

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

课后答案网
www.hackshp.cn

高等代数与解析几何 (下) 习题解答

同济大学, 应用数学系

2003 年 5 月

注意：习题答案可能有错仅作参考！章节与教课书的章节有一点差异，大多数情况是答案的章加一等于教课书的章.

目 录

第五章 习题答案	4
习题 5.1	4
习题 5.2	5
习题 5.3	6
习题 5.4	9
习题 5.5	10
习题 5.6	11
补充题 5	11
第六章 习题答案	14
习题 6.1	14
习题 6.2	16
习题 6.3	20
习题 6.4	23
习题 6.5	27
补充题 6	30
第七章 习题答案	34
习题 7.1	34
习题 7.2	36
习题 7.3	37
习题 7.4	38
补充题 7	40
第八章 习题答案	42
习题 8.1	42
习题 8.2	44
习题 8.3	45
习题 8.4	46
习题 8.5	47
习题 8.6	49
补充题 8	50
第九章 习题答案	54
习题 9.1	54
习题 9.2	56
习题 9.3	57
习题 9.4	59
补充题 9	62

第五章 习题答案

习题 5.1

1. 检验下述集合关于所规定的运算是否构成实数域上的线性空间？

(1) 次数等于 $n(n \geq 1)$ 的全体实系数多项式所组成的集合关于多项式的加法及实数与多项式的数量乘法；

(2) 设 A 是一个 n 级方阵， A 的实系数的多项式 $f(A)$ 的全体所组成的集合，关于多项式的加法及数量乘法；

(3) 全体实对称（反对称、上三角）矩阵，关于矩阵的加法及数量乘法；

(4) 平面上不平行于已知向量 α 的所有向量所组成的集合，关于向量的加法及实数与向量的数量乘法；

(5) $V = \{(a, b) | a, b \in R\}$ ，定义加法及数量乘法为；

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2)$$

$$k(a, b) = (ka, kb + \frac{k(k-1)}{2}a^2);$$

(6) 所有平面向量所组成的集合，关于通常的向量加法及如下定义的数量乘法： $k\alpha = 0$ ；

(7) 所有平面向量所组成的集合，关于通常的向量加法及如下定义的数量乘法： $k\alpha = \alpha$ ；

(8) 全体正实数所组成的集合，定义加法及数量乘法为：

$$a \oplus b = ab \quad k\alpha = \alpha^k;$$

解：要说明一个集合关于所给的运算构成某个数域上的线性空间，应该逐条验证这些运算满足线性空间定义中的 8 个条件；但是若要说明它不够成线性空间，则只需指出它不满足的一个条件或性质即可。在下面的答案中，若是线性空间，我们只说“是”，而略去逐条的验证，请同学补齐；若不是，我们则具体指明理由。

(1) 不是，因为两个 n 次多项式的和未必仍是 n 次多项式；

(2) 是；

(3) 是；

(4) 不是，因为两个不平行于 α 的向量的和有可能平行于向量 α ；

(5) 是；

(6) 不是，因为当 $\alpha \neq 0$ 时， $1\alpha = 0 \neq \alpha$ ，所以不满足条件 $1\alpha = \alpha$ ；

(7) 不是，因为当 $\alpha \neq 0$ 时， $0\alpha = \alpha \neq 0$ ，所以性质 $0\alpha = 0$ ；

(8) 是。

2. 在线性空间中，证明：

(1) 若 $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ ，则 $\beta = \gamma$ ；

(2) 若 $\alpha + \beta = \gamma$ ，则 $\alpha = \beta - \gamma$ ；

(3) $k0 = 0$ ；

(4) $k(\alpha - \beta) = k\alpha - k\beta$ 。

证明：(1) 因为元素 α 有负元 $-\alpha$ ，等式 $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ 两端加上 $-\alpha$ 并利用线性空间的性质得：左端 $= -\alpha + (\alpha + \beta) = (-\alpha + \alpha) + \beta = 0 + \beta = \beta$ ；

右端 $= -\alpha + (\alpha + \gamma) = (-\alpha + \alpha) + \gamma = 0 + \gamma = \gamma$ ，所以 $\beta = \gamma$ ；

(2) 等式 $\alpha + \beta = \gamma$ 两端加上元素 β 的负元 $-\beta$ 并利用线性空间的性质得： $\alpha = \alpha + 0 = \alpha + (\beta - \beta) = (\alpha + \beta) - \beta = \gamma - \beta$ 。

(3) 由性质得： $k0 = k(0 + 0) = k0 + k0$ ；两端加上 $k0$ 的负元得： $k0 = 0$ 。

(4) 由性质得： $k(\alpha - \beta) + k\beta = k\alpha + (-k\beta + k\beta) = k\alpha + 0 = k\alpha$ ；两端加上 $k\beta$ 的负元得： $k(\alpha - \beta) = k\alpha - k\beta$ 。

习题 5.2

1. 已知元素在数域 F 中的 $1 \times n$ 矩阵的全体构成数域 F 上的线性空间 F^n ，问

$$W_1 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in F, i = 1, 2, \dots, n, a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0\} \quad \text{与}$$

$$W_2 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in F, i = 1, 2, \dots, n, a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1\}$$

是否都是 F^n 的子空间。

解: (1) W_1 是 F^n 的子空间。

证明: 因为对于任意的 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in W_1$ ，有 $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0, b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0$ ，从而对于任意的 $k, \ell \in F$ ，有 $ka_1 + \ell b_1 + ka_2 + \ell b_2 + \dots + ka_n + \ell b_n = k(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \ell(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 0$ ，所以 $k(a_1, a_2, \dots, a_n) + \ell(b_1, b_2, \dots, b_n) = (ka_1 + \ell b_1, ka_2 + \ell b_2, \dots, ka_n + \ell b_n) \in W_1$ ，所以 W_1 是 F^n 的子空间。

(2) W_2 不是 F^n 的子空间。因为对于任意的 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in W_2$ ， $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1, b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1$ ，从而 $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 2 \neq 1$ ，所以 $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \notin W_2$ 。

2. 在下列向量空间的子集中，哪一个是所属空间的子空间？

(1) 在 F^n 中元素都是整数的所有向量的集合；

(2) 在平面上，位于 x 轴与位于 y 轴上的向量所组成的集合；

(3) 平面上，以原点为起点，终点在第一象限中的所有向量所组成的集合；

(4) 在向量空间中，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的所有一切可能的线性组合所组成的集合。

解: (1) 不是 F^n 的子空间。因为对于 $(1, 1, \dots, 1) \in F^n$ 和 $\frac{1}{2} \in F$ ， $\frac{1}{2}(1, 1, \dots, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ 的元素已不是整数，从而在 F^n 中元素都是整数的所有向量的集合对于数量乘法不封闭，所以不能构成 F^n 的子空间；

(2) 不是平面的子空间。因为位于 x 轴上的向量和位于 y 轴上的向量之和，一般说来既不位于 x 轴，也不位于 y 轴上，即所给子集对于向量的加法不封闭；

(3) 不是平面的子空间。因为一个非零负数与终点位于第一象限的向量的积向量的终点位于第四象限，而不是第一象限，所以所给集合对于数量乘法不封闭。

(4) 是平面的子空间。容易看到，所给集合关于向量的加法以及数与向量的乘法都是封闭的。

3. 设在通常空间 R^3 中，有过原点的三条直线 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 ，由本节例 3 知，它们都是 R^3 的子空间。问 $\ell_1 + \ell_2, \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ 能构成哪些类型的子空间。请全部列举出来。

解: (1) 当 ℓ_1, ℓ_2 共线时，两直线 ℓ_1 与 ℓ_2 重合，此时 $\ell_1 + \ell_2$ 是一维子空间；

(2) 当 ℓ_1, ℓ_2 不共线时， $\ell_1 + \ell_2$ 就是由直线 ℓ_1 和 ℓ_2 所确定的平面，是一个二维子空间；

(3) 当 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 共面时， $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ 是 1 维或者 2 维子空间。当其维数是 1 时， $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ 就是 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 所在的同一条直线；当其维数是 2 时， $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ 就是其中两条不共线直线所确定的平面；

(4) 当 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 不共面时， $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ 是一个 3 维子空间，它就是 R^3 本身。

4. 叙述并证明线性空间 V 的子空间 W_1 与 W_2 的并 $W_1 \cup W_2$ 仍为 V 的子空间的充分必要条件。

解: 线性空间 V 的子空间 W_1 与 W_2 的并 $W_1 \cup W_2$ 仍为 V 的子空间的充分必要条件为 $W_1 \subseteq W_2$ 或者 $W_2 \subseteq W_1$ 。

证明: 充分性显然，只证必要性如下: 若 $W_1 \cup W_2$ 是 V 的子空间，则必有 $W_1 \subseteq W_2$ 或者 $W_2 \subseteq W_1$ 。否则，存在一个向量 $\alpha \in W_1$ 但 $\alpha \notin W_2$ 和一个向量 $\beta \in W_2$ 但 $\beta \notin W_1$ 。因 $W_1 \cup W_2$ 是 V 的子空间，从而有 $\alpha + \beta \in W_1$ 或者 $\alpha + \beta \in W_2$ 。无论哪一种情况，都 α 与 β 的取法矛盾！证毕。

习题 5.3

1. 设 S_1 与 S_2 是线性空间 V 的两个子集, 证明:

(1) 当 $S_1 \subseteq S_2$ 时, $\text{Span}(S_1) \subseteq \text{Span}(S_2)$;

(2) $\text{Span}(S_1 \cup S_2) = \text{Span}(S_1) + \text{Span}(S_2)$;

(3) $\text{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \text{Span}(S_1) \cap \text{Span}(S_2)$ 。

证明: (1) 对于任意的 $\alpha \in \text{Span}(S_1)$, 由定义, α 是 S_1 中某些元素的线性组合, 但 $S_1 \subseteq S_2$, 所以 α 也是 S_2 中某些元素的线性组合, 从而 $\alpha \in \text{Span}(S_2)$, 故 $\text{Span}(S_1) \subseteq \text{Span}(S_2)$ 。

(2) 对于任意的 $\alpha \in \text{Span}(S_1 \cup S_2)$, 由定义, 存在某些 $\beta_i \in S_1$ 和 $\gamma_j \in S_2$ 使得 $\alpha = \sum_i k_i \beta_i + \sum_j \ell_j \gamma_j$, 其中 $k_i, \ell_j \in F$ 。但 $\sum_i k_i \beta_i \in \text{Span}(S_1)$, $\sum_j \ell_j \gamma_j \in \text{Span}(S_2)$, 所以 $\alpha \in \text{Span}(S_1) + \text{Span}(S_2)$ 。再由 $\alpha \in \text{Span}(S_1 \cup S_2)$ 的任意性可得: $\text{Span}(S_1 \cup S_2) = \text{Span}(S_1) + \text{Span}(S_2)$ 。

反之, 对于任意的 $\alpha \in \text{Span}(S_1) + \text{Span}(S_2)$, 由子空间和的定义, 存在 $\beta = \sum_i k_i \beta_i \in \text{Span}(S_1)$ 和 $\gamma = \sum_j \ell_j \gamma_j$ (其中 $\beta_i \in S_1, \gamma_j \in S_2$) 使得 $\alpha = \beta + \gamma$, 即 α 可由 $S_1 \cup S_2$ 中的元素线性表出, 于是 $\alpha \in \text{Span}(S_1 \cup S_2)$ 。由 $\alpha \in \text{Span}(S_1) + \text{Span}(S_2)$ 的任意性得: $\text{Span}(S_1) + \text{Span}(S_2) \subseteq \text{Span}(S_1 \cup S_2)$ 。这样我们证明了 $\text{Span}(S_1 \cup S_2) = \text{Span}(S_1) + \text{Span}(S_2)$ 。

(3) 由 $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$ 和 $S_1 \cap S_2 \subseteq S_2$ 以及 (1) 可得: $\text{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \text{Span}(S_1)$ 并且 $\text{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \text{Span}(S_2)$, 所以有 $\text{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \text{Span}(S_1) \cap \text{Span}(S_2)$ 。

2. 证明:

(1) $\{\alpha, \beta\}$ 线性无关的充分必要条件是 $\{\alpha + \beta, \alpha - \beta\}$ 线性无关;

(2) $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 线性无关的充分必要条件是 $\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \gamma\}$ 线性无关。

证明: (1) 显然 $\{\alpha + \beta, \alpha - \beta\}$ 可由 $\{\alpha, \beta\}$ 线性表出。写成矩阵的形式。即: $(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 。但矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 可逆, 从而向量组 $\{\alpha + \beta, \alpha - \beta\}$ 与 $\{\alpha, \beta\}$ 等价, 所以 $\{\alpha + \beta, \alpha - \beta\}$ 线性无关当且仅当 $\{\alpha, \beta\}$ 线性无关。

(2) $(\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。但矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 从而向量组 $\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \gamma\}$ 与 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 等价, 所以 $\{\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \gamma\}$ 线性无关当且仅当 $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ 线性无关。

3. 证明在实函数空间中 $1, \cos^2 t, \sin^2 t$ 线性相关。

证明: 显然 $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 1$ 不全为零, 并且 $k_1 1 + k_2 \cos^2 t + k_3 \sin^2 t = -1 + (\cos^2 t + \sin^2 t) = 0$, 所以 $1, \cos^2 t, \sin^2 t$ 线性相关。

4. 如果 f_1, f_2, f_3 是实数域上一元多项式全体所成的线性空间 $R[x]$ 中三个互素的多项式, 但其中任意两个都不互素, 那么它们线性无关。试证之。

证明: 若 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 线性相关, 则必有其中某个多项式可由其余两个线性表出, 不妨设 $f_1(x) = k_1 f_2(x) + k_2 f_3(x)$ 。设 $f_2(x), f_3(x)$ 的最大公因式为 $p(x)$, 则 $p(x) | f_1(x)$, 并且 $p(x)$ 的次数大于等于 1, 与已知条件 f_1, f_2, f_3 互素矛盾! 所以 f_1, f_2, f_3 线性无关。

5. 证明:

(1) 若 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 线性相关, 则

$\{\alpha_1, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 及 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i + c\alpha_j, \dots, \alpha_k\}, i \neq j$ 也线性相关。

(2) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 线性无关, 则

$\{\alpha_1, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 及 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i + c\alpha_j, \dots, \alpha_k\}, i \neq j$ 也线性无关。

证明: (1) 显然 $\{\alpha_1, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 可由 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 线性表出, 并且 $(\alpha_1, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_k) = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k) P_i(c)$, 其中 $P_i(c)$ 为第二类初等方阵, 所以当 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 线性相关时, $\{\alpha_1, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 也线性相关。

同样地, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i + c\alpha_j, \dots, \alpha_k\}$ 也可由 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 线性表出, 并且 $(\alpha_1, \dots, \alpha_i + c\alpha_j, \dots, \alpha_k) = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k)P(j(c), i)$, 其中 $P(j(c), i)$ 为第三类初等方阵, 所以当 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 线性相关时, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i + c\alpha_j, \dots, \alpha_k\}, i \neq j$

也线性相关。

(2) 当 $c \neq 0$ 时, $P_i(c)$ 为可逆矩阵, 由 (1) 可知, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 与 $\{\alpha_1, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 等价, 所以 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 线性无关的充分必要条件是 $\{\alpha_1, \dots, c\alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 线性无关; 同理可得, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k\}$ 线性无关的充分必要条件是 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i + c\alpha_j, \dots, \alpha_k\}$ 线性无关。

6. 设 S 是数域 F 上线性空间 V 的一个线性无关子集, α 是 V 中一个向量, $\alpha \notin S$, 则 $S \cup \{\alpha\}$ 线性相关的充分必要条件是: $\alpha \in \text{Span}(S)$ 。

证明: 必要性: 若 $S \cup \{\alpha\}$ 线性相关, 由于 S 线性无关, 必有 α 可由 S 线性表出, 从而 $\alpha \in \text{Span}(S)$ 。

充分性: 若 $\alpha \in \text{Span}(S)$, 则 α 可由 S 线性表出, 从而 $S \cup \{\alpha\}$ 线性相关。

7. 设 W 是线性空间 V 的子空间, 且 $\dim W = \dim V$, 证明: $W = V$ 。

证明: 反证法: 若 $W \neq V$, 则 W 是线性空间 V 的真子空间, 从而存在 $\alpha \in V$, 使得 $\alpha \notin W$ 。设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 为 W 的一组基, 则 α 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 从而 $\{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ 为 V 中 $s+1$ 个线性无关的向量, 于是 $\dim V \geq s+1 > \dim W$, 与已知 $\dim W = \dim V$ 矛盾!

8. 求下列线性空间的维数与一组基:

(1) $M_n(F)$ 中全体对称 (反对称、上三角) 矩阵作成的数域 F 上的线性空间;

(2) 习题 5.1 题 1(8) 中的线性空间;

(3) 实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的线性空间,

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{-1+\sqrt{2}i}{2}.$$

解: (1) 容易证明 $\{E_{ij} + E_{ji} (i \geq j)\}$ 是 $M_n(F)$ 中全体对称矩阵组成的子空间的一组基, 从而其维数为 $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$; 而 $\{E_{ij} - E_{ji} (i > j)\}$ 是 $M_n(F)$ 中全体反对称矩阵组成的子空间的一组基, 从而其维数为 $1+2+\dots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$; $\{E_{ij} (i \geq j)\}$ 是 $M_n(F)$ 中全体上三角矩阵组成的子空间的一组基, 从而其维数为 $1+2+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 。

(2) 容易知道, 任意一个正数 a 都是一组基, 从而其维数为 1。

(3) 容易证明: $\{E, A, A^2\}$ 是该线性空间的一组基, 从而其维数为 3。

9. 求一个次数不超过 2 的多项式 $\varphi(x)$, 使得 $\varphi(1) = 8, \varphi(2) = 5, \varphi(3) = -4$ 。

解: 次数不超过 2 的多项式的全体组成一个线性空间, 其维数为 3, $\{1, x, x^2\}$ 为其一组基。由已知, 多项式 $\varphi(x)$ 在该线性空间中, 它可由 $\{1, x, x^2\}$ 线性表出, 设 $\varphi(x) = a + bx + cx^2$, 则

$$\text{由已知条件得一线性方程组: } \begin{cases} a + b + c = 8 \\ a + 2b + 4c = 5 \\ a + 3b + 9c = -4 \end{cases}. \text{ 解之, 得: } a = 5, b = 6, c = -3, \text{ 所以}$$

$$\varphi(x) = 5 + 6x - 3x^2.$$

10. 在 R^4 中, 求向量 ξ 在基底 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标, 其中

$$(1) \varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1), \varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1)$$

$$\varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1), \varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1)$$

$$\xi = (1, 2, 1, 1);$$

$$(2) \varepsilon_1 = (1, 1, 0, 1), \varepsilon_2 = (2, 1, 3, 1)$$

$$\varepsilon_3 = (1, 1, 0, 0), \varepsilon_4 = (0, 1, -1, -1)$$

$$\xi = (0, 0, 0, 1).$$

解: (1) 设 $\xi = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 + k_4\xi_4$, 则得一线性方程组:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 1 \\ k_1 + k_2 - k_3 - k_4 = 2 \\ k_1 - k_2 + k_3 - k_4 = 1 \\ k_1 - k_2 - k_3 + k_4 = 1 \end{cases}$$

解之, 得 $k_1 = \frac{5}{4}, k_2 = \frac{1}{4}, k_3 = -\frac{1}{4}, k_4 = -\frac{1}{4}$, 于是 ξ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.

(2) 完全类似于 (1), 可得 ξ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标为 $(1, 0, -1, 0)$.

11. 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间, B 是 V 的一组基, 又设 $S = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\} (m \leq n)$ 是 V 的一个线性无关的子集. 证明: 存在 B 的一个子集 S_1 , S_1 中恰有 $n - m$ 个向量, 使得 $V = \text{Span}(S \cup S_1)$ 且 $S_1 \cup S$ 是 V 的一组基.

证明: 归纳法, 我们对 $n - m$ 进行归纳. 当 $n - m = 0$ (即 $m = n$) 时, 结论显然成立. 假设当 $n - m = k$ 时, 结论成立. 当 $n - m = k + 1$ 时, 由于 $m < n$, 一定存在某个元素 $\alpha_0 \in B$ 使得 α_0 不能由 $S = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ 线性表出, 从而若令 $\bar{S} = S \cup \{\alpha_0\} = \{\alpha_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$, 则 $\bar{S}$ 线性无关, 并且含有 $m + 1$ 各向量. 于是 $n - (m + 1) = n - m - 1 = k$, 由归纳假设, 存在 B 中 k 个向量 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, 使得 $V = \text{Span}(S \cup \{\alpha - 0\} \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\})$, 并且 $S \cup \{\alpha - 0\} \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ 是 V 的一组基. 令 $S_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, 则 S_1 是 B 的一个子集, 并且其中恰好含有 $n - m = k + 1$ 个向量, 使得 $V = \text{Span}(S \cup S_1)$ 且 $S \cup S_1$ 是 V 的一组基. 这样, 我们证明了当 $n - m = k + 1$ 时, 结论依然成立.

12. 在 R^4 中, 求由向量 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 所张成的子空间的一组基与维数, 这里

$$(1) \alpha_1 = (2, 1, 3, 1), \alpha_2 = (1, 2, 0, 1)$$

$$\alpha_3 = (-1, 1, -3, 0), \alpha_4 = (1, 1, 1, 1)$$

$$(2) \alpha_1 = (2, 1, 3, -1), \alpha_2 = (-1, 1, -3, 1)$$

$$\alpha_3 = (4, 5, 3, -1), \alpha_4 = (1, 5, -3, 1).$$

解: 以 $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为列作矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 则 $\dim \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \text{rank}(A)$, 而矩阵 A 的列向量组的任意一个极大线性无关组, 都可取做由 $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 张成的子空间的一组基. 利用此方法可得:

(1) $\dim \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是一组基;

(2) $\dim \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = 2$, α_1, α_3 是一组基.

13. 在 R^4 中, 求由齐次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间的一组基与维数.

解: 解空间的维数为 2, 为其一组基.

14. 求由向量 α_i 生成的子空间与由 β_i 生成的子空间的交的一组基与维数以及和的一组基与维数:

$$(1) \alpha_1 = (1, 2, 10), \beta_1 = (2, -1, 0, 1)$$

$$\alpha_2 = (-1, 1, 1, 1), \beta_2 = (1, -1, 3, 7);$$

$$(2) \alpha_1 = (1, 1, 0, 0), \beta_1 = (0, 0, 1, 1)$$

$$\alpha_2 = (1, 0, 1, 1), \beta_2 = (0, 1, 1, 0)$$

$$(3) \alpha_1 = (1, 2, -1, -2), \beta_1 = (2, 5, -6, -5)$$

$$\alpha_2 = (3, 1, 1, 1)$$

$$\alpha_3 = (-1, 0, 1, -1), \beta_2 = (-1, 2, -7, 3)$$

解: (1) 显然, $\dim \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\} = \text{Rank}(\alpha_1, \alpha_2) = \text{Rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$, 并且 α_1, α_2 是

$\text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 的一组基。同理: $\dim \text{Span}\{\beta_1, \beta_2\} = 2$ 并且 β_1, β_2 是 $\text{Span}\{\beta_1, \beta_2\}$ 的一组基。
 $\dim(\text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\} + \text{Span}\{\beta_1, \beta_2\}) = \dim \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\} = \text{Rank}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = 3$, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 为其一组基。这样, 我们得到交子空间的维数为 $2 + 2 - 3 = 1$ 。交子空间中向量的形式为:
 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = \ell_1\beta_1 + \ell_2\beta_2$ 。解方程组 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 - \ell_1\beta_1 - \ell_2\beta_2 = 0$ 得一非零解 $k_1 = 1, k_2 = -4, \ell_1 = 3, \ell_2 = -1$ 。于是 $1\alpha_1 - 4\alpha_2 = 3\beta_1 - \beta_2 = (5, -2, -3, -4)$ 就是交子空间的一组基。

(2) 方法同 (1), 得 $\dim \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\} = 2$, α_1, α_2 为其基; $\dim \text{Span}\{\beta_1, \beta_2\} = 2$, β_1, β_2 为其基; 而 $\dim(\text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2\} + \text{Span}\{\beta_1, \beta_2\}) = 4$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 为其基。从而交子空间的维数为 $2 + 2 - 4 = 0$, 所以交子空间为 $\{0\}$ 。(3) 方法同 (1), 可得 $\dim \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为其基; $\dim \text{Span}\{\beta_1, \beta_2\} = 2$, β_1, β_2 为其基; $\dim(\text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} + \text{Span}\{\beta_1, \beta_2\}) = 4$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 为其基。交子空间的维数为 $3 + 2 - 4 = 1$, $(2, 5, -6, -5)$ 为交子空间的基。

习题 5.4

1. R^4 中, 求由基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 到基 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ 的过渡矩阵, 并求向量 ξ 在指定基下的坐标。

(1) $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0), \eta_1 = (2, 1, -1, 1)$
 $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0), \eta_2 = (0, 3, 1, 0)$
 $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \eta_3 = (5, 3, 2, 1)$
 $\varepsilon_4 = (0, 0, 0, 1), \eta_4 = (6, 6, 1, 3)$
 $\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ 下的坐标;

(2) $\varepsilon_1 = (1, 2, -1, 0), \eta_1 = (2, 1, 0, 1)$
 $\varepsilon_2 = (1, -1, 1, 1), \eta_2 = (0, 1, 2, 2)$
 $\varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 1), \eta_3 = (-2, 1, 1, 2)$
 $\varepsilon_4 = (-1, -1, 0, 1), \eta_4 = (1, 3, 1, 2)$
 $\xi = (1, 0, 0, 0)$ 在 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 下的坐标;

(3) $\varepsilon_1 = (1, 1, 1, 1), \eta_1 = (1, 1, 0, 1)$
 $\varepsilon_2 = (1, 1, -1, -1), \eta_2 = (2, 1, 3, 1)$
 $\varepsilon_3 = (1, -1, 1, -1), \eta_3 = (1, 1, 0, 0)$
 $\varepsilon_4 = (1, -1, -1, 1), \eta_4 = (0, 1, -1, -1)$
 $\xi = (1, 0, 0, -1)$ 在 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ 下的坐标。

解: (1) 基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 到基 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ 的过渡矩阵为: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 。

$\xi = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ 下的坐标为 $A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, 其中 $A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 12 & 9 & -27 & -33 \\ 1 & 12 & -9 & -23 \\ 9 & 0 & 0 & -18 \\ -7 & -3 & 9 & 26 \end{pmatrix}$ 。

(2) 基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 到基 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ 的过渡矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

从 $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ 到 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 的过渡矩阵为以 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 为列组

成的矩阵 A , 其逆为 $A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 5 \\ 5 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, 从而 $\xi = (1, 0, 0, 0)$ 在 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 下的

坐标为 $(1, 0, 0, -1)A^{-1} = (\frac{3}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{2}{13}, -\frac{3}{13})$ 。

(3) 过渡矩阵为: $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\xi = (1, 0, 0, -1)$ 在 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ 下的坐标为

$(-2, -\frac{1}{2}, 4, -\frac{3}{2})$ 。

2. 在上题 (1) 中求一非零向量 ξ , 使它在 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ 与 $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ 下有相同的坐标。

答案: $\xi = (1, 1, 1, -1)$ 。

习题 5.5

1. 设 $M(R)$ 是全体实函数所成的实数域上的线性空间, W_1 是全体偶函数所成的子集, W_2 是全体奇函数所成的子集。证明: W_1 与 W_2 是 $M(R)$ 的子空间且 $M(R) = W_1 \oplus W_2$ 。

证明: 对任意的 $f(x), g(x) \in W_1$, 有 $f(-x) = f(x), g(-x) = g(x)$ 。于是, 对于任意实数 $k, \ell \in R$, 有 $(kf + \ell g)(-x) = kf(-x) + \ell g(-x) = kf(x) + \ell g(x) = (kf + \ell g)(x)$, 即 $(kf + \ell g)(x) \in W_1$, 所以 W_1 是 $M(R)$ 的子空间; 同理可证: W_2 也是 $M(R)$ 的子空间。若 $f(x) \in W_1 \cap W_2$, 则 $f(-x) = f(x)$ 和 $f(-x) = -f(x)$ 对于任意的 $x \in R$ 成立, 从而 $f(x) \equiv 0$, 即 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 。另一方面, 对于任意的 $f(x) \in M(R)$, $f(x) \equiv \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 恒成立, 注意到 $\frac{f(x) + f(-x)}{2} \in W_1$ 和 $\frac{f(x) - f(-x)}{2} \in W_2$, 得: $M(R) = W_1 + W_2$ 。这样我们证明了: $M(R) = W_1 \oplus W_2$ 。

2. 设 W_1 与 W_2 分别是齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间。证明: $R^n = W_1 \oplus W_2$, 这里 R 是实数域。

证明: 显然, 若 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W_1 \cap W_2$, 则有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, 即 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$; 另一方面, 对任意的 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in R^n$, 有 $\alpha = (\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \cdots, \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}) \in W_1$, $\beta = (a_1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, a_2 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \cdots, a_n - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}) \in W_2$ 并且 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \alpha + \beta$, 于是 $R^n = W_1 + W_2$ 。这样由直和的定义, 得 $R^n = W_1 \oplus W_2$ 。

3. 如果 $V = V_1 \oplus V_2$, 而 $V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$, 证明: $V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2$ 。

证明: 对任意的 $\alpha \in V$, 由 $V = V_1 \oplus V_2$ 得, 存在 $\alpha_1 \in V_1$ 和 $\alpha_2 \in V_2$ 使得 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$; 又由 $\alpha_1 \in V_1$ 以及 $V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$ 得, 存在 $\alpha_{11} \in V_{11}$ 和 $\alpha_{12} \in V_{12}$ 使得 $\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12}$, 于是有: $V = V_{11} + V_{12} + V_2$ 。若 $\alpha \in V$ 另有分解: $\alpha = \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_2$, 其中 $\beta_{11} \in V_{11}, \beta_{12} \in V_{12}, \beta_2 \in V_2$, 则由 $V = V_1 \oplus V_2$ 和 $V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$ 知: $\alpha_{11} = \beta_{11}, \alpha_{12} = \beta_{12}, \alpha_2 = \beta_2$, 于是 V 中每一个元素的分解唯一, 于是我们证明了: $V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2$ 。

4. 试用几何空间的例子来说明: 若 U, V, Y 是子空间, 且满足条件 $U \oplus V = X$, $X \supset Y$, 是否必有 $Y = (Y \cap U) \oplus (Y \cap V)$?

