

流固耦合系统动力响应分析的精细时程积分法*

摘要

(与流体相接触的结构物在受到水流、波浪和冲击力等流体动力激励或其它非流体的激励而产生振动时,其周围流场亦发生变化。这种流场的变化反过来使结构所受到的流体动力发生变化,形成反馈的流体-结构相互作用的耦合问题。许多工程领域存在的此类流固耦合振动一直是人们很关心的问题。)我们将结构与周围的流场组成一个耦合系统,应用 Hamilton 原理建立了流固耦合的动力响应方程,并通过引入附连水质量进行解耦。应用精细时程积分法可以直接计算受特殊力项的结构的动力响应。通过对初始条件的转化,我们把精细时程积分法应用到了对于冲击力项的计算中。我们提出了分段精细时程积分法,从而扩充了精细时程积分法的应用范围。通过对具体算例的计算,可以看出精细时程积分法和分段精细时程积分法都具有精度高、不受时间步长限制、计算的工作量小等优点,适合于流固耦合系统的动力响应分析。水深对于结构振动的影响也是一个很重要的问题。我们引入初应力刚度矩阵来反映水深对结构刚度的影响,计算结果显示潜水深度对于结构的动力响应有一定的影响,随着水深的增加,响应情况发生相应的变化。(本文所讨论的方法和所得到的结果有应用和参考价值。)

关键词: 流固耦合系统, 附连水质量, 初应力刚度矩阵, 动力响应, 精细时程积分法

*本论文的研究工作得到如下项目支持:

1. 流体介质中结构动力特性与响应分析的综合模态法与并行计算系统, 船舶工业国防科技应用、基础研究基金, 合同号: 98J40.3.3, 1998.12-2000.12.
2. 潜水深度对结构动态特性的影响与控制方法, 船舶工业国防科技应用、基础研究基金, 合同号: 99J41.4.4, 1999.12-2001.12.



PRECISE TIME-INTEGRATION METHOD FOR ANALYSIS OF DYNAMIC RESPONSES OF SOLID-FLUID COUPLING SYSTEM

ABSTRACT

When the structure vibrates under the action of stream, wave and shock loading and other non-fluid action, the vibration changes the condition around the structure and the fluid field acts on the structure inversely. So a coupling system composed of the structure and the liquid field around the structure is formed. Many people always pay attention to the vibration of this kind of solid-fluid coupling system which had had in many engineering fields. The structure and the surrounding fluid field were composed to a coupling system. Hamilton principle was used to establish the equation of dynamic response of solid-fluid coupling system. Additional mass matrix was added in the mass matrix of structure to solve this kind of problem. Precise time-integration method can be used to calculate the structure dynamic response under the especial force. By changing the initial condition, precise time-integration was used in the calculation of shock force. Subsection precise time-integration method was created to enlarge the using fields of precise time-integration method. Some numerical examples were given and the results show that precise time-integration and subsection precise time-integration are in high agreement with the exact solution, not be restricted with the time step, need a little amount of calculation work, and adapt to the analysis of dynamic response of solid-fluid coupling system. The influence of the depth of water to the structure vibration is also important. Initial stress stiffness matrix was used to reflect the influence of depth of water. The result showed that the depth of water has some effect to the dynamic response of the structure and the dynamic response changed with adding the depth of water. The results and method are of application and reference values to the studies on solid-fluid interaction.

KEY WORDS: Solid-Fluid Coupling System, Additional Water Mass, Initial Stress Stiffness Matrix, Dynamic Response, Precise Time-Integration Method



第一章 绪论

本章首先介绍了流固耦合系统动力响应问题所涉及到的理论基础和精细时程积分法的研究现状及存在问题, 然后介绍了本文的研究目的和主要工作。

1.1 引言

与流体相接触的结构在受到水流、波浪和冲击力等流体动力的激励或其它非流体的激励而发生振动时, 其周围流场亦发生变化。这种流场的变化反过来使结构所受到的流体动力发生变化, 这样就形成了反馈的流体-结构相互作用的耦合问题。许多工程领域都存在此类流固耦合振动问题。不难看出, 这是一个相当复杂、涉及结构动力学和流体动力学的跨学科的问题。

历史上, 人们对于流固耦合现象的早期认识源于飞机工程中的气动弹性问题。现在各种工程领域提出了越来越多的两相耦合问题, 使该领域的研究变的更加的丰富多彩。如: 在航空工程中, 由于复合材料结构的应用, 促使颤振工作者研究复合材料层合板在超音速流、气动加热等环境下的颤振问题^[1]; 在建筑工程中, 由于高层建筑的迅速发展, 房屋高度的增加使结构整体刚度下降, 加之楼群的密集布局等因素影响, 建筑结构同风的相互作用也引起了人们的重视^[2]; 在石化、机械、核工业中, 人们也开始讨论更复杂的充液容器、输液管道的耦合振动问题^[3]; 在人体、生物工程中, 血管流、眼球等的分析也开始从两相耦合力学的角度进行研究^[4]。

由于流固耦合问题的重要性, 流固耦合系统的动力响应问题引起了人们的广泛的关注。正如 Bathe^[5]所指出, “全耦合”(Full Interaction) 日益成为人们的研究重点。

1.2 流固耦合的研究现状

刑景棠等^[6]曾对流固耦合力学进行了概述。要建立和分析一个能包罗各种流固耦合系统的通用的数学模型显然是很困难的, 实际上往往也没有这个必要。通常可根据不同类型的流固耦合问题或具体的情况做一些假设, 以简化数学模型, 提高计算效率。

由于流固耦合问题的复杂性, 尽管可以假设流体是无粘、无旋的理想流体, 在大多数情况下仍不能求得解析解。只有对极个别的形状很规则的结构才能用特殊函数求得解析解, 例如对圆柱体可用贝塞尔(Bessel)函数。对于复杂流固耦合系统进行力学分析有两类方法: 一类是解析-数值方法, 即对结构采用有限元离散, 对流体则采用近似解析关系描述, 以 T. L. Geers^[7]提出的双渐近法(DAA)最为流行; 另一类则是纯数值方法, 如有限元方法、有限差分方法和边界元方法。在数值实现时通常有两种方法: 一种是对结构和流体都采用有限元; 另一种是对结构采用有限元, 对流体采用边界元方法^[8]。

对于线性流固耦合问题的有限元分析, 通常采用的有限元格式有两类, 一类是结构和流体均以位移矢量为场变量的位移-位移格式^[9,10]; 另一类是以结构的位移矢量和流体场变量的混合型格式, 如位移-压力格式^[11]、位移-位移势格式和位移-速度势格式^[12, 13]。对于位移-位移格式, 虽然有限元与结构动力学方程一样, 可以用结构动力学的模态分析理论, 但是这一格式有如流体节点自由度多、剪切刚度为零使刚度矩阵奇异、频域分析出现大量伪模态等缺点。为此, Irons^[14]、Hamdi^[15]、Chen^[16]等提出了一些有效的解决办法。对于混合型格式, 由于流体场变量已满足运动的无旋条件, 因而不会出现流体矩阵奇异的问题。但是这一格式的有限元方程是非对称的, 所以频域分析涉及到非对称问题。戴大农^[12]、吴



一红^[13]、刑景棠^[17, 18]等各自提出了一些解决办法。

Rumyantsev 利用 Hamilton 变分原理, 建立了刚-流耦合系统的动力方程及动力边界条件^[19], 其中流体为不可压均匀无粘流体。Liu 利用 Jourdain 变分原理, 建立了刚-流耦合系统的动力方程^[20], 流体为不可压均匀粘性流体。李铁成利用 Jourdain 变分原理, 建立了刚-流-弹耦合系统的动力方程及边界条件^[21], 流体是两种互不相溶的可压缩粘性流体。温德超^[22]等用 ALE 和时间分裂步法分析了三维粘性流体大幅晃动的非线性问题。Mustafa^[23]对流固耦合的屈曲问题进行了研究。

在有限元方法中, 对于不可压缩流体, 最常用的是用附连水质量解耦^[24, 25]。对于有界的流体域可以根据实际流体范围划分单元, 对于无穷流体域, 文献[26]提出了在实际计算时可以取用适当的范围。刘正兴^[27]等对于流体介质中结构的动力特性及响应分析进行了研究。当航行体在水下运行时总是处在一定的水深中, 它除了受到流体的冲击或动力外, 一定的水深产生的压力对其运动或振动都有影响。在有限元分析中主要体现在结构的“初应力刚度矩阵”上, 也称“几何刚度矩阵”。文献[28]通过几何非线性的原理, 推导了矩形板壳元的几何刚度矩阵, 并研究了考虑水深影响的结构在水下运行时的自振特性。

1.3 精细时程积分的研究现状

工程结构在例如突加载荷或冲击载荷的作用下, 往往要求作瞬态历程的分析。由于结构几何形状的复杂性, 在对空间坐标采用有限元法离散后, 得到的往往是数十、百、千自由度的系统, 采用本征向量展开法一般只选用若干个本征解, 这是不够的。此时就要采用在时域上的逐步积分的方法。

逐步积分法已经有了多年的研究^[29, 30], 有许多种方法可供选用。从分类上来说有显式积分和隐式积分两大类。显式积分对于每个时间步效率较高, 但是时间步必须取的很小才能保证其稳定性。隐式积分法则是通过适当的参数选择, 保证积分的数值的稳定性, 因此时间步长长一些也可以应用。熟知的 Newmark 法和 Wilson- θ 法都是隐式积分格式。然而这些积分法也有其弱点; 如果时间步长选的大一些, 一些高频振动的分量就不能正确地反映出来。并且这些弱点是积分法所固有的, 是不可避免的。

近来, 钟万勰^[31, 32, 33]提出了精细时程积分方法, 把系统的动力方程转化为状态方程, 给出了指数矩阵 e^A 的精细数值算法, 具有很高的精度, 值得推广。沈为平、林家浩等把精细时程积分方法发展到多种形式的外载^[34, 35], 并实现了并行计算^[35, 36]。文献[34]对于没有特解的激励作用下时, 采用了 Fourier 展开的方式把激励项展开为有特解形式的求和式。文献[35]对于任意激励作用采用了柯斯特直接积分的方法求解。受演变随机激励结构的非平稳随机响应分析得到了人们的广泛的研究。林家浩应用了精细积分对结构的随机激励进行了研究^[37, 38]。张森文等提出了应用指数矩阵的精细计算方法, 在时间步长内对激励项采用辛普生积分方法来计算结构的动力响应^[39], 利用响应的时域平均来计算响应的统计特征, 在时域平均又通过高精度的精细积分所得来计算随机振动的响应^[40]。

精细时程积分方法可以得到有特解的特殊激励项的精确解。但是对于激励项是任意的情况下的不同的算法, 每个都有一定的优点和缺点。

1.4 本文研究目的和主要工作

为了对于潜水深度对结构动力特性的影响有更深入的认识, 对工程中一般的流固耦合系统的动力特性及响应分析提供基本的理论分析和工程应用方法。



在以往对于流固耦合系统和精细时程积分的研究的基础上，对水下的圆柱壳做了以下一些探索：

1. 研究了流固耦合系统的特性，用附连水质量矩阵解耦的方法形成了流固耦合系统的动力方程。
2. 对于激励项为任意的情况下，提出了对激励项采用线性拟合和二次多项式拟合的分段精细积分方法，与以往方法进行了比较。
3. 把精细时程积分应用到求解流固耦合系统的动力响应，并对于几种激励项有特解的情形进行了计算，与以往的方法进行比较。
4. 由于水深对于结构的动力响应影响很大，所以对于在不同水深情况下的结构的动力响应进行了较为详细的分析。



第二章 流固耦合系统动力方程的推导^[41]

通过变分原理,从流体力学和固体力学的基本方程出发,对流体场进行三维有限元离散,把由于结构振动产生的流体压力对结构本身的耦合影响转换成结构表面的附连水质量,并将其叠加到结构对应的质量矩阵上,最后形成流固耦合情况下的结构的动力方程。

2.1 流体动压力计算原理

设流体是均匀、无粘和无旋的理想流体,并限于讨论线性的小扰动问题^[24],如图 2-1 所示,此时流体内压力 P 服从下述方程:

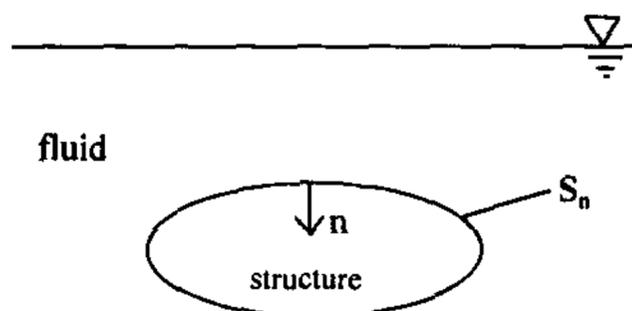


图 2-1 流体域的边界
Fig.2-1 Boundary of fluid

$$\text{在 } V \text{ 域: } \nabla^2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\text{在 } S_p: \quad P = \bar{P}$$

$$\text{在 } S_n: \quad \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}$$

式中, S_p 是给定压力的边界; \bar{P} 是给定的动水压力; S_n 是流体与结构接触的界面; u_n 是固体边界位移在法线方向的分量; n 是流固接触面的法线,其正向指向流体外部; ρ 是流体的质量密度。与 (2.1.1) 式对应的泛函为:

$$\Pi = \int \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \int_{S_n} \left(\rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \right) P dS \quad (2.1.2)$$

式中, V 是流体全部计算体积域; S_n 是流体与结构全部接触面积域。将整个流体域离散成 N_E 个单元,在节点处的连续与平衡条件约束下,式 (2.1.2) 可以写成:

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \sum_{e=1}^{N_E} \Pi_e \\ \Pi_e &= \int_{V_e} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \right] dV + \int_{S_{ne}} \left(\rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \right) P dS \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

式中, V_e 表示流体元体积; S_{ne} 表示该流体元与结构的接触面积。

设一个流体单元有 n 个节点, 则该单元的动压力为:

$$P_e = \underset{(1 \times n)}{N} \underset{(n \times 1)}{q_e} \quad (2.1.4)$$

式中, N 是插值函数; q_e 是单元节点处的动压力。

对于我们在后面用到得三维 8 节点得流体元, 取形状函数为:

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i), \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

设流体单元与结构接触面 S_{ne} 上有 S 个节点, 则该面域上的法向位移为:

$$u_n = \underset{(1 \times n)}{N_s} \underset{(n \times 1)}{d_{ne}} \quad (2.1.5)$$

式中, N_s 是流固界面 S_{ne} 上定义的插值函数; d_{ne} 是 S_{ne} 上各节点的法向位移。

根据 (2.1.4) 式、(2.1.5) 式有

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 &= q_e^T \left(\frac{\partial}{\partial x} N^T \frac{\partial}{\partial x} N \right) q_e \\ \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 &= q_e^T \left(\frac{\partial}{\partial y} N^T \frac{\partial}{\partial y} N \right) q_e \\ \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 &= q_e^T \left(\frac{\partial}{\partial z} N^T \frac{\partial}{\partial z} N \right) q_e \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n &= N_s \frac{d^2}{dt^2} d_{ne} = N_s \ddot{d}_{ne} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.6)$$

式中, \ddot{d}_{ne} 是流固界面 S_{ne} 上各节点的法向位移加速度。将 (2.1.6) 式代入 (2.1.3) 式, 有

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \frac{1}{2} q_e^T \int_{V_e} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} N^T \frac{\partial}{\partial x} N \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} N^T \frac{\partial}{\partial y} N \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} N^T \frac{\partial}{\partial z} N \right) \right] dV q_e \\ &\quad + q_e^T \left(\int_{S_{ne}} N^T \rho N_s dS \right) \ddot{d}_{ne} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

令

$$\left. \begin{aligned} H_e &= \int_v \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} N^T \frac{\partial}{\partial x} N \right) + \left(\frac{\partial}{\partial y} N^T \frac{\partial}{\partial y} N \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} N^T \frac{\partial}{\partial z} N \right) \right] dV \\ F_e &= - \left(\int_{S_{ne}} N^T \rho N_s dS \right) \ddot{d}_{ne} = - B_{S_e} \ddot{d}_{n_e} \\ B_{S_e} &= \int_{S_{ne}} N^T \rho N_s dS \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

则 (2.1.7) 式可写成:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} q_e^T H_e q_e - q_e^T F_e \quad (2.1.9)$$

由驻值条件 $\delta \Pi_e = 0$, 得

$$H_e q_e = F_e = - B_{S_e} \ddot{d}_{n_e} \quad (2.1.10)$$

假设整个流体域离散成 N_E 个单元和 NP 个节点, 流固接触面上共有 g 个节点, 且令

$$\begin{aligned} Q &= [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{NP}]^T \\ F &= [F_1 \quad F_2 \quad \cdots \quad F_{NP}]^T \\ \ddot{D}_S &= [\ddot{d}_{n1} \quad \ddot{d}_{n2} \quad \cdots \quad \ddot{d}_{ng}]^T \end{aligned}$$

分别表示流体域节点动压力、等效节点“载荷”、节点法向加速度, 那么根据节点处动压力的平衡条件和加速度的协调条件, 可组成整个流体域的基本方程, 即

$$H Q = F = - B \ddot{D}_S \quad (2.1.11)$$

2.2 流体接触面上的动压力

由流体域的边界条件, 可将节点动压力 Q 分解成三部分, 按顺序排列成:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_p^T & Q_n^T & Q_v^T \\ (NP \times 1) & (f \times 1) & (g \times 1) & (h \times 1) \end{bmatrix}^T$$

式中, Q_p 表示边界 S_p 上的节点动压力; Q_n 表示流体与结构接触面 S_n 上的节点动压力, 是结构分析所必需的; Q_v 是除了上述以外流体域节点上的动压力, 是流体域分析所需要的。

于是, (2.1.11) 式相应地写成:

$$\begin{bmatrix} H_{pp} & H_{pn} & H_{pv} \\ H_{np} & H_{nn} & H_{nv} \\ H_{vp} & H_{vn} & H_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_p \\ Q_n \\ Q_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_p \\ F_n \\ F_v \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_p \\ B_n \\ B_v \end{bmatrix} \ddot{D}_S \quad (2.2.1)$$

如果将边界 S_p 置于距结构足够远处, 可认为结构的振动对此边界以外的水域无影响, 则有

$Q_p = 0$, 代入上式, 由此可得到关于 Q_n 的基本方程为

$$\begin{matrix} H_N & Q_n & = & F_N & = & - & B_N & \ddot{D}_S \\ (g \times g) & (g \times 1) & & (g \times 1) & & & (g \times g) & (g \times 1) \end{matrix} \quad (2.2.2a)$$

或写成:

$$Q_n = -H_N^{-1} B_N \ddot{D}_S \quad (2.2.2b)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} H_N &= H_{nn} - H_{nv} H_{vv}^{-1} H_{vn} \\ F_N &= F_n - H_{nv} H_{vv}^{-1} F_v \\ B_N &= B_n - H_{nv} H_{vv}^{-1} B_v \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

同时可得

$$Q_v = H_{vv}^{-1} \left(F_v - H_{vn} Q_n \right) \quad (2.2.4)$$

2.3 结构等效节点载荷

Q_n 是结构与流体接触面上所有节点的动压力列阵。为了求出这个附加动压力对结构作用的等效节点载荷, 必须先求得接触面上每个单元的节点动压力分布。为此, 引入一个位序矩阵 $A_{(k)}$, 从 Q_n 中分解出接触面上第 k 号单元的 S 个节点处的动压力为

$$\begin{matrix} (q)_{(k)} & = & A_{(k)} & Q_n \\ (s \times 1) & & (s \times g) & (g \times 1) \end{matrix}, \quad k = 1, 2, \dots, S_E \quad (2.3.1)$$

式中, S_E 表示与结构相接触的流体单元数。于是该接触面上的动压力可表示为:

$$P_{(k)} = N_{S(k)} q_{(k)} = N_{S(k)} A_{(k)} Q_n \quad (2.3.2)$$

沿该接触面法向施加一虚位移 δu_n , 利用 (2.1.5) 式可知 $P_{(k)}$ 作虚功:

$$\delta W = \int_{S_{n(k)}} \delta u_n P_{(k)} dS = \delta d_{n(k)}^T \int_{S_{n(k)}} N_{S(k)}^T P_{(k)} dS \quad (2.3.3)$$

假定与 $P_{(k)}$ 等效的节点载荷 $F_{e(k)}$ 与位移 $d_{n(k)}$ 方向一致, 其排列序号与 $q_{(k)}$ 一致, 则 $F_{e(k)}$ 在相应的虚位移上做虚功为

$$\delta W = \delta d_{n(k)}^T F_{e(k)} \quad (2.3.4)$$

比较上述两式, 得

$$F_{e(k)} = \int_{S_{n(k)}} N_{S(k)}^T P_{(k)} dS \quad (2.3.5)$$



假设接触面上流体动压力的全部等效节点载荷 F_Q 其元素排列次序与 Q_n 一致, 则 (k) 号单元的等效节点载荷 $F_{e(k)}$ 在 F_Q 中的位置同样用位序矩阵 $A_{(k)}$ 确定:

$$F_{Q(k)} = A_{(k)}^T F_{e(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, S_E \quad (2.3.6)$$

$(g \times 1)$ $(g \times s)$ $(s \times 1)$

接触面上的所有单元作上述运算后, 简单迭加就能得到流体内附加动压力在结构上的等效节点载荷, 即

$$F_Q = \sum_{k=1}^{S_E} F_{Q(k)} = \sum_{k=1}^{S_E} A_{(k)}^T F_{e(k)} \quad (2.3.7)$$

$(g \times 1)$ $(g \times s)$ $(s \times 1)$

将 (2.3.5) 式、(2.3.2) 式和 (2.2.2) 式相继代入 (2.3.7) 式, 得

$$F_Q = - \left[\sum_{k=1}^{S_E} A_{(k)}^T \left(\int_{S_{n(k)}} N_{S(k)}^T N_{S(k)} dS \right) A_{(k)} \right] H_N^{-1} B_N \ddot{D}_S \quad (2.3.8)$$

令

$$L_{(k)} = \int_{S_{n(k)}} N_{S(k)}^T N_{S(k)} dS \quad (2.3.9)$$

$$M_P = \left(\sum_{k=1}^{S_E} A_{(k)}^T L_{(k)} A_{(k)} \right) H_N^{-1} B_N \quad (2.3.10)$$

则有

$$F_Q = -M_P \ddot{D}_S \quad (2.3.11)$$

$(g \times 1)$ $(g \times g)$ $(g \times 1)$

式中, M_P 称为“附连水质量”。

按前面推导时规定, (2.3.11) 式中 F_Q , \ddot{D}_S 的各元素其正方向都是沿节点所在表面的法向, 其正向均规定指向流体外部。因此将 (2.3.11) 式用于结构分析时, 需按结构坐标系进行变换。如图 2-2 所示, 假设结构坐标系用 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 表示, 接触面上 A 点的法线为 n_A , 它的正向指向流体外部 (结构内部)。沿法线的位移 $u_{n(A)}$ 在 $\bar{x} - \bar{y} - \bar{z}$ 坐标的分量可写成:

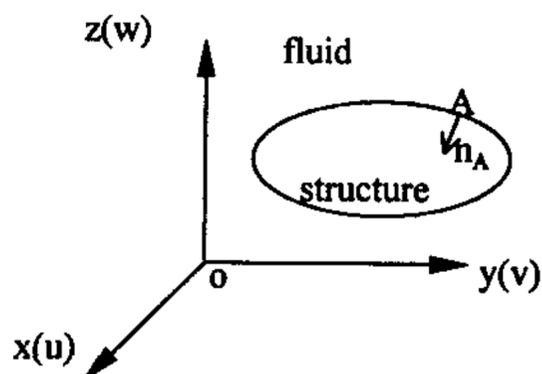


图 2-2 结构-流体系统
Fig.2-2 Structure-fluid system

$$[\bar{u}_A \quad \bar{v}_A \quad \bar{w}_A]^T = \bar{d}_A$$

于是有转换关系式

$$\begin{aligned} u_n(A) &= [\cos(n_A, \bar{x}) \quad \cos(n_A, \bar{y}) \quad \cos(n_A, \bar{z})] [\bar{u}_A \quad \bar{v}_A \quad \bar{w}_A]^T \\ &= T_{(A)} \bar{d}_{(A)} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

把接触面上所有点按规定顺序排列, 得

$$\begin{Bmatrix} u_{n(1)} \\ u_{n(2)} \\ \vdots \\ u_{n(g)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{(1)} & & & \\ & T_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_{(g)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_{(1)} \\ \bar{d}_{(2)} \\ \vdots \\ \bar{d}_{(g)} \end{Bmatrix}$$

记为

$$D_S = \lambda \bar{D}_S \quad (2.3.13)$$

节点力、位移加速度亦有同样的转换关系, 即

$$F_Q = \lambda \bar{F}_Q \quad (2.3.14)$$

$$\ddot{D}_S = \lambda \ddot{\bar{D}}_S \quad (2.3.15)$$

代入 (2.3.11) 式, 并注意到矩阵 λ 的正交性, 得到在结构坐标系中标定的附加动压力的等效节点载荷计算式为

$$\bar{F}_Q = -\bar{M}_P \ddot{\bar{D}}_S \quad (2.3.16)$$

式中

$$\bar{M}_P = \lambda^T M_P \lambda \quad (2.3.17)$$

2.4 结构动力方程

在结构坐标系中, 离散化的结构动力学方程为

$$\bar{M} \ddot{\bar{D}} + \bar{C} \dot{\bar{D}} + \bar{K} \bar{D} = \bar{F}_S(t) + \bar{F}_G(t) \quad (2.4.1)$$

式中, \bar{M} 、 \bar{C} 、 \bar{K} 分别表示结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; \bar{D} 表示结构总的节点自由度, 它可以分解成:

$$\bar{D} = \begin{Bmatrix} \bar{D}_S \\ \bar{D}_G \end{Bmatrix} \quad (2.4.2)$$

式中, \bar{D}_S 表示与流体接触表面上的自由度, 称为“湿自由度”; \bar{D}_G 表示不与流体接触的

自由度, 称为“干自由度”; \bar{F}_S 表示仅由流体附加动压力引起的节点载荷; \bar{F}_G 表示作用在结构上的其余载荷。显然 (2.3.16) 式的 \bar{F}_Q 与 \bar{F}_S 的阶数不同, 作如下处理, 令

$$\bar{F}_S = \begin{Bmatrix} \bar{F}_Q \\ 0 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{M}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\bar{D}}_s \\ \ddot{\bar{D}}_G \end{Bmatrix} \quad (2.4.3)$$

记为

$$\bar{F}_S = -\bar{M}_G \ddot{\bar{D}} \quad (2.4.4)$$

代入 (2.4.1) 式移项后, 得

$$(\bar{M} + \bar{M}_G) \ddot{\bar{D}} + \bar{C} \dot{\bar{D}} + \bar{K} \bar{D} = \bar{F}_G(t) \quad (2.4.5)$$

这就是考虑流体介质影响的结构动力分析的基本方程。与结构在空气中的振动方程相比, 只是多了一项“附连水质量阵” \bar{M}_G 。

第三章 考虑水深压力的流固耦合系统

利用几何非线性原理,把由于水深压力对于结构的影响转换成结构表面的初应力刚度矩阵,并将其依次叠加到结构的刚度矩阵上,最后形成考虑水深压力的结构的动力方程。

3.1 几何非线性的基本原理^[41]

在实际的结构中,大多数的载荷只产生小位移和小应变,这种结构的应变计算关系式也是线性式,所用的材料的应力-应变关系一般都遵守或近似地遵守虎克定律,其关系也是线性的。在结构分析问题中,有两种类型的几何非线性,第一种类型属于材料性质的非线性,它是由于结构材料的弹塑性或粘弹性的性能是非线性而引起的,它反映在应力-应变关系的物理方程中。因此,这类非线性问题称之为物理非线性。第二种类型是指:“几何非线性”,当位移(挠度)大得足以使结构的几何形状发生显著的改变,以致平衡方程必须按变形后的位置建立时,就属于这类非线性,它反映在应变-位移关系式中,故称之为“几何非线性”。为线性结构发展起来的有限单元法可以扩充来分析上述的非线性问题。

在薄板、薄壳一类工程结构中,由于挠度较大,载荷与挠度间呈现出非线性关系,同时由于转动而引起的伸长再也不能忽略,在大多数情况中,转动还是有限的,因此可把这类问题归列为有限变形来处理。本节将采用拉格朗日坐标系中的增量位能原理,建立有限变形问题中的基于增量位能原理的有限元列式,可供结构分析之用。

对于这一类大挠度、小转动的有限变形问题,我们将采用线性化的逐步增量法。即将外载荷分成若干级,按小增量逐步施加,而对每一个增量求解一个逐段线性问题。与小变形问题的不同在于这里将要考虑加载前的应力状态对本次加载的影响,而且每次都是在上一级载荷增量施加终止时的结构位形上施加本次载荷增量。

1. 拉格朗日坐标系中的增量位能原理

不失一般性,本节的推导都以三维弹性体作为分析对象。当我们采用拉格朗日坐标系,增量形式的最小位能原理可以写为

$$\begin{aligned} \Pi = & \iiint_V \left[\{\Delta \varepsilon\}^T \{\sigma\}^0 + \frac{1}{2} \{\Delta \varepsilon\}^T [C] \{\Delta \varepsilon\} + \{\Delta \varepsilon\}^T [C] \{\Delta \varepsilon\}^0 \right. \\ & \left. - \{\Delta f\}^T \left(\{\bar{F}\}^0 + \{\Delta \bar{F}\} \right) \right] dv - \iint_{S_\sigma} \{\Delta f\}^T \left(\{\bar{T}\}^0 + \{\Delta \bar{T}\} \right) ds = \text{极小} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

它与小位移问题的不同在于式中的应变、应力是指格林应变矢量与克希霍夫应力矢量,应力-应变关系为有限变形在直角坐标系中的形式导出:



$$\{\Delta\varepsilon\}=[D_u]\{\Delta f\}=[D_{uo}]+[D_{ul}]\{\Delta f\} \quad (3.1.2)$$

其中:

$$\{\Delta f\}=[\Delta u, \Delta v, \Delta w]^T \quad (3.1.3)$$

$$[D_u]=[D_{uo}]+[D_{ul}] \quad (3.1.4)$$

$$[D_{uo}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

$$[D_{ul}] = [A][L] \quad (3.1.6)$$

$$[A] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \Delta u & \frac{\partial}{\partial x} \Delta v & \frac{\partial}{\partial x} \Delta w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \Delta u & \frac{\partial}{\partial y} \Delta v & \frac{\partial}{\partial y} \Delta w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \Delta u & \frac{\partial}{\partial z} \Delta v & \frac{\partial}{\partial z} \Delta w \\ 2 \frac{\partial}{\partial y} \Delta u & 2 \frac{\partial}{\partial y} \Delta v & 2 \frac{\partial}{\partial y} \Delta w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \frac{\partial}{\partial z} \Delta u & 2 \frac{\partial}{\partial z} \Delta v & 2 \frac{\partial}{\partial z} \Delta w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta u & 2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta v & 2 \frac{\partial}{\partial x} \Delta w \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}^T \quad (3.1.8)$$

2. 有限元列式

在拉格朗日坐标系内, 可用节点位移增量内插单元的位移增量, 写成

$$\{\Delta f\} = [N]\{\Delta d\} \quad (3.1.9)$$

式中[N]为单元的形函数。

$$\{\Delta\varepsilon\} = [\bar{B}]\{\Delta d\} \quad (3.1.10)$$

其中

$$[\bar{B}] = ([D_{uo}] + [D_{ul}])[N] = [B_o] + [B_L] \quad (3.1.11)$$



称为应变矩阵, 而

$$[B_o] = [D_{uo}] [N] \quad (3.1.12)$$

就是小位移情况中的应变矩阵, 称为“线性应变矩阵”,

$$[B_L] = [D_{uL}] [N] = [A] [L] [N] \quad (3.1.13)$$

称为“非线性应变矩阵”, 或“大位移应变矩阵”。

在单元处于平衡状态的充要条件, 应用节点位移增量表示的总位能增量进行推导可以得到单元节点平衡方程的增量形式:

$$(\bar{K}) + [K_\sigma] \{\Delta d\} - \{\Delta R_e\} - \{\Delta R_\sigma\} - \{\Delta F_v\} - \{\Delta F_s\} = 0 \quad (3.1.14)$$

式中:

$$[\bar{K}] = \int_V [\bar{B}]^T [C] [\bar{B}] dv \quad (3.1.15)$$

$$[K_\sigma] \{\Delta d\} = \int_V d[\bar{B}]^T \{\sigma\} dv \quad (3.1.16)$$

$$\{\Delta R_e\} = - \int_V [\bar{B}]^T [C] \{\Delta \varepsilon\}^0 dv \quad (3.1.17)$$

$$\{\Delta R_\sigma\} = - \left[\int_V [\bar{B}]^T \{\sigma\}^0 dv - \int_V [N]^T \{\bar{F}\}^0 dv - \iint_{S_\sigma} [N]^T \{\bar{T}\}^0 ds \right] \quad (3.1.18)$$

$$\{\Delta F_v\} = \int_V [N]^T \{\Delta \bar{F}\} dv \quad (3.1.19)$$

$$\{\Delta F_s\} = \iint_{S_\sigma} [N]^T \{\Delta \bar{T}\} ds \quad (3.1.20)$$

下面我们简要说明上述各项的计算公式和物理意义。

(1) 初应力矩阵 $[K_\sigma]$

$$[K_\sigma] = \int_V [G]^T [T] [G] dv \quad (3.1.21)$$

是由当前应力水平确定的对称矩阵。通常称之为“初应力矩阵”或几何刚度矩阵。

其中:

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\sigma_x] & [\tau_{xy}] & [\tau_{xz}] \\ [\tau_{yx}] & [\sigma_y] & [\tau_{yz}] \\ [\tau_{zx}] & [\tau_{zy}] & [\sigma_z] \end{bmatrix} \quad (3.1.22)$$

$$[G] = [L] [N] = \left[\frac{\partial}{\partial x} [N]^T, \frac{\partial}{\partial y} [N]^T, \frac{\partial}{\partial z} [N]^T \right]^T \quad (3.1.23)$$

(2) 切线刚度矩阵 $[K_T]$

我们引入记号

$$[K_T] = [\bar{K}] + [K_\sigma] = [K_o] + [K_L] + [K_\sigma] \quad (3.1.24)$$



其中:

$$[K_o] = \int_V [B_o]^T [C] [B_o] dv \quad (3.1.25)$$

是小位移刚度矩阵。

$$[K_L] = \int_V \left([B_o]^T [C] [B_L] + [B_L]^T [C] [B_o] + [B_L]^T [C] [B_L] \right) dv \quad (3.1.26)$$

称为“大位移矩阵”或“初位移矩阵”。

(3) 节点载荷增量

$\{\Delta F_v\}$ 表示由增量体力引起的等效节点载荷部分。 $\{\Delta F_s\}$ 表示增量面力产生的等效节点载荷部分。

(4) 不平衡修正节点力 $\{\Delta R_\sigma\}$

$\{\Delta R_\sigma\}$ 反映了本次载荷施加前及施加过程中单元节点载荷的不平衡的程度。

(5) 协调误差修正节点力 $\{\Delta R_e\}$

$\{\Delta R_e\}$ 反映了不协调应变对节点力的影响。

我们可以看出, 与小位移平衡方程相比, 刚度矩阵多了初应力刚度矩阵和大位移刚度矩阵, 当我们讨论的变形不是很大时, 可以忽略结构的大位移刚度矩阵。所以只是多了一项初应力刚度矩阵。

3.2 柔性板的有限元分析^[28]

在板的弯曲问题中, 如果扰度较之板厚为小量, 则板的中面应变可以忽略不计; 在扰度较之板厚不再为小量, 但较之板的其它尺寸仍为小量的情况下, 分析问题时必须把板中面的应变考虑进去。

板的位移函数:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_u] & & \\ & [N_v] & \\ & & [N_w] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_u\} \\ \{d_v\} \\ \{d_w\} \end{Bmatrix} = [N] \{d\} \quad (3.2.1)$$

在不计入非线性膜力的影响下, 应用总位能驻值原理可以得到柔性板单元的平衡方程为:

$$([K_E] + [K_{GL}]) \{d\} = \{F\} \quad (3.2.2)$$

其中: $[K_E]$ 为弹性刚度矩阵; $[K_{GL}]$ 为线性几何刚度矩阵。

为了方便起见, 我们把 $[K_{GL}]$ 写为:

$$[K_{GL}] = \sigma_x t [K_{Gx}] + \sigma_y t [K_{Gy}] + \tau_{xy} t [K_{Gxy}] \quad (3.2.3)$$

其中:

$$[K_{Gx}] = \iint_A \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial [N_w]}{\partial x} dx dy \quad (3.2.4)$$

$$[K_{Gy}] = \iint_A \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial y} \right)^T \frac{\partial [N_w]}{\partial y} dx dy \quad (3.2.5)$$

$$[K_{Gxy}] = \iint_A \left[\left(\frac{\partial [N_w]}{\partial x} \right)^T \frac{\partial [N_w]}{\partial y} + \left(\frac{\partial [N_w]}{\partial y} \right)^T \frac{\partial [N_w]}{\partial x} \right] dx dy \quad (3.2.6)$$

对于四节点 12 自由度的非协调矩形弯曲板单元, 如图 3-1 所示:

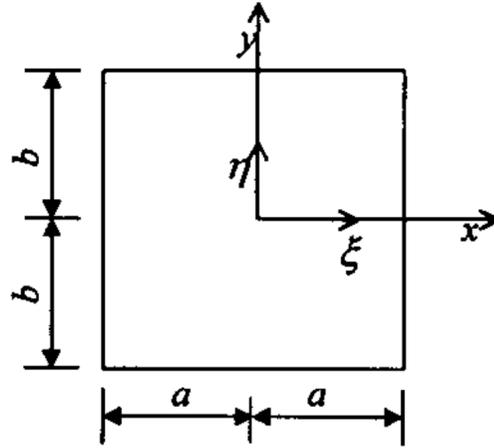


图 3-1 矩形板单元

Fig.3-1 Element of rectangle plate

$$w = [N_w] \{d\} \quad (3.2.7)$$

其中,

$$\{d\} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}]^T$$

对应的广义力为

$$\{F\} = [F_1 \ M_{x1} \ M_{y1} \ F_2 \ M_{x2} \ M_{y2} \ F_3 \ M_{x3} \ M_{y3} \ F_4 \ M_{x4} \ M_{y4}]^T$$

形函数为

$$[N_w] = [[N]_1 \ [N]_2 \ [N]_3 \ [N]_4]$$

式中

$$[N]_i = [N_i \ N_{xi} \ N_{yi}] \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

经过推导可以得到 12 自由度矩形弯曲板非协调单元的几何刚度矩阵的显式为

$$[K_{GL}] = \sigma_x t [K_{Gx}] + \sigma_y t [K_{Gy}] + \tau_{xy} t [K_{Gxy}]$$

其中:

第四章 精细时程积分法

流固耦合系统的动力响应的求解是流固耦合问题的一个重要部分。本章介绍了的计算结构响应的方法，传统的方法如：威尔逊 θ 方法和纽马克方法；最近提出的精细时程积分方法。我们提出了分段的精细时程积分方法。

4.1 结构振动方程及动力响应问题

在上一章中我们得到了流固耦合影响作用后以及水深影响的结构的振动方程：

$$([M] + [M_G])\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + ([K] + [K_G])\{r\} = \{F_G(t)\} \quad (4.1.1)$$

式中： $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 分别为在基准坐标系下结构的质量阵、阻尼阵、刚度阵； $[M_G]$ 和 $[K_G]$ 分别为“附连水质量阵”和“几何刚度矩阵”； $\{r\}$ 为结构全部节点自由度位移向量列阵； $\{F_G(t)\}$ 为作用在结构全部节点自由度上的等效载荷。

为了简单计，把式(4.1.1)写成：

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \{f(t)\} \quad (4.1.2)$$

于式(4.1.1)相比，式中 $[M] = [M] + [M_G]$ 、 $[K] = [K] + [K_G]$ 、 $\{f(t)\} = \{F_G(t)\}$ 。

我们令其初始条件为：

$$\{\dot{r}(0)\} = \{\dot{r}_0\} \quad , \quad \{r(0)\} = \{r_0\} \quad (4.1.3)$$

在数学上，式(4.1.2)式一个二阶线性微分方程组，原则上可以用求解常系数微分方程组的标准方法来求出它的解^[42]。但是如果矩阵的阶数很高，则用求解一般微分方程组的方法可能需要很高的费用（除非利用系数矩阵 $[K]$ 、 $[C]$ 和 $[M]$ 的特殊性质）。在实用的有限元分析中，我们最感兴趣的只是几种有效的方法。

4.2 计算结构动力响应的传统方法^[29]

动力分析中平衡方程组的求解主要可分为两种：直接积分法和振型叠加法。初看起来这两种方法似乎完全不同，但事实上它们有密切的关系。我们主要讨论直接积分法。对式(4.1.2)的直接积分法采用了逐步进行数值积分的过程。实质上，直接积分以下面两个想法为基础：第一是试图只在相隔为 Δt 的一些离散的时间区间内而不是在任一时刻 t 上满足式(4.1.2)，基本的想法是，含有惯性力和阻尼力作用的（静力）平衡是在求解区间的一些离散时刻点上获得的。第二是直接积分法是以位移、速度和加速度在每一时间区间 Δt 内的变分假设为依据的，这个假设决定了解的精度、稳定性和解题的费用。



4.2.1 威尔逊 θ 法

威尔逊 θ 法实质上是线性加速度法的推广。线性加速度法是假定加速度从时刻 t 到时刻 $t+\Delta t$ 呈线性变化。威尔逊 θ 法则假定加速度从时刻 t 到时刻 $t+\theta \Delta t$ 呈线性变化, 其中 $\theta \geq 1.0$ 。当 $\theta = 1.0$ 时, 就化为线性加速度格式。为了威尔逊 θ 法无条件稳定, 必须用 $\theta \geq 1.37$, 通常采用 $\theta = 1.40$ 。

令 τ 表示时间的增量, 其中 $0 \leq \tau \leq \theta \Delta t$, 于是对于从 t 到 $t+\theta \Delta t$ 的时间区间内, 假设

$$\{^{t+\tau} \ddot{r}\} = \{^t \ddot{r}\} + \frac{\tau}{\theta \Delta t} (\{^{t+\theta \Delta t} \ddot{r}\} - \{^t \ddot{r}\}) \quad (4.2.1)$$

积分式(4.2.1)得:

$$\{^{t+\tau} \dot{r}\} = \{^t \dot{r}\} + \{^t \ddot{r}\} \tau + \frac{\tau^2}{2\theta \Delta t} (\{^{t+\theta \Delta t} \ddot{r}\} - \{^t \ddot{r}\}) \quad (4.2.2)$$

$$\{^{t+\tau} r\} = \{^t r\} + \{^t \dot{r}\} \tau + \frac{1}{2} \{^t \ddot{r}\} \tau^2 + \frac{1}{6\theta \Delta t} \tau^3 (\{^{t+\theta \Delta t} \ddot{r}\} - \{^t \ddot{r}\}) \quad (4.2.3)$$

利用式(4.2.1)和式(4.2.2), 在时刻 $t+\theta \Delta t$ 得:

$$\{^{t+\theta \Delta t} \dot{r}\} = \{^t \dot{r}\} + \frac{\theta \Delta t}{2} (\{^{t+\theta \Delta t} \ddot{r}\} + \{^t \ddot{r}\}) \quad (4.2.4)$$

$$\{^{t+\theta \Delta t} r\} = \{^t r\} + \theta \Delta t \{^t \dot{r}\} + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} (\{^{t+\theta \Delta t} \ddot{r}\} + 2\{^t \ddot{r}\}) \quad (4.2.5)$$

由此可以利用 $\{^{t+\theta \Delta t} r\}$ 求出 $\{^{t+\theta \Delta t} \ddot{r}\}$ 和 $\{^{t+\theta \Delta t} \dot{r}\}$:

$$\{^{t+\theta \Delta t} \ddot{r}\} = \frac{6}{\theta^2 \Delta t^2} (\{^{t+\theta \Delta t} r\} - \{^t r\}) - \frac{6}{\theta \Delta t} \{^t \dot{r}\} - \{^t \ddot{r}\} \quad (4.2.6)$$

$$\{^{t+\theta \Delta t} \dot{r}\} = \frac{3}{\theta \Delta t} (\{^{t+\theta \Delta t} r\} - \{^t r\}) - 2\{^t \dot{r}\} - \frac{\theta \Delta t}{2} \{^t \ddot{r}\} \quad (4.2.7)$$

为了得到时刻 $t+\Delta t$ 的位移、速度和加速度的解, 应考虑在时刻 $t+\theta \Delta t$ 的平衡方程(4.1.1), 然而, 由于假设加速度呈线性变化, 故所用的投影载荷向量也是线性变化的, 即其方程为:

$$[M]\{^{t+\theta \Delta t} \ddot{r}\} + [C]\{^{t+\theta \Delta t} \dot{r}\} + [K]\{^{t+\theta \Delta t} r\} = \{^{t+\theta \Delta t} \bar{f}\} \quad (4.2.8)$$

其中:

$$\{^{t+\theta \Delta t} \bar{f}\} = \{^t \bar{f}\} + \theta (\{^{t+\Delta t} \bar{f}\} - \{^t \bar{f}\}) \quad (4.2.9)$$

把式(4.2.6)和式(4.2.7)代入式(4.2.8)就可以得到求解 $\{^{t+\theta \Delta t} r\}$ 的方程, 把 $\{^{t+\theta \Delta t} r\}$ 代入式(4.2.6)求出 $\{^{t+\theta \Delta t} \ddot{r}\}$, 再把 $\{^{t+\theta \Delta t} \ddot{r}\}$ 代入式(4.2.1)、式(4.2.2)和式(4.2.3), 并取 $\tau = \Delta t$ 进行计算便可以得到 $\{^{t+\Delta t} \ddot{r}\}$ 、 $\{^{t+\Delta t} \dot{r}\}$ 和 $\{^{t+\Delta t} r\}$ 。

