

# 基于高阶统计实现地震反射系数和子波估计

## 摘 要

本文对地震子波估计和反褶积的理论方法进行了研究。在常规的地震子波估计和反褶积的处理中,通常假设地震子波是最小相位,反射系数为白噪的。这些假设条件及其对应的方法在实际应用中效果一般较好,但不能保证假设条件总是正确的。而基于高阶统计的地震子波估计恰恰能够消除对地震子波的最小相位假设和反射系数的白噪假设,并为进一步求解反射系数,实现反褶积奠定基础。本文就是在前人研究的基础上,研究和实现基于高阶统计量的非最小相位的地震子波估计的方法,并进一步探讨了反射系数的求取。同时,创造性的将独立分量分析(ICA)算法应用于地震资料的反褶积处理中,实现了地震子波和反射系数的同时求取。主要完成了以下工作:

1. 在无噪声假设条件下,实现了最小相位地震子波估计及地震反褶积。

2. 在无噪声假设条件下,利用高阶谱(双谱)估计出非最小相位地震子波。然后,结合同态反褶积方法的思想求出了反射系数。

3. 在无噪声假设条件下,利用地震记录时间延迟矩阵和地震子波带状褶积矩阵,将地震褶积模型转化为一般线性混合 ICA 模型,采用 FastICA 算法,将带状性质作为先验信息,实现所谓的带状 ICA 算法(B-ICA),得到个数与子波算子长度相等的多个反射系数序列估计和子波序列估计,最后利用褶积模型提供的附加信息优选出最佳的反射系数和地震子波。

4. 在无噪声的条件下,结合同态反褶积思想,将地震记录由时域变换到复倒谱域,使地震褶积模型变换为一般线性混合 ICA 模型,再利用 FastICA 算法将地震子波和反射系数分离,最后将分离的地震子波和反射系数再反变换到时域,得到相应的地震子波和反射系数。

模型数据和实际二维地震道数值算例表明:对于统计性反褶积,在不对反射系数作高斯白噪假设和不对子波作最小相位假设的所谓“全盲”条件下,本文介绍的基于 ICA 的两种反褶积方法可以较好解决地震盲反褶积问题,是基于二阶统计特性的地震信号统计性反褶积方法的提升,具有可行性和应用前景。

关键词: 子波估计; 地震反褶积; 反射系数; 高阶统计; 独立变量分析

# High-order statistics based realization of seismic relecticity and wavelet

## Abstract

Both the wavelet estimation and the seismic deconvolution are studied in this paper. The wavelet estimation and seismic deconvolution are always based on the assumption of Guassality and whiten noise to relecticity and minimum phase to the seismic wavelet. It commonly has a good effect in the practical application, but it can't be sure that these assumptions are always accurate. However, the wavelet estimation based on the High-order statistic can eliminate the assumption of Guassality and whiten noise to relecticity and minimum phase to the seismic wavelet. Furthermore, the relecticity can be separated. Then the seismic deconvolution can be achieved. The paper studies the non-minimum phase seismic wavelet estimation and seismic deconvolution based on the production of fore people. At the same time, applying independent component anaysis to the blind deconvolution of seismic data in a creative way. Completed primarily below work:

1. Neglecting noise, achieves the minimum phase seismic wavelet estimation and seismic deconvolution.

2. Neglecting noise, applying bispectrum to recover the no minimum wavelet, and then applying the homomorphic deconvolution method to realize the deconvolution to obtain the relecticity.

3. Neglecting noise, making use of time lagged version matrix of convolved signal and seismic wavelet banded convolving mixture matrix to construct a basic ICA model. By applying FastICA algorithm, and combining the banded property as a prior information, giving rised to a banded ICA algorithm(B-ICA), more reflectivity series are produces as many as the dimension of the seismic wavelet filter, and finally one best independent component can be extracted from the candinate solutions by additional information from the seismic convolution model.

4. Neglecting noise, changing the seismic record from time realm to complex cepstrum realm to transform the common seismic model to the basic ICA model. By applying the FastICA algorithm, separating the the seismic wavelet and reflectivity and changing the result back to the time realm.

The model and real seismic data numerical examples all shows that the stasticstical deconvolution based on ICA can inverse blindly the wavelet and the

reflectivity at the same time with no assumption of Guassality and whiten noise to relecticity, and no minimum phase to seismic wavelet. The algorithms based on ICA refered here can slove the seismic signals blind deconvolution effectively and worth doing more researchs.

**Key Words:** wavelet estimation; seismic deconvolution; relecticity; high-order statistics; independent component analysis.

## 独 创 声 明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含未获得（注：如没有其他需要特别声明的，本栏可空）或其他教育机构的学位或证书使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：高伟 签字日期：2008年5月27日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权学校可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。同时授权中国科学技术信息研究所将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》，并通过网络向社会公众提供信息服务。（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：高伟

签字日期：2008年5月27日

导师签字：

签字日期：2008年5月27日

# 1 前言

## 1.1 选题依据

在通常的地震反褶积处理中,二阶统计量(如相关函数、功率谱等)作为主要的处理手段。但是二阶统计量本身存在很多的不足:一方面功率谱估计的过程中,如果把随机过程作为不同分量的组合体,就必须假设各谐波分量互不相关,然后估计各个频率成分的分布,这样各个频率分量的相位关系受到抑制。因此,该方法只对线性系统有效。此外,相关函数与功率谱中所包含的信息只能完整的描述一个已知均值的高斯过程,其应用取决于信号的高斯性假设。另一方面,自相关与功率谱只能提供研究信号的振幅信息,而不能提供其相位信息。另外,自相关与功率谱估计技术处理许多问题的前提是假设所观测噪声是高斯白噪声。因此,不能处理非高斯信号。总之,基于二阶统计量的地震子波估计和反褶积的方法在应用时,不能保证对地震子波和反射系数所作的假设总是正确的,因此引入高阶统计量这一新的数学工具。

高阶统计量方法是近几年国内外信号处理领域内的一个前沿课题。高阶统计量广泛应用于所有需要考虑非高斯性、非最小相位、有色噪声、非线性或循环平稳性的各类问题中。高阶统计量与二阶统计量(自相关函数)相比具有三方面显著的优点<sup>[1-3]</sup>: (1) 高阶累积量具有对高斯有色噪声恒为零的特点,可用于提取高斯有色噪声中的非高斯信号; (2) 高阶累积量含有系统的相位信息,可用于非最小相位系统辨识; (3) 高阶统计量可用于检测和描述系统的非线性。而且,基于高阶统计的非最小相位子波估计,无论是从理论方法还是实际的应用中都取得了比较好的效果,显示了一定的优越性。而在此基础上再进行进一步的研究,为实现地震反褶积奠定了基础。

起源于盲源分离(Blind Source Separation)或盲信号分离(Blind Signal Separation)的独立分量分析(Independent Component Analysis, ICA)基于高阶统计特性,是盲源分离技术近年来的一项重要进展。它可以仅在信号统计行独立而不对反射系数和子波增加任何假设的条件下进行地震反演,为解决地震反射系数和地震子波的求解问题提供了一条重要途径。

## 1. 2 地震子波估计和反褶积方法研究现状

### 1. 2. 1 地震子波估计方法研究现状

提取地震子波的方法包括两类,第一类是确定性子波提取方法,第二类是统计性子波的提取方法。确定性子波提取方法,如维纳滤波、谱除法、广义线性反演等,是利用测井资料首先计算出反射系数序列,然后结合井旁地震道由褶积理论求出地震子波。第二类统计子波提取的方法,如自相关的多道统计、同态反褶积、以及利用高阶累积量估算子波的方法等。

子波提取的两类方法各有其优缺点。确定性子波提取方法的优点是不需要对反射系数序列的分布作任何假设,能得到较为准确的子波,缺点是需要利用测井资料;统计方法的优点是不需要测井信息,也可以得到子波的估计,但是往往需对反射系数与地震子波作出假设(地下反射率是具有白噪声谱的随机序列,地震子波是时不变和最小相位的),其假设条件与实际情况的吻合程度对提取子波的精确程度有很大的影响。在上述假设条件下,地震记录道的自相关就相当于地震子波自相关的一个估计,即地震子波的振幅谱是已知的。在此基础上:若给出子波是最小相位、零相位或最大相位的假设,则该方法可提取出较为准确的地震子波。但是实际当中地震子波是一种接近最小相位的混合相位子波,因此使用该方法并不能得到准确的结果。子波估算的另一类统计性方法是同态反褶积方法,从复赛谱域中分离子波<sup>[4]</sup>。

整体上来说,前期提出的子波提取的方法只得到地震子波准确的振幅谱信息,后期才有一些学者进一步提出确定子波相位的方法。

刘金俊提出了一种提取子波相位的方法<sup>[5]</sup>。该方法利用最小相位子波振幅谱的自然对数与相位谱之间的希尔伯特变换关系,经 $Z$ 变换求得相同振幅谱不同相位谱的一系列的各个子波,通过扫描的方法在最大方差模准则下确定子波。Cambois 和 Stoffa 利用对数/付氏域的表面连续相位展开来求取子波<sup>[6]</sup>。子波的相位谱是变化缓慢的,只在少数点有剧烈变化,而反射系数和噪音的相位谱是变化剧烈的均值近于零的杂乱无章的曲线,因而可用地震道各点的平均相位来代替子波的平均相位,从而求得近似的子波。此方法的假设条件是:平均反射系数是白噪的;平均子波是最小相位的。Lazear 提出混合相位子波估计的指数衰减法<sup>[7]</sup>。

但是,此方法只在有时窗起点取在地震道开始前时才是有效的,而实际中做到这一点很难,并且根本无法判断方法是否失败。

累积量的提出最早可以追溯到 19 世纪 80 年代,丹麦统计学家 Thiele 最早对累积量函数进行研究。到 1984 年 Shiryaev 将前人的研究概括为统计理论之后,累积量逐渐被广泛应用;而高阶谱的应用到了 20 世纪 90 年代初才开始发展起来。将高阶统计用于提取子波则是 Lazear 1993 年提出的,这才真正意义上抛弃了对子波最小相位的假设<sup>[8]</sup>。此类方法假设地层反射系数是三阶或四阶平稳的、零均值、非高斯、独立同分布的随机序列,噪声为正态随机序列(可以是有色的,也可以是白色的,但与信号不相关),Lazear 通过将某一给定的初始子波的高阶累积量与地震记录的高阶累积量在最小平方准则下拟合并利用最速下降法来估计非最小相位子波。最速下降法是线性拟合方法,这种方法有两个缺点:第一,所得的结果受给定的初值影响很大,并有和初值相像的趋势;第二,结果可能陷入局部极值。第一个缺点隐含了如果初值给得不恰当,所得结果可能会有较大误差,这是拟合方法难以避免的。但是,试验验证当给定的初始子波为位于零点的脉冲时,则可以得到较为满意的结果。为了减小第二个结果的误差,Velis 和 Ulrych<sup>[9]</sup>(1996)提出了一种非线性拟合方法:模拟退火法。该方法有效地避免了结果陷入局部极小的可能。Ulrych 和 Velis 等提出用一个多锥的锥形函数去圆滑累积量估计,然后再利用模拟退火法提取子波,将结果与利用倒谱迭加方法提取的子波比较,发现两种方法的结果具有很好的一致性<sup>[10]</sup>。但是模拟退火法求解也有它自身的缺点,如控制参数的选择比较困难(通常需要通过多次实验来确定),并且运算时间长。因此,尹成等提出通过求解高阶累积量矩阵方程法来提取子波<sup>[11]</sup>。该方法将地震模型定义为平稳的非高斯的滑动平均模型,由此推导出矩阵方程求解子波。梁光河提出将高阶累积量方法与确定性方法结合起来进行子波提取。具体做法是先用确定性方法得到较可靠的井旁道子波,然后用这个子波作为初始子波,利用模拟退火法通过累积量拟合的方法提取子波<sup>[4]</sup>。

上述各种方法都是在时间域利用高阶累积量提取子波。在频率域应用的有谢桂生等提出的由地震记录的双谱(地震记录三阶累积量的二维付氏变换)求得子波的相位谱<sup>[12]</sup>,同时利用分形的原理求得子波的振幅谱,由振幅谱和相位谱通过反付氏变换求得时间域的子波。

## 1. 2. 2 地震反褶积方法研究现状

地震反褶积方法分为：确定性反褶积和统计性反褶积。确定性反褶积方法主要是利用测井资料计算出反射系数序列，或者利用测井资料和地震道联合提取出一个恒定的地震子波，并以计算出的地震子波或者反射系数为已知条件来进行反褶积。这种方法的优点是不需要对反射系数序列的分布或是子波的相位作任何假设，就能得到较为准确的反褶积结果；缺点是需要利用测井资料，这就大大限制了其应用。统计性反褶积方法是利用地震记录来估计地震子波，然后作子波反褶积。分为两类：一是常规的基于二阶统计学（SOS）方法的统计性反褶积；一是基于高阶统计学（HOS）方法的统计性反褶积。基于二阶统计学方法的反褶积的优点是不需要测井资料，但往往要对反射系数和地震子波作出一定的假设，例如假设地震子波是是不变和最小相位的，地震反射系数是白噪的随机序列。

长期以来，人们一直尝试抛开这些假设，来实现地震的盲反褶积。例如同态反褶积。A.V.Oppenheim<sup>[13]</sup>(1965)首先提出了用同态反褶积来分离地震子波和反射系数，同态变换是一非线性变换，对地震子波不做最小相位假设，利用对数谱平均提取子波直接分离出地震子波和反射系数序列<sup>[14]</sup>。其假设前提是：子波部分比较光滑（以低频为主），而反射系数部分则很不光滑（以高频为主）。在复赛谱上，子波主要分布在数值较低的区域，反射系数主要分布在数值较高的区域，这样在复赛谱上就能将两者分开。但实际上两者是有部分重合的，为此国内外许多学者提出利用多时窗随机叠加的方法来提高估算精度<sup>[4]</sup>。在解决地震信号处理方面，国内外的一些学者也进行了研究。R.W.Schafer<sup>[15]</sup>提出了相位曲线展开法，但该方法比较复杂，而且由于用此法展开的相位曲线不规则，在最后分离出的反射系数中会产生明显的附加噪音。P.L.Stoffa<sup>[16,17]</sup>等人还提出了先求相位曲线的微分值而后积分的方法，将Z变换对数谱展开成泰勒级数。俞寿朋<sup>[18]</sup>对子波相位的展开进行了探讨，周兴元<sup>[14]</sup>为克服实际数据相位展开的问题，提出了统计同态反褶积方法。另有一些文献中也提出了各种改进的同态反褶积的方法<sup>[19,20]</sup>。

信号处理界和地震界已经有大量文章研究在不对子波相位和反射系数的分布作假设的条件下进行地震反褶积，并给出了很多有效的方法，但大多是基于二阶统计量<sup>[21]</sup>。而基于高阶统计学方法的反褶积能够直接反演出子波的相位，与以往的常规反褶积相比，不需要对地震子波和反射系数作最小相位和白噪假设，能



够实现所谓真正的盲反褶积。

Wiggins (1978) 提出的最小熵反褶积 (Minimum Entropy Deconvolution, MED) 方法提供了最有价值的方法<sup>[22]</sup>, 仅对反射系数要求为“简单特征的稀疏尖脉冲”, 进而寻求与地震道一致的大的尖脉冲具有最小数目, 也就是引入目标函数, 把反褶积结果的简单程度归结为数值大小的比较, 即在最小熵 (最大确定性、简单性) 条件下寻优。Donoho (1981) 发展了Wiggins方法<sup>[23]</sup>, 并给出了一般解释, 以后由于高阶谱估计理论研究的发展以及地震勘探反褶积实际应用的需要, 促进了最小熵反褶积的深入研究, 得出了较为有效的算法与更为明确的解释。最小熵反褶积对反射系数采用方差最大准则 (四阶累量——峰度), 并且要求反射系数是非高斯分布的, 对地震子波没有相位假设, 属高阶统计学方法。

鉴于盲分离与盲反褶积方法的渊源联系, 可根据基于高阶统计学盲源分离方法——独立分量分析 (independent components analysis, ICA) 导出的一种实现地震盲反褶积的方法来同时实现地震反射系数和子波估计, 是对最小熵反褶积方法的扩展和提升。