解: 未必! 一般来说, 结论不成立。例如, 若令 X 为 2 维平面, U, V 分别为 x, y 坐标轴, Y 为直线 $\ell: x = y$, 则显然有: $U \oplus V = X$ 、 $X \supset Y$; 但 $Y \cap U = \{0\}, Y \cap V = \{0\}$, 所以 $Y \neq Y \cap U \oplus Y \cap V$ 。

习题 5.6

1. 证明性质 (1) – (5)。

证明: (1) 设 $\sigma: V \rightarrow V'$ 是线性空间的同构, 则 $\sigma(0) = \sigma(0+0) = \sigma(0) + \sigma(0)$ 。因为 $\sigma(0) \in V'$ 有负元, 上式两端加上 $-\sigma(0)$, 可得 $\sigma(0) = 0$; 在 $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$ 中取 $k = -1$, 可得 $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$ 。

(2) 由 $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$ 和 $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$ 可得: 对于任意的 $k_1, k_2 \in F$ 和 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, 有 $\sigma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = \sigma(k_1\alpha_1) + \sigma(k_2\alpha_2) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2)$ 。对 r 进行归纳, 可得: $\sigma(k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r) = k_1\sigma(\alpha_1) + \cdots + k_r\sigma(\alpha_r)$ 。

(3) 若线性相关 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, 则存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$, 使得 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$ 。由 (2) 得: $k_1\sigma(\alpha_1) + \cdots + k_r\sigma(\alpha_r) = \sigma(k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r) = \sigma(0) = 0$ 从而 $\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_r)$ 线性相关。反之, 若 $\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_r)$ 线性相关, 则存在不全为零的 $k_1, \cdots, k_r \in F$ 使得 $k_1\sigma(\alpha_1) + \cdots + k_r\sigma(\alpha_r) = 0$ 。同样由 (2) 可得 $\sigma(k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r) = k_1\sigma(\alpha_1) + \cdots + k_r\sigma(\alpha_r) = 0$ 。但 σ 是同构, σ 为双射, 从而 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_r\alpha_r = 0$, 但 $k_1, \cdots, k_r \in F$ 不全为零, 所以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性相关。

(4) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in V$ 为 V 的基, 由 (3), $\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_r) \in V'$ 线性无关, 从而 $\dim V \leq \dim V'$; 反之, 设 $\beta_1, \cdots, \beta_t \in V'$ 为 V' 的基, 同样利用 (3) 可得: $\sigma^{-1}(\beta_1), \cdots, \sigma^{-1}(\beta_t) \in V$ 线性无关, 所以又有 $\dim V' \leq \dim V$ 。故 $\dim V = \dim V'$ 。

(5) 设 $\sigma: V \rightarrow V'$ 是线性空间的同构, 则 σ^{-1} 是一个双射。于是对于任意的 $\alpha', \beta' \in V'$, 存在 $\alpha, \beta \in V$ 使得 $\sigma(\alpha) = \alpha', \sigma(\beta) = \beta'$ 。由 $\sigma(\alpha + \beta) = \alpha' + \beta'$ 可知: $\sigma^{-1}(\alpha' + \beta') = \alpha + \beta = \sigma^{-1}(\alpha') + \sigma^{-1}(\beta')$ 。同理, 由 $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha) = k\alpha'$ 可得: $\sigma^{-1}(k\alpha') = k\alpha = k\sigma^{-1}(\alpha')$, 所以线性空间同构 $\sigma: V \rightarrow V'$ 的逆 $\sigma^{-1}: V' \rightarrow V$ 也是线性空间的同构。

设 $\sigma: V_1 \rightarrow V_2$ 和 $\tau: V_2 \rightarrow V_3$ 都是线性空间的同构, 则 σ, τ 都是双射, 从而其乘积 (复合、合成) $\tau \cdot \sigma: V_1 \rightarrow V_3$ 也是双射。对于任意的 $\alpha, \beta \in V_1$ 和 $k \in F$, 有 $\tau \cdot \sigma(\alpha + \beta) = \tau(\sigma(\alpha) + \sigma(\beta)) = \tau \cdot \sigma(\alpha) + \tau \cdot \sigma(\beta)$, $\tau \cdot \sigma(k\alpha) = \tau(\sigma(k\alpha)) = \tau(k\sigma(\alpha)) = k\tau \cdot \sigma(\alpha)$ 。所以线性空间的同构 $\sigma: V_1 \rightarrow V_2$ 和 $\tau: V_2 \rightarrow V_3$ 的乘积 $\tau \cdot \sigma: V_1 \rightarrow V_3$ 仍为线性空间的同构。

2. 证明数域 F 上线性空间之间的同构关系是一个等价关系。

证明: (1) 自反性: 对任意线性空间 V , 容易验证恒等映射 $\mathcal{I}: V \rightarrow V$ 是线性空间的同构;

(2) 对称性: 若 $\sigma: V_1 \rightarrow V_2$ 是线性空间的同构, 由性质 (5), $\sigma^{-1}: V_2 \rightarrow V_1$ 也是线性空间的同构;

(3) 传递性: 若 $\sigma: V_1 \rightarrow V_2$ 和 $\tau: V_2 \rightarrow V_3$ 都是线性空间的同构, 由性质 (5), 其乘积 $\tau \cdot \sigma: V_1 \rightarrow V_3$ 仍为线性空间的同构。

3. 证明实数域作为自身上的线性空间与习题 5.1 中 1(8) 的线性空间同构。

证明: 作映射 $\sigma: R \rightarrow R_+$ 使得 $\sigma(a) = e^a$, 显然 σ 是一个双射, 并且 $\sigma(a+b) = e^{a+b} = e^a e^b = \sigma(a) + \sigma(b)$, 对于任意的 $k \in R$, $\sigma(ka) = e^{ka} = e^k e^a = k \cdot e^a = k \cdot \sigma(a)$ 。所以 $\sigma: R \rightarrow R_+$ 是线性空间的同构。

补充题 5

1. 如在线性空间的定义中, 对零元素存在性这一条再补充 $0 + \alpha = \alpha$, 则定义 5.1.1(1) 中的 (即交换律) 可由其它几条推出, 试证明之。

证明: 对于任意的 $\alpha, \beta \in V$, 有 $2(\alpha + \beta) = 2\alpha + 2\beta = (1+1)\alpha + (1+1)\beta = (1\alpha + 1\alpha) + (1\beta + 1\beta) = (\alpha + \alpha) + (\beta + \beta) = \alpha + (\alpha + \beta) + \beta$ 和 $2(\alpha + \beta) = (1+1)(\alpha + \beta) = 1(\alpha + \beta) + 1(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) + \alpha + \beta = \alpha + (\beta + \alpha) + \beta$, 于是得: $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = \alpha + (\beta + \alpha) + \beta$ 。上式两端从左边加上 $-\alpha$, 并利用 $0 + \gamma = \gamma$ 可得: $(\alpha + \beta) + \beta = (\beta + \alpha) + \beta$; 上式两端从右边加上 $-\beta$ 并利用 $\gamma + 0 = \gamma$ 可得: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ 。

2. 证明定义 5.1.1 中 $1 \cdot \alpha = \alpha$ 这一条可由下列命题代替: $k\alpha = 0$ 的充分必要条件是 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$ 。

证明: 若 “ $k\alpha = 0$ 的充分必要条件是 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$ ” 成立, 我们来证明 “ $1 \cdot \alpha = \alpha$ ”。容易看到 $k \cdot (1 \cdot \alpha + (-\alpha)) = k \cdot (1 \cdot \alpha) + k \cdot (-\alpha) = (k \cdot 1) \cdot \alpha + k \cdot (-\alpha) = k \cdot \alpha + k \cdot (-\alpha) = k \cdot (\alpha + (-\alpha)) = k \cdot 0 = 0$ 。在上式中若取 $k \neq 0$, 则有 $1 \cdot \alpha + (-\alpha) = 0$, 两边加上 α 得: $1\alpha = \alpha$ 。

3. (1) 证明: 在 $F_{n-1}[x]$ 中, $f_i = (x - a_1) \cdots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdots (x - a_n)$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 是一组基, 这里 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$ 互不相同。

(2) 在 (1) 中, 取 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为全体 n 次单位根, 求由基 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 到 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵。

证明: (1) 首先, 容易知道 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 是 $F_{n-1}[x]$ 的一组基, 从而 $F_{n-1}[x]$ 的维数为 n 。只要证明 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关即可。若有一组数 $k_i \in F$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 使得 $K - 1f_1(x) + k_2f_2(x) + \cdots + k_nf_n(x) = 0$, 由多项式相等的定义, 必须有对于任意的 $x \in F$ 上式都成立。取 $x = a_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 可得 $k_if(a_i) = 0$ 。又 $f_i(a_i) \neq 0$, 所以 $k_i = 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 从而 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关。

(2) 注意到 $f_i(x) = \frac{\prod_{k=1}^n (x - a_k)}{(x - a_i)}$ 以及 $a_i^n = 1$, 由多项式的综合除法可得: $f_i(x) = x^{n-1} + a_ix^{n-2} + a_i^2x^{n-3} + \cdots + a_i^{n-2}x + a_i^{n-1}$ 。于是

$$(f_1, f_2, \cdots, f_n) = (1, x, \cdots, x^{n-1}) \begin{pmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基, A 是 $n \times s$ 矩阵,

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$$

证明: $\text{Span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 的维数等于 A 的秩。

证明: 设矩阵 A 的秩为 r , 则 A 的列向量组的秩为 r 。设 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r}$ ($r \leq s$) 为矩阵 A 的列向量组的一个极大线性无关组, 我们只需证明 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$ 为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 的一个极大线性无关组, 就有 $\text{Span}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} = r$ 。对于任意的 j ($1 \leq j \leq s$) 由于矩阵 A 的列向量 A_j 可由 $A_{i_1}, \cdots, A_{i_r}$ 线性表出, 不妨设 $A_j = k_{i_1j}A_{i_1} + \cdots + k_{i_rj}A_{i_r}$, 再利用已知条件: $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$ 可得: $\beta_j = k_{i_1j}\beta_{i_1} + \cdots + k_{i_rj}\beta_{i_r}$ 。下面证明 $\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r}$ 线性无关。若有 $k_{i_1}\beta_{i_1} + k_{i_r}\beta_{i_r} = 0$, 则 $\sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell}a_{i_\ell i_\ell}\alpha_1 + \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell}a_{2i_\ell}\alpha_2 + \cdots + \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell}a_{ni_\ell}\alpha_n = 0$ 。因 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, $\sum_{\ell=1}^r a_{ji_\ell} = 0$ 。即 $k_{i_1}A_{i_1} + \cdots + k_{i_r}A_{i_r} = 0$ 。从而 $k_{i_1} = k_{i_2} = \cdots = k_{i_r} = 0$, 所以 $\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_r}$ 线性无关。这样我们证明了: $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_r}$ 为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 的一个极大线性无关组。

5. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个真子空间, 证明在 V 中存在 α , 使得 $\alpha \notin V_1, \alpha \notin V_2$ 同时成立。

证明: 因 V_1 是线性空间 V 的真子空间, 存在一个 $\alpha_1 \in V$ 但 $\alpha_1 \notin V_1$ 。若 $\alpha_1 \notin V_2$, 则取 $\alpha = \alpha_1$ 就有 $\alpha \notin V_1$ 与 $\alpha \notin V_2$ 同时成立; 若 $\alpha_1 \in V_2$, 因 V_2 是线性空间 V 的真子空间, 存在 $\alpha_2 \in V$ 使得 $\alpha_2 \notin V_2$ 。考虑向量 $\{\alpha_1 + k\alpha_2 | k \in F\}$ 。我们断言, 最多只有一个 k_0 使得 $\alpha_1 + k_0\alpha_2 \in V_1$ (否则, 若有

$k_1 \neq k_2$ 使得 $\alpha_1 + k_1\alpha_2 \in V_1, \alpha_1 + k_2\alpha_2 \in V_1$, 则 $(k_1 - k_2)\alpha_1 = k_1(\alpha_1 + k_2\alpha_2) - k_2(\alpha_1 + k_1\alpha_2) \in V_1$, 与 $\alpha_1 \notin V_1$ 矛盾!). 若 $k \neq 0$, 则 $\alpha_1 + k\alpha_2 \notin V_2$ (否则, 有 $\alpha_2 \in V_2$, 亦得矛盾!). 这样, 只要取 $k \neq k_0$ 并且 $k \neq 0$, 则有 $\alpha_1 + k\alpha_2 \notin V_1$ 与 $\alpha_1 + k\alpha_2 \notin V_2$ 同时成立。

6. 设 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 是线性空间 V 的 s 个真子空间, 证明 V 中至少存在一个向量不属于 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 中的任何一个。

证明: 我们对真子空间的个数 s 进行归纳。 $s = 1$ 时, 结论显然成立。 假设结论对 s 个真子空间成立。 若 $V_1, V_2, \dots, V_{s+1}$ 是线性空间 V 的 $s+1$ 个真子空间, 则由归纳假设, 存在一个 $\alpha \in V$ 使得 $\alpha \notin V_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 。 若 $\alpha \notin V_{s+1}$, 则证毕。 下面假定 $\alpha \in V_{s+1}$ 。 因 V_{s+1} 是 V 的真子空间, 存在 $\beta \in V$ 使得 $\beta \notin V_{s+1}$ 。 考虑形如 $\alpha + k\beta$ 的向量。 对于每一个 $V_i (i = 1, \dots, s)$, 最多只能存在一个 k_i 使得 $\alpha + k_i\beta \in V_i$ (否则, 若 $\alpha + k_i\beta \in V_i, \alpha + k'_i\beta \in V_i$ 并且 $k_i \neq k'_i$, 则有 $(k'_i - k_i)\alpha = k'_i(\alpha + k_i\beta) - k_i(\alpha + k'_i\beta) \in V_i$, 从而 $\alpha \in V_i$, 矛盾!). 取 $k \neq k_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 并且 $k \neq 0$, 则 $\alpha + k\beta \notin V_i (i = 1, 2, \dots, s)$, 并且容易看到 $\alpha + k\beta \notin V_{s+1}$ (否则, $k\beta = (\alpha + k\beta) - \alpha \in V_{s+1}$, 与 $\beta \notin V_{s+1}$ 矛盾!), 由归纳法, 证毕。

7. 令 S 是 $M_n(R)$ 中由所有形如 $AB - BA (A, B \in M_n(R))$ 的矩阵所张成的子空间, 证明 $\dim S = n^2 - 1$ 。

证明: 熟知, 线性空间 $M_n(R)$ 的维数为 n^2 。 由于对任意矩阵 $A, B \in M_n(R)$, 有 $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$, 所以 S 为真子空间, 从而 $\dim S \leq n^2 - 1$ 。 另一方面, 容易验证 $E_{ij} = E_{ik}E_{kj} - E_{kj}E_{ik} (i \neq j) \in S$, $E_{\ell\ell+1}E_{\ell+1\ell} - E_{\ell+1\ell}E_{\ell\ell+1} (\ell = 1, 2, \dots, n-1) \in S$, 并且它们线性无关, 所以又有 $\dim S \geq n^2 - 1$ 。 于是 $\dim S = n^2 - 1$ 。

8. 设 A 是一个 n 级复矩阵, $C(A) = \{B \in M_n(C) | AB = BA\}$, 称为 A 的中心化子, 证明: $\dim C(A) \geq n$ 。

证明:

第六章 习题答案

习题 6.1

1. 判别下列变换是否线性变换？

(1) 设 α 是线性空间 V 中一个固定向量

(I) $T(\beta) = \beta + \alpha, \forall \beta \in V$,

(II) $T(\beta) = \alpha, \forall \beta \in V$ 。

(2) 在 R^3 中

(I) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2 + x_3, x_3^2)$,

(II) $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3, 2x_1)$ 。

(3) 在 $F[x]$ 中

(I) $T(f(x)) = f(x+1)$,

(II) $T(f(x)) = f(x_0)$, (x_0 是 F 中固定的数)。

(4) 把复数 C 看作复数域上的线性空间

$T(z) = \bar{z}$

其中 $\bar{z}$ 是 z 的共轭复数。

(5) 在 $M_n(F)$ 中, 设 P, Q 是其中两个固定的方阵,

$T(X) = PXQ$ 。

答案: 一般地, 若要证明 T 是线性变换, 则需要验证它确实满足线性变换的定义; 若说明 T 不是线性变换, 只要说明 T 不满足线性变换所满足的某条性质即可。在以下答案中, 当 T 是线性变换时, 我们略去了详细的验证, 请同学补齐; 当 T 不是线性变换时, 我们则给出了具体理由。

(1)(I) 当 $\alpha = 0$ 时, T 是线性变换; 当 $\alpha \neq 0$ 时, T 不是线性变换。

(II) 当 $\alpha = 0$ 时, T 是线性变换; 当 $\alpha \neq 0$ 时, T 不是线性变换。

(2)(I) T 不是线性变换, 因为 $T(kx_1, kx_2, kx_3) = kT(x_1, x_2, x_3)$ 一般不成立。

(II) T 是线性变换。

(3)(I) T 是线性变换。

(II) T 是线性变换。

(4) T 不是线性变换, 因为 $T(kz) = \overline{kz}$, 而 $kT(z) = k\bar{z}$, 所以一般来说 $T(kz) \neq kT(z)$ 。

(5) T 是线性变换。

(6) T 是线性变换。

2. 在 R^3 中, 取直角坐标系 $O-xyz$, 以 $\mathcal{R}_x$ 表示空间绕 OX 轴由 OY 轴向 OZ 轴旋转 90° 的变换, 以 $\mathcal{R}_y$ 表示空间绕 OY 轴由 OZ 轴向 OX 轴旋转 90° 的变换, 以 $\mathcal{R}_z$ 表示空间绕 OZ 轴由 OX 轴向 OY 轴旋转 90° 的变换。证明

$$\mathcal{R}_x^4 = \mathcal{R}_y^4 = \mathcal{R}_z^4 = I, \mathcal{R}_x \mathcal{R}_y \neq \mathcal{R}_y \mathcal{R}_x$$

但

$$\mathcal{R}_x^2 \mathcal{R}_y^2 = \mathcal{R}_y^2 \mathcal{R}_x^2$$

并验证:

$$(\mathcal{R}_x \mathcal{R}_y)^2 = \mathcal{R}_x^2 \mathcal{R}_y^2$$

是否成立?

3. 在 $F[x]$ 中,

$$T_1(f(x)) = f'(x), T_2(f(x)) = xf(x)$$

证明: $T_1T_2 - T_2T_1 = I$

证明: 容易验证: 对于任意的 $f(x) \in F[x]$, $T_1T_2(f(x)) = T_1(xf(x)) = (xf(x))' = xf'(x) + f(x)$, $T_2T_1(f(x)) = T_2(f'(x)) = xf'(x)$ 。从而 $(T_1T_2 - T_2T_1)(f(x)) = T_1T_2(f(x)) - T_2T_1(f(x)) = f(x)$, 即: $T_1T_2 - T_2T_1 = I$ 。

4. 设 T_1, T_2 是线性变换, 若 $T_1T_2 - T_2T_1 = I$ 。证明:

$$T_1^k T_2 - T_2 T_1^k = k T_1^{k-1} (k > 1)$$

证明: 由 $T_1T_2 - T_2T_1 = I$ 分别右、左乘以 T_1 得: $T_1T_2T_1 - T_2T_1^2 = T_1$ 和 $T_1^2T_2 - T_1T_2T_1 = T_1$ 。二式相加便得: $T_1^2T_2 - T_2T_1^2 = 2T_1$, 即: 当 $k = 2$ 时, $T_1^k T_2 - T_2 T_1^k = k T_1^{k-1}$ 成立。假设 $T_1^k T_2 - T_2 T_1^k = k T_1^{k-1} (k > 1)$ 成立, 则分别左、右乘以 T_1 得: $T_1^{k+1}T_2 - T_1T_2T_1^k = k T_1^k$ 和 $T_1^k T_2T_1 - T_2T_1^{k+1} = k T_1^k$ 。二式相加, 并移项得: $T_1^{k+1}T_2 - T_2T_1^{k+1} = 2k T_1^k - T_1(T_1^{k-1}T_2 - T_2T_1^{k-1})T_1 = 2k T_1^k - (k-1)T_1^k = (k+1)T_1^k$ 。由归纳法, 证毕。

5. (1) 设 T 是 V 的可逆变换, 证明 T 的逆变换是唯一的;

(2) 设 T_1, T_2 是 V 的可逆, 证明: T_1T_2 也是可逆变换, 并且 $(T_1T_2)^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1}$ 。

6. 设 T 是 V 的线性变换, 向量 $\alpha \in V$, 且 $\alpha, T(\alpha), T^2(\alpha), \dots, T^{k-1}(\alpha)$ 均不为零向量, 但 $T^k(\alpha) = 0$ 。证明: $\alpha, T(\alpha), T^2(\alpha), \dots, T^{k-1}(\alpha)$ 线性无关。

证明: 若有一组数 $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{k-1}$, 使得 $\ell_0\alpha + \ell_1T\alpha + \dots + \ell_{k-1}T^{k-1}\alpha = 0 \dots \dots (*)$, 用 T^{k-1} 作用上式并由 $T^k(\alpha) = 0$ 可得: $\ell_0T^{k-1}\alpha = 0$ 。但 $T^{k-1}\alpha \neq 0$, 所以 $\ell_0 = 0$ 。于是 $(*)$ 式变为: $\ell_1T\alpha + \dots + \ell_{k-1}T^{k-1}\alpha = 0 \dots \dots (**)$ 。用 T^{k-2} 作用 $(**)$ 式可得: $\ell_1T^{k-1}\alpha = 0$, 同样有: $\ell_1 = 0, \dots$, 最后用 T 作用可得 $\ell_{k-2}T^{k-1}\alpha = 0$, 从而 $\ell_{k-2} = 0$ 。这样 $(*)$ 式变为: $\ell_{k-1}T^{k-1}\alpha = 0$, 但 $T^{k-1}\alpha \neq 0$, 所以 $\ell_{k-1} = 0$ 。于是我们证明了, $\ell_0 = \ell_1 = \dots = \ell_{k-1} = 0$, 所以 $\alpha, T(\alpha), T^2(\alpha), \dots, T^{k-1}(\alpha)$ 线性无关。

7. 证明: V 的变换 T 可逆的充分必要条件是 T 为一一变换。

8. 设 T 是 V 的线性变换, 证明

(1) T 是单射线性变换的充分必要条件是 $\ker T = \{0\}$;

(2) T 是单射线性变换的充分必要条件是 T 把线性无关的向量组变为线性无关的向量组。

9. 设 $GL(V)$ 是 $\mathcal{L}(V, V)$ 中可逆线性变换的全体所构成的集合。证明 $GL(V)$ 关于线性变换的乘法运算构成群。

10. 设 T_1, T_2 是线性变换, 且 $T_1^2 = T_1, T_2^2 = T_2$ 。证明

(1) 若 $(T_1 + T_2)^2 = T_1 + T_2$, 则 $T_1T_2 = O$;

(2) 若 $T_1T_2 = T_2T_1$, 则 $(T_1 + T_2 - T_1T_2)^2 = T_1 + T_2 - T_1T_2$ 。

11. 设 V, W 分别是数域 F 上的 n 维与 m 维线性空间, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一组基, 而 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 是 W 中 n 个向量。证明存在唯一的线性映射 $T: V \rightarrow W$ 使得 $T(\alpha_i) = \beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

12. 设 V, W 是数域 F 上的两个线性空间, 而 $T: V \rightarrow W$ 是线性映射。证明 $\ker T$ 与 $T(V)$ 分别是 V 与 W 的子空间。又若 $\dim V$ 有限。证明:

$$\dim \ker T + \dim T(V) = \dim V$$

这时称 $\dim \ker T$ 为 T 的零度, 称 $\dim T(V)$ 为 T 的秩。

13. 设 V, W 是数域 F 上的两个线性空间, $\mathcal{L}(V, W)$ 是 V 到 W 的所有线性变换所组成的集合。证明 $\mathcal{L}(V, W)$ 关于定义 6.1.4 中定义的线性映射的和与数量乘法, 成为数域 F 上的一个线性空间。

14. $\mathcal{L}(V, W)$ 如上题所定义。证明:

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W.$$

习题 6.2

1. 求下列线性变换在所指定的一组基下的矩阵:

(1) $M_2(F)$ 的线性变换 $\mathcal{T}_1(X) = AXA, \mathcal{T}_2(X) = AX$, 其中 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为固定矩阵. 求

$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

(2) 在线性空间 $F[x]_m$ 中, 设线性变换 $\mathcal{T}$ 为:

$$f(x) \mapsto f(x+1) - f(x).$$

求 $\mathcal{T}$ 在基 $p_0 = 1, p_1 = x, \dots, p_i = \frac{1}{i!}x(x-1)\cdots(x-i+1) (i = 2, 3, \dots, m)$ 下的矩阵.

(3) 六个函数

$$f_1 = e^{ax} \cos bx, f_2 = e^{ax} \sin bx,$$

$$f_3 = xe^{ax} \cos bx, f_4 = xe^{ax} \sin bx,$$

$$f_5 = \frac{1}{2}x^2 e^{ax} \cos bx, f_6 = \frac{1}{2}x^2 e^{ax} \sin bx$$

的所有实系数线性组合构成实数域上一个 6 维线性空间. 求微分变换在基 $\{f_i\}_{i=1}^6$ 下的矩阵.

答案: (1) $\mathcal{T}_1$ 的矩阵为: $\begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & cd \\ bc & cd & bd & d^2 \end{pmatrix}$; $\mathcal{T}_2$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$.

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot (3) \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

2. 设 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 是线性空间 V 的一组基, $\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i, \beta_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}e_i, A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关. 证明

(1) 存在唯一的线性变换 $\mathcal{T}$, 使得 $\mathcal{T}(\alpha_i) = \beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$;

(2) 在 (1) 中的 $\mathcal{T}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 $A^{-1}B$.

(3) 在 (1) 中的 $\mathcal{T}$ 在 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 下的矩阵为 BA^{-1} .

证明: (1) 因 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 它是线性空间 V 的一组基. 而 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 V 中的 n 个向量, 若定义 $\mathcal{T}(\alpha_i) = \beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\mathcal{T}$ 可线性扩充为线性空间 V 的一个线性变换. 而一个线性变换完全由它在基上的像确定, 所以满足条件 $\mathcal{T}(\alpha_i) = \beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的线性变换是唯一的.

(2) 由 $\alpha_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ 及 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关知道矩阵 A 是可逆的, 且 $(e_1, e_2, \dots, e_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A^{-1}$. 于是 $\mathcal{T}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A^{-1}B$. 所以, $\mathcal{T}$ 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵为 $A^{-1}B$.

(3) 由 (2) 及 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)A$ 得 $\mathcal{T}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \mathcal{T}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A^{-1} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A^{-1}BA^{-1} = (e_1, e_2, \dots, e_n)BA^{-1}$. 所以, $\mathcal{T}$ 在 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 下的矩阵为 BA^{-1} .

3. 若 R^3 中, 线性变换 $\mathcal{T}$ 定义为:

$$\begin{cases} \mathcal{T}(\eta_1) = (-5, 0, 3)^t \\ \mathcal{T}(\eta_2) = (0, -1, 6)^t \\ \mathcal{T}(\eta_3) = (-5, -1, 9)^t \end{cases}, \text{ 其中 } \begin{cases} \eta_1 = (-1, 0, 2)^t \\ \eta_2 = (0, 1, 1)^t \\ \eta_3 = (3, -1, 0)^t \end{cases}.$$

(1) 求 $\mathcal{T}$ 在 $e_1 = (1, 0, 0)^t, e_2 = (0, 1, 0)^t, e_3 = (0, 0, 1)^t$ 下的矩阵;

(2) 求 $\mathcal{T}$ 在 η_1, η_2, η_3 下的矩阵.

答案: (1) $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 若 R^3 中, 线性变换 $\mathcal{T}$ 在基 $\eta_1 = (-1, 1, 1)^t, \eta_2 = (1, 0, -1)^t, \eta_3 = (0, 1, 1)^t$ 下的矩阵为: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 求 $\mathcal{T}$ 在 e_1, e_2, e_3 下的矩阵.

答案: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. 设数域 F 上 3 维线性空间 V 的线性变换 $\mathcal{T}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\mathcal{T}$ 在基 $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ 下的矩阵;

(2) 求 $\mathcal{T}$ 在基 $\alpha_1, k\alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 ($k \in F, k \neq 0$);

(3) 求 $\mathcal{T}$ 在基 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵.

答案: (1) $\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ \frac{a_{21}}{k} & a_{22} & \frac{a_{23}}{k} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{22} - a_{11} - a_{12} & a_{22} - a_{12} & a_{23} - a_{13} \\ a_{31} + a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

6. 在 n 维线性空间 V 中, 设有线性变换 $\mathcal{T}$ 与向量 α , 使得 $\mathcal{T}^{n-1}(\alpha) \neq 0$, 但 $\mathcal{T}^n(\alpha) = 0$. 证明在 V 中存在一组基, 使得 $\mathcal{T}$ 在该组基下的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明: 我们要证明 $\{\alpha, \mathcal{T}(\alpha), \dots, \mathcal{T}^{n-1}(\alpha)\}$ 是维线性空间 V 中的一组基. 若存在一组数 $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$ 使得 $k_0\alpha + k_1\mathcal{T}(\alpha) + \dots + k_{n-1}\mathcal{T}^{n-1}(\alpha) = 0 \dots \dots (*)$, 因 $\mathcal{T}^n(\alpha) = 0$, 用 $\mathcal{T}^{n-1}$ 作用 $(*)$ 式得: $k_0\mathcal{T}^{n-1}(\alpha) = 0$. 但 $\mathcal{T}^{n-1}(\alpha) \neq 0$, 所以 $k_0 = 0$. 用 $\mathcal{T}^{n-2}$ 作用 $(*)$ 式得: $k_1\mathcal{T}^{n-1}(\alpha) = 0$, 从而得 $k_1 = 0$. 类似地, 依次用 $\mathcal{T}^{n-3}, \dots, \mathcal{T}$ 作用 $(*)$ 式可得 $k_2 = \dots = k_{n-1} = 0$. 故 $\{\alpha, \mathcal{T}(\alpha), \dots, \mathcal{T}^{n-1}(\alpha)\}$ 线性无关. 而 $\dim V = n$, 所以 $(\alpha, \mathcal{T}(\alpha), \dots, \mathcal{T}^{n-1}(\alpha))$ 是维线性空间 V 中的一组基, 容易知道 $\mathcal{T}$ 在该组基下的矩阵即为 A .

7. 设 $\mathcal{L}(V, V)$ 是数域 F 上的 n 维线性空间 V 的全体线性变换组成的数域 F 上的线性空间, 试求 $\dim \mathcal{L}(V, V)$, 并找出 $\mathcal{L}(V, V)$ 的一组基.