威尔逊 θ 法是隐式积分法, 因为刚度矩阵 $[K]$ 是未知位移向量的系数矩阵, 我们可以



看出, 该方法不需要特殊的起始过程, 因为时刻 $t + \Delta t$ 的位移、速度和加速度就是利用时刻 t 的值表示的。

4. 2. 2 纽马克方法

纽马克积分法也可以认为是线性加速度法的推广, 所以用如下的假设:

$$\{^{t+\Delta t} \dot{r}\} = \{^t \dot{r}\} + ((1-\delta)\{^t \ddot{r}\} + \delta\{^{t+\Delta t} \ddot{r}\})\Delta t \quad (4.2.10)$$

$$\{^{t+\Delta t} r\} = \{^t r\} + \{^t \dot{r}\}\Delta t + \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\{^t \ddot{r}\} + \alpha\{^{t+\Delta t} \ddot{r}\}\right)\Delta t^2 \quad (4.2.11)$$

其中, α 和 δ 是可以根据积分的精度和稳定性确定的参数。当 $\delta = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = \frac{1}{6}$ 时, 关系式

(4.2.10) 和 (4.2.11) 相当于线性加速度法。纽马克最初提出的是以: 恒定-平均-加速度作为无条件稳定的格式, 此时 $\delta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{4}$ 。

为了得到时刻 $t + \Delta t$ 的位移、速度和加速度的解, 除了式 (4.2.10) 和式 (4.2.11) 外, 还需要考虑时刻 $t + \Delta t$ 的平衡方程:

$$[M]\{^{t+\Delta t} \ddot{r}\} + [C]\{^{t+\Delta t} \dot{r}\} + [K]\{^{t+\Delta t} r\} = \{^{t+\Delta t} f\} \quad (4.2.12)$$

由式 (4.2.11) 通过 $\{^{t+\Delta t} r\}$ 可以求出 $\{^{t+\Delta t} \ddot{r}\}$, 然后把 $\{^{t+\Delta t} \ddot{r}\}$ 代入式 (4.2.10) 便可以得到 $\{^{t+\Delta t} \dot{r}\}$ 和 $\{^{t+\Delta t} r\}$ 的方程, 每个方程只包含未知位移 $\{^{t+\Delta t} r\}$, 把这两个关系式 $\{^{t+\Delta t} \dot{r}\}$ 和 $\{^{t+\Delta t} r\}$ 代入式 (4.2.12), 求出 $\{^{t+\Delta t} r\}$ 后, 利用式 (4.2.10) 和 (4.2.11) 可以算出 $\{^{t+\Delta t} \ddot{r}\}$ 和 $\{^{t+\Delta t} \dot{r}\}$ 。

在我们使用威尔逊 θ 法和纽马克方法时, 初始的条件都要求我们提供初始的位移、初速度和初加速度的值, 即: $\{r(0)\}$ 、 $\{\dot{r}(0)\}$ 和 $\{\ddot{r}(0)\}$ 的值, 但是在一般的条件中只给了初始的位移和初始的速度。

我们提出使用“协调加速度”的概念。即: 根据给出的初始的位移和初速度, 应用动力方程算出初始的加速度, 如下式所示:

$$\{\ddot{r}(0)\} = [M]^{-1} (\{f(0)\} - [C]\{\dot{r}(0)\} - [K]\{r(0)\}) \quad (4.2.13)$$

4. 2. 3 中心差分法

如果把式 (4.1.2) 的平衡关系看成是一个常系数常微分方程组, 便可以用任何一种适当的有限差分格式通过位移来近似表示加速度和速度。因此, 从理论上来说, 许多不同的有限差分均可以利用。在求解某些问题时, 一种非常有效的方法是中心差分方法, 该方法假设:



$$\{\ddot{r}\} = \frac{1}{\Delta t^2} (\{r\}^{t-\Delta t} - 2\{r\}^t + \{r\}^{t+\Delta t}) \quad (4.2.14)$$

展开式 (4.2.14) 的误差是 (Δt^2) 阶的, 为了使速度展开也具有同阶误差, 可用

$$\{\dot{r}\} = \frac{1}{2\Delta t} (\{r\}^{t-\Delta t} + \{r\}^{t+\Delta t}) \quad (4.2.15)$$

在 $t + \Delta t$ 时刻的位移解, 使在时刻 t 按式 (4.1.2) 求得的, 即

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \{f\} \quad (4.2.16)$$

把式 (4.2.14) 和式 (4.2.15) 中的 $\{\ddot{r}\}$ 及 $\{\dot{r}\}$ 的关系式分别代入式 (4.2.16), 可得

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{r\}^{t+\Delta t} = \{f\} - \left([K] - \frac{2}{\Delta t^2} [M] \right) \{r\}^t - \left(\frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{r\}^{t-\Delta t} \quad (4.2.17)$$

由此便可以求出 $\{r\}^{t+\Delta t}$ 。应当指出, $\{r\}^{t+\Delta t}$ 的解式根据时刻 t 的平衡条件得到的, 即 $\{r\}^{t+\Delta t}$ 是由式 (4.2.16) 算出。因而, 该积分过程为显式积分法。

4.3 精细时程积分法

逐步积分法已经有了多年的研究, 有许多种方法可供选用。从分类上来说有显式积分与隐式积分两大类。显式积分对于每一时间步效率较高, 但是时间步必须取得很小才能保证其稳定性, 隐式积分法则可以通过恰当的参数选取, 保证积分的数值稳定性, 因此时间步长 Δt 长一点也可以适用。熟知的纽马克和威尔逊 θ 法都是隐式积分格式。然而积分法也有其弱点, 由于时间步长 Δt 选得大一些, 一些振动的分量不能正确地反映出来。又如果将其用于一个保守体系, 则经过若干步的计算之后, 系统的能量等不能保持守恒。这种情况被称为“人工阻尼”或“算法阻尼”。这是积分法选用带来的, 是无可奈何的。

钟万勰^[31]提出了精细时程积分法, 很多学者^[32, 34, 39]完善了这种方法, 这种方法的解在数值上逼近精确解的数值结果。

4.3.1 方程的变换与时程积分

仿照 Hamilton 体系的对偶变量的引入^[43], 令:

$$\{p\} = [M]\{\dot{r}\} + [C]\{r\}/2 \quad (4.3.1)$$

或:

$$\{\dot{r}\} = [M]^{-1}\{p\} - [M]^{-1}[C]\{r\}/2 \quad (4.3.2)$$

此时式 (4.1.2) 成为:

$$\{\dot{p}\} = -\left([K] - [C][M]^{-1}[C]/4 \right) \{r\} - [C][M]^{-1}\{p\} + \{f\} \quad (4.3.3)$$



以上方程可以写成线性体系的一般形式:

$$\{\dot{q}\} = [A]\{q\} + [D]\{p\} + \{f_q\} \quad (4.3.4)$$

$$\{\dot{p}\} = [B]\{q\} + [G]\{p\} + \{f_p\} \quad (4.3.5)$$

其中的各个量对比于式 (4.3.2) 和式 (4.3.3) 为:

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{r\}, & \{p\} &= \{p\} \\ [A] &= -[M]^{-1}[C]/2, & [B] &= [C][M]^{-1}[C]/4 - [K] \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$[G] = -[C][M]^{-1}/2, \quad [D] = [M]^{-1}$$

$$\{f_p\} = \{f\}, \quad \{f_q\} = \{0\}$$

把式 (4.3.4) 和式 (4.3.5) 联立可以得到非齐次方程组, 可以合并写为:

$$\{\dot{v}\} = [H]\{v\} + \{F\} \quad (4.3.7)$$

其中:

$$[H] = \begin{bmatrix} A & D \\ B & G \end{bmatrix}, \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix}$$

从线性常微分方程的理论知到, 应该先找到齐次方程组的通解, 然后再用叠加原理或变量代换找出非齐次方程组的特解。因此, 应该首先解决齐次线性方程组:

$$\{\dot{q}\} = [A]\{q\} + [D]\{p\} \quad (4.3.8)$$

$$\{\dot{p}\} = [B]\{q\} + [G]\{p\} \quad (4.3.9)$$

常微分方程组常用的数值计算方法往往是将微分方程化成差分方程的积分法, 但是文献[43]指出, 这些差分方程往往会破坏保守体系的守恒性质, 所以我们采用精细时程积分方法。

将式 (4.3.8) 和式 (4.3.9) 合并写为:

$$\{\dot{v}\} = [H]\{v\} \quad (4.3.10)$$

其中:

$$[H] = \begin{bmatrix} A & D \\ B & G \end{bmatrix}, \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}$$

我们还可以用另一种方法得到式 (4.1.2) 的状态方程, 把式 (4.1.2) 的两边同时乘以 $[M]^{-1}$ 可以得到:

$$\{\ddot{r}\} + [M]^{-1}[C]\{\dot{r}\} + [M]^{-1}[K]\{r\} = [M]^{-1}\{f\} \quad (4.3.11)$$

$$\{\dot{r}\} = \{\dot{r}\} \quad (4.3.12)$$

式 (4.3.12) 式一个恒等式。



联立式 (4.3.11) 和式 (4.3.12) 可以得到:

$$\{\dot{v}\} = [H]\{v\} + \{F\} \quad (4.3.13)$$

写成齐次方程的形式为:

$$\{\dot{v}\} = [H]\{v\} \quad (4.3.14)$$

其中:

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ B & G \end{bmatrix}, \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} r \\ \dot{r} \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ [M]^{-1} f \end{Bmatrix}$$

$$[B] = -[M]^{-1}[K], \quad [G] = -[M]^{-1}[C], \quad \{v_0\} = \begin{Bmatrix} r_0 \\ \dot{r}_0 \end{Bmatrix}$$

对于上面两种方法得到的状态方程的齐次形式, 在定常系统时, 如 $[H]$ 是常矩阵, 其通解可以形式地写为:

$$\{v\} = \exp([H] \cdot t) \{v_0\} \quad (4.3.15)$$

令时间步长 $delt = \tau$, 则

$$\{v(\tau)\} = \exp([H] \cdot \tau) \cdot \{v_0\} = [T(\tau)] \cdot \{v_0\} \quad (4.3.16)$$

其中:

$$[T(\tau)] = \exp([H] \cdot \tau) \quad (4.3.17)$$

所以只要精确地计算出 $[T(\tau)]$, 就可以得到齐次方程的通解。

4.3.2 指数矩阵 $[T(\tau)]$ 的精细计算

对于指数矩阵 $[T(\tau)]$ 的精细计算方法主要是利用加法原理, 有:

$$[T(\tau)] = \exp([H] \cdot \tau) = [\exp([H] \cdot \tau / m)]^m \quad (4.3.18)$$

其中可以选取 $m = 2^N$; 例如选取 $N = 20$, 则有 $m = 1048576$ 。由于给定的 τ 本来就是不大的时间段, 所以 $\Delta t = \tau / m$ 将是一个非常小的时间段。

对于 Δt 的时间区段, 有

$$\exp([H] \cdot \Delta t) \approx [I + T_{a0}] \quad (4.3.19)$$

其中:

$$[T_{a0}] = [H]\Delta t + \frac{([H]\Delta t)^2}{2!} + \frac{([H]\Delta t)^3}{3!} + \frac{([H]\Delta t)^4}{4!} + \dots$$

对于 $[T_{a0}]$ 取几项则看精度的要求。把式 (4.3.19) 代入式 (4.3.18) 可以得到:

$$[T(\tau)] \approx (I + [T_{a0}])^{2N} \quad (4.3.20)$$

注意到:

$$[I + T_{a0}]^2 = [I + 2 \times T_{a0} + T_{a0} \times T_{a0}] \equiv [I + T_{a0}]$$

$$[I + T_{a1}]^2 = [I + 2 \times T_{a1} + T_{a1} \times T_{a1}] \equiv [I + T_{a2}]$$

.....

$$[I + T_{a,N-1}]^2 = [I + 2 \times T_{a,N-1} + T_{a,N-1} \times T_{a,N-1}] \equiv [I + T_{aN}]$$

我们可以清楚的看出:

$$[I + T_{aN}] = [I + T_{a,N-1}]^2 = [I + T_{a,N-2}]^4 = \cdots = [I + T_{a0}]^{2N} = [T(\tau)] \quad (4.3.21)$$

式 (4.3.21) 说明了计算的策略。为了避免丢失指数矩阵 $[T(\tau)]$ 的有效数字, 即避免在计算中产生大数吃小数的现象。我们采用如下的方法:

$$[T_{ai}] = 2 \times [T_{a,i-1}] + [T_{a,i-1}] \times [T_{a,i-1}], \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (4.3.22)$$

这样指数矩阵 $[T(\tau)]$ 变为:

$$[T(\tau)] \approx [I] + [T_{aN}] \quad (4.3.23)$$

按以上的方法计算的指数矩阵 $[T(\tau)]$ 的值时, 唯一引入的近似是在式 (4.3.19) 中 T_{a0} 略去了 Δt^5 及更高的项。但是因 $O(\Delta t^5) = 10^{-30} O(\tau^5)$, 这通常相当于计算机的舍入误差。所以这种方法事实上在计算机上给出了指数矩阵 $[T(\tau)]$ 的精确解。

4.3.3 非齐次方程的解

计算出指数矩阵 $[T(\tau)]$ 的值以后, 我们就可以得到齐次方程的解。现在我们再计算非齐次方程的解。

$$\{\dot{v}\} = [H]\{v\} + \{F\}, \quad \{v\}_{t=t_0} = \{v_0\} \quad (4.3.24)$$

方程 (4.3.24) 的解为:

$$\{v(t)\} = [T(t)]\{v_0\} + \int_0^t [T(t-z)]\{F(z)\}dz \quad (4.3.25)$$

对于某些特殊的载荷, 方程 (4.3.24) 的解为齐次解 $\{v_h\}$ 与特解 $\{v_p\}$ 之和, 即:



$$\{v(t)\} = \{v_h(t)\} + \{v_p(t)\} \quad (4.3.26)$$

在某一积分步长 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 中, 其齐次解为:

$$\{v_h(t)\} = [T(\tau)]\{c\} \quad (4.3.27)$$

其中:

$$[T(\tau)] = e^{[H]\tau}, \quad \tau = t - t_k, \quad \{c\} \text{ 是由 } t = t_k \text{ 是初始状态所决定的积分常向量。}$$

假定特解 $\{v_p(t)\}$ 的表达式已经求出, 可得到解的形式为:

$$\{v(t)\} = [T(\tau)](\{v(t_k)\} - \{v_p(t_k)\}) + \{v_p(t)\} \quad (4.3.28)$$

对于特例, 在 $t = t_{k+1}$ 时, 例如最后一个时间步长可得到:

$$\{v(t_{k+1})\} = [T(\tau_k)](\{v(t_k)\} - \{v_p(t_k)\}) + \{v_p(t_{k+1})\} \quad (4.3.29)$$

对于几种有特解形式的问题, 分别叙述如下:

1) 右端项随时间线性变化

在时间步长 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 内, 右端项的形式为:

$$\{F\} = \{F_0\} + \{F_1\} \times (t - t_k) \quad (4.3.30)$$

其中: $\{F_0\}$ 和 $\{F_1\}$ 为时间的常向量。相应的特解为:

$$\{v_{p1}(t)\} = ([H]^{-1} + [I] \times t) - [H]^{-1} \{F_1\} - [H]^{-1} (\{F_0\} - \{F_1\} \times t_k) \quad (4.3.31)$$

把式 (4.3.31) 代入式 (4.3.29), $t = t_{k+1}$ 得到:

$$\begin{aligned} \{v(t_{k+1})\} &= [T(\tau_k)] \times (\{v(t_k)\} + [H]^{-1} (\{F_0\} + [H]^{-1} \{F_1\})) \\ &\quad - [H]^{-1} (\{F_0\} + [H]^{-1} \{F_1\} + \{F_1\} \times \tau_k) \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

2) 右端项是简谐形式的

在时间步长 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 内, 右端项的形式为:

$$\{F\} = \{F_1\} \sin \omega t + \{F_2\} \cos \omega t \quad (4.3.33)$$

其中: $\{F_1\}$ 和 $\{F_2\}$ 为时间的常向量。相应的特解为:

$$\{v_{ps}\} = \{A\} \sin \omega t + \{B\} \cos \omega t \quad (4.3.34)$$

其中:



$$\{A\} = (\omega[I] + [H]^2 / \omega)^{-1} (\{F_2\} - [H]\{F_1\} / \omega)$$

$$\{B\} = (\omega[I] + [H]^2 / \omega)^{-1} (-\{F_1\} - [H]\{F_2\} / \omega)$$

把式 (4.3.34) 代入式 (4.3.29), 令 $t = t_{k+1}$ 得到:

$$\begin{aligned} \{v(t_{k+1})\} &= [T(\tau_k)] (\{v(t_k)\} - \{A\} \sin \omega t_k - \{B\} \cos \omega t_k) \\ &+ \{A\} \sin \omega t_{k+1} + \{B\} \cos \omega t_{k+1} \end{aligned} \quad (4.3.35)$$

3) 右端项可以用傅立叶展开的形式

在时间步长 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 内, 右端项通过傅立叶展开为如下的形式:

$$\{F\} \approx \{b_0\} + \sum_{i=1}^q (\{a_i\} \sin(i\omega t) + \{b_i\} \cos(i\omega t)) \quad (4.3.36)$$

其中: $\{b_0\}$ 、 $\{b_i\}$ ($i=1,2,\dots,q$) 和 $\{a_i\}$ ($i=1,2,\dots,q$) 为时间的常向量。相应的特解为:

$$\{v_{pf}\} = \{B_0\} + \sum_{i=1}^q (\{A_i\} \sin(i\omega t) + \{B_i\} \cos(i\omega t)) \quad (4.3.37)$$

其中:

$$\{B_0\} = -[H]^{-1} \{b_0\}$$

$$\{A_i\} = (i^2 \omega^2 [I] + [H]^2)^{-1} (-[H]\{a_i\} + i\omega \{b_i\})$$

$$\{B_i\} = (i^2 \omega^2 [I] + [H]^2)^{-1} (-i\omega \{a_i\} - [H]\{b_i\})$$

$$(i=1,2,\dots,q)$$

把式 (4.3.37) 代入式 (4.3.29), 令 $t = t_{k+1}$ 得到:

$$\begin{aligned} \{v(t_{k+1})\} &= [T(\tau_k)] \left(\{v(t_k)\} - \{B_0\} - \sum_{i=1}^q (\{A_i\} \sin(i\omega t_k) + \{B_i\} \cos(i\omega t_k)) \right) \\ &+ \{B_0\} + \sum_{i=1}^q (\{A_i\} \sin(i\omega t_{k+1}) + \{B_i\} \cos(i\omega t_{k+1})) \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

我们根据精细时程积分方法的特点, 推导了如下两种的特殊右端项的特解的形式, 丰富了精细时程积分的应用范围。

4) 右端项是时间的两次多项式

在时间步长 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 内, 右端项的形式为:

$$\{F\} = \{F_0\} + \{F_1\}t + \{F_2\}t^2 \quad (4.3.39)$$



其中: $\{F_0\}$ 、 $\{F_1\}$ 和 $\{F_2\}$ 为时间的常向量。相应的特解为:

$$\{v_{p2}\} = \{a_0\} + \{a_1\}t + \{a_2\}t^2 \quad (4.3.40)$$

其中:

$$\{a_2\} = -[H]^{-1}\{F_2\}$$

$$\{a_1\} = -[H]^{-1}(\{F_1\} - 2\{a_2\})$$

$$\{a_0\} = -[H]^{-1}(\{F_0\} - \{a_1\})$$

把式(4.3.40)代入式(4.3.29),令 $t = t_{k+1}$ 得到:

$$\begin{aligned} \{v(t_{k+1})\} &= [T(\tau_k)](\{v(t_k)\} - \{a_0\} - \{a_1\}t_k - \{a_2\}t_k^2) \\ &+ \{a_0\} + \{a_1\}t_{k+1} + \{a_2\}t_{k+1}^2 \end{aligned} \quad (4.3.41)$$

5) 右端项是脉冲激励项

单位脉冲力可以利用狄拉克 δ 分布函数 $\delta(t)$ 表示, $\delta(t)$ 也称为脉冲函数,它仅在 $t=0$ 的极小时间内 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 内定义,其冲量为单位值。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (4.3.42)$$

系统受到的力的形式为:

$$\{F\} = \{F_0\}\delta(t) \quad (4.3.43)$$

由振动理论的知识我们可以得到,由于脉冲函数的特殊性,我们把脉冲函数对于系统的影响看成是对系统加了初速度的影响。即:

$$\{v(0)\} = [M]^{-1}\{F_0\} \quad (4.3.44)$$

以后可以看成是线性项的特殊形式,所以我们可以得到:

$$\{v(t)\} = [T(t)]\{v(0)\} \quad (4.3.45)$$

在以前的文献中,没有人用精细积分方法来求解结构在冲击载荷下的响应,故我们对这种情况进行研究。

对于冲击载荷,我们取如下的算例进行计算。

如图4-1所示的简支梁,其参数如下:

$$E=7.056e10\text{Pa}, G=2.7138e10\text{Pa}, L=0.6\text{m}, \rho=2640\text{kg/m}^3, A=1.57e-4\text{m}^2, J_y=J_z=4.91e-8\text{m}^4$$

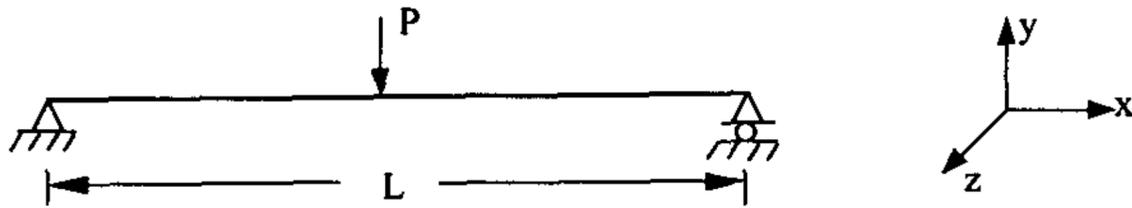


图 4-1 梁单元模型
Fig.4-1 Model of beam element

如图 4-1, 在梁的中点作用 $P = 100\delta(t)$, 我们将其划分为 24 个梁单元进行计算, 为了简单起见, 只考虑其在 $x-y$ 平面内的振动响应。在计算时, 我们采用的 Rayleigh 阻尼, 即: $[C] = 0.01[M]$ 。我们计算在 $t = 0.01(s)$ 时结构的响应值, 分别用威尔逊 θ (WILSON)、纽马克方法 (NEWMARK) 和精细时程积分方法 (PTIM) 进行计算, 以梁上各节点在 y 方向的位移响应为例。

由于采用精细时程积分方法, 只要一步就可以达到要求的结果, 所以不管在威尔逊和纽马克方法时采用的步长是多大, 用精细时程积分方法得到的结果都是相同的。为了方便比较, 在各个图中, 我们取相同的坐标值。

