

## 摘要

随着科学技术的发展,传统的实体金属材料已远不能满足工程需要,人们对新材料提出了更高的要求:轻质、强韧且兼具多功能性。为实现这一目标,力学家们通过控制材料微结构实现了多种构型新颖的结构化材料,如蜂窝、泡沫、类桁架材料等。这些材料由于其卓越的比力学性能,能够在保证力学性能的前提下有效降低结构重量,并且易于实现多功能要求,因而受到了科学界和工程界的广泛关注和青睐。

本文的研究对象是具有周期性微结构的超轻质材料。微结构的周期性给这类材料的性能预测带来了很大方便,其中有代表性的方法包括均匀化理论和代表体元法,但如果考虑到材料在制造和使用过程中可能产生的随机缺陷,等效性能的求解往往非常耗时,如何高效预测其等效性能是一个亟待解决的问题;微结构的存在同时也增加了由这类材料所构成结构的弹塑性分析难度,复杂的内部构形需要投入更多的分析时间和计算资源,因此发展快速等效求解方法是非常必要的,尤其当作为优化/可靠度求解的分析工具时,这一需求显得尤为突出;另一方面,现有的结构/材料协同优化方法得到的微结构结果在宏观上往往点点相异,这给实际制造带来了一定困难,有必要发展考虑制造性的协同优化方法。针对以上这些问题,本文将主要讨论以下三部分内容:

1. 对于随机性材料等效性能预测问题,本文采用蒙特卡洛模拟方法,从数值的角度比较了不同的边界条件对预测结果的影响,讨论了其中的尺度效应和对胞元选择的依赖性。为了提高 Dirichlet 边界条件下的计算效率和改善结果精度,本文提出了考虑内部胞元能量等效的代表体元法。该方法能够有效削弱边界条件和胞元选择的影响,实现了采用较小代表体元得到更好结果的目的。
2. 对于由类桁架材料构成结构的弹塑性分析,本文考虑到材料单胞近似为桁架的特点,基于数值均匀化理论,建立了宏微观两级求解格式。原问题转化为宏观上一个非线性弹性连续体计算问题和微观上多个小规模桁架系统的弹塑性计算问题,从而在保证精度的前提下有效提高了计算效率。
3. 对于结构/材料一体化设计,针对现有结果给制造带来的困难,本文提出了以均一微结构为前提的多孔材料与结构的协同优化方案。采用拓扑优化技术,微结构不再局限为特定构形;在两个尺度上独立定义单元密度为设计变量,分别引入了 SIMP 和 PAMP 方法对密度进行惩罚,并集成到一个优化模型中进行协同设计。以此为极限值,我们还提出了基于子结构的两级协同优化方案,并讨论了其在制造上的优势及尺度效应。

**关键词:** 超轻材料; 微结构; 均匀化; 代表体元法; 拓扑优化

## Mechanical Performance and Concurrent Optimization of Ultra-Light Material and Structure

### Abstract

As the rapid development of science and technology, conventional solid metals have become inadequate to satisfy the needs of practical applications. People are constantly seeking new materials with some fascinating properties: light, stiff and multifunctional. To achieve this goal, mechanics researchers have developed several innovative structured materials by controlling the configuration of material microstructures, including honeycomb, foam and truss-like material. These materials are very promising for their superior mechanical properties and multifunctional capabilities.

The ultra-light materials investigated herein all have periodic microstructures. The existence of microstructure on one hand makes it very convenient to predict material properties, for which, Homogenization theory and Representative Volume Element (RVE) method are two mainstream methods. But if we take into account random imperfections induced during manufacturing process and subsequent practical applications, the prediction of equivalent properties could become very time-consuming. For this reason, there is interest in finding a new methodology which exhibits more efficiency over traditional ones. On the other hand, however, the existence of microstructure also increase the difficulty of elasto-plastic analysis of structures constructed of ultra-light materials, since complex internal configuration requires much more time and computing resources. So it is of great importance to develop a more efficient analytical algorithm, especially in the case that this analysis is for optimization / reliability solution. In the aspect of structure / material concurrent optimization, existing methods always lead to non-uniform microstructures in the macro-scale, which poses insurmountable manufacturing difficulties. Thus it is desirable to have a concurrent optimization scheme considering manufacturing factors. Addressing these problems, the study of this thesis can be divided into three main parts:

1. In predicting equivalent properties of materials with imperfections, Monte Carlo simulation is adopted based on the Homogenization theory and the Representative Volume Element method. We have compared different boundary conditions, and discussed the size effect and the influence of different cell selections. To improve the efficiency of computation and refine the results under Dirichlet boundary condition, it is proposed a Representative Volume Element computation based on energy equivalence of inner cells, and therefore better results could be achieved with relatively smaller RVE.

2. For the elasto-plastic analysis of structures composed of truss-like materials, we first simplify the unit cell as a truss model, and then present a two-scale analysis based on the numerical homogenization. The original problem is thereby transformed to two interrelated problems in two scales: a nonlinear elastic continuum computation in macro-scale and several elasto-plastic analyses of small-scale truss systems in micro-scale. The proposed method is verified to have the same precision but less used time.

3. To address the manufacturing difficulty in existing structure / material optimization, this thesis presents a new concurrent topology optimization scheme to simultaneously achieve the optimum structure and optimum material microstructure. Microstructure is assumed to be uniform in macro-scale to meet manufacturing requirements. Design variables in both scales are independently defined and then integrated into one system with the help of homogenization theory. Penalization approaches are adopted in both scales to ensure clear topologies, i.e. SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) in micro-scale and PAMP (Porous Anisotropic Material with Penalization) in macro-scale. Further, it is proposed another concurrent optimization scheme based on substructure. The size effect and advantages for manufacturing are discussed.

**Key Words:** Ultra-Light Material; Microstructure; Homogenization; Representative Volume Element; Topology Optimization

## 独创性说明

作者郑重声明：本硕士学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得大连理工大学或者其他单位的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

作者签名: 刘屹 日期: 2006.6.8

### 大连理工大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者及指导教师完全了解“大连理工大学硕士、博士学位论文版权使用规定”，同意大连理工大学保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权大连理工大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，也可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编学位论文。

作者签名: 刘屹

导师签名: 尹长生

2006年6月8日

## 引言

### 0.1 课题背景

随着科学技术的发展，传统的实体金属材料已经远不能满足工程应用的需要，人们对于新材料提出了更高的要求：轻质，强韧，且兼有多功能性。为实现这一目的，一种途径当然是通过材料、化学、物理等技术手段进行合成制造，但也存在完全不同的技术路线。这就是，沿用传统的金属材料，通过控制材料的微结构实现多种构型新颖的结构化材料，如纤维增强复合材料、颗粒增强复合材料、蜂窝、泡沫、类桁架材料等等。这类材料通常具有轻质，高比强度，高比刚度的优越特性，并且易于实现多功能要求，因而逐渐成为了力学、机械、材料等领域的研究热点，在实际工程中的应用也越来越广。

结构化超轻材料通常可以分为两类：一类是如图 0.1(a) 所示的泡沫材料，这类材料的微结构可分为开孔和闭孔两大类，其尺寸和具体形状在空间都是非常随机的；另一类的代表是图 0.1(b)-(d) 所示的三种材料类型，它们所具有的共同特点是可以表征为某种微结构（胞元）在空间的周期性排布。这类具有周期性微结构的材料也正是本文的主要研究对象。

针对这里所列出的各种超轻材料，国内外已经发展了多种相对成熟的制备技术。以类桁架材料为例，现有的工艺就包括规则镁空板折叠、丝网编织、缝纫、PIN 办法、打孔板热焊等等。随着这些制造工艺的发展和完善，超轻材料的制造成本会快速下降，工业应用前景也会越来越明朗。同时，这也为超轻材料优化设计提供了有力保障。因为以各种目标为前提的优化设计结果，都必须借助一定的制造工艺才能得以实现，有了成熟的制造工艺这个至关重要的桥梁，超轻材料微结构的设计才更具实际意义。

超轻材料优化设计的另外一个基础，就是快速有效的分析方法。因为一个优化过程往往包含几十次甚至上百次的结构分析，这是一个非常耗时的步骤。在分析上节省工作量和耗时对于提升整个优化过程的效率是非常有效益的。正因为此，材料等效力学性能和多尺度计算的研究也始终是超轻材料研究领域的两个热点问题。

本文着重于从快速分析和协同优化的角度研究具有周期性微结构的超轻材料及其构成的结构，主要研究内容包括：

1. 考虑超轻材料在制造和使用过程中可能出现的各种随机缺陷，对等效模量的预测，提出了考虑内部胞元能量等效的代表体元法。
2. 对于由类桁架材料构成的结构，本文给出了快速等效的弹塑性计算格式。
3. 提出了考虑均一微结构构型的超轻材料和结构的协同优化设计方案。

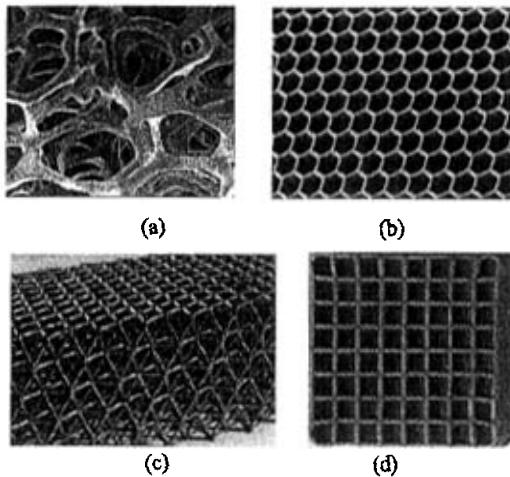


图 0.1 四种超轻材料: (a) 泡沫; (b) 蜂窝; (c) 类桁架材料; (d) 线性蜂窝材料

Fig. 0.1 Four representations of ultra-light materials:

(a) Foam; (b) Honeycomb; (c) Truss-like material; (d) Linear cellular material

## 0.2 超轻材料的等效力学性能

超轻材料的许多特点与它自身的微结构形式有关, 所以需要通过对于微结构的分析得到材料的等效性能, 以方便超轻材料的评价和应用。这里我们将引入两种主流的方法: 均匀化方法(Homogenization)<sup>[1]</sup>和代表体元法(Representative Volume Element)<sup>[2]</sup>。这两种方法同时也是本文重要的理论基础和工具, 将在文中多次出现, 我们将在第一章做专题介绍。

均匀化方法是超轻材料宏细观两级分析中的一种主流方法。它基于小参数展开摄动理论, 具有很强数学背景, 能有效预测具有周期性微结构的材料的等效宏观性能, 计算微观尺度下的物理场<sup>[1]</sup>, 它还被应用到结构优化领域实现了对于结构拓扑形式的优化<sup>[3, 4]</sup>, 在材料微结构设计方面也起着非常关键的作用<sup>[5]</sup>。对于一般的均匀化方法, 单胞尺度被认为无限小, 考虑单胞尺度的均匀化方法<sup>[6]</sup>主要基于非经典连续体理论如偶应力、Cosserat、应变增强、非局部效应等。

代表体元法是一类与均匀化理论相伴存的方法, 它基于能量等效的思想, 由于其简单有效的特点得到了广泛的应用<sup>[2, 7]</sup>。均匀化方法和代表体元法在满足协调条件下等效, 而在一般情况下则具有上下界逼近的规律<sup>[8]</sup>。

类桁架材料由于其拉压为主的承载方式能够获得较好的力学性能<sup>[9]</sup>, 相对泡沫材料<sup>[10]</sup>更加集中的质量分布能够获得较好的抗失稳能力, 更加由于其规则高连通性和可设计性使得其多功能性能够得到更广泛的发挥, 因此成为近年来研究的一个热点<sup>[11]</sup>。Ashby、

Hutchinson、Gibson 等学者分别研究了一定微结构拓扑下类桁架材料的等效力学性能和材料微结构的拓扑优化<sup>[11-13]</sup>。

在超轻材料制造和应用过程中，不可避免地会出现基体材料、微结构拓扑和尺寸的随机性变化。此时等效性能的预测一般采用两种处理办法：一种方法基于随机有限元<sup>[14]</sup>，优点是效率很高，缺点是随机信息需要满足连续型概率分布，如节点偏移等；另一种方法基于蒙特卡洛模拟<sup>[15]</sup>，优点是可以处理各种随机信息，包括杆件缺失等离散型信息，缺点是需要多次投点分析，非常耗时。本文将在第二章对应用后一种方法时边界条件的选取做进一步讨论，并提出一种高效算法。

### 0.3 由超轻材料构成结构的力学分析

微结构的存在使得由超轻材料构成的结构的性能分析变得更加困难。例如：由类桁架材料构成的结构实际上是一个非常致密的网架，自由度数目很大，如果完全按空间桁架计算会消耗相当多的计算资源和时间。而且，结构优化、材料设计和可靠度分析都以结构分析为前提，这些过程往往需要进行多次循环迭代，完全离散建模计算必然会极大削弱求解的效率。因此，我们需要以高效精确的近似方法代替完全的结构计算，于是多尺度分析成为了超轻材料领域研究的又一个热点。

对于超轻材料构成结构的近似弹性分析通常有两个步骤：第一个步骤是获取材料的等效性能。由于材料微结构是周期性分布的，可以通过均匀化方法等对胞元的分析得到弹性模量和热导系数等基本物理参数的宏观等效值。第二个步骤是将系统视为由等效连续介质构成的结构，并使用等效物理参数分析结构性能。这种做法的优点是计算量较小，宏微观之间只需要一次信息交换，在胞元尺寸相对结构尺寸较小时可以得到非常理想的结果。

但这种简单的做法局限于线性问题，如果考虑弹塑性、稳定性等非线性问题时，需要两个尺度上更多的交互才能完成分析过程，这就需要进一步发展多尺度的计算方法。事实上，相对于弹性性质而言，材料和结构弹塑性性能对于工程研究领域同样非常重要。因而在此方面，已经有了很多工作。

对于桁架类材料所制成的结构的弹塑性分析，一类办法是先求出特定单胞的屈服曲面<sup>[12]</sup>，对于某些类型的连续体单胞可以考虑通过转换场理论给出宏观的数值本构模型<sup>[16]</sup>，根据得到的宏观尺度本构信息就可以直接进行宏观分析。这类方法能够提供直接的宏观计算，带来的效率较高，但是往往对于单胞形式有一定要求，且强化阶段的预测比较困难。

另一类办法是利用数学均匀化理论和不同的连续体弹塑性分析方法结合。文献中提出了几种宏微观两级弹塑性分析的数值方法，其中比较有代表性的两个工作是：Ghosh<sup>[17-19]</sup>对于具有随机分布夹杂的非均质材料，利用 Voronoi Cell 有限元方法和数学均匀化方法得到了两级分析求解格式；Fish<sup>[20]</sup>针对纤维增强材料采用基于特征应变的弹塑性分析方法进行求解，此方法对于一般意义上的单胞不具有普适性。Terada 等认为采用此类与数学均匀化结合的方法只是弹性问题使用增量形式后的推广，具有很好的形式但是未必能获得可接受的结果<sup>[21]</sup>。

由于经典的均匀化在计算非线性问题时的一些困难，针对这类问题发展了基于单胞应力应变体积平均和周期性条件的数值均匀化方法。Terada 等人提出了基于数值均匀化的弹塑性计算方法<sup>[21]</sup>，并且讨论了其并行计算的实现<sup>[22]</sup>，这种方法具备清晰的概念，对于单胞形式没有特殊的要求。类似的求解体系还被应用于求解两级稳定性分析的微单胞失稳模态问题<sup>[23-25]</sup>。Hohe 基于应变和能量的体积平均发展了类似的求解方法<sup>[26, 27]</sup>，并应用于超轻材料的计算中。

基于数学均匀化和数值均匀化的多级求解方法共同存在的问题是<sup>[28]</sup>：周期性假设；单胞相对结构尺寸必须很小；边界上需要特殊的处理。而且，大多数此类方法的本质实际是在高斯点开窗的宏观分析，宏观的信息通过这个媒介传递，并非是真正意义上的多尺度分析方法<sup>[29]</sup>。基于这些观点，Ladeveze<sup>[28]</sup>对于时间相关的多尺度问题，采用了类似子结构的方法对全结构进行分割，子结构之间通过结合面的力和位移条件相联系，然后结合宏微观分离和其提出的 LATIN 迭代方法进行两级求解。其主要缺点是需要迭代，而且由于没有引入近似，计算效率可能不高。

本文第三章主要针对类桁架材料，给出了精确高效的弹塑性求解格式。我们首先利用类桁架材料基本构件长细比较大的特点，将材料单胞简化为桁架模型。然后考虑到微单胞空间分布的周期性，基于数值均匀化理论提出了类桁架材料结构的宏微观两级弹塑性求解格式，从而使原问题转化为宏观上一个非线性弹性连续体计算问题和微观上多个小规模桁架系统的弹塑性计算问题。

#### 0.4 超轻材料和结构的优化

多功能超轻材料具有强韧、抗冲击、吸能、隔热、吸音等优异的综合性能，在航空航天、汽车等工程领域受到了广泛的关注与青睐，也已经有了一定工业应用。但是，超轻材料更有效和更经济的使用仍然有赖于更先进的设计理念、设计思想和设计方法的提出，这不仅包括单纯的材料设计，更包括考虑结构和材料相互影响的一体化设计，这就是需求。另一方面，正如前面我们已经提到的，成熟的制造手段已经在一定程度上消除

了超轻材料设计结果实现上的障碍，而快速高效的多尺度分析方法进一步减少了我们在数值实现上可能遇到的困难。从这两方面来看，材料设计和结构/材料一体化设计的研究是非常必要的，也是有实用前景的。

结构优化设计问题大致可分为三类，即尺寸优化，形状优化和拓扑优化。相对于前两种优化，拓扑优化能从根本上改变结构拓扑形式，能够得到创新性的构型，以目标函数衡量往往更加优越，更能体现真正意义上的最优设计，是初始设计阶段的有力工具。因此，拓扑优化技术广泛应用于结构设计、材料设计和结构/材料一体化设计等领域。