解: 取定维线性空间 V 的一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 设维线性空间 V 的线性变换 $\mathcal{T}$ 在该组基下的矩阵为 A , 则映射 $f: \mathcal{L}(V, V) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(F)$ 是一个线性空间的同构, 此处 $\mathcal{M}_{n \times n}(F)$ 是数域 F 上的全体 n 级方阵构成的线性空间. 熟知 $\mathcal{M}_{n \times n}(F)$ 的维数为 n^2 , 并且 $\{E_{ij} | i, j = 1, 2, \dots, n\}$

是其一组基。从而 $\dim \mathcal{L}(V, V) = n^2$ ，并且 $\{T_{ij} | i, j = 1, 2, \dots, n\}$ 为 $\mathcal{L}(V, V)$ 的一组基，其中 T_{ij} 是由 E_{ij} 通过 $T_{ij}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)E_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots$) 所确定的线性变换。

8. 证明：与 n 维线性空间 V 的全体线性变换可交换的线性变换是数乘变换。

证明：取定维线性空间 V 的一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ，设 T 在该组基下的矩阵为 A ，即 $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$ 。任取矩阵 P ，则 P 可定义 V 上的一个线性变换 $\mathcal{P}$ ，使得 $\mathcal{P}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$ ，即 $\mathcal{P}$ 在 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 下的矩阵为 P 。由已知 T 与线性空间 V 的全体线性变换可交换，从而与 $\mathcal{P}$ 可交换。这样它们在同一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 下的矩阵 A 与 P 也可交换，即 $AP = PA$ 。由 P 的任意性知， A 为数量矩阵，从而 T 是数乘变换。

9. 设 T 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，若 T 在 V 的任意一组基下的矩阵都相同，则 T 是数乘变换。

证明：取定维线性空间 V 的一组基 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ，设 T 在该组基下的矩阵为 A ，即 $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$ 。任取可逆矩阵 P ，则 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$ 仍为维线性空间 V 的一组基， T 在 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 下的矩阵为 $B = P^{-1}AP$ 。由已知， $A = B = P^{-1}AP$ ，即 $AP = PA$ 。由 P 的任意性知， A 为数量矩阵，从而 T 是数乘变换。

10. 证明：
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$
 相似；其中 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的一个排列。

证明：证法一：我们对矩阵的阶数 n 进行归纳。显然，对 1 阶方阵结论成立。假设结论对 $n-1$ 阶方阵成立。在 n 阶方阵的情形，由于 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的一个排列，一定存在某个指标 i_k ，使得 $i_k = n$ 。以下分两种情形讨论。

(1) 若 $i_k = i_n$ ，即 $i_n = n$ ，则 $(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})$ 是 $(1, 2, \dots, n-1)$ 的一个排列，由归纳假设，
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{i_{n-1}} \end{pmatrix}$$
 相似，即存在一个 $n-1$ 级可逆矩阵 P' ，使

得 $P'^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} P' = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{i_{n-1}} \end{pmatrix}$ 。令 $P = \begin{pmatrix} P' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 P 为 n

级可逆，且 $P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$ ，即 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

与 $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$ 相似。

(2) 若 $i_k \neq i_n$ ，则 $P(i_k, i_n) \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix} P(i_k, i_n)^{-1}$ 中第 n 行第 n 列的元素就是

$\lambda_{i_k} = \lambda_n$ ，问题归结为情形 (1)。证毕。

证法二 将 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 视为 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{T}$ 在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

下的矩阵, 即

$$\mathcal{T}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

因 $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 是 $(1, 2, \dots, n)$ 的一个排列, 易知 $(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n})$ 仍为线性空间 V 的一组

基, 并且线性变换 $\mathcal{T}$ 在这组基下的矩阵就是 $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & \\ & \lambda_{i_2} & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$ 。由于同一线性变换在不同

基下的矩阵是相似的, 所以 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & \\ & \lambda_{i_2} & \\ & & \dots \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$ 相似。

11. 若 A 可逆, 证明 AB 与 BA 相似。

证明: 因 A 可逆, 容易看到 $A^{-1}(AB)A = BA$, 所以 AB 与 BA 相似。

12. 若 A 与 B 相似, C 与 D 相似, 试判断下列叙述是否正确? 若不正确, 请举反例; 否则, 给出证明。

(1) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 相似;

(2) AC 与 BD 相似;

(3) $A+C$ 与 $B+D$ 相似。

解: (1) 正确, 证明如下:

因 A 与 B 相似, 存在可逆矩阵 P_1 , 使得 $P_1^{-1}AP_1 = B$; 又因 C 与 D 相似, 存在可逆矩阵 P_2 , 使得 $P_2^{-1}CP_2 = D$ 。显然矩阵 $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ 可逆, 并且

$$\begin{aligned} P^{-1} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_1^{-1}AP_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1}CP_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 相似。

(2) 不正确。例如: $A = B = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。显然 A 与 B 相似, C 与 D 相似。但 $AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 显然 AC 与 BD 不相似。

(3) 不正确。例如: 我们仍取 $A = B = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。显然 A 与 B 相似,

C 与 D 相似。但 $A+C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B+D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$, 显然 $A+C$ 与 $B+D$ 不相似。

习题 6.3

1. 设 V 为数域 F 上的线性空间, T 是 V 的线性变换。若 λ_0 是 T 的特征值, 则对任意 $f(\lambda) \in F[\lambda]$, $f(\lambda_0)$ 是 $f(T)$ 的特征值, 且 T 的属于 λ_0 的特征向量也是 $f(T)$ 的属于 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。

证明: 若 λ_0 是 T 的特征值, 则存在特征向量 $\xi \neq 0$, 使得 $T\xi = \lambda_0\xi$ 。容易验证, 对任意 $f(\lambda) \in F[\lambda]$, 有 $f(\lambda)\xi = f(\lambda_0)\xi$, 所以 $f(\lambda_0)$ 是 $f(T)$ 的特征值, 且 T 的属于 λ_0 的特征向量 ξ 也是 $f(T)$ 的属于 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。

2. 对以下复数域上线性空间 V 的线性变换 T , (1) 求出特征值与特征向量; (2) 判断 T 是否可对角化; (3) T 可对角化, 求出过渡矩阵 P , 并计算 $P^{-1}AP$ 。

已知 T 在一组基下的矩阵为: (1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$;

$$(3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; (4) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix};$$

解: (1) 矩阵 A 的特征多项式为: $\Delta_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - 7)(\lambda + 2)$, 从而其特征值为 $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -2$, 它们对应的特征向量 ξ_1, ξ_2 在给定基下的坐标分别为: $(1, 1)^t, (4, -5)^t$ 。易知 ξ_1, ξ_2 线性无关, 也是线性空间 V 的一组基。 T 在这组基下的矩阵就是对角阵 $\begin{pmatrix} 7 & \\ & -2 \end{pmatrix}$ 。所以

矩阵 A 可对角化。取 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & \\ & -2 \end{pmatrix}$ 。

(2) 矩阵 A 的特征多项式为: $\Delta_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - ia)(\lambda + ia)$, 从而其特征值为 $\lambda_1 = -ia, \lambda_2 = ia$, 它们对应的特征向量 ξ_1, ξ_2 在给定基下的坐标分别为: $(i, 1)^t, (-i, 1)^t$ 。易知 ξ_1, ξ_2 线性无关, 也是线性空间 V 的一组基。 T 在这组基下的矩阵就是对角阵 $\begin{pmatrix} -ia & \\ & ia \end{pmatrix}$ 。所以矩

阵 A 可对角化。取 $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -ia & \\ & ia \end{pmatrix}$ 。

(3) 矩阵 A 的特征多项式为: $\Delta_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - 2)^3(\lambda + 2)$, 从而其特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2$, 它们对应的特征向量 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 在给定基下的坐标分别为: $(1, 1, 0, 0)^t, (1, 0, 1, 0)^t, (1, 0, 0, 1)^t, (-1, 1, 1, 1)^t$ 。易知 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 线性无关, 也是线性空间 V 的一

组基。 T 在这组基下的矩阵就是对角阵 $\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$ 。所以矩阵 A 可对角化。取 $P =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}。$$

(4) 矩阵 A 的特征多项式为: $\Delta_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, 从而其特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, 特征值 1 的特征向量 ξ_1 在给定基下的坐标为: $(-1, 2, 20)^t$ 。特征值 2 的特征向量 ξ_2 在给定基下的坐标为: $(0, 0, 1)^t$ 。因 $P(1, -4, 2)P(1, 2)AP(1, 2)^{-1}P(1, -4, 2)^{-1} =$

$$P(1(-4), 2) \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -8 & 4 & 2 \end{pmatrix} P(1(-4), 2)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -8 & 36 & 2 \end{pmatrix}, \text{ 即 } A \text{ 与 } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -8 & 36 & 2 \end{pmatrix} \text{ 相似,}$$

类似于 264 页的例 5 可知, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -8 & 36 & 2 \end{pmatrix}$ 不能对角化, 所以 T 不可对角化。

3. 证明 λ 是矩阵 A 的特征值的充分必要条件是矩阵 $\lambda E - A$ 为奇异阵。

证明: λ 是矩阵 A 的特征值的充分必要条件是存在特征向量 $\xi \neq 0$ 使得 $A\xi = \lambda\xi$, 即 $(\lambda E - A)\xi = 0$ 。而齐次线性方程组 $AX = 0$ 有非零解的充分必要条件是矩阵 $\lambda E - A$ 为奇异矩阵。所以 λ 是矩阵 A 的特征值的充分必要条件是矩阵 $\lambda E - A$ 为奇异阵。

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 求 A^k 。

解: 矩阵 A 的特征多项式为: $\Delta_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 5)(\lambda + 5)$, 从而其特征值为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -5$ 。分别解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - A)X = 0 (i = 1, 2, 3)$, 得特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -5$ 的特征向量分别为: $\alpha_1 = (1, 0, 0)^t, \alpha_2 = (2, 1, 2)^t, \alpha_3 = (1, -2, 1)^t$ 。做矩

阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5 & \\ & & -5 \end{pmatrix}$ 。容易计算出 $P^{-1}A^kP =$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k \end{pmatrix}, \text{ 从而 } A^k = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k \end{pmatrix} P^{-1}。于是得: 当 } k \text{ 为偶数时, } A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5^k - 1 \\ 0 & 5^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix};$$

当 k 为奇数时, $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 4 \times 5^{k-1} & 3 \times 5^{k-1} - 1 \\ 0 & -3 \times 5^{k-1} & 4 \times 5^{k-1} \\ 0 & 4 \times 5^{k-1} & 3 \times 5^{k-1} \end{pmatrix}。$

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是 4 维线性空间 V 的一组基, 线性变换 T 在这组基下的矩阵为: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ -10 & 3 & 11 & -7 \end{pmatrix};$

(1) 求 T 在一组基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 下的矩阵, 其中 $\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \beta_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_3 = \alpha_3 \\ \beta_4 = \alpha_4 \end{cases}$

(2) 求 T 的特征值与特征向量;

(3) 求一可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解: (1) 易知 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)P$, 即从基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 到基 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 的

过渡矩阵为 P ，其中 $P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。于是 T 在一组基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta$ 下的矩阵为：

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) T 的特征多项式为： $\Delta_T(\lambda) = |\lambda E - B| = \lambda^2(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - 1)$ 。从而 T 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{1}{2}, \lambda_4 = 1$ 。解齐次线性方程组 $(\lambda_i E - B)X = 0$ ，得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{1}{2}, \lambda_4 = 1$ 的特征向量 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 在基 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ 下的坐标分别为： $(1, 0, 0, 0)^t, (0, 1, 0, 0)^t, (-7, 5, 3, 5)^t, (12, -10, 1, 0)^t$ 。也容易知道，特征向量 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标分别为：

$$(1, 1, 0, -1)^t, (2, 3, 1, 0)^t, (-4, -2, 1, 6)^t, (3, 1, 1, -2)^t.$$

(3) 由 (2) 知道， T 在基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 下的矩阵为： $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ 。所求矩阵便是从基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 到基 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 的过渡矩阵，故所求矩阵为： $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ 。

6. (1) 设 λ_1, λ_2 是线性变换 T 的两个不同的特征值， α_1, α_2 分别是属于 λ_1, λ_2 的特征向量，证明： $\alpha_1 + \alpha_2$ 不是 T 的特征向量；

(2) 证明：若线性变换 T 以 V 中每个非零向量做为它的特征向量，则 T 是数乘变换。

证明：(1) 若 $\alpha_1 + \alpha_2$ 是 T 的特征向量，不妨设 λ 为其特征值，则有 $T(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2)$ 。另一方面， $T(\alpha_1 + \alpha_2) = T\alpha_1 + T\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ ，这样 $\lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$ 。因 α_1, α_2 属于不同特征值，它们线性无关，从而有 $\lambda_1 = \lambda = \lambda_2$ ，这与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾。

(2) 若线性变换 T 以 V 中每个非零向量做为它的特征向量，则由 (1) 知， T 的所有特征向量的特征值都相等，不妨设为 λ ，从而对任意的 $\alpha \in V$ ，都有 $T\alpha = \lambda\alpha$ ，所以 T 是数乘变换。

7. 设 T 是 V 的线性变换。

(1) T 的行列式为零的充分必要条件是 T 至少有一个特征值为零；

(2) 若 T 是可逆线性变换，证明： T 的特征值一定不为零；且若 λ 是 T 的特征值，则 $\frac{1}{\lambda}$ 必是 T^{-1} 的特征值。

证明：(1) 因为线性变换的行列式等于其所有特征值之积，所以 T 的行列式为零的充分必要条件是 T 至少有一个特征值为零。

(2) 若 T 是可逆线性变换，则 T 不能将非零向量变为零向量，从而 T 的特征值一定不为零。若 λ 是 T 的特征值，设其特征向量为 ξ ，则有 $T\xi = \lambda\xi$ 。两边用 T^{-1} 作用，得 $\xi = \lambda T^{-1}\xi$ ，因 $\lambda \neq 0$ ，所以有 $T^{-1}\xi = \frac{1}{\lambda}\xi$ ，即 $\frac{1}{\lambda}$ 是 T^{-1} 的特征值。

8. 设 A, B 是 n 级方阵。证明：

(1) $tr(AB) = tr(BA)$ ；

(2) 若 $B = P^{-1}AP$ ，则 $tr(B) = tr(A)$ ，即相似矩阵必有相同的迹；

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。

验证 A 与 B 有相同的特征多项式，但 A 与 B 不相似。

证明: (1) 设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, 则 $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$, $\text{tr}(BA) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik}$ 。
显然 $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik}$, 所以 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ 。

(2) 若 $B = P^{-1}AP$, 则由 (1), $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr}(A)$ 。

(3) 显然, $\Delta_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = \Delta_B(\lambda)$ 。若 A 与 B 相似, 则存在可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$

使得 $P^{-1}AP = B$, 即 $AP = PB$ 。比较两矩阵中的元素, 可得 $p_{21} = p_{11} + p_{21}, p_{22} = p_{12} + p_{22}$, 从而 $p_{11} = p_{12} = 0$ 。这样矩阵 P 中第一列的元素全为零, 与 P 可逆矛盾。所以, A 与 B 不相似。

9. 设 V 的线性变换 T 的互不相同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 。若在每一特征值 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 中取基, 恰构成全空间 V 的一组基, 证明 T 必可对角化。

证明: 若在每一特征值 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 中取基 $\{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i_{r_i}}\} (r_1 + r_2 + \dots + r_s = n)$, 而

$\bigcup_{i=1}^s \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i_{r_i}}\}$ 构成全空间 V 的一组基, 则 T 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & \\ & \lambda_2 E_{r_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_s E_{r_s} \end{pmatrix}$,

所以 T 可对角化。

习题 6.4

1. 设 A 是一个 n 级下三角矩阵。证明:

(1) 若 A 的对角线元素 $a_{ii} \neq a_{jj} (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则 A 必可对角化;

(2) 若 A 的对角线元素 $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$, 且 A 不是对角矩阵, 则 A 不可对角化。

证明: (1) 因 A 为下三角矩阵, 易知矩阵 A 的特征多项式为:

$$\Delta_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_{ii}).$$

由于 $a_{ii} \neq a_{jj} (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$, 故 A 有 n 个互不相同的特征值 $a_{ii} (i = 1, 2, \dots, n)$, 从而矩阵 A 可对角化。

(2) 由于 $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$, 易知矩阵 A 的特征多项式为:

$$\Delta_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_{ii}) = (\lambda - a_{11})^n.$$

因 A 不是对角矩阵, $A - a_{11}E \neq 0$, 即 $\lambda - a_{11}$ 不零化 A 。所以矩阵 A 的最小多项式为 $m_A(\lambda) = (\lambda - a_{11})^k$, 其中 $k \geq 2$ 。由于 $m_A(\lambda)$ 有重根, 所以 A 不可对角化。

2. 设 n 维线性空间 V 的线性变换 T 有 s 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, V_i 是 λ_i 的特征子空间 ($i = 1, 2, \dots, s$)。试证明:

(1) $V_1 + V_2 + \dots + V_s$ 是直和;

(2) T 可对角化的充分必要条件是: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$ 。

证明: 设 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i_{r_i}} (i = 1, 2, \dots, s)$ 是 V_i 的一组基, 由 270 页的引理 6.4.3, $\bigcup_{i=1}^s \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i_{r_i}}\}$ 仍线性无关; 另一方面, 显然 $V_1 + V_2 + \dots + V_s$ 中每一个向量均可由向量组 $\bigcup_{i=1}^s \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i_{r_i}}\}$ 线性表示, 所以 $\bigcup_{i=1}^s \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i_{r_i}}\}$ 是 $V_1 + V_2 + \dots + V_s$ 的一组基。由子空间的和是直和的充分必要条件 (参见 225 页定理 5.5.3), $V_1 + V_2 + \dots + V_s$ 是直和。

(2) 必要性: 若 T 可对角化, 则存在线性空间 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 使得 T 在该组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda'_n \end{pmatrix}$$

显然 $T\alpha_i = \lambda'_i \alpha_i$ ，即 α_i 是特征值 $\lambda'_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的特征向量。如果特征值 $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$ 中有相同的，不妨设 $\lambda'_{i_1} = \lambda'_{i_2} = \cdots = \lambda'_{i_r} = \lambda_i (i=1, 2, \dots, s)$ ，其中 $\sum_{i=1}^s i_r = n$ ，且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 两两不同。则 T 在基 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}; \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots, \alpha_{j_r}; \dots; \alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \dots, \alpha_{s_r}$ 下的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} E_{1_r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_{2_r} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{s_r} \end{pmatrix}$$

其中 E_{i_r} 为 i_r 阶单位矩阵 ($i=1, 2, \dots, s$)。显然 $V_i = \{\alpha \in V | T\alpha = \lambda_i \alpha\} = \text{Span}\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}\}$ ，所以 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ 。

充分性：若 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ ，则显然 T 有 n 个线性无关的特征向量，从而可对角化。

3. 设 D 是 n 级对角矩阵，它的特征多项式为

$$\Delta_D(\lambda) = (\lambda - d_1)^{c_1} (\lambda - d_2)^{c_2} \cdots (\lambda - d_s)^{c_s}$$

其中 $d_1, d_2, \dots, d_s$ 两两不同，设 $V = \{B \in M_n(F) | BD = DB\}$ 。

证明： V 是 $M_n(F)$ 的子空间，并且 $\dim V = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_s^2$ 。

证明：很显然，对于任意的 $A, B \in V$ 以及任意的 $k, l \in F$ ，有：

$$(kA + lB)D = kAD + lBD = kDA + lDB = D(kA + lB)$$

即： $kA + lB \in V$ 。所以 V 是 $M_n(F)$ 的子空间。

由于 D 是 n 级对角矩阵且其特征多项式为 $\Delta_D(\lambda) = (\lambda - d_1)^{c_1} (\lambda - d_2)^{c_2} \cdots (\lambda - d_s)^{c_s}$ ，通过调换矩阵 D 对角线上元素的次序，可得对角阵

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{c_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_{c_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s E_{c_s} \end{pmatrix}$$

即存在一个 n 级可逆矩阵 P 使得 $PDP^{-1} = D'$ 。令

$$V' = \{B' \in M_n(F) | B'D' = D'B'\}$$

易见 V' 中矩阵具有形式

$$\begin{pmatrix} B_{c_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{c_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{c_s} \end{pmatrix}$$

其中 $B_{c_i} (i=1, 2, \dots, s)$ 为任意 c_i 阶方阵。因 $\dim M_{c_i} = c_i$ ，可设 $E_{c_i}(k, l) (k, l=1, 2, \dots, c_i)$ 为线性

空间 $M_{c_i}(F)$ 的一组基, 则

$$\bigcup_{i=1}^s \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & E_{c_i(k,l)} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

线性无关, 且是 V' 的一组基. 从而 $\dim V' = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_s^2$. 容易验证 $f: V \rightarrow V', f(B) = PBP^{-1}$ 是一个线性空间的同构, 从而有 $\dim V = \dim V' = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_s^2$.

4. 设 A 为准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \cdots \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中 A_i 为 n_i 级方阵, 它的最小多项式为 $m_i(\lambda) (i = 1, 2, \cdots, s)$.

证明: $m_A(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$.

(即 A 的最小多项式是 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 的最小多项式的最小公倍式)

证明: 记 $\ell(\lambda) = [m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$. 因 $\ell(\lambda)$ 为首一多项式, 我们只需证明两点: (1) $\ell(\lambda)$ 零化矩阵 A , 即 $\ell(A) = 0$; (2) $\ell(\lambda)$ 是零化矩阵 A 的次数最低的多项式, 即对任意多项式 $f(\lambda)$, 若 $f(A) = 0$ 则有 $\ell(\lambda) | f(\lambda)$.

(1) 显然存在多项式 $q_i(\lambda) (i = 1, 2, \cdots, s)$ 使得 $\ell(\lambda) = m_i(\lambda)q_i(\lambda)$. 易知

$$\begin{aligned} \ell(A) &= m_i(A)q_i(A) = \begin{pmatrix} m_i(A_1) & & \\ & m_i(A_2) & \\ & & \cdots \\ & & & m_i(A_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_i(A_1) & & \\ & q_i(A_2) & \\ & & \cdots \\ & & & q_i(A_s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \clubsuit & & \\ & \cdots & \\ & & 0 & \\ & & & \cdots \\ & & & & \clubsuit \end{pmatrix} \quad (\text{因 } m_i(A_i) = 0, \text{ 准对角矩阵 } \ell(A) \text{ 对角线上的第 } i \text{ 个位置的子块} \\ &\quad m_i(A_i)q_i(A_i) = 0). \end{aligned}$$

这样, 因上式对每一个 $i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 都成立, 故有: $\ell(A) = 0$.

$$(2) \text{ 若 } f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & & \\ & f(A_2) & \\ & & \cdots \\ & & & f(A_s) \end{pmatrix} = 0, \text{ 则有 } f(A_i) = 0 (i = 1, 2, \cdots, s). \text{ 因为}$$

$m_i(\lambda)$ 为 A_i 的最小多项式, 从而有 $m_i(\lambda) | f(\lambda) (i = 1, 2, \cdots, s)$, 即 $f(\lambda)$ 为 $m_1(\lambda), m_2(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)$ 的一个公倍式. 由最小公倍式的定义便得: $\ell(\lambda) | f(\lambda)$.

5. 求下列矩阵的最小多项式, 并判断它们是否可对角化.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解: (1) 矩阵 A 的特征多项式为:

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \left| \lambda E - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \lambda E - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \lambda^{n-1} \left| \lambda - \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \lambda^{n-1}(\lambda - n) \end{aligned}$$

从而 A 的最小多项式形如: $\lambda^\ell(\lambda - n)$, 其中 $\ell \geq 1$ 。又因为 $A(A - nE) = 0$, 所以 A 的最小多项式为 $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - n)$ 。因 $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - n)$ 没有重根, 所以矩阵 A 可对角化。

(2) 矩阵 A 的特征多项式为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

容易验证: $A(A - 2E)(A + 2E) = 0$ 。故 A 的最小多项式为 $m_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)$, 显然 $m_A(\lambda)$ 没有重根, 所以 A 可对角化。

6. 若 n 级方阵 A 满足: $A^2 + A = 2E$, 问 A 是否可对角化?

解: 由 $A^2 + A = 2E$ 知 $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$ 是矩阵 A 的一个零化多项式。因 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 是 $f(\lambda)$ 的因式, 而 $f(\lambda)$ 没有重因式, 所以 $m_A(\lambda)$ 也没有重因式, 故 A 可对角化。

7. 证明: (1) A 是幂零矩阵的充分必要条件为 A 的特征值全为零;

(2) n 级方阵 A , 若存在 k (可能有 $k \geq n$) 使 $A^k = 0$, 则必有 $A^n = 0$ 。

证明: (1) 由 275 页命题 6.4.4 可得事实: 矩阵 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 包含其所有不同的特征值。

必要性: 若 A 是幂零矩阵, 即存在一个正整数 ℓ 使得 $A^\ell = 0$, 则 λ^ℓ 是 A 的一个零化多项式。因 $m_A(\lambda) | \lambda^\ell$, 从而其最小多项式 $m_A(\lambda)$ 只有零根。所以 A 的特征值全为零。

充分性: 若 A 的特征值全为零, 则其最小多项式 $m_A(\lambda)$ 只有零根, 即存在一个正整数 ℓ 使得 $m_A(\lambda) = \lambda^\ell$ 。因 $M_A(A) = A^\ell = 0$, 所以 A 是幂零矩阵。

(2) 若存在 k (可能有 $k \geq n$) 使 $A^k = 0$, 由 (1) A 的最小多项式 $m_A(\lambda) = \lambda^\ell$ 但 $m_A(\lambda) | \Delta_A(\lambda)$, 所以 $\ell \leq n$ 。从而必有 $A^n = 0$ 。

8. 设 A 为 n 级方阵, $f(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15$, $g(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, 且 $f(A) = 0$, $g(A) = 0$ 。求 A 的最小多项式。

解: 由 $f(A) = 0$ 知: $m_A(\lambda) | f(\lambda)$; 由 $g(A) = 0$ 知: $m_A(\lambda) | g(\lambda)$ 。所以 $m_A(\lambda)$ 是 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的一个公因式。而 $f(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5)$, $g(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$, 从而 $m_A(\lambda) = \lambda - 3$ 。

9. 设 $M_n(F)$ 是数域 F 上 n 级方阵全体组成的线性空间。 $\mathcal{T}$ 是 $M_n(F)$ 上的线性变换: $\mathcal{T}(A) = A^t$ 。

证明: (1) T 的特征值只可能是 1 与 -1 。

(2) T 是否可对角化? 为什么?

证明: (1) 若 λ 为 T 的特征值, 不妨设 A 为其特征向量, 则有 $T(A) = \lambda A$ 。从而 $T^2(A) = \lambda T(A) = \lambda^2 A$ 。但 $T^2 = I$ 。故 $A = \lambda^2 A$ 。而 A 作为 λ 的特征向量, 必有 $A \neq 0$ 。所以 $\lambda^2 = 1$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$ 。

(2) 显然 $(T+I)(T-I) = T^2 - I^2 = I - I = 0$, 即 $(\lambda+1)(\lambda-1)$ 为 T 的一个零化多项式。所以 T 的最小多项式没有重根, T 可对角化。

10. 设 A 为 n 级复矩阵, 对某个正整数 k , $A^k = E$ 。证明: A 可对角化。

证明: 由 $A^k = E$ 知 $\lambda^k - 1 = \prod_{\ell=1}^k (\lambda - e^{\frac{2\ell\pi}{k}i})$ 是矩阵 A 的零化多项式, 而 $\lambda^k - 1$ 没有重根, 所以矩阵 A 的最小多项式没有重根, 从而 A 可对角化。

习题 6.5

1. 设在 R^2 的标准基 e_1, e_2 下, 线性变换 T 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

设 W 是 R^2 中由 $e_1 = (1, 0)^t$ 所生成的一维子空间。证明:

(1) W 是 T 的不变子空间;

(2) 不存在另一个 T -不变子空间 W' , 使得 $R^2 = W \oplus W'$;

(3) 总可以找到另一个子空间 W' 使得 $R^2 = W \oplus W'$ 。

证明: (1) 对于任意的 $ke_1 = (k, 0)^t \in W$, $T(ke_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \end{pmatrix} \in W$,

所以 W 是 T 的不变子空间。

(2) 首先, 容易知道矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的最小多项式是 $m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2$, 因有重根, 矩阵 A

不可对角化, 从而线性变换 T 不可对角化。若存在另一个 T -不变子空间 W' , 使得 $R^2 = W \oplus W'$, 则因 $\dim W = \dim W' = 1$, 又得线性变换 T 可对角化, 矛盾! 故不存在另一个 T -不变子空间 W' , 使得 $R^2 = W \oplus W'$ 。

(3) 只要取 $W' = \text{Span}\{e_2\}$, 则有 $R^2 = W \oplus W'$ 。

2. 用归纳法证明:

(1) 任意一个复方阵 A 必相似于一个上三角阵, 且该上三角阵之对角线元素就是 A 的全部特征值;

(2) 设 A 是实方阵, 则存在实可逆方阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为上三角阵的充分必要条件为 A 的特征值全为实数。

证明: (1) 证法一: 首先注意事实: 对于第一类初等矩阵 $P(i, j)$, 有 $P(i, j)^{-1} = P(i, j)$; 对于第二类初等矩阵 $P(i(c))(c \neq 0)$, 有 $P(i(c))^{-1} = P(\frac{1}{c})$; 对于第三类初等矩阵 $P(i(k), j)$, 有 $P(i, j)^{-1} = P(i(-k), j)$ 。

对方阵 A 的阶数 n 进行归纳。当 $n = 2$ 时, 可设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 。分以下几种情况证明

(a) 若 $a_{11} \neq 0$, 则 $P(1(-\frac{a_{21}}{a_{11}}), 2)AP(1(-\frac{a_{21}}{a_{11}}), 2)^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}$ 。从而 A 相似于对角矩阵。

(b) 若 $a_{11} = 0$ 但 $a_{22} \neq 0$, 则因 $P(1, 2)AP(1, 2)^{-1} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$, 归结为情形 (a)。

(c) 以下假定 $a_{11} = a_{22} = 0$ 。若 $a_{12} = 0$ ， A 已是上三角矩阵。因而可设 $a_{21} \neq 0$ 。若 $a_{12} = 0$ ，则 $P(2(a_{21}), 1)AP(2(a_{21}), 1)^{-1} = P(2(a_{21}), 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} P(2(-a_{21}), 1) = \begin{pmatrix} a_{21} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ ，归结为情形 (a)。若 $a_{12} \neq 0$ ，则

$$P(2(\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}))AP(2(\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}}))^{-1} = P(2(\sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}})) \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} P(2(\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{12}}})) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a_{12}a_{21}} \\ \sqrt{a_{12}a_{21}} & 0 \end{pmatrix}.$$

因为

$$\begin{aligned} & P(2(i)) \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a_{12}a_{21}} \\ \sqrt{a_{12}a_{21}} & 0 \end{pmatrix} P(2(i))^{-1} \\ &= P(2(i)) \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a_{12}a_{21}} \\ \sqrt{a_{12}a_{21}} & 0 \end{pmatrix} P(2(-i)) = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{a_{12}a_{21}} \\ i\sqrt{a_{12}a_{21}} & 0 \end{pmatrix}; \\ & P(2(1), 1) \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{a_{12}a_{21}} \\ i\sqrt{a_{12}a_{21}} & 0 \end{pmatrix} P(2(1), 1)^{-1} \\ &= P(2(1), 1) \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{a_{12}a_{21}} \\ i\sqrt{a_{12}a_{21}} & 0 \end{pmatrix} P(2(-1), 1) = \begin{pmatrix} 2i\sqrt{a_{12}a_{21}} & -i\sqrt{a_{12}a_{21}} \\ i\sqrt{a_{12}a_{21}} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

问题又归结为情形 (a)。

假设 $n = k$ 阶复方阵可对角化，我们考虑 $n = k + 1$ 阶方阵。

(i) 若 $a_{11} \neq 0$ ，则 $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \clubsuit \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ ，其中 $P = P(1(-\frac{a_{12}}{a_{11}}), n) \cdots P(1(-\frac{a_{12}}{a_{11}}), 2)$ ， A_1 为 k 阶复方阵。由归纳假设，存在一个 k 阶可逆方阵 P' 使得 $P'A_1P'^{-1}$ 为上三角矩阵。这样，取 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} P$ ，则有 QAQ^{-1} 为上三角矩阵。

(ii) 若 A 的对角线上有一个元素不为零，不妨设 $a_{kk} \neq 0$ ，则 $P(1, k)AP(1, k)^{-1} = P(1, k)AP(1, k)$ 中左上角元素为 $a_{kk} \neq 0$ ，问题归结为 (1)。

下面可以假设矩阵 A 的对角线上的元素都是零。若第一列元素全为零，则 A 形如 $\begin{pmatrix} 0 & \clubsuit \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ ，

利用归纳假设，取 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$ ，则有 QAQ^{-1} 为上三角矩阵。

若第一列有一个元素不为零，不妨设 $a_{k1} \neq 0$ ，若 $a_{1k} = 0$ ，则 $P(k(1), 1)AP(k(1), 1)^{-1} = \begin{pmatrix} a_{k1} & \clubsuit \\ \clubsuit & \clubsuit \end{pmatrix}$ ，问题归结为 (i)。若 $a_{1k} \neq 0$ ，则 $PAP = \begin{pmatrix} 2i\sqrt{a_{1k}a_{k1}} & \clubsuit \\ \clubsuit & \clubsuit \end{pmatrix}$ ，其中 $P = P(k(1), 1)P(k(\sqrt{\frac{a_{1k}}{a_{k1}}}))$ ，问题同样归结为 (i)。

总之，任意一个复方阵 A 必相似于一个上三角阵。由于相似矩阵具有相同的特征值，所以该上三角矩阵对角线上的元素就是其所有特征值。

证法二：对于 1 阶矩阵，结论显然成立。

假定结论对于 k 矩阵成立，下面考虑 $k + 1$ 阶矩阵。在复数域上， $\lambda E - A = 0$ 总有一个根 λ_0 。从而齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 总有一个非零解 $\xi \in C^n$ ，即： $A\xi = \lambda_0\xi$ 。将 ξ 扩充为 C^n 的一组基 $\{\xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ ，并记 $P = \{\xi, \xi_1, \dots, \xi_k\}$ ，则 P 为 $k + 1$ 阶可逆矩阵，且 $AP = A\{\xi, \xi_1, \dots, \xi_k\} = \{\lambda_0\xi, A\xi_1, \dots, A\xi_k\} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \clubsuit \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ ，其中 A_1 为 k 阶矩阵。

即： $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \clubsuit \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ 。由归纳假设，存在 k 阶可逆 P' 使得 $P'^{-1}A_1P'$ 为上三角矩阵。令

$Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$ ，则有 $Q^{-1}AQ$ 为上三角矩阵。剩下的证明与证法一相同。

(2) 如果存在实可逆方阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为上三角阵, 因 A 是实矩阵, 该三角阵也是实矩阵. 故该上三角实矩阵的特征值, 从而实矩阵 A 的特征值都是实数. 充分性的证明与上面证法二相同, 只需注意到方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 总有一个非零解 $\xi \in R^n$ (此处 $\lambda_0 \in R$ 为 A 的一个实特征值) 即可.