在用威尔逊和纽马克方法时, 我们取时间步长 $\Delta t = 0.0001(s)$, 我们得到的结果如图 4-2 所示:

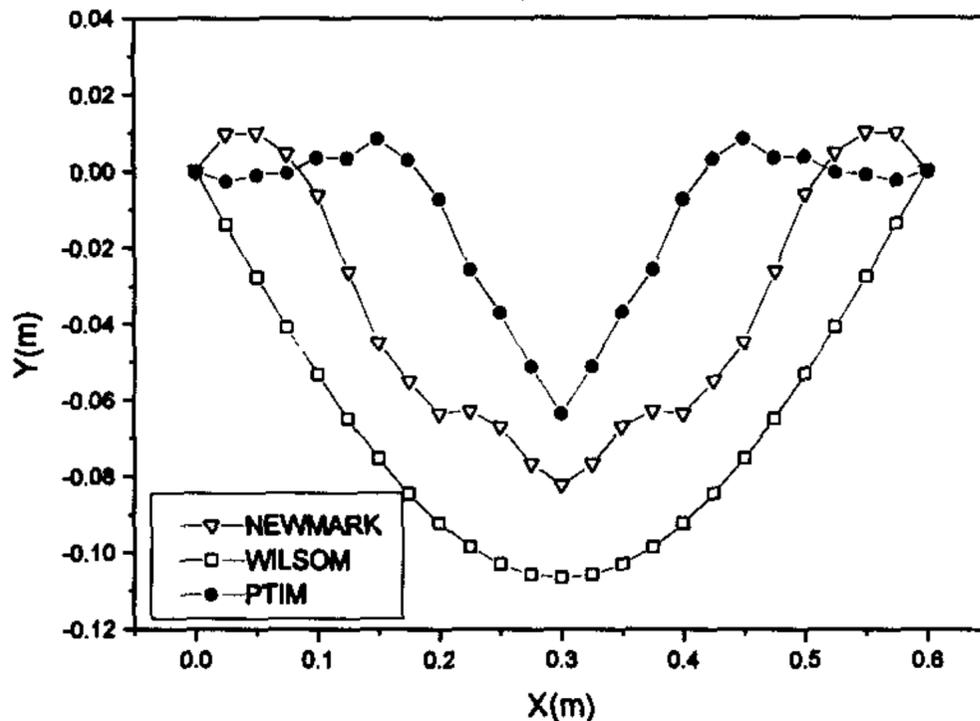


图 4-2 三种方法响应值的比较
Fig.4-2 Comparison of response value using three different methods

在用威尔逊和纽马克方法时, 我们取时间步长 $\Delta t = 0.00001(s)$, 我们得到的结果如图 4-3 所示:

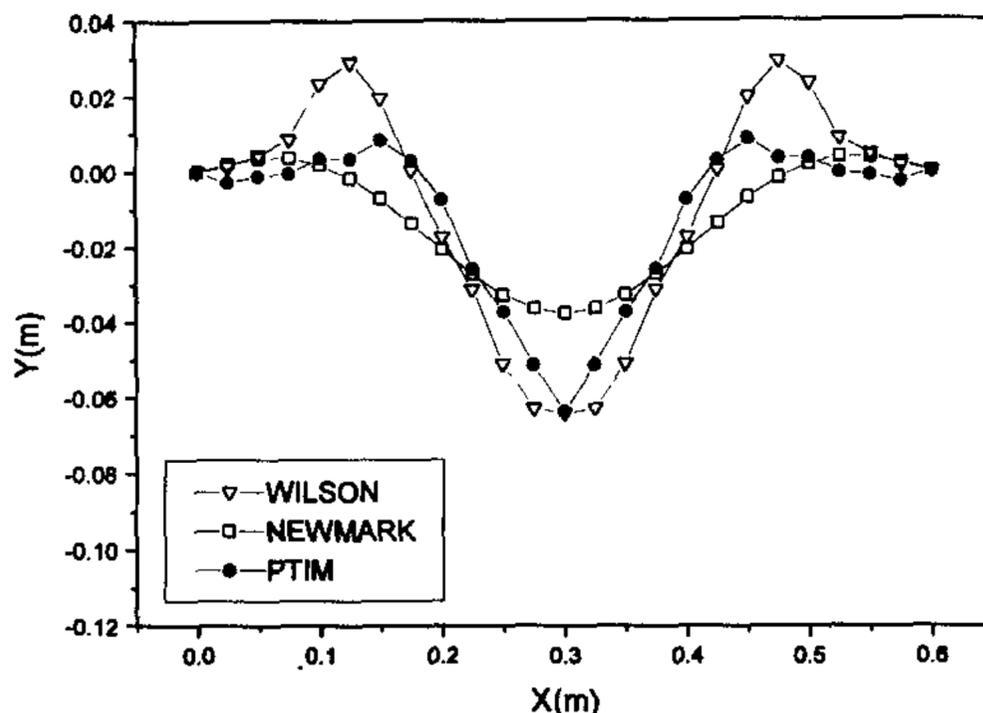


图 4-3 三种方法响应值的比较

Fig.4-3 Comparison of response value using three different methods

在用威尔逊和纽马克方法时，我们取时间步长 $\Delta t = 0.000001(s)$ ，我们得到的结果

如图 4-4 所示：

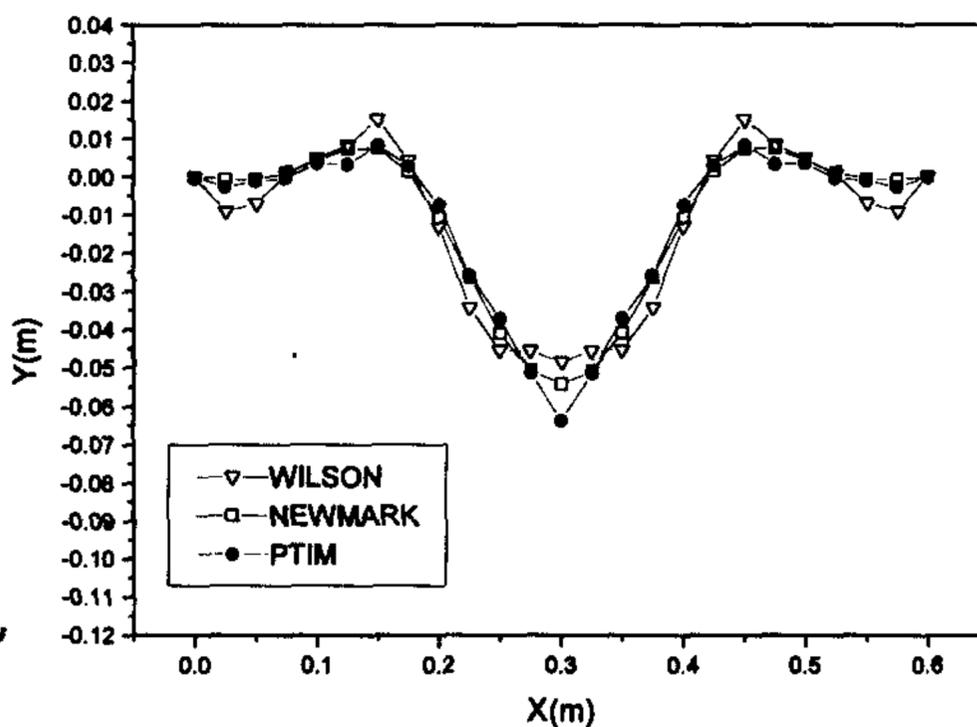


图 4-4 三种方法响应值的比较

Fig.4-4 Comparison of response value using three different methods

在用威尔逊和纽马克方法时，我们取时间步长 $\Delta t = 0.0000001(s)$ ，我们得到的结果

如图 4-5 所示：

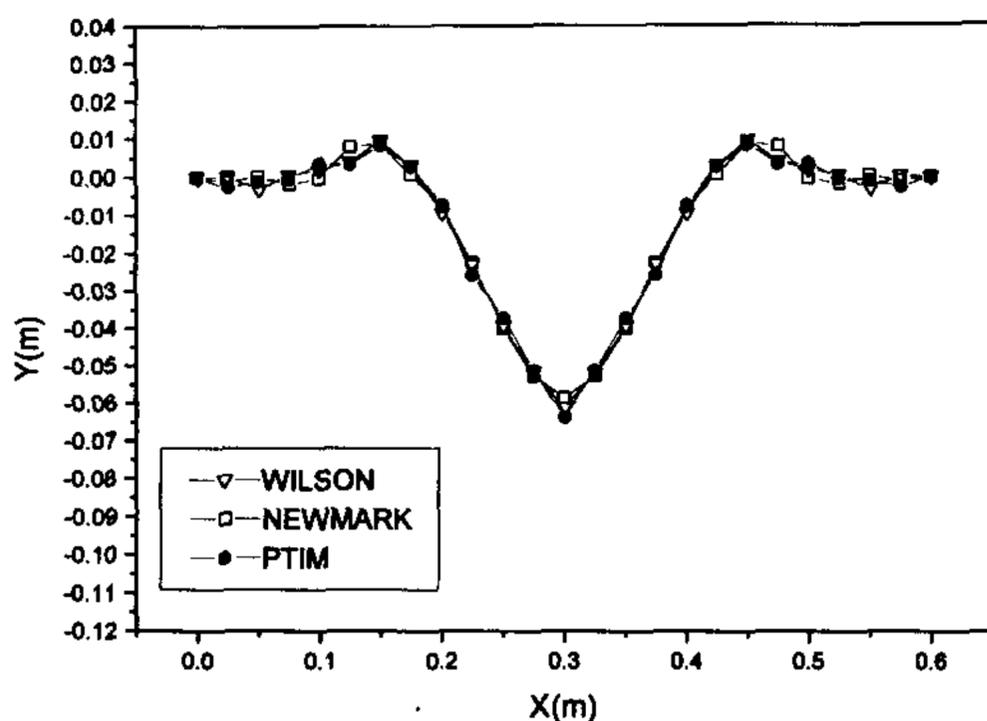


图 4-5 三种方法响应值的比较

Fig.4-5 Comparison of response value using three different methods

从图 4-2 到 4-5 我们可以看出, 随着时间步长的减小, 应用威尔逊方法和纽马克方法得到的结果不断的逼近用精细时程积分方法得到的结果。精细时程积分法对于求瞬态的响应是有很大的优点的, 它可以一步到达要求的时间, 而像威尔逊 θ 法和纽马克方法则需要分很小的步长才能达到一定的精度。

4. 4 分段精细时程积分法

我们综合上面的两种方法的优点, 即: 直接积分方法, 如威尔逊 θ 和纽马克方法的不对右端项采用任何假设, 可应用于任何的右端项的优点, 精细时程积分方法的高精度等优点, 提出了分段精细时程积分方法。

对于右端项我们采用时间离散的方法, 然后在每一个时间段我们采用线性或两次多项式进行拟合, 然后采用成熟的精细时程积分方法, 即我们采用精细时程积分方法和叠代的方法进行计算。本方法的优点是: 精度高, 并且对于右端项不采取任何的基本假设, 因而可以适合于各种右端项的计算。

我们把状态方程的表达式 (4.3.13) 写为:

$$\dot{v} = Hv + r(t) \quad (4.4.1)$$

4. 4. 1 对于力项采用线性拟合

当外载是随时间线性变化时, 即:

$$r = r_0 + r_1(t - t_k) \quad (4.4.2)$$

其中: r_0 和 r_1 为常向量。相应的特解为:

$$v_p(t) = (H^{-1} + I \times t) (-H^{-1} r_1) - H^{-1} (r_0 - r_1 \times t_k) \quad (4.4.3)$$



对于任意的激励 $r(t)$ ，我们进行数值离散，并假设时间步长为 $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ ，对应于 t_k 时刻的值为 $r(t_k)$ 。我们在时间步长 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 内采用线性拟合可得：

$$r(t) = r(t_k) + \frac{r(t_{k+1}) - r(t_k)}{\Delta t} (t - t_k) \quad (4.4.4)$$

将式 (4.4.4) 代入式 (4.4.3) 可以得到：

$$v_{pl}(t) = \left(H^{-1} + I \times t \right) \left(-H^{-1} \frac{r(t_{k+1}) - r(t_k)}{\Delta t} \right) - H^{-1} \left(r(t_k) - \frac{r(t_{k+1}) - r(t_k)}{\Delta t} t_k \right) \quad (4.4.5)$$

把式 (4.4.5) 代入式 (4.3.28) 得到：

$$v(t_{k+1}) = T(\tau) \left(v(t_k) - v_{pl}(t_k) \right) + v_{pl}(t_{k+1}) \quad (4.4.6)$$

式 (4.4.6) 就是本文推导计算系统响应的分段线性拟合精细时程积分方法的迭代公式。

4.4.2 对于力项采用两次多项式拟合

当外载为时间的两次多项式时，即：

$$r = r_0 + r_1 t + r_2 t^2 \quad (4.4.7)$$

其中， r_0 、 r_1 、 r_2 为常向量。可以得到对应于以上外载的特解为：

$$v_p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (4.4.8)$$

其中：

$$a_2 = -H^{-1} r_2$$

$$a_1 = -H^{-1} (r_1 - 2a_2)$$

$$a_0 = -H^{-1} (r_0 - a_1)$$

对于任意的激励 $r(t)$ ，我们进行数值离散，并假设时间步长为 $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ ，对应于 t_k 时刻的值为 $r(t_k)$ 。 $t = (t_k + t_{k+1})/2$ 时刻的值为 $r((t_k + t_{k+1})/2)$ 我们在时间步长 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 内采用两次多项式拟合可得：

$$r(t) = r_0 + r_1 t + r_2 t^2 \quad (4.4.9)$$

其中：

$$r_2 = 2(r(t_{k+1}) - 2r((t_k + t_{k+1})/2) + r(t_k)) / (\Delta t)^2$$

$$r_1 = 2(r((t_k + t_{k+1})/2) - r(t_k) - \Delta t \cdot r_2 \cdot (t_{k+1} + 3t_k)/4) / \Delta t$$

$$r_0 = r(t_k) - r_2 t_k^2 - r_1 t_k$$

我们把式 (4.4.9) 代入式 (4.4.8) 可以得到:

$$v_{p2}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \quad (4.4.10)$$

其中:

$$b_2 = -H^{-1} \left(2(r(t_{k+1}) - 2r((t_k + t_{k+1})/2) + r(t_k)) / (\Delta t)^2 \right)$$

$$b_1 = -H^{-1} \left((2(r((t_k + t_{k+1})/2) - r(t_k) - \Delta t \cdot r_2 \cdot (t_{k+1} + 3t_k)/4) / \Delta t) - b_2 \right)$$

$$b_0 = -H^{-1} \left(r(t_k) - \left(2(r(t_{k+1}) - 2r((t_k + t_{k+1})/2) + r(t_k)) / (\Delta t)^2 \right) t_k^2 - (2(r((t_k + t_{k+1})/2) - r(t_k) - \Delta t \cdot r_2 \cdot (t_{k+1} + 3t_k)/4) / \Delta t) t_k - b_1 \right)$$

把式 (4.4.10) 代入式 (4.3.28) 得到:

$$v(t_{k+1}) = T(\tau) \left(v(t_k) - v_{p2}(t_k) \right) + v_{p2}(t_{k+1}) \quad (4.4.11)$$

式 (4.4.11) 为本节推导的计算系统响应的分段两次多项式拟合的精细时程积分方法的迭代公式。

在使用线性拟合和两次多项式拟合的分段的精细时程积分方法时, 由于是采用相同的时间步长, 所以我们在每步采用精细时程积分时, 只需要在第一次计算出 $T(\Delta t)$, 以后每步都可以使用, 所以在以后的每个时间步长只要解出特解就可以了, 这样就可以提高计算的效率。

4.4.3 数值计算

为了验证我们提出的分段精细积分的准确性, 我们取在文献中用的很多的例子进行计算并与其他的方法得到的结果进行比较。

算例 1: 作为例子, 我们选取文献[31, 39]中的一个系统, 方程为:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.4.12)$$

取 $\Delta t = 0.28$, 应用我们前面提出的两种方法 (线性拟合和两次多项式拟合的分段精细积分方法) 进行计算, 并与其他方法得到的结果进行比较。我们以 x_1 在不同时刻的值进行比较, 如表 4-1 所示:



表 4-1 各种方法结果比较

时间点	精确解(x_1)	线性拟合	二次拟合	DISEM*	中心差分	纽马克	威尔逊
0.28	0.002515	0.002515	0.002515	0.002509	0	0.00673	0.00605
0.84	0.175595	0.175595	0.175595	0.175557	0.168	0.189	0.196
1.12	0.486026	0.486026	0.486026	0.485976	0.487	0.485	0.49
1.68	1.656965	1.656965	1.656965	1.656924	1.7	1.58	1.54
1.96	2.338202	2.338202	2.338202	2.338182	2.4	2.23	2.16
2.24	2.860814	2.860814	2.860814	2.860817	2.91	2.76	2.67
2.52	3.051709	3.051709	3.051709	3.051729	3.07	3	2.92
2.80	2.805723	2.805723	2.805723	2.805747	2.77	2.85	2.82
3.08	2.130584	2.130584	2.130584	2.130597	2.04	2.28	2.33
3.36	1.157226	1.157226	1.157226	1.157216	1.02	1.4	1.54

*注: DISEM 是文献[39]中所提出的状态方程直接积分法。

运用我们提出的分段精细时程积分方法, 还可以非常方便的算出各点在各时刻的速度响应值, 其精度也是非常高的。我们以 x_2 在各时刻的速度的响应值为例, 如图 4-6 所示。代入式 (4.4.1) 我们还可以方便的算出各点在各时刻的加速度的响应值, 其精度也是很高的。我们以 x_2 在各时刻的加速度的响应值为例, 如图 4-7 所示。

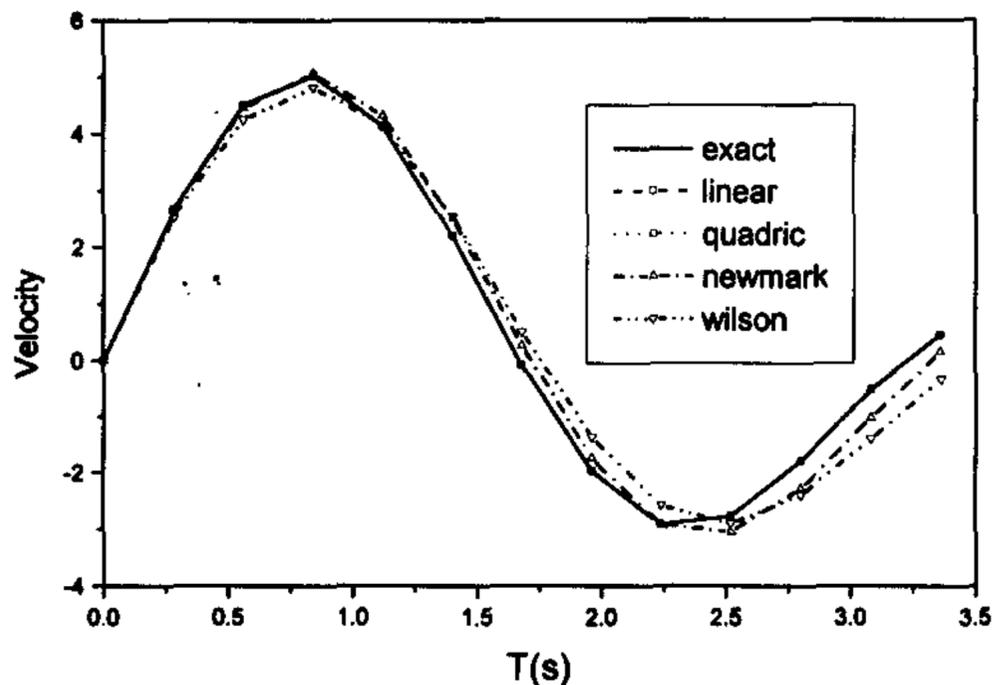


图 4-6 速度 2 响应值比较

Fig.4-6 Comparison of response value of velocity 2

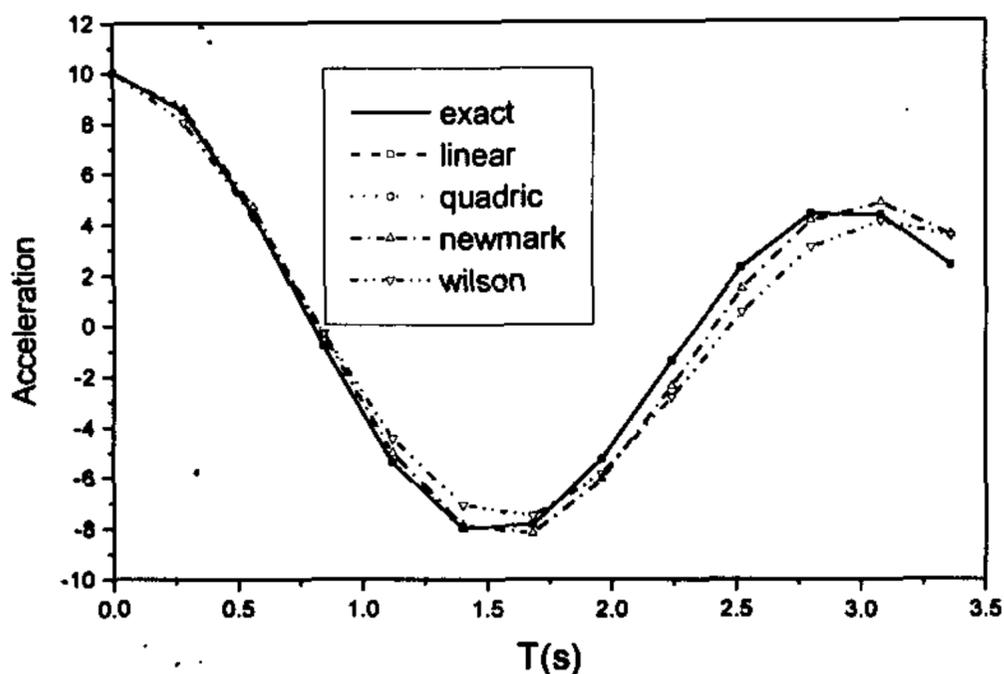


图 4-7 加速度 2 响应值的比较

Fig.4-7 Comparison of response value of acceleration 2

算例 2: 作为算例, 我们取如图 4-8 所示的动力系统^[5]进行数值计算。

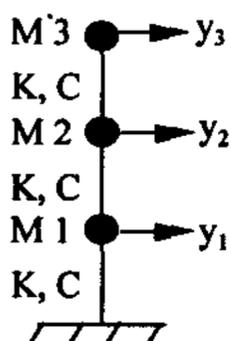


图 4-8. 三自由度系统

Fig.4-8 Three DOF system

对应于图 4-8 所示的系统的动力学方程为:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{f(t)\} \quad (4.4.13)$$

其中:

$$[M] = \begin{bmatrix} 100.2 & 0 & 0 \\ 0 & 100.2 & 0 \\ 0 & 0 & 100.2 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} 170 & -85 & 0 \\ -85 & 170 & -85 \\ 0 & -85 & 85 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 280 & -140 & 0 \\ -140 & 280 & -140 \\ 0 & -140 & 140 \end{bmatrix}, \quad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \sin t \end{Bmatrix}$$