现代拓扑优化理论可以追溯到 1981 年 Cheng 和 Olhoff<sup>[3]</sup>关于实心板最小柔顺性的研究。在这项工作中，他们发现最优板具有无限细无限密的增强肋，并且引入了微结构的概念来描述这一现象。1988 年，Bensøe 和 Kikuchi<sup>[4]</sup>沿用了微结构的概念，引入均匀化理论实现了拓扑优化。他们假设设计域是由无限多个中心具有孔洞的胞元构成，孔洞往往具有给定的几何形式（如方形），而大小则由一个或多个尺寸变量来描述。设定孔洞的尺寸变量为设计变量，进而可以通过尺寸优化在设计域上重新分配材料。具有较大孔洞（即较小材料密度）的胞元在宏观上被认为接近无材料，而具有较小孔洞（即较大材料密度）的胞元在宏观上被认为是构成结构的实体部分。

SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 是结构拓扑优化的另一种实现途径。它的优点是概念简单，实现相对容易。在实施 SIMP 方法时，先将宏观结构划分为单元，优化的目的是决定每一单元处的材料“有”和“无”。其实最直截了当的办法是将材料“有”“无”处理为离散设计变量“1”和“0”，这就变成了 0-1 规划问题，这类问题存在一定的求解困难。SIMP 方法选取单元相对密度为设计变量，允许相对密度在 1 和 0 之间变化，在得到的优化结果中，相对密度为“1”的单元被认为是宏观上的实体部分，而相对密度为“0”的单元则是空心部分，从而将离散设计变量连续化。设计变量和力学性能之间的关系则是通过指数惩罚来实现的。这一做法具有一定的人为成份但是简单易行，目前被广泛应用于拓扑优化问题的求解。

虽然拓扑优化的价值很可观，但是以上两种实现方法仍然存在一定的问题，其中比较常见的就是灰色区域的产生。在基于均匀化的方法中，灰色区域的胞元包含有中间尺寸的孔洞。这非常像具有微结构的超轻材料，但这里的微结构是点点不一样的，制造非常困难。而对于 SIMP 方法，灰色区域的单元具有非 0 非 1 的中间密度。我们可以从等效弹性性能的意义出发，找到某些微结构来对应这些中间密度。

以前，人们总是想得到清晰的“黑-白”设计，于是提出了各种各样的方法来避免灰色区域的产生，常见的有密度惩罚<sup>[30]</sup>、周长约束<sup>[31]</sup>、过滤法<sup>[32]</sup>等等。但随着具有多孔特征的超轻质材料的深入研究和广泛应用，传统的实心材料结构设计理念已经不能满足需

要，因此结构/材料一体化设计逐渐成为了研究的热点。区别于材料或结构的独立优化，结构/材料一体化优化是一个两尺度之间交互协调的过程，材料是最优结构下的最优材料，结构是最优材料下的最优结构。

在第四章，我们针对现有结构/材料一体化设计中材料微结构宏观非均匀性给制造带来的困难，提出了均一多孔材料和结构的协同优化方案。以此为极限值，我们还提出了基于子结构的两级协同优化，以讨论尺度效应并适应制造上的需要。

## 1 超轻材料的等效性能预测

类桁架材料, 蜂窝材料, 编织材料, 纤维增强材料等新材料所具有的共同特点是可以表征为如图 1.1 所示的某种微结构 (胞元, Cell) 在空间的周期性排布。评价和比较这类材料的等效性能往往需要对微观尺度上代表体元 (RVE, Representative Volume Element) 进行分析。其中, 常用的两种方法是: 均匀化方法<sup>[1]</sup> (Homogenization Method) 和代表体元法<sup>[2]</sup> (RVE Method)。

本章首先将分别介绍两种理论的基本思想和实现过程, 然后我们将对二者的关系做一些探讨。这部分的内容将是后面三章研究内容的主要理论基础和工具, 也是第二章随机性材料等效模量研究的重要比对。

### 1.1 均匀化理论及其有限元实现

均匀化理论的基本思想如图 1.2 所示: 物理场  $\phi(x)$  可以分解成宏观尺度上的一个平缓变化场和微观尺度上的一个周期变化场的叠加。这里的场量在力学问题中就是位移  $u$ , 应力  $\sigma$  和应变  $\varepsilon$ 。通过这样的分解, 由微分控制方程导出的变分方程将自动分解成两个尺度上的耦合问题, 从而实现了原问题的双尺度求解。

下面给出均匀化应用于弹性力学问题的推导过程。对于由单胞周期性排布构成的超轻材料, 设单胞尺度为  $\varepsilon (0 \leq \varepsilon \ll 1)$ , 这是一个相对宏观尺度很小的量。引入两个尺度  $x$  和  $y = x/\varepsilon$  来描述结构宏观场变量的性质, 其中  $x$  表示宏观尺度,  $y$  表示细观尺度。以  $\Omega^e$  表示材料实体部分,  $Y$  对应于一个单胞, 根据线弹性范围内的虚位移原理可得

$$\int_{\Omega^e} E_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^e} f^s v_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i v_i d\Gamma \quad (1.1)$$

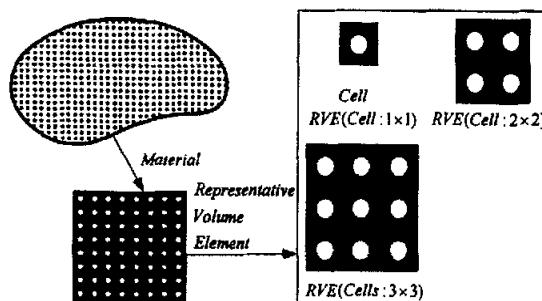


图 1.1 材料胞元, 代表体元及其表征的材料

Fig. 1.1 A kind of structured material: its cell and RVE

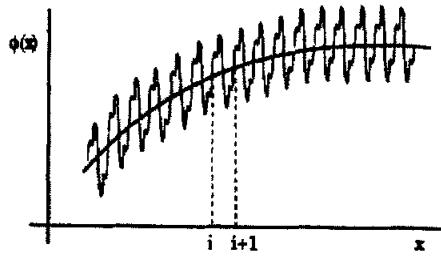
图 1.2 摆动展开: 均匀化的基本思想<sup>[2]</sup>

Fig. 1.2 Asymptotic expansion: the basic idea for homogenization

这里假设单胞内边界上无面力作用。其中,  $f_i^e$  为体积力,  $t_i$  表示作用在  $\Omega^e$  边界  $\Gamma_i$  上的外载荷,  $u^e$  为真实位移,  $v$  为满足位移边界条件的虚位移,  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ 。将位移展成关于  $\varepsilon$  的渐近级数, 从而有

$$u^e(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (1.2)$$

$$v(x) = v^0(x, y) + \varepsilon v^1(x, y) + \varepsilon^2 v^2(x, y) + \dots \quad (1.3)$$

将式(1.2)和式(1.3)代入式(1.1), 考虑

$$\frac{\partial \varphi^e(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x_j} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j} \quad \forall \varphi^e(x) = \varphi(x, y) \quad (1.4)$$

同时利用周期性边界条件, 可以得到若干不同阶次上的揆动方程。由这些揆动方程可知:  $u^0(x, y)$  与细观尺度坐标  $y$  无关, 而是具有等效材料性能的结构在外力作用下的宏观尺度位移, 因而可以表示成  $u^0(x)$ , 这个宏观位移可以由下式确定

$$\int_{\Omega^e} E_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_j} \frac{\partial v_l}{\partial x_i} d\Omega - \int_{\Omega^e} f_i v_i d\Omega - \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma = 0 \quad (1.5)$$

这里的  $E_{ijkl}^H$  是等效弹性张量, 可由下式求出

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{Y} \int_{\Omega} \left( E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^H}{\partial y_m} \right) dY \quad (1.6)$$

其中广义位移函数  $\chi_p^H$ ,  $k, l, p \in \{1, 2, 3\}$  是下列问题的周期解

$$\int_Y \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} E_{ijkl} \frac{\partial \chi_p^k}{\partial y_m} dY = \int_Y \frac{\partial v_i^1}{\partial y_j} E_{ijpm} dY \quad (1.7)$$

至此, 我们可以利用有限元技术求解(1.7)式, 并将所得广义位移函数  $\chi_p^k$  代入(1.6)式求得等效弹性矩阵。

从(1.6)式可以看到, 等效模量其实是由两部分构成的。第一部分是材料模量在胞元上的体积平均, 反映了胞元抵抗协同变形的能力。但是仅仅这部分的模量必然会高估等效模量值, 因为在强制协同变形作用和周期性边界条件的限制下, 胞元内部可以发生变形, 这部分的变形会吸引部分的能量。所以在等效模量的求解中, 有必要需要引入第二部分和胞元内部变形相关的项。

下面对两个关键列式(1.6)和(1.7)进行有限元离散, 给出均匀化求解的有限元列式。与式(1.8)对应的方程是

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \int_Y \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{D} dY \quad (1.9)$$

这里的  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{b}$  均对应于胞元有限元离散后的全部自由度。 $\mathbf{u}$  是胞元的节点位移向量,  $\mathbf{b}$  是位移/应变转换矩阵,  $\mathbf{D}$  是材料本构矩阵,  $\mathbf{k}$  是胞元的总刚度矩阵, 具体形式如

$$\mathbf{k} = \int_Y \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{b} dY \quad (1.10)$$

与式(1.6)对应的是下式, 其中  $\mathbf{D}^H$  是等效模量矩阵,  $\mathbf{I}$  是单位矩阵。

$$\mathbf{D}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{D} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) dY \quad (1.11)$$

在有限元实现中, 周期性边界条件可做如下处理(图 1.3): 四角点 $\star$ 的位移耦合相等, 对边对应节点 $\blacktriangle$ 和 $\blacksquare$ 位移分别耦合相等, 内部节点 $\circ$ 位移独立。注意到平面问题需要约束三个自由度, 位移耦合本身已经约束了旋转自由度, 只需再约束平动自由度即可。

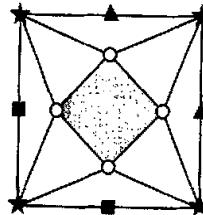


图 1.3 周期性边界条件

Fig. 1.3 Periodic boundary condition

## 1.2 代表体元法及其边界条件

代表体元法分为两个主要步骤：

1. 首先从具有微结构的材料中取出一定数量的胞元构成代表体元（如图 1.1），施以特定的边界条件求解其结构响应。常用的边界条件有：

(1). 均匀应力 (Neumann) 边界条件：如图 1.4(a)，假设均匀应力  $\bar{\sigma}$ ，则需要对代表体元边界施加力<sup>[33]</sup>

$$\mathbf{t} = \bar{\sigma} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \partial R \quad (1.12)$$

其中  $\partial R$  代表代表体元边界，这里均为张量表示。

(2). 均匀应变 (Dirichlet) 边界条件：如图 1.4(b)，假设均匀应变  $\bar{\varepsilon}$ ，则需要对代表体元边界施加强制位移

$$\mathbf{u} = \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \partial R \quad (1.13)$$

(3). 周期性 (Periodic) 边界条件：对图 1.4(c) 所示的代表体元， $A_1, A_2$  和  $B_1, B_2$  分别代表两组对边上的对应节点。分三种情况施加边界条件，其中  $s$  是代表体元的边长：

(3.a). 假设宏观应变  $\bar{\varepsilon}_x$ ：

$$v_{B1} = v_{B2}, u_{B2} - u_{B1} = \bar{\varepsilon}_x \cdot s, u_{A1} = u_{A2}, v_{A1} = v_{A2} \quad (1.14)$$

这里  $u$  和  $v$  分别代表位移矢量  $\mathbf{u}$  的两个分量。

(3.b). 假设宏观应变  $\bar{\varepsilon}_y$ ：

$$u_{A1} = u_{A2}, v_{A1} - v_{A2} = \bar{\varepsilon}_y \cdot s, u_{B1} = u_{B2}, v_{B1} = v_{B2} \quad (1.15)$$

(3.c). 假设宏观应变  $\bar{\gamma}_{xy}$ ：可以转化为对应旋转  $45^\circ$  的代表体元上一拉一压两个正交宏观应变。

$$u_{A1} = u_{A2}, v_{A1} - v_{A2} = \bar{\gamma}_{xy} / 2 \cdot s, v_{B1} = v_{B2}, u_{B1} - u_{B2} = \bar{\gamma}_{xy} / 2 \cdot s \quad (1.16)$$

2. 在应变能等效的意义下使研究的非均质材料等效为均质材料，进而利用式(1.17)确定其宏观等效性能。其中  $\mathbf{C}$  为等效刚度张量， $\mathbf{S}$  为等效柔度张量。

$$\Phi = \int_R \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} d\Omega = \bar{\varepsilon} : \mathbf{C} : \bar{\varepsilon} = \bar{\sigma} : \mathbf{S} : \bar{\sigma} \quad (1.17)$$

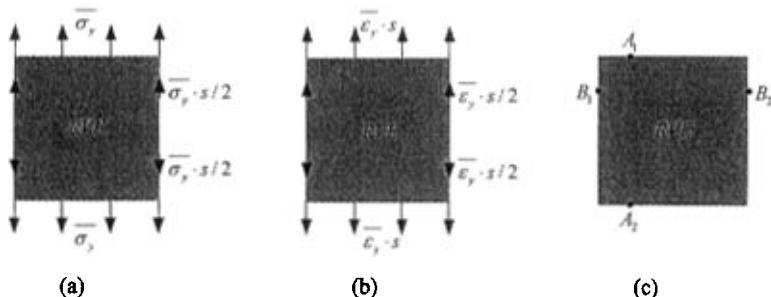


图 1.4 代表体元法的边界条件

Fig. 1.4 Boundary conditions for RVE method

### 1.3 两种方法的讨论

均匀化方法和代表体元法的实现都需要对代表体元施加一定的边界条件：均匀化方法是周期性边界条件；代表体元法则包括周期性边界条件，均匀应变（Dirichlet）边界条件和均匀应力（Neumann）边界条件。均匀化方法和周期性边界条件下代表体元法的结果是一致的。

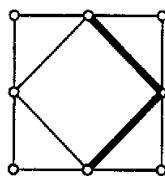


图 1.5 桁架单胞

Fig. 1.5 Truss cell

考虑图 1.5 所示的桁架类型胞元，边长取为 1.0，材料常数  $E=1.0$ ，图中两根粗杆面积取为 0.05，其他杆件为 0.01。分别应用两种方法，结果如图 1.6 所示。

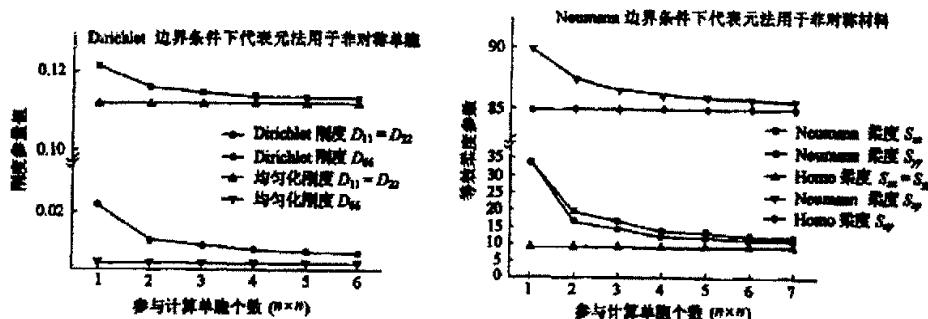
图 1.6 代表体元法的尺度效应<sup>[8]</sup>

Fig. 1.6 Scale effect in RVE method

从结果可以看到：代表体元法的预测结果呈现明显的尺度效应，随着参与计算的胞元个数的增多，Dirichlet 模量、Neumann 模量分别从上、下界逼近均匀化的结果。阎军等<sup>[8]</sup>对此现象做出了理论上的解释：

Neumann 边界条件下的单胞边界变形协调性或者 Dirichlet 边界条件下的边界节点力的平衡性，是产生尺度效应的本质原因，可以作为产生尺度效应的简单判据；并且这种不协调性或者非平衡性越大，所得结果误差也就越大。

以图 1.7 显示的 Neumann 边界条件下的胞元为例。设想将这样受力的单胞周期性排列，相邻单元边界上的节点力自然平衡。现在我们来考虑变形特征，变形图中单胞左边界向左突出，右边界向右突出，上边界向下凹，下边界向上凸。将这样变形的单胞周期性排列时，相邻单胞的变形在边界上必然出现裂隙或重迭而无法协调。因此，Neumann 模量的计算呈现明显的尺度效应。进一步的数值分析显示，随着参与计算的单胞个数的增加，边界变形的不协调性得到改善，代表体元法刚度的计算结果从下界逼近均匀化结果。

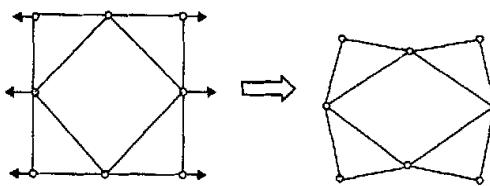


图 1.7 Neumann 边界条件下的位移不协调<sup>[8]</sup>

Fig. 1.7 Uncoordinated deformation under Neumann boundary condition

在我们后续的关于随机性材料等效模量预测的工作中，同样可以看到类似的尺度效应。我们提出的基于内部胞元能量等效的代表体元法可以减弱这种尺度效应，详细的讨论可以参见第 2 章。

## 2 微结构具有随机性的材料等效模量预测

在超轻材料制造和应用过程中，不可避免地会出现基体材料、微结构拓扑和尺寸的随机性变化。以类桁架材料和蜂窝为例，可能存在构件的缺失和变形、节点偏移、材料相对密度变化等随机因素（如图 2.1）。此时，材料的等效力学性能同确定性材料相比会发生一定的变化，需要重新进行预测。本章研究将基于蒙特卡洛模拟，这实际上是一种抽样统计的方法，在处理较复杂的随机条件时有一定优势。

