取值范围为 $200 \leq x_3 \leq 500$.

6. 求满足等式 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

解: 设 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

即 $\begin{cases} 2a + c = 2a + 3b \\ 2b + d = a + 2b \\ 3a + 2c = 2c + 3d \\ 3b + 2d = c + 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3b \\ a = d \end{cases}$

故 $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$

7. 求 λ , 使得方程 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$ 有解

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 5$, 方程有解

习题二

$$1. (1) (A|I) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(2) (A|I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{故有 } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

课后答案网: www.hackshp.cn
若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{故有 } X = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 存在, 于是 $X = (XA)A^{-1} = BA^{-1}$

$$\left(\frac{A}{B}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \frac{4}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

故有 $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

4. 解: (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

于是, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

习 题 一

1. (1) 解: 矩阵 A 的特征多项式为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即 } (\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 2$$

$$\text{把 } \lambda_1 = 3 \text{ 代入齐次方程组: } \begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + (\lambda - 4)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{得到: } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

它的一个基础解系为: $\xi = (1, -2)^T$

因此对应于 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量为 $\xi = (1, -2)^T$, 其全部特征向量为 $k_1 \xi$, k_1 是不为 0 的任意常数.

$$\text{又把 } \lambda_2 = 2 \text{ 代入齐次方程组: } \begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + (\lambda - 4)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{得到: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

它的一个基础解系为: $\xi = (1, -1)^T$

因此对应于 $\lambda_2 = 2$ 的特征向量为 $\xi = (1, -1)^T$, 其全部特征向量为 $k_2 \xi$, k_2 是不为 0 的任意常数.

(2) 解: 矩阵 A 的特征多项式为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

把 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 代入齐次方程组:
$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + (\lambda - 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

得:
$$\begin{cases} -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

可得它的一个基础解系为: $\xi_1 = (1, 0, 1)^T, \xi_2 = (0, 1, 2)^T$

于是得到 A 的全部特征向量为 $k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$, 其中 k_1, k_2 为不同时为 0 的常数.

(3) 解: 矩阵 A 的特征多项式为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -3 & 0 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

即: $(\lambda - 3)(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

把 $\lambda_1 = 3$ 代入齐次方程组:
$$\begin{cases} (\lambda + 2)x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + (\lambda - 4)x_2 = 0 \\ -2x_1 + (\lambda - 3)x_3 = 0 \end{cases}$$

得:
$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 = 0 \end{cases}$$

可得它的一个基础解系为: $\xi = (0, 0, 1)^T$

于是得到对应于特征值 $\lambda_1 = 3$ 的 A 的全部特征向量为 $k_1 \xi$, k_1 是不为 0 的任意常数.

又把 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 代入齐次方程组:
$$\begin{cases} (\lambda + 2)x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + (\lambda - 4)x_2 = 0 \\ -2x_1 + (\lambda - 3)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ -2x_1 = 0 \end{cases}$$

数.

课后答案网: www.hackshp.cn

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

1. 证明: 设矩阵 A 的特征值为 λ , 则特征多项式为: $|\lambda E - A| = 0$.

$$\because \lambda E = (\lambda E)^T$$

$$\therefore |\lambda E - A^T| = |(\lambda E)^T - A^T|$$

$$= |(\lambda E - A)^T|$$

$$= |\lambda E - A|$$

$$\text{又} \because |\lambda E - A| = 0$$

$$\therefore |\lambda E - A^T| = 0$$

即 A^T 的特征值为 λ .

3. 证法一 $\because A^2 = 2A$

$$\therefore A^2 - 2A = 0$$

$$\text{即 } A^2 - 2EA = 0$$

$$\therefore A(A - 2E) = 0$$

又 $\because A$ 为 n 阶方阵

$$\therefore |A(A - 2E)| = 0$$

$$\text{即 } |A| = 0 \text{ 或 } |A - 2E| = 0$$

$\therefore A$ 的特征值为 0 或 2.

证法二 设 $Ax = \lambda x, x \neq 0$ 是对应于特征值 λ 的特征向量. 则 $2\lambda x = 2Ax = A^2x = \lambda^2 x$, 从而有 $(\lambda^2 - 2\lambda)x = 0$, 但 $x \neq 0$, 于是 $(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$, 故 $\lambda = 2$ 或 $\lambda = 0$.

4. 解: 若 x 是 A^{-1} 的特征向量, 则它也是 A 的特征向量.

可求得 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$.

由 $Ax = x$ 解得 $k = -2$, 而由 $Ax = 4x$ 解得 $k = 1$, 故 $k = -2$ 或 $k = 1$.

5. 证明: 用反证法. 设 $ax_1 + bx_2$ 是 A 的特征向量, 则有 $A(ax_1 + bx_2) = \lambda(ax_1 + bx_2)$, 于是

$$aAx_1 + bAx_2 = \lambda(ax_1 + bx_2), \text{即 } a\lambda_1 x_1 + b\lambda_2 x_2 = a\lambda x_1 + b\lambda x_2, \text{经整理得}$$

$$a(\lambda_1 - \lambda)x_1 + b(\lambda_2 - \lambda)x_2 = 0. \text{因为 } x_1, x_2 \text{ 线性无关, 所以有 } a(\lambda_1 - \lambda) = b(\lambda_2 - \lambda) = 0, \text{从而}$$

由 $a \neq 0, b \neq 0$ 得 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, 此与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾. 故 ax_1, bx_2 不是 A 的特征向量.

6. 解: 可求得 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. 因不同特征值

对应的特征向量线性无关, 所以若有 3 个线性无关的特征向量, 则对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 应有

两个线性无关的特征向量, 或 $A-E$ 的秩应为 1. 由

$$A-E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知, 当 $a+b=0$ 时, $R(A-E)=1$, 此时 A 有 3 个线性无关的特征向量.

习 题 二

1. (1) 解: 矩阵 A 的特征多项式为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -5 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即 } (\lambda - 3)(\lambda - 2) - 20 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$$

$$\lambda_1 = 7 \quad \lambda_2 = -2$$

因矩阵 A 有两个不同的特征值, 因此矩阵 A 可对角化.

$\lambda_1 = 7$ 和 $\lambda_2 = -2$ 对应的特征向量分别为: $\xi_1 = (1, 1)^T$, $\xi_2 = (4, -5)^T$

由此可见, A 在基 ξ_1, ξ_2 下的矩阵为对角矩阵. 所得相似对角矩阵为 $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

相似变换阵为 $X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, 使得 $B = X^{-1}AX$.

(2) 解: 矩阵 A 的特征多项式为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即 } \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 4$$

因矩阵 A 有三个不同的特征值, 因此矩阵 A 可对角化.

其 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$ 对应的特征向量分别为: $\xi_1 = (3, -2, 1)^T$, $\xi_2 = (0, 1, 0)^T$,

$\xi_3 = (-1, \frac{2}{3}, 1)^T$. 因此 A 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的矩阵为对角矩阵. 所得相似对角矩阵为

若侵犯了您的版权利益，敬请来信告知！

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{相似变换阵为 } X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{使得 } B = X^{-1}AX.$$

(3) 解: 矩阵 A 的特征多项式为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即 } (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2$$

其 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量为: $\xi_1 = (1, 2, -1)^T$

其 $\lambda_3 = 2$ 对应的特征向量为: $\xi_2 = (0, 0, 1)^T$

由于三个特征值所对应的相互独立的特征向量只有两个, 因此矩阵 A 不可以对角化.

2. 解: 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 则 A 的特征多项式为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即 } (\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0$$

所以特征值为 -1(二重)或 5

属于 -1 的两个线性无关的特征向量为: $\xi_1 = (1, 0, -1)^T$, $\xi_2 = (0, 1, -1)^T$

属于 5 的一个线性无关的特征向量为: $\xi_3 = (1, 1, 1)^T$

由此可见, A 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的矩阵为对角矩阵 $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, 相似变换阵为

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{使得 } B = X^{-1}AX.$$

于是可得: $A = XB X^{-1}$

因此, $A^{10} = (XB X^{-1})(XB X^{-1})(XB X^{-1}) \cdots (XB X^{-1})$

$$= (XB X^{-1})(XB X^{-1})(XB X^{-1}) \cdots (XB X^{-1})$$

$$= XB^{10}X^{-1}$$

$$\text{因而可解得: } A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2-5^{10} & 5^{10}-1 & 5^{10}-1 \\ -1-5^{10} & 5^{10}+2 & 5^{10}-1 \\ -1-5^{10} & 5^{10}-1 & 5^{10}+2 \end{bmatrix}$$

3. 解: 因为 $A \approx \Lambda$ 所以 A 的特征值为: $\lambda_1=5, \lambda_2=y, \lambda_3=-4$

$$\text{又 } A \text{ 的特征多项式为: } |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-x & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{即: } (\lambda-x)(\lambda+3)(\lambda-5)-8(\lambda-1)+32=0$$

将 $\lambda_3=-4$ 代入上式中可解得 $x=4$

又将 $x=4$ 带回原特征多项式中可得:

$$(\lambda-5)^2(\lambda+4)=0$$

于是可得: $y=5$.

其中特征值 5 所对应的两个线性无关的特征向量为: $\xi_1=(1,-2,0)^T, \xi_2=(0,-2,1)^T$

特征值 -4 所对应的一个线性无关的特征向量为: $\xi_3=(1,2,1)^T$

由此可得 A 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的矩阵为对角矩阵 $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, 相似变换阵为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{使得 } A = C^{-1}AC.$$

4. 解: 先求 A 的特征值, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ k & \lambda+1 & -k \\ -4 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0, \text{经整理得}$$

$$(\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & -k \\ \lambda-1 & -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 (\lambda-1) = 0$$

得的全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$. A 只有一个重特征值, 故由方阵可对角化的充要条件知, A 可对角化 $\Leftrightarrow$ A 的对应于 2 重特征值 -1 的线性无关特征向量正好有两个 $\Leftrightarrow$ 方程组 $(-E - A)x = 0$ 的基础解系含两个解向量 $\Leftrightarrow 3 - \text{秩}(-E - A) = 2 \Leftrightarrow \text{秩}(-E - A) = 1$. 显然, 矩阵

$$-E - A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ k & 0 & -k \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{的秩为 1, 故当且仅当 } k=0 \text{ 时 A 可对角化. 当 } k=0 \text{ 时, 矩阵}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ 计算可得 A 对应于特征值 } \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \text{ 的线性无关特征向量可取为}$$

$$\xi_1 = (1, -2, 0)^T, \xi_2 = (1, 0, 2)^T$$

对应于特征值 $\lambda_3 = 1$ 的特征向量可取为

$$\xi_3 = (1, 0, 1)^T$$

故所求的可逆矩阵 P 可取为

$$P = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{它使得 } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

3. 解: 由题设条件知 3 阶方阵 A 有特征值 1, 0, -1, 对应的特征向量分别为 ξ_1, ξ_2, ξ_3 . 显然

ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关, 故 A 相似于对角阵. 令矩阵

$$P = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

则有 $P^{-1}AP=D$, 故

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^5 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) \\ &= PD^5P^{-1} \\ &= PDP^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$