独立分量分析是针对语音分离问题发展的一种盲信号分离技术, 已成为信号处理中的一个研究热点, 在语音识别、图像识别、通讯、医学和地震信号处理等领域倍受关注<sup>[24]</sup>, 现已经被广泛地应用在很多领域中。刘喜武和陆文凯等在国内率先将独立分量分析方法引入地球物理领域, 提出了利用独立分量分析进行地震信号去噪<sup>[25, 26]</sup>、实现地震台站接收到的转换波和多次波的分离<sup>[27]</sup>和解决多次波自适应相减等问题<sup>[28]</sup>。针对时间延迟的盲信号分离, 即所谓的盲反褶积问题, 文献[29]提出用ICA实现同态反褶积 (盲反褶积) 的方法, 地震信号反褶积可以借鉴。文献[21]中曾提出了一种用ICA方法进行地震信号盲反褶积的思路。2003年在日本召开的“独立分量分析与盲信号分离”年会上, Kaplan与Ulrych给出用ICA实现地震盲反褶积的初步方法。

### 1. 3 本文的基本研究思路和研究内容

本文研究基于高阶统计的地震子波估计和反褶积的方法, 基本的研究思路为: 研究时间域的反褶积, 利用高阶谱估计出非最小相位的地震子波并进一步求出反射系数。利用基于高阶统计的盲分离方法——独立变量分析 (ICA) 来实现地震

子波和反射系数的同时求取。本文的主要研究内容：

- ① 传统的地震反褶积方法研究与数值实现
- ② 基于高阶统计的子波估计及反射系数的求取。
- ③ 基于独立变量分析的子波估计和反射系数的同时求取。

#### 1. 4 主要创新点

- ① 在时间域无噪条件下，应用独立变量分析(ICA)算法实现了地震盲反褶积，同时实现了地震反射系数和子波的求解。
- ② 在无噪条件下，实现了基于独立变量分析(ICA)的同态反褶积，同时实现了地震反射系数和子波的求解。

#### 1. 5 理论意义和实际应用价值

基于高阶统计的地震子波估计和地震反褶积方法能够摆脱对地震子波最小相位和反射系数是白噪的假设的束缚，使地震子波估计和地震反褶积的结果更符合实际情况，具有重要的理论意义和实际应用价值。

## 2 地震反褶积和子波估计

### 2.1 最小平方反褶积

提高地震记录的分辨率，关键要尽可能地消除地震子波的影响，即把拉长的地震子波尽量变成一个较窄的脉冲，这就是反褶积<sup>[30]</sup>要解决的问题。

#### 2.1.1 最小平方滤波

由于激发脉冲经过大地地层滤波后接收到的不再是一个脉冲，而是一个拉长了的子波，这样每道地震记录就是一些不同到达时间和不同幅度的波形叠加，从而模糊了各反射系数界面的到达时间和反射系数的大小。如果能找到一个反滤波因子（反子波因子） $a_i$ ，使子波 $b_i$ 变成一个窄脉冲 $\delta_i$ 。即

$$a_i * b_i = \delta_i \quad (2-1)$$

但是，当子波 $b_i$ 的频谱 $B(\omega)$ 有零点时，满足式（2-1）的 $a_i$ 使不存在的，即使 $b_i$ 经过褶积后精确地等于 $\delta_i$ 是不可能的。于是有

$$a_i * b_i \approx \delta_i \quad (2-2)$$

设误差为 $\varepsilon_i$ ，则

$$\varepsilon_i = (a_i * b_i - \delta_i) \quad (2-3)$$

要求在任何时间，误差 $\varepsilon_i$ 都要小。由于式（2-3）右边的差值可正、可负，因此每个时刻差值之和最小反映不出总误差的大小，所以用每个时刻差的平方和最小来反映总误差最小，即用

$$Q = \sum \varepsilon_i^2 = \sum (a_i * b_i - \delta_i)^2 = \min \quad (2-4)$$

来衡量式（2-3）的近似度。所谓最小平方滤波就是找出滤波因子 $a_i$ ，使误差能量 $Q$ 达到最小 $Q_{\min}$ 。

用数学模型来表达就是：已知输入信号 $x_i$ （可认为是子波 $b_i$ ），要求设计的滤波器（滤波因子） $h_i$ （可认为是反滤波因子 $a_i$ ）使得实际输出 $y_i = x_i * h_i$ 与期望输出（已知） $z_i$ （不限于 $\delta_i$ ）的误差平方和 $Q = \sum (y_i - z_i)^2 = \sum \varepsilon_i^2$ 为最小（ $Q_{\min}$ ）。

显然, 当实际输出与期望输出完全一致时, 即  $\varepsilon_i = y_i - z_i = 0$  ( $Q_{\min} = 0$ ), 此时把已知信号  $x_i$  通过滤波因子  $h_i$  作用后精确地转化为另一个已知信号  $z_i$ , 所以有  $x_i * h_i = z_i$ , 在频率域上有  $X(\omega)H(\omega) = Z(\omega)$ 。

## 2. 1. 2 最小平方滤波因子的求解

求滤波因子  $h_i$ , 要使其误差平方和达到最小  $Q_{\min}$ , 也就是要求实际输出  $y_i$  与期望输出  $z_i$  尽量接近。接近的标准采用最小平方准则, 其中  $Q$  是依赖于滤波因子  $h_i$ , 即为  $h_i$  的多元函数, 实际上是求多元函数的极值, 即求

$$Q = \sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_i \left( \sum_\tau h_\tau x_{i-\tau} - z_i \right)^2 \quad (2-5)$$

对每一个  $h_i$  的偏导数, 并令其为零所满足的方程  $\frac{\partial Q}{\partial h_i} = 0$  ( $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 具体计算为

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial h_i} &= \sum_i 2 \left( \sum_\tau h_\tau x_{i-\tau} - z_i \right) x_{i-\tau} \\ &= 2 \left[ \sum_i 2 \left( \sum_\tau h_\tau x_{i-\tau} - z_i \right) - \sum_i z_i x_{i-i} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2-6)$$

令  $r_{xx}(l-\tau) = \sum_i z_{i-\tau} x_{i-l}$ ,  $r_{xx}(l) = \sum_i z_i x_{i-l}$ , 则有

$$\sum_\tau h_\tau r_{xx}(l-\tau) = r_{xx}(l), \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2-7)$$

式 (2-7) 中的  $l$  和  $\tau$  都是在  $(-\infty, \infty)$  上定义的。为了能在计算机上实现最小平方滤波, 必须要求滤波因子  $h_i$  的长度是有限的, 所谓滤波因子  $h_i$  有限, 即指存在两个整数  $M_1$  和  $M_2$  ( $M_1 < M_2$ ), 使得

$$h_i = \begin{cases} 0 & t < M_1 \\ h_i & M_1 \leq t \leq M_2 \\ 0 & t > M_2 \end{cases} \quad (2-8)$$

设  $m+1$  长度的滤波因子为

$$h_i = (h_{-m_0}, h_{-m_0+1}, \dots, h_{-m_0+m}) \quad (2-9)$$

仿照式 (2-7) 可得

$$\sum_{\tau=-m_0}^{-m_0+m} h_{\tau} r_{xx}(l-\tau) = r_{xx}(l), (l = -m_0, -m_0+1, \dots, -m_0+m) \quad (2-10)$$

式 (2-10) 就是式 (2-9) 中的  $h_l$  要满足的方程。由于自相关函数是对称的, 即  $r_{xx}(l) = r_{xx}(-l)$ , 因此式 (2-10) 可写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(m) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{xx}(m) & r_{xx}(m-1) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{-m_0} \\ h_{-m_0+1} \\ \vdots \\ h_{-m_0+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx}(-m_0) \\ r_{xx}(-m_0+1) \\ \vdots \\ r_{xx}(-m_0+m) \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

### 2. 1. 3 最小平方反褶积 (脉冲反褶积) 原理

最小平方反褶积是最小平方滤波的一个特例。前提是假设反射系数序列  $r_l$  为一白噪声序列, 地震子波  $b_l$  为最小相位的。最小平方反褶积的数学模型为: 已知输入信号为子波  $b_l = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ , 要求设计的滤波因子  $a_l = (a_{-m_0}, a_{-m_0+1}, \dots, a_{-m_0+m})$

使得实际输出  $y_l = a_l * b_l = \sum_{\tau=-m_0}^{-m_0+m} a_{\tau} b_{l-\tau}$  与期望输出 (已知)  $d_l$  (一个短脉冲) 之间的

误差平方和  $Q_m = \sum_l (a_l * b_l - d_l)^2 = \sum_l \varepsilon_l^2$  为最小, 即要求  $a_l$  使误差平方和  $Q_m$  达

到最小值  $Q_{\min}$ 。

由式 (2-10) 可知  $a_l$  必须满足方程

$$\sum_{\tau=-m_0}^{-m_0+m} a_{\tau} r_{bb}(l-\tau) = r_{dx}(l), l = -m_0, -m_0+1, \dots, -m_0+m \quad (2-12)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} r_{bb}(0) & r_{bb}(1) & \cdots & r_{bb}(m) \\ r_{bb}(1) & r_{bb}(0) & \cdots & r_{bb}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{bb}(m) & r_{bb}(m-1) & \cdots & r_{bb}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-m_0} \\ a_{-m_0+1} \\ \vdots \\ a_{-m_0+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{db}(-m_0) \\ r_{db}(-m_0+1) \\ \vdots \\ r_{db}(-m_0+m) \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

当取短脉冲  $d_l = \delta_l = \begin{cases} 1, l=0 \\ 0, l \neq 0 \end{cases}$  时, 有  $r_{db}(l) = \sum_l d_{l+i} b_l = \sum_l \delta_{l+i} b_l = b_{-l}$ , 因此式

(2-13) 变为

$$\begin{bmatrix} r_{bb}(0) & r_{bb}(1) & \cdots & r_{bb}(m) \\ r_{bb}(1) & r_{bb}(0) & \cdots & r_{bb}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{bb}(m) & r_{bb}(m-1) & \cdots & r_{bb}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-m_0} \\ a_{-m_0+1} \\ \vdots \\ a_{-m_0+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{m_0} \\ b_{m_0-1} \\ \vdots \\ b_{m_0-m} \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

式 (2-14) 即为通常所说的最小平方反褶积方程。

反射系数序列  $r_t$  为一白噪序列时, 可推出地震记录的自相关函数  $r_{xx}(l)$  等于地震子波  $b_t$  的自相关函数  $r_{bb}(l)$ 。地震子波  $b_t$  为最小相位的, 其反子波 (反滤波因子)  $a_t$  存在, 且为物理可实现的 (即当  $t < 0$  时,  $a_t = 0$ ), 也是最小相位的。因此, 在做最小平方反褶积时, 可设计  $m+1$  长度的反子波  $a_t$  为  $a_t = (a_0, a_1, \cdots, a_m)$ , 式 (2-14) 中取  $m_0 = 0$ , 由于地震子波为物理可实现的, 所以有  $b_0 \neq 0$ ,  $b_{-1} = b_{-2} = \cdots = b_{-m} = 0$ , 因此式 (2-14) 变为

$$\begin{bmatrix} r_{bb}(0) & r_{bb}(1) & \cdots & r_{bb}(m) \\ r_{bb}(1) & r_{bb}(0) & \cdots & r_{bb}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{bb}(m) & r_{bb}(m-1) & \cdots & r_{bb}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

上式两边同除  $b_0$  得

$$\begin{bmatrix} r_{bb}(0) & r_{bb}(1) & \cdots & r_{bb}(m) \\ r_{bb}(1) & r_{bb}(0) & \cdots & r_{bb}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{bb}(m) & r_{bb}(m-1) & \cdots & r_{bb}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0/b_0 \\ a_1/b_0 \\ \vdots \\ a_m/b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

由式 (2-15) 和式 (2-16) 可知, 用  $(a_0, a_1, \cdots, a_m)$  进行滤波和用  $(a_0/b_0, a_1/b_0, \cdots, a_m/b_0)$  进行滤波, 除差一常数  $b_0$  外效果是相同的, 因此不妨设  $b_0 = 1$ , 则上述方程为

$$\begin{bmatrix} r_{bb}(0) & r_{bb}(1) & \cdots & r_{bb}(m) \\ r_{bb}(1) & r_{bb}(0) & \cdots & r_{bb}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{bb}(m) & r_{bb}(m-1) & \cdots & r_{bb}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

由式 (2-17) 知, 当地震子波  $b_t$  的为最小相位时, 求反滤波因子  $a_t$  时不必知道地震子波  $b_t$  的数值大小, 只要知道地震子波  $b_t$  的自相关函数  $r_{bb}(l)$  即可。由

$r_{bb}(l) = r_{xx}(l)$ ，只要求得地震记录  $x_t$  的自相关函数  $r_{xx}(l)$ ，就可由式 (2-17) 求得反子波  $a_l$ ，进而求出反射系数  $r_l$ 。

## 2. 2 最大熵反褶积

最大熵反褶积<sup>[31]</sup>也叫伯格反褶积。1967 年伯格 (Burg)<sup>[32]</sup>首先把熵的概念应用到谱分析上，提出最大熵谱分析方法和一套提高谱分析的分辨率的计算方法。1975 年以后，该方法应用到地震反褶积中，提出了最大熵反褶积方法。Burg 最大熵谱分析利用最大熵准则，根据时窗内的数据预测时窗外的数据，从而提高自相关计算的精度。所谓的最大熵就是假设时窗外的数据具有最大随机性。最大熵反褶积方法逐一用时窗内的数据计算出自相关的零滞后值，然后根据最大熵外推出其它滞后值的自相关值，从而解决反褶积问题。最大熵法在计算过程中应用了正向和反向预测误差功率最小的条件，计算出的正向预测误差就是预测步长为 1 的预测反褶积，也就是最小二乘脉冲反褶积的输出，为反射系数。

### 2. 2. 1 最大熵反褶积原理

最大熵反褶积的基本思想：假设数据时窗以外的数据具有最大的随机性。不确定性最大，即信息量熵最大。然后在熵最大约束条件下由时窗的自相关值外推时窗外的自相关值。Burg 从预测误差滤波的概念出发，使向前预测误差和向后预测误差的功率的平均值最小，从而建立由信号数据序列本身出发，使得在已知  $M-1$  阶向前预测误差和向后预测误差后，可以递推得到  $M$  阶向前预测误差和向后预测误差，直到需要的阶数为止，其中向前预测误差就是最大熵反褶积结果。

#### 2. 2. 1. 1 利用最大熵条件外推自相关序列

对于一个  $M$  维的高斯分布有

$$p(x_1, x_2 \cdots x_M) = [(2\pi)^{\frac{M}{2}} (\det R_M)^{\frac{1}{2}}]^{-1} e^{-\frac{1}{2} X^T R_M^{-1} X} \quad (2-18)$$

其中， $p(x_1, x_2 \cdots x_M)$  为联合概率密度函数。

$$R_M = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(M-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(M-1) & r_{xx}(M-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

其熵为:

$$\begin{aligned} H_M &= \log[(2\pi e)^{M/2} (\det R_M)^{1/2}] \\ &= \frac{M}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \log(\det R_M) \end{aligned} \quad (2-20)$$

要使熵达到最大, 只需  $\det R_M$  达到最大。  $R_M$  为正定的, 熵只存在正的极值。而  $\det R_M$  具有如下的性质: (1)  $\det R_M \geq 0$ ; (2)  $\det R_M$  是关于  $r_{xx}(M)$  的二次函数, 且  $(r_{xx}(M))^2$  前面的系数是负值。因此当  $r_{xx}(0), r_{xx}(1) \cdots r_{xx}(M-1)$  已知时, 可以通过对最大熵求极值得到  $r_{xx}(M)$ 。这时的  $\det R_{M+1}$  是  $r_{xx}(M)$  的二次函数,

$$\det R_{M+1} = \begin{vmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(M) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(M) & r_{xx}(M-1) & \cdots & r_{xx}(0) \end{vmatrix} \quad (2-21)$$

令  $\frac{\partial \det R_{M+1}}{\partial r_{xx}(M)} = 0$ , 得

$$\begin{vmatrix} r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(M-2) \\ r_{xx}(2) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(M-3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(M) & r_{xx}(M-1) & \cdots & r_{xx}(1) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-22)$$

由此可以求出  $r_{xx}(M)$ , 依此类推。这样每步按照最大熵原则外推后一个自相关序列的值, 可以外推到多个, 得到很长的自相关序列, 可大大提高功率谱的分辨率。

## 2. 2. 1. 2 Levinson 递推

对于零均值高斯分布随机信号  $x_n (n=1, \cdots N)$ , 其  $M$  阶自回归模型 (AR (M)) 为:

$$x_n = -\sum_{m=1}^M a_{M,m} x_{n-m} + e_n, \quad n=1, 2, \cdots N \quad (2-23)$$