3. 若 W 是 V 的一维子空间, T 是 V 的线性变换, 则 W 是 T -子空间的充分必要条件是 W 中任一非零向量都是属于同一特征值的特征向量.

证明: 因 $\dim W = 1$, 取 $\{\alpha\}$ 为一组基, 则 W 中任一向量都具有形式 $k\alpha$.

必要性: 若 W 是 T -子空间, 则对 $\alpha \in W$ 有 $T\alpha \in W$, 从而存在一个数 λ 使得 $T\alpha = \lambda\alpha$. 这样对于任意的 $k\alpha \in W$ 均有 $T(k\alpha) = kT(\alpha) = \lambda(k\alpha)$. 所以 W 中任一非零向量都是属于同一特征值的特征向量.

充分性: 若 W 中任一非零向量 ξ 都是属于同一特征值 λ 的特征向量, 则显然有 $T(W) \subseteq W$, 即: W 是 T -子空间.

4. 设 V 是复数域上 n 维线性空间, T_1, T_2 是 V 的线性变换, 且 $T_1 T_2 = T_2 T_1$. 证明

(1) 若 λ_0 是 T_1 的特征值, 则 λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 也是 T_2 的不变子空间;

(2) T_1, T_2 至少有一个公共特征向量;

(3) 若 T_1 有 n 个不同的特征值, 则在 V 内必存在一组基使得 T_1, T_2 在这组基下的矩阵同时为对角阵.

证明: (1) 对于任意的 $\alpha \in V_{\lambda_0}$, $T_1(T_2(\alpha)) = T_2(T_1(\alpha)) = T_2(\lambda_0 \alpha) = \lambda_0(T_2(\alpha))$, 即: $T_2(V_{\lambda_0}) \subseteq V_{\lambda_0}$.

(2) 由 (1), T_1 的特征子空间 V_{λ_0} 也是 T_2 的不变子空间, 从而 T_2 可视为 V_{λ_0} 上的线性变换, 记为 $T_2|_{V_{\lambda_0}}$. 在复数域上, V_{λ_0} 上的线性变换 $T_2|_{V_{\lambda_0}}$ 必有特征向量 $\beta \in V_{\lambda_0} \subseteq V$. 由于 $T_2|_{V_{\lambda_0}}$ 和 T_2 在 β 上的作用完全相同, 所以 β 就是 T_1 和 T_2 的一个公共特征向量.

(3) 若 T_1 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则其相应的特征子空间 V_i 都是一维的, 且两两不交. 由 (2), 在每一个特征子空间 $V_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 中都存在 T_1 和 T_2 的一个公共特征向量 $\beta_i \in V_i$, 显然 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ 线性无关, 从而是 V 的一组基. T_1 和 T_2 在这组基下的矩阵就同时是对角矩阵.

5. 若 V 的非平凡线性变换 $\mathcal{P}$ 满足 $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$, 则称 $\mathcal{P}$ 为 V 的一个投影线性变换. 证明:

(1) $(I - \mathcal{P})(V) = \ker \mathcal{P}$, $V = \ker \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}(V)$;

(2) 若 T 是 V 的线性变换, W_1, W_2 是 T 的不变子空间, 且 $V = W_1 \oplus W_2$. 对任意 $v = w_1 + w_2 \in V$, 其中 $w_i \in W_i (i = 1, 2)$, 定义: $\mathcal{P}_i(v) = w_i (i = 1, 2)$, 则 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ 都是 V 的投影线性变换, 且与 T 可换.

证明: (1) 对于任意 $\alpha \in (I - \mathcal{P})(V)$, 存在 $\beta \in V$ 使得 $\alpha = (I - \mathcal{P})(\beta)$, 从而 $\mathcal{P}((I - \mathcal{P})(\beta)) = (\mathcal{P} - \mathcal{P}^2)(\beta) = \mathcal{O}(\beta) = 0$. 即: $\alpha \in \ker \mathcal{P}$, 所以 $(I - \mathcal{P})(V) \subseteq \ker \mathcal{P}$. 另一方面, 任意 $\alpha \in \ker \mathcal{P}$, $\alpha = \alpha - 0 = \alpha - \mathcal{P}(\alpha) = (I - \mathcal{P})(\alpha) \in (I - \mathcal{P})(V)$, 即: $(I - \mathcal{P})(V) \supseteq \ker \mathcal{P}$. 故有: $(I - \mathcal{P})(V) = \ker \mathcal{P}$.

任取 $\ker \mathcal{P}$ 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$, 将其扩充为 V 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$. 首先证明 $\{\mathcal{P}(\alpha_{r+1}), \dots, \mathcal{P}(\alpha_n)\}$ 线性无关. 若存在 $k_{r+1}, \dots, k_n$ 使得 $k_{r+1}\mathcal{P}(\alpha_{r+1}) + \dots + k_n\mathcal{P}(\alpha_n) = 0$, 则 $k_{r+1}\alpha_{r+1} + \dots + k_n\alpha_n \in \ker \mathcal{P}$, 从而 $k_{r+1}\alpha_{r+1} + \dots + k_n\alpha_n$ 可由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ 线性表出. 但基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ 是线性无关的, 所以 $k_{r+1} = \dots = k_n = 0$, 由定义, $\{\mathcal{P}(\alpha_{r+1}), \dots, \mathcal{P}(\alpha_n)\}$ 线性无关. 又因为对任意 $\alpha = \ell_1\alpha_1 + \dots + \ell_n\alpha_n \in V$, 有 $\mathcal{P}(\alpha) = \ell_{r+1}\alpha_{r+1} + \dots + \ell_n\alpha_n \in \mathcal{P}(V)$, 即: $\mathcal{P}(V) = \text{Span}\{\mathcal{P}(\alpha_{r+1}), \dots, \mathcal{P}(\alpha_n)\}$, 所以 $\{\mathcal{P}(\alpha_{r+1}), \dots, \mathcal{P}(\alpha_n)\}$ 是 $\mathcal{P}(V)$ 的一组基. 要证明 $V = \ker \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}(V)$, 我们只需再证明 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \mathcal{P}(\alpha_{r+1}), \dots, \mathcal{P}(\alpha_n)\}$ 是 V 的一组基即可. 而这只需证明这组向量是线性无关的. 若有一组数 $\ell_1, \dots, \ell_n$ 使得

$$\ell_1\alpha_1 + \dots + \ell_r\alpha_r + \ell_{r+1}\mathcal{P}(\alpha_{r+1}) + \dots + \ell_n\mathcal{P}(\alpha_n) = 0 \dots \dots \dots (*)$$

则由于 $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ 以及 $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \ker \mathcal{P}$, 用 $\mathcal{P}$ 作用可得: $\ell_{r+1}\mathcal{P}(\alpha_{r+1}) + \dots + \ell_n\mathcal{P}(\alpha_n) = 0$.

但我们已经证明了 $\{\mathcal{P}(\alpha_{r+1}), \dots, \mathcal{P}(\alpha_n)\}$ 线性无关, 所以 $\ell_{r+1} = \dots = \ell_n = 0$, 于是 (*) 就是 $\ell_1\alpha_1 + \dots + \ell_r\alpha_r = 0$, 从而 $\ell_1 = \dots = \ell_r = 0$, 证毕。

(2) 由 $\mathcal{P}_i$ 的定义, 显然 $\mathcal{P}_i$ 满足 $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i^2 (i=1, 2)$, 即 $\mathcal{P}_i$ 是投影变换。对于任意 $v = w_1 + w_2 \in V = W_i \oplus W_2$, 容易验证 $\mathcal{P}_i T(v) = T w_i = T \mathcal{P}_i(v) (i=1, 2)$, 即 $\mathcal{P}_i (i=1, 2)$ 与 T 可换。

6. 设 λ 是方阵 A 的特征值。令 $N = A - \lambda E$, 若向量 α 满足 $N^k \alpha = 0$ 但 $N^{k-1} \alpha \neq 0$, 则称 α 为属于特征值 λ 的权 k 的根向量。特征向量即为权为 1 的根向量。再令

$$H_k = \{\alpha \in F^n | N^k \alpha = 0\}$$

(1) 证明: H_k 是子空间, 且 $H_i \supseteq H_{i-1} (i=1, 2, \dots)$;

(2) 若存在正整数 t 使得 $H_t = H_{t+1}$, 证明: 对于任意正整数 $m \geq t$, 有 $H_m = H_t$;

(3) 若存在可逆矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \dots & \dots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

证明: $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是 A 的属于特征值 λ 的权 i 的根向量。

证明: (1) $H_k = \{\alpha \in F^n | N^k \alpha = 0\}$ 实际上是齐次线性方程组 $N^k X = 0$ 的解空间, 容易验证它是 F^n 的一个子空间 (略), 也容易知道 $H_i \supseteq H_{i-1} (i=1, 2, \dots)$ (略)。

(2) 若存在正整数 t 使得 $H_t = H_{t+1}$, 即齐次线性方程组 $N^t X = 0$ 和 $N^{t+1} X = 0$ 同解。下面用数学归纳法证明: 对于任意正整数 $m \geq t$, 有 $H_m = H_t$ 。当 $m - t = 1$ 时, 结论显然成立。假定当 $m - t = k$ 时结论成立。当 $m - t = k + 1$ 时, 若 X 是 $N^{t+k+1} X = 0$ 的解, 即: $N^{t+k+1} X = N^{t+k}(NX) = 0$, 则 NX 是 $N^{t+k} X = 0$ 的解。由归纳假设, $N^{t+k} X = 0$ 与 $N^t X = 0$ 同解, 所以 NX 是 $N^t X = 0$ 的解, 即: $N^{t+1} X = 0$ 。但 $H_t = H_{t+1}$, 所以 $N^t X = 0$, 即 X 是 $N^t X = 0$ 的解, 故 $H_m = H_t$ 。

(3) 令 $N = A - \lambda E$, 则已知条件可改写为: $N\alpha_i = \alpha_{i-1} (i=1, 2, \dots, n)$, 其中我们规定当 $j \leq 0$ 时 $\alpha_j = 0$ 。显然 $N^i \alpha_i = 0$, 但 $N^{i-1} \alpha_i = \alpha_1 \neq 0$ 。由定义, $\alpha_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是 A 的属于特征值 λ 的权 i 的根向量。

补充题 6

1. 设 e_1, e_2, e_3, e_4 是 4 维线性空间 V 一组基, 已知线性变换 T 在这组基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) 在 T 的核中选一组基, 把它扩充为 V 的一组基, 并求 T 在这组基下的矩阵;

(2) 在 T 的像中选一组基, 把它扩充为 V 的一组基, 并求 T 在这组基下的矩阵;

解: (1) 解齐次方程组 $AX = 0$ 得一基础解系: $\{\xi_1 = (-2, -\frac{3}{2}, 1, 0)^t, \xi_2 = (-1, -2, 0, 1)^t\}$ 。该线性变换的核由向量 β_1, β_2 张成, β_i 在给定基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标是 $\xi_i (i=1, 2)$ 。将 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 扩充为

一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$, 因 $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)P$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 容易

$$\text{计算出 } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 所以 } T \text{ 在 } \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\} \text{ 下的矩阵为: } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 取矩阵 A 的一个列向量无关组 $\{\zeta_1 = (1, -1, 1, 2)^t, \zeta_2 = (0, 2, 2, -2)^t\}$ 。则该线性变换的像由 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 张成, 其中 β_i 在给定基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的坐标分别为 $\zeta_i (i = 1, 2)$ 。将 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 扩充为

一组基 $\{\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, 因 $(\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)P$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

容易计算出 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。所以 T 在 $\{\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的矩阵为: $P^{-1}AP =$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 \\ \frac{9}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 若 $T_1, T_2, \dots, T_s$ 是线性空间 V 的 s 个两两不同的线性变换, 则在 V 中存在向量 α , 使得 $T_1(\alpha), T_2(\alpha), \dots, T_s(\alpha)$ 也两两不同。

证明: 做 $T_{ij} = T_i - T_j (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 。因 $T_i \neq T_j$, $T_{ij} \neq 0 (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 。从而 $\ker T_{ij} \subseteq V$ 但 $\ker T_{ij} \neq V$, 即: $\ker T_{ij}$ 都是 V 的真子空间。由 228 页第 6 题的结果, 存在一个向量 α , 使得 α 不在每一个 $\ker T_{ij}$ 中, 即: $T_1(\alpha), T_2(\alpha), \dots, T_s(\alpha)$ 两两不同。

3. 设 T 是有限维线性空间 V 的线性变换, W 是 V 的子空间, $T(W)$ 是 T 在 W 中的像空间, 证明: $\dim T(W) + \dim (\ker T \cap W) = \dim W$ 。

证明: 显然 $\ker T$ 是 V 的一个子空间。取 $\ker T \cap W$ 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$, 并将其扩充为 W 的一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_r\}$ 。即有: $\dim (\ker T \cap W) = s$, $\dim W = r$ 。我们只需证明 $\dim T(W) = r - s$ 即可。显然 $T(\alpha_{s+1}), T(\alpha_{s+2}), \dots, T(\alpha_r) \in T(W)$ 。若存在一组数 $k_{s+1}, k_{s+2}, \dots, k_r$ 使得 $k_{s+1}T(\alpha_{s+1}) + k_{s+2}T(\alpha_{s+2}) + \dots + k_rT(\alpha_r) = 0$, 则 $k_{s+1}\alpha_{s+1} + k_{s+2}\alpha_{s+2} + \dots + k_r\alpha_r \in \ker T \cap W$ 。从而 $k_{s+1}\alpha_{s+1} + k_{s+2}\alpha_{s+2} + \dots + k_r\alpha_r$ 可由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ 线性表出, 因 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_r\}$ 为 W 的一组基, 必有 $k_{s+1} = k_{s+2} = \dots = k_r = 0$, 所以 $T(\alpha_{s+1}), T(\alpha_{s+2}), \dots, T(\alpha_r)$ 线性无关。

4. 设 $T_1^2 = T_1$, $T_2^2 = T_2$ 。证明:

(1) T_1 与 T_2 有相同像的充分必要条件是: $T_1T_2 = T_2$, $T_2T_1 = T_1$

(2) T_1 与 T_2 有相同的核的充分必要条件是: $T_1T_2 = T_1$, $T_2T_1 = T_2$

证明: (1) 必要性: 对于任意的 $\alpha \in V$, 因 $T_1(V) = T_2(V)$, 存在 $\beta \in V$ 使得 $T_2(\alpha) = T_1(\beta)$, 从而有: $T_1T_2(\alpha) = T_1^2(\beta) = T_1(\beta) = T_2(\alpha)$ 。由 $\alpha \in V$ 的任意性可得: $T_1T_2 = T_2$ 。类似可证: $T_2T_1 = T_1$ 。

充分性: 由 $T_2T_1 = T_1$ 知: $T_2(V) \supseteq T_2T_1(V) = T_1(V)$ 。由 $T_1T_2 = T_2$ 知: $T_1(V) \supseteq T_1T_2(V) = T_2(V)$ 。所以 $T_1(V) = T_2(V)$ 。

(2) 必要性: 对于任意的 $\alpha \in V$, 由 $T_2^2 = T_2$ 知: $T_2(\alpha) - \alpha \in \ker T_2$, 又因 $\ker T_1 = \ker T_2$, 存在 $\beta \in \ker T_1$ 使得 $T_2(\alpha) - \alpha = \beta$ 。于是: $T_1T_2(\alpha) = T_1(\alpha + \beta) = T_1(\alpha)$, 由 α 的任意性可得: $T_1T_2 = T_1$ 。类似可证: $T_2T_1 = T_2$ 。

充分性: 由 $T_1T_2 = T_1$ 知: $\ker T_2 \subseteq \ker T_1$ 。由 $T_2T_1 = T_2$ 知: $\ker T_1 \subseteq \ker T_2$ 。所以

$\ker T_1 = \ker T_2$ 。

5. n 维线性空间 V 的线性变换 T 有 n 个不同的特征值, 证明: V 中有 2^n 个 T -子空间。

证明: 由于 T 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则其相应的特征子空间 $V_{\lambda_i} = \text{Span}\{\alpha_i\}$ 都是一维的 T -子空间并且有: $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$ 。显然, 特征子空间的直和是 T -子空间。反之, 若 W 是一个 T -子空间, 取其一组基 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\} (1 \leq s \leq n)$, 则 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\} (1 \leq s \leq n)$ 可由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 线性表示, 即存在一个 n 行 s 列矩阵 B 使得 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)B$ 。显然 B 是列满秩矩阵, 从而存在 B 的 s 个行, 不妨设第 $i_1, i_2, \dots, i_s$ 行线性无关。记由 B 的第 $i_1, i_2, \dots, i_s$ 行组成的级方阵为 B' , 则 B' 是可逆矩阵。这样, 只需依次进行第三类初等变换 $P_1, P_2, \dots, P_t$ 便可将 B 的除第 $i_1, i_2, \dots, i_s$ 外的其余所有行变为零并且第 $i_1, i_2, \dots, i_s$ 保持不变。若用 P_i 表示相应的第三类初等矩阵, 则有: $P_t \dots P_2 P_1 B$ 只有第 $i_1, i_2, \dots, i_s$ 行不为零。而 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P_1^{-1} \dots P_{t-1}^{-1} P_t^{-1}$ 相当于对 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 实行“列”的第三类初等变换, 而不改变第 $i_1, i_2, \dots, i_s$ 处的元素。这样, 便有: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P_1^{-1} \dots P_{t-1}^{-1} P_t^{-1} P_t \dots P_2 P_1 B = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s})B'$ 。即 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s})B'$ 。故 $W = \text{Span}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s\} = \text{Span}\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}\} = V_{\lambda_{i_1}} \oplus V_{\lambda_{i_2}} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_{i_s}}$ 。这样我们证明了每一个 T -子空间都是 T 的某些特征子空间的直和。由于 T 有 n 个不同的特征值, r 维的 T -子空间一共就 C_n^r 个。于是, 所有的 T -子空间就有: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ 个。

6. 复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换 T 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为一个若当块, 证明

- (1) V 中含 α_1 的 T -子空间只有 V 自身;
- (2) V 中任意一个 T -子空间都含 α_n ;
- (3) V 不能分解为两个非平凡 T -子空间的直和。

证明: 由已知,

$$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

上式可以重新表述为: $(T - \lambda I)\alpha_i = \alpha_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n)$, 或 $(T - \lambda I)^i \alpha_j = \alpha_{i+j} (i = 1, 2, \dots, n)$, 其中规定 $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \dots = 0$ 。

(1) 设 W 为含有向量 α_1 的 T -子空间, 则对于任意多项式 $f(\lambda)$, W 也是 $f(T)$ -子空间, 从而也是 $(T - \lambda I)^i (i = 1, 2, \dots, n)$ 子空间。所以有: $(T - \lambda I)^i (\alpha_1) = \alpha_{i+1} \in W (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 。这样便有: $V \supseteq W \supseteq \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = V$, 即: $W = V$ 。

(2) 此小题应该为: V 中任意一个非平凡 T -子空间都含 α_n 。

设 W 为任意一个非平凡 T -子空间, 在其中取一非零向量 β , 则 β 可由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 线性表示, 设 $\beta = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n$, 因 $\beta \neq 0$, $k_1, k_2, \dots, k_n$ 不全为零, 设其中第一个不为零的数为 k_ℓ , 则

$$(T - \lambda I)^{n-\ell} \beta = (T - \lambda I)^{n-\ell} k_\ell \alpha_\ell + \dots + (T - \lambda I)^{n-\ell} k_n \alpha_n = k_\ell \alpha_n$$

从而 $k_\ell \alpha_n \in W$, 又 $k_\ell \neq 0$, 所以 $\alpha_n \in W$ 。

(3) 若存在两个非平凡 T -子空间 W 和 U 使得 $V = W \oplus U$, 则由 (2) $\alpha_n \in W$ 并且 $\alpha_n \in U$, 从而 $\alpha_n \in W \cap U$ 。由 $V = W \oplus U$ 知: $W \cap U = \emptyset$, 矛盾。

7. 设 A, B 为 n 级复矩阵, $\Delta_A(\lambda)$ 为 A 的特征多项式。证明: 若 A, B 无公共特征值, 则 $\Delta_A(B)$ 是可逆矩阵。

证明: 设 n 级复矩阵 A 的特征多项式 $\Delta_A(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{c_i}$ ($\sum_{i=1}^s c_i = n$)。则 $\Delta_A(B) = \prod_{i=1}^s (B - \lambda_i E)^{c_i}$ 。从而 $|\Delta_A(B)| = \prod_{i=1}^s |B - \lambda_i E|^{c_i}$ 。 $|\Delta_A(B)| = 0 \Leftrightarrow \exists c_\ell (1 \leq \ell \leq s), |B - \lambda_\ell| = 0 \Leftrightarrow \lambda_\ell$ 为 B 的特征值。因为 A 和 B 无公共特征值, 所以 $|\Delta_A(B)| = 0$, 即 $\Delta_A(B)$ 是可逆矩阵。

8. 设 A 是 n 级方阵, $\varphi(\lambda)$ 是 λ 的非常数多项式。证明:

(1) 若 $\varphi(\lambda) | m_A(\lambda)$, 则 $\varphi(A)$ 是奇异阵;

(2) 若 $\varphi(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 的最大公因式为 $d(\lambda)$, 则 $\varphi(A)$ 与 $d(A)$ 有相同的秩;

(3) $\varphi(A)$ 为满秩矩阵的充分必要条件是 $\varphi(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 互素。

证明: (1) 因 $\varphi(\lambda)$ 是 λ 的非常数多项式, 其次数大于零。又由 $\varphi(\lambda) | m_A(\lambda)$ 知, 存在一个次数比 $m_A(\lambda)$ 低的多项式 $f(\lambda)$ 使得 $m_A(\lambda) = \varphi(\lambda)f(\lambda)$, 从而有 $m_A(A) = \varphi(A)f(A)$ 。若 $\varphi(A)$ 非奇异阵, 因 $m_A(A) = 0$, 用 $\varphi(A)$ 的逆矩阵左乘上式, 便得 $f(A) = 0$, 与 $m_A(\lambda)$ 是 A 的最小多项式矛盾。

(2) 若 $\varphi(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 的最大公因式为 $d(\lambda)$, 则存在多项式 $f(\lambda), g(\lambda)$ 使得: $\varphi(\lambda)f(\lambda) + m_A(\lambda)g(\lambda) = d(\lambda)$ 。因 $m_A(A) = 0$, 故有: $\varphi(A)f(A) = d(A)$, 所以 $\varphi(A)$ 的秩大于等于 $d(A)$ 的秩。另一方面, $d(\lambda) | \varphi(\lambda)$, $\varphi(A)$ 的秩小于等于 $d(A)$ 的秩。所以 $\varphi(A)$ 与 $d(A)$ 有相同的秩。

(3) 若 $\varphi(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 互素, 由 (2) 知 $\varphi(A)$ 的秩等于 $d(A) = E$ 的秩等于 n , 所以 $\varphi(A)$ 为满秩矩阵。反之, 若 $\varphi(A)$ 为满秩矩阵, 则因 $d(\lambda) | \varphi(\lambda)$, $\varphi(A)$ 的秩小于等于 $d(A)$ 的秩, $d(A)$ 也是满秩矩阵。由 (1) 知, $d(\lambda)$ 必为非零常数多项式, 即: $\varphi(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 互素。

第七章 习题答案

习题 7.1

1. 用初等变换化下列 λ - 矩阵为标准形:

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} \lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1-\lambda & -\lambda^2 & \lambda^2 \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ 1+\lambda & 1-\lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}; (4) \begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; (6) \begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

答案: (1) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)^3 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda(\lambda+1) & \\ & & \lambda(\lambda+1)^2 \end{pmatrix};$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}; (4) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda(\lambda+3)(2\lambda+1) & \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1) \\ & & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}; (6) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (\lambda-1) & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix};$$

2. 求下列 λ - 矩阵的行列式因子及其标准形:

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -2 & \lambda+1 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda + \alpha_{n-1} \end{pmatrix}; (4) \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; (6) \begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-3) \end{pmatrix};$$

答案: (1) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda^4 \end{pmatrix};$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^3 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 1 \\ & & & & f(\lambda) \end{pmatrix}, f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0;$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda+2)(\lambda^2-1) \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix};$$

$$(6) \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) & \end{pmatrix};$$

3. 试求下列各 λ -矩阵的秩, 并判别哪些矩阵是可逆的, 如可逆, 求出其逆矩阵。

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda-1 & \lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \\ \lambda^2+1 & 2 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}; (4) \begin{pmatrix} 5\lambda+1 & 25\lambda \\ \lambda & 5\lambda-1 \end{pmatrix};$$

解: (1) 秩为 2, 不可逆。 (2) 秩为 3, 不可逆。

$$(3) \text{秩为 3, 可逆。逆矩阵为: } -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^3+\lambda-2 & -\lambda^3-\lambda & \lambda \\ -\lambda^2-1 & \lambda^2+1 & -1 \\ 4-\lambda^3-\lambda & \lambda^3+\lambda-2 & -\lambda^3-\lambda \end{pmatrix};$$

$$(4) \text{秩为 2, 可逆。逆矩阵为: } \begin{pmatrix} 1-5\lambda & 25\lambda \\ -\lambda & 5\lambda-1 \end{pmatrix};$$

4. 证明推论 7.1.2 和推论 7.1.3。

证明: 推论 7.1.2: $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件为 $A(\lambda)$ 可表为初等矩阵之积。

由定理 7.1.6 知: $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件为 $A(\lambda)$ 的标准形为单位矩阵 E , 即 $A(\lambda)$ 可经过一系列的行和列的初等变换化为单位矩阵 E 。而经过行的初等变化相当于左乘 $A(\lambda)$, 经过列的初等变化相当于右乘 $A(\lambda)$ 。从而存在一系列的初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s, Q_1, Q_2, \dots, Q_t$ 使得 $P_s \cdots P_1 A(\lambda) Q_1 \cdots Q_t = E$ 。而初等矩阵的逆仍为初等矩阵, 所以

$$A(\lambda) = P_1^{-1} \cdots P_s^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1} \text{ 为初等矩阵之积。}$$

推论 7.1.3: 设 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 均为 $m \times n$ 的 λ 矩阵, 则 $A(\lambda) \cong B(\lambda)$ 的充分必要条件为存在 m 阶可逆 λ -矩阵 $P(\lambda)$ 和 n 阶可逆 λ -矩阵 $Q(\lambda)$ 使得 $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = B(\lambda)$ 。

由定义, $A(\lambda) \cong B(\lambda)$ 的充分必要条件为 $A(\lambda)$ 可经过一系列的行与列的初等变换化为 $B(\lambda)$ 。而经过行的初等变化相当于用 m 阶初等矩阵左乘 $A(\lambda)$, 经过列的初等变化相当于用 n 阶初等矩阵右乘 $A(\lambda)$, 又初等矩阵都是可逆 λ -矩阵, 证毕。

习题 7.2

1. 证明下列方阵不能相似。

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}.$$

证明: 我们知道两个矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件为 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 有相同的不变因子组。矩阵 $\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}$ 的不变因子组为: $(\lambda - a), (\lambda - a), (\lambda - a)$; $\begin{pmatrix} a & & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}$ 的不变因子组为: $1, (\lambda - a), (\lambda - a)^2$; $\begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{pmatrix}$ 的不变因子组为: $1, 1, (\lambda - a)^3$ 。因它们的不变因子组两两不同, 所以这三个矩阵两两不相似。

2. 证明 n 方阵 A 与其转置矩阵 A^t 相似。

证明: 因为 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - A^t$ 互为转置矩阵, 所以 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - A^t$ 有完全相同的各级子式, 从而它们有相同的各级行列式因子和不变因子组, 所以 A 与其转置矩阵 A^t 相似。

3. 证明 $\varphi(A)$ 为满秩矩阵当且仅当 $\varphi(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 互素。

证明: 必要性: 设 $\varphi(A)$ 为满秩矩阵, 我们要证明 $\varphi(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 互素。设 $d(\lambda)$ 为 $\varphi(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 的最大公因式, 则因 $\varphi(A)$ 为满秩矩阵以及 $d(\lambda) | \varphi(\lambda)$, $d(A)$ 也是满秩矩阵。但由 $d(\lambda) | m_A(\lambda)$ 知, 存在一个 $q(\lambda)$ 使得 $m_A(\lambda) = q(\lambda)d(\lambda)$ 。但 $m_A(A) = 0$ 以及 $d(A)$ 可逆, 所以 $q(A) = 0$ 。由 $m_A(\lambda)$ 的定义 ($m_A(\lambda)$ 是零化矩阵 A 的次数最低的多项式), 所以 $d(\lambda)$ 必是非零常数, 即 $\varphi(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 互素。