4. 解: (1) 由题设条件有 $A\xi = \lambda\xi$, 即

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{cases} 2-1+2 = \lambda \\ 5+a-3 = \lambda \\ -1+b-2 = -\lambda \end{cases}$$

解之即得 $\lambda = -1, a = -3, b = 0$, 故矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(2) 由 A 的特征方程

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3$$

得 A 的全部特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, 但矩阵

$$|E - A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

的秩为 2, 故 A 的对应于 3 重特征值 -1 的线性无关特征向量只有 1 个, 所以 A 不能相似于对角矩阵。

第七章

习题一

1. 解: 取 $a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 采用施密特正交化过程将其正交化

为

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{取 } \beta_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} \\ -\frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}, \quad \beta_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ -2 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

$$\beta_4' = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

2. 解: 采用施密特正交化过程将其正交化为: $\beta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ \frac{3}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}$,

$$\beta_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. **解：**将 A 分块： $A = (a_1, a_2, a_3)$ 则 a_1, a_2, a_3 为标准正交向量组，满足：

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \text{ 代入数字求得 } a=b=-6, c=-3, d=-6.$$

4. **证明：** $(A+2I)^2 = I, (A+2I) = (A+2I)^T$

从而 $(A+2I)(A+2I)^T = I$, 于是 $A+2I$ 是正交阵。

5. 求 a, b , 使得 $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b \end{pmatrix}$ 为正交阵

解：由 $(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ 得 $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

6. 设 $A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为正交阵，求 a, b 。

解：由 $(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ 得 $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

习题二

1. (1) **解：**特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$,

当 $\lambda = 0$ 代入 $(\lambda I - A)x = 0$ 求得 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 单位化: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

当 $\lambda = 1$ 代入 $(\lambda I - A)x = 0$ 求得 $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 单位化: $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

当 $\lambda = 3$ 代入 $(\lambda I - A)x = 0$ 求得 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 单位化: $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

令 $P = (e_1, e_2, e_3)$ 原式 $P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P^T P = I$.

(2). **解:** 特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 10)$.

当 $\lambda = 1$ 代入 $(\lambda I - A)x = 0$ 求得 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化: $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

单位化: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

当 $\lambda = 10$ 代入 $(\lambda I - A)x = 0$ 求得 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ 单位化: $e_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

令 $P = (e_1, e_2, e_3)$ 原式 $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $P^T P = I$.

(3). **解:** 特征多项式为 $f(\lambda) = (\lambda - 3)\lambda^2$.

当 $\lambda = 0$ 代入 $(\lambda I - A)x = 0$ 求得 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 正交化:

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{单位化:} \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda = 3$ 代入 $(\lambda I - A)x = 0$ 求得 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 单位化: $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{令 } P = (e_1, e_2, e_3) \quad \text{原式 } P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^T P = I,$$

2. 解: $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 容易求得 $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ 由 $P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{故 } A = P \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3. 设 A 为实对应的特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, 对应于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

求 A .

解: 设属于 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 则由正交性, 有 $(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ 得一个基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 求得 $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 故

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 已知:三阶实对称阵 A 的三个特征值分别为 $-1, 2, 5$, 且属于 $-1, 2$ 的特征向量分别为 $(2, 2, 1)^T, (2, -1, -2)$, 求属于 5 的特征向量。

解: 设属于 $\lambda_2=5$ 的特征向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 则由正交性, 有 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$ 得一

个基础解系 $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ k 为非零实数

www.hackshp.cn

1. 计算行列式

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 8 + 0 \cdot (-1) \cdot (-1) - (-1) \cdot (-4) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 8 - 0 \cdot 1 \cdot 3$$

$$= -4$$

$$2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - c^3 - a^3 - b^3$$

$$= 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

2. 求逆序，并决定奇偶性

$$1) \tau(4132) = 2 + 1 + 1 + 0 = 4$$

$$2) \tau(3421) = 3 + 2 + 0 + 0 = 5$$

$$3) \tau[13 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2) \cdots 2] = 0 + 2 + 4 + \cdots + 2n-1$$

$$= 2(1 + 2 + \cdots + n-1) = n(n-1)$$

$\therefore$ 不论 n 为奇数，偶数， $n(n-1)$ 为偶数。 $\therefore$ 该排列为偶排列

$$4) \tau[13 \cdots (2n-1)24 \cdots (2n)] = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$$

，当 $n = 4k+1$ 或 $n = 4k+4$ 时为偶排列，当 $n = 4k+2$ 或 $n = 4k+3$ 时为奇排列，其中 k 为非负整数

3. 写出四阶行列式中含 $a_{11}a_{22}$ 的项

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

4. 用行列式展开计算行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \times 34 + 44 + 10 \times (-18) = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$= a(bcd + b + d) + (cd + 1) = abcd + ab + ad + cd + 1$$

5. 用定义计算行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix} \quad (a_i, b_i, c_i, d_i \neq 0, i=1,2)$$

解: 设 $D_4 = |a_{ij}|_{4 \times 4}$, 则 D_4 中第 1 行的非 0 元为 $a_{11} = a_1, a_{13} = b_1$, 故 $j_1 = 1, 3$

同法可求: $j_2 = 2, 4; j_3 = 1, 3; j_4 = 2, 4$

$\therefore j_1, j_2, j_3, j_4$ 可组成四个 4 元排列 $1234, 1432, 3214, 3412$,

故 D_4 中相应的非 0 项有 4 项, 分别为 $a_1 c_1 b_2 d_2, -a_1 d_1 b_2 c_2, -b_1 c_1 a_2 d_2, b_1 d_1 a_2 c_2$

其代数数和即为 D_4 的值, 整理后得 $D_4 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_1 d_2 - c_2 d_1)$

习题二

1. 计算行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 5 & 2 & -6 & -3 \\ -4 & 7 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & -8 & -10 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_3 - 4c_2 \\ r_2 + 4r_1 \\ r_3 + 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 & -3 \\ 4 & -5 & -18 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 10 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 \\ 4 & -5 & -18 \\ -3 & 7 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 + 4r_1 \\ r_3 - 3r_1}} \begin{vmatrix} -1 & 11 & 6 \\ 0 & 39 & 6 \\ 0 & -26 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 39 & 6 \\ -26 & -8 \end{vmatrix} = -156$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ - & - & - & - \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ - & - & - & - \end{vmatrix} \quad |5 \quad 6 \quad 2|$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2 + ab^2 + ca^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$$

$$= c^2(b-a) + b^2(a-c) + a^2(c-b) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

法 2:

$$\text{原式} \xrightarrow[r_3 - a^2 r_1]{r_2 - ar_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 - (b+a)r_1} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ 0 & (c-a)(c-b) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

(4)

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{r_1 + r_2} \begin{vmatrix} 2x+2y & 2x+2y & 2x+2y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 - y r_1]{r_2 - x r_1} 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y-x & y & 0 \\ x & x-y & 0 \end{vmatrix} = 2(x+y)(xy - y^2 - x^2) = -2(x^3 + y^3)$$

2. 证明

$$(1) \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2 \beta & \sin^2 \beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2 \gamma & \sin^2 \gamma \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{证明: 左} = \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \beta - \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \sin^2 \beta \\ \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \sin^2 \gamma \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_3} \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha \\ \cos^2 \beta & \cos^2 \beta & \sin^2 \beta \\ \cos^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \sin^2 \gamma \end{vmatrix}$$

$$= 0 = \text{右}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$\begin{vmatrix} a^2 - ab & ab - b^2 & b^2 \\ a(a-b) & b(a-b) & b^2 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

$$(3) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1+x \end{vmatrix} = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

证明: 按最后一行展开, 得

$$\begin{aligned} \text{左} &= a_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} + a_{n-1}(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} \\ &+ a_{n-2}(-1)^{n+3} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} + \cdots + a_2(-1)^{2n+1} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &+ (x+a_1)(-1)^{2n} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= a_n(-1)^{2n} + a_{n-1}x(-1)^{2n} + a_{n-2}x^2(-1)^{2n} + \cdots + a_2x^{n-2}(-1)^{2n} + (x+a_1)x^{n-1}(-1)^{2n} \\ &= a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_2x^{n-2} + a_1x^{n-1} + x^n = \text{右} \end{aligned}$$

3. 计算下列行列式

$$\begin{aligned} (1) \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} &= (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+(n-1)a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\ &= (x-a)^{n-1} [x+(n-1)a] \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{0 \leq i < j \leq n} [(a-j)(b-j)(c-j)(d-j)]$$

若侵犯了您的版权利益，敬请来信告知！

$$(3) D_{2n} = \begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & \ddots & & & \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & & & \ddots & \\ c_n & & & & d_n \end{vmatrix} = a_n \begin{vmatrix} a_{n-1} & & & b_{n-1} \\ & \ddots & & \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & d_{n-1} \\ 0 & & & & 0 & d_n \end{vmatrix}_{(2n-1)}$$

$$+ (-1)^{2n+1} c_n \begin{vmatrix} 0 & & 0 & b_n \\ a_{n-1} & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_1 & b_1 \\ & & c_1 & d_1 \\ & & & \ddots & \\ c_{n-1} & & & & d_{n-1} & 0 \end{vmatrix}_{(2n-1)} = -a_n d_n D_{2(n-1)} - c_n b_n D_{2(n-1)}$$

$$= (a_n d_n - c_n b_n) D_{2(n-1)}$$

$$\therefore D_2 = a_1 d_1 - c_1 d_1 \therefore D_{2n} = \prod_{1 \leq i \leq n} (a_i d_i - c_i b_i)$$

补充试题:

4: 已知 204, 527, 255 三数据都能被 17 除尽, 试利用行列式性质证明

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} \text{ 能被 17 除尽}$$

$$\text{证明: } \because \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 + 10\gamma_2]{\gamma_3 + 100\gamma_2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 204 & 525 & 255 \end{vmatrix} = 17 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 12 & 31 & 15 \end{vmatrix}$$

$\therefore$ 结论成立。 证毕

$$5: \text{ 若 } a > b > c, \text{ 试证明: } D_3 = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \end{vmatrix} < 0$$

$$D_3 c_3 + (a+b+c)c_1 \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & ab+bc+ca \\ b & b^2 & ab+bc+ca \\ c & c^2 & ab+bc+ca \end{vmatrix}$$

$$= (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\because a > b > c > 0 \quad \therefore D_3 < 0$$