可进一步写成:

$$\sum_{m=1}^M a_{M,m} x_{n-m} = e_n \quad (2-24)$$

其中:  $a_{M,0}=1$ ,  $e_n$ : 预测误差, 就是一阶预测反褶积结果, 当  $\alpha=1$  时也叫脉冲反褶积。展开式 (2-24) 得

$$x_n + a_{M,1}x_{n-1} + a_{M,2}x_{n-2} + \cdots + a_{M,M}x_{n-M} = e_n \quad (2-25)$$

两端同乘以  $x_{n-k}$  后取数学期望得:

$$r_{xx}(k) + a_{M,1}r_{xx}(k-1) + \cdots + a_{M,M}r_{xx}(k-M) = 0 \quad (2-26)$$

即

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(M-1) \\ r_{xx}(2) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(M+1) & r_{xx}(M) & \cdots & r_{xx}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{M,1} \\ \vdots \\ a_{M,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

同理, 式 (2-25) 两边同乘以  $x_n$ , 取数学期望后得

$$r_{xx}(0) + a_{M,1}r_{xx}(1) + \cdots + a_{M,M}r_{xx}(M) = P_M \quad (2-28)$$

联立式 (2-27) 与式 (2-28) 得

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(M) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(M) & r_{xx}(M-1) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{M,1} \\ \vdots \\ a_{M,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

①当  $M=0$  时,  $P_0 = r_{xx}(0)$ ;

②当  $M=1$ , 得  $a_{11} = -\frac{r_{xx}(1)}{P_0}$ ,  $P_1 = r_{xx}(0)(1 - |a_{11}|^2) = P_0(1 - |a_{11}|^2)$ ;

③当  $M=2$  时, 得  $\begin{cases} a_{22} = \frac{r_{xx}(2) + a_{11}r_{xx}(1)}{P_1} \\ a_{21} = \frac{[r_{xx}(0)r_{xx}(1) - r_{xx}(1)r_{xx}(2)]}{[r_{xx}^2(0) - r_{xx}^2(1)]} = a_{11} + a_{22}a_{11} \end{cases}, P_2 = P_1(1 - |a_{22}|^2)。$

依此类推, 可得递推公式:

$$\begin{cases} P_0 = r_{xx}(0) \\ a_{M,M} = \frac{-\left(r_{xx}(M) + \sum_{m=1}^{M-1} a_{M-1,m} r_{xx}(M-m)\right)}{P_{M-1}} & M=1,2,\dots \\ a_{M,m} = a_{M-1,m} + a_{M,M} a_{M-1,M-m} & m=1,2,\dots,M-1 \\ P_M = P_{M-1} (1 - |\rho_M|^2) \end{cases} \quad (2-30)$$

其中：初值为  $P_0 = r_{xx}(0)$ ； $a_{M,0} = 1$ ， $a_{M,m}(m > M) = 0$ ， $a_{M,M} \square \rho_M$ 。

由式 (2-30) 可知，只要知道  $M-1$  阶所有系数  $a_{M-1,m}(m=0,1,\dots,M-1)$  和  $\rho_M$  (当前阶)，就可递推出  $a_{M,m}(m=0,1,\dots,M)$ ，式 (2-30) 即为 Levinson 递推公式。

### 2. 2. 1. 3 Burg 算法

利用 Burg 算法<sup>[33]</sup>计算  $\rho_M$  既不需要计算全部的预测误差系数，又能保证结果是稳定的，即  $|\rho_M| = |a_{M,M}| < 1$ 。取向前预测误差和向后预测误差功率的平均值最小，即式

$$e_M = \frac{1}{2} \sum_{n=M+1}^N (|e_{f,n}^{(M)}|^2 + |e_{b,n}^{(M)}|^2) \quad M=1,2,\dots \quad (2-31)$$

其中： $e_{f,n}^{(M)}$  为向前预测误差， $e_{b,n}^{(M)}$  为向后预测误差，可由下式求得。

$$\begin{cases} e_{f,n}^{(M)} = \sum_{m=0}^M a_{M,m} x_{n-m} & M=1,2,\dots \\ e_{b,n}^{(M)} = \sum_{m=0}^M a_{M,M-m} x_{n-m} = \sum_{m=0}^M a_{M,m} x_{n-M+m} & M=1,2,\dots \end{cases} \quad (2-32)$$

Burg 算法具体的算法如下：

①当  $M=0$  时， $P_0 = r_{xx}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^2$ ；

②当  $M=1$  时，

$$e_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N (|e_{f,n}^{(1)}|^2 + |e_{b,n}^{(1)}|^2) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \left( \left| \sum_{m=0}^1 a_{1,m} x_{n-m} \right|^2 + \left| \sum_{m=0}^1 a_{1,m} x_{n-1+m} \right|^2 \right);$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N (|x_n + \rho_1 x_{n-1}|^2 + |x_{n-1} + \rho_1 x_n|^2)$$

③由  $\frac{\partial e_1}{\partial \rho_1} = 0$  得， $\rho_1 = -2 \sum_{n=2}^N x_n x_{n-1} / \sum_{n=2}^N (x_n^2 + x_{n-1}^2)$ ，又由式 (2-29)，可得

$$x_n = e_{f,n}^{(0)}, x_{n-1} = e_{b,n-1}^{(0)}, \text{ 所以 } \rho_1 = -2 \sum_{n=2}^N e_{f,n}^{(0)} e_{b,n-1}^{(0)} / \sum_{n=2}^N \left( \left( e_{f,n}^{(0)} \right)^2 + \left( e_{b,n-1}^{(0)} \right)^2 \right);$$

同理：令  $\frac{\partial e_M}{\partial \rho_M} = 0$ , 可得

$$\rho_M = -2 \sum_{n=M+1}^N e_{f,n}^{(M-1)} e_{b,n-1}^{(M-1)} / \sum_{n=M+1}^N \left( \left( e_{f,n}^{(M-1)} \right)^2 + \left( e_{b,n-1}^{(M-1)} \right)^2 \right) \quad (2-33)$$

Burg 算法递推时直接从原始数据出发, 求满足要求得滤波器  $(1, a_{M,1}, \dots, a_{M,M})$ , 而无需计算自相关值, 只要从该数据序列得自身出发, 按照向前、向后预测误差功率平均值最小原理确定误差滤波器, 而对数据序列以外的数据不作任何假设, 减少了误差, 提高了精度。

把  $e_{f,n}^{(M)}$  和  $e_{b,n}^{(M)}$  表达式中的  $a_{M,m}$  用 Levinson 递推公式式代入得

$$\begin{cases} e_{f,n}^{(M)} = \sum_{m=0}^M a_{M,m} x_{n-m} = e_{f,n}^{(M-1)} + \rho_M e_{b,n-1}^{(M-1)} & M=1, 2, \dots \\ e_{b,n}^{(M)} = \sum_{m=0}^M a_{M,M-m} x_{n-m} = e_{b,n-1}^{(M-1)} + \rho_M e_{f,n}^{(M-1)} & M=1, 2, \dots \end{cases} \quad (2-34)$$

在 Burg 反褶积算法中, 当求得  $M-1$  阶向前和向后预测误差后, 由式 (2-33) 可求得  $\rho_M$ ; 由式 (2-34) 可以递推求得  $M$  阶向前和向后预测误差, 而向前预测误差的结果, 也就是最小相位信号反褶积输出的结果。

## 2. 2. 2 最大熵子波反褶积的实现步骤

在地震记录中, 当子波为最小相位时, 其向前预测误差即为最大熵反褶积的结果, 其分辨率较高, 但信噪比低, 处理效果不理想。在最大熵反褶积的基础上, 进行最大熵子波反褶积, 假设反射系数为一白噪序列时, 将反射系数 (向前预测误差) 作为初值, 用反射系数与地震记录作相关, 提取地震子波  $r_q(t) = x_t * q_{-t} = b_t$ , 再用多道统计平均方法, 求出最终子波, 并使其最小相位化。对子波进行整形, 再做确定性子波反褶积, 求反射系数。

具体步骤<sup>[34]</sup>:

- ① 计算出所有阶的向前和向后预测误差, 得到反褶积输出结果;
- ② 地震子波为最小相位时, 向前预测误差为反射系数序列, 用反射系数与地震记录做相关, 提取最小相位单道地震子波;

- ③ 多道统计平均求子波，并对子波进行最小相位化整形；
- ④ 将整形的最小相位多道平均子波作为确定性子波实施反褶积。

## 2. 3 同态反褶积

同态反滤波不同于前面所讲过的最小平方反滤波或预测反滤波方法，它不需要假设地震子波的最小相位延迟性质，也不需要假设反射系数的自噪声性质，利用对数谱平均提取子波直接分离出地震子波和反射系数序列<sup>[35]</sup>。同态反褶积<sup>[36]</sup>的假设前提是：子波部分比较光滑(以低频为主)，而反射系数部分则很不光滑(以高频为主)。在复赛谱上，子波主要分布在数值较低的区域，反射系数主要分布在数值较高的区域，这样在复赛谱上就能将两者分开。

### 2. 3. 1 同态反褶积原理

地震记录  $x(t)$  是由地震子波  $b(t)$  和反射系数  $r(t)$  褶积形成，即  $x(t) = b(t) * r(t)$ ，将其变换到频率域得  $X(\omega) = B(\omega)R(\omega)$ 。

两边取对数得

$$\ln X(\omega) = \ln B(\omega) + \ln R(\omega) \quad (2-35)$$

其中， $\ln X(\omega)$ 、 $\ln B(\omega)$  和  $\ln R(\omega)$  分别表示地震记录  $x(t)$ 、地震子波  $b(t)$  和反射系数  $r(t)$  频谱的对数，分别叫做  $x(t)$ 、 $b(t)$  和  $r(t)$  的对数谱，并分别用  $\hat{X}(\omega)$ 、 $\hat{B}(\omega)$  和  $\hat{R}(\omega)$  表示，式可以 (2-35) 可以写为  $\hat{X}(\omega) = \hat{B}(\omega) + \hat{R}(\omega)$ ，将其反变换回时间域得

$$\hat{x}(t) = \hat{b}(t) + \hat{r}(t) \quad (2-36)$$

其中， $\hat{b}(t)$  和  $\hat{r}(t)$  分别是地震子波  $b(t)$  和反射系数  $r(t)$  的对数谱序列。

式 (2-36) 表明地震记录的对数谱序列  $\hat{x}(t)$  是地震子波对数谱序列  $\hat{b}(t)$  和反射系数对数谱序列  $\hat{r}(t)$  之和。而地震子波对数谱序列  $\hat{b}(t)$  和反射系数对数谱序列  $\hat{r}(t)$  是分布在时间轴的不同位置上，因此它们在一定程度上是彼此分离的。

在这里可设计带通滤波器对地震记录的对数谱序列  $\hat{x}(t)$  进行时间域滤波计算出地震子波对数谱序列  $\hat{b}(t)$  和反射系数对数谱序列  $\hat{r}(t)$ ，在分别对  $\hat{b}(t)$  和  $\hat{r}(t)$

进行傅立叶变换, 求出其对数谱, 取指数后再进行逆傅立叶变换, 即可得到地震子波  $b(t)$  和反射系数  $r(t)$ 。

### 2. 3. 2 希尔伯特变换子波反褶积

希尔伯特变换子波反褶积<sup>[37]</sup>方法的基本思想: 在地震记录  $x_t = b_t * r_t$  中, 设反射系数  $r_t$  是一白噪序列的, 由此可推得地震记录的自相关等于子波自相关即  $r_{xx}(\tau) = r_{bb}(\tau)$ , 且地震子波的功率谱可用地震记录的功率谱代替, 即  $|B(\omega)| = |X(\omega)|$ 。若地震子波  $b_t$  为最小相位的, 其  $Z$  变换  $B(z)$  可表示为

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \exp \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(\omega)| \frac{e^{-i\omega} + z}{e^{-i\omega} - z} d\omega \right], |z| < 1 \quad (2-37)$$

由于  $B(z)$  是自小相位的, 所以在单位圆内既无零点也无极点, 因此  $\log B(z)$  可展成幂级数, 即

$$\hat{B}(z) = \log B(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(\omega)| \frac{e^{-i\omega} + z}{e^{-i\omega} - z} d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < 1 \quad (2-38)$$

由于

$$\frac{e^{-i\omega} + z}{e^{-i\omega} - z} = \frac{2}{1 - e^{i\omega} z} - 1 = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\omega} z^n \quad (2-39)$$

将式 (2-38) 代入式 (2-39) 得

$$\hat{B}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(\omega)| d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \log |B(\omega)| e^{in\omega} d\omega \times z^n \quad (2-40)$$

比较式 (2-38) 和式 (2-40) 得

$$\begin{cases} \hat{b}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(\omega)| d\omega \\ \hat{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(\omega)| e^{in\omega} d\omega \end{cases} \quad (2-41)$$

由于  $\log |B(\omega)|$  为实偶数, 因此  $\hat{b}_0$ 、 $\hat{b}_n$  是实数。

当  $z \rightarrow e^{-i\omega}$  时,  $B(\omega) = B(z) \Big|_{z=e^{-i\omega}} = |B(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$ , 由式  $X(\omega) = B(\omega)R(\omega)$  得

$$\begin{aligned} \hat{B}(\omega) &= \log B(\omega) = \log |B(\omega)| + i\phi(\omega) \\ &= \hat{b}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n e^{-in\omega} \end{aligned} \quad (2-42)$$

把式 (2-42) 分成实部和虚部得

$$\begin{cases} \log|B(\omega)| = \hat{b}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \cos n\omega \\ \phi(\omega) = -\sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin n\omega \end{cases} \quad (2-43)$$

由希尔伯特变换可知  $\log|B(\omega)| \xrightarrow{HT} \phi(\omega)$ 。

另外, 可以推出由  $\hat{b}_n$  求  $b_n$  的递推公式

$$\begin{cases} b_0 = e^{\hat{b}_0} \\ b_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n (n+1-m) \hat{b}_n (n+1-m) b_m \end{cases} \quad (2-44)$$

利用式 (2-41) 由振幅谱  $|B(\omega)|$  或  $\log|B(\omega)|$  求得  $\hat{b}_n (n=0,1,\dots)$ , 再利用式 (2-44)

求得最小相位地震子波  $b_n = (b_0, b_1, \dots, b_{n+1}, \dots)$ 。

得到地震子波后, 进而可求出反子波因子  $a_n$ 。由地震子波求反子波可以在时间域中求, 也可以在频率域中求。

①在时间域上欲求地震子波  $b_n$  的反子波因子  $a_n$ , 只要使  $a_n * b_n = \delta_n$ , 写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} r_{bb}(0) & \cdots & r_{bb}(n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{bb}(n) & \cdots & r_{bb}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

解上述托布里兹矩阵即可得反子波因子  $a_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ 。

②在频率域上, 已知最小相位地震子波谱  $B(\omega)$  后, 欲求反子波谱  $A(\omega)$ , 只要使  $A(\omega)B(\omega)=1$ , 即

$$A(\omega) = \frac{1}{B(\omega)} \quad (2-46)$$

求出  $A(\omega)$  后, 经逆傅立叶变换后即可得反子波因子  $a_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ 。

求得反子波  $a_n$  后, 将其与地震记录  $x_n$  褶积, 即  $a_n * x_n = a_n * b_n * r_n = r_n$ , 即可得到反射系数  $r_n$ 。

## 2. 4 子波估计

### 2. 4. 1 地震子波

#### 2. 4. 1. 1 地震子波的概念

地震子波是一段具有确定起始时间和有限能量有限延续长度的信号,它是地震记录中地震波的基本单元。一般认为,地震震源激发时所产生的地震波仅是一个延续时间极短的尖脉冲,随着尖脉冲在粘弹性介质中传播,尖脉冲的高频成分很快衰减,频率变低,波形随之增长,变成了一个具有有限频带宽度和一定延续时间的地震子波。一个地震子波一般有二至三个相位的延续长度,大约有 100ms 左右。由于地震波是以地震子波的形式在地下传播,从而降低了地震勘探的分辨率。求取地震子波对地震记录作反滤波处理,可提高地震勘探的分辨率。

#### 2. 4. 1. 2 地震子波的数学模型

实际的地震子波是一个很复杂的问题。为了研究的方便,需要对地震子波进行模拟。目前普遍认为雷克提出的地震子波数学模型具有广泛的代表性,即雷克子波。最小相位子波的数学模型为

$$b(t) = e^{-\alpha t^2} \sin 2\pi ft \quad (2-47)$$

式中:  $f$  为子波的主频,  $\alpha = 2f^2 \ln(M)$  为子波衰减系数,  $M = |m_1/m_2|$  为最大波峰值  $m_1$  与最大波谷  $m_2$  之比。