充分性: 若 $\varphi(\lambda)$ 与 $m_A(\lambda)$ 互素, 则存在 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 使得 $\varphi(\lambda)f(\lambda) + m_A(\lambda)g(\lambda) = 1$, 从而有 $\varphi(A)f(A) + m_A(A)g(A) = E$ 。但 $m_A(A) = 0$, 所以 $\varphi(A)f(A) = E$, 从而 $\varphi(A)$ 为满秩矩阵 (即可逆矩阵)。

4. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的有理标准形。

解: 矩阵 A 的不变因子组为: $1, d_1(\lambda) = (\lambda + 1), d_2(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - \lambda - 2$ 。而 $R(d_1) = (1)$, $R(d_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。所以 A 的有理标准形为: $R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 2 \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。

5. 设 m 次多项式 $g(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m \in F[\lambda]$, m 级矩阵

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_m \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

证明: (1) λ -矩阵 $[\lambda E - R]$ 的不变因子组是: $1, 1, \cdots, 1, g(\lambda)$;

(2) 设列向量 $e_j(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^t$, 即第 j 分量为 1, 其它分量皆为 0, ($j = 1, 2, \cdots, m$)。则 $R(e_j) = e_{j+1}, (j = 1, 2, \cdots, m-1)$;

(3) 对任何次数小于 m 的多项式 $f(\lambda) = \lambda^\ell + b_1\lambda^{m-1} + \cdots + b_{\ell-1}\lambda + b_\ell, \ell < m$ 有 $f(R)e_1 = (b_\ell, b_{\ell-1}, \cdots, b_1, 1, 0, \cdots, 0)^t \neq 0$;

(4) 由 (3) 证明 R 的最小多项式 = R 的特征多项式 = $g(\lambda)$ 。

证明: (1) 容易看到 $|\lambda E - R|$ 中有一个 $m-1$ 级子式, 其值为 $(-1)^{m-1}$, 所以 λ -矩阵 $[\lambda E - R]$ 的不变因子组是: $1, 1, \dots, 1, |\lambda E - R|$ 。容易计算 $|\lambda E - R| = g(\lambda)$ 。

(2) 利用矩阵乘法直接验证即可。

(3) 因 $f(R) = R^\ell + b_1 R^{\ell-1} + \dots + b_{\ell-1} R + b_\ell E$, 利用 (2) 便有: $R(e_j) = e_{j+1}, (j = 1, 2, \dots, m-1)$ 。

(4) 由 Hamilton-Cayley 定理, $g(R) = 0$ 。再由 (3), 对任何次数小于 m 的多项式 $f(\lambda) = \lambda^\ell + b_1 \lambda^{m-1} + \dots + b_{\ell-1} \lambda + b_\ell, \ell < m$ 有 $f(R)e_1 = (b_\ell, b_{\ell-1}, \dots, b_1, 1, 0, \dots, 0)^t \neq 0$, 即: $f(R) \neq 0$ 。由定义, R 的特征多项式 $g(\lambda)$ 就是 R 的最小多项式。

习题 7.3

1. 求下列矩阵的初等因子组:

$$(1) \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}; (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}; (4) \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 3 \\ 7 & \lambda-3 & -9 \\ 2 & 1 & \lambda-4 \end{pmatrix};$$

答案: (1) λ^4 ; (2) $\lambda, \lambda, \lambda^2, (\lambda-1), (\lambda-1), (\lambda-1)^2$;

(3) $(\lambda-2), (\lambda-1)^2$; (4) $(\lambda-1), (\lambda - \frac{9+\sqrt{-55}}{2}), (\lambda - \frac{9-\sqrt{-55}}{2})$;

2. 设 $A(\lambda)$ 为秩 4 的 6 级 λ 矩阵, 初等因子组为: $\lambda, \lambda, \lambda^3, \lambda-1, \lambda-1, \lambda+1, (\lambda+1)^2$, 求 $A(\lambda)$ 的标准形。

答案: 容易知道 $A(\lambda)$ 的不变因子为: $d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda, d_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1), d_4(\lambda) = \lambda^3(\lambda-1)(\lambda+1)^2, d_5(\lambda) = d_6(\lambda) = 0$, 所以 $A(\lambda)$ 的标准形为:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \lambda & & & & \\ & & \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) & & & \\ & & & \lambda^3(\lambda-1)(\lambda+1)^2 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 设 A 为 n 级数字矩阵, 求证 $|\lambda E - A|$ 等于 $\lambda E - A$ 的所有初等因子之积。

证明: 矩阵 $\lambda E - A$ 可经过初等变换化为标准形

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & d_1(\lambda) & \\ & & & & \dots \\ & & & & & d_r(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中 $d_i(\lambda) (i = 1, 2, \dots, r)$ 均为首 1 多项式。而一个矩阵经过初等变换后, 其行列式是原来矩阵行列式的一个非零常数倍, 但 $|\lambda E - A|$ 与 $|D(\lambda)|$ 的首项系数都是 1, 故有: $|\lambda E - A| = |D(\lambda)|$ 。由初等因子的定义知道, 初等因子之积就是 $\prod_{i=1}^r d_i(\lambda) = |D(\lambda)|$, 证毕。

习题 7.4

1. 用初等因子法求矩阵: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的若当标准形 J 和过渡矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$ 。

解: 因为 $\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix}$, 所以 $\lambda E - A$ 的初等因子为: $(\lambda+1)$ 、 $(\lambda-1)$ 、 $(\lambda-2)$ 。从而矩阵 A 的若当标准形为: $J = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ 。

设 $P = (X_1, X_2, X_3)$, 则由 $P^{-1}AP = J$ 得 $AP = PJ$, 即: $AX_1 = -X_1$, $AX_2 = X_2$ 和 $AX_3 = 2X_3$ 。由 $(A-2E)X_3 = 0$ 得: $X_3 = (6, 3, -5)^t$;

由 $(A-E)X_2 = 0$ 得: $X_2 = (0, 0, 1)^t$;

由 $(A+E)X_1 = 0$ 得: $X_1 = (1, 0, -1)^t$ 。

于是得: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ 。容易验证: $P^{-1}AP = J$ 。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 利用若当标准形求 A^5 。

解: 因为 $\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -4 & -2 \\ 0 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda+5)(\lambda-5) \end{pmatrix}$, 所以 $\lambda E - A$ 的初等因子为: $(\lambda-1)$ 、 $(\lambda+5)$ 、 $(\lambda-5)$ 。从而矩阵 A 的若当标准形为: $J = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$ 。

设 $P = (X_1, X_2, X_3)$, 则由 $P^{-1}AP = J$ 得 $AP = PJ$, 即: $AX_1 = X_1$, $AX_2 = -5X_2$ 和 $AX_3 = 5X_3$ 。由 $(A-5E)X_3 = 0$ 得: $X_3 = (2, 1, 2)^t$;

由 $(A+E)X_2 = 0$ 得: $X_2 = (1, -2, 1)^t$;

由 $(A-E)X_1 = 0$ 得: $X_1 = (1, 0, 0)^t$ 。

于是得: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 。容易验证: $P^{-1}AP = J$ 。由 $J^5 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -5^5 & \\ & & 5^5 \end{pmatrix}$, 可

得: $A = PJ^5P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2500 & 1874 \\ 0 & -1875 & 2500 \\ 0 & 2500 & 1875 \end{pmatrix}$ 。

3. 设 A 为 3 级幂零阵, 试求 A 的一切可能的标准形。

解: 一般地可以证明: 若 A 为幂零矩阵, 即存在一个正整数 k 使得 $A^k = 0$, 则 A 的特征值必全为零。设 λ 为 A 的任意一个特征值, ξ 为相应的特征向量, 则 $A\xi = \lambda\xi$ 。由 $0 = A^k\xi = \lambda^k\xi$ 以及 $\xi \neq 0$ 得: $\lambda^k = 0$, 即 $\lambda = 0$ 。

设 A 为 3 级幂零阵, 则其所有可能的若当标准形为:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 和}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 若 n 级方阵 A , 满足 $A^2 = A$, 则称 A 为幂等阵. 试求 3 幂等阵的一切可能的若当标准形.

解: 一般地可以证明: 若 A 为幂等矩阵, 即 $A^2 = A$, 则 A 的特征值必为 1 或 0. 设 λ 为 A 的任意一个特征值, ξ 为相应的特征向量, 则 $A\xi = \lambda\xi$. 由 $\lambda\xi = A\xi = A^2\xi = \lambda^2\xi$ 以及 $\xi \neq 0$ 得: $\lambda^2 - \lambda = 0$, 即 $\lambda = 0$ 或者 $\lambda = 1$. 另一方面, 由 $A^2 = A$ 知: $A(A - E) = 0$, 即 $\lambda(\lambda - 1)$ 多项式是 A 的一个零化多项式, 且没有重根, 所以 A 可对角化.

这样若 A 为 3 级幂等阵, 则其所有可能的若当标准形为: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. 设 A 为 n 级方阵, 满足 $A^2 = E$, 则称 A 为幂幺阵. 试求 3 幂幺阵的一切可能的若当标准形.

解: 一般地可以证明: 若 A 为幂幺矩阵, 即 $A^2 = E$, 则 A 的特征值必为 1 或者 -1. 设 λ 为 A 的任意一个特征值, ξ 为相应的特征向量, 则 $A\xi = \lambda\xi$. 由 $\xi = E\xi = A^2\xi = \lambda^2\xi$ 以及 $\xi \neq 0$ 得: $\lambda^2 - 1 = 0$, 即 $\lambda = -1$ 或者 $\lambda = 1$. 另一方面, 由 $A^2 = E$ 知: $A^2 - E = 0$, 即 $\lambda^2 - 1$ 多项式是 A 的一个零化多项式, 且没有重根, 所以 A 可对角化.

这样若 A 为 3 级幂幺阵, 则其所有可能的若当标准形为: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. 设 A 为 3 级复方阵, 试求 A 的一切可能的若当标准形.

解: 若 A 可对角化, 则其若当标准形为: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ 为 A 的特征

值 (有可能相同);

若 A 不可对角化并且有一个二阶若当块时, 其若当标准形为: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_i (i =$

1, 2) 为 A 的特征值 (有可能相同);

若 A 不可对角化若当块为三阶时, 其若当标准形为: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, 其中 λ 为 A 的特征

值.

7. 设 A 为 n 级复方阵, 证明: A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 无重因式的充分必要条件是 $[\lambda E - A]$

的初等因子组由一次因式构成。

证明: 由于 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$ 等于 $[\lambda E - A]$ 的最后一个不变因式, 等于 $[\lambda E - A]$ 所有初等因子中不同的一次因式的最高方幂的乘积, 所以 $m_A(\lambda)$ 无重因式当且仅当 $[\lambda E - A]$ 的初等因子都是一次因式。

8. 设 A 为 n 级复方阵, 则 A 可表为一幂零阵 N 与一个初等因子组由一次因式构成的矩阵之和。

证明: 由于复方阵 A 相似于一个若当标准形 J , 即存在一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J$,

其中 $J = \begin{pmatrix} J_{i_1} & & \\ & J_{i_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{i_r} \end{pmatrix}$, 而 $J_{i_k} (1 \leq k \leq r)$ 是特征值为 λ_k 的 i_k 阶若当标准块, 并且

$\sum_{k=1}^r i_k = n$ 。很显然 $J_{i_k} = \lambda_k E_{i_k} + N_{i_k}$, 其中 $N_{i_k} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是一个幂零阵。于是

$J = D + N$, 其中 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r E_{i_r} \end{pmatrix}$ 是一个对角矩阵, $N = \begin{pmatrix} N_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{i_r} \end{pmatrix}$ 是幂

零阵。这样 $A = PDP^{-1} + PNP^{-1}$, 很显然 PDP^{-1} 可对角化, 从而其初等因子都是一次的, 而 PNP^{-1} 是幂零阵。

9. 证明定理 7.4.3。

证明: 显然对角矩阵的初等因子都是一次的, 而相似矩阵有相同的初等因子, 所以复矩阵 A 与对角矩阵相似的充要条件为 A 的初等因子都是一次的。

补充题 7

1. 求矩阵: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 的若当标准形。

答案: (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. 证明: 方阵 A 的特征值全为零的充分必要条件是存在自然数 k , 使得 $A^k = 0$ 。

证明: 必要性: 若方阵 A 的特征值全为零, 则其若当标准形为: $J = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & J_{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & J_{n_r} \end{pmatrix}$,

其中 $J_{n_i} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为 n_i 级若当块, 并且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, n 为方阵 A

的阶数。即存在可逆矩阵 P , 使得 $A = PJP^{-1}$ 。而对于 n_i 级若当块 J_{n_i} , 有 $J_{n_i}^{n_i} = 0$ 。于是取 $k = \max(n_1, n_2, \cdots, n_r)$, 则 $A^k = PJ^kP^{-1} = 0$ 。

充分性: 设 λ 为 A 的任意一个特征值, 则存在相应的特征向量 $\eta \neq 0$, 使得 $A\eta = \lambda\eta$ 。从而 $A^k\eta = \lambda A^{k-1}\eta = \cdots = \lambda^k\eta$ 。由已知, 存在自然数 k , 使得 $A^k = 0$, 所以有 $\lambda^k\eta = 0$ 。但 $\eta \neq 0$, 故 $\lambda^k = 0$, 即 $\lambda = 0$ 。由特征值 λ 的任意性, 我们证明了方阵 A 的特征值全为零。

3. 设 A 为 n 级方阵, 且 $A^k = 0$, 求证 $|A + E| = 1$ 。

证明: 由 $A^k = 0$ 以及第 2 题知, A 的特征值全为零。于是存在可逆矩阵 P , 使得 $A = PJP^{-1}$,

其中 J 如第 2 题。这样 $A + E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \spadesuit & 1 & & \\ \spadesuit & \spadesuit & \cdots & \\ \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & 1 \end{pmatrix}$ 是一个对角线上元素全为 1 的下三角矩阵,

从而 $|A + E| = 1$ 。

4. 设 A 为 n 级复方阵, $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^n$, 证明 A 与 A^{-1} 相似。

证明: 由 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^n$ 知, A 的特征值只有 1。于是 A 的若当标准形为: $J =$

$\begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & J_{n_2} & \\ & & \cdots \\ & & & J_{n_r} \end{pmatrix}$, 其中 $J_{n_i} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 为特征值 1 的 n_i 级若当块, 并

且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ 。因 n_i 级若当块 J_{n_i} 的初等因子为 $(\lambda - 1)^{n_i}$, 矩阵 A 的初等因子组为: $(\lambda - 1)^{n_1}, (\lambda - 1)^{n_2}, \cdots, (\lambda - 1)^{n_r}$ 。显然 J_{n_i} 的最小多项式就是初等因子 $(\lambda - 1)^{n_i}$, 于是 $(\lambda E - J_{n_i})^{n_i} = 0$, 但 $(\lambda E - J_{n_i})^{n_i-1} \neq 0$ 。显然 J_{n_i} 可逆并且 $(E - J_{n_i}) = J_{n_i}(J_{n_i}^{-1} - E) = (J_{n_i}^{-1} - E)J_{n_i}$ 所以 $(E - J_{n_i})^k = 0$ 当且仅当 $(E - J_{n_i}^{-1})^k = 0$ 。于是 $J_{n_i}^{-1}$ 的最小多项式也为 $(\lambda - 1)^{n_i}$, 从而 $(\lambda - 1)^{n_i}$ 也是 $J_{n_i}^{-1}$ 的初等因子。于是 A^{-1} 的初等因子组也是: $(\lambda - 1)^{n_1}, (\lambda - 1)^{n_2}, \cdots, (\lambda - 1)^{n_r}$ 。这样, A 与 A^{-1} 有相同的初等因子组, 所以 A 与 A^{-1} 相似。

第八章 习题答案

习题 8.1

下面各题总假定 V 为内积空间。

1. 写 V 上的内积 $(\alpha, \beta) = \operatorname{Re}(\alpha, \beta) + \operatorname{Im}(\alpha, \beta)i$, 其中, $\operatorname{Re}(\alpha, \beta)$ 为 (α, β) 的实部, $\operatorname{Im}(\alpha, \beta)$ 为 (α, β) 的虚部。证明:

(1) $\operatorname{Im}(\alpha, \beta) = \operatorname{Re}(\alpha, i\beta)$ (可见内积完全有实部确定, 即: $(\alpha, \beta) = \operatorname{Re}(\alpha, \beta) + i\operatorname{Re}(\alpha, i\beta)$);

(2) 在酉空间中

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \|\alpha + \beta\|^2 - \frac{1}{4} \|\alpha - \beta\|^2 + \frac{i}{4} \|\alpha + i\beta\|^2 - \frac{i}{4} \|\alpha - i\beta\|^2;$$

在欧氏空间中

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \|\alpha + \beta\|^2 - \frac{1}{4} \|\alpha - \beta\|^2.$$

证明: (1) 设 $(\alpha, \beta) = \operatorname{Re}(\alpha, \beta) + \operatorname{Im}(\alpha, \beta)i$, 则由内积的定义, 有 $(\alpha, i\beta) = \bar{i}(\alpha, \beta) = \operatorname{Im}(\alpha, \beta) - \operatorname{Re}(\alpha, \beta)i$, 即: $\operatorname{Re}(\alpha, i\beta) = \operatorname{Im}(\alpha, \beta)$ 。

(2) 直接计算可得, 在酉空间中 $\frac{1}{4} \|\alpha + \beta\|^2 - \frac{1}{4} \|\alpha - \beta\|^2 + \frac{i}{4} \|\alpha + i\beta\|^2 - \frac{i}{4} \|\alpha - i\beta\|^2 = \frac{1}{4}(\alpha + \beta, \alpha + \beta) - \frac{1}{4}(\alpha - \beta, \alpha - \beta) + \frac{i}{4}(\alpha + i\beta, \alpha + i\beta) - \frac{i}{4}(\alpha - i\beta, \alpha - i\beta) = \frac{1}{4}(2(\alpha, \beta) + 2(\beta, \alpha)) + \frac{i}{4}(2(\alpha, i\beta) + 2(i\beta, \alpha)) = \frac{1}{2}((\alpha, \beta) + (\beta, \alpha)) + \frac{i}{2}(i(\alpha, \beta) + i(\beta, \alpha)) = \frac{1}{2}((\alpha, \beta) + (\beta, \alpha)) + \frac{1}{2}((\alpha, \beta) - (\beta, \alpha)) = (\alpha, \beta)$ 。

直接计算可得, 在欧氏空间中 $\frac{1}{4} \|\alpha + \beta\|^2 - \frac{1}{4} \|\alpha - \beta\|^2 = \frac{1}{4}(\alpha + \beta, \alpha + \beta) - \frac{1}{4}(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = \frac{1}{4}(\alpha + \beta, \alpha + \beta) - \frac{1}{4}(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = \frac{1}{4}(2(\alpha, \beta) + 2(\beta, \alpha)) = \frac{1}{4}(2(\alpha, \beta) + 2(\alpha, \beta)) = (\alpha, \beta)$ 。

2. 证明: (1) 对任意 $v \in V$, 必有 $(0, v) = 0$;

(2) 对任意 $v \in V$, 若 $(\alpha, v) = 0$, 则 $\alpha = 0$;

(3) 向量 $\alpha, \beta \in V$, $\alpha = \beta$ 当且仅当 $(\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma)$ 对任意 $\gamma \in V$ 成立。

证明: (1) 对任意 $v \in V$, 由内积的定义知: $(0, v) = (0 + 0, v) = (0, v) + (0, v)$, 从而 $(0, v) = 0$ 。

(2) 若对任意 $v \in V$, 都有 $(\alpha, v) = 0$, 则取 $v = \alpha$, 使得: $(\alpha, \alpha) = 0$ 。由内积的定义知 $\alpha = 0$ 。

(3) 显然当 $\alpha = \beta$ 时, $(\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma)$ 对任意 $\gamma \in V$ 成立。反之, 若 $(\alpha, \gamma) = (\beta, \gamma)$ 对任意 $\gamma \in V$ 成立, 即 $(\alpha - \beta, \gamma) = 0$ 对任意 $\gamma \in V$ 成立, 则由 (2) 得: $\alpha - \beta = 0$, 即 $\alpha = \beta$ 。

3. 证明: (1) V 上任何两个内积之和仍为 V 的一个内积;

(2) 用一个正数 c 乘 V 的一个内积, 仍得到 V 的一个内积;

(3) V 上两个内积之差还是 V 上一个内积吗?

证明: (1) 设 $(,)', (,)''$ 都是 V 的内积, 则容易验证它们的和 $(,) = (,)' + (,)''$, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$, $(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)' + (\alpha, \beta)''$ 仍满足内积的定义, 即 $(,)$ 是 V 上的内积。

(2) 设 $(,)'$ 是 V 的内积, $c \in R_+$ 为一正实数, 则容易验证 $(,) = c(,)'$, 即对任意 $\alpha, \beta \in V$, $(\alpha, \beta) = c(\alpha, \beta)'$ 仍满足内积的定义, 即 $c(,)'$ 是 V 上的内积。

(3) 一般来说, 两个内积之差不再是内积。若 $(,)'$ 是 V 的内积, 由 (2) 对于任意正实数 $c \in R_+$, $c(,)'$ 仍为内积。但当正实数 c_1 大于正实数 c_2 时, $c_2(,) - c_1(,)$ 已不是内积, 因为它不满足内积的正定性条件。

4. 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 是 V 的一组有序基, 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 写

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \beta = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

矩阵 $G = (g_{ij})_{n \times n}$, 其中 $g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j) (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 。

证明: (1) $(\alpha, \beta) = X^t G \bar{Y}$, 其中 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ (本题说明: V 上内积由它

在一组基上的取值完全确定)。

(2) G 为可逆矩阵 (G 称为基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的度量矩阵。§9.3 中将指出 G 是正定矩阵)。

证明: (1) $(\alpha, \beta) = (\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i \alpha_i, y_j \alpha_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j (\alpha_i, \alpha_j) = X^t G \bar{Y}$ 。

(2) 只需证明矩阵 G 的行向量组 $\{r_i = ((\alpha_1, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_1, \alpha_n)) | i = 1, 2, \dots, n\}$ 线性无关即可。若存在一组不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使得 $k_1 r_1 + k_2 r_2 + \dots + k_n r_n = 0$, 不妨设 $k_i \neq 0$, 则第 i 行 r_i 可由其余行线性表出, 即: $r_i = \frac{k_1}{k_i} r_1 + \dots + \frac{k_{i-1}}{k_i} r_{i-1} + \frac{k_{i+1}}{k_i} r_{i+1} + \dots + \frac{k_n}{k_i} r_n$ 。写成分量的形式即: $(\alpha_i, \alpha_j) = (\frac{k_1}{k_i} \alpha_1, \alpha_j) + \dots + (\frac{k_{i-1}}{k_i} \alpha_{i-1}, \alpha_j) + (\frac{k_{i+1}}{k_i} \alpha_{i+1}, \alpha_j) + \dots + (\frac{k_n}{k_i} \alpha_n, \alpha_j)$, 其中 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 变形得 $(\alpha_i - \frac{k_1}{k_i} \alpha_1 - \dots - \frac{k_{i-1}}{k_i} \alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} \alpha_{i+1} - \dots - \frac{k_n}{k_i} \alpha_n, \alpha_j) = 0$ 。从而 $(\alpha_i - \frac{k_1}{k_i} \alpha_1 - \dots - \frac{k_{i-1}}{k_i} \alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} \alpha_{i+1} - \dots - \frac{k_n}{k_i} \alpha_n, \alpha_i - \frac{k_1}{k_i} \alpha_1 - \dots - \frac{k_{i-1}}{k_i} \alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} \alpha_{i+1} - \dots - \frac{k_n}{k_i} \alpha_n) = 0$ 。由内积的定义知: $\alpha_i - \frac{k_1}{k_i} \alpha_1 - \dots - \frac{k_{i-1}}{k_i} \alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} \alpha_{i+1} - \dots - \frac{k_n}{k_i} \alpha_n = 0$, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是基矛盾。

5. 叙述 R^1 及 C^1 上所有内积。

解: (1) R^1 是实数域 R 上的一维线性空间。由上题, R^1 上的内积完全由它在基 $\{1\}$ 上的取值来确定, 即由 $(1, 1) = \alpha \in R$ 确定。由内积的性质, 必有 $(1, 1) = \alpha \in R$ 大于零, 此时 $(k, \ell) = k\ell\alpha$ 。容易验证, 对于任意的正实数 $\alpha \in R_+$, $(k, \ell) = k\ell\alpha$ 确是 R^1 上的一个内积。

(2) 显然, C^1 是复数域 C 上的一维线性空间。完全类似于 (1), 对于任意的正实数 $\alpha \in R_+$, $(k, \ell) = k\bar{\ell}\alpha$ 是 C^1 上的一个内积, 并且 C^1 上的任何一个内积都具有这种形式。

6. 设 $(,)$ 是 C^2 上标准内积, 试证 C^2 上不会有非零线性变换 T , 使得 $(\alpha, T(\alpha)) = 0$ 对所有 $\alpha \in C^2$ 都成立。

证明: 只需证明若线性变换 T 使得 $(\alpha, T(\alpha)) = 0$ 对所有 $\alpha \in C^2$ 都成立, 则必有 $T = \mathcal{O}$ 即可。而这只需证明 T 在 C^2 的基向量 $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ 上的像为零即可。由已知, $(e_i, T(e_i)) = 0 (i = 1, 2)$ 可得 $T(e_1)$ 的第 1 个分量为零, 于是可设 $T(e_1) = (0, b)$, $T(e_2)$ 的第 2 个分量为零, 于是可设 $T(e_2) = (a, 0)$ 。由 $(e_1 + e_2, T(e_1 + e_2)) = 0$ 得 $a + b = 0$, 由 $(e_1 + ie_2, T(e_1 + ie_2)) = 0$ 得 $ia - ib = 0$, 即 $a - b = 0$ 。于是 $a = b = 0$, 即 T 为零线性变换。

7. 设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为 V 的一组基, 数 $b_1, b_2, \dots, b_n \in F$, 则 V 中存在唯一向量 α , 使得 $(\alpha, \alpha_i) = b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

证明: 设 $\alpha = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n \in V$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$ 。则由习题 8.1.4 知: 存在向量 $\alpha \in V$ 使得 $(\alpha, \alpha_i) = b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的充分必要条件是方程组 $G^t X = b$ 的解是向量 α 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下的坐标。而方程组的系数矩阵就是内积空间的度量矩阵 G 的转置 G^t , 它是可逆矩阵, 所以方程组存在唯一的解。另外唯一性亦可如下证明: 若另有 $\beta \in V$ 使得 $(\beta, \alpha_i) = b_i$, 则 $(\alpha - \beta, \alpha_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 即 $(\alpha - \beta, \alpha - \beta) = 0$, 从而由内积的定义知 $\alpha - \beta = 0$ 所以 $\alpha = \beta$ 。

8. 设 $V = R^4$, 在标准内积之下, 求 $\alpha = (2, 1, 3, 2)$ 与 $\beta = (1, 2, -2, 1)$ 的夹角。

解: 由于 $(\alpha, \beta) = 0$, 所以 α, β 之间的夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 。

9. 在 V 中定义 $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$ 为向量 α, β 间的距离。证明:

(1) $d(\alpha, \beta) \geq 0$;

(2) $d(\alpha, \beta) = 0$ 当且仅当 $\alpha = \beta$;

(3) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$;

(4) $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$ 。

证明: (1) 由距离的定义及内积的性质, 有 $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| = \sqrt{(\alpha - \beta, \alpha - \beta)} \geq 0$.

(2) 由 (1) 及内积的性质, 显然 $d(\alpha, \beta) = 0$ 当且仅当 $\alpha - \beta = 0$, 即 $\alpha = \beta$.

(3) 由距离的定义及向量长度的性质, $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| = \|-(\beta - \alpha)\| = |-1| \cdot \|\beta - \alpha\| = \|\beta - \alpha\| = d(\beta, \alpha)$.

(4) 由向量长度的三角不等式得, $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| \leq \|\alpha - \gamma\| + \|\gamma - \beta\| = d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$.

10. 在 R^4 中求一单位向量与 $(1, 1, -1, 1), (1, -1, -1, 1), (2, 1, 1, 3)$ 正交.

解: 设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ 与 $(1, 1, -1, 1), (1, -1, -1, 1), (2, 1, 1, 3)$ 正交, 由其正交性知 $x_i (i =$

$1, 2, 3, 4)$ 满足方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$
 . 解该线性方程组得一非零解 $\alpha =$

$(-4, 0, -1, 3)$. 将其单位化得 $\beta = \frac{\alpha}{(\alpha, \alpha)} = (-\frac{2\sqrt{26}}{13}, 0, -\frac{\sqrt{26}}{26}, \frac{3\sqrt{26}}{26})$. 于是所求的与 $(1, 1, -1, 1), (1, -1, -1, 1), (2, 1, 1, 3)$ 正交的单位向量为: $\pm\beta$.

习题 8.2

1. 设 V 是数域 F 上的 n 级方阵组成的线性空间, 在 V 上定义内积: $(A, B) = \text{tr}(A\overline{B}^t)$. 试证: 自然基 $E_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 是关于此内积的一组标准正交基.

证明: 只需证明 $E_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 两两正交并且长度为 1 即可. 注意到 $E_{ij}\overline{E_{kl}}^t = E_{ij}E_{lk} = \begin{cases} E_{ik}, & j = l; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$, 很显然有 $(E_{ij}, E_{kl}) = \text{tr}(E_{ij}\overline{E_{kl}}^t) = \begin{cases} E_{il}, & i = k, j = l; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$ 从而 $E_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 两两正交并且长度为 1.

2. 空间 C^3 中向量 $\beta_1 = (1, 0, i), \beta_2 = (2, 1, 1 + i)$ 关于标准内积正交吗? 试求 $V_1 = \text{Span}(\beta_1, \beta_2)$ 的一组正交基.

解: 直接计算得: $(\beta_1, \beta_2) = 3 + i \neq 0$, 所以 β_1 与 β_2 不正交. 由正交化过程, 令 $\alpha = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2 - \frac{(\beta_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\alpha_1 = (\frac{1+i}{2}, 1, \frac{1-i}{2})$, 则 α_2 与 α_1 正交, 从而 α_1, α_2 线性无关, 所以 $\alpha_1 = (1, 0, i), \alpha_2 = (\frac{1+i}{2}, 1, \frac{1-i}{2})$ 是 $V_1 = \text{Span}(\beta_1, \beta_2)$ 的一组正交基.

3. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是 3 维欧氏空间的一组标准正交基, 证明 $\alpha_1 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \alpha_2 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3), \alpha_3 = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3)$ 也是一组标准正交基.

证明: 显然 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)P = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, 容易验证过渡矩阵

P 满足 $PP^t = P^tP = E$, 即 P 是一个正交矩阵, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 也是一组标准正交基.

4. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ 是 5 维欧氏空间的一组标准正交基, $V_1 = \text{Span}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中 $\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. 求 V_1 的一组标准正交基.

解: 由 Schmidt 正交化得 V_1 的一组正交基 $\beta_1 = \alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \frac{3}{5}\varepsilon_1 + \frac{4}{5}\varepsilon_2 - \frac{3}{5}\varepsilon_3 + \frac{1}{5}\varepsilon_4$. 在将其标准化, 即得标准正交基: $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{(\beta_1, \beta_1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_3$, $\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\sqrt{(\beta_2, \beta_2)}} = \frac{\sqrt{10}}{10}\varepsilon_1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\varepsilon_2 - \frac{\sqrt{10}}{10}\varepsilon_3 + \frac{\sqrt{10}}{5}\varepsilon_4$, $\beta_3 = \frac{\beta_3}{\sqrt{(\beta_3, \beta_3)}} = \frac{3\sqrt{35}}{25}\varepsilon_1 + \frac{4\sqrt{35}}{25}\varepsilon_2 - \frac{3\sqrt{35}}{25}\varepsilon_3 + \frac{\sqrt{35}}{25}\varepsilon_4$.