习题三

1. 利用伴随矩阵求下列矩阵逆阵

$$(1) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{解: } |A| = 1 \neq 0 \quad \therefore A^{-1} \text{ 存在. } A_{11} = \cos \theta, A_{12} = -\sin \theta, A_{21} = \sin \theta, A_{22} = \cos \theta$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{解: } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -14 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -14 & 6 \end{vmatrix} = 2. \therefore \text{其逆矩阵存在}$$

$$A_{11} = -4, A_{12} = -13, A_{13} = -32, A_{21} = 2, A_{22} = 6, A_{23} = 14, A_{31} = 0, A_{32} = -1, A_{33} = -2,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -13/2 & 3 & -1/2 \\ -16 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ 其中 } ad - bc \neq 0$$

$$\text{解: } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \quad \therefore \text{逆矩阵存在. 又 } A_{11} = d, A_{12} = -c, A_{21} = -b, A_{22} = a$$

$$\text{故 } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{又} \because |B| \neq 0 \therefore B^{-1} \text{ 存在, 且 } B^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 故 } |B^{-1}| = \frac{1/16 \quad 6/16}{-1/8 \quad 1/4} = \frac{1}{16}$$

3. 设 A 为可逆矩阵, 证明 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

$$\text{证明: } \because A \text{ 可逆, } \therefore |A| \neq 0 \text{ 且逆矩阵为 } A^{-1}, \therefore A^* A = |A| I \therefore A^* = |A| A^{-1}$$

$$\text{由于 } |A| \neq 0, A^{-1} \text{ 可逆且 } (A^{-1})(A^{-1})^* = |A^{-1}| I \text{ 可得 } (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|} A^*$$

$$\text{另一方面, 由 } A^*(A^{-1})^* = |A| A^{-1} \frac{1}{|A|} A = I$$

$$\text{由矩阵可逆定义知, } A^* \text{ 可逆, 且 } (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

4. 设 $A^k = 0$, 证明: $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$

$$\text{证明: 若 } AB = I, \text{ 则 } B = A^{-1}$$

$$\begin{aligned} (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) &= I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} - A - A^2 - \cdots - A^{k-1} - A^k \\ &= I - A^k = I \therefore \text{原式得证} \end{aligned}$$

5. 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = 0$, 证明 A 及 $A + 2I$ 都可逆, 并求 $A^{-1}, (A + 2I)^{-1}$

$$\text{解: } A^2 - A - 2I = 0 \Rightarrow A^2 - A = 2I \Rightarrow A(A - I) = 2I \Rightarrow A \cdot \frac{1}{2}(A - I) = I$$

$$\text{显然 } A \text{ 可逆且 } A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) \quad \because A \text{ 可逆 } |A| \neq 0$$

$$\text{且 } A^2 - A - 2I = 0 \Rightarrow A^2 = A + 2I, \quad |A^2| = |A|^2 = |A + 2I| \neq 0$$

$$\text{即 } A + 2I \text{ 可逆, 由 } A + 2I = A^2 \Rightarrow (A^2)^{-1} = (A + 2I)^{-1}, \text{ 于是}$$

$$\text{由 } A^2 - A - 2I = 0 \text{ 得, } (A + 2I)(A - 3I) + 4I = 0 \Rightarrow (A + 2I)(A - 3I) = -4I$$

课后答案网: www.hackshp.cn
若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

解: (1) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{3}, x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-6}{3} = -2$$

(2) $D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -21 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = -7, x_2 = \frac{D_2}{D} = 3, x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{14}{3}$$

7. 问 λ 取何值时, $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解?

解: $D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 7-2\lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda)[7-\lambda(1-\lambda)] = 2(3-\lambda)(1-\lambda)$
若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

当 $D=0$ 时, 即 $\lambda(3-\lambda)(\lambda-2)=0$ 时, 有非 0 解

即 $\lambda=0$, $\lambda=3$ 或 $\lambda=2$ 时, 有非 0 解

补充题:

8. 齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 有非零解, 求 λ, μ 的值。

解: $\because$ 有非零解, $\therefore D=0$.

$$\text{即 } \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1-\lambda & \mu-1 & 0 \\ 1-\lambda & 2\mu-1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \mu-1 \\ 1 & 2\mu-1 \end{vmatrix} (1-\lambda) = \mu(1-\lambda) = 0$$

解得: $\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 。

9. A, B 为 n 阶方阵, $AB+BA=I$. 证明: $A^2B+BA^2=A^2$

证: $\because AB=I-BA$,

$$\begin{aligned} \therefore A^2B+BA^2 &= A^2AB+BA^2 = A^2(I-BA)+BA^2 = A^2 - A^2BA+BA^2 \\ &= A^2 - A(AB)A+BA^2 = A^2 - A(I-BA)A+BA^2 \\ &= ABA^2+BA^2 = (I-BA)A^2+BA^2 = A^2 \end{aligned}$$

习题四

1. 求矩阵的秩与标准形矩阵

$$\begin{aligned} (1) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\eta \leftrightarrow \xi} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 2 & -3 & 8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -2\xi+\eta_1 \\ -2\xi+\eta_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & -6 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\begin{smallmatrix} \eta_1+\frac{9}{6}\eta_2 \\ \frac{1}{2}\eta_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} -\eta_1+\eta_2 \\ \frac{1}{3}\eta_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 8 & -7 \\ 2 & 14 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_1 - 4r_2 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 2r_1}} \begin{bmatrix} 0 & -10 & 5 \\ 0 & 10 & -8 \\ 0 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 + r_2 \\ r_3 \leftrightarrow r_4 \\ \frac{1}{5}r_2}} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + \frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 为标准形。}$$

∴ 秩为2

(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \\ r_4 - 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_3 - r_2 \\ r_4 - r_2}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}r_2 \\ r_2 \leftrightarrow (-1) \\ -\frac{1}{4}r_4}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 + r_2 \\ r_3 + r_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 + r_3 \\ r_4 - \frac{1}{2}r_3 \\ \dots}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 为标准型。}$$

易知, 秩为4。

2. 答: 在秩为 r 的矩阵中, 可能有等于零的 $r-1$ 阶子式, 可能有等于零的 r 阶子式, 没有不等于零的 $r+1$ 阶子式。

3. 证明: 任何秩为 r 的矩阵均可表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和。

证: 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $R(A) = r$ 。故 A 必与矩阵 B 等价。

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ (第 } r \text{ 行)}$$

即 $\exists m$ 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $A = PBQ$ 。

又:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{第 } r \text{ 行})$$

$$= E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{rr}$$

其中 $E_{ii} (i=1,2,3,\cdots,r)$ 是 $m \times n$ 矩阵, 仅第 i 行第 i 列的元素为 1, 其余元素全都为 0.

$$\therefore A = PBQ = P(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{rr})Q$$

$$= PE_{11}Q + PE_{22}Q + \cdots + PE_{rr}Q = B_1 + B_2 + \cdots + B_r$$

其中 $B_i = PE_{ii}Q (i=1,2,\cdots,r)$, 又 $\because P, Q$ 均可逆, 且初等变换不改变矩阵的秩,

$$\therefore \text{有 } R(B_i) = R(PE_{ii}Q) = R(E_{ii}) = 1 (i=1,2,\cdots,r) \quad \text{证毕.}$$

4. 证明: 等价矩阵有相同的标准型矩阵.

证: 设 A, B 为等价矩阵, 则 A 经过有限次初等行变换可换为 B .

从而 A, B 分别经过有限次初等行变换可换为相同的行最简型, 再经过有限次初等列变换可化为标准型. 故等价矩阵有相同的标准型矩阵.

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 5 \end{bmatrix}$, 问 λ 取何值时 A 的秩最小?

解: 法一: 初等变换法

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 5 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 5-\lambda \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 5-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda(\lambda-5) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

则当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 5$ 时, $r(A) = 3$, 当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq 5$ 时, $r(A) = 4$

若侵犯了您的权益, 敬请联系告知!

∴ 当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 3$ 时, 秩最小。

法二: 定义法

$$\because \text{在 } A \text{ 中取 } 1, 2, 4 \text{ 行的一个三阶子式 } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \quad \therefore r(A) \geq 3.$$

$$\text{又 } \because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 5)$$

当 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 5$ 时, $|A| = 0$, 即 $r(A) \leq 3$. $\therefore \lambda = 0$ 或 $\lambda = 5$ 时, 秩 = 3 为最小。

课后答案网

www.hackshp.cn

习题一

1

$$(1) \quad \overrightarrow{AB}(1,3,0) \quad \overrightarrow{BC}(-5,0,0) \quad \overrightarrow{CA}(4,-3,0)$$

$$(2) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{10}$$

2

A(3, 4, 0) 在 xoy 面上 B(0, 4, 3) 点在 yoz 面上

C(3, 0, 0) 在 x 轴上 D(0, -1, 0) 在 y 轴上

3

$$3u-2v=3(a-b+2c)-2(-3b-c)=3a+3b+8c$$

4



设四边形 ABCD 中 AC 与 DB 交于 O, 由已知 AO=OC, DO=OB

因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC}$

所以 ABCD 为平行四边形

5

$$\rho_{\theta\phi} r = |r| \cos(\theta) = 4 \times \cos 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

6

设起点 A 为 (x_0, y_0, z_0)

$$\rho_{yz} AB = (2 - x_0) = 4 \quad \rho_{xy} AB = (-1 - y_0) = -4 \quad \rho_{xz} AB = (7 - z_0) = 7$$

解得: $x_0 = -2, y_0 = 3, z_0 = 0$

7

$$(1) \quad a = (2, -1, 1) \quad |a| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \quad \cos \alpha = \frac{2}{|a|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{-1}{|a|} = \frac{-\sqrt{6}}{6} \quad \cos \gamma = \frac{1}{|a|} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$(2) \quad b = (4, -2, 2) \quad |b| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} \quad \cos \alpha = \frac{2}{|b|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{-2}{|b|} = \frac{-\sqrt{6}}{6} \quad \cos \gamma = \frac{2}{|b|} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad b^0 = \frac{b}{|b|} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right\}$$

$$(3) \quad c = (6, -3, 3) \quad |c| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{6} \quad \cos \alpha = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{-3}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6} \quad \cos \gamma = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$(4) \quad d = (-2, 1, -1) \quad |d| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \quad \cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \cos \gamma = -\frac{\sqrt{6}}{6} \quad d^0 = \frac{d}{|d|} = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right\}$$

与前三向量单位同的 $d^0 = -\left\{ \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right\}$ 。

8.

(1) $\cos \alpha = 0$ 表明向量与 x 轴垂直;

(2) $\cos \beta = 1$ 表明向量与 y 轴平行;

(3) $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ 表明向量既和 x 轴垂直又与 y 轴垂直, 即垂直于 xy 面。

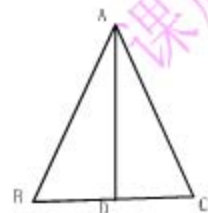
9.