初始条件为: $\{\dot{y}\} = \{y\} = 0$

用前面提出的两种方法进行计算，并与其它方法得到的结果进行比较。以 y_2 在不同时刻的加速度值进行比较，取 $\Delta t = 0.28s$ 如表 2 所示：

表 4-2 y_2 加速度的比较

时间 (s)	精确解	线性拟合	二次拟合	纽马克	威尔逊
0.28	0.029878	0.029690	0.029954	0.027975	0.034569
0.84	0.194337	0.193088	0.194880	0.189713	0.183932
1.40	0.333883	0.331723	0.334886	0.330998	0.322953
1.96	0.320461	0.318377	0.321533	0.321486	0.320342
2.24	0.245097	0.243499	0.246012	0.248061	0.250664
2.52	0.129763	0.128910	0.130399	0.134382	0.140002
2.80	-0.015564	-0.015475	-0.015305	-0.009693	-0.002014
3.08	-0.177870	-0.176727	-0.178052	-0.171231	-0.162476
3.36	-0.342434	-0.340221	-0.343084	-0.335559	-0.326652

为了求解 $t=10(s)$ 时的响应，我们取不同的的时间步长进行计算，对所得到的结果进行比较。我们取 1 的速度和 3 的位移进行比较，如表 4-3 所示：

表 4-3 不同方法计算的 1 的速度和 3 的位移值的比较

方法	步长 (s)	1 的速度值	相对误差(%)	3 的位移值	相对误差(%)
精确结果	/	0.518095	/	0.078755	/
线性拟合	0.1	0.517663	0.083	0.078690	0.083
	0.25	0.515401	0.520	0.078355	0.508
	0.5	0.507376	2.069	0.077279	1.874
	1.0	0.476223	8.082	0.074812	5.007
二次拟合	0.1	0.518292	0.038	0.078775	0.025
	0.25	0.519131	0.200	0.078776	0.027
	0.5	0.520875	0.537	0.078395	0.046
	1.0	0.517628	0.090	0.078109	0.820
NEWMARK	0.1	0.517776	0.062	0.077624	1.436
	0.25	0.516101	0.384	0.071783	8.853
	0.5	0.510101	1.543	0.052208	33.71
	1.0	0.484199	6.542	-0.006939	/
WILSON	0.1	0.518273	0.034	0.076787	2.500
	0.25	0.518579	0.093	0.067634	14.12
	0.5	0.514997	0.598	0.045973	41.67
	1.0	0.431063	16.80	0.046637	40.78

上述两个例子都是可以通过精细时程积分方法直接得到结果的，我们现在取一个不能直接用精细时程积分方法得到结果的例子。

算例 3: 我们取和算例 2 相同的系统，受力为 $\{f(t)\}$ ：

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q(t) \end{Bmatrix},$$

其中 $q(t)$ 在一个周期内的定义为：

$$q(t) = \begin{cases} 100 \sin(0.1\pi t) & t \in [0, 10/6] \text{ or } (50/6, 70/6) \text{ or } (110/6, 120/60] \\ 50 & t \in [10/6, 50/6] \\ -50 & t \in [70/6, 110/6] \end{cases} \quad (4.4.14)$$

我们取一个周期的力项进行计算，如下图所示：

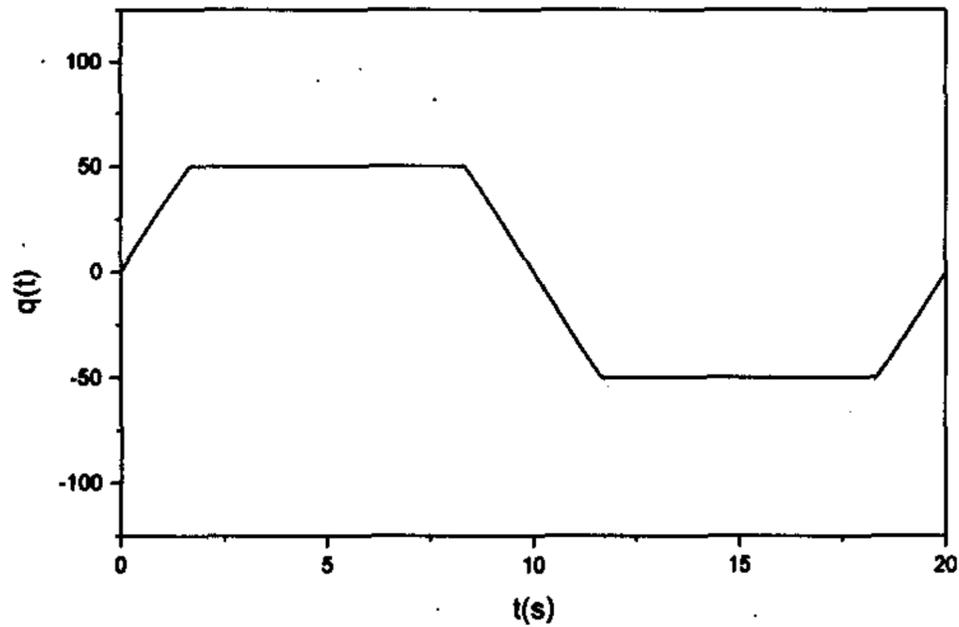


图 4-9 没有尖端的简协力项形式
Fig.4-9 Off-peak sine wave loading

当时间步长不断变小的时候，得到的结果不断的逼近精确解。我们可以认为当几种方法的结果在一定的误差之内所得到的结果是精确解。我们把在各种不同的时间步长得到的结果进行比较。

我们以步长 $\Delta t = 0.5s$ 为例，用我们提出来的两种方法和以前的方法进行计算，以 3 的位移值响应进行对比，我们列出了在一些时刻点上的响应值如表 4-4 所示：

表 4-4 3 点位移响应值 y_3 的比较

时间点 (s)	精确值	线性拟合	两次拟合	威尔逊法	纽马克法
2	0.260761	0.258474	0.260696	0.249113	0.257788

4	1.016677	1.009945	1.018322	1.000902	1.004453
6	1.578953	1.571434	1.577402	1.566093	1.566040
8	1.552545	1.553268	1.552616	1.573814	1.560019
10	0.967292	0.964964	0.967876	0.998657	0.975509
12	-0.363636	-0.364320	-0.362925	-0.341866	-0.354813
14	-1.749373	-1.744161	-1.750705	-1.748283	-1.740150
16	-2.142680	-2.137045	-2.144257	-2.174787	-2.148265
17	-1.915907	-1.912125	-1.917068	-1.963936	-1.931347
18	-1.517304	-1.511633	-1.513304	-1.565203	-1.534146
19	-1.049524	-1.046817	-1.050176	-1.089193	-1.064336
19.5	-0.795175	-0.795308	-0.799292	-0.829729	-0.809100
20	-0.528535	-0.525282	-0.529311	-0.550203	-0.534853

在计算 $t=20(s)$ 时的响应值时, 我们采用不同的方法在不同的步长下进行计算, 我们取 1 的速度 \dot{y}_1 和 3 的加速度 \ddot{y}_3 的数值为例进行比较, 如表 4-5 所示:

表 4-5 不同方法计算的 1 的速度 \dot{y}_1 和 3 的加速度值 \ddot{y}_3 的比较

方法	步长(s)	\dot{y}_1	相对误差(%)	\ddot{y}_3	相对误差(%)
精确值	/	0.172775	/	0.074266	/
线性拟合	0.1	0.172829	0.03	0.074228	0.05
	0.2	0.172985	0.12	0.074128	0.19
	0.5	0.174042	0.73	0.073466	1.08
	1.0	0.178179	3.13	0.069181	6.85
两次拟合	0.1	0.172751	0.01	0.074282	0.02
	0.2	0.172695	0.05	0.074304	0.05
	0.5	0.172503	0.16	0.074280	0.02
	1.0	0.172710	0.04	0.074947	0.92
NEWMARK	0.1	0.173019	0.14	0.074356	0.12
	0.2	0.173746	0.56	0.074642	0.51
	0.5	0.178845	3.51	0.076784	3.40
	1.0	0.196077	13.5	0.082916	11.6
WILSON	0.1	0.173242	0.27	0.074472	0.28
	0.2	0.174741	1.14	0.075216	1.28
	0.5	0.185324	7.26	0.080598	8.53
	1.0	0.214716	24.3	0.100230	35.0

从上面的三个数值算例的结果如图 4-6 和图 4-7 及表 4-1、表 4-2、表 4-3、表 4-4 和表 4-5 所示, 我们可以看出, 我们提出的分段精细积分方法不仅可以求出任何载荷作用下系统的位移响应, 还可以同时求出系统的速度和加速度的响应, 随着时间步长的缩小,

得到的结果逐步地逼近于精确解，同时与传统的方法进行比较可以看出精度非常高。这使得它无论是在理论上，还是在实际的工程上，都有广阔的应用前景，是一种有效的时域分析方法。

4.4.4 结论

本节推导的公式及算例表明，分段线性精细积分方法不仅可以用于求解一些特殊的激励的动力响应，而且可以求出在一般载荷作用下系统的动力响应。同时还可以求出系统的速度和加速度的响应。且精度高，速度快，对于时间步长没有严格的要求，是一种值得推广的算法，在理论上或工程上都有重要的应用。

4.5 小结

精细时程积分方法在计算特殊的载荷项时，与传统的威尔逊 θ 方法和纽马克方法相比较，具有精度高、不受时间步长的限制计算工作量小等优点。适合于在计算动力响应中推广。我们提出的分段精细时程积分方法是精细时程积分方法的推广，它比精细时程积分方法有更强的适用性，可以计算在各种激励下的结构的动力响应。与传统的威尔逊 θ 方法和纽马克方法相比较，分段精细时程积分方法具有很高的精度和计算效率。

第五章 流固耦合系统动力响应分析的精细时程积分方法

采用精细时程积分方法、威尔逊 θ 方法和纽马克方法对流固耦合系统的动力响应进行分析。算例表明,精细时程积分方法具有精度高、不受时间步长的严格限制和计算工作量大等优点,适合于流固耦合系统的动力响应分析。

5.1 程序说明

为了解决流固耦合系统的动力响应分析,我们编制了相应的程序。本程序分为两个部分。第一部分是计算附连水质量,利用三维八节点等参流体单元。第二部分是结构的动力响应,主要是利用精细时程积分方法对结构的动力响应进行计算。

程序的流程图为:

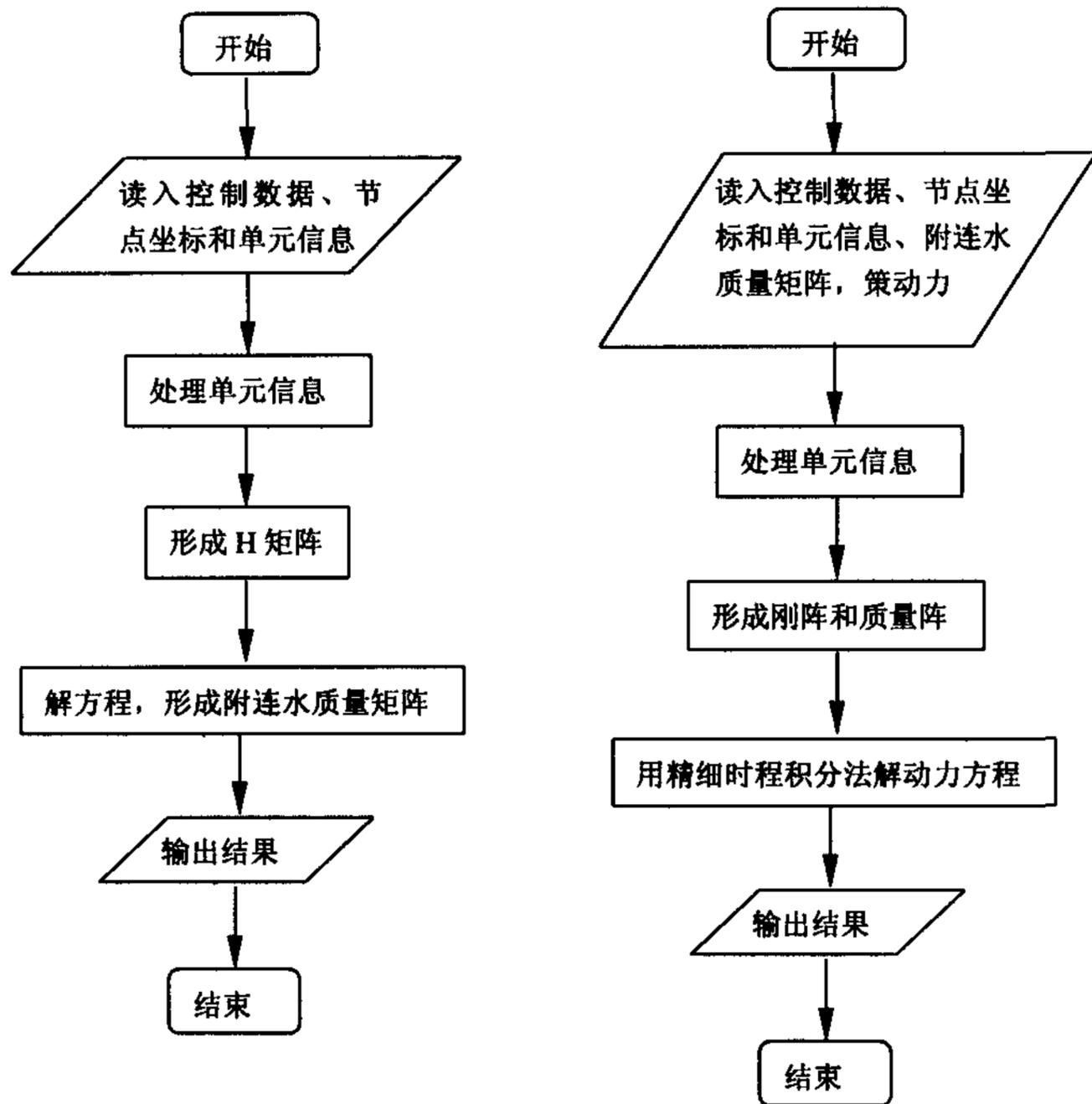


图 5-1 程序流程图

Fig.5-1 flow chart of the program

5.2 实例计算及结果分析

取图 5-2 所示的在水下的壳模型，一端固定，另一端自由：

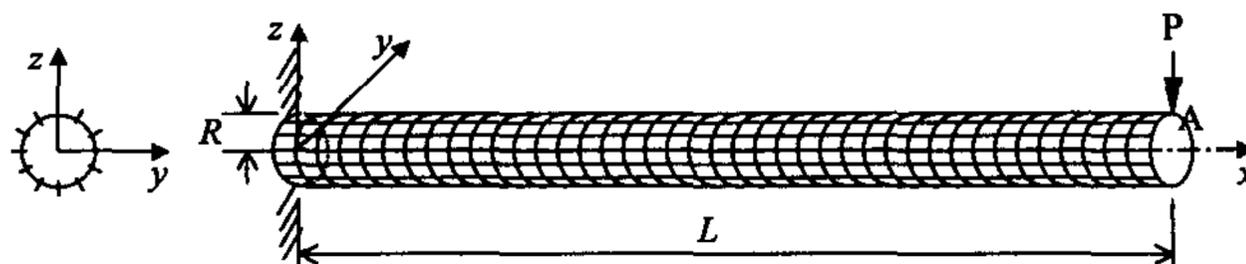


图 5-2 壳模型及单元划分

Fig.5-2 Plate model and the distribution of elements

其长度 $L=2.4\text{m}$, $R=0.09\text{m}$, 厚度 $t=0.003\text{m}$, $E=7.056\text{e}10\text{Pa}$, 泊松比 $\mu=0.3$, 密度 $\rho=2640\text{kg/m}^3$, 将其划分为如图 5-2 所示的矩形单元进行计算。

流体和结构之间的相互影响，主要体现在附连水质量矩阵上，文献[26]给出了一个量化的标准，我们取结构尺寸的 12 倍流体范围进行计算。流体元的具体划分如图 5-3 所示：

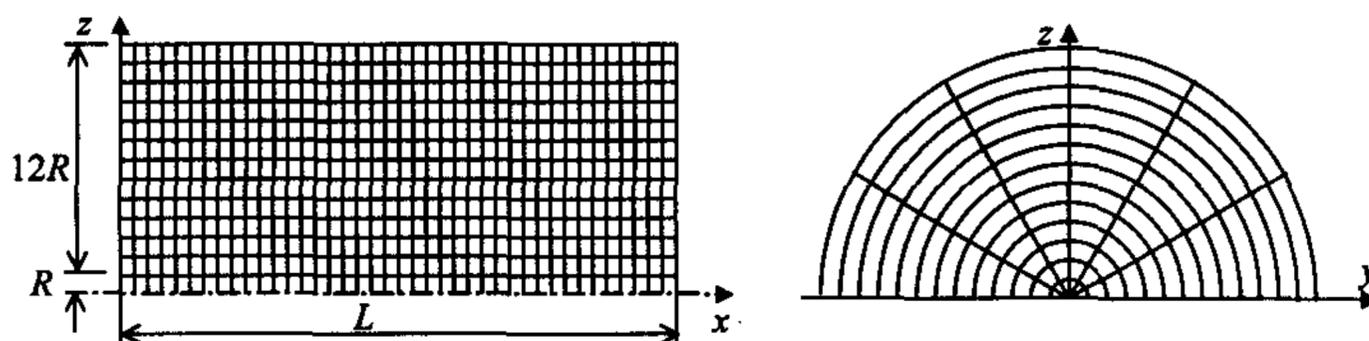


图 5-3 流域的单元划分

Fig.5-3 elements of fluid

在计算中采用 Rayleigh 阻尼,即: $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ 。应用自编的有限元程序^[11], 使用精细时程积分, 威尔逊 θ 方法和纽马克方法进行计算, 并对计算结果进行比较。精细时程积分只要求初速度和初位移, 在使用威尔逊 θ 方法和纽马克方法时要求给出初加速度、初速度和初位移。使用威尔逊 θ 方法和纽马克方法时采用的初加速度可根据式 (4.2.13) 式计算得到的。A 点的坐标为: $x=2.4\text{m}, y=0, z=0.09\text{m}$ 。

5.2.1 外力为线性形式: $\{f(t)\} = \{f_0\} + \{f_1\} \times (t - t_k)$

其中 $\{f_0\}$ 与 $\{f_1\}$ 均为常向量。其特解如式 (4.3.31) 所示。

对于具体的算例, 取 Rayleigh 阻尼的系数 α 、 β 均为 0.1。初始时刻各点的位移和速度都为 0。外力取为在 $z=0.09\text{m}, y=0$ 的线上的沿 z 方向的均布载荷 $q(t)$ 。

$$q(t) = -1000 + 200t \quad (\text{N}) \quad (5.2.1)$$

对于在一定时间后 $t=10(\text{s})$ 的响应, 我们取不同的时间间隔 $\tau=0.5, 0.2, 0.1, 0.01$

同时使用威尔逊 θ 方法和纽马克方法进行计算,用精细时程积分方法只需要一步 $t=10(s)$, 就可以直接得到结果。我们对三种方法得到的结果进行比较如表 5-1 所示:

表 5-1. 不同方法计算的 A 点的位移及转角的比较

方法	τ (s)	Z 向位移 (m)	相对误差 (%)	Y 向转角	相对误差 (%)
精细时程积分法		0.00828	/	-7.75178E-4	/
NEWMARK 法	0.01	0.00828	0.0	-7.75177E-4	0.0
	0.1	0.00828	0.0	-7.75325E-4	0.02
	0.2	0.00822	0.72	-7.69624E-4	0.72
	0.5	0.00669	19.2	-6.30542E-4	18.7
WILSON- θ 法	0.01	0.00828	0.0	-7.75178E-4	0.0
	0.1	0.00828	0.0	-7.75178E-4	0.0
	0.2	0.00828	0.0	-7.75178E-4	0.0
	0.5	0.00875	5.68	-0.03429	/

我们取 $t=10(s)$ 时, $z=0.09m, y=0$ 的线上点的沿 z 方向的位移做出振形图, 如图 5-4 所示:

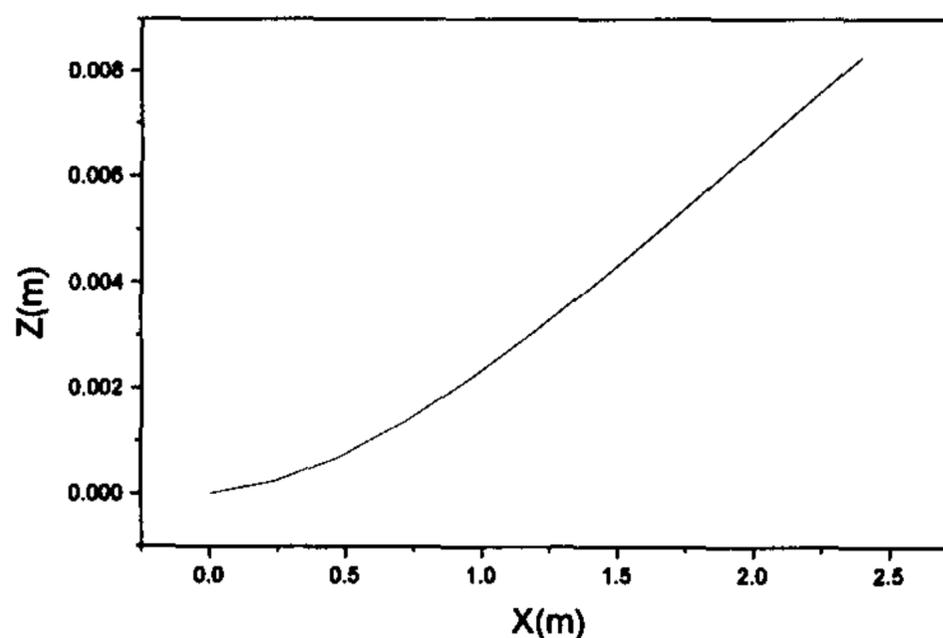


图 5-4. $t=10(s)$ 时的振形图

Fig.5-4 Mode shape at $t=10(s)$

5. 2. 2 外力为三角函数形式: $\{f(t)\} = \{f_1\} \sin \omega t + \{f_2\} \cos \omega t$

其中 $\{f_1\}$ 与 $\{f_2\}$ 均为常向量。其特解如式 (4.3.34) 所示。

对于具体的算例, 取 Rayleigh 阻尼的系数 α, β 均为 0.1。初始时刻各点的位移和速度都为 0。外力取为在点 A 上的沿 z 方向的集中载荷 $P(t)$:

$$P(t) = 1000 \sin t \quad (\text{N}) \quad (5.2.2)$$

类似于 5.2.1, 表 5-2 列出了采用三种方法计算 $t=10(s)$ 的结构响应值:

表 5-2. 不同方法计算的 A 点的位移及转角的比较

方法	τ (s)	Z 向位移 (m)	相对误差 (%)	Y 向转角	相对误差 (%)
精细时程积分法		-0.0052	/	6.43341E-4	/
NEWMARK 法	0.01	-0.0052	0.0	6.43342E-4	0.0
	0.1	-0.0052	0.0	6.43334E-4	0.0
	0.2	-0.0052	0.0	6.4335E-4	0.0
	0.5	-0.0051	1.9	6.39533E-4	0.6
WILSON- θ 法	0.01	-0.0052	0.0	6.4336E-4	0.0
	0.1	-0.0052	0.0	6.4497E-4	0.1
	0.2	-0.0053	1.9	6.49142E-4	1.0
	0.5	-0.0054	3.8	6.65593E-4	3.4

我们取 $t=0.0$ 到 $t=10.0$ (s)的时间历程, 以 A 点的 z 向的位移为例, 作出位移响应随时间变化的历程图, 如图 5-5 所示:

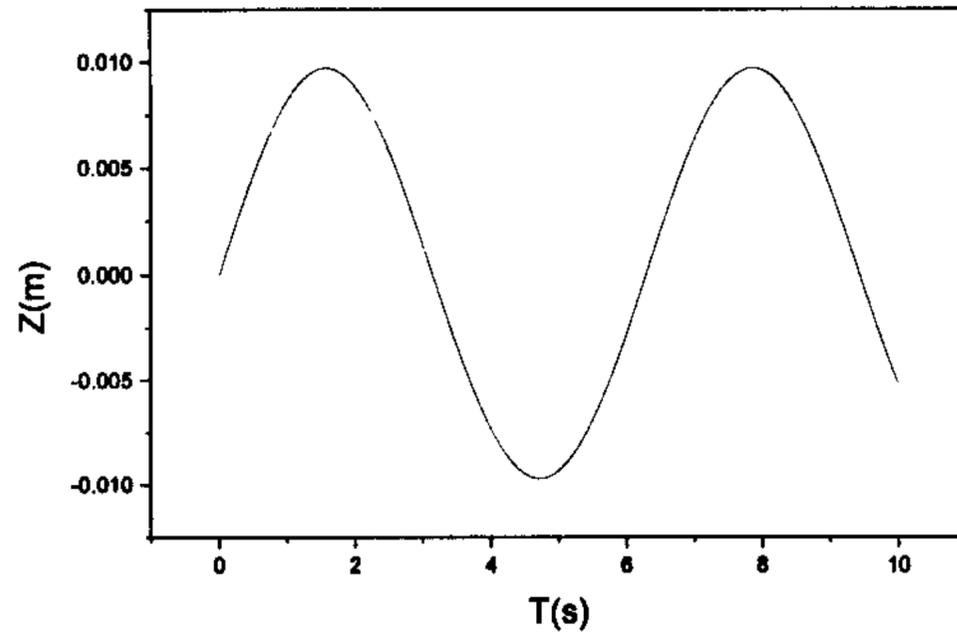


图 5-5. 位移响应的时间历程图

Fig.5-5 The response of displacement versus time

我们取 $t=10$ (s)时, $z=0.09$ m, $y=0$ 的线上点的沿 z 方向的位移做出振形图, 如图 5-6 所示:

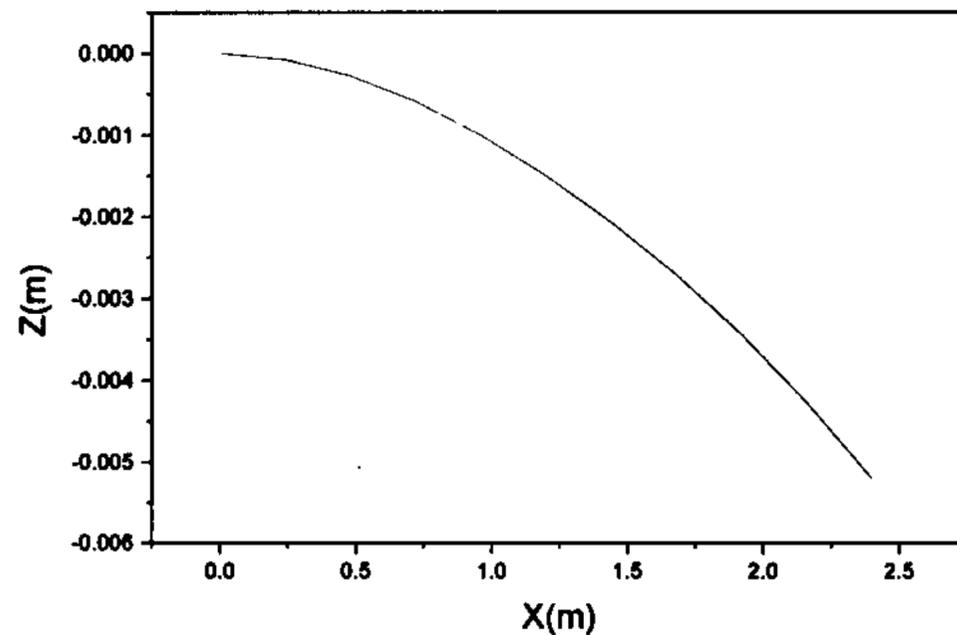


图 5-6 T=10(s)时的振形图

Fig.5-6 Mode shape at t=10(s)

5. 2. 3 外力为冲击的形式: $\{f(t)\} = \{f_0\}\delta(t)$

其中 $\{f_0\}$ 为常向量, $\delta(t)$ 为脉冲函数, 它仅在 $t=0$ 的极小时间内 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 内定义, 其冲量为单位值。我们利用 4. 3. 3 中得到的结果进行计算。

对于具体的算例, 取 Rayleigh 阻尼的系数 $\alpha=0.01$ 、 $\beta=0.001$ 。初始时刻各点的位移和速度都为 0。外力取为在点 A 上的沿 z 方向的集中载荷 $P(t)$:

$$P(t) = 10000\delta(t) \text{ (N)} \tag{5. 2. 3}$$

利用我们在 4. 3. 3 中提出的利用精细时程积分方法解决冲击问题的方法进行求解。即: 把冲击问题转换为初位移和速度。类似于 5. 2. 1, 表 5-3 列出了采用三种方法计算 $t=1.0$ (s) 的结构的响应值:

表 5-3. 不同方法计算的 A 点的位移及转角的比较

方法	τ (s)	Z 向位移 (m)	相对误差 (%)	Y 向转角	相对误差 (%)
精细时程积分法		0. 736319E-1	/	-0. 67933E-2	/
NEWMARK 法	1E-4	0. 736963E-1	0. 09	-0. 67992E-2	0. 09
	2E-4	0. 738254E-1	0. 26	-0. 68112E-2	0. 26
	4E-4	0. 742750E-1	0. 87	-0. 68527E-2	0. 87
	1E-3	0. 770280E-1	4. 62	-0. 71459E-2	5. 20
	2E-3	0. 842903E-1	14. 48	-0. 79122E-2	16. 47
	1E-2	0. 198018	168. 9	-0. 22727E-1	234. 6
WILSON- θ 法	1E-4	0. 737663E-1	0. 18	-0. 68057E-2	0. 18
	2E-4	0. 740519E-1	0. 57	-0. 68320E-2	0. 57
	4E-4	0. 750533E-1	1. 93	-0. 69244E-2	1. 93
	1E-3	0. 806461E-1	9. 53	-0. 74404E-2	9. 53
	2E-3	0. 860915E-1	16. 92	-0. 79426E-2	16. 92
	1E-2	-0. 14342E-3	/	0. 13176E-4	/

我们取 $t=1.0$ (s) 时, $z=0.09$ m, $y=0$ 的线上点的响应值做出振形图, 如下图所示:

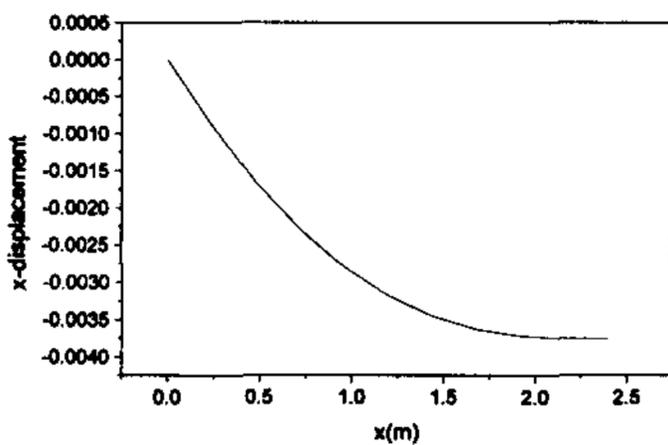


图 5-7 x 向位移振型图
Fig.5-7 Mode Shape of x-displacement

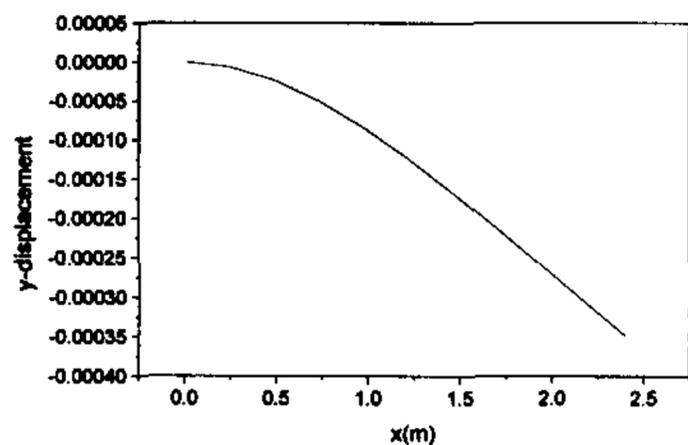


图 5-8 y 向位移振型图
Fig.5-8 Mode shape of y-displacement

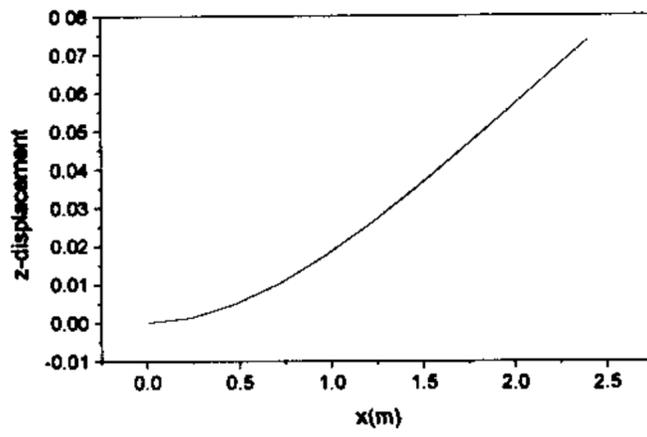


图 5-9 z 向位移振型图
Fig.5-9 Mode shape of z-displacement

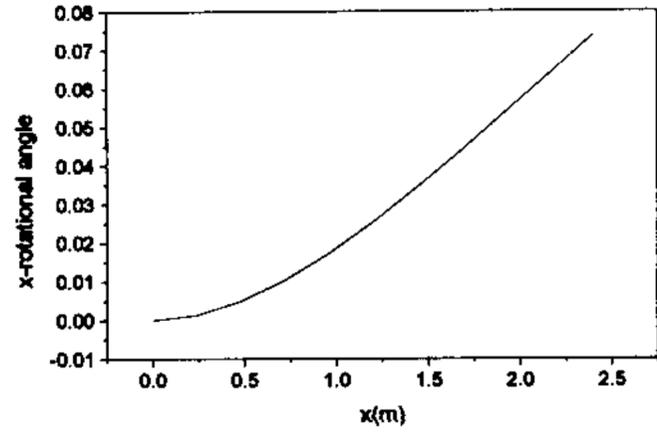


图 5-10 x 向转角振型图
Fig.5-10 Mode shape of x-rotational angle

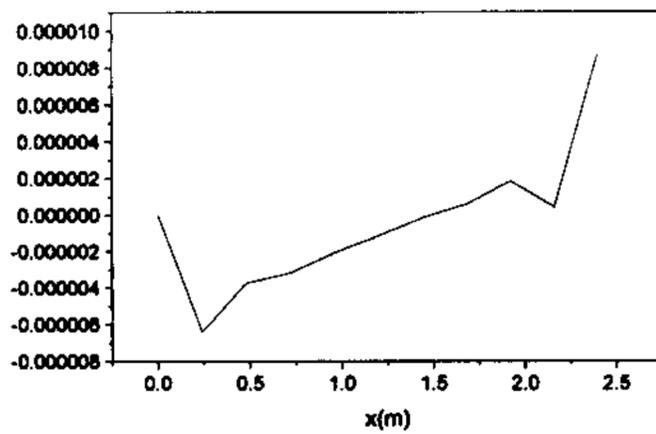


图 5-11 y 向转角振型图
Fig.5-11 Mode shape of y-rotational angle

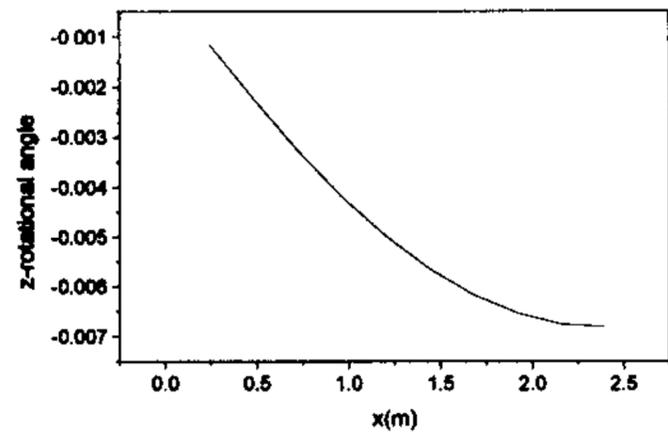


图 5-12 z 向转角振型图
Fig.5-12 Mode shape of z-rotational angle

通过程序我们计算出了结构的位移、速度和加速度。为了研究冲击载荷引起的结构位移的瞬态响应，我们取 $t=0.0$ (s) 到 $t=1.0$ (s)的时间历程，以 A 点的位移响应为例，作出位移响应随时间变化的历程图，如下图所示：

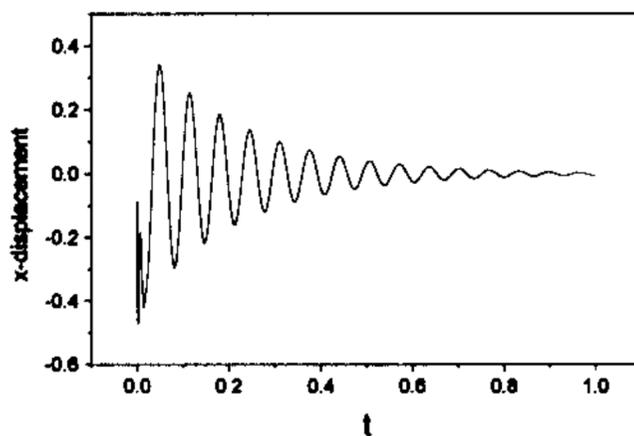


图 5-13 x 向位移时间历程图
Fig.5-13 x-displacement versus time

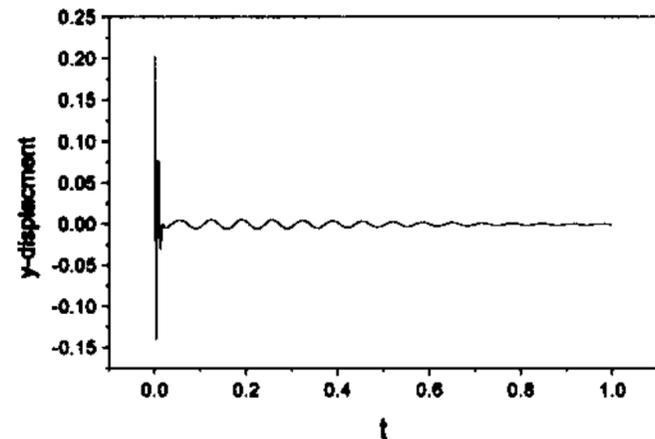


图 5-14 y 向位移时间历程图
Fig.5-14 y-displacement versus time

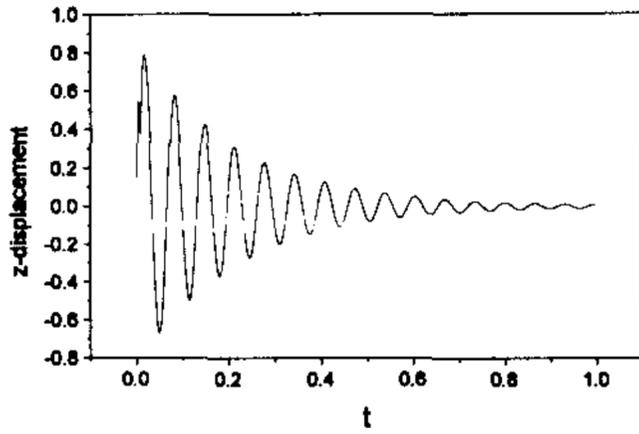


图 5-15 z 向位移时间历程图
Fig.5-15 z-displacement versus time

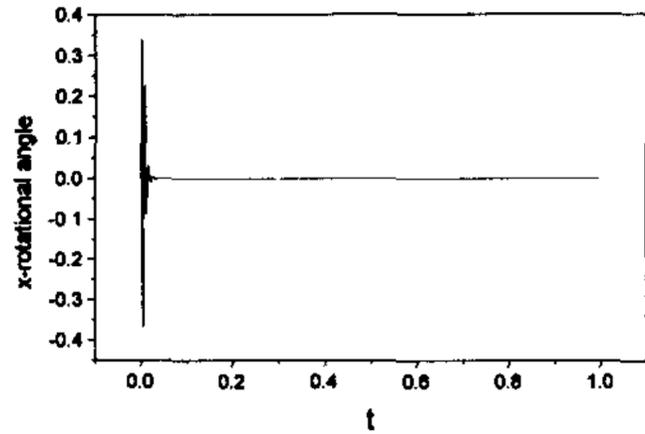


图 5-16 x 向转角时间历程图
Fig.5-16 x-rotational angle versus time

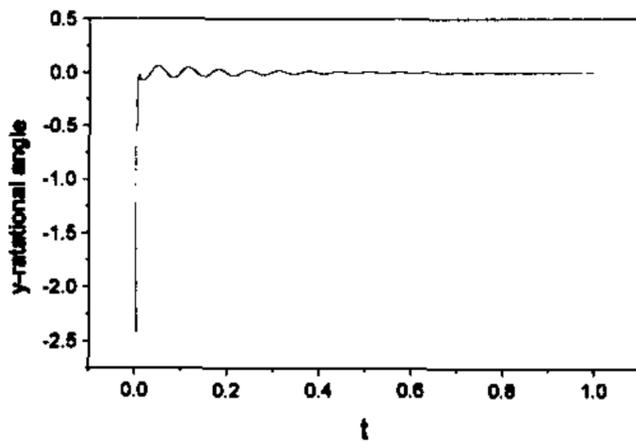


图 5-17 y 向转角时间历程图
Fig.5-17 y-rotational angle versus time

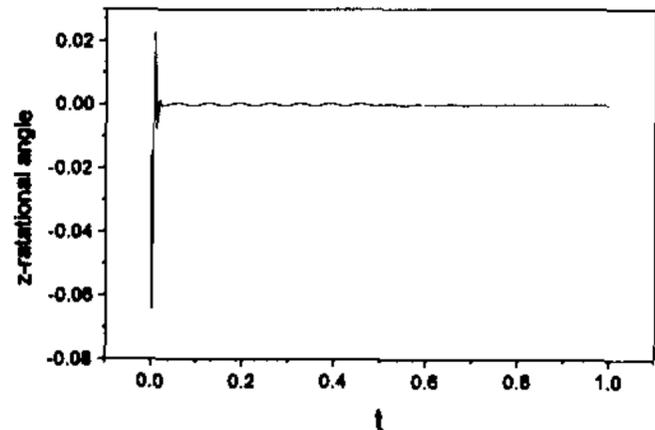


图 5-18 z 向转角时间历程图
Fig.5-18 z-rotational angle versus time

5. 2. 4 没有尖端的简谐力项

我们前面的三个算例都是比较特殊的力项，即在应用精细时程积分方法时有特解的形式。对于比较一般的力项，精细时程积分方法就比较难应用了。我们在 4.4 节中提出的分段精细时程积分方法具有适用于任何激励的形式，所以我们采用分段时程积分方法对比较一般的力项进行计算。

对于具体的算例，取 Rayleigh 阻尼的系数 $\alpha=0.1$ 、 $\beta=0.1$ 。初始时刻各点的位移和速度都为 0。外力取为在点 A 上的沿 z 方向的集中载荷 $P(t)$ ：

$$P(t) = \begin{cases} 1000 \sin(0.1\pi t) & t \in [0, 10/6) \text{ or } (50/6, 70/6) \text{ or } (110/6, 120/6] \text{ (N)} \\ 500 & t \in [10/6, 50/6] \text{ (N)} \\ -500 & t \in [70/6, 110/6] \text{ (N)} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

具体的受力形式如图 4-9 所示。

在具体的计算中，我们采用一次和二次插值的分段精细时程积分方法和传统的威尔逊 θ 方法和纽马克方法。并对计算结果进行比较，我们认为当几种方法所得到的结果在一

定的误差范围内的结果为精确解。如下表所示:

表 5-4. 不同方法计算的 A 点的 z 位移及 y 转角的比较

方法	步长 (s)	Z 向位移 (m)	相对误差 (%)	Y 向转角	相对误差 (%)
精确值	/	-3.0496E-5	/	3.7734E-6	/
线性拟合	0.1	-3.0491E-5	0.02	3.7728E-6	0.02
	0.2	-3.0476E-5	0.07	3.7709E-6	0.07
	0.5	-3.0415E-5	0.27	3.7635E-6	0.26
	1.0	-3.0000E-5	1.63	3.7116E-6	1.64
两次拟合	0.1	-3.0522E-5	0.09	3.7768E-6	0.09
	0.2	-3.0710E-5	0.70	3.8000E-6	0.70
	0.5	-3.1871E-5	4.51	3.9435E-6	4.51
	1.0	-3.0744E-5	0.81	3.8037E-6	0.81
NEWMARK	0.1	-3.0823E-5	1.07	3.8038E-6	0.81
	0.2	-2.6630E-5	12.7	3.3490E-6	11.3
	0.5	-1.7560E-5	/	2.2292E-6	/
	1.0	-5.6089E-7	/	9.1385E-8	/
WILSON	0.1	-3.0554E-5	0.20	3.7807E-6	0.20
	0.2	-3.2593E-5	6.88	4.0116E-6	6.31
	0.5	7.5414E-6	/	-9.4728E-7	/
	1.0	1.3995E-5	/	-1.7362E-6	/

我们取 $t=20(s)$ 时, 作出 $z=0.09m, y=0$ 的线上点的响应值做出振形图, 如下图所示:

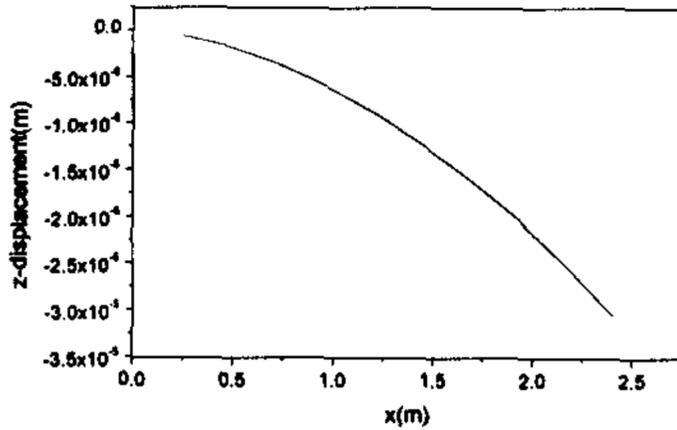


图 5-19 z 向位移振型图
Fig.5-19 Mode shape of z-displacement

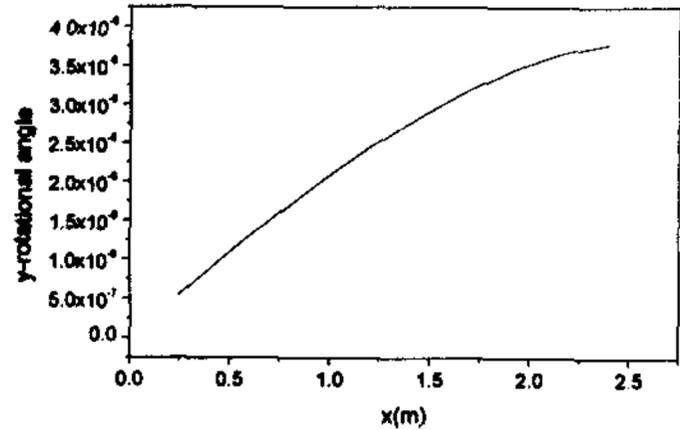


图 5-20 y 向转角振型图
Fig.5-20 Mode shape of y-rotational angle

通过程序我们计算出了结构的位移、速度和加速度。为了研究载荷引起的结构位移的响应, 我们取 $t=0.0 (s)$ 到 $t=20.0(s)$ 的时间历程, 以 A 点的位移响应为例, 作出位移响应随时间变化的历程图, 如下图所示:

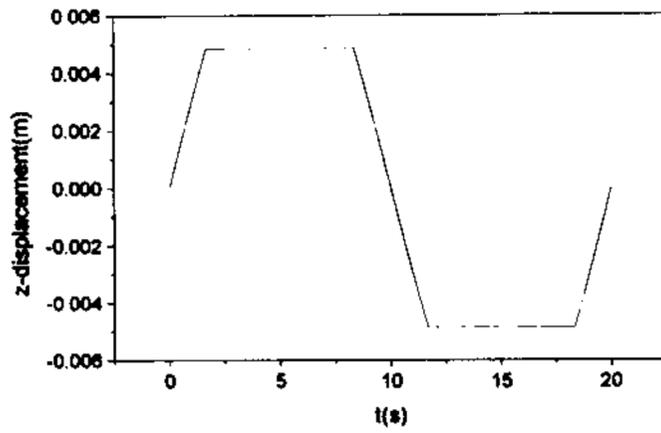


图 5-21 z 向位移时间历程图
Fig.5-21 z-displacement versus time

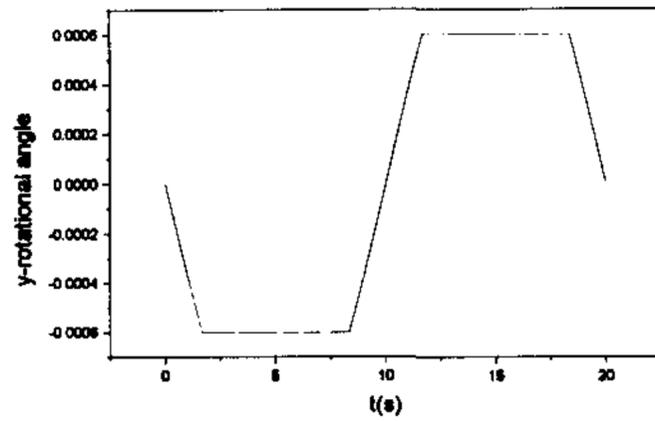


图 5-22 y 向转角时间历程图
Fig.5-22 y-rotational angle versus time

5.3 小结

通过对于以上几种激励的响应的计算并对计算结果进行比较, 我们可以看出, 精细时程积分方法只需要一步就可以精确地求得任意时间点的响应值。而威尔逊 θ 方法和纽马克方法的精确度则依赖于时间步长的大小, 如表 5-1、表 5-2 和表 5-3 所示, 时间步长 τ 不断缩小的过程中, 用威尔逊 θ 方法和纽马克方法得到的结果的相对误差不断的减小, 最终逼近精细时程积分方法的结果。同时在一定的时间步长的条件下威尔逊 θ 方法和纽马克方法的计算的工作量与时间成正比例, 因此在保证精度的前提下势必要增加计算的工作量。由此可以看出精细时程积分方法较传统的直接积分法具有不受时间步长约束及精度高等优点。通过对比较一般的激励项的计算, 结果如表 5-4 所示, 在时间步长不断缩小的过程中, 几种方法都逼近于精确解, 但是在相同的步长下, 我们提出的分段精细时程积分方法的结果的误差比传统的方法的结果的误差小, 我们可以看出分段精细时程积分方法比传统的方法具有更高的精度。

通过对流固耦合系统的动力响应的精细时程积分法和分段精细时程积分方法的研究, 编制了有限元程序, 对具体结构的计算, 并与威尔逊 θ 方法和纽马克方法的结果的比较, 可以看出精细时程积分方法和分段精细时程积分方法比另外两种方法具有精度高、不受时间步长限制、计算的工作量小等优点, 适合于流固耦合系统的动力响应分析。

第六章 考虑水深压力的流固耦合系统的动力响应

水下结构的动力响应不仅受流体动压力的影响，还受不同水深下的静水压力的影响。通过附连水质量解耦，用考虑初应力刚度矩阵的有限元方法计算了圆柱壳在不同水深下的动力响应特性，初步揭示了这种影响，所得结果和方法可供流固耦合方面的研究参考。

6.1 程序说明

为了对考虑深水压力的流固耦合系统的动力响应进行分析，我们编制了相应的程序。程序的流程图为：

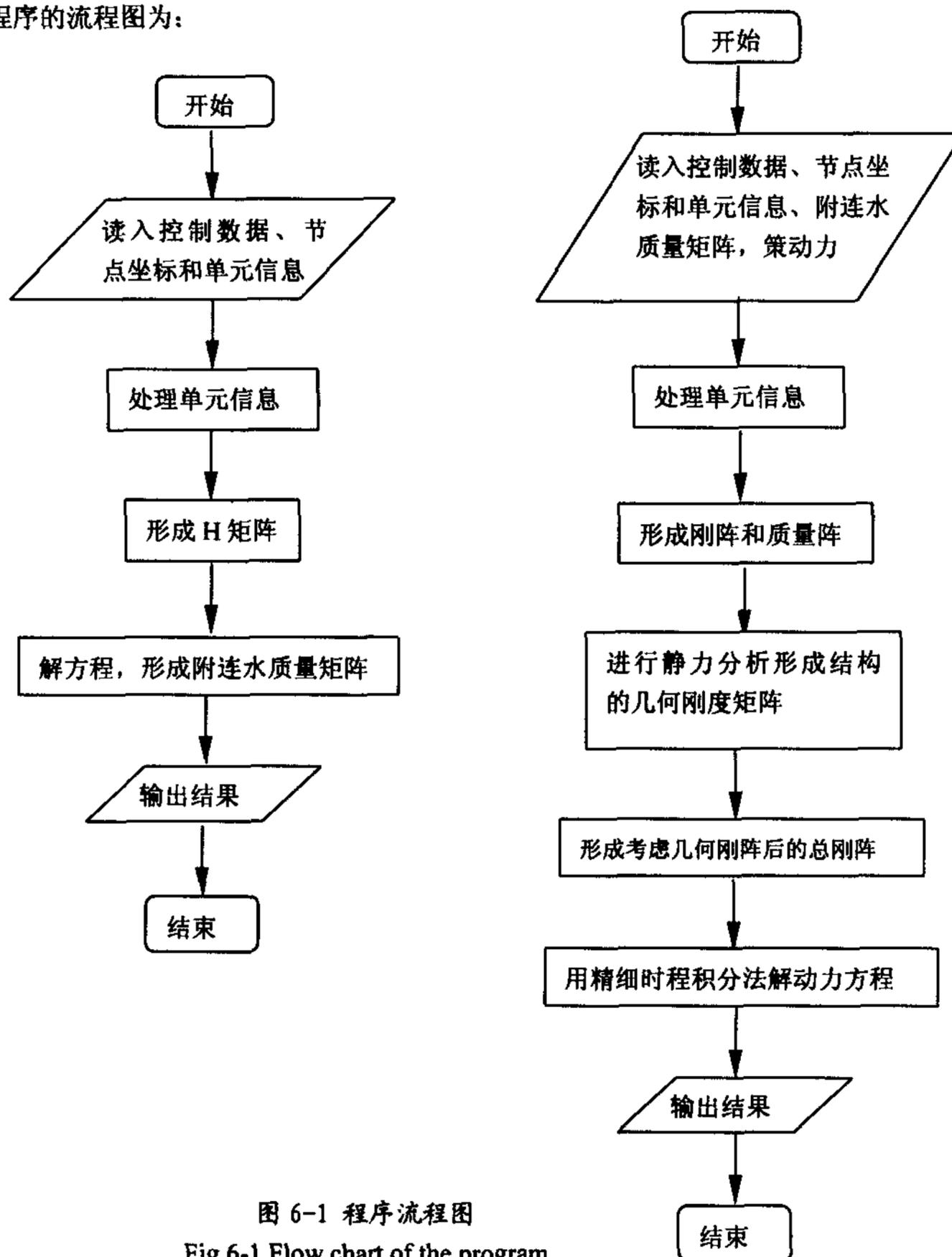


图 6-1 程序流程图

Fig.6-1 Flow chart of the program



本程序分为两个部分。第一部分是计算附连水质量，利用三维八节点等参流体单元。第二部分是形成结构的初应力刚度矩阵和求解结构的动力响应，主要是利用精细时程积分方法对结构的动力响应进行计算。

6.2 实例计算及结果分析

我们采用与 5.2 节中相同的计算模型（如图 5-2）。除了要考虑附连水质量矩阵以外（计算附连水质量所用的方法和取的流体的范围与 5.2 节中的相同），还要考虑在一定的水深下结构受到的水压影响而转换成的结构的初应力刚度矩阵。采用我们在第三章中得到的结构的动力方程求解。我们采用的阻尼为 Rayleigh 阻尼，即： $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ 。为了研究水深对于结构的动力响应的影响，我们取以下两种力项的形式在各种水深和阻尼下的动力响应进行比较。为了进行比较，我们还取结构在没有加入初应力刚度矩阵的情形进行计算。

6.2.1 外载为简谐力项

外力取为在点 A 上的沿 z 方向的集中载荷 $P(t)$ ：

$$P(t) = 10 \sin t \quad (\text{N}) \quad (6.2.1)$$

1. 无阻尼情况下的响应

我们首先取在没有阻尼的情况下，分别计算在各种水深情况下，考虑附连水质量阵的结构的动力响应。我们取 A 点的沿 z 向的位移响应为例，作出位移响应随时间变化的历程图。

为了进行比较，把水深 H 分别为 0m、60m、100m 时的位移随时间变化的历程图画出来。

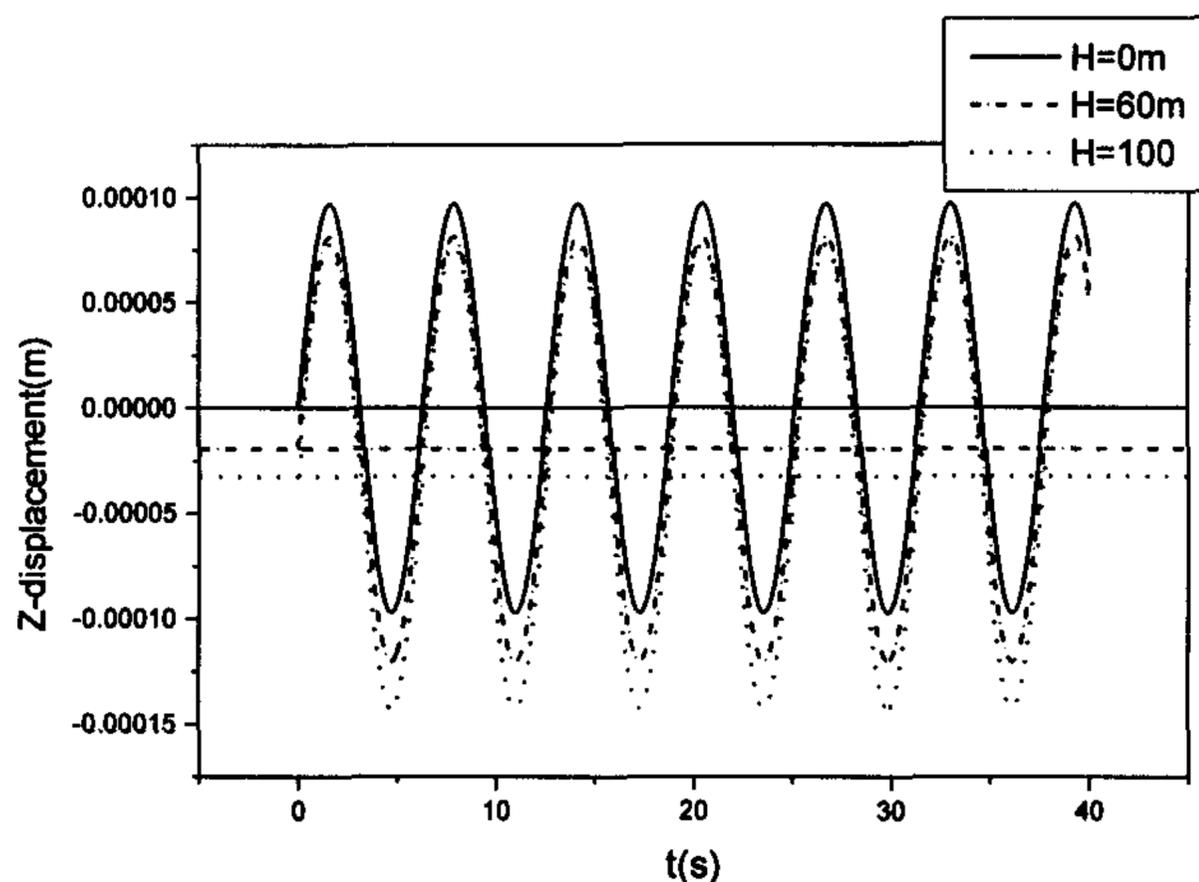


图 6-2 z 向位移时间历程图

Fig.6-2 z-displacement versus time

对于以上没有阻尼的情况，我们可以看出：水深对于响应的形态没有什么影响。由于水压的作用而产生的变形对于结构的响应有一定的影响。A 点以水压的作用变形以后的位置为平衡位置沿 z 向的扰动都是等幅振动，而且随水深的不断增加振幅不断的增大。

2. 有阻尼情况下的响应

我们现在讨论有阻尼情况下，不同水深下结构在相同的简谐力作用下的动力响应。我们取的是 Rayleigh 阻尼，即： $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ 。分别取不同的系数进行计算：① $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ ；② $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.0$ ；③ $\alpha = 0$, $\beta = 0.1$ ；④ $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$ 。

我们取第一种情况下 A 点沿 z 向的位移为例，比较在不同水深情况下结构的动力响应，如下图所示：

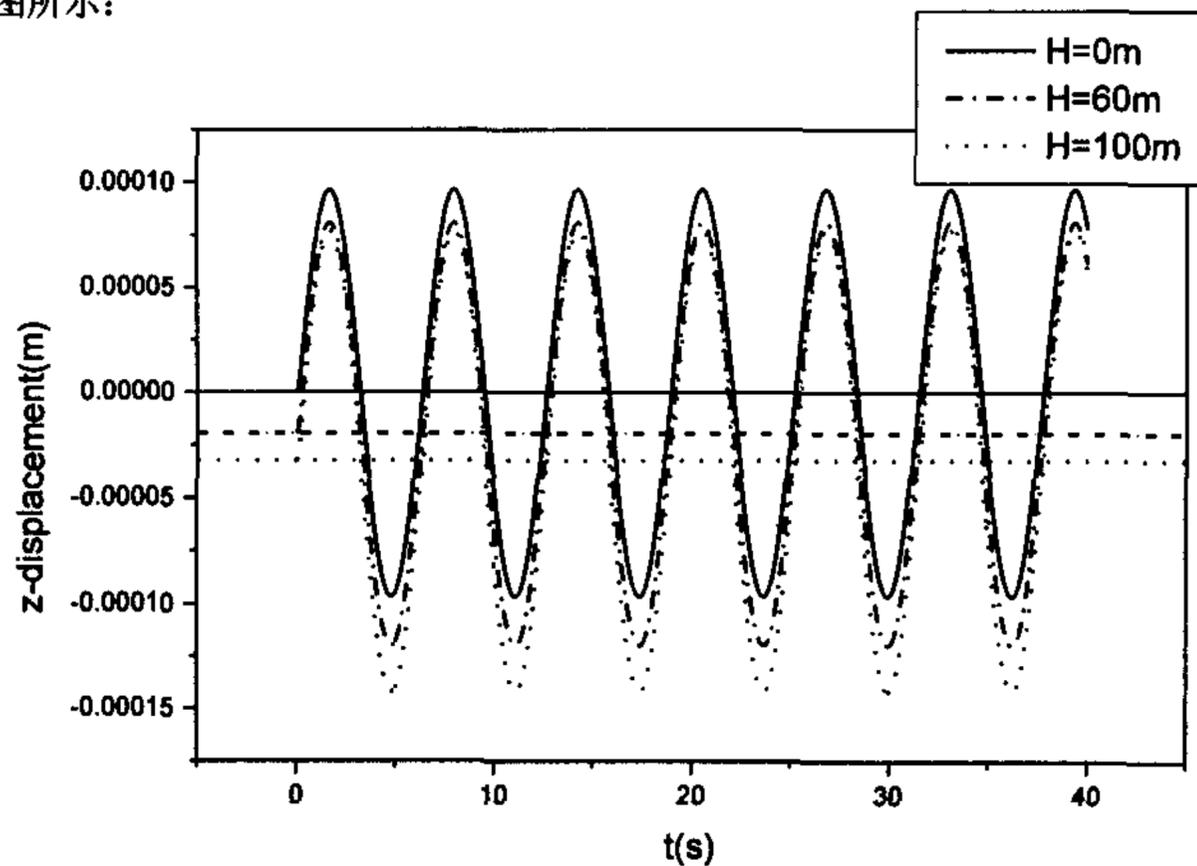


图 6-3 z 向位移时间历程图

Fig.6-3 z-displacement versus time

为了体现出水深对于结构响应的影响，我们取的阻尼为： $[C] = \alpha[M]$ ，可以避免由于水深压力转换成的初应力刚度矩阵对于响应的阻尼的影响。

从上面的结果我们可以看出：水深和阻尼对于结构振动的形态没有什么影响；由于水压的作用产生的初位移对结构的动力响应有影响；在各种阻尼和各种水深下结构上的 A 点以在水压的作用变形以后的位置为平衡位置，沿 z 向的扰动的时间历程图都是很相似的。所以我们取时间历程图上以水压作用以后的位置为平衡位置的扰动的幅值进行比较，如表 6-1 所示：

表 6-1 各种阻尼和各种水深下位移时间历程响应图的幅值(毫米)比较

水深(H)	$\alpha = 0, \beta = 0$	$\alpha = 0.1, \beta = 0$	$\alpha = 0, \beta = 0.1$	$\alpha = 0.1, \beta = 0.1$	$\alpha = 0.1, \beta = 0.5$
0	0.0971	0.0971	0.0966	0.0966	0.0868
20	0.0979	0.0979	0.0975	0.0975	0.0876
40	0.0991	0.0991	0.0986	0.0986	0.0887
60	0.1009	0.1009	0.1004	0.1004	0.0902
80	0.1038	0.1038	0.1033	0.1033	0.0928

100	0.1101	0.1101	0.1096	0.1096	0.0985
-----	--------	--------	--------	--------	--------

由上面的算例的结果可以看出, 与没有阻尼情况类似, 在相同的阻尼情况下, 结构的响应值 (以水压作用以后的位置为平衡位置的扰动的幅值) 随水深的增加不断的增加。在相同的水深情况下, 结构的响应值 (以水压作用以后的位置为平衡位置的扰动的幅值) 随阻尼的增加不断的减小。由表 6-1 可以看出, 在我们取用的 Rayleigh 阻尼中刚度矩阵的系数对于结构的动力响应的影响比质量矩阵的系数对于结构的动力响应的影响大。

6.2.2 外载为冲击力项

水下结构在有些情况下会受到冲击载荷的作用, 所以对于冲击载荷作用下的水下结构的动力响应有必要进行细致的研究和分析 (本章研究在不同水深下结构在相同的冲击载荷作用下的动力响应)。外力取为在点 A 上的沿 z 方向的集中载荷 $q(t)$:

$$q(t) = -10\delta(t) \quad (\text{N}) \quad (6.2.2)$$

1. 无阻尼情况下的响应

我们计算在没有阻尼情况下, 水深分别为 0m、20m、40m、60m、80m、100m 时候结构的动力响应。我们以水深 0m、60m、100m 为例做出 A 点 z 向位移的时间历程图。

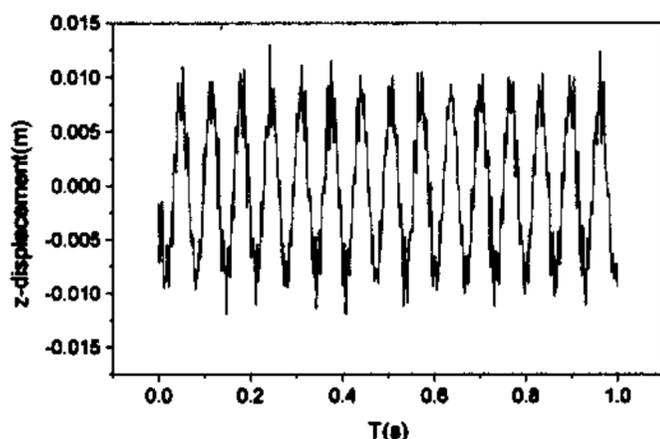


图 6-4 不考虑水深的位移时间历程图
Fig.6-4 Displacement versus time without considering the depth of water

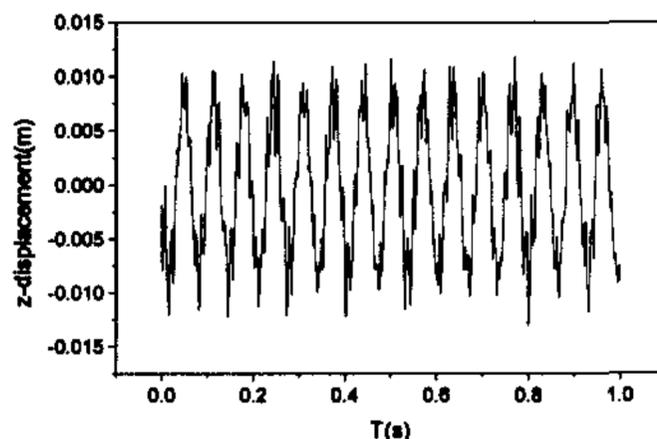


图 6-5 水深 60 米的位移时间历程图
Fig.6-5 Displacement versus time when the depth of water is 60m