本章首先以具有随机特性的类桁架材料为例，说明了计算中存在的尺度效应，比较并讨论了不同边界条件和不同统计代表体元的选择对预测结果的影响，对于代表胞元的选择也提出了建议。为了削弱边界条件和胞元选择对于结果的影响，我们提出了考虑内部胞元能量等效的代表体元法。我们试图在保留 Dirichlet 边界条件概念简单这一特点的同时，提高计算结果的精度。这一方法可以应用于各类具有周期性微结构的超轻材料在具有和不具有随机特征时的等效弹性模量预测。在数值算例中，我们选择了桁架材料和类桁架材料作为研究对象，都得到了很好的数值结果。表明我们的方法是行之有效的。

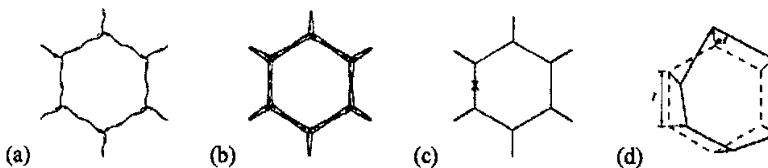


图 2.1 可能出现的随机缺陷：(a) 构件变形 (b) 构件粗细不均 (c) 构件缺失 (d) 节点偏移

Fig. 2.1 Some possible imperfections:

(a) Strut's distortion (b) Non-uniform thickness (c) Missing strut (d) Nodal dislocation

### 2.1 基于代表体元法的蒙特卡洛模拟

包含随机缺陷的材料，严格说来已经不再具有周期性微结构，无法由代表体元描述。这里引入统计代表体元的概念，它包含两组信息，材料构形和随机特征。蒙特卡洛模拟需要选取足够多的统计代表体元样本，对所有样本分别求解等效模量，并对结果进行统计得到材料等效性质。注意到这里的随机性是在周期性的基础上迭加的，其中周期性是主要部分，随机性可视作为扰动。因此对于统计代表体元样品，仍然将采用代表体元法或均匀化方法预测等效模量。

问题求解的具体步骤见图 2.2。如前文所述，均匀化方法需要施加周期性边界条件；代表体元法则包括周期性边界条件，均匀应变（Dirichlet）边界条件或均匀应力（Neumann）边界条件。均匀化方法和周期性边界条件下代表体元法的结果是一致的。因此，对于两种方法的讨论可以归结为不同边界下代表体元法的讨论。

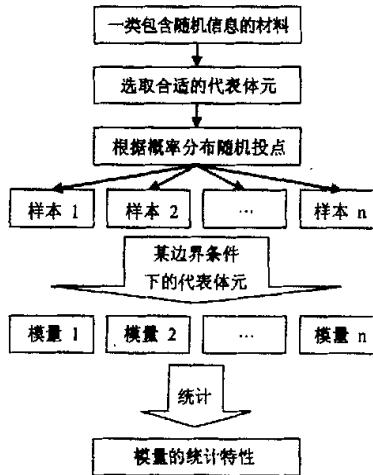


图 2.2 基于代表体元法的蒙特卡洛模拟

Fig. 2.2 RVE-based Monte Carlo Simulation

## 2.2 不同边界条件的数值比较

对于确定性材料<sup>[8]</sup>，周期性边界条件能够更好地模拟代表体元的边界，结果不依赖于代表体元的选取；而 Neumann 边界和 Dirichlet 边界却依赖于代表体元的大小，只能逼近周期性边界条件的解。但是，由于概念清晰并且实现简单，这两种边界仍被广泛应用于非均质材料的等效弹性模量求解<sup>[34-36]</sup>，弹塑性<sup>[33]</sup>，粘弹性<sup>[37]</sup>性能分析。

如果考虑随机因素，文献中<sup>[15, 38]</sup>往往直接由确定性材料的结论推广，认为周期性边界条件更优，缺乏数值论证。事实上，由于随机因素破坏了材料的周期性，二者并不能直接等同。此外，Zhu<sup>[38]</sup>认为周期性边界条件下统计模量均值几乎没有变化。

下面将通过数值算例讨论不同边界条件对于随机性材料等效模量预测结果的影响。由于文献中<sup>[39]</sup>已经给出结论：对于一般的刚性微结构，Dirichlet 边界条件比 Neumann 边界条件要好。因此，本文主要将比较周期性边界条件和 Dirichlet 边界条件。

### 2.2.1 数值算例和结果

考虑如图 2.3 所示的蜂窝材料， $L = 1$ ， $b = 0.075$ ， $H = 1$ 。由于代表体元法和均匀化方法都是将材料等效为均匀介质，因而计算与微结构的绝对尺度无关，所以这里的尺寸信息都是无量纲的。基体材料的杨氏模量  $E = 210 \times 10^9 \text{ GPa}$ ，泊松比  $\mu = 0.3$ 。各构件的材料均有 30% 的可能性削弱为  $E' = 210 \times 10^6 \text{ GPa}$ 。图 2.3 同时显示了两种胞元的选择，它们的最大区别在于：胞元 I 的边界上存在离散构件，而胞元 II 的边界只存在节点。

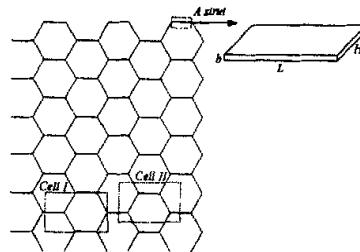


图 2.3 蜂窝材料面内性能计算模型

Fig. 2.3 Computational model for in-plane properties of honeycomb

按照图 2.2 步骤实现蒙特卡洛模拟, 统计得到两种胞元分别在周期性边界和 Dirichlet 边界下的等效模量均值, 结果显示在图 2.4 和图 2.5 中。图中横坐标是统计代表体元在一个方向上包含的胞元数目, 例如 3 代表所选择的统计代表体元包含  $3 \times 3 = 9$  个胞元; 纵坐标代表所求的等效模量均值。由于  $\sigma$  和  $\epsilon$  的对称性, 本构张量  $\mathbf{C}$  的矩阵表示在二维问题中可以退化为  $3 \times 3$  的矩阵  $\mathbf{D}$ 。本章中  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{33}$  分别表示两个方向的杨氏模量和剪切模量。

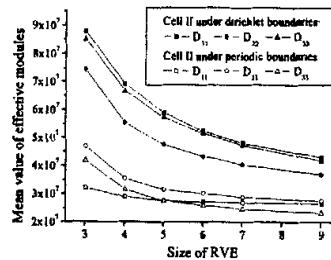


图 2.4 胞元II在不同边界条件下的等效模量均值

Fig. 2.4 Mean value of effective modules for cell II under different boundaries

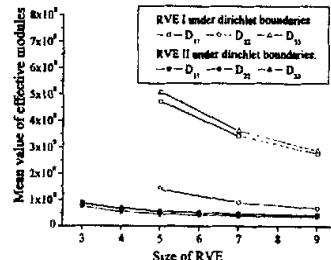


图 2.5 不同胞元在Dirichlet边界条件下的等效模量均值

Fig. 2.5 Mean value of effective modules for different cells under Dirichlet boundaries

图 2.4 显示了胞元 II 分别采用 Dirichlet 边界和周期性边界的结果。可以看到：

(1). 随着统计代表体元的增大，六条折线都不断下降，并且逐渐趋于稳定。这就表明：Dirichlet 边界条件下的结果依赖于统计代表体元的大小，即具有尺度效应；不同于确定性材料和 Zhu<sup>[38]</sup>的结论，周期性边界条件在求解随机性材料的等效弹性性能时同样具有尺度效应。

(2). 周期性边界的结果相对于 Dirichlet 边界的结果，随着统计代表体元增大变化较小，相对更稳定。因此，尽管存在尺度效应，周期性边界条件在求解随机性问题时仍然优于 Dirichlet 边界条件。

图 2.5 显示了对于不同胞元 Cell I 和 Cell II，均采用 Dirichlet 边界条件的结果。可以看到：胞元 I 的结果随着统计代表体元增大的变化量要远大于胞元 II 的结果，即胞元 I 的结果相对更不稳定，因此较差。

我们还考虑了蜂窝和桁架微结构分别具有节点偏移和构件缺失两种随机因素的情况，都得到了和本例题类似的数值现象。在下文中，我们会对这些现象给出总结和解释。

## 2.2.2 数值现象的讨论和结论

1. 对随机性材料，周期性边界条件下等效模量均值结果依赖于统计代表体元大小。

结果是否依赖于代表体元的大小，取决于施加的边界条件能否与实际情况吻合。对于确定性材料，微结构在空间周期性排布，周期性边界条件能够很好的描述这一特点，因而结果与代表体元选取无关。而 Dirichlet 和 Neumann 边界条件，不能同时满足边界节点上位移和力的相容性，因而具有一定的强制性<sup>[8]</sup>。这种不合理性的影响会随着代表体元的增大（周长和面积的比值不断降低），而逐渐被削弱。反映在数值结果上，逐渐趋于稳定并趋近某一极限值。对于随机性材料，微结构在空间上的周期性已经被破坏，此时周期性边界条件已经无法准确描述统计代表体元样本的实际边界。因此周期性边界条件对于随机性的问题不再是完全合理的，具有尺度效应。

2. 对于随机性材料，周期性边界条件仍然优于 Dirichlet 边界条件。

3. 采用 Dirichlet 边界条件时，应当避免胞元边界存在离散构件。

胞元 I 和胞元 II 均采用 Dirichlet 边界条件，结果相差却很大。二者的主要区别是胞元 I 在边界上存在离散构件。由于 Dirichlet 条件对边界节点施加了强制性位移约束，从而强制确定了边界上离散构件的变形。因此，不尽合理的边界对边界离散构件的影响会很大，直接影响了最终的结果。避免这种情况的一种办法必须尽可能的选择边界无离散构件的胞元，然而在某些情况下这是困难的。下文提出的考虑内部胞元能量等效的代表体元方法能够有效地削弱边界条件和边界离散构件的影响。

## 2.3 考虑内部胞元能量等效的代表体元法

由上文的分析可以看到: Dirichlet 条件对边界施加了更具有强制性的约束, 导致其等效模量均值结果和周期性条件的结果相差很大。而且为了得到较好的结果, 还需要选择不含边界离散构件的胞元, 有时这是比较困难的。尽管存在这两个困难, Dirichlet 条件还是因为其清晰简单的优点被广泛应用<sup>[33-37]</sup>。我们希望能在不增加额外工作量的前提下, 改善其计算结果。即在较小的代表体元选取下得到较大代表体元才能得到的结果, 从而提高计算效率。

代表体元法的尺度效应源于边界条件不能精确地描述代表体元边界 的实际情况, 从而具有一定的强制性。如果我们能对分析对象削弱这种强制性, 就有望获得比较好的结果。

考虑内部胞元能量等效的代表体元法的基本思路是(见图 2.6): 在进行第一步分析时考虑包含胞元数目较多的整个代表体元; 而在进行能量等效求解模量时, 忽略离边界较近的胞元, 而只考虑处于代表体元中心的部分胞元。对于这个胞元集, 他们的变形是由整体分析得到的。对于整个代表体元而言, 不满足实际情况的边界条件不可避免, 但是类似于“圣维南原理”, 这种边界条件的缺点可以被外层胞元在一定程度上削弱, 从而为内部胞元集建立起足够自然的边界条件, 有效改善数值结果。

下面给出本方法应用于确定性材料和随机性材料的数值算例, 进一步验证方法的有效性。

### 2.3.1 应用于确定性材料的等效模量求解

考虑图 2.7 所示的桁架类型胞元, 材料常数  $E=210 \times 10^9 \text{ GPa}$ , 面积尺寸分别为:  $A_1=0.05, A_2=0.4, A_3=0.04, A_4=0.06, A_5=0.12, A_6=0.08$ 。

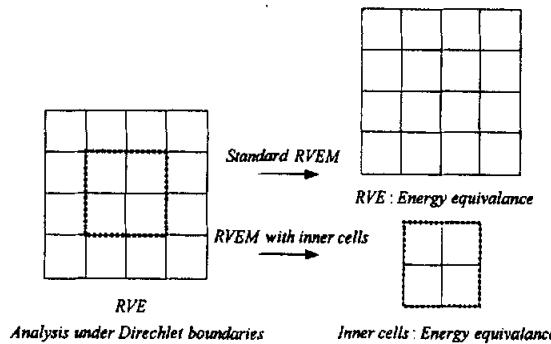


图 2.6 考虑内部胞元能量等效的代表体元法

Fig. 2.6 RVEM with inner cells

图 2.8 (a) 给出了改进代表体元法在固定内部胞元集大小为  $2 \times 2$ ，随着代表体元大小变化的结果。可以看到：周期性边界条件的结果随着代表体元的增大不变，即不存在尺度效应；标准 Dirichlet 边界下的结果随着代表体元的增大逐渐逼近周期性边界的结果；采用改进代表体元法后，即便使用很小的代表体元，也能够获得非常接近于周期性边界的结果。

考虑内部胞元能量等效的代表体元法的引入有效地提高了计算效率。因为在标准 Dirichlet 边界下，为了得到较好的结果往往需要选择很大的代表体元，其对应的计算量也是很大的。采用改进算法后，结果的改善意味着无需计算很大的代表体元便能获取较理想的结果，实际上减少了计算量。

图 2.8 (b) 给出了改进代表体元法在固定代表体元大小为  $15 \times 15$ ，变化内部胞元集大小的结果，当内部胞元集为  $15 \times 15$  时则退化为标准代表体元法。可以看到：随着内部胞元集的不断缩小，边界条件的影响逐步被更多的外层胞元所削弱，从而结果更接近于周期性边界下的解。

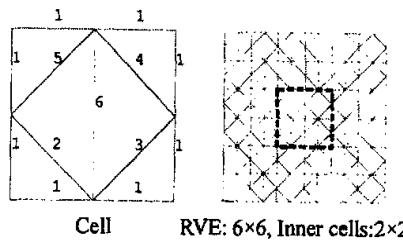
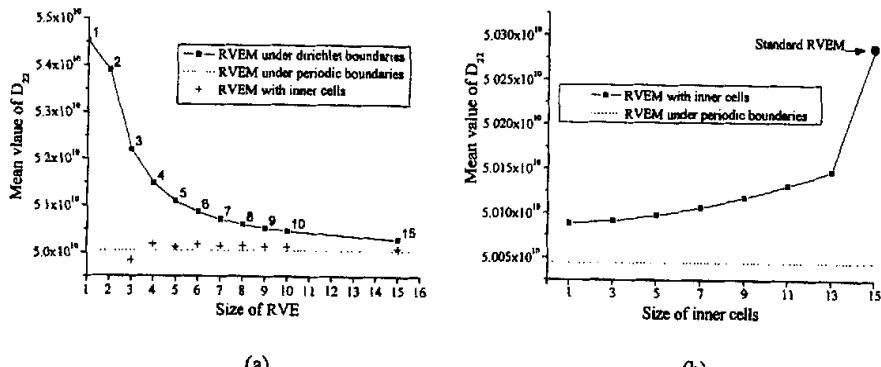


图 2.7 具有桁架微结构的材料

Fig. 2.7 Material with truss micro-structure



(a)

(b)

图 2.8 数值结果

Fig. 2.8 Numerical results

### 2.3.2 应用于随机性材料的等效模量求解

对于随机性材料的等效模量预测，需要对每一个样本使用改进的代表体元法。数值算例仍然考虑 3.1 中的材料和随机信息。为了得到比较好的结果，此问题需要采样 3000 到 5000 次。为保证可比性，对同样大小的统计代表体元采用改进方法和标准方法将使用相同的样本数。

图 2.9 分别给出了胞元 I 和胞元 II 采用改进方法前后的结果比较。等效模量均值结果在不同程度上得到了改善，其中胞元 I 尤为显著。这是由于胞元 I 边界上的离散构件对于标准代表体元计算结果影响很大，改进方法不计入外层胞元的能量，从而有效避免了这部分因素的影响，结果可以得到非常显著的改善。即便对于胞元 II，从结果中也可以看到用  $5 \times 5$  的 RVE 就几乎得到了标准算法中  $9 \times 9$  的 RVE 才能获取的结果。由于样本数目比较多，且较小 RVE 单次计算耗时少，改进方法可以节省较多的计算量。

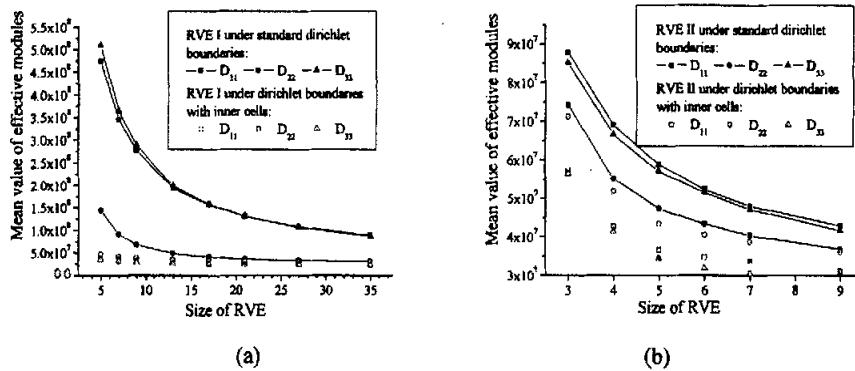


图 2.9 改进算法和标准 Dirichlet 边界条件的比较

Fig. 2.9 Comparison of improved RVEM and standard RVEM under Dirichlet boundaries

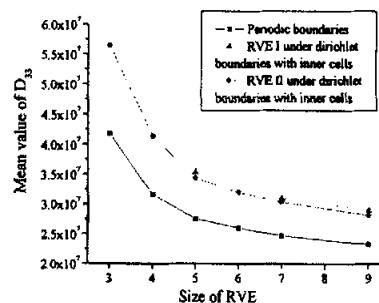


图 2.10 改进算法和周期性边界条件的比较

Fig. 2.10 Comparison of improved RVEM and RVEM under periodic boundaries

图 2.10 给出了考虑改进代表体元法和周期性边界条件下的代表体元法的比较, 这里以  $D_{33}$  为例, 其他结果有类似的趋势。采用改进代表体元法后, 胞元 I 和胞元 II 的结果非常接近, 即胞元选择的影响 (见图 2.5) 基本被消除了; 改进算法的结果相对标准算法 (对比图 2.4) 更加接近于周期性边界条件的结果。尽管周期性条件的结果仍然相对较优, 但是综合考虑到 Dirichlet 边界实现简单的优势, 改进的 Dirichlet 边界实现方法仍然具有应用价值。