设向量的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 。由已知 $\beta = \alpha$ $\gamma = 2\alpha$ 。又 $\because \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

$$\text{即 } \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha = 1 \Rightarrow 2\cos^2 \alpha + (2\cos^2 \alpha - 1)^2 = 1 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \text{ 或 } \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 方向余弦为 $\{0, 0, -1\}, \left\{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\right\}$ 。

10 (加题) $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边中点, 证明 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ 。



证明: 由三角形法则 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ 又 $\because D$ 为 BC 中点, $\therefore \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{CD}$

两式相加得 $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 即 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ 。

11(加题) 试证点 $A(-3, -3, -3)$, $B(5, -1, -1)$, $C(-1, 5, -1)$, $D(-1, -1, 5)$ 且一个正四面体的四个顶点, 且此四个顶点到原点的距离相等。

证: 由距离公式得 $|AB| = \sqrt{[3 - (-3)]^2 + [1 - (-5)]^2} = 6\sqrt{2}$

同样可得 $|AC| = |AD| = |BC| = |BD| = |CD| = 6\sqrt{2}$

说明四点中每两点得距离均相等, 每三点都可作成一个正三角形, 这样得正三角形共四个, 但平面内得四个点不可能作成四个正三角形, 由距离公式 $|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = 3\sqrt{3}$.

习题 二

1

$$(1) a \cdot b = |a||b| \cos \theta = 3 \times 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 6;$$

$$(2) b \cdot b = |b||b| \cos \theta = 4 \times 4 \cdot 1 = 16;$$

$$(3) (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 = 9 - 16 = -7;$$

$$(4) (a-2b) \cdot (3a+b) = 3a^2 - 5ab - 2b^2 = 27 - 30 - 32 = -35;$$

$$(5) (a \cdot a)(b \cdot b) = 9 \times 16 = 144;$$

2

$$\overrightarrow{PQ} = \{-1, 0, 1\}, \text{ 设 } R \text{ 坐标为 } (x, y, z) \quad \because \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AR} \quad \therefore \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AR} = 0$$

$$\text{即 } (-1, 0, 1) \cdot (x-1, y, z-1) = 0 \quad (1-x, y, z-1) = 0 \quad \therefore R \text{ 坐标为 } (1, y, 1).$$

3

$$a = \{-1, 1, 0\} \quad b = \{1, -2, 2\}$$

$$\cos(a \wedge b) = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore a, b$ 夹角为 135° .

4

证明: 在 $\triangle ABC$ 中, 建立向量如图, 又 $c = a - b, c^2 = (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

由数量积定义得 $|c|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \cos c$

5

$$a = (1, 0, -1) \quad b = (-1, -2, 1)$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2k - 2i$$

6

$$a = \{2, 3, 0\} \quad b = \{0, 3, 2\}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6i - 4j + 6k$$

$$|a \times b| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 6^2} = 2\sqrt{22}$$

7

解: 由向量积定义, 知 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \sin \angle A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 14i - 42j - 21k$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(14)^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2401}$$

8

$|c \times d|$ 即以 c 、 d 为邻边的平行四边形面积, 即

$$S = |c \times d| = |(2a + 3b) \times (a - 4b)| = |2a \times a - 8a \times b + 3b \times a - 12b \times b| = 11|a \times b| = 11$$

9

证: $a \times b = a \times (-a - c) = -a \times a - a \times c = c \times a$

10

证: $(a - d) \times (b - c) = a \times b - a \times c - d \times b + d \times c = a \times b - c \times d - a \times c + b \times d = 0$
故 $a - b$ 与 $b - c$ 共线。

11

证: $\overrightarrow{AB} = \{ -1, 3, 3 \}$ $\overrightarrow{AC} = \{ 0, 4, 2 \}$ $\overrightarrow{AD} = \{ 3, 1, -4 \}$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \{ -18, 6, -12 \}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \{ -1, 3, 3 \} \cdot \{ -18, 6, -12 \} = 0$$

故 A 、 B 、 C 、 D 四点共面。

12

证: $a = \begin{pmatrix} e_1 \\ -1, 3, 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} e_1 \\ 2, -3, -4 \end{pmatrix}$ $c = \begin{pmatrix} e_1 \\ -3, 12, 6 \end{pmatrix}$

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

故 a, b, c 共面。

13

$$\text{证: } a \times b \cdot c = (-b \times c - c \times a) \cdot c = -(b \times c) \cdot c - (c \times a) \cdot c = 0$$

故 a, b, c 共面。

14

解:

$$(1) (a \times b) \cdot c$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(2) (a \times b) \cdot (a \times c)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

15

$$\text{解: } OA = \{2, 3, 1\} \quad OB = \{1, 2, 2\} \quad OC = \{3, -1, 4\}$$

$$V = \frac{1}{6} |(OA \times OB) \cdot OC|$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{19}{6}$$

习题三

$$1. (1) \text{ 由点法式: } 2(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0, \text{ 即 } 2x+2y+3z-7=0$$

$$(2) O(0,0,0) \quad A(1,3,2) \quad B(2,-1,-1)$$

$$\text{则 } OA = \{1, 3, 2\} \quad OB = \{2, -1, -1\}$$

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -i + 5j - 7k \quad \text{所以 法向量为 } \{-1, 5, -7\}$$

$$\text{由点法式: } -(x-1)+5(y-3)-7(z-2)=0 \text{ 即 } x-5y+7z=0$$

$$(3) \text{ 设平面法向量为 } \{A, B, C\}, \text{ 由点法式平面方程: } A(x-2)+B(y-3)=0, \dots\dots\dots*$$

因为: 平面平行 Z 轴, 所以: 法向量垂直 Z 轴 即

$$(A, B, C) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow C = 0$$

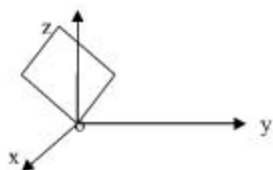
$$\overrightarrow{AB} = \{-4, -2, 0\}, \overrightarrow{AB} \perp n, \text{ 即 } (-4, -2, 0) \cdot (A, B, C) = 0$$

即 $-4A-2B=0 \Rightarrow B=2A$

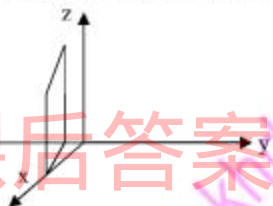
$A(x-2)-2A(y-3)=0$ 两边同时除以 A 得方程: $x-2y+4=0$

- (4) 平面法向量为 $n=\{7, -3, 1\}$, 由点法式, 平面方程为: $7(x-1)-3(y+z)+(z-3)=0$
即 $7x-3y+z-16=0$

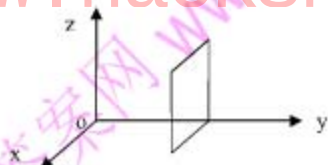
2. (1) 过原点且以 $\{2, -1, -1\}$ 为法向量的平面



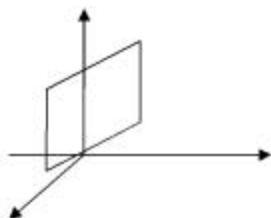
- (2) 表示平行于 Z 轴的平面, 且过 XOY 面上的直线: $-x+3y+6=0$



- (3) 表示平行于 XOZ 面的平面且过 $(0, 7, 3, 0)$ 点



- (4) 表示平行于 Z 轴的平面, 且过 XOY 面的直线: $x+y=0$



3. (1) $n_1 \{2, 0, -1\}$ $n_2 \{5, 1, 0\}$ 平面斜交
(2) $n_1 \{1, 2, -1\}$ $n_2 \{2, 4, -2\}$ $\because 1/2=2/4=-1/-2$
 $\therefore$ 两平面平行
(3) $n_1 \{2, -3, 1\}$ $n_2 \{5, 1, -7\}$ $\because 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-7) = 0$

4. $AB = \{-5, -4, 1\}$ $AC = \{-4, 2, -6\}$

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 22i - 34j - 26k \quad \text{法向量为 } \{11, -17, -13\}$$

$\therefore$ 由点法式: $11(x+1) - 17(y+2) - 13(z-2) = 0$ 即

$$11x - 17y - 13z + 3 = 0$$

5. 设平面法向量为 n

$\because$ 平面与另两平面垂直, 则平面法向量也与另两平面法向量垂直

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -16i + 14j + 11k \quad \therefore n \text{ 为 } \{-16, 14, 11\}$$

由点法式, 平面方程为: $-16(x-2) + 11(z-8) = 0$ 即

$$-16x + 11z + 120 = 0$$

6. (1) $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 2/3$

(2) $d = \frac{|2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 7 + 6 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = 13/3$

(3) $d = \frac{|2 \cdot 8 + (-2) \cdot 3 + (-4) - 3|}{3} = 22/3$

7. (1)

$$\cos \theta = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}} = \frac{|4 \cdot 3 + 2 \cdot (-4)|}{\sqrt{(4^2 + 2^2 + 4^2)(3^2 + (-4)^2)}} = \frac{20}{6 \cdot 5} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ 所求夹角为 $\arccos 2/3$

(2)

$$\cos \theta = \frac{|1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = 0$$

$\therefore$ 所求夹角为 $\pi/2$

8. 设所成二面角平分面上任一点为 (x, y, z) , 该点到两平面距离相等

$$\frac{|x-2, y+2, z+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{|x+2, y+0, z+0|}{\sqrt{7^2+(24)^2+0^2}} \quad \text{即}$$

$$2x+10y+15z-155=0 \quad \text{或} \quad 12x-10y+34z+55=0$$

习题四

1. (1) 取直线方向向量 $\mathbf{AB} = \{-2, -2, 6\}$ 由直线对称式方程:

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

- (2) 取直线方向向量 $\mathbf{AB} = \{0, 0, 1\}$ 则直线的方程为: $\begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases}$

2. 直线与 $\begin{cases} x+2z-4=0 \\ y+3z-5=0 \end{cases}$ 平行, 则直线的方向向量 $\mathbf{l}$ 同时与两平面的法向量垂直

$$\text{即 } \mathbf{l} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \mathbf{l} = \{-2, -3, 1\}$$

$$\therefore \text{直线方程为 } \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{1}$$

3. 解: 先求出这条直线上一点 (x_0, y_0, z_0) 取 $x_0=1 \Rightarrow y_0=1 \quad z_0=1$

$$\text{取 } \mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\therefore \text{对称式方程为: } \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$$

$$\text{参数方程为: } \begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$$

4. 解: 直线的方向向量 $\mathbf{l} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -16\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$

它可作为所求平面的法向量, 由点法式: $-16(x-2) + 14y + 11(z+3) = 0$

即 $-16i + 14j + 11k + 65 = 0$ 若侵犯了您的权益, 敬请来信告知!

5. 解: 两直线的方向向量可分别取为 $t_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3i + 4j - k$

$$t_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 10i - 5j + 10k \quad \cos\theta = \frac{|t_1 \cdot t_2|}{|t_1| |t_2|} = \frac{0}{|t_1| |t_2|} = 0$$

6. (1) $\because (-2) \cdot 4 + (-7) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) = 0 \quad \therefore$ 平面与直线平行

(2) $\because t = \{3, -2, 7\} \quad n = \{3, -2, 7\} \quad \therefore$ 平面与直线垂直

(3) $\because 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 = 0 \quad \therefore$ 平面与直线平行

又 $\because (2, -2, 3)$ 满足平面方程 $x + y + 3z = 0$

$\therefore$ 直线在平面上

7. $\because$ 直线平行于两个互不平行的平面 $\therefore t$ 同时垂直于 n_1, n_2 (平面法向量)

$$t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2i + 3j + k \quad \therefore \text{所求直线方程} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}$$

8. 设 t_1, t_2 分别为两直线的方向向量, 则 $t_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i - 2j - 3k$

$$t_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -j - k$$

设 n 为所求平面法向量 $n = t_1 \times t_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -i + j - k$

由平面法式方程: $-(x-1) + (y-2) - (z-1) = 0$ 即 $x - y + z = 0$

9. 过点 $P(3, -1, 2)$ 作与直线垂直的平面, 设平面与直线的交点与 P 距离即为所求.