5. 在 $R[x]_4$ 中定义内积为 $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, 求 $R[x]_4$ 的一组标准正交基 (由 $1, x, x^2, x^3$ 出发做正交化).

解: 将 $1, x, x^2, x^3$ 正交化, 得一组正交基 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = x, \alpha_3 = x^2 - \frac{1}{3}, \alpha_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$. 再将其标准化, 得标准正交基 $\beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = \frac{3}{2}x, \beta_3 = 11\frac{45}{4}x^2 - \frac{45}{12}, \beta_4 = 5\frac{\sqrt{14}}{29}x^3 - \frac{\sqrt{210}}{29}x$.

6. 设 A, B 为酉阵, 证明 AB 也是酉阵.

证明: 若 A, B 是酉阵, 则 $A\bar{A}^t = \bar{A}^t A = E$, $B\bar{B}^t = \bar{B}^t B = E$ 。从而 $AB\overline{AB}^t = A(B\bar{B}^t)\bar{A}^t = AE\bar{A}^t = A\bar{A}^t = E$, $\overline{AB}^t AB = \bar{B}^t(\bar{A}^t A)B = \bar{B}^t EB = \bar{B}^t B = E$, 所以 AB 也是酉阵。

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求正交阵 Q 和上三角阵 R , 使得 $A = QR$ 。

解: 设 α_i 为矩阵 A 的第 i 列, 则 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^t, \alpha_2 = (-1, 2, 1)^t, \alpha_3 = (2, 0, 2)^t$ 。将 α_1, α_2 Gram-Schmidt 正交标准化, 得: $e_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)^t, e_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(-1, 2, 1)^t$ 。我们要求 e_3 使得 $Q = (e_1, e_2, e_3)$ 为一个正交矩阵, 于是 e_3 与 e_1, e_2 都正交。解方程组 $\begin{cases} x_1 + 0 + x_3 = 0 \\ -1x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 得 $(x_1, x_2, x_3)^t = (1, 1, -1)$ 。将其标准化得: $e_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, -1)^t$ 。于是

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

习题 8.3

1. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\alpha \neq 0$ 是 V 中固定向量。

(1) 证明: $V_1 = \{x \in V | (x, \alpha) = 0\}$ 是 V 的子空间;

(2) 证明: $\dim V_1 = n - 1$ 。

证明: (1) 对于任意的 $\alpha, \beta \in V_1$ 以及 $k_1, k_2 \in R$, 有 $(x, k_1\alpha + k_2\beta) = k_1(x, \alpha) + k_2(x, \beta) = 0$, 于是 $k_1\alpha + k_2\beta \in V_1$, 所以 $V_1 = \{x \in V | (x, \alpha) = 0\}$ 是 V 的子空间。

(2) 由 $\alpha \neq 0$ 可得 $(\alpha, \alpha) \neq 0$, 从而 $\alpha \notin V_1$ 。所以 V_1 是 V 的真子空间, 于是 $\dim V_1 \leq \dim V - 1 = n - 1$ 。将 α 扩充为 V 的一组正交基 $\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$, 显然 $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in V_1$, 并且 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ 线性无关, 于是又得到: $\dim V_1 \geq n - 1$ 。故 $\dim V_1 = n - 1$ 。

2. 设 V_1, V_2 是欧氏空间的两个子空间, 证明:

$$(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp, (V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$$

证明: (1) 先证明: $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$ 。

对于任意的 $\alpha \in (V_1 + V_2)^\perp$, 由于 $V_1 \subseteq V_1 + V_2$ 以及 $V_2 \subseteq V_1 + V_2$, 得 $\alpha \perp V_1$ 和 $\alpha \perp V_2$, 即 $\alpha \in V_1^\perp$ 并且 $\alpha \in V_2^\perp$ 。于是 $\alpha \in V_1^\perp \cap V_2^\perp$, 即 $(V_1 + V_2)^\perp \subseteq V_1^\perp \cap V_2^\perp$; 对于任意的 $\beta \in V_1^\perp \cap V_2^\perp$, 有 $\beta \in V_1^\perp$ 并且 $\beta \in V_2^\perp$ 。于是 $\beta \perp V_1$ 并且 $\beta \perp V_2$, 所以 $\beta \perp (V_1 + V_2)$, 即 $\beta \in (V_1 + V_2)^\perp$, 从而 $(V_1 + V_2)^\perp \supseteq V_1^\perp \cap V_2^\perp$ 。故而 $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$ 。

(2) 由于 (1) 对于 V 的任意子空间都对, 对 $V_1^\perp, V_2^\perp$ 应用 (1) 得: $(V_1^\perp + V_2^\perp)^\perp = (V_1^\perp)^\perp \cap (V_2^\perp)^\perp = V_1 \cap V_2$ 。对上式两端取正交补得: $(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$ 。

3. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$ 的解空间 W 的一个

标准正交基, 再求 W 在 R^5 中的正交补子空间 W' 的一组标准正交基。

解: 解方程组得一基础解系 $\alpha_1 = (0, 1, 1, 0, 0)^t, \alpha_2 = (-1, 1, 0, 1, 0)^t, \alpha_3 = (4, -5, 0, 0, 1)^t$, 将其标准正交化, 得解空间 W 的一组标准正交基:

$$\beta_1 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)^t, \beta_2 = (\frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}, 0)^t,$$

$$\beta_3 = (\frac{17\sqrt{143}}{143}, -\frac{14\sqrt{143}}{143}, \frac{14\sqrt{143}}{143}, \frac{3\sqrt{143}}{143}, \frac{5\sqrt{143}}{143})^t$$

。容易看到, 方程组的系数矩阵的行向量 $\gamma_1 = (2, 1, -1, 1, -3)^t, \gamma_2 = (1, 1, -1, 0, 1)^t$ 在解空间 W 的正交补 W' 中, 并且它们线性无关, 构成 W' 的一组基。将其标准正交化, 得 W' 的一组标准正交基 $\tau_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^t, \tau_2 = (\frac{7\sqrt{15}}{120}, \frac{3\sqrt{15}}{120}, -\frac{3\sqrt{15}}{120}, \frac{\sqrt{15}}{30}, \frac{13\sqrt{15}}{120})^t$ 。

4. 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, $W(A)$ 是 A 的行向量所张成的线性空间, $N(A)$ 是齐次方程组 $AX = 0$ 的解空间。证明: 关于 R^n 的标准内积, $W(A) \perp N(A)$, 且 $R^n = W(A) \oplus N(A)$ 。

证明: 若用 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 表示矩阵 A 的行向量, 则方程组 $AX = 0$ 可以重新表示为:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \alpha_1 X \\ \alpha_2 X \\ \vdots \\ \alpha_m X \end{pmatrix} = 0$$

即 $\alpha_i X = 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ 。于是 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 与方程组 $AX = 0$ 的任何解 X 关于 R^n 的标准内积都正交。于是我们证明了: $W(A) \perp N(A)$ 。注意到 $W(A)$ 和 $N(A)$ 都是 R^n 的子空间, 若设矩阵 A 的秩为 r , 则 $\dim W(A) = r$, 并且方程组 $AX = 0$ 的解空间 $N(A)$ 的维数为 $\dim N(A) = n - r$ 。取 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ 为 $W(A)$ 的一组基, $\{\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n\}$ 为 $N(A)$ 的一组基。若存在一组数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r + k_{r+1}\alpha_{r+1} + \dots + k_n\alpha_n = 0$, 即 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = -(k_{r+1}\alpha_{r+1} + \dots + k_n\alpha_n)$, 很显然 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r \in W(A)$, $\beta = k_{r+1}\alpha_{r+1} + k_{r+2}\alpha_{r+2} + \dots + k_n\alpha_n \in N(A)$ 。由于 $\alpha = -\beta$, 易见 $\alpha = -\beta \in W(A) \cap N(A)$ 。因 $W(A) \perp N(A)$, 有 $W(A) \cap N(A) = \{0\}$ 。于是 $\alpha = 0, \beta = 0$ 。由 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ 为 $W(A)$ 的基以及 $\{\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n\}$ 为 $N(A)$ 的基, 可得 $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ 。于是证明了 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ 线性无关, 从而是 R^n 的一组基。故有 $R^n = W(A) + N(A)$ 。又 $W(A) \cap N(A) = \{0\}$, 所以 $R^n = W(A) \oplus N(A)$ 。

5. 证明: 正规方程组 $A^t A X = A^t b$ 必相容。

证明: 分两种情况讨论。

(1) 当矩阵 A 的列线性无关时, 由于矩阵 $A^t A$ 可逆, 容易验证 $X = (A^t A)^{-1} A^t b$ 就是方程组 $A^t A X = A^t b$ 的一个解。

(2) 当矩阵 A 的列线性相关时, 矩阵 A 有满秩分解: $A = BC$, 其中矩阵 B 是列满秩矩阵, 它是由矩阵 A 的一个列向量极大无关组为列组成的矩阵, 矩阵 C 为一行满秩矩阵。于是方程组 $A^t A X = A^t b$ 与方程组 $C^t B^t B C X = C^t B^t b$ 等价。因为矩阵 C^t 是列满秩矩阵, C^t 有左逆 P , 使得 $P C^t = E$ 。于是方程组 $C^t B^t B C X = C^t B^t b$ 与方程组 $B^t B C X = P C^t B^t b$ 等价。因 B 列满秩, 矩阵 $B^t B$ 可逆, 于是方程组 $B^t B C X = P C^t B^t b$ 又与方程组 $C X = B^t B P C^t B^t b$ 等价。若记 $\beta = B^t B P C^t B^t b$, 则方程组 $C X = B^t B P C^t B^t b$ 就改写为 $C X = \beta$ 。因 C 的行向量组是线性无关的, 于是对于任意的 β , 都有 $\text{rank}(C) \leq \text{rank}(C|\beta) \leq \text{rank}(C)$, 所以方程组 $C X = \beta$ 总有解。于是我们证明了当矩阵 A 的列线性相关的时候, 方程组 $A^t A X = A^t b$ 也有解。

综合 (1)、(2) 得: 正规方程组 $A^t A X = A^t b$ 总是相容的。

习题 8.4

1. 证明: 上三角的正交矩阵必为对角矩阵, 并且对角线上的元素为 1 或 -1。

证明: 设 A 为正交矩阵, 则 $A A^t = E$, 即 $A^{-1} = A^t$ 。若 A 为上三角矩阵, 则 A^{-1} 仍为上三角矩阵, 而 A^t 为下三角矩阵, 从而 A 必为对角矩阵。这样由 $A^2 = A A^t = E$ 知, A 的对角线上的元素必为 1 或 -1。

2. 如果 $\mathcal{A}$ 是正交变换, 证明: $\mathcal{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。

证明: 设 $\mathcal{A}$ 是欧氏空间 V 上的正交变换, $W \subseteq V$ 为 $\mathcal{A}$ 的不变子空间, W 在 V 中的正交补为 $W^\perp$, 即 $V = W \oplus W^\perp$ 。我们要证明 $W^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。取 W 的一组标准正交基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$, 将其扩充为 V 的一组标准正交基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$, 从而 $W^\perp = \text{Span}\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ 。由于 $\mathcal{A}$ 是正交变换, 从而也是线性变换, 我们只需证明 $\mathcal{A}\alpha_j \in W^\perp, j = r+1, \dots, n$ 即可。因 $\mathcal{A}$ 是正交变换, $\{\mathcal{A}\alpha_1, \dots, \mathcal{A}\alpha_r, \mathcal{A}\alpha_{r+1}, \dots, \mathcal{A}\alpha_n\}$ 仍为 V 的一组标准正交基,

从而有 $(A\alpha_i, A\alpha_j) = 0, 1 \leq i \leq r < r+1 \leq j \leq n$ 。又由于 $W \subseteq V$ 为 A 的不变子空间以及 A 是正交变换, 有 $A\alpha_i \in W, i = 1, 2, \dots, r$ 并且 $W = \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\} = \text{Span}\{A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_r\}$, 所以 $A\alpha_j \in W^\perp, j = r+1, \dots, n$, 即 $W^\perp \subseteq W^\perp$ 。

3. 如果 λ 是正交矩阵 A 的特征值, 证明 λ^{-1} 也是 A 的特征值。

证明: 设 λ 是正交矩阵 A 的特征值, $\xi \neq 0$ 为相应的特征向量, 则有 $A\xi = \lambda\xi$ 。取共轭转置有 $\overline{\lambda\xi}^t = \overline{\xi}^t A^t = \overline{\xi}^t A^{-1}$, 于是有 $\overline{\xi}^t A^{-1} A\xi = \lambda \overline{\lambda\xi}^t \xi$, 即 $\overline{\xi}^t \xi = \lambda \overline{\lambda\xi}^t \xi$ 。因 $\xi \neq 0$, 从而 $\overline{\xi}^t \xi \neq 0$, 故有 $\overline{\lambda}\lambda = 1$, 即 $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$ 。对 $A\xi = \lambda\xi$ 取共轭得: $A\overline{\xi} = \overline{\lambda\xi} = \lambda^{-1}\overline{\xi}$, 所以 λ^{-1} 也是 A 的特征值, 而 $\overline{\xi}$ 为相应的特征向量。

4. 设 A 是欧氏空间 V 的一个变换, 如果 A 保持内积不变, 即对任意的 $\alpha, \beta \in V$, 都有 $(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$, 证明 A 一定是线性的, 因而它是正交变换。

证明: 只需证明, 对于任意的 $\alpha, \beta \in V$ 以及 $k, \ell \in F$ 都有 $A(k\alpha + \ell\beta) = kA\alpha + \ell A\beta$ 。由于 A 保持内积不变, 对于任意的 $\alpha, \beta, \gamma \in V$ 以及 $k, \ell \in F$ 有 $(A(k\alpha + \ell\beta), A\gamma) = (k\alpha + \ell\beta, \gamma)$ 。而 $(k\alpha + \ell\beta, \gamma) = k(\alpha, \gamma) + \ell(\beta, \gamma) = k(A\alpha, A\gamma) + \ell(A\beta, A\gamma) = (kA\alpha + \ell A\beta, A\gamma)$, 于是有 $(A(k\alpha + \ell\beta), A\gamma) = (kA\alpha + \ell A\beta, A\gamma)$, 即 $(A(k\alpha + \ell\beta) - kA\alpha - \ell A\beta, A\gamma) = 0$ 对于任意的 $\gamma \in V$ 都成立。若分别取 $\gamma = k\alpha + \ell\beta, \alpha, \beta$, 则分别得 $(A(k\alpha + \ell\beta) - kA\alpha - \ell A\beta, A(k\alpha + \ell\beta)) = 0$, $(A(k\alpha + \ell\beta) - kA\alpha - \ell A\beta, A\alpha) = 0$ 和 $(A(k\alpha + \ell\beta) - kA\alpha - \ell A\beta, A\beta) = 0$ 。由欧氏空间中内积的线性条件得: $(A(k\alpha + \ell\beta) - kA\alpha - \ell A\beta, A(k\alpha + \ell\beta) - kA\alpha - \ell A\beta) = 0$ 。再由内积的正定性有: $A(k\alpha + \ell\beta) - kA\alpha - \ell A\beta = 0$, 即 $A(k\alpha + \ell\beta) = kA\alpha + \ell A\beta$ 。

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是 n 维欧氏空间中两个向量组, 证明存在一个正交变换 A 使得 $A\alpha_i = \beta_i, i = 1, 2, \dots, m$ 的充分必要条件是 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j), i, j = 1, 2, \dots, m$ 。

证明: 必要性: 若存在正交变换 A 使得 $A\alpha_i = \beta_i, i = 1, 2, \dots, m$, 则显然有 $(\alpha_i, \alpha_j) = (A\alpha_i, A\alpha_j) = (\beta_i, \beta_j), i, j = 1, 2, \dots, m$ 。

充分性: 令 $V_1 = \text{Span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$, $V_2 = \text{Span}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ 。若设 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 为 V_1 的一组基, 下面证明 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$ 为 V_2 的一组基。首先, 若存在一组数 $k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_r}$ 使得 $k_{i_1}\beta_{i_1} + k_{i_2}\beta_{i_2} + \dots + k_{i_r}\beta_{i_r} = 0$, 则对 V_1 的任意基向量 $\alpha_{i_p}, p = 1, 2, \dots, r$, $(\alpha_{i_p}, \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} \alpha_{i_\ell}) = \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} (\alpha_{i_p}, \alpha_{i_\ell}) = \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} (\beta_{i_p}, \beta_{i_\ell}) = (\beta_{i_p}, \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} \beta_{i_\ell}) = (\beta_{i_p}, 0) = 0$, 这样 $\sum_{j=1}^r k_{i_j} \alpha_{i_j}$ 与 V_1 中每一个向量内积都是零, 又 $\sum_{j=1}^r k_{i_j} \alpha_{i_j} \in V_1$, 故 $\sum_{j=1}^r k_{i_j} \alpha_{i_j} = 0$ 。但 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 为 V_1 的一组基, 它是线性无关的, 于是 $k_{i_1} = k_{i_2} = \dots = k_{i_r} = 0$, 即 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$ 线性无关。其次证明 V_2 任意一个向量都可由 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$ 线性表出。这只要证明任意一个 $\beta_j, j = 1, 2, \dots, m$ 都可由 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$ 线性表出即可。显然 $\alpha_j \in V_1$ 可由 V_1 的基 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 线性表出, 不妨设 $\alpha_j = \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} \alpha_{i_\ell}$, 则有对任意 $1 \leq p \leq m$, 有 $(\beta_j - \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} \beta_{i_\ell}, \beta_p) = (\beta_j, \beta_p) - \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} (\beta_{i_\ell}, \beta_p) = (\alpha_j, \alpha_p) - \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} (\alpha_{i_\ell}, \alpha_p) = (\alpha_j - \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} \alpha_{i_\ell}, \alpha_p) = (0, \alpha_p) = 0$ 。由于 $\beta_j - \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} \beta_{i_\ell} \in V_2$ 与 V_2 中每一个向量 β_j 内积都是零, 于是有 $\beta_j - \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} \beta_{i_\ell} = 0$, 即 $\beta_j = \sum_{\ell=1}^r k_{i_\ell} \beta_{i_\ell}$, 所以 $\beta_j, j = 1, 2, \dots, m$ 都可由 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$ 线性表出。这样就有 $\dim V_1 = \dim V_2 = r$ 。并且任意的 $\alpha_j \in V_1, 1 \leq j \leq m$ 在基 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ 下的坐标与 $\beta_j \in V_2, 1 \leq j \leq m$ 在基 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_r}$ 下的坐标相同。若设 $\{\alpha_{i_{r+1}}, \dots, \alpha_{i_n}\}$ 为 $V_1^\perp$ 的一组标准正交基, 则 $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_{i_{r+1}}, \dots, \alpha_{i_n}\}$ 就是整个空间 V 的一组基。同样, 若设 $\{\beta_{i_{r+1}}, \dots, \beta_{i_n}\}$ 为 $V_2^\perp$ 的一组标准正交基, 则 $\{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}, \beta_{i_{r+1}}, \dots, \beta_{i_n}\}$ 也是整个空间 V 的一组基。这样, 我们定义线性变换 $A: V \rightarrow V, \sum_{j=1}^n k_{i_j} \alpha_{i_j} = \sum_{j=1}^n k_{i_j} \beta_{i_j}$, 则因任意的 $\alpha \in V_1$ 在基 $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}, \alpha_{i_{r+1}}, \dots, \alpha_{i_n}\}$ 下的坐标与 $A(\alpha) \in V_2$ 在基 $\{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}, \beta_{i_{r+1}}, \dots, \beta_{i_n}\}$ 的坐标完全相同, 容易验证 A 是 V 上一个保持内积的线性变换, 从而是正交变换, 并且满足 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j), i, j = 1, 2, \dots, m$ 。

习题 8.5

1 证明实反对称矩阵的特征值是零或纯虚数。

证明: 设 λ 为 A 的特征值, ξ 为相应的特征向量, 则 $A\xi = \lambda\xi$ 。用 $\bar{\xi}^t$ 左乘上式得: $\bar{\xi}^t A\xi = \lambda\bar{\xi}^t \xi$ 。取共轭转置得: $-\bar{\xi}^t A\xi = \bar{\xi}^t (-A)\xi = \overline{\lambda\xi}^t \xi$ 。于是有: $\overline{\lambda\xi}^t \xi = -\lambda\bar{\xi}^t \xi$ 。但特征向量 $\xi \neq 0$, 所以 $\bar{\xi}^t \xi \neq 0$ 。消去 $\bar{\xi}^t \xi$ 得 $\bar{\lambda} = -\lambda$, 即 λ 为零或纯虚数。

2 求正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT$ 成为对角矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

解: (1) 矩阵 A 的特征多项式为 $\Delta_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$ 。从而特征值为: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$ 。取属于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量 $(-2, -1, 2)^t$, 将其单位化得: $\xi_1 = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t$ 。取 $\lambda_2 = 4$ 的特征向量 $(2, -2, 1)^t$, 单位化得 $\xi_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})^t$ 。取 $\lambda_3 = -2$ 的特征向量 $(1, 2, 2)^t$, 单位化得 $\xi_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^t$ 。令 $T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, 则有 $T^{-1}AT = \text{diag}(1, 4, -2)$ 。

(2) 矩阵 A 的特征多项式为 $\Delta_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda-4)$ 。从而特征值为: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$ 。取属于 $\lambda_1 = 0$ 的特征向量 $(-1, 0, 0, 1)^t, (-1, 0, 1, 0)^t, (-1, 1, 0, 0)^t$, 将其单位化得: $\xi_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^t, \xi_2 = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6})^t, \xi_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6})^t$ 。取 $\lambda_2 = 4$ 的特征向量 $(1, 1, 1, 1)^t$, 单位化得 $\xi_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$ 。令 $T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 则有 $T^{-1}AT = \text{diag}(0, 0, 0, 4)$ 。

3. 设 A 为 n 级实矩阵, 证明: 存在正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT$ 为上三角矩阵的充分必要条件为 A 的特征多项式的根全是实的。

证明: 必要性: 若存在正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT$ 为上三角矩阵, 则因 A 和 T 都是实矩阵, 从而上三角矩阵 $T^{-1}AT$ 对角线上的元素都是实数。而上三角矩阵的特征值就是其对角线上的元素, 所以 $T^{-1}AT$ 的特征值是实数。由于 A 与相似 $T^{-1}AT$, A 的特征值也全是实数。

充分性: 若 A 的特征多项式的根全是实的, 由习题 6.5.2 的 (2), 存在实可逆方阵 P 使得 $P^{-1}AP = S$ 为上三角阵。因 P 可逆, 其列向量 $P_1, P_2, \dots, P_n \in R^n$ 并且线性无关。由 Schmidt 正交化过程, 可将 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 标准正交化成一组标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, 并且从 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 到 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 的过渡矩阵为可逆的上三角阵。即存在可逆上三角阵 T_1 使得 $(P_1, P_2, \dots, P_n) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)T_1$ 。若记 $T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, 则 T 为正交矩阵, 并且 $P = TT_1$ 。从而有 $T_1^{-1}T^{-1}ATT_1 = S$ 。所以 $T^{-1}AT = T_1ST_1^{-1}$ 仍为上三角矩阵。

4. 设 A, B 都是实对称矩阵, 证明: 存在正交矩阵 T , 使得 $T^{-1}AT = B$ 的充分必要条件是 A, B 的特征多项式的根全部相同。

证明:

5. 设 A 为 n 级实对称矩阵, 并且 $A^2 = A$ 。证明存在正交矩阵 T 使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

证明: 设 λ 为 A 的特征值, ξ 为相应的特征向量, 则有 $A\xi = \lambda\xi$ 。因为 A 实对称矩阵, 左乘 $\bar{\xi}^t$ 得 $\bar{\xi}^t A\xi = \lambda\bar{\xi}^t \xi$ 。取共轭转置得 $\overline{\lambda\xi^t} = \bar{\xi}^t A^t = \bar{\xi}^t A\xi = \lambda\bar{\xi}^t \xi$ 。由 $\xi \neq 0$ 得 $\bar{\lambda} = \lambda$, 从而 λ 是实数。又由 $A^2 = A$ 得 $\lambda\xi = A\xi = AA\xi = \lambda A\xi = \lambda^2\xi$, 所以 $\lambda^2 = \lambda$ 。故 A 的特征值为 1 或 0。这样

$$A \text{ 与 } \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{其中对角线上 1 的个数与矩阵 } A \text{ 的特征值中 1 的个数相})$$

同) 都是实对称矩阵, 并且有完全相同的特征值, 由上一习题, 存在正交矩阵 T 使得

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

6. 欧氏空间中的线性变换 T 称为反对称的, 如果对任意的 $\alpha, \beta \in V$ 都有 $(T\alpha, \beta) = -(\alpha, T\beta)$ 。
证明:

(1) T 为反对称的充分必要条件是 T 在一组标准正交基下的矩阵为反对称矩阵;

(2) 如果 V_1 是反对称线性变换的不变子空间, 则 $V_1^\perp$ 也是它的不变子空间。

证明: (1) 设线性变换 T 在欧氏空间中的一组标准正交基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 下的矩阵为 A , 即 $T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$ 。若记 $A = (a_{ij})$, 则由上式得: $T\alpha_i = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell i} \alpha_\ell$ 。于是有: $(T\alpha_i, \alpha_j) = \sum_{\ell=1}^n a_{\ell i} (\alpha_\ell, \alpha_j) = a_{ji}$ 和 $(\alpha_i, T\alpha_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} (\alpha_i, \alpha_k) = a_{ij}$ 。若 T 为反对称的, 则有 $(T\alpha_i, \alpha_j) = -(\alpha_i, T\alpha_j)$, 从而 $a_{ij} = -a_{ji}$, 即 $A^t = -A$, 所以矩阵 A 是反对称的。反之, 若矩阵 A 是反对称的, 则显然有 $(T\alpha_i, \alpha_j) = -(\alpha_i, T\alpha_j)$ 。从而对于任意的 $\alpha = \sum_{k=1}^n a_k \alpha_k, \beta = \sum_{\ell=1}^n b_\ell \alpha_\ell \in V$, 有 $(T\alpha, \beta) = (\sum_{k=1}^n a_k T\alpha_k, \sum_{\ell=1}^n b_\ell \alpha_\ell) = \sum_{k,\ell=1}^n a_k b_\ell (T\alpha_k, \alpha_\ell) = -\sum_{k,\ell=1}^n a_k b_\ell (\alpha_k, T\alpha_\ell) = -(\sum_{k=1}^n a_k \alpha_k, \sum_{\ell=1}^n b_\ell T\alpha_\ell) = -(\alpha, T\beta)$ 。所以 T 是反对称的线性变换。

(2) 只需证明对于任意的 $\alpha \in V_1^\perp$, 都有 $T\alpha \in V_1^\perp$ 即可。对于任意的 $\alpha \in V_1^\perp$ 和任意的 $\beta \in V_1$, 因 V_1 是反对称线性变换 T 的不变子空间, 即 $T\beta \in V_1$, 于是有 $(T\alpha, \beta) = -(\alpha, T\beta) = 0$ 。由 $\beta \in V_1$ 的任意性得 $T\alpha \in V_1^\perp$ 。

习题 8.6

1. 用正交的变量替换化下列二次型为标准形:

(1) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(2) $2x_1x_2 + 2x_3x_4$ 。

解: (1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 。 A 的特征多项式为 $\Delta_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda -$

5) $(\lambda + 1)$, 从而其特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -1$ 。取 $\lambda_1 = 2$ 的特征向量 $(-2, 1, 2)^t$, 将其标准化得 $\xi_1 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})^t$ 。取 $\lambda_2 = 5$ 的特征向量 $(1, -2, 2)^t$, 标准化得 $\xi_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^t$ 。取 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量 $(2, 2, 1)^t$, 标准化得 $\xi_3 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^t$ 。于是矩阵 $O = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 是

一个第一类的正交矩阵, 并且 $O^t A O = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 。作正交变量替换 $X = OY$, 得二次型的

标准形为 $2y_1^2 + 5y_2^2 - y_3^2$ 。

(2) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。A 的特征多项式为 $\Delta_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$,

从而其特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ 。取 $\lambda_1 = 1$ 的线性无关的特征向量 $(1, 1, 0, 0)^t, (0, 0, 1, 1)^t$, 将其标准化得 $\xi_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)^t, \xi_2 = (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^t$ 。取 $\lambda_2 = -1$ 的线性无关的特征向量 $(1, -1, 0, 0)^t, (0, 0, -1, 1)^t$, 标准化得 $\xi_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)^t, \xi_4 = (0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^t$ 。于是矩阵 $O =$

$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 是一个第一类的正交矩阵, 并且 $O^t A O = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ 。

作正交变量替换 $X = OY$, 得二次型的标准形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$ 。

2. 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^t A X$ 是一个实二次型, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的特征多项式的根, 且 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ 。证明: 对于任意的 $X \in R^n$, 有: $\lambda_1 X^t X \leq X^t A X \leq \lambda_n X^t X$ 。

证明: 由于 A 是实对称矩阵, 存在一个正交矩阵 O, 使得 $O^t A O = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 。做变量替换 $X = OY$, 得 $X^t A X = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ 。又 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, 于是对于任意的 $Y \in R^n$, 有 $\lambda_1(y_1^2 + \dots + y_n^2) \leq \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \leq \lambda_n(y_1^2 + \dots + y_n^2)$ 。而 $X^t X = Y^t O^t O Y = Y^t Y = y_1^2 + \dots + y_n^2$, 所以对于任意的 $X \in R^n$ 有 $\lambda_1 X^t X \leq X^t A X \leq \lambda_n X^t X$ 。

3. 设二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的矩阵为 A, λ 为 A 的特征值, 证明存在 R^n 中的非零向量 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ 使得 $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \lambda(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \dots + \bar{x}_n^2)$ 。

证明: 因 A 是实对称矩阵, 其特征值 λ 必为实数, 故属于 λ 的特征向量 $\xi = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^t \in R^n$ 并且 $\xi \neq 0$ 。所以 $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = \xi^t A \xi = \lambda \xi^t \xi = \lambda(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \dots + \bar{x}_n^2)$ 。

补充题 8

1. 设 η 为欧氏空间中的一个单位向量, 定义 $A\alpha = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta$ 。

证明:

(1) A 是正交变换。这样的正交变换称为 **镜面反射**;

(2) A 是第二类的;

(3) 如果 n 维欧氏空间中, 正交变换 A 以 1 作为一个特征值, 且属于特征值 1 的特征子空间 V_1 的维数为 $n - 1$, 那么 A 是镜面反射。

证明: (1) 因 η 是单位向量, 它可扩充为欧氏空间 V 的一组标准正交基 $\{\eta, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}\}$ 。容易看到: $A(\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = (\eta, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})A$, 其中 $A = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$ 。容易验证 A 是正交矩阵, 从而 A 是正交变换。