将地震子波  $b(t)$  用傅立叶变换求其频谱为  $B(\omega)$ , 则有

$$B(\omega) = |B(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (2-48)$$

其中,  $|B(\omega)|$  为子波的振幅谱,  $\varphi(\omega)$  为子波的相位谱。像任何一个波函数一样,该波函数的特征均可用它的振幅谱和相位谱描述。对于复杂多变的子波,其变化最频繁的是波形的衰减形式和延续度。因此,一般地震子波具有比较稳定的振幅谱,但有变化较大的相位谱。如果取  $\psi(\omega) = -\varphi(\omega)$ , 称  $\psi(\omega)$  为相位延迟谱。对具有相同振幅谱的子波,根据其相位延迟谱的不同可分成最小相位子波、最大相位子波和混合相位子波。三种相位子波的波形和能量特征是:最小相位子

波的能量主要集中在前部，最大相位子波的能量主要集中在后部，而混合相位子波的能量主要集中在中部。三种相位地震子波如图 2-1 所示。实际中的地震子波主要是最小相位子波和混合相位子波。

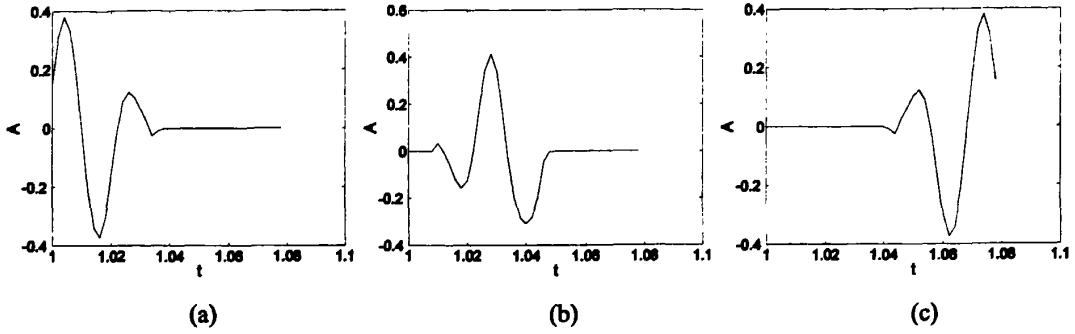


图 2-1 最小相位子波(a)，混合相位子波(b)和最大相位子波(c)

#### 2. 4. 2 基于二阶谱因式分解提取最小相位地震子波的几种方法

谱因式分解<sup>[38]</sup>是从谱所对应的无穷多个时间函数中选找一个最小相位时间函数的一种方法，可用于最小相位子波的估计。

##### 2. 4. 2. 1 求根法

具有相同自相关函数和谱的时间函数具有多重性。 $(b_0, b_1)$ 的谱是

$$\begin{aligned} \bar{B}\left(\frac{1}{Z}\right)B(Z) &= \left(\bar{b}_0 + \frac{\bar{b}_1}{Z}\right)(b_0 + b_1Z) \\ &= \frac{\bar{b}_1 b_0}{Z} + (\bar{b}_0 b_0 + \bar{b}_1 b_1) + \bar{b}_0 b_1 Z \end{aligned} \quad (2-49)$$

共轭的时间翻转函数 $(\bar{b}_1, \bar{b}_0)$ 的Z变换 $B_r(Z) = \bar{b}_1 + \bar{b}_0 Z$ ，其谱为

$$\begin{aligned} \bar{B}_r\left(\frac{1}{Z}\right)B_r(Z) &= \left(\bar{b}_1 + \frac{\bar{b}_0}{Z}\right)(b_1 + b_0 Z) \\ &= \frac{b_0 \bar{b}_1}{Z} + (b_0 \bar{b}_0 + b_1 \bar{b}_1) + b_1 \bar{b}_0 Z \end{aligned} \quad (2-50)$$

设子波 $B(Z) = b_0 + b_1 Z + b_2 Z^2$ ，因式分解的形式为

$$B(Z) = b_2 (Z_1 - Z)(Z_2 - Z) \quad (2-51)$$

其谱为



$$R(Z) = \bar{B} \left( \frac{1}{Z} \right) B(Z) + \bar{b}_2 b_2 \left( \bar{Z}_1 - \frac{1}{Z} \right) (Z_1 - Z) \left( \bar{Z}_2 - \frac{1}{Z} \right) (Z_2 - Z) \quad (2-52)$$

要使  $R(Z)$  保持不变, 可用幅值为 1 的任何复数去乘  $b_2$  都是可以的。

式 (2-52) 的左边能分解成形如  $\left( \bar{Z}_i - \frac{1}{Z} \right) (Z_i - Z)$  因式的乘积。 $(Z_i - Z)$  的时间函数是  $(Z_i, -1)$ , 并且它的复共轭时间函数反转为  $(-1, \bar{Z}_i)$ 。这样, 式 (2-51) 中的任何因子  $(Z_i - Z)$  可以用  $(-1 + \bar{Z}_i Z)$  来代替。将式 (2-51) 推广到一般情况, 可有  $N$  个因子  $[(Z_i - Z), i = 1, 2, \dots, N]$ 。通过颠倒因子的次序可组成  $Z^N$  个不同的子波, 而这些子波具有的谱相同。因子  $(Z_i - Z)$  表示  $Z_i$  是  $B(Z)$  和  $R(Z)$  的根。在复平面上, 若  $B(Z)$  有根  $Z_i$ , 则  $Z_i$  也必定是  $R(Z)$  的根。此外,  $R(Z)$  还有根  $1/\bar{Z}_i$ 。用  $1/\bar{Z}_i$  替代某个根  $Z_i$  只改变  $B(Z)$ , 而不改变  $R(Z)$ 。用根  $1/\bar{Z}_i$  替代根  $Z_i$  的运算可记为  $B'(Z) = \frac{Z - 1/\bar{Z}_i}{1 - Z/\bar{Z}_i} B(Z)$ 。按定义,  $R(Z)$  的根是方程  $R(Z) = 0$  的解。如果  $R(Z)$  乘以  $Z^N$  (设  $R(Z)$  的最高次幂为  $N$ ), 那么  $Z^N R(Z)$  是一个多项式,  $Z_i$  必是  $Z^N R(Z) = 0$  的解。求多项式的根虽然比较麻烦, 但是已有标准的求法。方程的根全部求出后, 先要检查一下这些根是否如  $Z_i$  和  $1/\bar{Z}_i$  成对出现。如果不成对, 则说明  $R(Z)$  并不是一个真的谱。如果成对, 则对应于单位圆内的每一零点, 在单位圆外就必然有一个零点。若子波是最小相位的, 只需将单位圆外的全部根收集起来, 构造成一个子波  $B(Z)$ , 即  $B(Z) = b_N (Z - Z_1)(Z - Z_2) \dots (Z - Z_N)$ 。

求根法的价值在于, 它体现了提取最小相位子波的一些基本原则:

- ① 每一个谱具有一个最小相位子波, 且除开一个幅值为 1 的复标量因子的区别之外, 是唯一的。
- ② 对任意一个谱, 相应有无穷多个时间函数。
- ③ 并非所有函数都是某一函数的自相关函数。

#### 2. 4. 2. 2 陶布里兹法

假设一个最小相位子波  $b(t)$ ，其谱为  $R(Z) = \bar{B}(1/Z)B(Z)$ ， $B(Z)$  的倒数  $1/B(Z) = A(Z)$ 。按照以下方法计算可得到  $A(Z)$ 。

$$R(Z) = \bar{B}\left(\frac{1}{Z}\right)B(Z) = \frac{\bar{B}(1/Z)}{A(Z)} \quad (2-53)$$

$$R(Z)A(Z) = \bar{B}\left(\frac{1}{Z}\right) = \bar{b}_0 + \frac{\bar{b}_1}{Z} + \dots \quad (2-54)$$

可利用等式两端同幂项系数相等的关系来求  $A(Z)$ 。例如，令  $A(Z)$  是三项多项式  $a_0 + a_1Z + a_2Z^2$ ，在式 (2-54) 中  $Z^0$  的系数为  $r_0a_0 + r_{-1}a_1 + r_{-2}a_2 = \bar{b}_0$ ， $Z^1$  的系数是  $r_1a_0 + r_0a_1 + r_{-1}a_2 = 0$ ， $Z^2$  的系数是  $r_2a_0 + r_1a_1 + r_0a_2 = 0$ 。

联立以上三个系数的表达式，得方程组

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} \\ r_1 & r_0 & r_{-1} \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-55)$$

记  $a'_k = a_k/a_0$ ，又由  $\bar{A}(Z)\bar{B}(Z) = 1$ ，可知  $\bar{b}_0 = 1/a_0\bar{a}_0$ 。式 (2-55) 的等号两边除以  $a_0$ ，得到最一般形式

$$\begin{pmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} \\ r_1 & r_0 & r_{-1} \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-56)$$

这三个方程中含有三个未知数  $a'_1$ ， $a'_2$ ， $v$ 。为了使式 (2-56) 便于应用解标准联立方程组的程序求解，应对等式两边的列向量除以  $v$ 。解此方程得到  $a_0$ ，幅值为  $1/\sqrt{v}$ ，但相位是任意的。

#### 2. 4. 2. 3 怀特指数—对数法

用怀特指数—对数法作谱因式分解，只需把一个幂级数代入另一个幂级数中。给定某一自相关函数  $r_i$ ，则

$$R(Z) = \dots + r_{-1}Z^{-1} + r_0 + r_1Z + r_2Z^2 + \dots \quad (2-57)$$

若在单位圆上 $|R| > 2$ ，则除以一个比例因子。把这个幂级数代入由对数展开的幂级数中，得

$$\begin{aligned} U(Z) &= \ln R(Z) \\ &= (R-1) - \frac{(R-1)^2}{2} + \frac{(R-1)^3}{3} - \dots \quad 0 < R \leq 2 \\ &= \dots + u_{-1}Z^{-1} + u_0 + u_1Z + u_2Z^2 + \dots \end{aligned} \quad (2-58)$$

舍去 $U(Z)$ 中的负次幂，剩余部分记为 $U^+$ ，即 $U^+(Z) = \frac{u_0}{2} + u_1Z + u_2Z^2 + \dots$ ，

把它代入由指数展开的幂级数里

$$B(Z) = e^{U^+(Z)} = 1 + U^+ + \frac{(U^+)^2}{2!} + \frac{(U^+)^3}{3!} + \dots \quad (2-59)$$

所要求的最小相位子波便是 $B(Z)$ ，它的谱正好是 $R(Z)$ 。

$$\begin{aligned} R(Z) &= e^{\ln R(Z)} \\ &= \exp\left(\frac{u_0}{2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} u_k Z^k + \frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k Z^k\right) \\ &= \exp\left(\frac{u_0}{2} + \sum_{k=-\infty}^{-1} u_k Z^k\right) \exp\left(\frac{u_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k Z^k\right) \\ &= \exp\left[\bar{U}^+\left(\frac{1}{Z}\right)\right] \exp[\bar{U}^+(Z)] \\ &= \bar{B}\left(\frac{1}{Z}\right) B(Z) \end{aligned} \quad (2-60)$$

把 $R(Z)$ 因式分解成所要求的共轭对，只要证明 $B(Z) = e^{U^+(Z)}$ 确实是最小相位就行了。已知条件是： $U^+(Z)$ 有限，且 $U^+(Z)$ 不包括 $Z^{-1}$ 的幂。通过以下两种方法可以证明。一种方法是指明 $U(Z)$ 的虚部在单位圆上，是 $B(Z)$ 的相位角。要证明 $B(Z)$ 是最小相位，只须说明 $B(Z)$ 不因 $Z$ 环绕单位圆转上若干圈（ $2\pi$ 的若干倍）而随之增大。对最小相位来说，其相位必须以 $2\pi$ 为周期。显然，相位 $u_1 \sin \omega + u_2 \sin 2\omega + \dots$ 一定满足这个条件。第二种方法中，要指出在某一点 $Z_0$ 要使 $B(Z) = e^{U^+(Z)}$ 为零的唯一情况是 $U^+(Z_0)$ 等于 $-\infty$ ，即 $U^+$ 在 $Z_0$ 不收敛。但这在单位圆内不可能发生，因为 $U(Z)$ 的对数级数在单位圆上绝对收敛，这就意味着， $U^+(Z)$ 在单位圆内收敛（有限）。由于 $B(Z)$ 在单位圆内不可能有零点，所以它

一定是最小相位的子波。

#### 2. 4. 2. 4 柯尔莫廓洛夫方法

从时间函数或  $Z$  变换  $X(Z) = x_0 + x_1 Z + \dots$  出发, 令  $X_k$  表示该时间函数的变换, 即, 在单位圆上取几个点 ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), 计算出  $X(Z)$  的值。

$$R_k = \bar{X}_k X_k = e^{m(R_k)} = e^{U_k} \quad (2-61)$$

在其指数部分上加、减一待定函数  $\phi_k$ , 上式变为

$$R_k = \exp\left[\frac{1}{2}(U_k - i\phi_k)\right] \exp\left[\frac{1}{2}(U_k + i\phi_k)\right] = \bar{B}_k B_k \quad (2-62)$$

只要选定一个合适的  $\phi_k$ , 保证  $B(k)$  为最小相位即可。在怀特方法中,  $U^+(Z)$  最突出的性质是有限, 且在  $t = 0$  之前时间函数  $u_t$  为零。因此, 需要选定的  $\phi_k$  能使  $U_k + i\phi_k$  变换到时间域, 使其时间函数  $u_t^*$  对于负时间为零。这里可借助希尔伯特变换来达到。

### 2. 5 地震反褶积与子波估计数值算例

#### 2. 5. 1 模拟算例

图2-2(a)为非高斯分布的随机反射系数(300个样点, 采样率2ms), 图2-2(b)是模型地震子波, 取300个样点作为褶积算子, 图2-2(c)是反射系数和子波褶积得到的模拟地震记录(也取300个样点)。

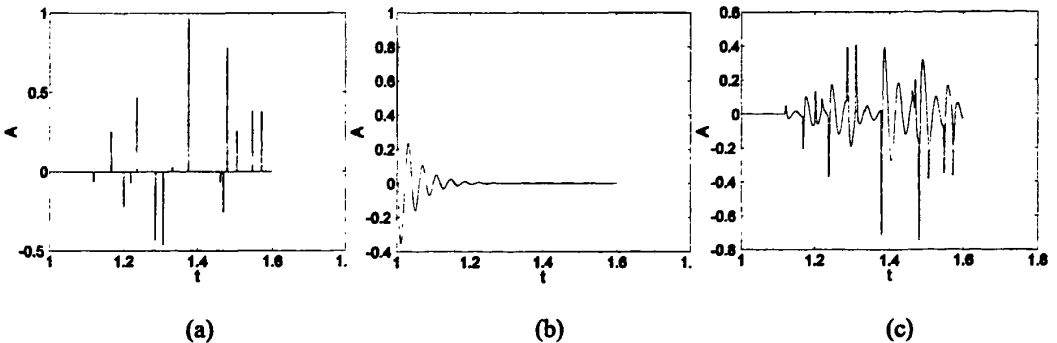


图2-2 随机反射系数(a), 模型地震子波(b)和模拟地震记录(c)

#### ① 最小平方反褶积数值算例

图 2-3 为利用最小平方反褶积方法得到的地震子波(a)和反射系数(b)。

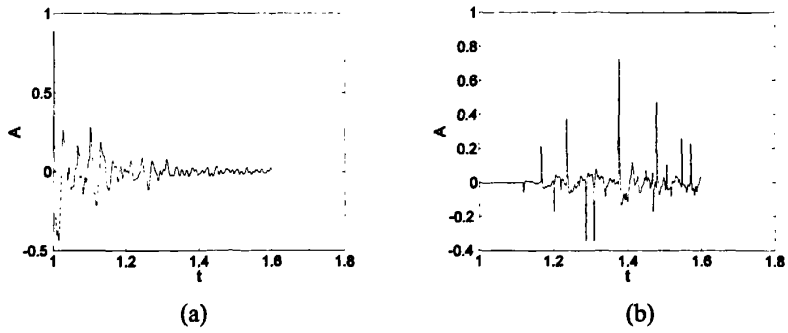


图2-3 最小平方反褶积方法得到的反射系数(a)，地震子波(b)

### ② 最大熵子波反褶积数值算例

图 2-4 为利用最大熵子波反褶积方法得到的地震子波(a)和反射系数(b)。

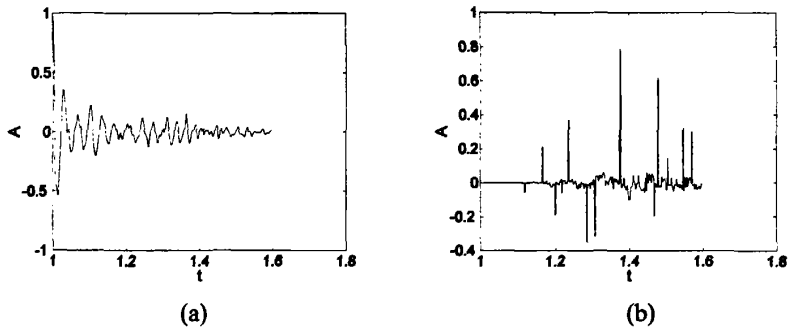


图2-4 最大熵子波反褶积方法得到的反射系数(a)，地震子波(b)