设与直线垂直的平面法向量为 $n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3i - 3k$ 则平面方程为:

$$3(y+1)+3(z-2)=0 \quad \text{即} \quad y+z-1=0 \quad \text{平面与直线的交点为}$$

$$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \\ y+z-1=0 \end{cases} \text{ 的解} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore |pp'| = \sqrt{(3-1)^2 + (-1+1/2)^2 + (2-3/2)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

10. 作过已知直线且垂直于已知平面的平面, 设平面与已知平面的交线即为所求, 过直线的平面束方程为 $(2x-4y+z) + \lambda(3x-y-2z+9) = 0$ 即

$$(2+3\lambda)x - (4+\lambda)y + (1-2\lambda)z - 9\lambda = 0 \quad \text{由垂直条件:}$$

$$(2+3\lambda) \times 4 + (4+\lambda) + (1-2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-13}{11}$$

过直线且与已知平面垂直的平面为:

$$(2+3 \times \frac{-13}{11})x - (4+\frac{-13}{11})y + (1-2 \times \frac{-13}{11})z - 9 \times \frac{-13}{11} = 0 \quad \text{即}$$

$$17x + 31y - 37z - 117 = 0 \quad \text{即所求直线方程为} \begin{cases} 17x + 31y - 37z - 117 = 0 \\ 4x - y + z = 1 \end{cases}$$

习题四添加题

11. 判断直线 l 与平面 π 的位置关系, $l: \frac{x-5}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{3}$

$$\pi: x + ky - 5z - 10 = 0$$

$$\text{解: 直线的参数方程为} \begin{cases} x = t + 5 \\ y = -2t - 4 \\ z = 3t + 1 \end{cases} \text{ 代入} \pi \text{ 中整理得} (-k-7)t = 2k+5$$

$$\text{当} k \neq -7 \text{ 时, } l \text{ 与} \pi \text{ 有唯一交点, 交点为} (\frac{3k+30}{k+7}, -\frac{18}{k+7}, \frac{5k+8}{k+7})$$

当 $k = -7$ 时, 方程无解, 即直线与平面平行

12. 判断 m 为何值时 l_1 与 l_2 相交?

$$l_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{4} \quad l_2: \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

解: 点 $p_1(-2,0,1)$ $p_2(3,1,7)$ 分别在 l_1 l_2 上, $\overrightarrow{p_1p_2} = \{5,1,6\}$ 方向向量

$$l_1 = \{2, -3, 4\} \quad l_2 = \{m, 4, 2\}, \text{ 令 } [p_1 p_2 \quad l_1 \quad l_2] = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ m & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = 3 \text{ 显然}$$

$l_1 \neq l_2 \quad \therefore m = 3$ 时, l_1 与 l_2 相交。

习题五

1

设动点 $M(x, y, z)$,

$$\therefore |AM| = |BM|$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}$$

等式两边平方化简得: $x + y - 2z = 0$.

2

设 R 为球的半径, $R = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$, 则球面方程为

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 14$$

3

$\therefore$ 方程中 x^2, y^2, z^2 系数均为 1, 且不含 xy, yz, zx 项

$\therefore$ 方程为球面, 整理得:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 10 = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) + (z^2 + 10z + 25) - 49$$

$$\text{即 } (x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 49$$

球心为 $(3, -4, -5)$, 半径为 7 的球面。

4

(1) 将 $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ 代入 $z^2 = 5x$ 方程中的 z 后, 即得 $y^2 + z^2 = 5x$.

(2) 将 $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ 代入 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 方程中的 x 后, 即得 $4x^2 - 9y^2 + 4z^2 = 36$.

(3) $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ 代入 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ 方程中的 x 后, 即得 $\frac{x^2 + y^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$.

5

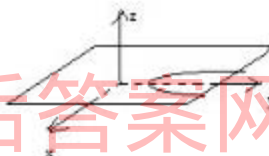
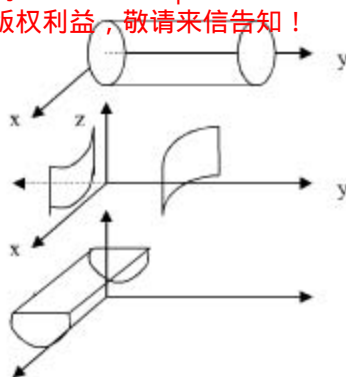


$$(1) \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

$$(2) -\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$(3) y^2 - z = 1$$

$$(4) z = y - x^2$$



6

(1) 是 xoy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转生成的, 或是 xoz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{9} + z^2 = 1$ 绕 x 轴旋转生成的。

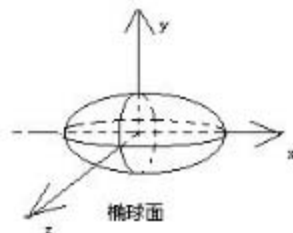
(2) 是 xoy 面上的双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转生成的, 或是 yoz 面上的椭圆 $z^2 - y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转生成的。

(3) 是 xoy 面上的双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转生成的, 或是 xoz 面上的双曲线 $\frac{x^2}{4} - z^2 = 1$ 绕 x 轴旋转生成的。

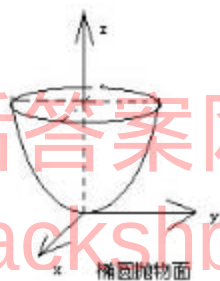
(4) 是 xoy 面上的椭圆 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 绕 x 轴旋转生成的或是 xoz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{9} + z^2 = 1$ 绕 x 轴旋转生成的。

7

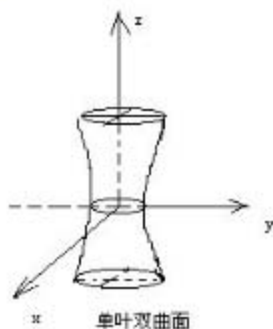
(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 若侵犯了您的版权利益，敬请来信告知！



(2) $\frac{z}{2} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$



(3) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$



8. (1) $x^2 - y^2 = 0$ 是 xoy 平面上的两直线 $y = x$ $y = -x$

(2) $x^2 - y^2 = 2$ 是平面 $z = 1$ 上的双曲线

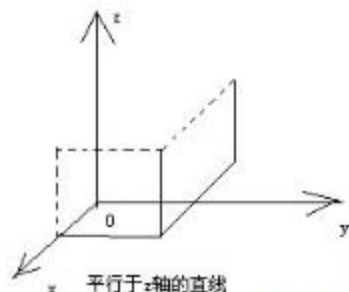
(3) $x^2 = 2z$ 是平面 xoy 面上的抛物线

(4) $x^2 - 1 = 2z$ 是 xOz 面上的抛物线

(5) $y^2 = -2z$ 是 yOz 面上的抛物线

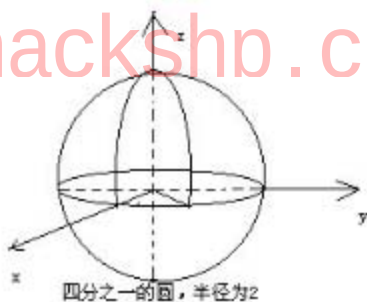
(6) $1 - y^2 = 2z$ 是平面 $x = 1$ 上的抛物线

9. (画图)



课后答案网

www.hackshp.cn



10. 解: 母线平行于 x 轴且过轴线的柱面方程: $3y^2 - z^2 = 16$, 准线方程:

$$\begin{cases} 3y^2 - z^2 = 16 \\ x = 0 \end{cases}, \text{ 是 } yOz \text{ 面上的双曲线, } \therefore 3y^2 - z^2 = 16 \text{ 为双曲柱面, 母线平行于}$$

$$y \text{ 轴且过曲线的柱面方程为 } 3x^2 + 2y^2 = 16, \text{ 准线为 } \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 16 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ 是 } xOy \text{ 面上的椭圆}$$

$$\therefore 3x^2 + 2y^2 = 16 \text{ 为椭圆柱面}$$

11. 将 $z = 1 - x$ 代入球面方程得投影柱面: $x + y^2 + (1 - x)^2 = 9$, 在 xOy

面上的投影为

$$z=0$$

12. 将 $y=3$ 代入 $y^2+z^2-2x=0$ 得投影柱面: $y^2+9-2x=0$

$\therefore$ 投影曲线为 $\begin{cases} y^2+9=2x \\ z=0 \end{cases}$, 原曲线是旋转抛物面 $2x=y^2+z^2$ 与 $z=3$ 平面所截的抛物线

$$y^2+9=2x$$

13. (1) 是在 $x=3$ 平面上的一个圆, 以 $(3, 0, 0)$ 为圆心, 4 为半径

(2) 是 $y=1$ 平面上的椭圆, 长轴为 $4\sqrt{2}$ 且平行于 x 轴, 短轴为 $\frac{4}{3}\sqrt{2}$, 且平行于 z 轴

(3) 是 $z=2$ 平面上的双曲线, 虚轴于 y 轴平行, 实轴与 x 轴平行, 实半轴长为 3, 虚半轴长为 2

课后答案网

www.hackshp.cn

14.