### 2.3.3 小结

考虑内部胞元能量等效的代表体元法, 基于 Dirichlet 边界条件的代表体元分析, 而仅对内部胞元集合作能量等效。方法继承了 Dirichlet 边界条件概念清晰和实现简单的特点, 并且通过不计入外层胞元能量的办法有效削弱了强制边界条件和不同胞元选择对于结果的影响。确定性材料和随机性材料的数值算例表明: 改进算法采用较小的代表体元能够得到标准算法中较大代表体元的结果, 从而直接提高了计算效率。综合考虑计算结果和实现过程, 方法可以有效应用于确定性和随机性超轻质材料的等效模量预测。进一步工作可以推广到非均值材料弹塑性、粘弹性性能的研究。

## 2.4 结论

本章对于包含随机缺陷的超轻质材料等效模量预测问题, 讨论了不同边界条件对于结果的影响, 得到了以下结论:

- (1). 与确定性问题相区别, 采用周期性边界条件下的代表体元法, 结果和统计代表体元的大小相关。随着统计代表体元增大, 结果逐渐趋于稳定。
- (2). 周期性边界条件仍然优于 Dirichlet 边界条件, 但 Dirichlet 边界条件的实现相对简单。而且, 对同样的一个代表体元, 周期性边界条件破坏了单元总刚度阵的带状特征, 因此求解计算的工作量大于 Dirichlet 边界条件。
- (3). 采用标准 Dirichlet 边界条件时, 应当避免选择边界存在离散构件的胞元, 即胞元的选择对于结果的影响可能非常大。

为了削弱 Dirichlet 边界条件在计算结果和依赖胞元选择方面的劣势, 本章提出了考虑内部胞元能量等效的代表体元法。该方法不计入靠近边界的胞元能量, 能够有效削弱边界条件对于结果的影响, 在同样的精度要求下节省了计算工作量。同时不增加额外的求解步骤, 从而继承了 Dirichlet 边界条件实现简单的优点。数值算例验证了方法的有效性。

### 3 类桁架材料的二维结构弹塑性分析

类桁架材料由于其卓越的比力学性能和多功能性，逐渐成为了研究的热点，具有广泛的应用前景。将类桁架材料构成的结构应用于实际工程时，面临的荷载环境多种多样，材料构件很有可能进入塑性。如果对每根构件都进行精确建模和计算，材料单胞的空间致密性将导致非常大的工作量。因此，发展快速等效求解方法是非常必要的，尤其当作为优化/可靠度求解的分析工具时，这一需求显得尤为突出。

由于类桁架材料单个构件的长细比较大，可简化为桁架模型。Wallach 等<sup>[13]</sup>对比了杆模型和梁模型，发现误差仅有 1.4%。本章将沿用这一简化，将类桁架单胞作为桁架模型处理。这一方面减少了有限元计算的自由度；另一方面由于杆单元处于单应力状态，实质上降低了弹塑性算法的复杂度。

利用微单胞空间周期分布的特点，可以构建宏微观两个尺度上的协同分析模型。Terada 和 Kikuchi 对于连续体单胞提出了基于数值均匀化的弹塑性算法<sup>[21]</sup>，并且讨论了其并行实现<sup>[22]</sup>。我们将这一理论应用于类桁架材料构成结构的弹塑性分析问题，给出了宏微观两级求解格式。原问题转化为宏观上一个非线性弹性连续体计算问题和微观上多个小规模桁架的弹塑性计算问题，从而能够在保证精度的前提下有效提高计算效率。

#### 3.1 基于数值均匀化的类桁架材料结构弹塑性分析

图 3.1 所示的超轻质结构，基于数值均匀化的弹塑性求解方法将问题分为两级：宏观尺度计算等效连续体结构，参考系为  $x_1 - x_2$ ；微观尺度计算材料代表体元，参考系为  $y_1 - y_2$ 。这两级尺度之间通过定义宏观应力  $\Sigma$  和宏观应变  $E$  分别为微观应力  $\sigma$  和微观应变  $\epsilon$  在代表体元 (RVE) 上的体积平均来建立联系：

变  $\epsilon$  在代表体元 (RVE) 上的体积平均来建立联系：

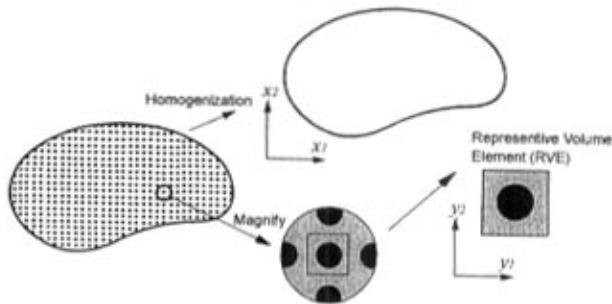


图 3.1 超轻质材料构成的结构  
Fig. 3.1 A structure composed of ultra-light material

$$\Sigma = \frac{1}{|Y|} \int \sigma dy, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{|Y|} \int \epsilon dy \quad (3.1)$$

这里  $Y$  是指微观计算的代表体元域,  $|Y|$  表示域面积。式(3.1)区别于数学均匀化中将物理量作小参数展开来建立宏微观联系的做法。将此式和一般弹塑性求解方程联立, 可以得到两个尺度上非线性的问题:

1. 宏观尺度: 宏观结构在约束和荷载作用下的一个非线性弹性问题(3.2)-(3.4)。主要物理量包括: 宏观结构变形  $\mathbf{U}$ , 宏观应力  $\Sigma$ , 宏观应变  $\mathbf{E}$ , 材料宏观等效模量  $\mathbf{D}$ , 体力  $\bar{\mathbf{T}}$ , 面力  $\bar{\mathbf{t}}$ , 弹性变形能  $\phi$ ; 位移变分  $\eta$ , 宏观应力变分  $\mathbf{T}$ , 宏观应变变分  $\Gamma$ 。

$$\int_{\Omega} \nabla_x \eta : \Sigma(x) dx = \int_{\Omega} \eta \cdot \bar{\mathbf{T}} dx + \int_{\Gamma} \eta \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3.2)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : (\text{sym}(\nabla_x \mathbf{U}) - \mathbf{E}(x)) dx = 0 \quad (3.3)$$

$$\int_{\Omega} \Gamma : \left( \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial \phi(x, \bar{\epsilon}^i)}{\partial \epsilon} dy \right] - \Sigma(x) \right) dx = 0 \quad (3.4)$$

材料在这个尺度上被等效为连续介质, 可以采用常规连续体数值方法计算。但是, 由于弹塑性问题的特点, 等效材料模量  $\mathbf{D}$ (即  $\Sigma$  和  $\mathbf{E}$  的关系)在空间上是变化的, 而且需要基于分析点(有限元计算中取为宏观单元的高斯点)处单胞的微观求解得到。宏观分析传递给微观分析的信息是分析点的当前宏观应变  $\mathbf{E}$ 。非线性求解采用 Newton-Raphson 迭代,  $i$  是宏观迭代步指标, 对应的物理量记为  $\bullet^i$ 。

2. 微观尺度: 桁架微单胞在周期性边界条件及给定的宏观应变  $\mathbf{E}_i$  下, 单胞强制协同变形放松过程中的弹塑性问题(3.5)-(3.7)。微观分析传递给宏观分析的信息是分析点处的当前宏观应力  $\Sigma$  和均匀化得到的当前材料等效模量  $\mathbf{D}$ 。主要物理量包括: 各杆件杨氏模量  $\mu$ , 屈服应力  $\sigma_y$ , 位移  $\mathbf{u}$ , 应力  $\sigma$ , 应变  $\epsilon$ , 杆向应力  $\bar{\sigma}$ , 杆向应变  $\bar{\epsilon}$ , 杆向弹性应变  $\bar{\epsilon}^i$ ; 第  $k$  ( $k = 1, \dots, N$ ) 杆对应的物理量记为  $\bullet_k^i$ ,  $N$  为代表体元的杆件总数。

$$\sum_{k=1, \dots, N} \mathbf{b}_k^T \cdot \sigma_k^i = 0 \quad (3.5)$$

$$\epsilon_k^i = \mathbf{E}^i + \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{u}_k^i \quad (3.6)$$

$$\bar{\sigma}_k^i = \frac{\partial \phi_k(x, \bar{\epsilon}_k^i)}{\partial \epsilon} \quad (3.7)$$

$$\{\bar{\sigma}_k, 0, 0\}^T = \mathbf{P}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_k \quad (3.8)$$

$$\{\bar{\varepsilon}_k, 0, 0\}^T = \mathbf{Q}_k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (3.9)$$

式(3.8)和(3.9)分别建立了杆向应力应变向二维总体坐标系的转化, 其中

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} cc & ss & 2cs \\ ss & cc & -2cs \\ -cs & cs & cc - ss \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} cc & ss & cs \\ ss & cc & -cs \\ -2cs & 2cs & cc - ss \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{L_k} \cdot \begin{bmatrix} -c^3 & -c^2s & c^3 & c^2s \\ -cs^2 & -s^3 & cs^2 & s^3 \\ -2c^2s & -2cs^2 & 2c^2s & 2cs^2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

式中 $\theta$ 是杆件 $k$ 和 $y_1$ 坐标轴的夹角,  $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$ ,  $L_k$ 表示杆件的长度。

微观非线性求解同样采用 Newton-Raphson 迭代,  $j$ 是微观 Newton-Raphson 迭代步指标, 给定 $\mathbf{E}'$ 下第 $j$ 微观迭代步所对应的物理量记为 $\bullet^{i,j}$ 。将(3.5)作泰勒展开及整理:

$$\sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_k^{i,j+1} = \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_k^{i,j} + \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_k^{i,j}}{\partial \mathbf{e}_k^{i,j}} \cdot \mathbf{b}_k \cdot \Delta \mathbf{u}_k^{i,j} = 0 \quad (3.13)$$

联合坐标转换式(3.8)和(3.9)可以得到:

$$\sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \mathbf{d}_k^{i,j} \cdot \mathbf{b}_k \cdot \Delta \mathbf{u}_k^{i,j} = -\sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_k^{i,j} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{d}_k^{i,j} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_k^{i,j}}{\partial \mathbf{e}_k^{i,j}} = \mu_k^{i,j} \cdot \begin{bmatrix} c^4 & c^2s^2 & c^3s \\ c^2s^2 & s^4 & cs^3 \\ c^3s & cs^3 & c^2s^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

由式(3.5)可知: 微观问题的终点实际上是微观结构的应力自平衡, 下面讨论这个问题的起始驱动。式(3.14)中 $j=0$ 时,  $\mathbf{u}_k^{i,0}=0$ , 右端项

$$-\sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_k^{i,0} = -\sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \mathbf{d}_k^{i,0} \cdot (\mathbf{E}' + \mathbf{b}_k \cdot \mathbf{u}_k^{i,0}) = -\sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \mathbf{d}_k^{i-1} \cdot \mathbf{E}' \quad (3.16)$$

其中  $\mathbf{d}_k^{i-1} = \mathbf{d}_k^{i,0}$  是给定  $\mathbf{E}^{i-1}$  下微观迭代终点的模量值，也是当前微观迭代的模量初始值。

式(3.16)代表了微观迭代的初始驱动力，就是强迫微结构发生整体宏观应变  $\mathbf{E}^i$  时需要施加力的负值。因此可以说，宏观计算结果  $\mathbf{E}^i$  驱动了微观计算。

3. 宏微观联系：联系宏微观的一个重要步骤是超轻质材料在分析点（高斯点）上等效弹性模量求解。一般列式可参考阎军等的工作<sup>[8]</sup>，简要步骤是：首先求解一组（平面问题是三个）在周期性边界条件约束下，作用单胞强制协同变形载荷的弹性问题

$$\left( \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \mathbf{d}_k^i \cdot \mathbf{b}_k \right) \cdot \chi^i = \sum_k \mathbf{b}_k^T \cdot \mathbf{d}_k^i \quad (3.17)$$

结合周期性边界条件求解方程(3.17)，代入下式求解等效弹性模量

$$\mathbf{D}^i = \frac{\sum_k [(\mathbf{d}_k^i - \mathbf{d}_k^i \cdot \mathbf{b}_k \cdot \chi_k^i) \cdot L_k \cdot A_k]}{\sum_k (L_k \cdot A_k)} \quad (3.18)$$

这里  $\mathbf{D}^i$  是第  $i$  个迭代步时某分析点的弹性模量矩阵， $\mathbf{d}_k^i$  是第  $i$  个迭代步时某分析点胞元中第  $k$  根杆件的模量值， $L_k$  和  $A_k$  分别表示杆件的长度和面积， $\mathbf{b}_k$  已在(3.12)中定义。

需要指出的是， $\mathbf{D}^i$  的求解和  $\mathbf{d}_k^i$  的取值密切相关，而  $\mathbf{d}_k^i$  是分析点在给定宏观应变下的微观迭代的杆件模量终点值，是非线性求解中的切线弹性模量，随分析点不同而不同，随加载步不同而不同。因此，在每一个迭代步时，对于每一个分析点，都需要进行(3.17)和(3.18)的求解，得到等效模量矩阵，代入宏观问题进行下一步求解。得到各点宏观应变后，继续对所有分析点进行微观迭代求解，再得到各点的等效模量，如此往复。

基于宏微观两个尺度非线性问题的分解和联系，整个问题的求解转化为宏观尺度上一个连续体的非线性弹性问题和微观尺度上一组定义在分析点上的小规模弹塑性问题。这个过程尽管需要求解一个两层次的迭代，但是效率仍然要比完全结构弹塑性分析高的多。

图 3.2 给出了整个求解过程的流程图，空间采用有限元离散。其中迭代终止时物理量记做 $\bullet^{\text{conv}}$ ：宏观计算相关量包括：单元形函数  $\mathbf{N}$ ，结构反力  $\mathbf{F}^{\text{Reaction}}$ ，初始宏观节点力向量  $\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{T}} dx + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma$ ，总刚度矩阵  $\mathbf{K}$ ；微观杆系有限元计算相关量包括：单元形函数  $\mathbf{n}$ ，节点力向量  $\mathbf{f}$ ，模量矩阵  $\mathbf{d}$ ，几何矩阵  $\mathbf{b}$ 。

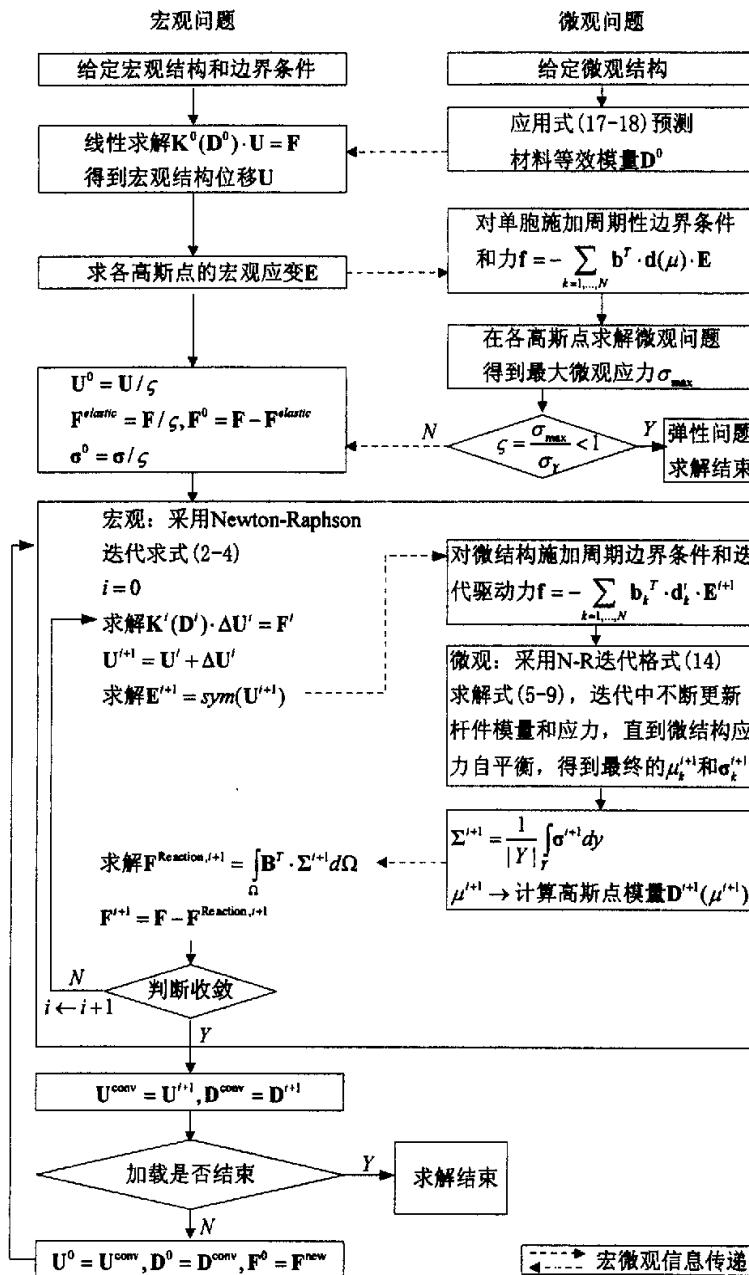


图 3.2 基于数值均匀化的类桁架材料结构弹塑性求解框图

Fig. 3.2 Flowchart for elasto-plastic analysis of structures with truss-like materials

### 3.2 数值算例 1

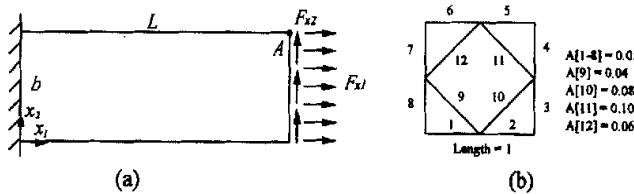


图 3.3 类桁架材料构成的悬臂梁:

(a) 宏观结构和边界条件; (b) 代表单胞的构形、尺寸和截面积

Fig. 3.3 A cantilever composed of truss-like material:

(a) Macro-structure and boundary conditions; (b) Micro-structure composed of bars

首先考虑一个如图 3.3 (a) 所示的悬臂梁, 梁长  $L = 1m$ , 高  $b = 0.4m$ 。我们的计算对象是类桁架材料作为桁架简化后的模型, 单胞形式和各构件的面积尺寸如图 3.3 (b) 所示。由于均匀化方法基于单胞无限小的假设, 计算过程与单胞的实际尺寸无关, 因此这里单胞尺寸是无量纲的。与此相区别的是, 如果考虑稳定性问题, 单胞尺寸及代表体元的选取将对结果产生影响。杆件材料的本构模型设为双线性及随动强化模型, 弹性阶段模量  $E_e = 210*10^9 Pa$ , 塑性阶段模量  $E_p = 90*10^9 Pa$ , 屈服应力  $\sigma_y = 6*10^8 Pa$ 。宏观结构采用四边形八节点单元离散, 网格划分见图 3.4, 网格数为  $10 \times 8$ ; 微观部分采用杆单元。

#### 3.2.1 简单加载下的计算精度和效率

首先考虑右端均布载荷  $F_{x1} = 10^8 N$ 。作为数值比较, 使用 ANSYS 计算具有图 3.3 (b) 单胞构形的实际结构。以图 3.5 为例, 此实际结构由  $20 \times 8$  个单胞空间周期排布形成。需要注意实际结构中单胞数目变化时, 要保证其体分比和图 3.3 (b) 中的微观结构一致。

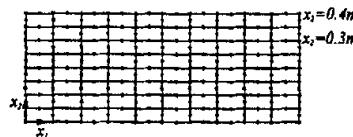


图 3.4 宏观结构离散

Fig. 3.4 FE discretization of the macro-structure

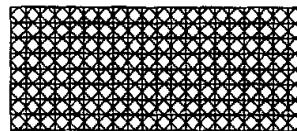


图 3.5 ANSYS 计算模型

Fig. 3.5 Computational model for ANSYS

表 3.1 *A* 节点的位移比较 (10-3 m)Tab. 3.1 Comparison of displacement results at node *A* (10-3 m)

	Mesh/Cells	Number of Freedoms	<i>u</i>	<i>v</i>	Time (s)
Numerical Homogenization	10x8 [9 Gauss points]	554	4.74874	-0.74711	6
	10x8 [4 Gauss points]	554	4.75008	-0.75476	4
	10x8 [RVE II]	554	4.74994	-0.75384	8
Complete computation by ANSYS	300x120	217682	4.71321	-0.71349	268
	200x80	97122	4.69672	-0.70508	60
	100x40	24562	4.64474	-0.68055	24
	50x20	6282	4.53891	-0.63139	10

表 3.1 列出了我们结果和 ANSYS 计算的实际结构在 *A* 点的位移结果和求解耗时(微机性能: Pentium 2.4G; 768M 内存) 的比较。其中 RVE II 表示选择四个如图 3.3 (b) 所示的单胞作为代表体元的数值结果。尽管算法依赖于高斯点处的分析计算, 但是从表 3.1 可以看到: 计算结果对单元内高斯点数目并不敏感; 代表体元的选取对于结果影响很小。

由于均匀化理论基于单胞无限小的假设, 因而实际结构中单胞尺度相对宏观结构越小, 其计算结果应当越趋近于均匀化的数值结果。表 3.1 的数据表明: ANSYS 的结果随着实际结构单胞数目的增多, 也就是单胞绝对尺度减小, 逐渐趋近于本章的数值均匀化结果。而同时, 等效计算在求解时间上的效益也迅速增加。因此, 具有空间周期排布桁架类单胞的结构, 尤其当单胞数目较多时, 采用基于数值均匀化的弹塑性计算, 耗时少, 并且能够达到较高精度。

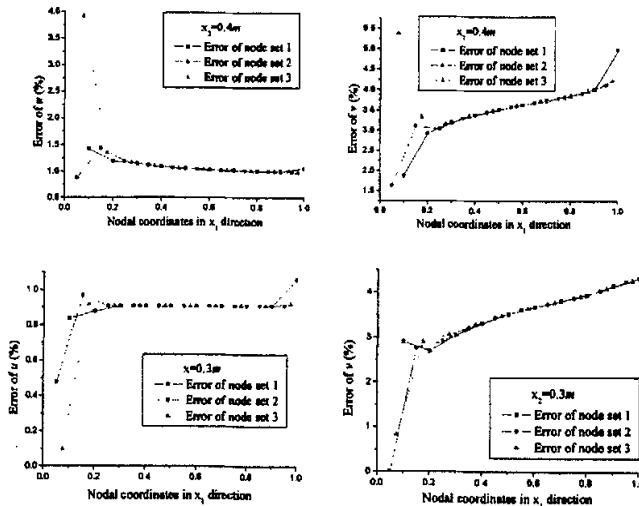


图 3.6 位移误差曲线

Fig. 3.6 Error curves of the displacement results

图 3.6 给出了两种计算方法在  $x_2 = 0.4m$  (即梁上边界) 和  $x_2 = 0.3m$  处 (见图 3.4) 多个点的位移误差结果: 第一组是单元中间节点; 第二组是单元角节点; 第三组是非单元节点。误差基本在同一水平上。图 3.7 给出了杆件 3 在加载结束时的应力分布比较。

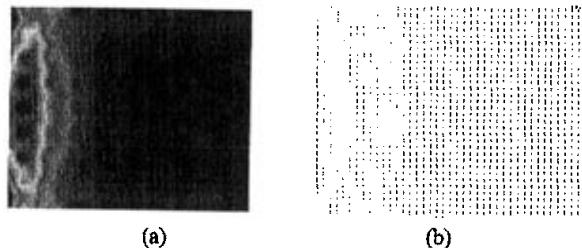


图 3.7 杆件 3 的应力分布  
(a) 数值均匀化结果; (b) 实际结构 ANSYS 结果  
Fig. 3.7 Stress distribution of bar 3  
(a) by Homogenization; (b) by ANSYS

### 3.2.2 宏观网格划分的影响

图 3.5 的宏观网格划分非常规则, 而与之比较的实际结构的单胞同样是方形。这样, 每个单元总可以对应于实际结构中一些单胞的组合。去除这样的巧合是否会对结果产生影响? 考虑图 3.8 中的两种单元划分, 节点 A 的位移结果和计算耗时比较见表 3.2。可以看到, 宏观网格划分对于结果的影响很小。在工作量方面, 宏观网格划分将影响到宏观计算的自由度和微观计算的次数, 求解时间略有差别, 但都保持在较低的水平上。

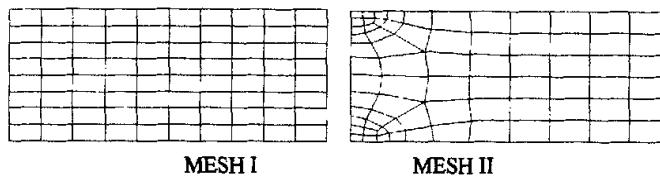


图 3.8 宏观单元划分  
Fig. 3.8 Different FE meshes of macro-structure

表 3.2 不同网格下节点 A 的位移和求解耗时比较

Tab. 3.2 Comparison of displacement results at node A and time consumption using different meshes

The number of Elements	The number of Nodes	$u (10^{-3} m)$	$v (10^{-3} m)$	Time (s)
MESH I	277	4.74735	-0.74619	4
MESH II	257	4.74479	-0.72493	3

### 3.2.3 加卸载问题

下面考虑卸载和再加载的问题，分别定义三个载荷步： $f_1: F_{x1} = 10^8 N$ ， $f_2: F_{x1} = 0$ ， $f_3: F_{x1} = -5 \times 10^7 N$ ，顺序加载。我们的数值结果（单元数目  $10 \times 8$ 、9 高斯点）和 ANSYS 实际结构的结果（单胞数目  $200 \times 80$  和  $100 \times 40$ ）的比较见表 3.3。可以看到，基于数值均匀化的弹塑性求解方法可以高效而较精确地处理此类非单调加载问题。

表 3.3 不同加载历史下节点 A 的位移比较 ( $10^{-3} m$ )

Tab. 3.3 Displacement results at node A under different loading histories

	$f_1$		$f_1 \rightarrow f_2$		$f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$	
	$u$	$v$	$u$	$v$	$u$	$v$
Numerical Homogenization [Mesh: 10x8]	4.76866	-0.78911	1.13816	-0.31924	-0.68633	-0.05872
Complete computation [Cells: 200x80]	4.69675	-0.70508	1.09675	-0.24334	-0.70853	-0.03723
Complete computation [Cells: 100x40]	4.64472	-0.68055	1.07522	-0.22773	-0.71480	-0.05511

### 3.2.4 不同加载路径的问题

图 3.9 显示了三种不同的加载路径  $R_k$  ( $k=1,2,3$ )，分别使结构由不受外力到最终受荷载组合  $F_{x1} = 8 \times 10^7 N$ ， $F_{x2} = 2 \times 10^6 N$ 。分别使用数值均匀化方法计算这三种加载路径下的弹塑性问题，并且与实际结构计算结果进行比较，结果如表 3.4 所示。可以看到，不同加载路径得到了不同的结构响应，且与 ANSYS 计算的实际结构结果符合较好。

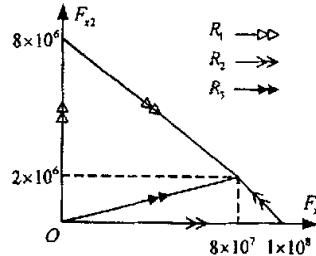


图 3.9 不同加载路径

Fig. 3.9 Different loading routine

表 3.4 不同加载路径下 A 点位移结果比较 ( $10^{-3} m$ )

Tab. 3.4 Comparison of displacement results at node A under different loading routines

	$R_1$		$R_2$		$R_3$	
	$u$	$v$	$u$	$v$	$u$	$v$
Numerical Homogenization [Mesh: 10x8]	2.29257	1.99857	2.55988	1.66562	2.30635	1.95173
Complete computation [Cells: 200x80]	2.28079	1.96047	2.54053	1.64277	2.29435	1.91326
Complete computation [Cells: 100x40]	2.27041	1.91683	2.52265	1.61314	2.28345	1.87161

### 3.2.5 算法适用范围的讨论

由于均匀化理论基于单胞无限小的假设, 实际结构的计算只可能随着单胞尺度相对宏观结构尺度比值的减小而逐渐逼近均匀化的解答。下面讨论在一定精度要求下, 本章计算格式的适用性问题。

在 3.1 的题设条件下, 采用宏观网格  $10 \times 8$  和单元高斯点数为 9 的数值结果作为数值均匀化的基本结果, 将  $A$  点  $x_1$  方向位移  $u$  作为数值比较对象。

图 3.10 给出了相对于 ANSYS 结果的计算误差随实际结构  $x_1$  方向单胞数增加的变化曲线。可以看到, 如果以 5% 的误差作为容许值, 那么实际结构中单胞在  $x_1$  方向上达到 50 个, 也就是  $x_2$  方向上达到 20 个, 就能够满足这个精度要求。

在上面例题中, 宏观结构的最大尺度和最小尺度的比值可以认为是  $L:b=10:4$ 。表 3.5 给出了具有不同高宽比的梁 (即宏观结构最大尺度和最小尺度比值变化), 在一定计算精度的要求下, 实际结构在两个方向上需要的最小单胞数目。从结果可以看到,  $x_2$  方向上的最少单胞数目结果相对  $x_1$  方向更加稳定, 因而对计算误差起决定作用的是宏观结构最小尺度方向上的单胞数目。如果考虑主要变形  $u$ , 那么如果要求计算精度达到 6%, 宏观结构的最小尺度, 也就是梁高  $b$  方向上的单胞数目需要达到 20~50。

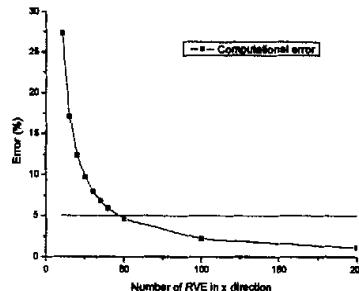


图 3.10 计算精度随实际结构  $x_1$  方向单胞数目的变化曲线

Fig. 3.10 Evolution of result error with respect to the number of cells in  $x_1$  direction

表 3.5 不同长宽比的实际结构在控制一定误差下的单胞数目

Tab. 3.5 The number of cells needed to achieve the required precision for structures with different aspect ratios

$b(m)$	Error of $u$ is set 6%		Error of $v$ is set 8%	
	$x_2$ direction	$x_1$ direction	$x_2$ direction	$x_1$ direction
0.2	58	290	41	205
0.3	51	170	45	155
0.4	44	110	40	100
0.5	35	75	35	70
0.6	30	50	30	50
0.8	24	30	24	30

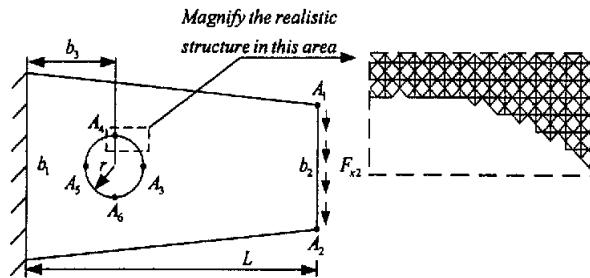


图 3.11 带圆形空洞的梯形梁  
Fig. 3.11 A trapezoidal cantilever with a hole

### 3.3 数值算例 2

算例 I 的宏观构形和材料单胞都是方形, 实际结构可以理想的包含有限个完整单胞。然而, 为了适应实际工程中复杂的宏观边界, 很难保证单胞的完整性。如图 3.11 所示的有圆孔的矩形梁, 在孔边界和上下斜边上, 单胞都不能保证完整性, 这样的问题更具一般意义。

图中几何参数和载荷分别为:  $b_1 = 0.6m$ ,  $b_2 = 0.4m$ ,  $b_3 = 0.3m$ ,  $L = 1m$ ,  $r = 0.1m$ ,  $F_{x2} = 2 \times 10^8 N/m$ , 同时考虑图 3.3(b)的微观结构。采用数值均匀化计算结构的弹塑性响应(宏观有限元节点数目 4664, 八节点四边形单元数目 1440), 并且和 ANSYS 计算的实际桁架结构(节点数目 56448, 杆件数目 149378)在点  $A_k (k=1, \dots, 6)$  进行位移比较。从表 3.6 可以看到, 基于数值均匀化的弹塑性求解格式对于具有较复杂宏观构形的问题仍然能够保证较高的精度。

表 3.6 不同位置节点位移和实际结构的比较  
Tab. 3.6 Comparison of displacement results at six nodes

Node	$u (10^{-4} m)$		$v (10^{-4} m)$	
	Numerical Homogenization	Complete computation by ANSYS	Numerical Homogenization	Complete computation by ANSYS
$A_1$	29.4941	30.2951	-115.1365	-118.0423
$A_2$	-27.5953	-27.9469	-115.4792	-117.9859
$A_3$	0.9804	1.0646	-32.0511	-33.1470
$A_4$	3.7350	3.9490	-18.8130	-19.3373
$A_5$	0.1967	0.1988	-6.0368	-6.0879
$A_6$	-2.7283	-2.6876	-18.8407	-19.3510

### 3.4 结论

本章讨论了基于数值均匀化的类桁架材料结构弹塑性计算方法：由于构件有较高的长细比，因而可以采用桁架模型模拟；采用宏微观两级弹塑性分析方法，将一个大规模桁架系统的结构弹塑性计算转化为一个宏观连续体的非线性弹性问题和一组小规模桁架结构的弹塑性问题进行求解，能够在保证较高精度的前提下计算效率获得很大提高。

基于以上求解过程，分析并讨论了两个不同的宏观结构分别在简单加载和非单调加载下的弹塑性响应。与 ANSYS 计算的实际结构的比较表明：在宏观结构最小尺度上的单胞数目达到一定水平时，本章的求解格式能够达到较高的计算精度和求解效率；宏观网格划分的规则性和代表体元的选择对于结果的影响不明显；方法在处理加卸载和不同加载路径等问题时，同样获得了较理想的结果；方法可以应用于边界包含不完整单胞的类桁架结构的弹塑性模拟。

## 4 考虑制造性的两级协同拓扑优化

结构优化设计大致可分为三类，即尺寸优化，形状优化和拓扑优化。相对于前两种优化，拓扑优化能从根本上改变结构拓扑，更能体现真正意义上的最优设计。因此，拓扑优化技术成为了结构设计、材料设计和结构/材料一体化设计的一种广泛使用的有力工具。但是，应用常规拓扑优化算法得到的结果常伴有细小结构、棋盘格式和灰色单元，这给实际制造带来了一定的困难。由于这些问题的存在，制造性研究也一直是拓扑优化领域的一个重要方向。

本章的研究内容主要针对以下两个问题：1. 结构/材料一体优化中，现有工作往往基于全设计域内材料微观结构可变的设定，这样得到的结果非常不便于制造。2. 结构优化的设计结果常表现为整个设计域内的复杂构型，此时较大的设计会给制造带来更多的困难。对于这两个问题，我们引入了均一微观结构和模块化制造思想，分别提出了有利于制造的优化模型，从而在问题初始设定时就避免了一些可能的制造困难。

### 4.1 基于均匀化的两级协同拓扑优化

应用均匀化方法和 SIMP 方法求解连续体拓扑优化问题得到的结果往往包含有灰色区域。此时，人们总是想得到清晰的“黑-白”设计，于是提出了各种各样的方法来避免灰色区域的产生，常见的有密度惩罚<sup>[30]</sup>、周长约束<sup>[31]</sup>、过滤法<sup>[32]</sup>等等。但随着具有多孔特征的超轻质材料的深入研究和广泛应用，传统的实心材料结构设计理念已经不能满足需要，因此结构/材料一体化设计逐渐成为了研究的热点。