### ③ 希尔伯特子波反褶积数值算例

图 2-5 为希尔伯特子波反褶积方法得到的地震子波(a)和反射系数(b)。

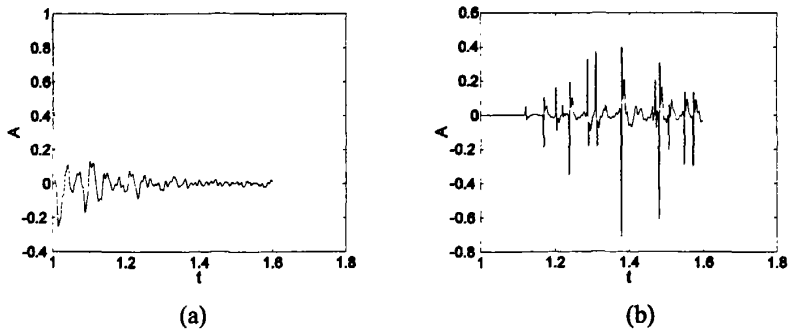


图2-5 希尔伯特子波反褶积方法得到的反射系数(a)，地震子波(b)

由以上模拟数值算例可知，常规反褶积方法在地震子波是最小相位，反射系数为白噪声的假设条件下能够较好的解决地震反褶积问题，实现地震子波和反射系数的求取。通过模拟算例的比较，最大熵反褶积方法所得到的地震子波和反射系数相对较好。

### ④ 基于二阶谱因式分解提取地震子波的数值算例

图 2-6(a)为利用柯尔莫廓洛夫方法估计的地震子波, 通过图 2-6(b)中。

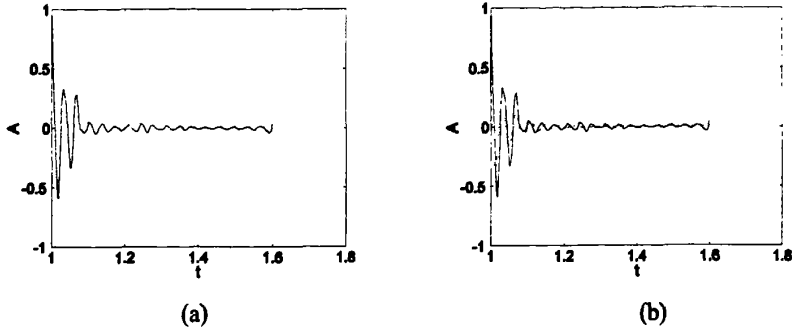


图2-6 柯尔莫廓洛夫方法估计的地震子波(a), (b)为与模拟的地震子波的对比

### 2. 5. 2 实际二维剖面算例

图 2-7 为一 64 道, 每道 256 个样点, 采样率 2ms 的实际二维地震数据。图 2-8 是利用最小二乘反褶积法求出的地震子波剖面(a)和反射系数剖面(b), 图 2-9 是利用最大熵子波反褶积法求出的地震子波剖面(a)和反射系数剖面(b), 图 2-10 是利用希尔伯特变换子波反褶积法求出地震子波剖面(a)和反射系数剖面(b)。

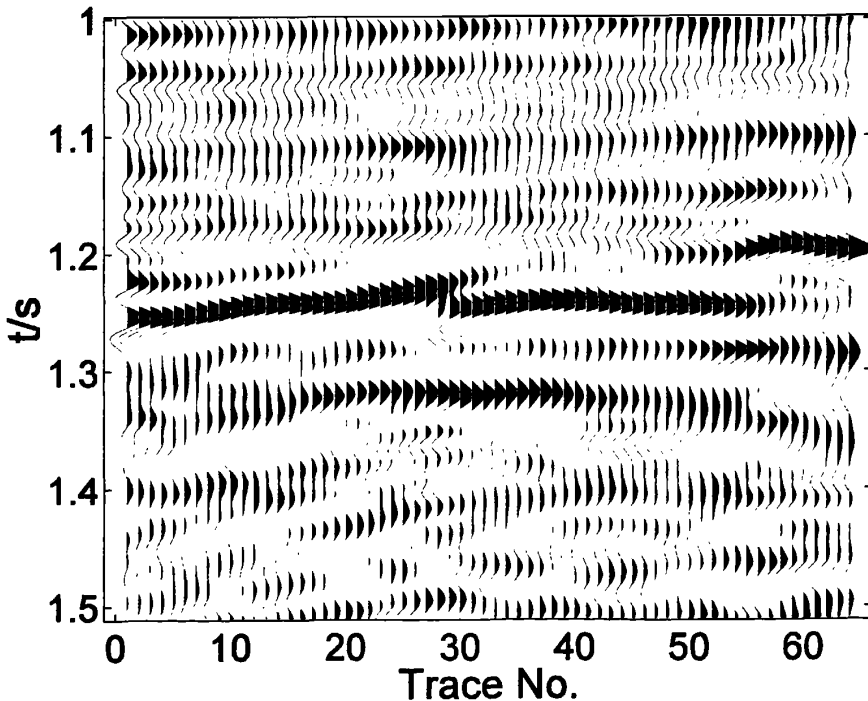
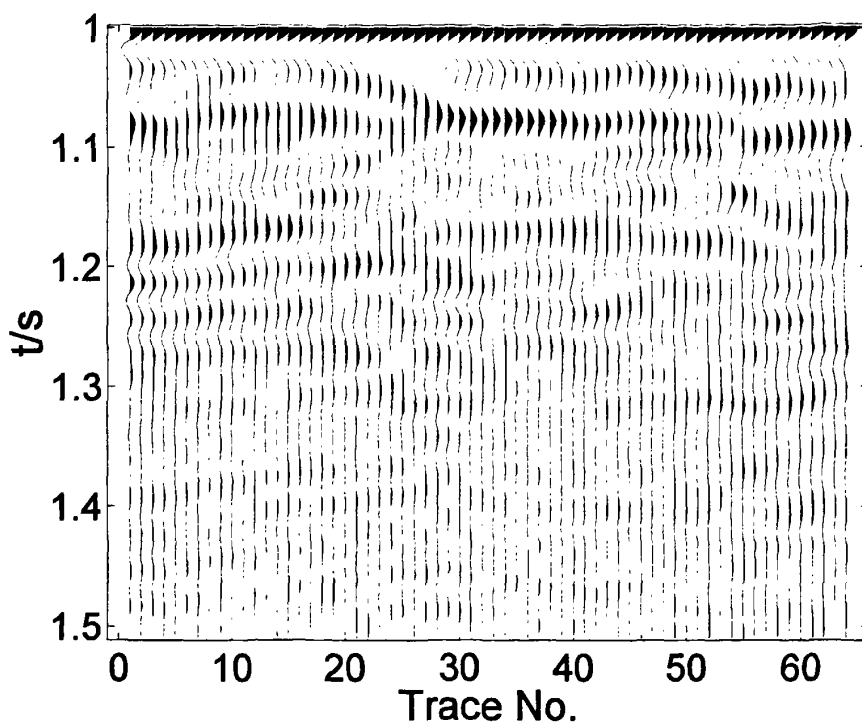
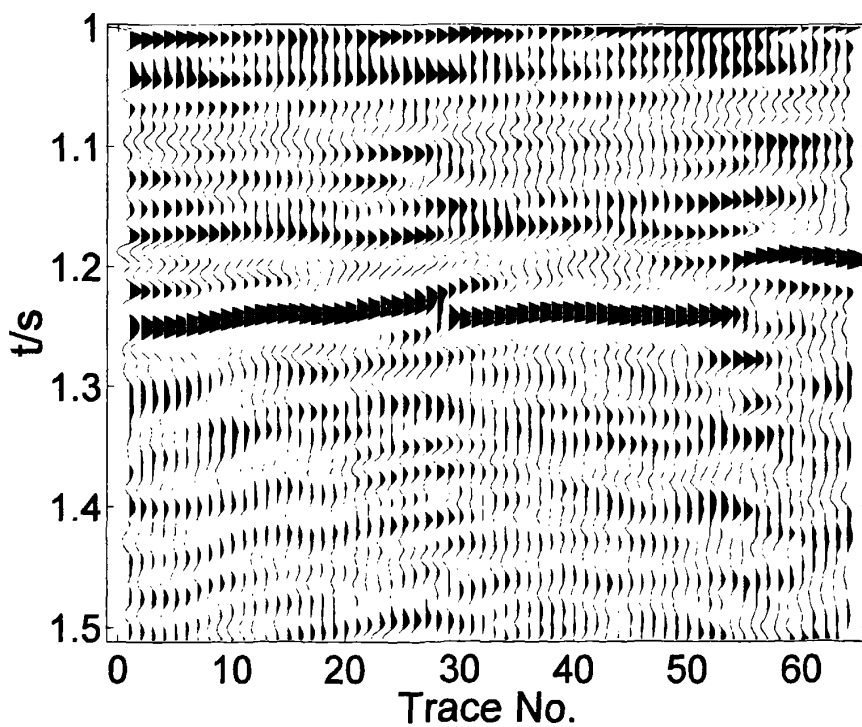


图 2-7 实际二维地震道

#### ① 最小平方反褶积方法



(a)



(b)

图 2-8 最小二乘反褶积方法求出的地震子波剖面(a)和反射系数剖面(b)

## ② 最大熵子波反褶积数值算例

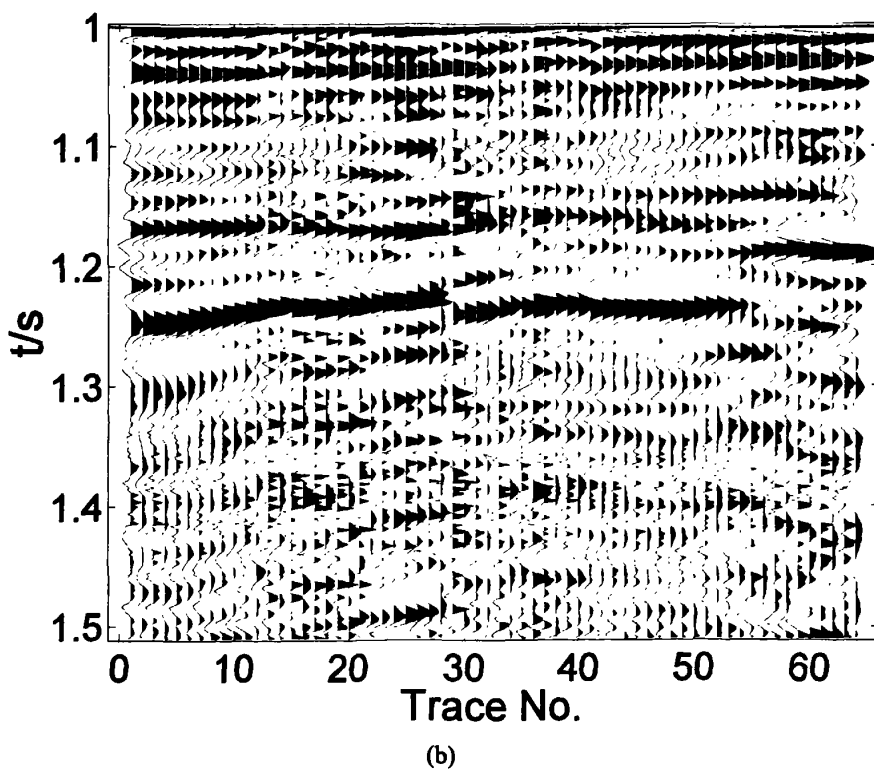
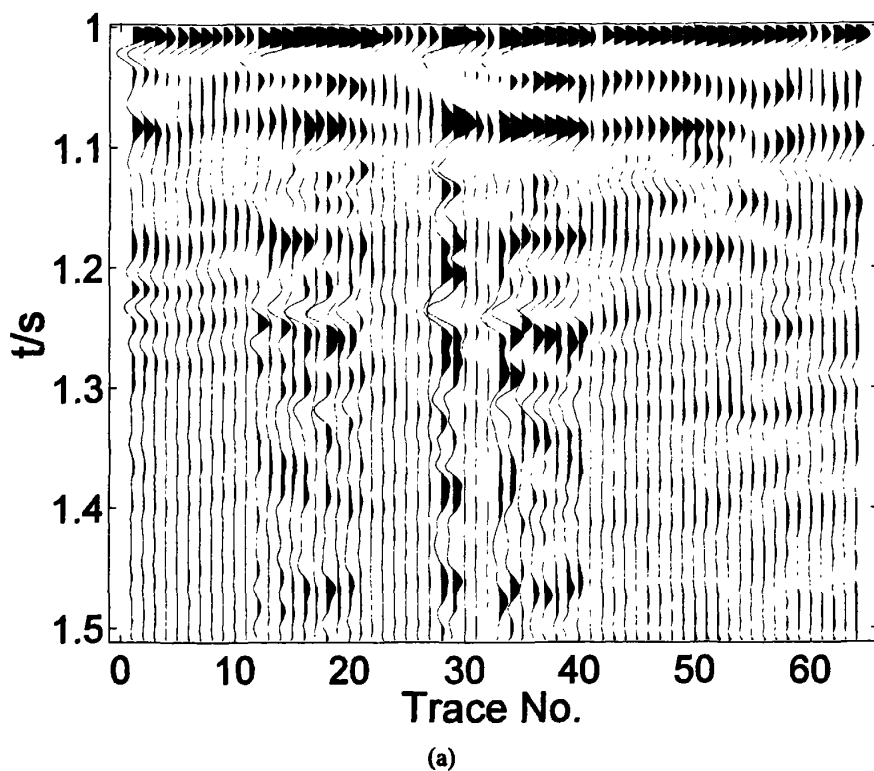
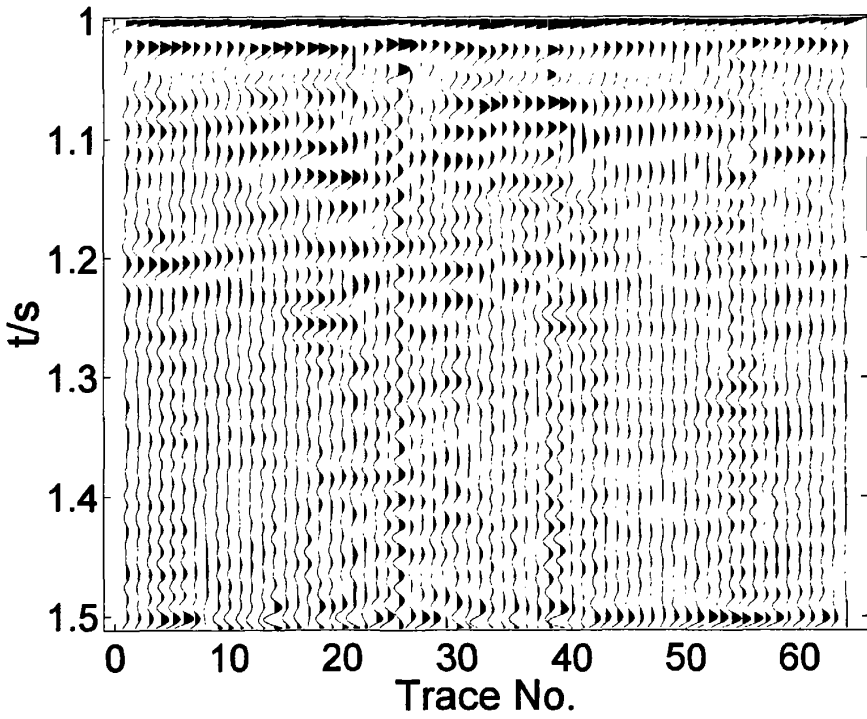