过交线 $\begin{cases} y=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影柱面上为 $x^2+y^2=ax$

在 xOy 面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2 \leq ax \\ y=0 \end{cases}$

在 xOy 面上的投影柱面: $y=\sqrt{a^2-ax}$

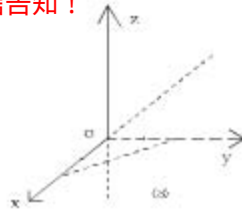
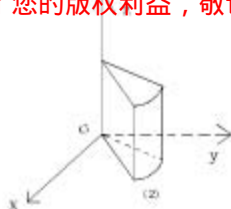
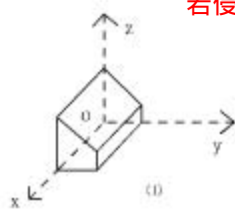
在 xOy 面上的投影为: $\begin{cases} y \leq \sqrt{a^2-ax} \\ y=0 \end{cases}$

15

(1) $x=0, y=0, z=0, x=2, y=1, 3x+4y+2z-12=0$

(2) $z=0, y=-3, x-y=0, x-\sqrt{3}y=0, x^2+y^2=1$ (在第 I 象限)

(3) $x^2=1-z, y=0, z=0, x+y=1$



课后答案网
www.hackshp.cn

习题一

1. 解: $a-b = a+(-b)$

$$= (1, 1, 0)^T + (0, -1, -1)^T$$

$$= (1, 0, -1)^T$$

$$3a+2b-c = 3a+2b+(-c)$$

$$= (3, 3, 0)^T + (0, 2, 2)^T + (-3, -4, 0)^T$$

$$= (0, 1, 2)^T$$

2. 解: $3(a_1-a)+2(a_2+a)=5(a_3+a)$

$$3a_1+2a_2+(-3+2)a = 5a_3+5a$$

$$3a_1+2a_2+(-a) = 5a_3+5a$$

$$3a_1+2a_2+(-a)+a+(-5)a_3 = 5a_3+5a+a+(-5)a_3$$

$$3a_1+2a_2+(-5)a_3 = 6a$$

$$\frac{1}{6}[3a_1+2a_2+(-5)a_3] = \frac{1}{6} \times 6a$$

$$\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + (-\frac{5}{6})a_3 = a$$

将 $a_1=(2, 5, 1, 3)^T, a_2=(10, 1, 5, 10)^T, a_3=(4, 1, -1, 1)^T$ 代入 $a = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + (-\frac{5}{6})a_3$ 中可得:

$$a=(1, 2, 3, 4)^T.$$

3. (1) V_1 是向量空间. 由 $(0, 0, \dots, 0) \in V_1$ 知 V_1 非空. 设 $a=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_1, b=(y_1, y_2, \dots, y_n) \in V_1$. 则有 $x_1+x_2+\dots+x_n=0, y_1+y_2+\dots+y_n=0$. 因为

$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\dots+(x_n+y_n) = (x_1+x_2+\dots+x_n) + (y_1+y_2+\dots+y_n) = 0$$

所以 $a+b=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \in V_1$. 对于 $k \in \mathbb{R}$, 有

$$kx_1+kx_2+\dots+kx_n = k(x_1+x_2+\dots+x_n) = 0$$

所以 $ka=(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) \in V_1$. 因此 V_1 是向量空间.

(2) V_2 不是向量空间. 因为取 $a=(1, x_2, \dots, x_n) \in V_2, b=(1, y_2, \dots, y_n) \in V_2$, 但 $a+b=(2, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \notin V_2$. 因此 V_2 不是向量空间.

4. 证明: 由 $0 \in N(A)$ 知 $N(A)$ 非空. 对任意 $x, y \in N(A)$ 有 $Ax=0, Ay=0$; 于是 $A(x+y)=Ax+Ay=0$, 所以 $x+y \in N(A)$. 对任意 $x \in N(A)$, $k \in \mathbb{R}$ 有 $A(kx)=k(Ax)=k \cdot 0=0$, 所以 $kx \in N(A)$. 故 $N(A)$ 是向量空间.

5. 证明: 由 $a_1 \in L(a_1, a_2, \dots, a_m)$ 知该集合非空. 对任意 $a, b \in L(a_1, a_2, \dots, a_m)$, 有 $a=k_1a_1+k_2a_2+\dots+k_ma_m, b=l_1a_1+l_2a_2+\dots+l_ma_m$. 从而对任意 $k \in \mathbb{R}$, 有 $a+b=(k_1+l_1)a_1+(k_2+l_2)a_2+\dots+(k_m+l_m)a_m \in L(a_1, a_2, \dots, a_m)$
 $ka=(kk_1)a_1+(kk_2)a_2+\dots+(kk_m)a_m \in L(a_1, a_2, \dots, a_m)$

习 题 二

1. 求向量 b 关于向量组 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合表达式:

(1) 解: 设向量 b 关于向量组 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合表达式为:

$$b = k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 + k_4 a_4$$

其中, k_1, k_2, k_3, k_4 为待定常数. 则将 $b = (0, 2, 0, -1)^T, a_1 = (1, 1, 1, 1)^T, a_2 = (1, 1, 1, 0)^T, a_3 = (1, 1, 0, 0)^T, a_4 = (1, 0, 0, 0)^T$ 向量 b 关于向量组 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合表达式中可得:

$$(0, 2, 0, -1)^T = k_1(1, 1, 1, 1)^T + k_2(1, 1, 1, 0)^T + k_3(1, 1, 0, 0)^T + k_4(1, 0, 0, 0)^T$$

根据对分量相等可得下列线性方程组:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 = -1 \end{cases}$$

解此方程组可得: $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 3, k_4 = -3$.

因此向量 b 关于向量组 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合表达式为:

$$b = -a_1 + a_2 + 3a_3 - 3a_4$$

(2) 与(1)类似可有下列线性方程组:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + 2k_4 = -3 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 + 2k_4 = 1 \\ k_1 + k_2 = 2 \\ k_1 + 3k_2 + k_3 = 1 \end{cases}$$

由方程组中的第一和第二个方程易解得: $k_2 = 4$, 于是依次可解得: $k_1 = -2, k_3 = -9, k_4 = 2$.

因此向量 b 关于向量组 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性组合表达式为:

$$b = -2a_1 + 4a_2 - 9a_3 + 2a_4$$

2. (1) 解: 假设 a_2 可由 a_1, a_3, a_4 线性表示, 其线性表达式为:

$$a_2 = k_1 a_1 + k_2 a_3 + k_3 a_4$$

则可得下列线性方程组:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 2k_3 = 5 \\ 2k_1 + k_3 = 2 \\ 3k_1 + k_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{可解得: } k_1 = \frac{5}{7}, k_2 = \frac{4}{7}, k_3 = \frac{13}{7}$$

因此说明 a_2 可由 a_1, a_3, a_4 线性表示, 假设成立.

于是由线性相关的定义可知 a_1, a_2, a_3, a_4 线性相关.

(2) 解: 设存在常数 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$$

$$\text{即 } k_1(1,1,1)^T + k_2(1,2,3)^T + k_3(1,6,3)^T = 0$$

则可得下列线性方程组:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 6k_3 = 0 \\ k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$$

此线性方程组只有零解, 即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

因此 a_1, a_2, a_3 线性无关.

(3) 解: 设存在常数 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$$

$$\text{即 } k_1(1,2,3)^T + k_2(1,-4,1)^T + k_3(1,14,7)^T = 0$$

则可得下列线性方程组:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_1 - 4k_2 + 14k_3 = 0 \\ 3k_1 + k_2 + 7k_3 = 0 \end{cases}$$

可解得 $k_1 = -3k_3, k_2 = 2k_3$

只要取 $k_3 \neq 0$ 的数, 即可得不存在全为 0 的常数, 使 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$,

因此 a_1, a_2, a_3 线性相关.

(4) 同(2),(3)类似可知 a_1, a_2, a_3 线性无关.

3. 证明: 假设向量组 b_1, b_2, b_3 线性相关, 即不存在全为 0 的常数 k_1, k_2, k_3 , 也即是至少存在一个不为 0 的常数, 不妨设 $k_1 \neq 0$, 使

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 = 0$$

又由于 $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, b_3 = a_1 + a_2 + a_3$, 于是可得

$$k_1 a_1 + k_2(a_1 + a_2) + k_3(a_1 + a_2 + a_3) = 0$$

即

$$(k_1 + k_2 + k_3)a_1 + (k_2 + k_3)a_2 + k_3 a_3 = 0$$

因为 $k_1 \neq 0$,

(1) 若 k_2, k_3 都为 0, 则 $k_1 + k_2 + k_3$ 不为 0;

(2) 若 k_2, k_3 中有一个为 0, 则 $k_2 + k_3, k_3$ 有一个不为 0;

(3) 若 k_2, k_3 都不为 0, 则至少 k_3 不为 0.

于是由线性相关的定义可得: a_1, a_2, a_3 线性相关, 此与已知矛盾, 因此向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

4. 设存在常数 k_1, k_2, k_3, k_4 使

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 + k_4 b_4 = 0$$

因为 $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, b_4 = a_4 + a_1$

于是可得:

$$k_1(a_1 + a_2) + k_2(a_2 + a_3) + k_3(a_3 + a_4) + k_4(a_4 + a_1) = 0$$

整理得:

$$(k_1 + k_4)a_1 + (k_2 + k_1)a_2 + (k_3 + k_2)a_3 + (k_4 + k_3)a_4 = 0$$

因为 a_1, a_2, a_3, a_4 若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

(1) 当向量组 a_1, a_2, a_3, a_4 线性无关时,

$$k_1 + k_4 = 0, \quad k_2 + k_1 = 0, \quad k_2 + k_3 = 0, \quad k_3 + k_4 = 0$$

可解得: $k_2 = -k_1, \quad k_4 = -k_1, \quad k_3 = k_1$

取 $k_1 \neq 0$ 可得不为 0 的常数 k_1, k_2, k_3, k_4 使

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 + k_4 b_4 = 0$$

因此 b_1, b_2, b_3, b_4 线性相关。

(2) 当向量组 a_1, a_2, a_3, a_4 线性相关时, $k_1 + k_4, k_2 + k_1, k_2 + k_3, k_3 + k_4$ 中至少存在一个不为 0, 因此易知 k_1, k_2, k_3, k_4 不全为 0, 于是可得 b_1, b_2, b_3, b_4 线性相关。

5. 证明: 假使向量组 $b_1, b_2, \dots, b_m$ 线性相关, 即存在不全为 0 的常数 $k_1, k_2, \dots, k_m$, 使:

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_m b_m = 0$$

由题意不妨设 $a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r})$,

$$a_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2r}),$$

$$\dots, \dots, \dots,$$

$$a_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mr})$$

则相应地, $b_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r}, a_{1r+1}, \dots, a_{1n})$,

$$b_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2r}, a_{2r+1}, \dots, a_{2n}),$$

$$\dots, \dots, \dots,$$

$$b_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mr}, a_{mr+1}, \dots, a_{mn})$$

由 $k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_m b_m = 0$ 可得:

$$k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \dots + k_m a_{m1} = 0$$

$$k_1 a_{12} + k_2 a_{22} + \dots + k_m a_{m2} = 0$$

$$\dots, \dots, \dots,$$

$$k_1 a_{1r} + k_2 a_{2r} + \dots + k_m a_{mr} = 0$$

$$k_1 a_{1r+1} + k_2 a_{2r+1} + \dots + k_m a_{mr+1} = 0$$

$$\dots, \dots, \dots,$$

$$k_1 a_{1n} + k_2 a_{2n} + \dots + k_m a_{mn} = 0$$

取前面 r 个分量可得:

$$k_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r}) + k_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2r}) + \dots + k_m(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mr}) = 0$$

即

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$$

由假设知 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 不全为 0, 因此 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关, 此与 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关相矛盾, 结论得证。

6. 证明: 由 $a_1, a_2, \dots, a_r, \beta$ 线性相关, 可设不存在全为 0 的常数 $k_1, k_2, \dots, k_r, k_{r+1}$ 使:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_r a_r + k_{r+1} \beta = 0$$

若 $k_{r+1} = 0$ 则 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_r a_r = 0$ 且 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 不全为 0, 因此向量组 $a_1, a_2, \dots, a_r$

线性相关与已知向量组 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关相矛盾, 即 $k_{r+1} \neq 0$. 于是

$$\beta = -\frac{k_1}{k_{r+1}} a_1 - \frac{k_2}{k_{r+1}} a_2 - \dots - \frac{k_r}{k_{r+1}} a_r$$

结论得证.