在现有的结构/材料一体化设计中，材料微观结构的优化结果在宏观尺度上往往表现出非均匀性。Rodrigues 等<sup>[40]</sup>在 2002 年提出了结构/材料层级设计的方法。此工作非常强调材料微观结构的拓扑设计和目标函数的最优化，也得到理论上非常理想的结果。但从图 4.1(a) 所示结果来看，材料微观结构点点不一样，在宏观上表现出“黑-变灰色-白”的密度分布。这样的设计结果从目标函数上来看非常优越，但是在制造上却存在相当大的困难。阎军等<sup>[41]</sup>图 4.1(b)对十字形胞元的线性蜂窝材料以应力为目标讨论了密度和壁厚两类变量优化问题，得到了非常新颖的结果，但同样表现出了材料微观结构点点相异的特点。

本节试图通过结构和材料两个尺度上的协同拓扑优化得到均一多孔材料构成的轻质结构。为了提高优化结果实际应用的可能性，我们非常强调可制造性的体现，所以假设了材料微观结构的宏观均一性。所谓协同设计就是将两个尺度上设计集成到一个优化问题中，这样能够考虑到它们之间的相互影响，这也使得我们的设计区别于给定材料的结构设计和单纯的以得到给定性能或者极限性能为目的的材料微观结构设计<sup>[32, 42-44]</sup>。

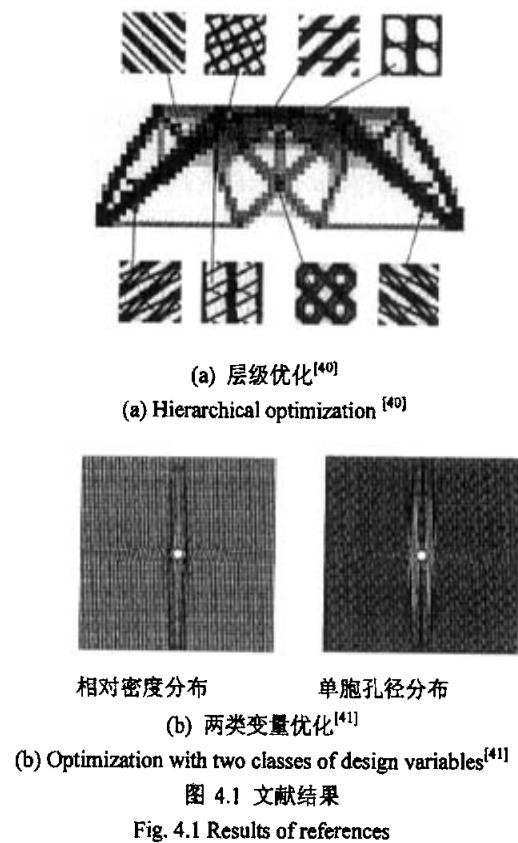


图 4.1 文献结果

Fig. 4.1 Results of references

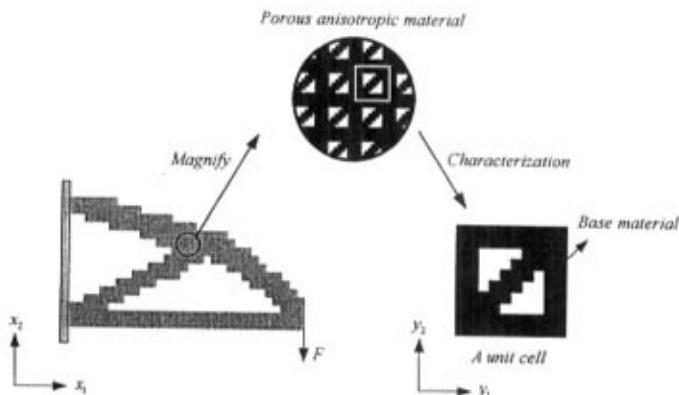


图 4.2 各向异性多孔材料构成的结构

Fig. 4.2 A structure composed of porous anisotropic material

#### 4.1.1 问题描述

图 4.2 所示的就是一个由各向异性多孔材料构成的结构，其特点是材料微结构在整个结构域内保持一致。注意到在下面的讨论中，我们将涉及到两个材料的概念：一个是各向异性多孔材料，另一个是基体材料。基体材料表示传统的实体材料如铝和合金等等；而各向异性多孔材料（有时我们会简称之为材料）由给定基体材料构成并具有任意的周期性微结构（即不局限于十字形胞元，蜂窝等特定形式）。

我们的目标在于得到如图 4.2 所示的“灰-白”设计，而并非“黑-白”设计或“黑-变灰-白”设计，因此我们要求宏观材料“灰度”（即材料相对密度）的均一性。这样就产生了两个问题：

1. 微观尺度：如何定义“灰色”材料？如前所述，“灰色”材料可以描述为具有特定周期性微结构的多孔材料。所以我们的一个主要目标就是在材料的一个最小代表体元（胞元） $Y$  上对材料微结构进行拓扑设计。

2. 宏观尺度：如何分布“灰色”材料？这个尺度的核心问题在于如何在宏观设计域上分配“灰色”多孔材料以得到最大的结构性能。

这两个问题都可以归结为经典的拓扑优化设计问题。为了实现协同设计，我们需要把它们集成到一个优化模型中。首先定义两组独立的设计变量：结构设计域上的宏观密度  $P(X)$  和材料胞元设计域上的微观密度  $\rho(Y)$ 。假设结构设计域为  $\Omega$  且受外荷载  $F$ ，则最小柔顺性设计的列式为：

$$\text{Minimize: } C = \int_{\Omega} F \cdot U d\Omega \quad (4.1)$$

$$\text{Constraint I: } \varsigma = \frac{\rho^{PAM} \cdot \int_{\Omega} P d\Omega}{V^{M1}} \leq \bar{\varsigma} \quad (4.2)$$

$$\text{Constraint II: } \rho^{PAM} = \frac{\int_{V^{M1}} \rho dY}{V^{M1}} = \bar{\varsigma}^{M1} \quad (4.3)$$

$$\text{Constraint III: } 0 < \delta \leq P \leq 1, 0 < \delta \leq \rho \leq 1 \quad (4.4)$$

这里  $C$  表示结构柔顺性，也就是目标函数； $U$  表示结构变形，这是一个依赖于两个尺度上密度变量的函数。

约束 I 定义了系统相对密度  $\varsigma$  小于给定值  $\bar{\varsigma}$ ，这实际上为可用基体材料的使用量设定了一个上限。这里  $V^{M1}$  是宏观设计域  $\Omega$  的面积。由于采用了多孔材料， $\varsigma$  的定义和常

规单尺度拓扑优化问题有一些区别，因为这里包含了多孔材料的相对密度  $\rho^{PAM}$ 。对于单尺度问题， $\rho^{PAM}$  等于 1；而在我们的问题中， $\rho^{PAM}$  是 0 到 1 之间的一个数。

约束 II 定义了多孔材料相对密度  $\rho^{PAM}$  等于给定值  $\bar{\zeta}^{MI}$ 。由于多孔材料制造工艺的限制，我们这里假设  $\bar{\zeta}^{MI}$  在 0.2 到 0.6 之间。这个约束相当于给定了多孔材料的相对密度，从而微观问题就只剩下了对于拓扑形式的设计。

由约束(4.3)和(4.4)，宏观尺度上的多孔材料用量可以由下式表示

$$\frac{\zeta}{\rho^{PAM}} = \frac{\int \rho d\Omega}{V^{MI}} \leq \frac{\bar{\zeta}^{MI}}{\bar{\zeta}^{MI}} \quad (4.5)$$

不等式的左边表示宏观尺度上多孔材料的使用量，右边给这个使用量施加了一个上限。由于总的材料用量  $\bar{\zeta}$  是一个给定值，如果在微观尺度上分配更多的材料，即给定更大的  $\bar{\zeta}^{MI}$ （使用密度更大的多孔材料），那么宏观尺度上的材料体积（面积）占整个设计区域的体积（面积）比就自然会减少，这就是两个尺度间的材料分配问题。

约束 III 给两个尺度上的密度变量分别设定了一个界限，这里  $\delta$  是一个预先给定的非常接近于 0 的数。

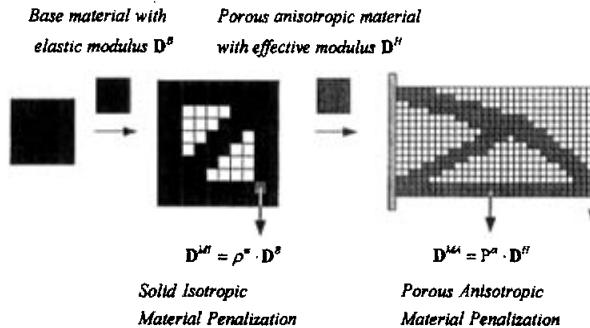


图 4.3 基于惩罚法的协同优化设计

Fig. 4.3 Penalties-based concurrent optimization with two class design variables

#### 4.1.2 密度惩罚和数值处理

为了数值求解的方便，首先需要对两个尺度上的设计域分别进行单元划分。如图 4.3 所示，假设设计域  $\Omega$  被划分为  $N$  个单元而设计域  $Y$  被划分为  $n$  个单元。每个单元分别分配一个独立的 0-1 之间的密度变量：宏观尺度上第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 号单元的密度为  $P_i$ ，微观尺度上第  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) 号单元的密度为  $\rho_j$ 。

为了得到清晰的拓扑，我们采用惩罚法对密度进行指数惩罚。微观尺度上，很自然地我们将采用结构拓扑优化常用的 SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) 方法。假设基体材料的模量矩阵为  $\mathbf{D}^B$ ，那么密度值为  $\rho$  的点模量值可表示为

$$\mathbf{D}^{MI} = \rho^\alpha \cdot \mathbf{D}^B \quad (4.6)$$

这里  $\alpha$  表示惩罚的指数值。

然而在宏观尺度，多孔材料的等效性能不一定是各向同性的，因此沿用 SIMP 将不再合理。实际上，由于微结构的设计采用了拓扑优化技术，而且没有限定具体的拓扑形式，得到各向异性多孔材料的可能性是非常大的。因此，尽管在这个尺度上的惩罚处理非常类似于 SIMP，但是 PAMP (Porous Anisotropic Material with Penalization) 的名称更为合适。如果给定各向异性多孔材料的模量  $\mathbf{D}^H$ ，那么密度为  $P$  的点模量  $\mathbf{D}^{MA}$  可表示为

$$\mathbf{D}^{MA} = P^\alpha \cdot \mathbf{D}^H \quad (4.7)$$

在数值算例中我们将看到，在微观尺度上仅仅惩罚是不足以得到清晰拓扑的，需要采取进一步措施以避免模糊的微结构拓扑。为了限制可行设计的复杂度并且抑制棋盘格式的产生，已经有多种方法被提出：对于结构周长施加上界约束<sup>[31]</sup>，引入过滤机制<sup>[42]</sup>，对于相邻单元密度梯度施加约束<sup>[45]</sup>等等。这里，我们将引入一类周长约束<sup>[46]</sup>作为本节优化问题的第四个约束。

$$Constraint\ IV: \gamma = \sum_{k=1}^m l_k \cdot (\rho_{k1} - \rho_{k2})^2 \leq \bar{\gamma} \quad (4.8)$$

这里  $m$  表示单元数， $l_k$  表示第  $k$  个单元界面的长度（连接单元  $k1$  和  $k2$ ）。 $\bar{\gamma}$  是一个预先给定的上界值，我们将在数值算例中对此参数做进一步讨论。

#### 4.1.3 结构分析和敏感度求解

在数值优化中，对给定的设计计算目标函数是非常重要的一步。根据(4.1)，由于外加力已知，由结构分析得到变形  $U$  后可以自然得到目标函数  $C$ 。因此，下面主要讨论结构分析的过程，其有限元列式为

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}^{MA} \cdot \mathbf{B} d\Omega \quad (4.10)$$

这里  $\mathbf{K}$  是结构总刚度矩阵， $\mathbf{B}$  是应变/位移矩阵， $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{F}$  分别是位移  $U$  和外力  $F$  的离散向量，它们都是按全部自由度扩展后的矩阵表示。 $\mathbf{D}^{MA}$  在(4.7)中已定义为  $\mathbf{D}^H$  的函数。

$\mathbf{D}^H$  表征多孔材料的等效弹性模量，是联系两个尺度的非常重要的纽带：一方面它决定于微观胞元的拓扑形式，另一方面它又是结构分析中的关键变量。 $\mathbf{D}^H$  的计算可以依照经典均匀化方法的两个实现步骤：首先，对周期性胞元施加周期性边界条件和胞元协同变形相关外力，并进行结构分析。

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = \int_Y \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{D}^M dY \quad (4.11)$$

$$\mathbf{k} = \int_Y \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{D}^M \cdot \mathbf{b} dY \quad (4.12)$$

这里  $\mathbf{k}$  是微结构总刚度矩阵， $\mathbf{u}$  是微结构变形， $\mathbf{b}$  是应变/位移矩阵，它们都是按全部自由度扩展后的矩阵表示。 $\mathbf{D}^M$  定义见(4.6)。第二步，计算胞元域上的积分得到等效模量

$$\mathbf{D}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{D}^M \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) dY \quad (4.13)$$

这里  $\mathbf{I}$  对于二维问题是一个  $(3 \times 3)$  的单位矩阵， $|Y|$  是胞元的面积。

(4.6)-(4.13)完成了对于结构的分析，得到了结构变形  $\mathbf{U}$ 。基于此，我们得以在已知当前设计变量值的前提下计算出当前的目标函数值。

一个典型的数值优化过程通常包含两个最主要的部分：一个是分析，一个是最优搜索。对于后者，已经有很多成熟的算法可供选用。在应用一些基于梯度的算法如序列线性规划 (SLP, Sequential Linear Programming) 和序列二次规划 (SQP, Sequential Quadratic Programming) 时，敏感的显式表达能够显著提高计算效率。利用已有的式子，我们可以得到如下两组导数求解式。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{P}_i} &= - \sum_{r=1}^N \mathbf{U}_r^T \cdot \frac{\partial (\int_Y \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}^M \cdot \mathbf{B} d\Omega)}{\partial \mathbf{P}_i} \cdot \mathbf{U}_r \\ &= - \sum_{r=1}^N \mathbf{U}_r^T \cdot \frac{\partial (\int_Y \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P}_r^\alpha \cdot \mathbf{D}^H \cdot \mathbf{B} d\Omega)}{\partial \mathbf{P}_i} \cdot \mathbf{U}_r \\ &= - \mathbf{U}_i^T \cdot \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \cdot \alpha \cdot \mathbf{P}_i^{\alpha-1} \cdot \mathbf{D}^H \cdot \mathbf{B} d\Omega \cdot \mathbf{U}_i \\ &= - \frac{\alpha}{P_i} \cdot \mathbf{U}_i^T \cdot \int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P}_i^\alpha \cdot \mathbf{D}^H \cdot \mathbf{B} d\Omega \cdot \mathbf{U}_i \\ &= - \frac{\alpha \cdot C_i}{P_i} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial \rho_j} &= -\sum_{r=1}^N \mathbf{U}_r^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}_r}{\partial \rho_j} \cdot \mathbf{U}_r = -\sum_{r=1}^N \mathbf{U}_r^T \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial \rho_j} \left( \int \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}^{M_r} \cdot \mathbf{B} d\Omega \right)}{\partial \rho_j} \cdot \mathbf{U}_r, \\
 &= -\sum_{r=1}^N P_r^a \cdot \mathbf{U}_r^T \cdot \left( \int \mathbf{B}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \rho_j} \cdot \mathbf{B} d\Omega \right) \cdot \mathbf{U}_r,
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

这里  $C_r$  是第  $r$  个单元的柔顺性,  $\mathbf{D}^H$  对于  $\rho_j$  的导数可以由映射算法<sup>[47]</sup>计算

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial \rho_j} &= \int_Y (\mathbf{I} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u})^T \cdot \frac{\partial \mathbf{D}^{M_r}}{\partial \rho_j} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) dY \\
 &= \alpha \rho_j^{\alpha-1} \int_Y (\mathbf{I} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_j)^T \cdot \mathbf{D}^B \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_j) dY
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

至此, 我们已经给出了结构分析和敏感度求解的计算步骤。下面我们将给出计算流程图, 其中各关键步骤均已和列式相关联。

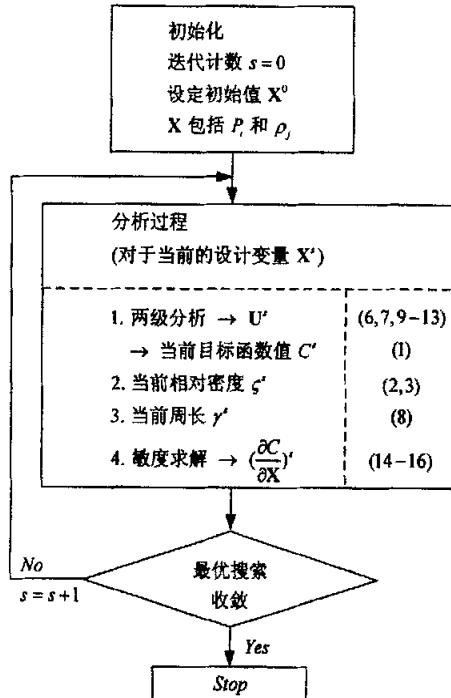


图 4.4 流程图

Fig. 4.4 Flow chart

#### 4.1.4 数值算例 1：关于 $\bar{\zeta}$ , $\bar{\zeta}^M$ 和 $\bar{\gamma}$ 的讨论

首先考虑图 4.5 所示的 MBB 梁，一方面验证我们提出的方法，另一方面讨论三个参数  $\bar{\zeta}$ ,  $\bar{\zeta}^M$  和  $\bar{\gamma}$  的影响。虽然我们将看到这三个参数都会对拓扑结果和柔顺性目标值产生影响，但其实它们本质上是不一样的： $\bar{\zeta}$  和  $\bar{\zeta}^M$  是数学模型中的材料用量限制，而  $\bar{\gamma}$  仅仅是数值处理的控制参数。