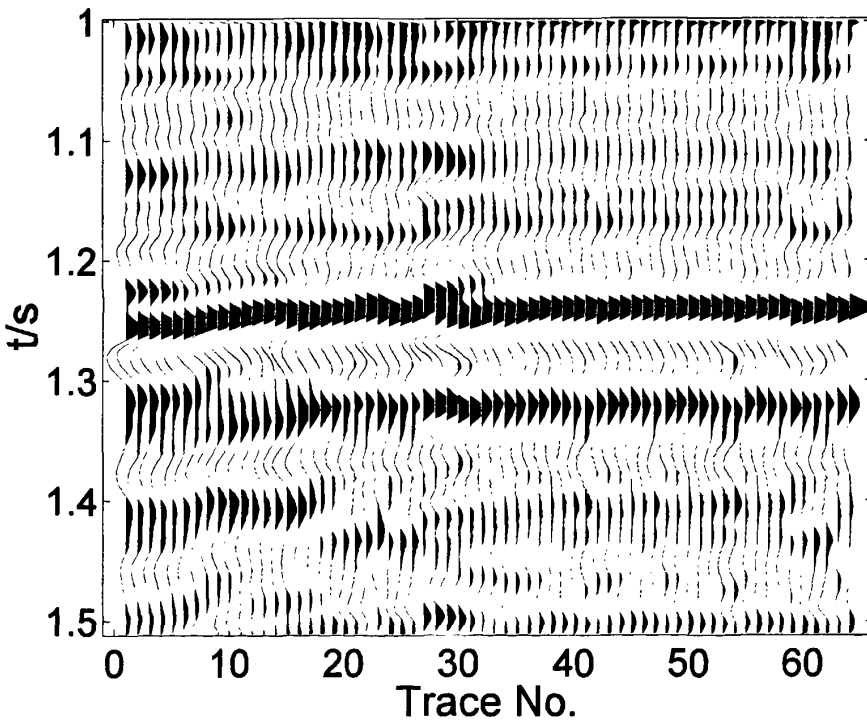
图 2-9 最大熵子波反褶积方法求出的地震子波剖面(a)和反射系数剖面(b)

### ③ 希尔伯特子波反褶积数值算例





(a)



(b)

图 2-10 希尔伯特子波反褶积方法求出的地震子波剖面(a)和反射系数剖面(b)

### 3 基于高阶统计量实现非最小相位子波和反射系数估计

#### 3.1 高阶统计量方法的理论基础

非高斯信号处理是信号理论的一个新领域,与传统信号处理不同,非高斯信号处理使用高阶统计量作为主要分析工具,高阶累积量<sup>[39,40]</sup>作为一种高阶统计量,其应用引起了人们广泛的兴趣,尤其是近几年来,其迅速发展使大量新的重要理论结果涌现,可以帮助人们去解决很多实际问题。

##### 3.1.1 特征函数

定义①: 设随机变量 $\xi$ 的分布函数为 $F(x)$ , 其特征函数为

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} dF(x) \quad (3-1)$$

特征函数 $\Phi(\omega)$ 在原点有最大值, 即

$$|\Phi(\omega)| \leq |\Phi(0)| = 1 \quad (3-2)$$

利用概率论中的公式:

$$E\{g(\xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) \quad (3-3)$$

可得到特征函数一般形式

$$\Phi(\omega) = E\{e^{j\omega\xi}\} \quad (3-4)$$

特别地, 当 $\xi$ 为连续随机变量,  $f(x)$ 为概率密度, 则式(3-1)变为

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) \quad (3-5)$$

由傅立叶变换可以得到

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{-j\omega x} d\omega \quad (3-6)$$

令随机变量 $\xi$ 的分布函数为 $F_{\xi} = F_{\xi}(x)$ , 且 $\Phi_{\xi}(\omega) = E\{e^{j\omega\xi}\}$ 为特征函数。设

$\eta = a\xi + b$ , 则有

$$\Phi_{\eta}(\omega) = e^{j\omega b} \Phi_{\xi}(a\omega) \quad (3-7)$$

进一步, 若  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  为独立的随机变量, 且  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , 则

$$\Phi_{\xi}(\omega) = \prod_{i=1}^n \Phi_{\xi_i}(\omega) \quad (3-8)$$

即独立(有界的)随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积。

若  $F(x)$  和  $G(x)$  是具有相同特征函数的分布函数, 即对于所有  $x \in R$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} dG(x) \quad (3-9)$$

则有  $F(x) \equiv G(x)$

定义②: 设  $X = [X_1, \dots, X_n]^T$  是一随机向量, 且  $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_n]^T$ , 则随机向量  $X$  的特征函数定义为

$$\Phi(\omega_1, \dots, \omega_n) = E \left\{ e^{j(\omega_1 X_1 + \dots + \omega_n X_n)} \right\} \quad (3-10)$$

关于随机向量, 有如下结论: 随机向量  $X = [X_1, \dots, X_n]^T$  的各个分量彼此独立的充分条件是, 其特征函数是各分量的特征函数之积, 即

$$E \left\{ e^{j(\omega_1 X_1 + \dots + \omega_n X_n)} \right\} = \prod_{i=1}^n E \left\{ e^{j\omega_i X_i} \right\}, (\omega_1, \dots, \omega_n) \in R \quad (3-11)$$

### 3. 1. 2 高阶统计量的定义

高阶统计量, 也即二阶以上的统计量, 一般包括高阶矩、高阶累积量以及它们的谱, 此外, 还有循环累积量, 倒高阶累积量谱...倒多谱等<sup>[39,41,42]</sup>, 目前高阶统计量应用研究主要集中在三阶累积量、四阶累积量及相应的高阶谱(双谱和三阶谱)方面。

#### 3. 1. 2. 1 高阶矩和高阶累积量的定义

特征函数方法是概率论和数理统计的主要分析工具之一, 因此, 首先从特征函数入手, 给出高阶矩和高阶累积量的定义。

根据特征函数的定义①中的式(3-1), 令  $s = j\omega$ , 并记  $\Phi(\omega)$  为  $\Phi(s)$ , 则有随机变量  $X$  的特征函数为

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x) = E \left\{ e^{sx} \right\} \quad (3-12)$$

对上式求  $k$  次导数得:  $\Phi^k(0) = E\{X^k e^{sX}\}$ 。因此,

$$m_k = E\{X^k\} = \Phi^k(s)|_{s=0} \quad (3-13)$$

或

$$m_k = (-j)^k \Phi^k(\omega)|_{\omega=0} \quad (3-14)$$

即  $\Phi(s)$  在原点的  $k$  阶导数等于  $X$  的  $k$  阶矩  $m_k$ 。因此常将  $\Phi(s)$  或  $\Phi(\omega)$  称为  $X$  的矩生成函数 (又叫第一特征函数)。

$$\Psi(s) = \ln \Phi(s) \quad (3-15)$$

或  $\Psi(s)$  被称为  $X$  的累积量生成函数 (又叫第二特征函数)。随机变量  $X$  的  $k$  阶累积量生成函数  $\Psi(s)$  的  $k$  阶导数在原点的值, 即

$$c_k = \frac{d^k \Psi(s)}{ds^k} \Big|_{s=0} \quad (3-16)$$

由式 (3-12) 得  $\Phi(0)=1$ , 从而有  $\Psi(0)=0$ 。因此, 我们将  $\Psi(s)$  以 Taylor 级数展开得

$$\Psi(s) = c_1 s + \frac{1}{2} c_2 s^2 + \cdots + \frac{1}{k!} c_k s^k + \cdots \quad (3-17)$$

另一方面, 由于  $\Phi(s) = e^{\Psi(s)}$ , 所以有

$$\Phi'(s) = \Psi'(s) e^{\Psi(s)}, \quad \Phi''(s) = \left\{ \Psi''(s) + [\Psi'(s)]^2 \right\} e^{\Psi(s)}$$

令  $s=0$ , 得

$$\Phi'(0) = \Psi'(0) = m_1, \quad \Phi''(0) = \left\{ \Psi''(0) + [\Psi'(0)]^2 \right\} = m_2 \quad (3-18)$$

比较式 (3-16) 和式 (3-18) 可知,

$$c_1 = m_1, \quad c_2 = m_2 - m_1^2 \quad (3-19)$$

推广到随机向量的高阶矩和高阶累积量的定义, 令  $X = [X_1, \dots, X_n]^T$  为一随机向量。对其特征函数  $\Phi(\omega_1, \dots, \omega_k) = E\{\exp[j(\omega_1 X_1 + \dots + \omega_k X_k)]\}$  求  $r = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$

次偏导, 可得  $\frac{\partial^r \Phi(\omega_1, \dots, \omega_k)}{\partial \omega_1^{\gamma_1} \dots \partial \omega_k^{\gamma_k}} = j^r E\{X_1^{\gamma_1} \dots X_k^{\gamma_k} e^{j(\omega_1 X_1 + \dots + \omega_k X_k)}\}$ 。若令  $\omega_1 = \dots = \omega_k = 0$ ,

则上式可得

$$m_{\gamma_1 \dots \gamma_k} = E\{X_1^{\gamma_1} \dots X_k^{\gamma_k}\} = (-j)^r \frac{\partial^r \Phi(\omega_1, \dots, \omega_k)}{\partial \omega_1^{\gamma_1} \dots \partial \omega_k^{\gamma_k}} \Big|_{\omega_1 = \dots = \omega_k = 0} \quad (3-20)$$

该式是随机向量  $[X_1, \dots, X_k]$  的  $r$  阶矩的定义。

类似的,  $[X_1, \dots, X_k]$  的  $r$  阶累积量可用其累积量生成函数  $\Psi(\omega_1, \dots, \omega_k) = \ln \Phi(\omega_1, \dots, \omega_k)$  定义, 即

$$\begin{aligned} c_{\gamma_1 \dots \gamma_k} &= (-j)^r \frac{\partial^r \Psi(\omega_1, \dots, \omega_k)}{\partial \omega_1^{\gamma_1} \dots \partial \omega_k^{\gamma_k}} \Big|_{\omega_1 = \dots = \omega_k = 0} \\ &= (-j)^r \frac{\partial^r \ln \Phi(\omega_1, \dots, \omega_k)}{\partial \omega_1^{\gamma_1} \dots \partial \omega_k^{\gamma_k}} \Big|_{\omega_1 = \dots = \omega_k = 0} \end{aligned} \quad (3-21)$$

可以证明, 偏导数  $\frac{\partial^{\gamma_1 \dots \gamma_k}}{\partial \omega_1^{\gamma_1} \dots \partial \omega_k^{\gamma_k}} \Phi_X(\omega_1, \dots, \omega_k)$  存在且连续。因此, 如果将

$\Phi_X(\omega_1, \dots, \omega_k)$  展开成 Taylor 级数, 则有

$$\Phi_X(\omega_1, \dots, \omega_k) = \sum_{\gamma_1 + \dots + \gamma_k \leq n} \frac{j^{\gamma_1 + \dots + \gamma_k}}{\gamma_1! \dots \gamma_k!} m_{\gamma_1 \dots \gamma_k} \omega_1^{\gamma_1} \dots \omega_k^{\gamma_k} + o(|\omega|^n) \quad (3-22)$$

其中,  $|\omega| = |\omega_1| + \dots + |\omega_k|$ 。

另外,  $\Phi_X(\omega_1, \dots, \omega_k)$  是连续的, 且  $\Phi_X(0, \dots, 0) = 1$ , 因而该函数在零点的某个邻域  $|\omega| < \delta$  内不为零。在该邻域内, 偏导数  $\frac{\partial^{\gamma_1 \dots \gamma_k}}{\partial \omega_1^{\gamma_1} \dots \partial \omega_k^{\gamma_k}} \ln \Phi_X(\omega_1, \dots, \omega_k)$  存在且连续, 其中  $\ln Z$  表示对数的主值。因此, 我们可用 Taylor 公式将  $\ln \Phi_X(\omega_1, \dots, \omega_k)$  展开成

$$\ln \Phi_X(\omega_1, \dots, \omega_k) = \sum_{\gamma_1 + \dots + \gamma_k \leq n} \frac{j^{\gamma_1 + \dots + \gamma_k}}{\gamma_1! \dots \gamma_k!} c_{\gamma_1 \dots \gamma_k} \omega_1^{\gamma_1} \dots \omega_k^{\gamma_k} + o(|\omega|^n) \quad (3-23)$$

为使式 (3-22) 和式 (3-23) 的表达简化, 引入符号:  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_k)$  为一向量, 其分量是非负整数, 令  $\mathbf{v}! = v_1! \dots v_k!$ ,  $|\mathbf{v}| = v_1 + \dots + v_k$ ,  $\omega^{\mathbf{v}} = \omega_1^{v_1} \dots \omega_k^{v_k}$ , 并令  $c_{\mathbf{v}} = c_{v_1, \dots, v_k}$  和  $m_{\mathbf{v}} = m_{v_1, \dots, v_k}$ 。带入式 (3-22) 和式 (3-23), 分别将其简化为

$$\Phi(\omega) = \sum_{|\mathbf{v}| \leq n} \frac{j^{|\mathbf{v}|}}{\mathbf{v}!} m_{\mathbf{v}} \omega^{\mathbf{v}} + o(|\omega|^n) \quad (3-24)$$

$$\ln \Phi(\omega) = \sum_{|\mathbf{v}| \leq n} \frac{j^{|\mathbf{v}|}}{\mathbf{v}!} c_{\mathbf{v}} \omega^{\mathbf{v}} + o(|\omega|^n) \quad (3-25)$$

即随机变量  $[X_1, \dots, X_k]$  的  $v = (v_1, \dots, v_k)$  阶矩和累积量有可分别定义为矩生成函数和累积量生成函数的 Taylor 级数展开中  $\omega^v$  项的系数。

当取  $v_1 = \dots = v_k = 1$ , 可得到最常见的  $k$  阶矩和  $k$  阶累积量, 分别记为:

$$m_k = m_{1, \dots, 1} = \text{mom}(X_1, \dots, X_k) \quad (3-26)$$

$$c_k = c_{1, \dots, 1} = \text{cum}(X_1, \dots, X_k) \quad (3-27)$$

随机过程的高阶矩和高阶累积量:

设  $\{x(n)\}$  为零均值的  $k$  阶平稳随机过程, 则该过程的  $k$  阶矩  $m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})$  定义为:

$$m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) = \text{mom}\{x(n), x(n+\tau_1), \dots, x(n+\tau_{k-1})\} \quad (3-28)$$

$k$  阶累积量  $c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})$  定义为:

$$c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) = \text{cum}\{x(n), x(n+\tau_1), \dots, x(n+\tau_{k-1})\} \quad (3-29)$$

对于一个零均值的平稳随机过程  $\{x(n)\}$ , 其高阶累积量也可定义为

$$c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) = E\{x(n), x(n+\tau_1), \dots, x(n+\tau_{k-1})\} - E\{g(n)g(n+\tau_1)\dots g(n+\tau_{k-1})\} \quad (3-30)$$

$g(n)$  是与  $\{x(n)\}$  具有相同功率谱密度的高斯过程。

### 3. 1. 2. 2 高阶矩谱和高阶累计量谱的定义

信号的功率谱密度定义为其自相关函数的傅立叶变换。类似的, 我们可引出对应于高阶矩和高阶累积量的谱的定义<sup>[43]</sup>。假设我们所考虑的信号为离散随机信号。

高阶矩谱定义: 设高阶矩  $m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})$  是绝对可和的, 即

$$\sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} |m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})| < \infty \quad (3-31)$$

则  $k$  阶矩谱定义为  $k$  阶矩的  $k-1$  维离散傅立叶变换, 即

$$M_{kx}(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) \exp\left[-j \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \tau_i\right] \quad (3-32)$$

高阶累计量谱定义: 设高阶累计量  $c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1})$  是绝对可和的:

$$\sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} |c_{kx}(\tau_1, \cdots, \tau_{k-1})| < \infty \quad (3-33)$$

则  $k$  阶累积量谱定义为  $k$  阶累积量的  $k-1$  维离散傅立叶变换, 即

$$M_{kx}(\omega_1, \cdots, \omega_{k-1}) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} c_{kx}(\tau_1, \cdots, \tau_{k-1}) \exp \left[ -j \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \tau_i \right] \quad (3-34)$$

高阶矩、高阶累积量及高阶矩谱和高阶累积量谱是主要的四种高阶统计量。最常用的高阶谱是三阶谱

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c_{3x}(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} \quad (3-35)$$

和四阶谱

$$T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_3=-\infty}^{\infty} c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)} \quad (3-36)$$

三阶谱又叫双谱, 四阶谱又叫三谱。

对于一个离散时间的确定性信号(能量信号和周期信号), 我们将其双谱和三谱定义如下:

① 令  $\{x(n)\}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$  是一个具有有限能量的确定性信号, 则其傅立叶变换、能量谱、双谱和三谱分别定义如下:

$$\text{傅立叶变换} \quad X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\omega k} \quad (3-37)$$

$$\text{能量谱} \quad P_x(\omega) = X(\omega) X^*(\omega) \quad (3-38)$$

$$\text{双谱} \quad B_x(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1) X(\omega_2) X^*(\omega_1 + \omega_2) \quad (3-39)$$

$$\text{三谱} \quad T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = X(\omega_1) X(\omega_2) X(\omega_3) X^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad (3-40)$$