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

7. 证明: (1) 必要条件

因为 $a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性相关则不存在全为 0 的常数 $k_1, k_2, \dots, k_s$ 使:

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s = 0$$

若 $k_1 = 0$, 则 $k_2, \dots, k_s$ 中至少有一个不为 0, 也即是 $a_i (1 \leq i \leq s)$ 中至少有一个向量可被其余线性表示.若 $k_1 \neq 0$, 因为 $a_1 \neq 0$, 因此 $k_2, \dots, k_s$ 中不可能全为 0, 结论仍成立.

因而条件是必要的.

(2) 充分条件

由定义可立即得出.

习 题 三

1.

(1) 解: 对矩阵进行初等行变换为

$$\begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 53 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该矩阵的秩为 3, 矩阵的第 1, 2, 3 列是它的列向量组的一个极大无关组.

(2) 解: 对矩阵进行初等行变换为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

该矩阵的秩为 4, 因此矩阵的第 1, 2, 3, 4 列是它的列向量组的一个极大无关组.

2. (1) 解: 以 a_1, a_2, a_3 为列作矩阵 A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & -6 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & -18 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

该矩阵的秩为 2, 它的一个极大无关组为 a_1, a_2

$$(3) \text{ 解: 以 } a_1, a_2, a_3 \text{ 为列作矩阵 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

该矩阵为上三角矩阵, 其 $|A| \neq 0$, 因此该矩阵的秩为 3, 它的一个极大无关组为向量

组本身.

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

(4) 解: 以 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 为列作矩阵 A , 对 A^T 进行初等行变换可得:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A^T 的秩为 3, 矩阵 A^T 的第 1, 2, 4 行构成它的一个极大无关组, 也即是矩阵 A 的第 1, 2, 4 列构成矩阵 A 的一个极大无关组, 它的秩为 3.

3. 证明: 设向量组 B 和 A 的秩均为 r , 且设它们的一个极大无关组分别为 $(b_1, b_2, \dots, b_r)$, $(a_1, a_2, \dots, a_r)$. 则由极大无关组的性质可知, 一个向量组的所有向量都可由它的一个极大无关组的向量线性表示. 因此要证明向量组 A 与 B 等价, 只证明 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 可由 $b_1, b_2, \dots, b_r$ 线性表示即可.

因为 B 可由 A 线性表示, 不妨设

$$b_1 = c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \dots + c_{1r}a_r$$

$$b_2 = c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + \dots + c_{2r}a_r$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_r = c_{r1}a_1 + c_{r2}a_2 + \dots + c_{rr}a_r$$

不妨设存在常数 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 使

$$k_1b_1 + k_2b_2 + \dots + k_rb_r = 0$$

于是可得:

$$(k_1c_{11} + k_2c_{21} + \dots + k_rc_{r1})a_1 + (k_1c_{12} + k_2c_{22} + \dots + k_rc_{r2})a_2 + \dots + (k_1c_{1r} + k_2c_{2r} + \dots + k_rc_{rr})a_r = 0$$

由 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关可得:

$$k_1c_{11} + k_2c_{21} + \dots + k_rc_{r1} = 0$$

$$k_1c_{12} + k_2c_{22} + \dots + k_rc_{r2} = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$k_1c_{1r} + k_2c_{2r} + \dots + k_rc_{rr} = 0$$

把 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 当作未知数, 当 $k_1, k_2, \dots, k_r$ 只有 0 解时, $b_1, b_2, \dots, b_r$ 线性无关. 要 $k_1, k_2, \dots, k_r$

只有 0 解, 当且仅当 $|c_{ij}| \neq 0$ ($i=1, \dots, r; j=1, 2, \dots, r$), 即

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rr} \end{bmatrix}$$

即矩阵 C 的秩为 r , 存在逆矩阵 C^{-1} . 设 $C^{-1} = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \cdots & c'_{1r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c'_{r1} & c'_{r2} & \cdots & c'_{rr} \end{bmatrix}$

$$\text{又因为 } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$C^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix} = C^{-1} C \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix}$$

因此有:

$$a_1 = c'_{11} b_1 + c'_{12} b_2 + \cdots + c'_{1r} b_r$$

$$a_2 = c'_{21} b_1 + c'_{22} b_2 + \cdots + c'_{2r} b_r$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$a_r = c'_{r1} b_1 + c'_{r2} b_2 + \cdots + c'_{rr} b_r$$

也即说明, $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 可由 $b_1, b_2, \cdots, b_r$ 线性表示, 因此结论成立.

4. 证明: (1) 必要性. 若 a 是任一 n 维向量, 由于 $n+1$ 个 n 维向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n, a$ 必线性相关, 而 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关, 故 a 必可由 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性表示.

(2) 充分性.

因为任一 n 维向量都能由 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性表示, 则特别地 n 维单位坐标向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 都能由 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性表示, 因此, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是等价的向量组, 故 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的秩为 n , 即它们线性无关.

5. 证明: 因为 $R^3 = L(e_1, e_2, e_3)$, e_1, e_2, e_3 表示单位坐标向量, 所以只须证明 $L(e_1, e_2, e_3) = L(a_1, a_2, a_3)$. 即证 e_1, e_2, e_3 与 a_1, a_2, a_3 等价. 显然, a_1, a_2, a_3 可由 e_1, e_2, e_3 线性表示, 因而只须证明 e_1, e_2, e_3 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示即可.

$$\text{因为 } (a_1, a_2, a_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 且 } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{因此矩阵 } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ 为可逆矩阵, 其逆矩阵为 } \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } (e_1, e_2, e_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

这说明 e_1, e_2, e_3 可由 a_1, a_2, a_3 线性表示, 因此 $L(a_1, a_2, a_3) = \mathbb{R}^3$.

6. 证明: (1) (b_1, b_2) 能由 (a_1, a_2) 线性表示.

$$\text{设 } (b_1, b_2) = (a_1, a_2) \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \text{ 即}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{可解得: } \begin{bmatrix} k_1 & k_3 \\ k_2 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

这说明 (b_1, b_2) 能由 (a_1, a_2) 线性表示.

- (2) (a_1, a_2) 能由 (b_1, b_2) 线性表示.

$$\text{由(1)可知: } (b_1, b_2) = (a_1, a_2) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\text{也即是矩阵 } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ 有可逆矩阵, 可求得其逆矩阵为 } \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{因此有 } (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

也即 (a_1, a_2) 能由 (b_1, b_2) 由线性表示.
由 (1), (2) 可知: $L(a_1, a_2) = L(b_1, b_2)$

7. 解: 设存在常数 k_1, k_2, k_3 使

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$$

即

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \\ -k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ 3k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}$$

可解得: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

因此 a_1, a_2, a_3 线性无关, 即 a_1, a_2, a_3 为 R^3 的一个基.

设向量 $b_1 = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3$, $b_2 = l_4 a_1 + l_5 a_2 + l_6 a_3$. 即 (l_1, l_2, l_3) , (l_4, l_5, l_6) 分别为 b_1, b_2 在基 a_1, a_2, a_3 下的坐标, 也即是:

$$\begin{cases} l_1 + 2l_2 + 3l_3 = 5 \\ -l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ 3l_2 + 2l_3 = 7 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} l_4 + 2l_5 + 3l_6 = -9 \\ -l_4 + l_5 + l_6 = -8 \\ 3l_5 + 2l_6 = 13 \end{cases}$$

$$\text{可分别解得: } \begin{cases} l_1 = 2 \\ l_2 = 3 \\ l_3 = -1 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} l_4 = 3 \\ l_5 = -3 \\ l_6 = -2 \end{cases}$$

因而 b_1, b_2 在基 a_1, a_2, a_3 下的坐标分别为 $(2, 3, -1)$ 和 $(3, -3, -2)$.

8. 解: V 的维数为 $n-1$ 维, 取 V 中 $n-1$ 个向量 $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$. 易证 $e_2, e_3, \dots, e_n$ 线性无关. 对任意 $x = (0, x_2, x_3, \dots, x_n)$ 有 $x = x_2 e_2 + x_3 e_3 + \dots + x_n e_n$. 因此, $e_2, e_3, \dots, e_n$ 为 V 的一个基.

习 题 四

1. (1) 解: 齐次线性方程组的系数矩阵的行变换如下

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

于是可得:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_4 \\ x_2 = -3x_4 \\ x_3 = \frac{4}{3}x_4 \end{cases}$$

将 x_4 取作自由未知量, 可得线性方程组的一个基础解系为:

$$\xi = (\frac{4}{3}, -3, \frac{4}{3}, 1)$$

因此可得线性方程组的通解为: $\eta = k\xi, k \in \mathbb{R}$.

(2) 解: 齐次线性方程组的系数矩阵的行变换如下

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是可得:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

将 x_2, x_4 取作自由未知量, 可得线性方程组的一个基础解系为:

$$\xi_1 = (-2, 1, 0, 0), \xi_2 = (1, 0, 0, 1)$$

因此可得线性方程组的通解为: $\eta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(3) 解: 齐次线性方程组的系数矩阵的行变换如下

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -7 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 9 & -19 & 34 \\ 0 & 7 & -9 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & -\frac{43}{7} & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{327}{7} \end{bmatrix}$$

因此该齐次线性方程组只有 0 解.

2. (1) 解: 非齐次线性方程组的增广矩阵的行变换如下

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 4 & -1 & 9 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \\ 0 & 14 & -14 & 28 \\ 0 & 7 & -7 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是可得:

若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 1 \\ x_3 = x_3 + 2 \end{cases}$$

其导出组的一个基础解系为: $\xi = (-2, 1, 1)$, 非齐次线性方程组的一个特解为 $\eta_0 = (-3, 3, 1)$.

因此非齐次线性方程组的通解为: $\eta = \eta_0 + k\xi, k \in \mathbb{R}$.

(2) 非齐次线性方程组的增广矩阵的行变换如下

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此有: $\begin{cases} x_1 = x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

可得非齐次线性方程组的一个特解为: $\eta_0 = (2, 1, 1)$, 其导出组的一个基础解系为:

$\xi = (1, 1, 1)$. 于是可得非齐次线性方程组的通解为: $\eta = \eta_0 + k\xi, k \in \mathbb{R}$.

3. 解: 因齐次线性方程组的一个基础解系有两个解向量, 所以它的系数矩阵的秩为 $4-2=2$, 说明系数矩阵通过行变换, 有两行可化为 0 向量, 因此只求其前两行, 后两行由前两行通过行变换得到.