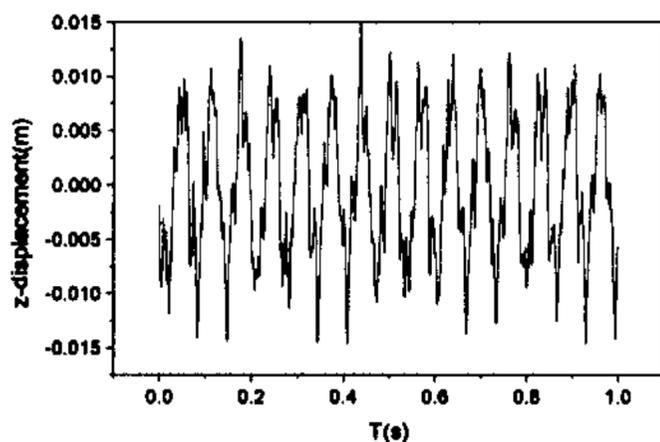


图 6-6 水深 100 米的位移时间历程图
Fig.6-6 Displacement versus time when the depth of water is 100m

由于没有阻尼，结构的各阶频率都会对结构的动力响应产生影响。从上面的结果可以看出：初应力刚度矩阵对结构的动力响应有一定的影响，不同水深下水压产生的结构的变形对于结构的动力响应也有一定的影响，水深对于振动的形态没有什么影响。

2. 有阻尼情况下的响应

在实际的工程应用中，结构在水下的运动会受到一定的阻尼。我们取 Rayleigh 阻尼进行模拟： $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ ，其中， $\alpha = \beta = 0.01$ 。取水深分别为 0m、20m、40m、60m、80m、100m 进行计算，为了进行比较，我们做出 A 点从时间 $t=0(s)$ 到时间 $t=1.0(s)$ 时 z 向位移的时间历程图。为了更好的表示水压的作用对于结构动力响应的影响，图中的 $z - displacement = 0$ 的横线表示结构上 A 点在没有受到水压和外力的影响下的初始位置。

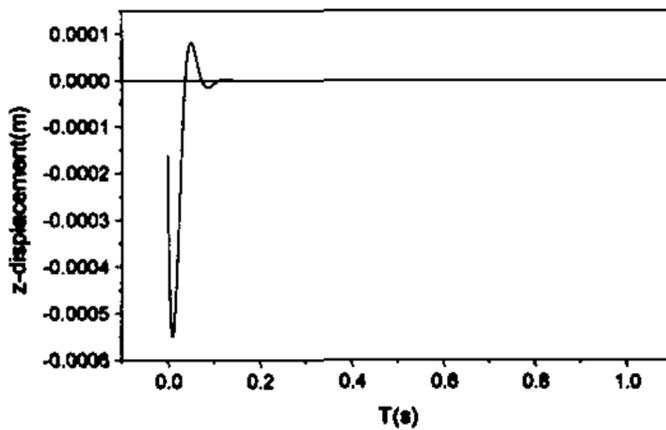


图 6-7 不考虑水深的位移时间历程图
Fig.6-7 Displacement versus time
without considering the depth of water

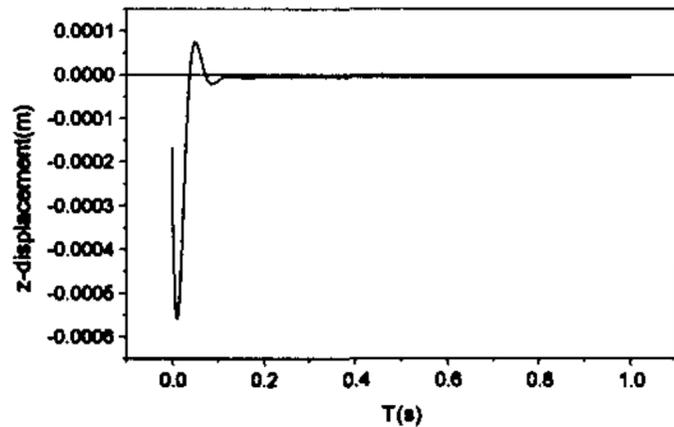


图 6-8 水深 20 米的位移时间历程图
Fig.6-8 Displacement versus time
when the depth of water is 20m

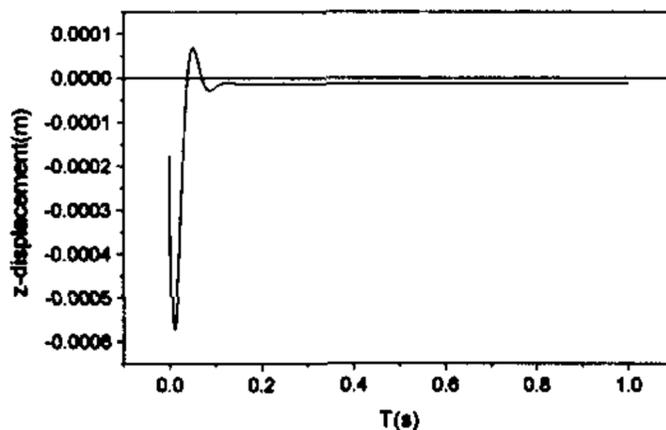


图 6-9 水深 40 米的位移时间历程图
Fig.6-9 Displacement versus time
when the depth of water is 40m

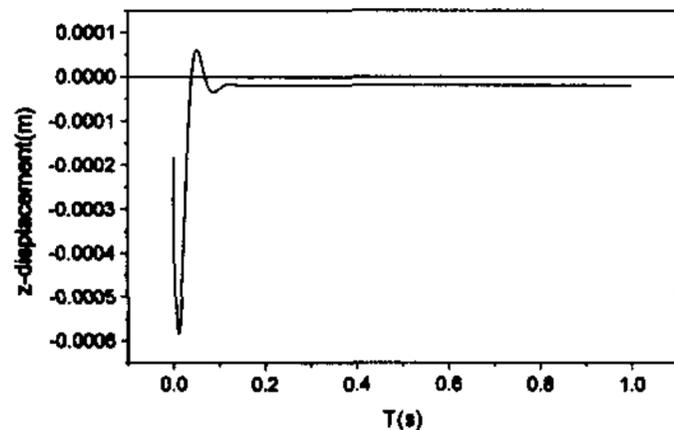


图 6-10 水深 60 米的位移时间历程图
Fig.6-10 Displacement versus time
when the depth of water is 60m

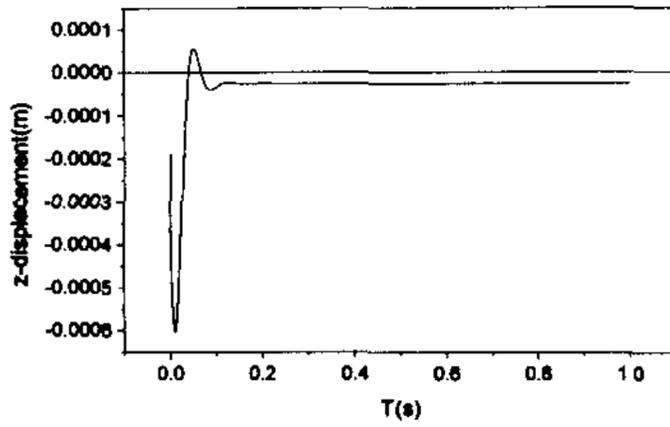


图 6-11 水深 80 米的位移时间历程图
Fig.6-11 Displacement versus time when the depth of water is 80m

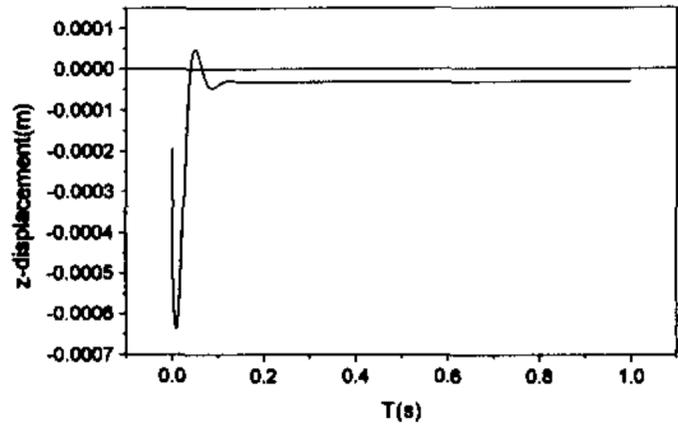


图 6-12 水深 100 米的位移时间历程图
Fig.6-12 Displacement versus time when the depth of water is 100m

取位移的时间历程图上最大值（分为考虑初始的变形和在初始变形以后的扰动的最大值）进行比较，以水深为横坐标，以响应的最大值为纵坐标做图如下：

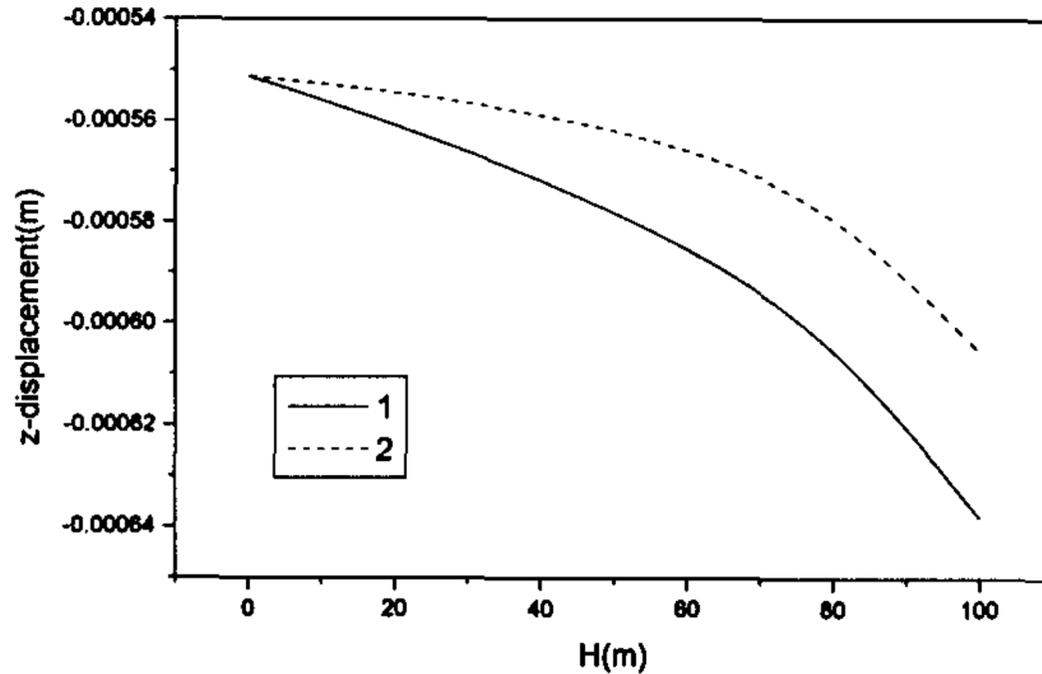


图 6-13 位移最大值与水深的关系
Fig.6-13 Relationship of maximal displacement and depth of water

在图 6-13 中，1 表示在实际情况下，在各种水深下结构上的 A 点在冲击力作用下 z 向最大变形的响应数值。2 表示结构在各种水压下的平衡位置受到冲击力作用以后 A 点的 z 向扰动的最大值。

从上面对于冲击载荷的计算可以看出，与受到简谐力作用下动力响应的结论类似：水深对于振动的形态没有什么影响；由于水压产生的初变形对于结构的动力响应有一些影响；在其它条件相同而只有水深条件不同的情况下，结构在水压作用以后的位置为平衡位置的扰动随水深的增加而增加。

6.3 小结

水下结构的动力响应要受到水深的影响，本文初步揭示了这种影响。从上面对于不同水深下的结构在相同的作用力下的动力响应的计算结果，我们可以看出：不管是在简谐力项还是在冲击力项作用下，水深对于结构的振动形态没有什么影响；不同水深造成的结构的初变形对于结构的动力响应有一定的影响；由于不同的水深下初应力刚度矩阵的不同，结构在平衡位置的扰动也随着水深的变化而变化。具体来说，结构的初始变形和扰动都会随水深的增加而增加，使结构的动力响应增加。

水深的增加使结构在相同的外界条件和受力的条件下，响应值增加。在进行结构与计算时要考虑到这种影响。本文结果和方法可供流固耦合方面研究参考。

第七章 结束语

流固耦合问题的重要性越来越引起人们的重视，国内外对这一方面的研究已经相当的广泛与深入了。

本文把精细积分方法应用到结构受到冲击载荷作用下的动力响应的计算。提出了分段精细时程积分方法来拓宽精细时程积分方法的应用范围。数值算例表明精细时程积分方法和分段精细时程积分方法比传统的方法有很多优点。所提出的新方法可应用于各种线性定常结构动力响应的求解中。

本文把精细时程积分方法应用到了求解流固耦合系统的动力响应。所得到的结果表明精细时程积分法和我们提出的分段精细时程积分方法适合与流固耦合系统的动力响应的计算。潜水深度对结构的动力响应的影响，在一般的工程计算中很少涉及，我们在课题组已有的研究成果基础上，重点对水深对结构动力响应做了一些研究工作。所得到的结果和方法可供流固耦合研究之用，并拓宽了流固耦合的研究领域，为这一类流固耦合结构的设计研究提供了有价值的参考。



参考文献

- [1] Abbas J F, Ibrahim R A, Gibson R F, nonlinear flutter of anisotropic composite panel under aerodynamic heating. *AIAA J.* 1993,31(8):1478-1488.
- [2] Shimura M, Sekine A. Integration analysis between structure and fluid flow for wind engineering. *Wind. Eng. Indust. Aerodyn.* 1993,46-47:595-604.
- [3] Semler C, Li G X, Paidoussis M P. Nonlinear equations of motion of pipes conveying fluid. *J. Sound. Vib.* 1994,165(4):577-599.
- [4] Rabbitt R D, Damiano E R. Fluid-structure interaction in the ampullary region of the vestibular semicircular canal. *ASME, Bioengineering Division.* 1995,29:317-318.
- [5] Bathe K. J., Zhang H. And Wang M. H. Finite element analysis of incompressible and compressible flows with free surfaces and structural interactions. *Computers and Structure,* 1995,56(2/3): 193-213.
- [6] 刑景棠, 周盛, 崔尔杰. 流固耦合力学概述. *力学进展*, 1997, 27 (1): 19-38.
- [7] Geers, T. L., Doubly asymptotic approximations for transient motion of submerged structure. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1978,64:1500-1508.
- [8] Komatsu K., Fluid-structure interaction, in progress in boundary element methods. Vol. 2, Ed. C. A. Brebbia, *Pentech Press. Ltd.*, 1983.
- [9] Bermudez Alfredo and Rodriguez Rodolfo. Finite Element Computation of the Vibration Modes of a Fluid-Solid System. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1994, 119: 355-370
- [10] Bernudez Alfredo, Ricardo Duran, Rodolfo Rodriguez. Finite Element Solution of Incompressible Fluid-Structure Vibration Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, 40: 1435-144
- [11] Liu W. K. and Chang H. G. Multidisciplinary and Interaction Problems: A Method of Computation for Fluid Structure Interaction. *Computers & Structures*, 1985, 20(1-3): 311-320
- [12] 戴大农, 王勳成, 杜庆华. 流固耦合系统动力响应的模态分析理论. *固体力学学报*, 1990, 11(4): 305-312.
- [13] 吴一红, 谢省宗. 水工结构流固耦合动力特性分析. *水利学报*, 1995, 1: 27-34.
- [14] Irons B M. Role of Part-Inversion in Fluid-Structure Problems with Mixed Variables. *AIAA Journal*, 1970, 8: 568
- [15] Hamdi M., Ouset Y. and Verchery G. A Displacement Method for the Analysis of Vibration of Coupled Fluid-Structure Systems. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 1978, 13: 139-150
- [16] Chen H.C. and Taylor R.L. Vibration analysis of Fluid-Solid Systems Using a Finite Element Displacement Formulation. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 1990, 29: 683-698
- [17] Xing J T, Price W G. A Mixed Finite Element Method for the Dynamic Analysis of Coupled Fluid-Solid Interaction Problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1991,433: 331-344
- [18] Xing J T, Price W G, Du Q H. Mixed Finite Element Substructure-Subdomain Methods for

- the Dynamical Analysis of Coupled Fluid-Solid Interaction Problems. *Trans. R. Soc. Lond. A*, 1995, 354: 259-295
- [19] Romyjantsev, V. V., On the Motion and stability of Body with Liquid-Filled Flexible Covity, *PMM(in Russian)*, 1969,33(6):946-957.
- [20] Liu, Y. Z., On the Generation of Dynamical Equations of a Rigid Body Containing Fluid, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 1990, 70(3):199-200
- [21] 李铁成, 王照林, 李俊峰, 岳宝增. 刚-流-弹耦合系统的动力方程及其边界条件的建立. *应用力学学报*. 1998, 15 (2): 127-131.
- [22] 温德超, 郑兆昌, 孙焕纯. 用 ALE 和时间分裂法分析三维粘性流体的大幅晃动的非线性问题. *振动与冲击*. 1996, 15 (3): 48-54.
- [23] Mustafa B., Al-Hassani S. T. and Reid S. R. Axisymmetric Dynamic Bucking of Submerged Cylindrical Shells. *Computers and Structure*, 1993,47(3): 399-405.
- [24] 陆鑫森, 高等结构动力学, 上海交通大学出版社, (1992)
- [25] 童予靖, 刘正兴. 流固耦合问题中的附连水质量的研究[J]. *上海力学*. 1997, 18(4): 311~320.
- [26] 金占礼, 王宗利, 李红云, 刘正兴. 结构在无限流体域中的振动时附连水质量的数值计算方法. *上海交通大学学报*, 2000, 34 (8): 1078~1082.
- [27] 刘正兴, 孙雁, 谢守国. 流体介质中结构的动力特性及响应分析. *上海交通大学学报*, 1995, 29 (4): 7-16.
- [28] 金占礼. 考虑水深影响的结构在水下运行时的自振特性研究. 硕士论文. 上海交通大学. 2000.
- [29] Bathe K. J., Wilson E. L.. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. New York: Prentice-Hall, 1976.
- [30] Subbaraj K., Dokainish M. A. A survey of direct time integration methods in computational structural dynamics: I Explicit methods, II Implicit methods. *Computers and Structures*, 1989,32(6): 1371-1386; 1387-1401.
- [31] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分方法. *大连理工大学学报*. 1994, 34 (2): 131-136.
- [32] Zhong Wanxie, Williams F. W..A precision time step integration method. *Proc. Inst. Mech. Engrs* 1995,208C: 427-430.
- [33] 钟万勰. 暂态历程的精细计算方法. *计算结构力学及其应用*. 1995,12(1): 1-6.
- [34] Jiahao Lin, Weiping Shen, F. W. Williams. A high precison direct integration scheme for structures subjected to transient dynamic loading. *Computers and Structures*. 1995, 56(1): 113-120.
- [35] 沈为平, 宋化茂. 任意载荷作用下结构动力响应的并行算法. *振动工程学报*. 1996, 9(4): 333-340.
- [36] Weiping Shen, Jiahao Lin, F. W. Williams. Parallel computing for high precision direct integration method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 1995,126: 315-331.

- [37] Lin Jiahao, Shen Weiping, Williams F. W. A high precision direct integration scheme for non-stationary random seismic response of non-classically damped structure. *Struct. Engng Mech.* 1995,3: 215-228.
- [38] Jiaohao Lin, Weiping Shen, F. W. Williams. Accurate high-speed computation of non-stationary random structural response. *Engineering Structures.* 1997,19(7): 586-593.
- [39] 张森文, 曹开彬. 计算结构动力响应的状态方程直接积分方法. *计算力学学报.* 2000, 17(1): 94-97.
- [40] 张森文, 曹开彬. 随机振动响应计算的精细积分时域平均法. *振动工程学报.* 1999, 12(3): 367-373.
- [41] 刘正兴, 孙雁, 王国庆. 计算固体力学. 上海交通大学工程力学系 (2000)
- [42] J.T.Oden, R.W.Clough, and Y. Yamamoto. *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, University of Alabama Press, Huntsville, Ala., 1972.
- [43] 冯康, 秦孟兆. Hamilton 动力体系的 Hamilton 算法. *自然科学进展.* 1991, 1(2): 110~120.

致 谢

两年的研究生生活就要结束了，此时此刻，回想起奋斗过的日日夜夜，不禁感慨万千。首先，我要向我的导师刘正兴教授表示崇高的敬意和由衷的感谢！导师对于学科方向的准确把握、对学生特点的全面的了解和为研究工作创造的良好条件，使学生能够顺利的完成硕士阶段的课程学习和论文工作。导师严谨的治学态度、踏实的学术作风、渊博的知识以及平易近人的品格都给予了我深刻的印象，让我受益匪浅。

我要向我的导师李红云副教授表示真诚的感谢和由衷的敬意。李老师在学术上循循善诱、严格要求，评阅文章更是一丝不苟，李老师严谨的治学态度和踏实的学术作风作者将铭记在心。

感谢李秀治老师在研究生学习期间给予作者多方面的帮助，感谢孙雁老师和王国庆老师在学术上的诸多帮助，在此也向他们表示我衷心的感谢！

此外，我们课题组的林启荣博士、王清博士和韩震硕士也在日常生活和学术上给了我多方面的帮助，在此一并表示深深的谢意。

最后，我要感谢我的家人，是他们的理解和支持给了我克服困难的力量和勇气，让我能够全身心的投入到学习和论文工作中。

王超

二零零一年六月



攻读硕士学位期间的科研工作

a. 论文

1. 王超, 李红云, 刘正兴. 流固耦合系统动力响应分析的精细时程积分法. 上海交通大学学报 (已投寄).
2. 王超, 李红云, 刘正兴. 计算结构动力响应的分段精细时程积分方法. 计算力学学报 (已投寄).
3. 王超, 张剑. 复合材料层合板的热应力强度因子. 上海交通大学学报 (已投寄).
4. 李红云, 林启荣, 刘正兴, 王超. 静水压力下压电弹性圆柱壳振动的主动控制. 应用数学和力学 (已录用).
5. Li Hongyun, Lin Qirong, Liu Zhengxing, Wang Chao. Free vibration of piezoelectric laminated cylindrical shell under hydrostatic pressure, accepted by International Journal of Solids and Structures.

b. 科研工作

1. 流体介质中结构动力特性与响应分析的综合模态法与并行计算系统, 船舶工业国防科技应用、基础研究基金, 合同号: 98J40.3.3, 1998.12-2000.12.
2. 潜水深度对结构动态特性的影响与控制方法, 船舶工业国防科技应用、基础研究基金, 合同号: 99J41.4.4, 1999.12-2001.12.