② 令  $\{x(n)\}$  是一周期性信号, 其周期为  $N$ , 即  $x(n) = x(n+N)$ , 则其傅立叶变换、能量谱、双谱和三谱分别定义如下:

$$\text{Fourie 序列} \quad X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}\omega k}, \omega = 0, 1, \cdots, N-1 \quad (3-41)$$

$$\text{能量谱} \quad P_x(\omega) = \frac{1}{N} X(\omega) X^*(\omega) \quad (3-42)$$

$$\text{双谱} \quad B_x(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{N} X(\omega_1) X(\omega_2) X^*(\omega_1 + \omega_2) \quad (3-43)$$

$$\text{三谱} \quad T_x(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{N} X(\omega_1) X(\omega_2) X(\omega_3) X^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad (3-44)$$

### 3. 1. 2. 3 高阶倒谱的定义

设  $X(n)$  为某一确定性信号或随机信号，则其倒谱定义为

$$\hat{X}(n) = F^{-1}[\ln X(\omega)] \quad (3-45)$$

其中， $F^{-1}(\cdot)$  表示傅立叶逆变换， $x(\omega)$  为  $x(n)$  经傅立叶变换后的值，即

$$X(\omega) = |X(\omega)| \exp[j\varphi(\omega)] \quad (3-46)$$

Pan 和 Nikias<sup>[44]</sup>将类似的思想应用于高阶谱，引出了高阶倒谱（倒多谱）的概念。以三阶谱（双谱）

$$S_{3y}(z_1, z_2) = \gamma_{3y} X(z_1) X(z_2) X(z_1^{-1} z_2^{-1}) \quad (3-47)$$

为例，先取对数  $\hat{S}_{3y}(z_1, z_2) = \ln S_{3y}(z_1, z_2)$ ，再取  $\hat{S}_{3y}(z_1, z_2)$  的  $z$  逆变换，就得到倒双谱

$$S_y(m, n) = Z^{-1}[\ln S_{3y}(z_1, z_2)] \quad (3-48)$$

类似的，可以定义更高阶的倒多谱。

### 3. 1. 3 高阶矩和高阶累积量的转换关系

令  $X = [X_1, \dots, X_n]^T$  为一随机向量， $E\{|X_i|^n\} \leq \infty, i=1, 2, \dots, k, n \geq 1$ ，则对于满足  $|v| \leq n$  的  $v = (v_1, \dots, v_k)$ ，高阶矩和高阶累积量之间存在下列转换关系：

$$m_{(v)} = \sum_{\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(q)} = v} \frac{1}{q!} \frac{v!}{\lambda^{(1)}! \dots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^q c(\lambda^{(p)}) \quad (3-49)$$

$$c_{(v)} = \sum_{\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(q)} = v} \frac{(-1)^{q-1}}{q!} \frac{v!}{\lambda^{(1)}! \dots \lambda^{(q)}!} \prod_{p=1}^q m(\lambda^{(p)}) \quad (3-50)$$

其中， $\sum_{\lambda^{(1)} + \dots + \lambda^{(q)} = v}$  表示在非负整数向量  $\lambda^{(p)}$  的全部有序集合 ( $|\lambda^{(p)}| > 0$ ，且其

和为  $v$ ) 内求和。

式 (3-49) 和式 (3-50) 描述了高阶矩和高阶累积量之间的转换关系，但不够简洁。为此，引入如下符号。令  $X = [X_1, \dots, X_n]^T$  为一随机向量， $I_x = \{1, 2, \dots, k\}$



为其指示符集。若  $I \subseteq I_x$ ，则令  $X_I$  表示其指示符属于集合  $I$  的  $X$  的各分量组成的向量。设向量  $\chi(I) = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ ，且当  $i \in I$  时， $\chi_i = 1$ ；当  $i \notin I$  时， $\chi_i = 0$ 。这些向量是与集合  $I \subseteq I_x$  一一对应的，因此可得  $m_x(I) = m_x^{(\chi(I))}$ ， $c_x(I) = c_x^{(\chi(I))}$ 。换言之， $m_x(I)$  和  $c_x(I)$  就是  $X$  的子向量  $X_I$  的矩和累积量。

根据集合分割的定义，集合  $I$  的分割是满足  $\bigcup_p I_p = I$  条件的无交连非空集合  $I_p$  的无序组合。据此，可得累积量—矩公式（简称 C—M 公式）

$$m_x(I) = \sum_{\bigcup_{p=1}^q I_p = I} \prod_{p=1}^q c_x(I_p) \quad (3-51)$$

和矩—累积量公式（简称 M—C 公式）

$$c_x(I) = \sum_{\bigcup_{p=1}^q I_p = I} (-1)^{q-1} (q-1)! \prod_{p=1}^q m_x(I_p) \quad (3-52)$$

式中  $\sum_{\bigcup_{p=1}^q I_p = I}$  表示在  $I$  的所有分割 ( $1 \leq q \leq N(I)$ ) 内求和。

根据式 (3-49) 和式 (3-50)，对于一个零均值的平稳随机过程  $\{x(n)\}$ ，可以从 M—C 公式中得出以下关系式：

$$c_{2x} \equiv E\{x(n)x(n+\tau)\} = R_x(\tau) \quad (3-53)$$

$$c_{3x} \equiv E\{x(n)x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)\} \quad (3-54)$$

$$\begin{aligned} c_{4x} \equiv & E\{x(n)x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)x(n+\tau_3)\} \\ & - R_x(\tau_1)R_x(\tau_2-\tau_3) - R_x(\tau_2)R_x(\tau_3-\tau_1) \\ & - R_x(\tau_3)R_x(\tau_1-\tau_2) \end{aligned} \quad (3-55)$$

### 3. 1. 4 高斯过程的高阶矩和高阶累积量

先考虑单个高斯随机变量的情况。对于一个零均值的高斯随机变量  $\xi \sim N(0, \sigma^2)$ ， $\sigma^2 > 0$ ，其特征函数（矩生成函数）由  $\Phi_\xi(\omega) = e^{-(1/2)\omega^2\sigma^2}$  给定。因此，累积量生成函数为  $\Psi_\xi(\omega) = -\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2$ ，由累积量定义，累积量  $c_i$  为  $\Psi_\xi(\omega)$  的 Taylor 级数展开式中  $\omega^i$  项的系数，又因为  $\Psi_\xi(\omega)$  是自变量  $\omega$  的二次函数，故显然有

$$\begin{cases} c_1 = 0 = m_1 \\ c_2 = \sigma^2 = m_2 \\ c_k = 0, k \geq 3 \end{cases} \quad (3-56)$$

利用式 (3-56) 和 C-M 公式 (3-51), 可得高阶矩的一般表达式

$$m_k = E\{\xi^k\} = \begin{cases} 0, & k \text{ 为奇数} \\ 1 \cdot 3 \cdots (k-1) \sigma^k, & k \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (3-57)$$

下面来考虑  $n$  维随机向量  $X = [X_1, \dots, X_n]^T$ 。设其均值向量为  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ , 协方差矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

是非负定的, 其中  $|\alpha_i| < +\infty$ , 且

$$r_{ij} = E\{(X_i - \alpha_i)(X_j - \alpha_j)\}, i, j = 1, 2, \dots, n \quad (3-59)$$

我们定义随机向量  $X$  是高斯或正态分布的, 则其特征函数具有形如

$$\Phi(\omega) = e^{j\alpha^T \omega - (1/2)\omega^T R \omega} \quad (3-60)$$

其中,  $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_n]^T$ 。

由上述定义可知, 高斯随机向量  $X$  的累积量生成函数为

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \ln \Phi(\omega) = j\alpha^T \omega - \frac{1}{2}\omega^T R \omega \\ &= j \sum_{i=1}^n \alpha_i \omega_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \omega_i \omega_j \end{aligned} \quad (3-61)$$

根据累积量定义式 (3-29), 随机变量  $[X_1, \dots, X_k]$  的  $(v_1, \dots, v_k)$  阶累积量可计算如下:

(1) 当  $r=1$  时, 即  $v_1, \dots, v_k$  中某个值取 1 (设  $v_i=1$ ), 而其它值取零, 此时

$$c_{0 \dots 0 1 0 \dots 0} = (-j) \frac{\partial \Psi(\omega)}{\partial \omega_i} \Big|_{\omega_1 = \dots = \omega_n = 0} = \alpha_i = E\{X_i\} \quad (3-62)$$

(2) 当  $r=2$  时, 分两种情况。

情况 1:  $v_i (i=1,2,\dots,n)$  中近  $v_i$  取 2, 其余取零。此时

$$c_{0\dots020\dots0} = (-j)^2 \frac{\partial^2 \Psi(\omega)}{\partial \omega_i^2} \Big|_{\omega_1=\dots=\omega_n=0} = r_{ii} = E\{(X_i - \alpha_i)^2\} \quad (3-63)$$

情况 2:  $v_i (i=1,2,\dots,n)$  中近  $v_i$  和  $v_j$  取 1, 其余取零。此时

$$\begin{aligned} c_{0\dots010\dots010\dots0} &= (-j)^2 \frac{\partial^2 \Psi(\omega)}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \Big|_{\omega_1=\dots=\omega_n=0} = r_{ij} \\ &= E\{(X_i - \alpha_i)(X_j - \alpha_j)\}, i \neq j \end{aligned} \quad (3-64)$$

(3) 当  $r \geq 3$  时, 此时  $\Psi(\omega)$  是自变量  $\omega_i$  的二次多项式, 故  $\Psi(\omega)$  关于自变量的三阶及更高阶的偏导数等于零, 从而有

$$c_{v_1\dots v_n} \equiv 0, r \geq 3 \quad (3-65)$$

对于零均值的高斯随机过程  $\{x(n)\}$ , 令

$$x_1 = x(n), x_2 = x(n + \tau_1), \dots, x_k = x(n + \tau_{k-1})$$

由随机过程高阶累积量定义式 (3-29) 知,  $\{x(n)\}$  的各阶累积量为

$$\begin{cases} c_{1x} = E\{x(n)\} = 0 \\ c_{2x}(\tau) = E\{x(n)x(n+\tau)\} = r(\tau) \\ c_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_{k-1}) \equiv 0, k \geq 3 \end{cases} \quad (3-66)$$

利用式 (3-66) 和 C-M 公式 (3-51) 不难推知, 只有奇数阶的高阶矩才等于零, 而偶数阶的高阶矩不等于零, 即

$$m_{kx}(\tau_1, \dots, \tau_k) \begin{cases} \equiv 0, & k \geq 3 \text{ 且为奇数} \\ \neq 0, & k \geq 4 \text{ 且为偶数} \end{cases} \quad (3-67)$$

### 3. 1. 5 高阶矩和高阶累积量的性质

高阶累积量有许多重要的性质, 下面介绍一些常用的性质。

性质 1: 设  $\lambda_i (i=1, \dots, k)$  为常数,  $X_i (i=1, \dots, k)$  为随机变量, 则

$$\text{cum}(\lambda_1 X_1, \dots, \lambda_k X_k) = \left( \prod_{i=1}^k \lambda_i \right) \text{cum}(X_1, \dots, X_k) \quad (3-68)$$

性质 2: 累积量关于它们的变元是对称的, 即

$$\text{cum}(X_1, \dots, X_k) = \text{cum}(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \quad (3-69)$$

其中,  $(i_1, \dots, i_k)$  是  $(1, \dots, k)$  的一种排列。

性质 3: 累积量相对于其变元具有可加性, 即

$$\text{cum}(X_0 + Y_0, Z_1, \dots, Z_k) = \text{cum}(X_0, Z_1, \dots, Z_k) + \text{cum}(Y_0, Z_1, \dots, Z_k) \quad (3-70)$$

这一性质意味着, 和的累积量等于累积量之和。

性质 4: 若  $\alpha$  是常数, 则

$$\text{cum}(\alpha + Z_1, \dots, Z_k) = \alpha \text{cum}(Z_1, \dots, Z_k) \quad (3-71)$$

性质 5: 两个随机变量  $\{X_i\}$  与  $\{Y_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$  独立, 则

$$\text{cum}(X_1 + Y_1, \dots, X_k + Y_k) = \text{cum}(X_1, \dots, X_k) + \text{cum}(Y_1, \dots, Y_k) \quad (3-72)$$

性质 6:  $k$  个随机变量  $\{X_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$  的一个子集同其它部分独立, 则

$$\text{cum}(X_1, \dots, X_k) = 0 \quad (3-73)$$

在实际中, 我们使用高阶累积量, 而不是高阶矩作为时间序列分析的数学工具(虽然零均值随机过程的三阶矩和三阶累积量是等价的), 主要原因:

- ① 理论上, 使用高阶累积量可避免高斯有色观测噪声的影响, 而高阶矩却不能。
- ② 其次, 同白噪声的协方差函数是冲激函数, 其谱是平坦的直线一样, 高阶白噪声的高阶累积量是多维冲激函数, 该噪声的多谱是多维平坦的。这使得我们很容易建立非高斯信号与线性系统传递函数之间的关系。但是, 高阶白噪声的高阶矩及其谱却无此优点。
- ③ 考虑矩问题解的唯一性问题。更确切的说, 令  $F$  和  $G$  是具有相同矩的分布函数, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dG(x) \quad n \geq 0, n \in \mathbb{Z}, \quad (3-74)$$

但  $F$  和  $G$  有不同的概率密度分布。与此相反, 累积量问题的解具有唯一性, 因为特征函数唯一确定一概率密度。

- ④ 两个统计量独立的随机过程的累积量等于各个随机过程的累积量之和, 而该结论对于高阶矩却不成立。正是这一性质使累积量非常适合作为一种算子来使用。

### 3. 2 高阶谱非最小相位子波提取方法及在反褶积中的应用

#### 3. 2. 1 基于高阶谱的地震子波估计方法的提出

子波恢复技术作为地震资料处理的重要课题，一直受到普遍关注。子波估计的质量直接影响到资料处理的质量<sup>[45]</sup>。在过去的常规地震资料处理中，子波反褶积是通过地震记录的自协方差或自相关函数来完成的，但是自相关函数对于相位是盲目的，它只适合于最小相位子波。于是为了适应反褶积的要求，不得不提出最小相位子波的假设，所以以往的子波求取方法也都是以此种假设为前提的。而事实上，无论是陆上的还是海上的地震记录，地震子波都是混合相位的<sup>[46]</sup>，因此在此种假设前提下得到的地震子波就会失真。随着高阶统计量概念的引入及其在地震勘探方面的应用<sup>[47]</sup>，使得彻底摆脱最小相位子波的假设成为可能。地震信号的高阶谱既包含有信号的振幅谱，也含有信号的相位谱。利用这一特征，在不假设地震子波相位的前提下，直接从地震记录的高阶谱中恢复地震子波的振幅谱和相位谱，重构地震子波，从而得到更符合实际情况的地震子波<sup>[48]</sup>。

#### 3. 2. 2 基于高阶谱的地震子波估计方法的研究思路

基于高阶谱估计地震子波的基本思路如图3-1。

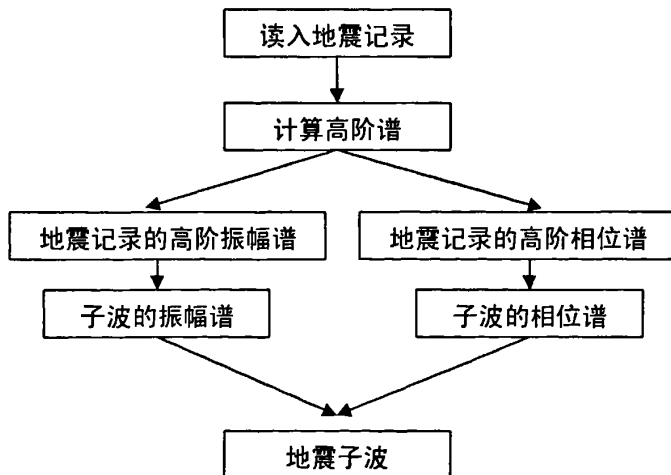


图3-1 基于高阶谱地震子波估计流程图

### 3. 2. 3 基于高阶谱的地震子波估计方法原理

高阶统计信号重构理论分为频率域中的相位重构和幅值重构两部分。设  $x(k)$  是一零均值实平稳随机过程，则该过程的三阶累积量为

$$c_3(\tau_1, \tau_2) = E\{x(k)x(k+\tau_1)x(k+\tau_2)\} \quad (3-75)$$

其傅立叶变换

$$\begin{aligned} C_3(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{+\infty} c_3(\tau_1, \tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{+\infty} x(k)x(k+\tau_1)x(k+\tau_2) e^{-j(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)} \\ &= \sum_{\tau_1=-\infty}^{+\infty} x(k+\tau_1) e^{-j\omega_1(k+\tau_1)} \sum_{\tau_2=-\infty}^{+\infty} x(k+\tau_2) e^{-j\omega_2(k+\tau_2)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j(\omega_1+\omega_2)k} \\ &= X(\omega_1)X(\omega_2)X^*(\omega_1+\omega_2) = |C_3(\omega_1, \omega_2)| e^{-j\varphi(\omega_1, \omega_2)} \end{aligned} \quad (3-76)$$