(2) 由 (1) 知道, 正交变换 A 的行列式为 -1 , 所以 A 是第二类的。

(3) 由于正交变换均可酉相似与对角矩阵, 所以正交矩阵的每一个特征值的代数重数等于其几

何重数。又由于正交矩阵的行列式为 ± 1 ，且等于其全体特征值的乘积，而 1 的几何重数（也是代数重数）为 $n-1$ ， -1 为 $\mathcal{A}$ 的一个一重特征值。若取 η 为特征值 -1 的一个单位特征向量，则由于 $\eta \in V_1^\perp$ ，容易知道 $\mathcal{A}\alpha = \alpha - 2(\eta, \alpha)\eta$ 对于任意的 $\alpha \in V$ 都成立，从而 $\mathcal{A}$ 是一个镜面反射。

8.2 证明：

- (1) 第二类正交变换一定以 -1 作为它的一个特征值；
- (2) 奇数维欧氏空间中的旋转一定以 1 作为它的一个特征值。

证明：正交变换 $\mathcal{A}$ 的特征多项式 $\Delta_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 是一个实系数多项式，其特征根要么是 ± 1 ，要么是模为 1 的复数 $\lambda = a + b\sqrt{-1}$ ，且 λ 与其共轭复数 $\bar{\lambda} = a - b\sqrt{-1}$ 成对出现。

(1) 若 $\mathcal{A}$ 是第二类的，则其行列式，从而其所有特征值的积为 -1 。故 $\mathcal{A}$ 必以 -1 为其一个特征值。

(2) 若 V 是奇数维的，则 $\mathcal{A}$ 有 n 个特征值。由 $\mathcal{A}$ 是一旋转知，其行列式（等于其所有特征值的积）为 1 。这样 1 必为 $\mathcal{A}$ 的一个特征值。

3. 若 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ 分别是第一类、第二类正交变换，则 $\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$ 不是一个可逆线性变换。

证明：取欧氏空间 V 的一组标准正交基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ，则 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ 在该组基下的矩阵 O_1, O_2 分别为行列式 $1, -1$ 的正交矩阵。由于 $\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2$ 为可逆线性变换的充分必要条件为矩阵 $O_1 + O_2$ 为可逆矩阵，我们只需证明矩阵 $O_1 + O_2$ 不可逆即可。易知 $O_1^{-1}O_2$ 仍为正交矩阵且其行列式为 -1 ，于是存在一个酉矩阵 U 使得 $U^{-1}O_1^{-1}O_2U$ 为对角矩阵，且对角线上的元素有一个为 -1 。于是对角矩阵 $U^{-1}O_1^{-1}(O_1 + O_2)U = U^{-1}(E + O_1^{-1}O_2)U = E + U^{-1}O_1^{-1}O_2U$ 的对角线上有一个元素为零，所以 $U^{-1}O_1^{-1}(O_1 + O_2)U$ 行列式为零，从而 $O_1 + O_2$ 的行列式为零，即 $O_1 + O_2$ 不可逆。

4. (1) 设 α, β 是欧氏空间 V 中两个不同的单位向量，证明存在一个镜面反射 $\mathcal{A}$ ，使得 $\mathcal{A}\alpha = \beta$ ；

(2) 证明： n 维欧氏空间中任意一个正交变换都可以表为一系列镜面反射的积。

证明：(1) 一个镜面反射 $\mathcal{A}\alpha = \alpha - 2(\alpha, \eta)\eta$ 完全由一个单位向量 η 所决定。我们要找一个单位向量 η ，使得反射 $\mathcal{A}\alpha = \alpha - 2(\alpha, \eta)\eta$ 满足 $\mathcal{A}\alpha = \alpha - 2(\alpha, \eta)\eta = \beta$ 。令 $V_1 = \{\gamma \in V | (\gamma, \eta) = 0\}$ ，则 $V = R\eta \oplus V_1$ 。设向量 α, β 的分解为 $\alpha = k\eta + \xi_1, \beta = \ell\eta + \xi_2$ ，其中 $\xi_1, \xi_2 \in V_1$ 。由 $\mathcal{A}\alpha = (k\eta + \xi_1) - 2(k\eta + \xi_1, \eta)\eta = k\eta + \xi_1 - 2k\eta = -k\eta + \xi_1$ 以及 $\mathcal{A}\alpha = \beta$ 知： $\ell = -k, \xi_1 = \xi_2$ 。于是 $\alpha = k\eta + \xi_1, \beta = -k\eta + \xi_1$ 。二式相减得： $\eta = \frac{1}{2k}(\alpha - \beta)$ 。但 η 是单位向量，所以 $2k = |\alpha - \beta|$ 。于是我们取 $\eta = \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|}$ 即可。

(2) 我们对 n 维欧氏空间 V 的维数 n 运用数学归纳法。当 $n = 1$ 是， $\mathcal{A} = \pm 1$ 。当 $\mathcal{A} = -1$ 时， $\mathcal{A}$ 已经是镜面反射；当 $\mathcal{A} = 1$ 时， $\mathcal{A} = 1 = (-1)(-1)$ 是两个镜面反射之积。所以当 $n = 1$ 时结论是正确的。假设 $n-1$ 维欧氏空间中任意一个正交变换都可以表为一系列镜面反射的积。当 $\dim V = n$ 时， $\mathcal{A}$ 将一组标准正交基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 变为一组标准正交基 $\{\beta_1 = \mathcal{A}\alpha_1, \beta_2 = \mathcal{A}\alpha_2, \dots, \beta_n = \mathcal{A}\alpha_n\}$ 。由于 $\|\alpha_n\| = \|\beta_n\|$ ，当 $\alpha_n \neq \beta_n$ 时，由 (1) 知存在一个镜面反射 $\mathcal{A}_0$ 使得 $\mathcal{A}_0\alpha_n = \beta_n$ 。当 $\alpha_n = \beta_n$ 时，我们只要取一个满足条件 $(\alpha_n, u) = 0$ 的单位向量 u ，则镜面反射 $\mathcal{A}_0\alpha = \alpha - 2(\alpha, u)u$ 也满足 $\mathcal{A}_0\alpha_n = \beta_n$ 。总之，只要 $\|\alpha_n\| = \|\beta_n\|$ ，则不论 α_n 与 β_n 是否相等，总有一个镜面反射 $\mathcal{A}_0$ 使得 $\mathcal{A}_0\alpha_n = \beta_n$ 。令 $V_1 = \{\alpha \in V | (\alpha, \beta_n) = 0\}$ ，则 $V_1 = \text{Span}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}\}$ 。因 $\mathcal{A}_0$ 为正交变换，有 $(\mathcal{A}_0\alpha_i, \beta_n) = (\mathcal{A}_0\alpha_i, \mathcal{A}_0\alpha_n) = (\alpha_i, \alpha_n) = 0$ 对任意的 $i < n$ 成立，从而 $\gamma_i = \mathcal{A}_0\alpha_i \in V_1 (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 。于是 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ 都是 $n-1$ 维欧氏空间 V_1 的标准正交基，存在 V_1 上的正交变换 $\mathcal{C}$ 使得 $\mathcal{C}\gamma_i = \beta_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 。根据归纳假设，存在 V_1 上一系列的镜面反射 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_\ell$ 使得 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\ell \mathcal{C}_{\ell-1} \cdots \mathcal{C}_1$ 。由于 $V = R\beta_n \oplus V_1$ ，我们可以将 V_1 上的镜面反射 $\mathcal{C}_i$ 扩充为 V 上的一个镜面反射如下：令 $\mathcal{A}_i|_{V_1} = \mathcal{C}_i$ ， $\mathcal{A}_i|_{R\beta_n} = \mathcal{I} (i = 1, 2, \dots, \ell)$ 。这样就有： $(\mathcal{A}_\ell \mathcal{A}_{\ell-1} \cdots \mathcal{A}_1)\gamma_i = \beta_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 并且 $(\mathcal{A}_\ell \mathcal{A}_{\ell-1} \cdots \mathcal{A}_1)\beta_n = \beta_n$ ，于是 $(\mathcal{A}_\ell \mathcal{A}_{\ell-1} \cdots \mathcal{A}_1)\mathcal{A}_0\alpha_i = \beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，所以 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\ell \mathcal{A}_{\ell-1} \cdots \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_0$ 。

5. 证明：在酉空间中，对于每一个正规矩阵 N ，都存在正规矩阵 B 使得 $B^m = N$ ，其中 m 为任意正整数。

证明：由定理知，正规矩阵 N 酉相似与对角矩阵，即存在一个酉矩阵 U ，使得 $U^{-1}NU = \overline{U}^t NU =$

$\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 。对任意正整数 m ，令 $B = U^{-1} \text{diag}(\sqrt[m]{\lambda_1}, \sqrt[m]{\lambda_2}, \dots, \sqrt[m]{\lambda_n}) U$ ，则显然 B 为正规矩阵，并且 $N = B^m$ 。

6. 证明：如果 W 是正规变换 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间，则它的正交子空间 $W^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。

证明：首先我们先介绍一下正规线性变换的概念。给定线性变换 $\mathcal{A}$ ，我们可以定义一个新的线性变换 $\mathcal{A}^*$ 如下：取定 $\beta \in V$ ，因 $\mathcal{A}$ 是线性变换， $(\mathcal{A}\alpha, \beta)$ 是关于向量 α 的一个从 V 到 $F(F = R \text{ 或者 } F = C)$ 的线性映射（函数）。由内积的性质知道，存在唯一的向量 $\beta' \in V$ ，使得 $(\alpha, \beta') = (\mathcal{A}\alpha, \beta)$ 对于任意的 $\alpha \in V$ 成立。定义： $\mathcal{A}^*\beta = \beta'$ ，则 $\mathcal{A}^*$ 是从 V 到 V 的一个映射。又因为 $(\alpha, \mathcal{A}^*(a\beta_1 + b\beta_2)) = (\mathcal{A}\alpha, a\beta_1 + b\beta_2) = \overline{a}(\mathcal{A}\alpha, \beta_1) + \overline{b}(\mathcal{A}\alpha, \beta_2) = \overline{a}(\alpha, \mathcal{A}^*\beta_1) + \overline{b}(\alpha, \mathcal{A}^*\beta_2) = (\alpha, a\mathcal{A}^*\beta_1 + b\mathcal{A}^*\beta_2)$ 对于任意的 $\alpha \in V$ 成立，所以有 $\mathcal{A}^*(a\beta_1 + b\beta_2) = a\mathcal{A}^*\beta_1 + b\mathcal{A}^*\beta_2$ 对于任意的 $a, b \in F$ 和任意的 $\beta_1, \beta_2 \in V$ 成立。所以 $\mathcal{A}^*$ 是 V 上的线性变换。线性变换 $\mathcal{A}^*$ 称为线性变换 $\mathcal{A}$ 的共轭变换，它完全由 $\mathcal{A}$ 确定。若设 $\mathcal{A}$ 标准正交基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 下的矩阵为 A ，即 $\mathcal{A}(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n)A$ ，则 $a_{ij} = (\mathcal{A}e_j, e_i)$ 。若设 $\mathcal{A}^*$ 标准正交基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 下的矩阵为 B ，则 $b_{kl} = (\mathcal{A}^*e_l, e_k)$ 。由 $\mathcal{A}$ 是正规变换得： $b_{ij} = (\mathcal{A}^*e_j, e_i) = \overline{(e_i, \mathcal{A}^*e_j)} = \overline{(\mathcal{A}e_i, e_j)} = \overline{a_{ji}}$ ，所以 $\mathcal{A}^*$ 在该标准正交基下的矩阵就是 $B = \overline{A}^t$ 。当 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$ 时， $\mathcal{A}^*$ 就是酉（正交）变换；当 $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ 时， $\mathcal{A}^*$ 就是厄米特（对称）变换。所谓的正规变换，就是指满足条件 $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ 的线性变换。也就是在标准正交基下其矩阵满足 $A\overline{A}^t = \overline{A}^t A$ 的线性变换。

对于内积空间 V 的任意子空间 W ，有 $V = W \oplus W^\perp$ 。若取 W 的一组标准正交基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 和 $W^\perp$ 的一组标准正交基 $\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ ，则 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 就是 V 的一组标准正交基。设 $\mathcal{A}$ 在该组基下的矩阵为 A ，如果 W 是正规变换 $\mathcal{A}$ 的一个不变子空间，则 A 为上三角矩阵，即 $\mathcal{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$ 。由于 $\mathcal{A}$ 为正规变换，其矩阵 A 应满足条件 $A\overline{A}^t = \overline{A}^t A$ 。于是得到 $A_{12} = 0$ ，从而 A 为准对角矩阵，进而有 $\mathcal{A}W^\perp \subseteq W^\perp$ 。所以 $W^\perp$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。

7. 证明：若 A 为酉空间的厄米特矩阵，则 $A + \sqrt{-1}E$ 可逆，由下式

$$U = (A - \sqrt{-1}E)(A + \sqrt{-1}E)^{-1}$$

所确定的矩阵 U 为酉矩阵，它没有等于 1 的特征值，并且

$$A = -\sqrt{-1}(U + E)(U - E)^{-1}.$$

反之，若 U 为酉矩阵且没有等于 1 的特征值，则 $U - E$ 可逆，

$$A = -\sqrt{-1}(U + E)(U - E)^{-1}$$

是厄米特矩阵，并且

$$U = (A - \sqrt{-1}E)(A + \sqrt{-1}E)^{-1}.$$

证明：若 A 为厄米特矩阵，则 A 可酉相似与一个对角矩阵，即存在酉矩阵 V 使得 $V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ，其中 $0 \neq \lambda_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$ 为 A 的特征值。从而 $V^{-1}(A + \sqrt{-1}E)V = \text{diag}(\lambda_1 + \sqrt{-1}, \dots, \lambda_n + \sqrt{-1})$ ，而对角线上的每一个元素 $\lambda_i + \sqrt{-1} \neq 0$ ，所以 $A + \sqrt{-1}E$ 的行列式不为零，即可逆。因 A 为厄米特矩阵， $\overline{A}^t A = A$ ，容易验证 $(A - \sqrt{-1}E)(\overline{A}^t + \sqrt{-1}E) = (A - \sqrt{-1}E)(A + \sqrt{-1}E) = A^2 + E = (A + \sqrt{-1}E)(A - \sqrt{-1}E) = (\overline{A}^t + \sqrt{-1}E)(A - \sqrt{-1}E)$ 。于是 $\overline{U}^t U = (\overline{A}^t - \sqrt{-1}E)^{-1}(\overline{A}^t + \sqrt{-1}E)(A - \sqrt{-1}E)(A + \sqrt{-1}E)^{-1} = (A - \sqrt{-1}E)^{-1}(A - \sqrt{-1}E)(\overline{A}^t + \sqrt{-1}E)(A + \sqrt{-1}E)^{-1} = (A + \sqrt{-1}E)(A + \sqrt{-1}E)^{-1} = E$ 。同样可得 $U\overline{U}^t = E$ 。所以 U 为酉矩阵。若 U 有等于 1 的特征值，不妨设 $\xi \neq 0$ 为其特征向量，则 $U\xi = \xi$ ，即 $(A - \sqrt{-1}E)(A + \sqrt{-1}E)^{-1}\xi = \xi$ 。由 $A + \sqrt{-1}E$ 可逆， $\eta = (A + \sqrt{-1}E)^{-1}\xi \neq 0$ 。将上式变形得： $(A - \sqrt{-1}E)\eta = (A + \sqrt{-1}E)\eta$ ，即

$2\sqrt{-1}\eta = 0$, 矛盾。所以 U 没有等于 1 的特征值, 而酉矩阵 U 的特征值的模为 1, 易知 $U - E$ 可逆。由 $U = (A - \sqrt{-1}E)(A + \sqrt{-1}E)^{-1}$ 得: $(A + \sqrt{-1}E)U = A - \sqrt{-1}E$, 进而 $A(U - E) = -\sqrt{-1}(U + E)$, 所以 $A = -\sqrt{-1}(U + E)(U - E)^{-1}$ 。

反之, 若 U 为酉矩阵且没有等于 1 的特征值, 易得 $U - E$ 可逆。与上面完全类似, 可以验证 $A = -\sqrt{-1}(U + E)(U - E)^{-1}$ 是厄米特矩阵, 并且 $U = (A - \sqrt{-1}E)(A + \sqrt{-1}E)^{-1}$ 。

第九章 习题答案

习题 9.1

1. 用可逆变量替换化下列二次型为标准形, 并利用矩阵验算所得结果:

(1) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$;

(2) $8x_1x_4 + 2x_3x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$.

解: (1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2$. 作变量替换: $\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$, 即: $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$, 写成矩阵的形式, 即: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 显然可逆, 则 $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2$ 就是

标准形. 原二次型的矩阵为: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 其标准形的矩阵为: $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 容

易验证确实有: $P^tAP = \Lambda$.

(2) 作变量替换: $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$, 即: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, 其中 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

显然可逆, 则 $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 2y_2^2 + 10y_2y_4 + 6y_3y_4 + 8y_1y_4 - 2y_3^2 = 2y_1^2 + 2(y_2 + \frac{5}{2}y_4)^2 - 2(y_3 -$

$\frac{3}{2}y_4)^2 - 8(y_4 - \frac{1}{2}y_1)^2$. 再作变量替换 $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 + \frac{5}{2}y_4 = z_2 \\ y_3 - \frac{3}{2}y_4 = z_3 \\ y_4 - \frac{1}{2}y_1 = z_4 \end{cases}$, 即: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$, 其中

$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 显然可逆, 此时 $f(z_1, z_2, z_3, z_4) = 2z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2 - 8z_4^2$ 为标准形. 原

二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 其标准形的矩阵为: $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$. 容易验

证确实有: $P^tAP = \Lambda$, 其中 $P = P_1P_2$.

2. 证明: 秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之积.

证明: 由于任何对称矩阵均合同于一个对角矩阵, 并且对角矩阵的对角线上非零元素的个数就

是该矩阵的秩, 于是存在一个可逆矩阵 P , 使得 $P^tAP = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $d_i \neq$

$0(i=1,2,\cdots,r)$ 。如果令 $A_i = (P^t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, 则显然 $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$,

并且 $A_i (i=1,2,\cdots,r)$ 为秩等于 1 的对称矩阵。

3. 证明:

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$ 合同, 其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列。

证明: 用 e_i 表示第 i 个元素为 1 而其余元素都是 0 的 n 维行向量, 则 $e_i \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_i e_i$ 。若记 $P = \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix}$, 则 $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^t = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} e_{i_1} \\ \lambda_{i_2} e_{i_2} \\ \vdots \\ \lambda_{i_n} e_{i_n} \end{pmatrix} (e_{i_1}^t, e_{i_2}^t, \cdots, e_{i_n}^t) = \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$ 。

4. 设 A 是一个 n 级方阵。证明:

(1) A 是反对称矩阵当且仅当对任意一个 n 维列向量 X , 有 $X^t A X = 0$;

(2) 如果 A 是对称矩阵, 且对任意 n 维列向量 X 有 $X^t A X = 0$, 那么 $A = 0$!

证明: (1) 必要性: 若 A 是反对称矩阵, 则 $A^t = -A$ 。由于对任意一个 n 维列向量 X , $X^t A X$ 是一个数, 其转置仍为自身, 于是 $X^t A X = (X^t A X)^t = X^t A^t X = -X^t A X$, 即 $X^t A X = 0$ 。

充分性: 如果任意一个 n 维列向量 X , 有 $X^t A X = 0$, 我们用 e_i 表示第 i 个元素为 1 而其余元素都是 0 的 n 维列向量, 则 $a_{ii} = e_i^t A e_i = 0$, 从而 $0 = (e_i + e_j)^t A (e_i + e_j) = a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = a_{ij} + a_{ji}$, 即 $a_{ji} = -a_{ij}$ 。故 A 是反对称矩阵。

(2) 若 A 是对称矩阵, 且对任意 n 维列向量 X 有 $X^t A X = 0$, 则 $a_{ii} = e_i^t A e_i = 0$, $0 = (e_i + e_j)^t A (e_i + e_j) = a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} = a_{ij} + a_{ji}$ 。由 A 对称知 $a_{ij} = a_{ji}$, 所以 $a_{ij} = a_{ji} = 0$, 即 $A = 0$ 。

5. 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ 为对称矩阵, 且 $|A_{11}| \neq 0$ 。证明存在 $T = \begin{pmatrix} E & O \\ X & E \end{pmatrix}$ 使得 $T A T^t = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & \star \end{pmatrix}$, 其中 $\star$ 表示一个级数与 A_{22} 相同的方阵。

证明: 由 A 对称得: $\begin{pmatrix} A_{11}^t & A_{21}^t \\ A_{12}^t & A_{22}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, 即 $A_{11}^t = A_{11}$ 、 $A_{22}^t = A_{22}$ 、 $A_{12}^t = A_{21}$ 和 $A_{21}^t = A_{12}$ 。若令 $X = -A_{21} A_{11}^{-1}$, 则

$$\begin{aligned}
 TAT^t &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} T^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} - A_{11}(A_{11}^{-1})^t A_{21}^t \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

习题 9.2

1. 设 A 是实对称矩阵, 且 A 满秩, 证明 A 与 A^{-1} 合同。

证明: 因 A 满秩, 所以 A 可逆。又 A 对称, 所以 $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$ 。若取 $P = A^{-1}$, 则 $P^tAP = A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$ 。

2. 如果把实 n 级对称矩阵按合同关系分类, 即两个实 n 级对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同, 一共有几类?

解: 实 n 级对称矩阵的秩可以为 $0, 1, 2, \dots, n$, 而秩为 r 的实 n 级对称矩阵的正惯性指数可以是 $0, 1, \dots, r$, 共有 $r+1$ 个合同类。于是实 n 级对称矩阵共有 $1+2+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个合同类。

3. 证明: 一个实二次型可以分解为两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是它的秩等于 2 且符号差等于 0, 或者秩等于 1。

证明: 必要性: 若二次型 $f(y_1, \dots, y_n) = Y^tAY$ 可以分解为两个实系数的一次齐次多项式的乘积, 即存在两个一次齐次多项式 $\varphi_1 = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n$ 和 $\varphi_2 = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_ny_n$ (其中 $a_i, b_i \in R$ 且不全为零), 使得 $f(y_1, \dots, y_n) = \varphi_1\varphi_2$ 。当 φ_1 与 φ_2 相差一非零倍数 λ , 即 $\varphi_1 = \lambda\varphi_2$ (或者写成 $a_i = \lambda b_i (i = 1, 2, \dots, n)$) 的时候, 由于 $a_1, \dots, a_n$ 不全为零, 一定存在某个 $a_i \neq 0$ 。此

时作变量替换 $\begin{cases} y_\ell = z_\ell \\ \ell \neq i \\ \varphi_2 = z_i \end{cases}$, 即 $Y = PZ$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ -b_1 & \cdots & -b_{i-1} & 1 & -b_{i+1} & \cdots & -b_n \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

显然可逆, 则标准形为 $f(z_1, \dots, z_n) = \lambda z_i^2$, 所以在此情况下二次型的秩为 1。当 φ_1 与 φ_2 不成比

例时, 则至少存在某个二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \neq 0$ 。做变量替换 $\begin{cases} y_\ell = z_\ell \\ \ell \neq i, j \\ \varphi_1 = z_i + z_j \\ \varphi_2 = z_i - z_j \end{cases}$, 即 $Y = QZ$,

其中 $Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_j \\ b_1 & b_j \end{vmatrix} & \cdots & -\begin{vmatrix} 1 & a_j \\ 1 & b_j \end{vmatrix} & \cdots & -\begin{vmatrix} 1 & a_j \\ -1 & b_j \end{vmatrix} & \cdots & -\begin{vmatrix} a_n & a_j \\ b_n & b_j \end{vmatrix} \\ & & & \ddots & & \\ -\begin{vmatrix} a_i & a_1 \\ b_i & b_1 \end{vmatrix} & \cdots & -\begin{vmatrix} a_i & 1 \\ b_i & 1 \end{vmatrix} & \cdots & -\begin{vmatrix} a_i & 1 \\ b_i & -1 \end{vmatrix} & \cdots & -\begin{vmatrix} a_i & a_n \\ b_i & b_n \end{vmatrix} \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$ 可逆, 则标准

形为 $f(z_1, \dots, z_n) = z_i^2 - z_j^2$, 所以在此情况下二次型的秩为 2, 并且符号差为 0。

充分性: 若二次型的秩为 1, 则二次型 X^tAX 可通过非退化的变量替换 $X = PZ$ 化为标准形

z_i^2 , 此时原二次型就是一次齐次多项式 $z_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ 与自身的乘积, 其中 $(a_1, \cdots, a_n)$ 是矩阵 P^{-1} 的第 i 行; 若二次型的秩为 2 且符号差为 0, 则可通过非退化的变量替换 $X = PZ$ 化为标准形 $z_i^2 - z_j^2 = (z_i + z_j)(z_i - z_j)$, 此时原二次型就是两个一次齐次多项式 $z_i + z_j = (a_1 + b_1)x_1 + \cdots + (a_n + b_n)x_n$ 和 $z_i - z_j = (a_1 - b_1)x_1 + \cdots + (a_n - b_n)x_n$ 的乘积, 其中 $(a_1, \cdots, a_n)$ 和 $(b_1, \cdots, b_n)$ 分别是矩阵 P^{-1} 的第 i 行和第 j 行。

4. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^s (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^2$ 。证明: $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的秩等于矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$ 的秩。

证明: 记 $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 为矩阵 A 的第 i 行 ($i = 1, 2, \cdots, s$), $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$, 则 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \alpha_i X = X^t \alpha_i^t$ 。于是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^s (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)^2 = \sum_{i=1}^s (X^t \alpha_i^t)(\alpha_i X) = \sum_{i=1}^s X^t (\alpha_i^t \alpha_i) X = X^t (\sum_{i=1}^s \alpha_i^t \alpha_i) X = X^t (\alpha_1^t, \cdots, \alpha_s^t) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} X = X^t A^t A X$,

所以二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的矩阵为 $A^t A$, 从而二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的秩就是矩阵 $A^t A$ 的秩。利用方程组理论易知, 矩阵 $A^t A$ 与 A 有相同的秩, 所以二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的秩等于矩阵 A 的秩。

习题 9.3

1. 判别下列二次型或厄米特二次型是否正定。

(1) $10x_1^2 + 8x_1x_2 + 24x_1x_3 + 2x_2^2 - 28x_2x_3 + 2x_3^2$;

(2) $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$;

(3) $i\bar{x}_1x_2 - i\bar{x}_2x_1 + \bar{x}_1x_3 + \bar{x}_3x_1$

解: (1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -14 \\ 12 & -14 & 2 \end{pmatrix}$, 容易计算 $|A| = -3584 < 0$, 所以 A 不是

正定的, 即原二次型不是正定的。

(2) $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ 的矩阵为: $A_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 。容易计算 k 级矩

阵 $A_{k \times k}$ 的行列式为: $|A|_{k \times k} = \frac{1}{2^{k-1}}(1 + \frac{1}{2}(k-1)) > 0$ 。所以矩阵 A 的各阶顺序主子式大于零, 从而矩阵 A 正定, 原二次型正定。

(3) $i\bar{x}_1x_2 - i\bar{x}_2x_1 + \bar{x}_1x_3 + \bar{x}_3x_1$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。容易知道 A 的各阶顺序主子

式全不为正, 所以 A 不是正定厄米特矩阵, 原二次型不是正定厄米特型。

2. 证明如果 A 是正定矩阵, 那么 A 的主子式全大于零, 所谓主子式就是行指标与列指标相同的子式。

证明: 必要性: 若 A 正定, 则对于任意的 $0 \neq X \in R^n$ $X^t A X > 0$ 。对于 A 的任意 r 阶子式 B , 不妨设 B 由 A 的位于第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 行和列的元素组成。对于任意的 $0 \neq X \in R^r$, 令 $\tilde{X} \in R^n$, $\tilde{X}$ 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 个元素与 $X \in R^r$ 相同, 而其余元素皆为 0, 则 $\tilde{X} \neq 0$ 。由 A 的正定性, $X^t B X = \tilde{X}^t A \tilde{X} > 0$, 于是 B 正定, 从而 $|B| > 0$ 。

充分性：我们知道 A 正定的充分必要条件是 A 的顺序主子式全大于零。由已知， A 的主子式全大于零，当然其顺序主子式也都大于零，所以 A 正定。

3. 设 A 是实对称矩阵。证明：当实数 t 充分大之后， $tE + A$ 是正定矩阵。

证明：因 A 是实对称矩阵，存在一个正交矩阵 Q 使得 $Q^t A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

其中 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 A 的特征值，并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ 。于是对任意 $X \in R^n$ ，有

$$X^t A X = X^t (Q^t)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_1 X^t X.$$

这样，当 $t > -\lambda_1$ 时，就有

对于任意 $0 \neq X \in R^n$ ， $X^t (A + tE) X = X^t A X + t X^t X \geq \lambda_1 X^t X + t X^t X > (\lambda_1 + t) X^t X > 0$ ，所以当 $t > -\lambda_1$ 时， $A + tE$ 正定。

4. 若 A 是正定对称矩阵，证明： A^{-1} 也是正定对称矩阵。

证明：证法一：因 A 是正定对称矩阵，所以 A 合同于单位矩阵 E ，即：存在非奇异矩阵 P ，使得 $P^t A P = E$ 。两边取逆，得： $P^{-1} A^{-1} (P^{-1})^t = E$ ，从而 A^{-1} 合同于单位矩阵 E ，故 A^{-1} 正定。

证法二：由 A 是正定对称矩阵，知 $(A^{-1})^t A A^{-1} = A^{-1}$ ，即 A 与 A^{-1} 合同，从而它们具有相同的正定性。

证法三：因 A 是正定对称矩阵，所以 A 的特征值全大于零。而 A^{-1} 与 A 的特征值互为倒数，所以 A^{-1} 的特征值也全为正数，即 A^{-1} 也是正定对称矩阵。

5. 设 A 是 n 级实对称矩阵，且 $|A| < 0$ 。证明：存在实 n 维列向量 $X \neq 0$ ，使得 $X^t A X < 0$ 。

证明：证法一： $|A| < 0$ 说明 A 为满秩矩阵。又 A 是实对称矩阵，存在一个实可逆矩阵 P 使得 $P^t A P = \begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{pmatrix}$ 。由 $|A| < 0$ 推得 $n - p > 0$ 。取 $X = P e_i (i > p)$ (其中 e_i 为第 i 个位置为 1 其余全为 0 的列向量)，则有 $X^t A X < 0$ 。

证法二：反证法。若对任意的 X 都有 $X^t A X \geq 0$ ，则 A 半正定，从而 $|A| \geq 0$ ，与已知 $|A| < 0$ 矛盾。

6. 如果 A, B 都是 n 级正定矩阵，证明： $A + B$ 也是正定矩阵。

证明：如果 A, B 都是 n 级正定矩阵，则对于任意的 $0 \neq X \in R^n$ ，有 $X^t A X > 0$ 并且 $X^t B X > 0$ ，于是 $X^t (A + B) X = X^t A X + X^t B X > 0$ ，所以 $A + B$ 是正定矩阵。

7. 证明：二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等。

证明：二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 是半正定，当且仅当其规范型中没有负的平方项，当且仅当正惯性指数等于秩。

8. 证明： $n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2$ 是半正定的。

证明：对 n 用数学归纳法，容易证明： $n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$ 。于是对任意的 $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ ，有 $n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2 \geq 0$ 。所以 $n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2$ 是半正定的。

9. 设 $f(x_1, \dots, x_n) = X^t A X$ 是实二次型。若有实 n 维列向量 X_1, X_2 使得 $X_1^t A X_1 > 0$ ， $X_2^t A X_2 < 0$ 。试证明：存在 n 维列向量 $X_0 \neq 0$ ，使 $X_0^t A X_0 = 0$ 。