设系数矩阵前两行的元素为 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ 和 $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$. 由 ξ_1, ξ_2 是齐次线性方程组的解向量可得:

$$\begin{cases} a_{12} + 2a_{13} + 3a_{14} = 0 \\ 3a_{11} + 2a_{12} + a_{13} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

可解得: $\begin{cases} 3a_{11} = -(2a_{12} + a_{13}) \\ 3a_{14} = -(a_{12} + 2a_{13}) \end{cases}$

取 $a_{12}=3, a_{13}=0$ 可有 $a_{11}=-2, a_{14}=-1$,

取 $a_{12}=0, a_{13}=3$ 可有 $a_{11}=-1, a_{14}=-2$.

由于 $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$ 为未知数所建立的方程组与(1)一致, 因此我们将上面的解向量一组作为 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$ 的解, 另一组作为 $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$ 的解. 于是可得一个齐次线性方程组的

系数矩阵为:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

因此, 该齐次线性方程组为:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

4. 解: 因非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 3, 则它的导出组的自由未知量个数为 1, 其基础解系只有一个解向量, 不妨设为 ξ . 又设非齐次线性方程组的一个特解为 γ_0 , 则它的通解为: $\gamma = \gamma_0 + k\xi, k \in \mathbb{R}$. 因 η_1, η_2 是它的两个解向量, 为方便之, 不妨取 $k=1$ 和 $k=-1$ 则可得:

$$\begin{cases} \eta_1 = \gamma_0 + \xi \\ \eta_2 = \gamma_0 - \xi \end{cases}$$

因此可解得 $\gamma_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 于是可得通解为: $\gamma = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

5. 解: 非齐次线性方程组的增广矩阵的行变换如下

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2 & \lambda^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda \\ 0 & 3 & -3 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ 0 & -3 & 3 & -2+2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 \end{bmatrix}$$

要方程组有解, 其系数矩阵与增广矩阵有相同的秩. 因此有 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 可解得 $\lambda = -2$ 或 $\lambda = 1$.

(1) 当 $\lambda = -2$ 时, 其增广矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 因此 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 2 \\ x_2 = x_3 + 2 \end{cases}$, 相应地其导

出组的解为 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$, 它的一个基础解系为 $\xi = (1, 1, 1)$. 非齐次线性方程组的一

个特解为 $\gamma_0 = (3, 3, 1)$. 则非齐次线性方程组的通解为 $\gamma = \gamma_0 + k\xi, k \in \mathbb{R}$.

(2) 当 $\lambda=1$ 时, 若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知! $\gamma_0 + k\xi, k \in \mathbb{R}$.

其中 $\gamma_0 = (2, 1, 1)$, $\xi = (1, 1, 1)$.

6. 证明: 设 $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 由 $AB=0$ 知 $Ab_j=0 (j=1, 2, \dots, n)$, 即向量组 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 是方程组的解向量, 从而它们可由 $Ax=0$ 的基础解系线性表示. 故 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 的秩不大于 $n-R(A)$ (基础解系所含解向量个数), 也就是 $R(B) \leq n-R(A)$, 或 $R(B)+R(A) \leq n$.

7. 解 1. 方程组(I)的基础解系为 $(0, 0, 1, 0)^T, (1, -1, 0, -1)^T$; 且

$$(-1, 2, 2, 1)^T - (0, 1, 1, 0)^T = (0, 0, 1, 0)^T - (1, -1, 0, -1)^T = (-1, 1, 1, 1)^T$$

因此, $(-1, 1, 1, 1)^T$ 是(I)和(II)两方程组的公共非 0 解, 又向量组 $(0, 1, 1, 0)^T, (-1, 2, 2, 1)^T, (0, 0, 1, 0)^T, (1, -1, 0, -1)^T$ 的秩为 3, 因此, 它们只有一个线性无关的公共非 0 向量(交空间的维数为 1). 因此, 所有非 0 公共解为

$$x = c(-1, 1, 1, 1)^T, (c \text{ 是不为 } 0 \text{ 的任意数})$$

解 2. 记(I)的通解为 $-k_3(0, 0, 1, 0)^T - k_4(1, -1, 0, -1)^T$, 那么公共解是

$k_1(0, 1, 1, 0)^T + k_2(-1, 2, 2, 1)^T = -k_3(0, 0, 1, 0)^T - k_4(1, -1, 0, -1)^T$, 得到关于 k_1, k_2, k_3, k_4 的方程组:

$$\begin{cases} -k_2 + k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_4 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_2 - k_4 = 0 \end{cases}$$

系数矩阵的秩为 3, 有基础解系为

$$(k_1, k_2, k_3, k_4)^T = (-1, 1, 1, 1)^T.$$

因而方程组(I)和(II)有公共解:

$$x = c(-1, 1, 1, 1)^T$$

与解 1 的结果一致.

8. 证明: 令 $k_0\beta + k_1(\alpha_1 + \beta) + \dots + k_t(\alpha_t + \beta) = 0$ (1)

两边左乘矩阵 A 可得

$$(k_0 + k_1 + \dots + k_t)A\beta = 0$$

由于 $A\beta \neq 0$, 故 $k_0 + k_1 + \dots + k_t = 0$, 代入(1)可得

$$k_1\alpha_1 + \dots + k_t\alpha_t = 0$$

由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ 线性无关, 故 $k_1 = k_2 = \dots = k_t = 0$, 从而必有 $k_0 = 0$, 即 $\beta, \alpha_1 + \beta, \dots, \alpha_t + \beta$

线性无关.

习题一

1. A、B、C三类商品去年和今年的价格用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 90 & 50 \\ 120 & 150 \end{pmatrix}.$$

2. (1) 该线性方程组的系数矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, 增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- (2) 该线性方程组的系数矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3. 矩阵A的完全形式为 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

4. 既是上三角形矩阵, 又是下三角形矩阵的3阶矩阵的一般形式为

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

习题二

$$1. (1) 3A - 2C = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 22 & 14 \\ -2 & -5 & -6 \\ 12 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) (A+C)B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 17 & 15 \\ 1 & 3 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$AB+CB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 17 & 15 \\ 1 & 3 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

所以 $(A+C)B = AB+CB$.

$$(AB)^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

从而 $(AB)^T = B^T A^T$.

$$2. \quad 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 3X + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow 3X = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow 3X = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{于是,} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{所以} \quad \begin{cases} x_1 = -6z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3 \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3 \end{cases}.$$

$$4. (1) \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 10.$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ -1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 20 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$(5) \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 & a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)x_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3)x_2 + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)x_3$$

5. 证明: (数学归纳法)

当 $k=2$ 时, 有 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

假设 $k=n-1$ 时, 结论成立, 那么

$$\text{当 } k=n \text{ 时, } A^n = A^{n-1} A = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{由归纳假设知, } A^k = \begin{pmatrix} 1 & k\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k \text{ 为正整数.}$$

6. 证明: (数学归纳法)

$$\text{当 } k=2 \text{ 时, 有 } A^2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

假设 $k=n-1$ 时, 结论成立, 那么

$$\text{当 } k=n \text{ 时, } A^n = A^{n-1} A = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta \cos \theta - \sin(n-1)\theta \sin \theta & -\cos(n-1)\theta \sin \theta - \sin(n-1)\theta \cos \theta \\ \sin(n-1)\theta \cos \theta + \cos(n-1)\theta \sin \theta & -\sin(n-1)\theta \sin \theta + \cos(n-1)\theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

$$\text{由归纳假设知, } A^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}, \quad k \text{ 为正整数.}$$

7. 证明: 由 A 为对称矩阵知, $(B^T A B)^T = B^T A^T (B^T)^T = B^T A^T B = B^T A B$,

故有 $B^T A B$ 是对称矩阵.

8. 证明: 充分性 设 $AB = BA$, 由 A, B 是 n 阶对称矩阵,

则有 $(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T = AB$, 从而 AB 是对称矩阵.

必要性 设 AB 是对称性矩阵, 即 $(AB)^T = AB$,

$$9. \text{ 解: 记 } B = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -6 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 10 & -7 \\ 11 & -7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & -6 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{于是, } B^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 10 & -7 \\ 11 & -7 & 10 \end{pmatrix} = B, \quad C^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -C$$

故 B 是对称性矩阵, C 是反对称性矩阵.

$$\text{而且 } B + C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 5 & 10 & -7 \\ 11 & -7 & 10 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 7 & -6 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

$$10. \text{ 解: (1) 设 } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ 使得}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I,$$

$$\text{则 } \begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ 4a + 3b = 0 \\ 3c + 2d = 0 \\ 4c + 3d = 1 \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} 3a + 4c = 1 \\ 3b + 4d = 0 \\ 2a + 3c = 0 \\ 2b + 3d = 1 \end{cases}$$

$$\text{于是, } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{故矩阵 } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ 可逆, 且逆矩阵为 } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 若侵犯了您的版权利益, 敬请来信告知!

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I,$$

$$\text{则} \begin{cases} 2a+4b=1 \\ 5a+10b=0 \\ 2c+4d=0 \\ 5c+10d=1 \end{cases} \quad \text{且} \quad \begin{cases} 2a+5c=1 \\ 2b+5d=0 \\ 4a+10c=0 \\ 4b+10d=1 \end{cases}$$

$$\text{于是,} \begin{cases} a+2b=\frac{1}{2} \\ a+2b=0 \\ c+2d=0 \\ c+2d=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{矛盾}$$

故矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ 不可逆.

11. 解: A, B 两个工厂的年度总产值用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 200 & 300 & 400 \\ 150 & 200 & 250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 1100 \end{pmatrix}.$$

$$12. \text{解: } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix},$$

归纳猜测 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. 下面证明我们的结论

由前面计算知, 对 $n=1, 2, 3, 4$ 时, 结论成立

假设 $n=k-1$ ($k \geq 2$) 时, 结论成立, 那么

$$\text{当 } n=k \text{ 时, 有 } A^k = A^{k-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 2^{k-1} - 1 \\ 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

$$\text{故我们有 } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

$$13. \quad \text{解: } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{归纳假设 } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 下面证明我们的结论}$$

由上面计算知, 当 $n=1, 2, 3, 4$ 时, 结论成立.

现在假设 $n=k-1$ ($k \geq 2$) 时, 结论成立, 那么

当 $n=k$ 时, 有

$$A^k = A^{k-1} A = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & \frac{(k-1)(k-2)}{2} \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{故我们有 } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

习题三

$$1. \quad (1) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & O \\ O & B_1 B_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ O & C_1 \\ O & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 I & A_1 B_2 + I C_2 \\ O & C_1 C_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad (1) \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & B_1 \end{pmatrix}, \quad \text{于是}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & B_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{故有 } A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \text{ 设 } A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ & & & a_s \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } a_1 a_2 \cdots a_s \neq 0.$$

$$\text{于是, } A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & \\ & a_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & a_s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{1}{a_s} \end{pmatrix}.$$

3. 解: $A^2 + A + I = O$ 的两边同左乘以 A^{-1} 得

$$A^{-1}(A^2 + A + I) = A^{-1}O \Rightarrow A^{-1}A^2 + A^{-1}A + A^{-1}I = O$$

$$\Rightarrow A + I + A^{-1} = O$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -A - I$$

4. 解: 设 $D = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ E_1 & B_1 \end{pmatrix}$, 使得 $DD = I$, 即