梁上边中点作用竖直载荷  $P=1000$ ，下边两端分别有一个绞支座和一个滑移支座。基体材料的杨氏模量为  $E=2.1 \times 10^5$ ，泊松比为  $\nu=0.3$ 。几何尺寸分别是： $L=4$  和  $h=1$ 。因为我们只关心定性结果，所以例题的物理量均为无量纲。由于对称性，我们仅将右半边结构和材料微结构（图中灰色区域）作为设计域。宏观设计域网格为  $50 \times 25$ ，而微结构网格为  $25 \times 25$ ，均采用八节点实体单元。最优搜索将使用 DOT 优化器的 SQP 算法。

为了讨论周长约束的影响，首先采用确定的  $\bar{\zeta}=0.1$ ,  $\bar{\zeta}^M=0.4$  和变化的  $\bar{\gamma}$  进行求解。如表 4.1 所示，如果不施加周长约束或者控制周长不足够小，将得到非常复杂的微结构拓扑，且柔顺性指标也相对较大。由此我们建议，对于微观设计有必要进行一定的数值处理，这样做可以帮助得到清晰的拓扑和优越的目标值。但是，需要注意控制周长也不能过小，否则将导致收敛困难、出现中间密度、或者搜索不到好的结果。例如  $\bar{\gamma}=2$  时，微观拓扑结果就比较模糊，对应的柔顺性指标也相对较大。

下面设定  $\bar{\gamma}=4$ ，而变化基体材料总量  $\bar{\zeta}$ 。表 4.2 的结果显示：微结构拓扑形式的差异还是比较大的。当材料总体积占设计区域体积的比例  $\bar{\zeta}=0.25$  时，微结构拓扑在旋转 45 度后和图 4.6 (a) 所示的三角形胞元相似，这是一个具有很好面内力学性能的胞元形式<sup>[48]</sup>。 $\bar{\zeta}=0.075$  时，微结构在旋转 45 度后类似图 4.6 (b) 所示的混合胞元，这同样是一个力学性能很好的微结构形式。这些相似性说明了我们提出的方法的确得到了比较好的结果。此外，我们发现宏观设计也随着  $\bar{\zeta}$  的提高而变化，这是材料性能与多孔材料可用量变化的结果。在柔顺性指标方面，较多的可用基体材料得到了较好的性能，这是合理的。

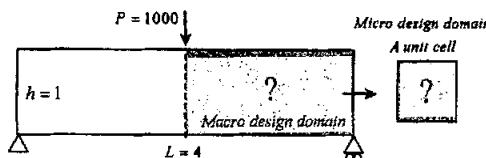


图 4.5 MBB 梁

Fig. 4.5 MBB beam

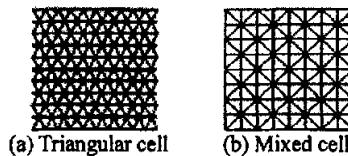


图 4.6 线性蜂窝材料的两种微结构

Fig. 4.6 Two microstructures for Linear Cellular Material<sup>[48]</sup>

在前面的讨论中我们提到过材料在宏观尺度和微观尺度之间分配的问题，也就是 $\bar{\zeta}/\bar{\zeta}^{MI}$  和  $\bar{\zeta}^{MI}$  的竞争关系。下面我们令  $\bar{\zeta}^{MI}$  变化而  $\bar{\zeta}=0.12$ ，通过例题来研究这一竞争关系对于拓扑优化结果的影响。如表 4.3 所示，较大的  $\bar{\zeta}^{MI}$  得到了较小的系统柔顺性，此时材料更多的被分配在了微观尺度。这表明对于此问题，使用密度较高的多孔材料(增强材料)比使用密度较低的多孔材料(宏观结构显得更粗壮)更有利于提高系统的刚度。

#### 4.1.5 数值算例 2

这个算例中，我们将通过 L 形梁(图 4.7 所示)设计结果和期望结果的比较，进一步验证我们提出的两级协同优化的设计方法。结构上边固定，右边施加一组外力模拟弯矩。几何尺寸上， $a=1$  而  $b$  设定为一个由  $\lambda$  决定的变量。约束变量  $\bar{\zeta}$ ， $\bar{\zeta}^{MI}$  和  $\bar{\gamma}$  分别取为 0.1，0.4 和 4。

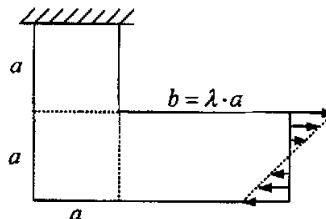


图 4.7 L 形梁

Fig. 4.7 A L-shaped beam

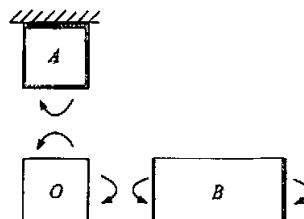


图 4.8 L 形梁的分解

Fig. 4.8 A decomposition of the L-shaped beam

注意到在我们的问题里，宏观尺度上材料被设定为均一的，而应力状态在宏观结构的不同区域确是变化的。所以，要求微结构均一的要求某种意义上是一个多目标的优化问题。这个 L 形梁就是一个很好的例子，它可以分解为如图 4.8 所示三个部分。对于 B 部分，弯矩施加在左右边，这将导致 x 方向的主变形，从而我们可以期望微结构设计结果会具有较大的 x 方向模量。依照类似的分析，对 A 部分，微结构拓扑的 y 方向模量应当较强。这明显是一对矛盾。但由于材料的均一性假设，这对矛盾必须被放在同一个问题里面求解，微结构的设计结果需要同时照顾到 A 部分的应力状态，也需要照顾到 B 部分的应力状态。也就是说，两方面是竞争的关系但也需要协调。在这种情况下，A 和 B 之间的权重比就显得非常重了。权重在这里可以理解为 A 和 B 之间的面积比，可以由  $\lambda$  来进行调节。我们考虑了  $\lambda$  的四个取值情况： $\lambda=0$ ，B 部分不存在，A 部分起主导作用； $\lambda=1$ ，B 部分的权重被加强了； $\lambda=2$  和 3，B 部分逐渐成为了主导。下面我们将分别讨论在这四种假设条件下的结果。

拓扑结果及其表示的材料弹性模量结果见表 4.4。这里引入模量比  $D_{11}^H / D_{22}^H$  来表征基体材料在两个方向上的分配，其中  $D_{pq}^H$  (二维问题中  $p, q = 1, 2, 3$ ) 表示模量矩阵的对应元素。从结果可以看到：随着  $\lambda$  的提高，B 部分权重的增强，x 方向刚度要求的增大，模量比也在逐渐提高，表明基体材料被逐渐应用于增强 x 方向的弹性性能。这一结果和上面的分析非常一致，再一次验证了两级协同设计的合理性。

#### 4.1.6 结论

为了得到最优各向异性多孔材料构成的最优结构，我们提出了一个协同拓扑优化设计的方案：

1. 分别定义了两组设计变量，使得两个尺度上的设计相对独立。
2. 采用拓扑优化技术，微结构不再局限为特定构形，从而可以得到多种多样的具有多孔特性的超轻质材料。
3. 为了得到清晰拓扑，引入了 PAMP 方法在宏观上对各向异性多孔材料进行惩罚，而传统的 SIMP 方法则被应用于宏观尺度设计中。
4. 两个尺度的设计被集成为一个优化问题并且协同求解，得到了新颖的结构形式。
5. 我们非常强调材料微结构在宏观尺度上的均一性，此假设可能在一定程度上削弱了结果的优越性，但由此带来的制造上的方便是很吸引人的。
6. 通过数值算例，我们验证了方法的有效性，讨论了约束常数  $\bar{\zeta}$ ， $\bar{\zeta}^{MI}$  和  $\bar{\gamma}$ 。
7. 我们发现很多情况下，最优微结构表现为类桁架特征，再次印证了类桁架材料的优越性。现存的类桁架材料制造方案也为结果的实现也提供了保障。

表 4.1 变化  $\bar{\gamma}$  的结果Tab. 4.1 Results for varying  $\bar{\gamma}$ 

$\bar{\zeta}$	$\bar{\zeta}^{MI}$	$\bar{\gamma}$	Compliance	Microstructural topology
0.12	0.4	2	7515	
0.12	0.4	3	5675	
0.12	0.4	4	5676	
0.12	0.4	8	7077	
0.12	0.4	N/A	7583	

表 4.2 变化  $\bar{\zeta}$  的结果Tab. 4.2 Results for varying  $\bar{\zeta}$ 

$\bar{\zeta}$	$\bar{\zeta}^{MI}$	Compliance	Structural topology	Microstructural topology
0.075	0.4	9855		
0.09	0.4	7292		
0.12	0.4	5676		
0.18	0.4	3707		
0.25	0.4	2234		

表 4.3 变化  $\bar{\zeta}^{MI}$  的结果Tab. 4.3 Results for varying  $\bar{\zeta}^{MI}$ 

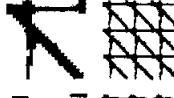
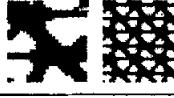
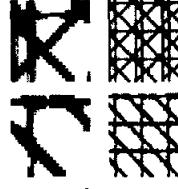
$\bar{\zeta}$	$\bar{\zeta}^{MI}$	Compliance	Structural topology	Microstructural topology
0.12	0.2	8880		
0.12	0.3	6210		
0.12	0.4	5676		
0.12	0.5	5487		

表 4.4 L 型梁的设计结果

Tab. 4.4 Results of the L-shaped beam design

$\bar{\zeta}$	$\bar{\zeta}^{MI}$	$\lambda$	Compliance	$D_{11}^H / D_{22}^H$	Structural topology	Microstructural topology
0.1	0.4	0	43012	0.55		
0.1	0.4	1	56958	1.38		
0.1	0.4	2	64345	1.08		
0.1	0.4	3	76590	1.27		

## 4.2 基于子结构的两级协同拓扑优化

对于结构设计，拓扑优化的结果往往给出一个在整个设计区域内很复杂的构型。许多学者曾尝试从不同角度提高结果的可制造性。最近的工作包括 Cheng 等<sup>[49]</sup>提出的基于特征的拓扑优化方法和 Chellappa 等<sup>[50]</sup>提出的基于有限尺寸特征的拓扑优化。如图 4.9 所示。这些结果仅仅包含非常易于制造的少数几何构型，非常利于工业实现。



图 4.9 文献结果：(a) 基于特征的设计<sup>[49]</sup>, (b) 基于有限尺寸特征的优化<sup>[50]</sup>

Fig. 4.9 Results of reference: (a) Featured-based design<sup>[49]</sup>, (b) Optimization with finite-sized features<sup>[50]</sup>

本文将从另外一个角度出发考虑制造性。我们希望将模块化制造的思想引入结构拓扑优化。具体做法如图 4.10 所示：将整个设计域分割成有限个设计子域，对每个子域的拓扑进行强制关联，要求他们具有相同的拓扑，然后对子域拓扑和子域密度进行协同设计。这实质上是一个宏观尺度上的优化问题，但我们仍然认为它具有两级：第一级是最优的子结构拓扑，第二级是子结构在空间的最优分布。在我们的优化模型中，这两级的优化工作是同时展开的。因此，我们称之为基于子结构的两级协同设计。这样做好处在于，如果我们采用冲剪工艺挖去多余材料，可以用固定的冲头；对于有些需要在现场施工建造的结构，例如桥梁，这样的设计使我们可以采用拼装工艺，事先按照标准模板加工成同样的子块，最后通过拼装就可以得到整个结构，显然可以降低制造成本。

我们在上节讨论了基于均匀化的两级协同优化设计。由于均匀化假设材料胞元相对于结构尺寸无限小，所以其对于材料宏观性能的预测结果属于极限值而无法准确反映胞元尺寸的影响，当然也无法体现胞元尺寸对优化结果的影响。而本节中的重复子结构是具有实际尺寸的，所以对比两部分内容可以研究重复结构实际尺寸对优化结果的影响。

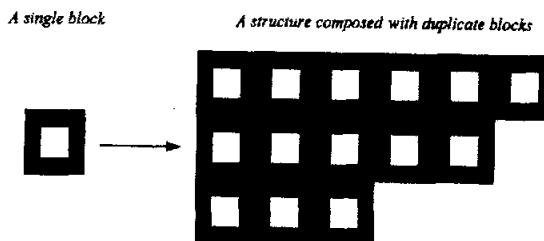


图 4.10 基于子结构的两级设计  
Fig. 4.10 Two-scale design based on substructure

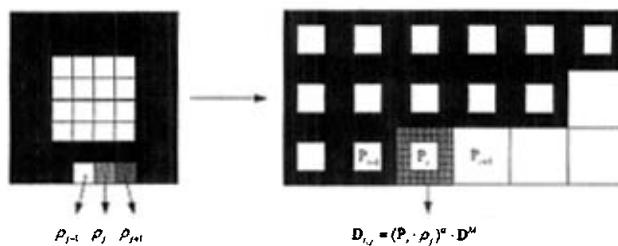


图 4.11 基本思想

Fig. 4.11 Basic idea for the substructure-based concurrent design

#### 4.2.1 实现过程

这里的优化模型和常规的单尺度优化模型类似，区别在于我们要考虑两个问题的耦合，即子结构自身的拓扑设计和子结构在空间的分布。因此首先定义两组设计变量：第一组是子结构内单元密度  $\rho_j (j = 1, 2, \dots, m)$ ，称为微观变量。第二组是子结构块的整体密度  $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，称为宏观变量，它的不同设计可以导致结构的不同拓扑。每一个子结构中的所有对应位置单元具有相同的微观设计变量  $\rho_j$ ，换言之，每个微观设计变量  $\rho_j$  共控制了  $n$  个分布在各个子结构中的单元；而宏观设计变量  $P_i$  则控制第  $i$  个子结构中的所有单元的密度，共  $m$  个。优化模型如下

$$\text{Minimize: } C = \int_{\Omega} F \cdot U d\Omega \quad (4.17)$$

$$\text{Constraint I: } \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_i \cdot \rho_j \cdot V_j}{V} \leq \bar{\zeta} \quad (4.18)$$

$$\text{Constraint II: } 0 < \delta \leq P_i \leq 1, \quad 0 < \delta \leq \rho_j \leq 1 \quad (4.19)$$

这里  $C$  表示结构柔顺性，也就是目标函数； $F$  是外力； $U$  表示结构变形，这是一个依赖于两个尺度上密度变量的函数。

约束 I 定义了结构相对体积小于给定值  $\bar{\zeta}$ ，这实际上为材料的使用量设定了一个上限。这里  $V$  是设计域  $\Omega$  的面积，而  $V_j$  表示子结构中第  $j$  个单元的面积，这对于每一个子结构的对应单元都是一样的。约束 III 给两类密度变量分别设定了一个界限，这里  $\delta$  是一个预先给定的非常接近于 0 的数。

结构分析可参见以下列式

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} d\Omega = \sum_i \sum_j \int_{\Omega_{i,j}} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_{i,j} \cdot \mathbf{B} d\Omega \quad (4.21)$$

$$\mathbf{D}_{i,j} = \mathbf{P}_i^\alpha \cdot \rho_j^\alpha \cdot \mathbf{D}^B \quad (4.22)$$

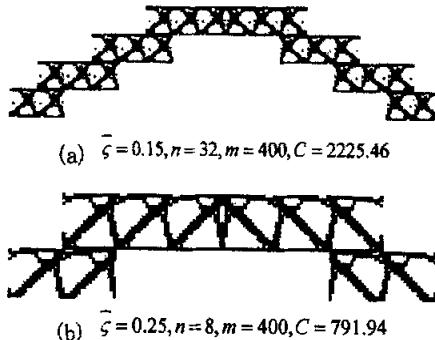
其中  $\mathbf{D}_{i,j}$  是第  $i$  块子结构里第  $j$  个单元的弹性模量，可以由(4.22)式求得。实际上这是由材料密度按照人工密度法 (SIMP) 的密度和弹性模量的关系求得的， $\alpha$  是惩罚指数， $\mathbf{D}^B$  是基体材料的模量。敏感计算时需要注意：由于我们设置了变量关联，需要对相关单元作累加，具体体现在以下式子中的求和号上。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \mathbf{P}_i} &= -\mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{P}_i} \cdot \mathbf{U} = -\sum_i \sum_j \mathbf{U}_{i,j}^T \cdot \left( \int_{\Omega_{i,j}} \mathbf{B}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{P}_i} \cdot \mathbf{B} d\Omega \right) \cdot \mathbf{U} \\ &= -\alpha \cdot \mathbf{P}_i^{\alpha-1} \cdot \sum_j \mathbf{U}_{i,j}^T \cdot \left( \int_{\Omega_{i,j}} \mathbf{B}^T \cdot \rho_j^\alpha \cdot \mathbf{D}^B \cdot \mathbf{B} d\Omega \right) \cdot \mathbf{U}_{i,j} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \rho_j} &= -\mathbf{U}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \cdot \mathbf{U} = -\sum_i \sum_j \mathbf{U}_{i,j}^T \cdot \left( \int_{\Omega_{i,j}} \mathbf{B}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \rho_j} \cdot \mathbf{B} d\Omega \right) \cdot \mathbf{U} \\ &= -\alpha \cdot \rho_j^{\alpha-1} \cdot \sum_i \mathbf{U}_{i,j}^T \cdot \left( \int_{\Omega_{i,j}} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{P}_i^\alpha \cdot \mathbf{D}^B \cdot \mathbf{B} d\Omega \right) \cdot \mathbf{U}_{i,j} \end{aligned} \quad (4.24)$$

#### 4.2.2 数值算例

同样考虑图 4.5 所示的 MBB 梁，几何尺寸和边界条件不变。图 4.12 展示了不同约束条件和不同子结构数目下给出的优化结果。其中  $\bar{\zeta}$  表示结构相对密度上限，即材料用量，这里考虑了 0.15, 0.25, 0.35 三种情况； $n$  表示设计域划分的重复子结构份数，这里考虑了 2\*4 和 4\*8 两种情况； $m$  表示一个子结构内的单元数目，这里取为 400； $C$  仍然表示设计目标函数值，即结构柔顺性指标取值。将这些结果分成几组进行比较：