证明：证法一：考虑向量 $x_1 + \lambda x_2$ 。注意到 $(x_1 + \lambda x_2)^t A (x_1 + \lambda x_2) = (x_2^t A x_2) \lambda^2 + 2(x_1^t A x_2) \lambda + x_1^t A x_1$ 是关于 λ 的一个一元二次多项式，由已知， $(x_1^t A x_1)(x_2^t A x_2) > 0$ ，从而该一元二次多项式根的判别式 $\Delta = 4(x_1^t A x_2)^2 - 4(x_1^t A x_1)(x_2^t A x_2) > 0$ ，所以有两个不相等的实根： $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 。令 $x_3 = x_1 + \lambda_1 x_2, x_4 = x_1 + \lambda_2 x_2$ ，则 $x_3 \neq x_4$ 并且 $x_3^t A x_3 = x_4^t A x_4 = 0$ 。由于 x_3, x_4 不能全为零向

量, 其中必有一个是非零向量, 记为 x_0 , 则 $x_0^t A x_0 = 0$ 。

证法二: 由题设得, 二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = X^t A X$ 为不定二次型。设经过非退化的变量替换 $X = P Y$ 二次型化为规范型 $f(y_1, \dots, y_n) = Y^t P^t A P Y = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2$, 其中 p, q 分别为二次型的正负惯性指数, 则 $p \geq 1$ 并且 $q \geq 1$ 。令 Y_0 的第 1 和第 $p+1$ 个位置的元素为 1, 而其它元素都是零。则 $f(Y_0) = Y_0^t P^t A P Y_0 = 0$ 。因 P 是可逆矩阵, 所以 $X_0 = P Y_0 \neq 0$, 并且 $f(X_0) = X_0^t A X_0 = Y_0^t P^t A P Y_0 = 0$, 证毕。

10. 设 A, B 是实对称矩阵, 其中 B 是正定矩阵, 则存在可逆实矩阵 P , 使 $P^t A P = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, $P^t B P = E$ 。

证明: 由 B 是正定矩阵可知, B 合同于单位矩阵 E , 于是存在一个实可逆矩阵 P_1 , 使得 $P_1^t B P_1 = E$ 。由 A 是实对称矩阵知, $P_1^t A P_1$ 也是实对称矩阵, 故而存在正交矩阵 Q , 使得 $Q^t P_1^t A P_1 Q = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 。令 $P = P_1 Q$, 则 P 是可逆实矩阵, 并且使得 $P^t A P = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, $P^t B P = Q^t E Q = E$ 。

11. 若厄米特二次型 $f(x_1, \dots, x_n)$ 对一切 $X \neq 0$, 有 $f(x_1, \dots, x_n) = \overline{X}^t A X = \sum_{i,j=1}^n \overline{x_i} x_j > 0$, 且 $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ 当且仅当 $x_1 = \dots = x_n = 0$ 时才成立, 则称 f 为正定的, 同时矩阵 A 称为正定厄米特矩阵。

证明下列条件等价:

- (1) A 是正定厄米特矩阵;
- (2) A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 皆大于零;
- (3) 存在复可逆矩阵 Q , 使 $\overline{Q}^t A Q = E$;
- (4) A 的所有顺序主子式皆大于零。

证明: (1) $\Rightarrow$ (2): 设 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为 A 的特征值, ξ_i 为 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量, 由 A 的正定性得: $\xi_i^t A \xi_i = \lambda_i \xi_i^t \xi_i > 0$, 而 $\xi_i \neq 0$, 从而 $\xi_i^t \xi_i > 0$, 所以 $\lambda_i > 0$ 。

(2) $\Rightarrow$ (3): 由 A 为厄米特矩阵知, 存在酉矩阵 P , 使得 $P^t A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \dots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, 而 A 的特征值 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 均大于零, 令 $Q = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & \\ & \dots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix}$, 则 Q 是复矩阵, 并且

$\overline{Q}^t A Q = E$ 。

(3) $\Rightarrow$ (1): 若存在复可逆矩阵 Q , 使得 $\overline{Q}^t A Q = E$, 则对任意 $0 \neq Y \in C^n$, $\overline{Y}^t \overline{Q}^t A Q Y = \overline{Y}^t Y > 0$ 。因 Q 是复可逆矩阵, 对任意 $0 \neq X \in C^n$, $0 \neq Q^{-1} X \in C^n$, 从而 $\overline{X}^t A X = \overline{X}^t \overline{Q}^{-1} \overline{Q}^t A Q (Q^{-1} X) = (\overline{Q^{-1} X})^t (Q^{-1} X) > 0$, 所以 A 是正定厄米特矩阵。

(1) $\Leftrightarrow$ (4) 完全类似于定理 9.3.1 中的证明, 请参看课本。

12. 证明: 实对称矩阵 A 为负定的充分必要条件是 A 的一切偶数级顺序主子式大于零, 而一切奇数级顺序主子式小于零。

证明: 实对称矩阵 A 为负定, 当且仅当 $-A$ 正定, 当且仅当 $-A$ 的所有顺序主子式大于零, 当且仅当 (由行列式性质) A 的一切偶数级顺序主子式大于零, 而一切奇数级顺序主子式小于零。

习题 9.4

1. 当 $A = 0$ 时, A^- 和 A^+ 各是什么? 并说明理由。

证明: 若 $A = 0$ 为 $m \times n$ 阶零矩阵, 则对任何 $n \times m$ 级矩阵 G , 有 $AGA = A$, 从而 A^- 可为任意的 $n \times m$ 级矩阵 G ; 容易验证, $n \times m$ 级零矩阵 G 满足 $AGA = A$, $GAG = G$, $(AG)^t = AG$ 和 $(GA)^t = GA$ 。但 A^+ 唯一, 所以 A^+ 就是 $n \times m$ 级零矩阵。

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

求 A^+ 和 $AX = \beta$ 的最优最小二乘解 $\bar{X}$.

解: 显然 $\text{Rank}(A) = 1$, $AA^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. 求得 AA^t 的特征值为: $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 0$. 求得 $\lambda_1 = 6$ 的特征向量为 $(1, 1)^t$, $\lambda_2 = 0$ 的特征向量为 $(1, -1)^t$. 将其标准化得 R^2 的一组标准正交基: $p_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^t$, $p_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})^t$. 于是求得正交矩阵 $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. 令 $q_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}(p_1^t A)^t = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})^t = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})^t$, 添加 $q_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 和 $q_3 = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{6})$ 使得 $\{q_1, q_2, q_3\}$ 为 R^3 的一组标准正交基, 于是得正交矩阵: $Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{2\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$. 这样, $A = P \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q$. 所以 $A^+ = Q^t \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{2}}{12} & \frac{\sqrt{2}}{12} \end{pmatrix}$. 方程 $AX = \beta$ 的最优最小二乘解为: $\bar{X} = A^+ \beta = (\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{2}}{12})^t$.

3. 如果 A 的列向量是两两正交的单位向量组, 问 A^+ 是什么样的矩阵?

解: 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 其中 $\alpha_k (1 \leq k \leq n)$ 为 $m (m \geq n)$ 维单位向量, 并且 $\alpha_i^t \alpha_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. 容易验证: $A^t A = E_n$, 从而 $AA^t A = A, A^t AA^t = A^t, (AA^t)^t = AA^t, (A^t A)^t = A^t A$, 所以 $A^+ = A^t$.

4. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r , 置换阵 P , 使得 $PA = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}$ 为 A 的简化阶梯形矩阵; 置换阵 Q 使得 $PAQ = \begin{pmatrix} E_r & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (其中 E_r 为 r 级单位阵). 证明:

(1) $Q \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} P$ 为 A 的减号广义逆 A^- , 其中 L 为任意 $(n-r) \times (m-r)$ 矩阵.

(2) $A^- A = E_n$ 当且仅当 $r = n$; $AA^- = E_m$ 当且仅当 $r = m$.

证明: (1) 容易验证: $PAQ \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} PAQ = PAQ$. 但置换矩阵 P 和 Q 都可逆, 于是有 $AQ \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} PA = A$, 所以 $Q \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} P$ 为 A 的减号广义逆 A^- ;

(2) 若 $A^- A = E_n$, 则 $\text{Rank}(A^-) \geq \text{Rank}(A^- A) = \text{Rank}(E_n) = n$. 但 A^- 为 $n \times m$ 级矩阵, 所以 A^- 的秩为 n , 即 $r = n$. 反之, 若 $r = n$, 则由 (1) 知: $A^- = Q(E_n, 0)P$; 由 $PAQ = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$ 得: $A = P^{-1} \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$, 于是有: $A^- A = Q(E_n, 0)PP^{-1} \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = E_n$. 同理可证: $AA^- = E_m$ 当且仅当 $r = m$.

5. 设 $m \times n$ 实矩阵 A 的秩为 r , $A = PAQ^t$ 为 A 的奇异值分解, 其中 $Q = (q_1, \dots, q_r, q_{r+1}, \dots, q_n)$ 如定理 9.4.1 所示. 证明:

(1) 对任意 $u = (u_1, \dots, u_n)^t$, $\bar{X} = (E - A^- A)u$ 是 $q_1, \dots, q_n$ 的线性组合.

(2) 齐次线性方程组 $AX = 0$ 的通解为 $c_{r+1}q_{r+1} + \dots + c_n q_n$, 其中 $c_{r+1}, \dots, c_n$ 为任意实数.

证明: (1) 矩阵 A 的秩为 r , 所以齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间的维数为 $n - r$. 由 $Aq_i = 0 (i = r+1, \dots, n)$ 以及 $\{q_{r+1}, \dots, q_n\}$ 线性无关得: $\{q_{r+1}, \dots, q_n\}$ 是方程组 $AX = 0$ 的解

空间的一组基。又 $A\bar{X} = A(E - A^{-1}A)u = (A - AA^{-1}A)u = 0$ ，即 $\bar{X} = (E - A^{-1}A)u$ 是 $AX = 0$ 的解，所以 $\bar{X} = (E - A^{-1}A)u$ 可由 $q_1, \dots, q_n$ 线性表出。

(2) 由 (1)， $q_1, \dots, q_n$ 是方程组 $AX = 0$ 的解空间的一组基，所以方程组 $AX = 0$ 的通解为 $c_{r+1}q_{r+1} + \dots + c_nq_n$ 。

6. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解。

解: 易知: $A^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$ 。求得其特征值为: $\lambda = 5 \pm \sqrt{17}$ ，特征值 $\lambda_1 = 5 + \sqrt{17}$ 的特征向量为 $(1, -(4 + \sqrt{17}))^t$ ，特征值 $\lambda_2 = 5 - \sqrt{17}$ 的特征向量为 $(1, -(4 - \sqrt{17}))^t$ 。将其标准正交化，得正交矩阵 $Q = (q_1, q_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{34+8\sqrt{17}}} & \frac{1}{\sqrt{34-8\sqrt{17}}} \\ -\frac{4+\sqrt{17}}{\sqrt{34+8\sqrt{17}}} & -\frac{4-\sqrt{17}}{\sqrt{34-8\sqrt{17}}} \end{pmatrix}$ 。令 $p_1 = \frac{1}{5+\sqrt{17}}Aq_1 = (-\frac{8+2\sqrt{17}}{\sqrt{306+74\sqrt{17}}}, -\frac{8+2\sqrt{17}}{\sqrt{306+74\sqrt{17}}}, -\frac{5+\sqrt{17}}{\sqrt{306+74\sqrt{17}}})^t$ ， $p_2 = \frac{1}{5-\sqrt{17}}Aq_2 = (-\frac{8-2\sqrt{17}}{\sqrt{306-74\sqrt{17}}}, -\frac{8-2\sqrt{17}}{\sqrt{306-74\sqrt{17}}}, -\frac{5-\sqrt{17}}{\sqrt{306-74\sqrt{17}}})^t$ ，由格拉姆 - 施密特正交化方法，可得 $p_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)^t$ ，于是得正交矩阵 $P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} -\frac{8+2\sqrt{17}}{\sqrt{306+74\sqrt{17}}} & -\frac{8-2\sqrt{17}}{\sqrt{306-74\sqrt{17}}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{8+2\sqrt{17}}{\sqrt{306+74\sqrt{17}}} & -\frac{8-2\sqrt{17}}{\sqrt{306-74\sqrt{17}}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{5+\sqrt{17}}{\sqrt{306+74\sqrt{17}}} & -\frac{5-\sqrt{17}}{\sqrt{306-74\sqrt{17}}} & 0 \end{pmatrix}$ ，并且 $P^tAQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{5+\sqrt{17}} & 0 \\ 0 & \sqrt{5-\sqrt{17}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。于是 $A = P\Lambda Q^t$ 就是矩阵 A 的奇异值分解。

7. A 是实对称矩阵。由推论 8.5.1，存在正交矩阵 Q ，使得 $A = Q\Lambda Q^t$ ，其中 Λ 是对角矩阵，它的对角线上元素都是 A 的特征值。但这时特征值可能是负的，因此 $A = Q\Lambda Q^t$ 就不是 A 的奇异值分解。问这时 A 的奇异值分解是什么？

解: 由已知， $A = Q\Lambda Q^t$ ，其中 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ ， $\lambda_i (1 \leq i \leq r)$ 为矩阵 A 的非

零特征值， r 为矩阵 A 的秩。显然 $A^2 = (Q\Lambda Q^t)^2 = Q\Lambda^2 Q^t$ ，所以 $A = Q \begin{pmatrix} |\lambda_1| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_r| \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} Q^t$

为 A 的奇异值分解。

8. A 是 n 级实方阵。用 A 的奇异值分解证明 A 有如下形式的 **极分解**

(1) A 可逆，则 $A = SQ$ ，其中 S 是正定矩阵， Q 是正交矩阵；

(2) A 不可逆，则 $A = S_0Q$ ，其中 S_0 为半正定矩阵， Q 为正交矩阵。

证明: (1) 若 A 可逆，则 $r = n$ ，从而可设矩阵 A 的奇异值分解为: $P^tAQ = \Lambda = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$ ，

其中 P, Q 为正交矩阵， $\mu_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 。此时， $A = P\Lambda Q^t = P\Lambda P^tPQ^t$ ，显然 $S = P\Lambda P^t$

为正定矩阵, PQ^t 为正交矩阵。

$$(2) \text{ 若 } A \text{ 不可逆, 则 } r < n, \text{ 可设 } A \text{ 的奇异值分解为 } P^t A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mu_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 P, Q 为正交矩阵, $\mu_i > 0 (i = 1, 2, \dots, r)$ 。此时, $A = P \Lambda Q^t = P \Lambda P^t P Q^t$, 显然 $S = P \Lambda P^t$ 为半正定矩阵, $P Q^t$ 为正交矩阵。

补充题 9

1. 主对角线上全是 1 的上三角矩阵称为特殊上三角矩阵。

(1) 设 A 是对称矩阵, T 为特殊上三角矩阵, 而 $B = T^t A T$ 。证明: A 与 B 的对应顺序主子式有相同的值;

(2) 证明: 如果对称矩阵 A 的顺序主子式全不为 0, 那么存在一个特殊上三角矩阵 T , 使得 $T^t A T$ 为对角矩阵;

(3) 利用以上的结果证明定理 9.3.1 的 (4) $\Rightarrow$ (1)。

证明: (1) 设 A_k, B_k, T_k 分别为矩阵 A, B, T 的 k 级顺序主子式, 则 T_k 仍为特殊上三角矩阵, 从而 $|T_k| = 1$, 并且有:

$$\begin{pmatrix} B_k & B_1 \\ B_1^t & B_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_k^t & \\ \star^t & T_{n-k}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & A_1 \\ A_1^t & A_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_k & T_1 \\ & T_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_k^t A_k T_1 & \diamond \\ \clubsuit & \heartsuit \end{pmatrix}$$

所以 $B_k = T_k^t A_k T_k$, 两边取行列式得: $|B_k| = |A_k|$

(2) 我们对矩阵 A 的阶数进行归纳。显然结论对 1 阶矩阵是对的。假设结论对于 n 阶矩阵成立。当 A 为 $n+1$ 阶矩阵时, 由于其各阶级顺序主子式都不为零, 所以 A_n 的各阶顺序主子式也全不为零, 并且 A_n 是可逆矩阵。对 A 进行如下分块: $A = \begin{pmatrix} A_n & \alpha \\ \alpha^t & a_{n+1n+1} \end{pmatrix}$, 其中

$\alpha = (a_{1n+1}, a_{2n+1}, \dots, a_{nn+1})^t$, 如令 $\tilde{T} = \begin{pmatrix} E_n & -A_n^{-1}\alpha \\ & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$\tilde{T}^t A \tilde{T} = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ 0 & a_{n+1n+1} - \alpha A_n^{-1} \alpha \end{pmatrix}$$

由归纳假设, 存在特殊上三角矩阵 T_1 , 使得 $T_1^t A_n T_1$ 为对角矩阵, 令 $T = \tilde{T} \begin{pmatrix} T_1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, 则 T 仍为特殊上三角矩阵, 并且 $T^t A T$ 是对角矩阵。

(3) 我们要证: 若 A 的各阶顺序主子式都大于零, 则 A 是正定矩阵。由 (2) 得: 存在特殊上三角矩阵 T , 使得 $T^t A T$ 为对角矩阵。又由 (1) 得: 对角矩阵 $T^t A T$ 的各阶顺序主子式也全为正, 所以对角矩阵 $T^t A T$ 的主对角线上的元素都大于零, 从而 $T^t A T$ 正定。但 A 与 $T^t A T$ 合同, 所以 A 也是正定矩阵。

2. 用非退化线性变量替换化下列二次型为标准形, 并利用矩阵验算所得结果:

(1) $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$;

(2) $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$.

(3) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, 其中 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ 。

解: (1) 作变量替换 $\begin{cases} x_{2k-1} + x_{2k+1} = y_{2k-1} \\ x_{2k} = y_{2k} \end{cases}$, 其中 $k = 1, 2, 3, \dots$, 并且规定当 $\ell > n$ 时, $x_\ell = y_\ell = 0$ 。则原二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 变为:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} y_1 y_2 + y_3 y_4 + \dots + y_{n-1} y_n, & n = 2k \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \dots + y_{n-2} y_{n-1}, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

再做变量替换 $\begin{cases} y_{2\ell+1} = z_{2\ell+1} + z_{2\ell+2} \\ y_{2\ell+2} = z_{2\ell+1} - z_{2\ell+2} \end{cases}$, 其中 $\ell = 0, 1, 2, \dots$, 则二次型 $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 变为:

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \begin{cases} z_1^2 - z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2 - z_n^2, & n = 2k \\ z_1^2 - z_2^2 + \dots + z_{n-2}^2 - z_{n-1}^2, & n = 2k + 1 \end{cases}$$

(2) 我们记形如: $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{2}{k} \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ (其中 k 为正整数) 的二次型为 $f(n, k)$, 则原二次型用现在的记号就是 $f(n, 2)$ 。当 $k \geq 2$ 时, 可以证明下式成立:

$$f(n, k) = (x_n + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n-1} x_i)^2 + (1 - \frac{1}{k^2}) f(n-1, k+1)$$

利用上式做归纳法, 可得 $f(n, 2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ 的标准形为:

$$(3) \text{ 做变量替换 } \begin{cases} y_1 = x_1 - \bar{x} \\ y_2 = x_2 - \bar{x} \\ \dots \\ y_{n-1} = x_{n-1} - \bar{x} \\ y_n = x_n - \bar{x} \end{cases}, \text{ 利用 } \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \text{ 可得 } y_n = -(y_1 + \dots + y_{n-1}), \text{ 于是原二次型 } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ 变为: } f(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 + (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})^2 = 2(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} y_i y_j); \text{ 再利用第 (2) 小题, 可得二次型的标准形为:}$$

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = 2z_1^2 + \frac{3}{2}z_2^2 + \frac{4}{3}z_3^2 + \dots + \frac{n-1}{n-2}z_{n-1}^2$$

3. 证明:

(1) 如果 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j (a_{ij} = a_{ji})$ 是正定二次型, 那么

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 \end{vmatrix} \text{ 是负定二次型;}$$

(2) 如果 A 是正定矩阵, 那么 $|A| \leq a_{nn} P_{n-1}$, 其中 P_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 级顺序主子式;

(3) 如果 A 是正定矩阵, 那么 $|A| \leq a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$;

(4) 如果 $T = (t_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵, 那么 $|A|^2 \leq \prod_{i=1}^n (t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \dots + t_{ni}^2)$.

证明: (1) 如果 A 是正定矩阵, 则 P_{n-1} 也是正定矩阵, 从而 P_{n-1}^{-1} 也正定。于是对于任意的 $0 \neq Y \in R^{n-1}$, 有 $Y^t P_{n-1}^{-1} Y > 0$ 。这样, 对于任意不全为零的 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 有

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{n-1} & Y \\ Y^t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -Y^t P_{n-1}^{-1} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_{n-1} & Y \\ Y^t & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_{n-1} & -P_{n-1}^{-1} Y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} P_{n-1} & 0 \\ 0 & -Y^t P_{n-1}^{-1} Y \end{vmatrix} = -Y^t P_{n-1}^{-1} Y |P_{n-1}| < 0$$

所以我们讨论的二次型 $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 为负定二次型。

(2) 由 A 是正定矩阵可得 P_{n-1} 以及 P_{n-1}^{-1} 都是正定矩阵。令 $\alpha = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1n})^t$, 则 $\alpha^t P_{n-1}^{-1} \alpha \geq 0$ 。于是

$$|A| = \begin{vmatrix} P_{n-1} & \alpha \\ \alpha^t & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -\alpha^t P_{n-1}^{-1} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_{n-1} & \alpha \\ \alpha^t & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_{n-1} & -P_{n-1}^{-1} \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} P_{n-1} & \\ & a_{nn} - \alpha^t P_{n-1}^{-1} \alpha \end{vmatrix} = (a_{nn} - \alpha^t P_{n-1}^{-1} \alpha) |P_{n-1}| \leq a_{nn} |P_{n-1}|$$

(3) 对正定矩阵的阶数运用数学归纳法。显然对 1 阶矩阵结论成立。假设结论对 $n-1$ 正定矩阵结论成立。当 A 为 n 阶正定矩阵时, 其 $n-1$ 阶顺序主子阵 P_{n-1} 仍为正定矩阵, 由归纳假设, $|P_{n-1}| \leq a_{11} a_{22} \dots a_{n-1, n-1}$ 。再由 (2) 得: $|A| \leq a_{nn} |P_{n-1}|$, 所以有 $|A| \leq a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ 。

(4) 由 $T = (t_{ij})$ 是实可逆矩阵可得, 矩阵 $T^t T$ 为正定矩阵。于是由 (3) 得: $|A|^2 = |T^t| |T| = |T^t T| \leq \prod_{i=1}^n (t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + \dots + t_{ni}^2)$ 。

4. 证明实对称矩阵 A 是半正定的充分必要条件是 A 的一切主子式大于或等于零。

证明: 记 $A_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 为由 A 的位于第 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 行和列交叉位置的元素组成的主子式, 做二次型 $f_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = X_k^t A_{i_1 i_2 \dots i_k} X_k$, 其中 $X_k = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})^t$ 。如果 $f_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ 半正定, 则有 $|A_{i_1 i_2 \dots i_k}| \geq 0$ 。令 X 为 n 维列向量, 其第 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 位置的元素分别为 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, 而其它位置的元素均为 0。这样, 对于任意的 $X_k \in R^k$, $f_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = X_k^t A_{i_1 i_2 \dots i_k} X_k = X^t A X$ 。由 A 的半正定性可知 $X^t A X \geq 0$, 从而 $f_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ 半正定, 所以 $|A_{i_1 i_2 \dots i_k}| \geq 0$ 。

5. 设 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ell_1^2 + \ell_2^2 + \dots + \ell_p^2 - \ell_{p+1}^2 - \dots - \ell_{p+q}^2$, 其中 $\ell_i (i = 1, 2, \dots, p+q)$ 是 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一次齐式。证明 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的正惯性指数 $\leq p$, 负惯性指数 $\leq q$ 。

证明: 设经过非退化的变量替换 $X = PY$ (P 其中为可逆矩阵), 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 化为规范型: $f(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots - y_{s+t}^2 (s+t \leq n)$, 其中 s 和 t 分别为二次型 f 的

正、负惯性指数。若 $s > p$, 则方程组 $\begin{cases} y_{s+1} = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n = 0 \\ \ell_1 = 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \ell_p = 0 \end{cases}$ 是关于 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一个齐次线性方程

组, 并且其中方程的个数 $(n-s)+p < (n-s)+s = n$, 于是该方程组有非零解, 不妨设 $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ 是一个非零解。将 x_i^0 代入 $Y = P^{-1}X$ 得一组不全为零的数 $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$, 但 $y_{s+1}^0 = \dots = y_n^0 = 0$, 所以 $y_1^0, \dots, y_s^0$ 不全为零, 于是 $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = (y_1^0)^2 + \dots + (y_s^0)^2 > 0$ 。令 $\ell_j^0 (j = 1, 2, \dots, n)$ 为将 $x_1^0, \dots, x_n^0$ 代入一次齐式 ℓ_j 所得的值, 又得到: $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = -(\ell_{s+1}^0)^2 - \dots - (\ell_{s+t}^0)^2 \leq 0$, 矛盾! 于是有: $s \leq p$ 。同理可证: $t \leq q$ 。

6. 设 A 是反对称矩阵。证明 A 合同于矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

证明: 当 $A = 0$ 时, 结论显然成立。下面只就 $A \neq 0$ 时证明, 我们对 A 的阶数 n 进行归纳。

当 $n = 1$ 时, $A = 0$, 结论成立。当 $n = 2$ 时, $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, 或者 $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $a > 0$ 。取 $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$, 则有 $P^t A P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 或者 $P^t A P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。若是后者, 则有 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^t A P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 。无论如何, 当 A 为 2 阶非零反对称矩阵时, 总合同于矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

假设结论对阶数小于等于 $n-1$ 的反对称矩阵成立。当 A 为 $n(n \geq 3)$ 阶反对称矩阵时, 可设 $A = \begin{pmatrix} A_2 & C \\ -C^t & D \end{pmatrix}$, 其中 A_2, D 为反对称矩阵。

如果 A 的二阶顺序主子式 $|A_2|$ 不为零, 则必有 $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, 其中 $a \neq 0$, 并且 $(A_2^{-1})^t = -A_2^{-1}$ 。根据上面的讨论, 总存在一个二阶可逆矩阵 T 使得 $T^t A_2 T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 。令 $M = \begin{pmatrix} E_2 & -A_2^{-1}C \\ 0 & e_{n-2} \end{pmatrix}$, 则有 $M^t A M = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & D + C^t A_2^{-1}C \end{pmatrix}$ 。我们只要取 $N = M \begin{pmatrix} T \\ E_{n-2} \end{pmatrix}$, 便有 $N^t A N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ & & D + C^t A_2^{-1}C \end{pmatrix}$ 。因 $n-2$ 阶矩阵 $D + C^t A_2^{-1}C$ 仍为反对称矩阵, 由归纳架

设, 存在 $n-2$ 阶可逆矩阵 S , 使得 $S^t (D + C^t A_2^{-1}C) S$ 为所要求的形式。只要取 $Q = N \begin{pmatrix} E_2 \\ S \end{pmatrix}$, 便有 $Q^t A Q$ 为所要求的矩阵的形式。

若 A_2 不可逆, 则 $A_2 = 0$ 。因 $A \neq 0$, 可断言必存在矩阵 A 的一个 2 阶主子式不为零 (否则, 对任意的 i, j , $\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ -a_{ji} & 0 \end{pmatrix} = 0$, 可得 $a_{ij} = 0$, 与 $A \neq 0$ 矛盾)。设此可逆的二阶主子阵为 $\begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ -a_{ij} & 0 \end{pmatrix}$, 则可经过一系列的调换矩阵 A 的行, 同时调换相应的列的位置而得一个新的与 A 合同的反对称矩阵, 使得 $\begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ -a_{ij} & a_{jj} \end{pmatrix}$ 位于新反对称的左上角, 这样问题归结为前面所讨论过的情形。

7. m 为何值, 方程 $y^2 - 5xy + 6x^2 + 2y + x + m = 0$ 表示两直线, 并求这两直线的交点。

证明: 二次型 $y^2 - 5xy + 6x^2 = 6x^2 - 5xy + y^2$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 6 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$ 。其特征值为 $\lambda = 7 \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 。特征值 $\lambda_1 = 7 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 的特征向量为 $(1, 1 - \sqrt{2})^t$, 特征值 $\lambda_2 = 7 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 的特征向量为 $(\sqrt{2} - 1, 1)^t$ 。做线性替换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, 则原方程 $y^2 - 5xy + 6x^2 + 2y + x + m = 0$ 变为 $\frac{7+5\sqrt{2}}{2}(x' + \frac{2\sqrt{2}-1}{7+5\sqrt{2}})^2 + \frac{7-5\sqrt{2}}{2}(y' + \frac{3-\sqrt{2}}{7-5\sqrt{2}})^2 + m - 60 - 30\sqrt{2} = 0$ 。于是得当 $m = 60 + 30\sqrt{2}$ 时, 方程 $y^2 - 5xy + 6x^2 + 2y + x + m = 0$ 表示两条直线: $x' + \frac{2\sqrt{2}-1}{7+5\sqrt{2}} = 0$ 和 $y' + \frac{3-\sqrt{2}}{7-5\sqrt{2}} = 0$ 。其交点为: $(x', y') = (-27 + 19\sqrt{2}, 11 + 8\sqrt{2})$ 代入坐标替换得交点坐标为: $(x, y) = (-32 + 16\sqrt{2}, -54 + 54\sqrt{2}) = (16(\sqrt{2} - 2), 54(\sqrt{2} - 1))$ 。

8. 若 S 是 n 级实对称矩阵, 则 S 是半正定当且仅当存在 n 级实矩阵 T , 使得 $S = T^t T$ 。

证明: 若 S 半正定, 则存在一个可逆矩阵 P 使得 $P^t A P = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。于是

$$A = (P^{-1})^t \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = (P^{-1})^t \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

令 $T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, 则有 $A = T^t T$ 。

9. 设 S 是半正定矩阵, 则存在半正定矩阵 $\tilde{S}$, 使得 $S = \tilde{S}^2$ 。

证明: 若 S 是半正定矩阵, 则存在一个正交矩阵 Q 使得 $Q^t S Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, 其中 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, r)$ 为 S 的非零特征值, r 为 S 的秩。于是 $S = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) Q^t$ 。若令 $\tilde{S} = Q \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \dots, 0) Q^t$, 则 $\tilde{S}$ 也是半正定矩阵, 并且 $S = \tilde{S}^2$ 。

10. 求函数 $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值。

解: 令 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$, 得函数可能的极值点为: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_0 = \sqrt{2} \\ y_0 = \sqrt{2} \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_0 = -\sqrt{2} \\ y_0 = -\sqrt{2} \end{cases}$ 。究竟它们是否极值点, 我们还要判断矩阵

$$A_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

是否正定或者负定。容易知道 $A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ 不正定, 也不负定, 所以 $(0, 0)$ 不是极值点。

而 $A_{(\sqrt{2}, \sqrt{2})} = A_{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 22 & -2 \\ -2 & 22 \end{pmatrix}$ 正定, 所以 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 和 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 都是极小值点, 容易计算函数在这两点的极小值都是 0。