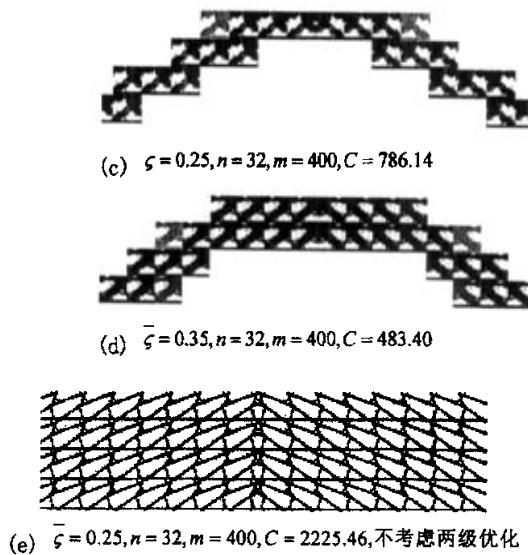


图 4.12 优化结果

Fig. 4.12 Resulting topology

1. (b)和(c)的划分子结构数目不同。得到的子结构分布和子结构拓扑均有一定区别，可以预见子结构数目越多将越趋近于基于均匀化的两级优化的结果。从目标函数上来看，较多子结构块数的(c)结果较优越，这是由于优化设计具有更大的设计空间。

2. (a), (c), (d)的给定材料上限逐渐增加。很自然的，最多材料的(d)具有最好的结构刚度。对于柔顺性设计，优化结果通常是用满所有可用材料，即材料越多刚度越大。但是如果考虑热耗散、渗流、抗冲击等多功能目标时，更多材料就未必能够获得更好的目标了<sup>[51]</sup>。

3. (c)和(e)的设计方法不一样，(c)采用的是本节提出的两级协同优化方法，而(e)采用的是常规拓扑优化考虑子结构关联的优化方法，但不允许子结构密度在设计域内变化，也就不允许整个结构的拓扑变化。很明显的，我们方法得到的结果更优。

#### 4.2.3 结论

本节提出了基于子结构的两级协同优化设计方法：

1. 我们定义了两组设计变量分别表征子结构拓扑和子结构分布，并且将两个尺度的设计集成到一个优化问题中进行协同求解。数值算例给出了新颖的结构拓扑形式。
2. 采用这一设计方法使得我们可以将一个大规模的制造问题划归为多个小规模的制造问题，给制造带来了一定的方便。

3. 由本节算法得到的数值结果可以认为是上节基于均匀化的两级协同优化结果的尺度效应体现。因为子结构的引入考虑了结构重复部分的实际尺寸，而均匀化方法的胞元是没有实际尺寸的。

## 结 论

本文围绕着超轻材料及其构成结构的力学性能和协同优化，开展了以下研究：考虑随机缺陷的材料等效力学性能预测、类桁架材料构成结构的弹塑性快速等效算法、以均一微结构为前提的结构/材料两级协同优化设计、基于子结构的两级协同优化设计等。相应结论如下：

1. 从数值的角度证实了随机性材料模量预测中存在的尺度效应，即预测结果随着代表体元的增大而趋向一个极限值。周期性边界条件优于 Dirichlet 边界条件，但 Dirichlet 边界条件的实现相对简单。采用标准 Dirichlet 边界条件时，选择边界存在离散构件的胞元可能会对结果产生比较大的影响，因此我们建议避免采用此类胞元。
2. 提出了考虑内部胞元能量等效的代表体元法。数值算例表明此方法能够有效削弱边界条件和胞元选择对于预测结果的影响，能够在相同的精度要求下节省计算工作量，同时不增加额外的求解步骤，从而继承了 Dirichlet 边界条件实现简单的优点。这一方法可以应用于各类具有周期性微结构的超轻材料在具有和不具有随机特征时的等效弹性模量预测。
3. 给出了基于数值均匀化的类桁架材料结构弹塑性计算格式。此算法将一个大规模桁架系统的结构弹塑性计算转化为一个宏观连续体的非线性弹性问题和一组小规模桁架结构的弹塑性问题进行求解，能够在保证较高精度的前提下有效提高计算效率。与实际结构离散建模的计算结果比较表明：在宏观结构最小尺度上的单胞数目达到一定水平时，等效求解格式能够达到较高的计算精度和求解效率；结果对于宏观网格划分和代表体元选择不敏感；算法能够用于分析具有各种宏观构形的结构在简单加载和非单调加载下的弹塑性响应。
4. 提出了以均一微结构为前提的多孔材料和结构的协同优化方案。我们分别定义了两个尺度上的设计，并将其集成到一个优化模型中进行协同求解，因此可以同时得到结构和材料微结构的最优设计。由于采用了拓扑优化技术，微结构不再局限为特定构形，从而可以得到多种多样的具有多孔特性的超轻质材料。通过引入 SIMP、PAMP 和周长约束，在两个尺度上都得到了比较清晰的拓扑结果。我们非常强调材料微结构在宏观尺度上的均一性，此假设可能在一定程度上削弱了优化解的优越性，但由此带来的制造上的方便是很吸引人的。数值算例充分验证了方法的有效性和可靠性，我们还讨论了约束常数的影响。我们发现在很多情况下，最优微结构表现为类桁架特征，这再次印证了类桁架材料的优越性，而且现有的类桁架材料制造方案也为结果的实现也提供了保障。

5. 提出了基于子结构的协同优化设计方案。我们定义了两组独立设计变量分别对应子结构拓扑和子结构分布，并将其集成到一个优化模型中进行协同求解，数值算例给出了新颖的结构拓扑形式。由此得到的结果可以逐渐逼近基于均匀化的两级协同优化结果，因为子结构的引入考虑了重复结构的实际尺寸，而均匀化方法的胞元是假设无限小的。此外，这一设计方法使得我们可以将一个大规模的制造问题划归为多个小规模的制造问题，给实际制造带来了一定的方便。

本文研究内容涉及超轻材料的性能预测、多尺度计算和优化设计，尽管展示的结果局限于二维问题和简单力学性能（弹性、弹塑性），但其中的思想和方法同样可以应用于解决三维问题和考虑多功能（力、热导、热耗散等）的课题，这些都是可行、有意义并且很有挑战性的工作。

## 参 考 文 献

- [1] B. Hassani, E. Hinton. A review of homogenization and topology optimization I, II, III. *Computers & Structures*, 1998, 69: 707-756.
- [2] C. Huet. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1990, 38: 813-841.
- [3] G.D. Cheng. On Non-Smoothness in Optimal Design of Solid Elastic Plates. *International Journal of Solids and Structures*, 1981, 17: 795-810.
- [4] M.P. Bendsoe, N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71: 197-224.
- [5] M.M. Neves, H. Rodrigues, J.M. Guedes. Optimal design of periodic linear elastic microstructures. *Computers & Structures*, 2000, 76: 421-429.
- [6] V. Kouznetsova, M.G.D. Geers, W.A.M. Brekelmans. Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 54: 1235-1260.
- [7] P. Zhang, Y. Huang, P.H. Geubelle, P.A. Klein, K.C. Hwang. The elastic modulus of single-wall carbon nanotubes: a continuum analysis incorporating interatomic potentials. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39: 3893-3906.
- [8] 阎军, 程耿东, 刘书田, 刘岭. 周期性点阵类桁架材料等效弹性性能预测及尺度效应. *固体力学学报*, 2005, 26: 421-428.
- [9] V.S. Deshpande, M.F. Ashby, N.A. Fleck. Foam topology: Bending versus stretching dominated architectures. *Acta Materialia*, 2001, 49: 1035-1040.
- [10] L.J. Gibson, M.F. Ashby. 多孔固体 - 结构与性能. 1997.
- [11] S. Chiras, D.R. Mumm, A.G. Evans, N. Wicks, J.W. Hutchinson, K. Dharmasena, H.N.G. Wadley, S. Fichter. The structural performance of near-optimized truss core panels. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39: 4093-4115.
- [12] V.S. Deshpande, N.A. Fleck, M.F. Ashby. Effective properties of the octet-truss lattice material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2001, 49: 1747-1769.
- [13] J.C. Wallach, L.J. Gibson. Mechanical behavior of a three-dimensional truss material. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38: 7181-7196.
- [14] M. Kaminski, M. Kleiber. Perturbation based stochastic finite element method for homogenization of two-phase elastic composites. *Computers and Structures*, 2000, 78: 811-826.
- [15] A.-J. Wang, D.L. McDowell. Effects of defects on in-plane properties of periodic metal honeycombs. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2003, 45: 1799-1813.
- [16] 张洪武, 王鲲鹏. 材料非线性微-宏观分析的多尺度方法研究. *力学学报*, 2004, 36: 359-364.

- [17] S. Ghosh, S. Moorthy. Elastic-plastic analysis of arbitrary heterogeneous materials with the Voronoi Cell finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, 121: 373-409.
- [18] S. Ghosh, K. Lee, S. Moorthy. Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and voronoi cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 1995, 32: 27-62.
- [19] S. Ghosh, L. Kyunghoon, S. Moorthy. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 132: 63-116.
- [20] J. Fish, K. Shek, M. Pandheeradi, M.S. Shephard. Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, 148: 53-73.
- [21] K. Terada, N. Kikuchi. A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190: 5427-5464.
- [22] K. Matsui, K. Terada, K. Yuge. Two-scale finite element analysis of heterogeneous solids with periodic microstructures. *Computers and Structures*, 2004, 82: 593-606.
- [23] D. Okumura, N. Ohno, H. Noguchi. Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic cellular solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2004, 52: 641-666.
- [24] D. Okumura, N. Ohno, H. Noguchi. Post-buckling analysis of elastic honeycombs subject to in-plane biaxial compression. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39: 3487-3503.
- [25] N. Ohno, D. Okumura, H. Noguchi. Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2002, 50: 1125-1153.
- [26] J.R. Hohe. A direct homogenisation approach for determination of the stiffness matrix for microheterogeneous plates with application to sandwich panels. *Composites Part B: Engineering*, 2003, 34: 615-626.
- [27] J. Hohe, W. Becker. An energetic homogenisation procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores. *Composites Part B: Engineering*, 2001, 32: 185-197.
- [28] P. Ladeveze. Multiscale modelling and computational strategies for composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 60: 233-253.
- [29] T.I. Zohdi, P. Wriggers. A model for simulating the deterioration of structural-scale material responses of microheterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190: 2803-2823.
- [30] M.P. Bendsoe, O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive Of Applied Mechanics*, 1999, 69: 635-654.
- [31] R.B. Haber, C.S. Jog, M.P. Bendsoe. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. *Structural Optimization*, 1996, 11: 1-12.

- [32] O. Sigmund. *Design of material structures using topology optimization*. in *First World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*. 1995.
- [33] M. Jiang, M. Ostoja-Starzewski, I. Jasiuk. Scale-dependent bounds on effective elastoplastic response of random composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2001, 49: 655-673.
- [34] F. Cluni, V. Gusella. Homogenization of non-periodic masonry structures. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, 41: 1911-1923.
- [35] P.R. Onck, E.W. Andrews, L.J. Gibson. Size effects in ductile cellular solids. Part I: modeling. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, 43: 681-699.
- [36] P. Rupnowski, M. Gentz, J.K. Sutter, M. Kumosa. An evaluation of the elastic properties and thermal expansion coefficients of medium and high modulus graphite fibers. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing (Incorporating Composites and Composites Manufacturing)*, 2005, 36: 327-338.
- [37] O. Van Der Sluis, P.J.G. Schreurs, W.A.M. Brekelmans, H.E.H. Meijer. Overall behaviour of heterogeneous elastoviscoplastic materials: effect of microstructural modelling. *Mechanics of Materials*, 2000, 32: 449-462.
- [38] H.X. Zhu, J.R. Hobdell, A.H. Windle. Effects of cell irregularity on the elastic properties of open-cell foams. *Acta Materialia*, 2000, 48: 4893-4900.
- [39] S. Pecullan, L.V. Gibiansky, S. Torquato. Scale effects on the elastic behavior of periodic and hierarchical two-dimensional composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1999, 47: 1509-1542.
- [40] H. Rodrigues, J.M. Guedes, M.P. Bendsoe. Hierarchical optimization of material and structure. *Structural And Multidisciplinary Optimization*, 2002, 24: 1-10.
- [41] 阎军, 程耿东, 刘岭, 刘书田. 点阵材料微极连续介质模型的应力优化设计. *力学学报*, 2006,
- [42] O. Sigmund. Design of material structures using topology optimization. 1994.
- [43] O. Sigmund. Tailoring Materials With Prescribed Elastic Properties. *Mechanics Of Materials*, 1995, 20: 351-368.
- [44] J. Yan, G.D. Cheng, S.T. Liu, L. Liu. Comparison of and Scale effects on prediction of effective elastic property and shape optimization of truss material with periodic microstructure. *International Journal of Mechanical Science*, 2006, 48: 400-413.
- [45] J. Petersson, O. Sigmund. Slope constrained topology optimization. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 1998, 41: 1417-1434.
- [46] W.H. Zhang, P. Duysinx. Dual approach using a variant perimeter constraint and efficient sub-iteration scheme for topology optimization. *Computers & Structures*, 2003, 81: 2173-2181.
- [47] S.T. Liu, G.D. Cheng, Y. Gu, X.G. Zheng. Mapping method for sensitivity analysis of composite material property. *Structural And Multidisciplinary Optimization*, 2002, 24: 212-217.
- [48] A.J. Wang, D.L. McDowell. In-plane stiffness and yield strength of periodic metal honeycombs. *Journal Of Engineering Materials And Technology-Transactions Of The Asme*, 2004, 126: 137-156.

- [49] G.D. Cheng, Y.L. Mei, X.M. Wang. *A Feature-based Structural Topology Optimization Method*. in *IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials*. 2005. Copenhagen: Springer.
- [50] S. Chellappa, A.R. Diaz, M.P. Bendsoe. Layout optimization of structures with finite-sized features using multiresolution analysis. *Structural And Multidisciplinary Optimization*, 2004, 26: 77-91.
- [51] B. Wang, G.D. Cheng. Design of cellular structures for optimum efficiency of heat dissipation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 30: 447-458.

## 攻读硕士学位期间发表学术论文情况

1. 程耿东, 刘岭, 阎军。考虑随机因素的材料等效模量的一种有效实现。2005 全国力学大会。 (第二章)
2. 刘岭, 阎军, 程耿东。随机材料等效模量预测相关研究。固体力学学报, 在审。 (第二章)
3. 刘岭, 阎军, 程耿东。二维类桁架材料结构弹塑性分析。力学学报, 已录用。 (EI 检索期刊) (第三章)
4. Gengdong Cheng, Ling Liu and Jun Yan. Optimum structure with homogeneous optimum truss-like material. III European Conference on Computational Mechanics. (第四章)

## 致 谢

时光荏苒，不知不觉中在大工求学已近七年，这里的一景一物、一人一事都已经成为了我生命的一部分。即将离开，备感不舍。回想一路走来，得到了家人、老师、同学和朋友们太多太多的帮助和关心，鼓励与支持，这些于我而言都是极为宝贵的财富，我将铭记于心，珍藏一生。谨在本文即将完稿之际，向他们表达衷心的谢意。

首先要感谢导师程耿东教授。论文工作从总体思想的提出，到理论的深入，直至总结的修改定稿，无不凝聚着先生的辛劳与智慧。先生平日公务非常繁忙，但当学生在科研上取得结果、遇到困难时却总能得到先生的指点。教研室、会议室、先生的办公室、更多的是在先生的家中，与先生的讨论和交谈都深深的印在了我的脑中，让我受益匪浅。先生对于科研工作的兴趣和执著令人钦佩；先生事无巨细、宽以待人的态度让人叹服；先生敏锐的洞察力和大局观更是让我羡慕；先生渊博的知识、严谨的治学态度、追求完美的个性将是我永远学习的榜样。更令我感动的是，先生时刻关心着学生的前途和生活，并在我最困难的时候给予了我极大的帮助。真心感谢程老师，也感谢师母对我的关心。

感谢我的老师杨海天教授。本科阶段在杨老师指导下的研究经历，扩展了我的知识面，培养了我基本的研究素质，对于顺利开展硕士阶段的研究工作帮助极大。

感谢刘书田教授、李刚教授和杨迪雄老师。三位老师在周六讨论会中提出的宝贵意见和建议，对于作者完善工作、总结提高有着很大的帮助。

感谢系教学主任杨春秋教授，本科生办公室李丽华老师，和研究生办公室赵广玲老师。我给你们带来了太多的麻烦，感谢你们对我的关怀和不厌其烦的帮助。

感谢朝夕相处的师兄弟们：许林、李海涛、杨迪雄、易平、陆海燕、王博、阎军、徐胜利、金英、刘翔、张雄、张晖、倪长辉、牛斌、王斌、江世刚、宫伟伟等。和你们一起度过的快乐时光，将是我研究生阶段最美好的回忆。特别感谢王博师兄和阎军师兄，师弟能够迅速进入课题、顺利开展研究工作，离不开两位师兄的指点与帮助。

感谢王宣平、谭述君、周平、陈杰夫、康健、刘世民、余志兵、冯超恒、周定国等我的同学们。我们在共同生活和学习的日子里结下了深厚的友谊。特别感谢王宣平和谭述君，我能够顺利开展科研、完成学业，离不开两位同学的帮助和支持。

深深感谢父母的养育之恩，你们的支持、关爱和期盼是我克服困难完成学业的巨大动力。谨以此文告慰去世数年的母亲，儿子一直在努力。感谢远在故乡的父亲，按照您教导我的“一步一个脚印”，儿子一直在努力。感谢我的哥嫂，这些年你们承担了大部分我应尽的义务。

这些年给过我帮助的人太多了，不能一一尽数，衷心地祝福你们。