称之为  $x(k)$  的双谱（三阶谱）。双谱具有以下对称性，即  $C_3(\omega_1, \omega_2) = C_3(\omega_2, \omega_1)$ 。

由式 (3-76) 可得三阶谱的相位谱和振幅谱，分别为：

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \phi(\omega_1) + \phi(\omega_2) - \phi(\omega_1 + \omega_2) \quad (3-77)$$

$$|C_3(\omega_1, \omega_2)| = |X(\omega_1)| |X(\omega_2)| |X(\omega_1 + \omega_2)| \quad (3-78)$$

其中： $\phi(\omega)$  和  $|X(\omega)|$  分别为  $x(k)$  的相位谱和振幅谱。

#### 3. 2. 3. 1 基于高阶谱的子波相位谱估计

##### 3. 2. 3. 1. 1 基于双谱的子波相位谱估计

方法①：BMU算法<sup>[49]</sup>。

相位重构法最早是由Brillinger<sup>[50]</sup>提出的，它通过双谱相位  $\varphi(\omega_1, \omega_2)$  递推出信号相位  $\phi(\omega)$ ，其出发点是下面的关系式

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega} [2 \int_0^\omega \varphi(\lambda) d\lambda - \int_0^\omega \phi(\lambda, \omega - \lambda) d\lambda] \quad (3-79)$$

为了便于运算和提高计算精度，Matsuoka和Ulrych<sup>[51]</sup>推导了上式的离散形式。

$$\varphi(n) = \frac{1}{n-1} \left[ 2 \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(j) - \sum_{j=0}^{n-1} \phi(j, n-j) \right] \quad (3-80)$$

在双谱的相位谱公式 (3-77)  $\varphi(\omega_1, \omega_2) = \phi(\omega_1) + \phi(\omega_2) - \phi(\omega_1 + \omega_2)$  中,

$\varphi(\omega_1, \omega_2)$  为双谱的相位谱, 在区域  $\omega_1 + \omega_2 = \omega$  内对上式求和, 则有

$$\sum_{\omega} \varphi(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\omega} [\phi(\omega_1) + \phi(\omega_2) - \phi(\omega_1 + \omega_2)] \quad (3-81)$$

进一步在  $\omega_1 = [0, \omega]$  内求和, 并令  $\omega_2 = \omega - \omega_1$ , 可得

$$\sum_{\omega_1=0}^{\omega} \varphi(\omega_1, \omega - \omega_1) = \sum_{\omega_1=0}^{\omega} [\phi(\omega_1) + \phi(\omega - \omega_1) - \phi(\omega)] \quad (3-82)$$

为方便计算, 令  $\Delta\omega = 1$ ,  $\omega_1 = i$ ,  $\omega_2 = j$ ,  $\omega = n$ , 则

$$\sum_{i=0}^n \varphi(i, n-i) = \sum_{i=0}^n [\phi(i) + \phi(n-i)] - (n+1)\phi(n) \quad (3-83)$$

注意到

$$\sum_{i=0}^n [\phi(i) + \phi(n-i)] = 2 \sum_{i=0}^n \phi(i) \quad (3-84)$$

所以

$$\sum_{i=0}^n \varphi(i, n-i) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \phi(i) - (n-1)\phi(n) \quad (3-85)$$

为了将上式变为递推形式, Brillinger<sup>[50]</sup>, Rosenblatt<sup>[52]</sup>和Ulrych<sup>[53]</sup>提出下面的 BMU 算法。

$$s(n) = \sum_{i=0}^n \varphi(i, n-i) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3-86)$$

取初值  $\phi(0) = 0$  以及

$$\phi(1) = \sum_{n=2}^N \frac{s(n) - s(n-1)}{n(n-1)} + \frac{\phi(N)}{N} \quad (3-87)$$

式中,  $\phi(N)$  的值难以确定, 这里可以根据双谱相位  $\varphi(0, 0)$  的值来确定取 0 或  $\pi$ 。

$$\phi(n) = \frac{1}{n-1} \left[ 2 \sum_{i=0}^{n-1} \phi(i) - s(n) \right] \quad n = 2, 3, \dots, N \quad (3-88)$$

方法②: Lii-Rosenblatt 算法

式 (3-77) 中, 令  $\omega_1 = \omega, \omega_2 = \Delta\omega$ , 并取极限, 则有

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\varphi(\omega, \Delta\omega)}{\Delta\omega} &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\phi(\omega) + \phi(\Delta\omega) - \phi(\omega + \Delta\omega)}{\Delta\omega} \\
 &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{-[\phi(\omega + \Delta\omega) - \phi(\omega)]}{\Delta\omega} \\
 &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\phi(\Delta\omega) - \phi(0)}{\Delta\omega} \\
 &= -\phi'(\omega) + \phi'(0)
 \end{aligned} \tag{3-89}$$

其中,  $\phi'(\omega)$  代表导数  $\frac{d\phi}{d\omega}$ 。由于  $\phi(\omega) = \int_0^\omega \phi'(\lambda) d\lambda$ , 固由式 (3-89) 得

$$\int_0^\omega [\phi'(\lambda) - \phi'(0)] d\lambda = \phi(\omega) - c\omega \tag{3-90}$$

其中,  $c = \phi'(0)$ 。因此

$$\phi(\omega) = \int_0^\omega [\phi'(\lambda) - \phi'(0)] d\lambda + c\omega \tag{3-91}$$

由式 (3-90) 和式 (3-91) 可得

$$\phi(\omega) = - \int_0^\omega \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left[ \frac{\varphi(\omega, \Delta\omega)}{\Delta\omega} \right] d\lambda + c\omega \tag{3-92}$$

下面推导未知常数  $c$  的计算公式。令  $\phi(\pi) = k\pi$ , 并将  $\omega = \pi$  代入式 (3-92)

中, 则

$$c = \frac{1}{\pi} \left[ \phi\pi + \int_0^\pi \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left[ \frac{\varphi(\omega, \Delta\omega)}{\Delta\omega} \right] d\lambda \right] \tag{3-93}$$

现在, 将式 (3-92) 和式 (3-93) 变为所需要的离散形式。由于  $\varphi(\omega, 0) = 0$ ,

所以  $\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left[ \frac{\varphi(\omega, \Delta\omega)}{\Delta\omega} \right] d\lambda$  可用  $\varphi(i, 1)$  代替, 假定  $\Delta\omega = 1$ 。式 (3-92) 和式 (3-93)

即变为

$$\phi(n) = - \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(i, 1) + cn\pi / N, \quad n = 1, 2, \dots, N \tag{3-94}$$

$$c = \frac{1}{\pi} \left[ \phi(N) + \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(i, 1) \right] \tag{3-95}$$

其中,  $\phi(N) = 0$  或  $k\pi$ 。

另一方面, 由式 (3-77) 可的  $\varphi(i, 1) = \phi(i) + \phi(1) - \phi(i+1)$ , 应用代入法易证明, 式 (3-94) 中的求和项为



$$\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(i, 1) = \varphi(0) + n\varphi(1) - \varphi(n) \quad \text{或} \quad (3-96)$$

$$\varphi(n) = -\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(i, 1) + \varphi(0) + n\varphi(1)$$

于是, 可取初值  $\varphi(0)=0$ , 而另外一个初值  $\varphi(1)$  则可在式 (3-96) 中利用  $\phi(N)=0$  或  $k\pi$  求得。

方法③: 最小二乘法<sup>[48]</sup>。

以上两种求相位谱的算法都是递推算法。递推算法的优点是计算简单, 其主要缺点是在递推过程中存在误差传递。下面介绍的最小二乘算法则可以避免递推法中误差传递的缺点。

在式 (3-77) 中, 令  $\omega_1=1, 2, \dots, N/2$ ,  $\omega_2=\omega_1, \omega_1+1, \dots, N-\omega_1$ , 则有下列方程

$$\begin{aligned} \varphi(1, 1) &= 2\phi(1) - \phi(2) \\ \varphi(1, 2) &= \phi(1) + \phi(2) - \phi(3) \\ &\vdots \\ \varphi(1, N-1) &= \phi(1) + \phi(N-1) - \phi(N) \\ \varphi(2, 2) &= 2\phi(2) - \phi(4) \\ &\vdots \\ \varphi(2, N-2) &= \phi(2) + \phi(N-2) - \phi(N) \\ &\vdots \\ \varphi(N/2, N/2) &= 2\phi(N/2) - \phi(N) \end{aligned} \quad (3-97)$$

以上公式可写为矩阵形式

$$A\Phi = \psi \quad (3-98)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = [\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(N)]$$

$$\psi = [\phi(1,1), \dots, \phi(1, N-1), \phi(2,2), \dots, \phi(2, N-2), \dots, \phi(N/2, N/2)]$$

如果  $N$  为偶数, 则  $A$  为  $[(N/2)^2 \times N]$  维,  $A$  为满秩矩阵, 由此可得  $\varphi$  的最小二乘解为

$$\Phi = (A^T A)^{-1} A^T \psi \quad (3-99)$$

与前两种算法不同, 最小二乘法是利用双谱的对称性, 使用了三角区  $\omega_1 \geq \omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2 \leq \pi$  内的所有唯一值的双谱值。

方法④: DFT算法

假定已知双谱的样本估计  $B(2\pi k/N, 2\pi k/N), k=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。在式 (3-77)

中令  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , 则有

$$2\phi(\omega) - \phi(2\omega) = \varphi(\omega) \quad (3-100)$$

其中,  $\varphi(\omega) = \arg B(\omega, \omega)$ 。上式的离散形式是

$$2\phi(n) - \phi(2n) = \varphi(n) \quad (3-101)$$

式中,  $\varphi(n) = \varphi(\omega), \phi(n) = \phi(\omega)$ , 且  $\omega = 2\pi n/N$ 。令  $\varphi(n)$  和  $\phi(n)$  的  $N$  点DFT分别为  $\Psi(k)$  和  $\Phi(k)$ 。由式 (3-101) 有,

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right) - \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(k) \exp\left(j \frac{4\pi}{N} nk\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \Psi(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right) \end{aligned} \quad (3-102)$$

基于上式, Dianat和Raghuveer<sup>[54]</sup>发展了一种由  $\Psi(k)$  先恢复  $\Phi(k)$ , 再恢复  $\phi(n)$  的方法。其原理是比较式 (3-102) 两边的系数。当  $k$  为奇数时

$$\Phi(k) = \frac{1}{2} \Psi(k) \quad (3-103)$$

这是因为, 式 (3-102) 左边  $\exp\left(j \frac{2\pi}{N} n\right)$  项的系数为  $2\Phi(1)$ , 它是第一求和项的系数, 因为第二求和项不含  $\exp\left(j \frac{2\pi}{N} n\right)$  项, 右边同一复数项的系数为  $\Psi(1)$ 。由此可以证明式 (3-103) 对所有奇数的  $k$  均为真。

$k$  为偶数的情况比较复杂。假定  $N$  是 2 的整数幂, 即  $N = 2^M$ 。对于任何偶数的  $k$ , 式 (3-102) 的第二求和项都有两个系数, 结果为

$$2\Phi(k) - \Phi\left(\frac{k}{2}\right) - \Phi\left(\frac{N}{2} + \frac{k}{2}\right) = \Psi(k) \quad (3-104)$$

式 (3-103) 和式 (3-104) 一起给出了  $N$  个方程 ( $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ), 它们共含有  $N$  个未知数  $\Phi(0), \Phi(1), \dots, \Phi(N-1)$ 。求解此方程即可获得这些未知相位。

### 3. 2. 3. 1. 2 基于三谱的子波相位谱估计

前面介绍的基于双谱的子波相位谱估计的方法对于对称分布的非高斯信号显然是不适用的, 因为其双谱恒等于零。下面介绍基于三谱的子波相位谱估计, 三谱 MU 算法<sup>[55]</sup>。

零均值实平稳随机过程  $x(k)$  的三谱可以定义为

$$T(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = X(\omega_1)X(\omega_2)X(\omega_3) \times X^*(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad (3-105)$$

其中,  $X(\omega)$  是由  $x(k)$  经傅立叶变换得到的, 式 (3-105) 又可以表示为

$$T(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = |T(\omega_1, \omega_2, \omega_3)| \times \exp[j\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)] \quad (3-106)$$

和

$$X(\omega) = |X(\omega)| \exp[j\phi(\omega)] \quad (3-107)$$

所以由式 (3-105)、式 (3-106) 和 (3-107) 得

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \phi(\omega_1) + \phi(\omega_2) + \phi(\omega_3) \\ &\quad - \phi(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \end{aligned} \quad (3-108)$$

利用上述基本方程, 可得到递推的连续形式

$$\phi(\omega) = \frac{2}{\omega^2} \left[ \int_0^\omega (\omega - \lambda) \phi(\lambda) d\lambda - \int_0^\omega \int_0^{\omega-\lambda} \phi(\lambda, \nu, \omega - \lambda - \nu) d\nu d\lambda \right] \quad (3-109)$$

和离散形式

$$\begin{aligned} &\phi(n) \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)-6} \left[ 3 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1) \phi(k) - \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \phi(k, l, n-k-l) \right] \end{aligned} \quad (3-110)$$

$$n = 2, 3, \dots, N$$

这就构成了三谱域内求解子波相位谱的 MU 递推算法<sup>[24]</sup>, 算法的初始值为

$\phi(0)=0$ 和

$$\phi(1)=\sum_{n=2}^N \frac{Q(n)-Q(n-1)}{n(n-1)} + \frac{\phi(N)}{N} - \frac{N-1}{N} \phi(0) \quad (3-111)$$

其中

$$Q(n)=\frac{1}{3} \sum_{i=0}^n [\varphi(i, n-i, 0)+\varphi(i, 0, n-i)+\varphi(0, i, n-i)] \quad (3-112)$$

而 $\phi(N)$ 则可以根据 $\varphi(0,0,0)$ 的值取为0或 $\pi$ 。这种算法使用了所有的三谱值。

### 3. 2. 3. 2 基于高阶谱的子波振幅谱估计

#### 3. 2. 3. 2. 1 基于双谱的子波振幅谱估计

方法①：递推算法<sup>[48]</sup>

由式(3-78)两边取对数可得：

$$\ln |X(\omega_1 + \omega_2)| = \ln |C_3(\omega_1, \omega_2)| - \ln |X(\omega_1)| - \ln |X(\omega_2)| \quad (3-113)$$

对上式做变量替换，即令 $\omega_1 + \omega_2 = i, \omega_2 = j, \omega_1 = i - j$ ，得到下面的离散表达式：

$$\ln |X(i)| = \ln |C_3^x(i - j, j)| - \ln |X(i - j)| - \ln |X(j)| \quad (3-114)$$

在上式中，当取 $i = 0, j = 0$ 时，可得：

$$\ln |X(0)| = \ln |C_3^x(0, 0)| / 3 \quad (3-115)$$

当取 $i = 1, j = 0$ 时，有 $\ln |X(1)| = [\ln |C_3^x(1, 0)| - \ln |X(0)|] / 2$ ，由此可计算振幅谱的 $|X(0)|$ 和 $|X(1)|$ 。

当 $i = n$ 时， $j = 1, 2, \dots, n-1$ 存在以下公式：

$$\begin{aligned} \ln |X(n)| &= \ln |C_3^x(n-1, 1)| - \ln |X(n-1)| - \ln |X(1)| \\ \ln |X(n)| &= \ln |C_3^x(n-2, 2)| - \ln |X(n-2)| - \ln |X(2)| \\ &\vdots \\ \ln |X(n)| &= \ln |C_3^x(2, n-2)| - \ln |X(2)| - \ln |X(n-2)| \\ \ln |X(n)| &= \ln |C_3^x(1, n-1)| - \ln |X(1)| - \ln |X(n-1)| \end{aligned} \quad (3-116)$$

上式即为计算 $|X(n)|$ 的递推公式，由双谱的对称性可知，该式前后对应位置的两式相同，即仅有 $n/2$ 个独立公式。取独立公式计算 $\ln |X(n)|$ 的平均值，即可求

取 $|X(n)|$ 。按照该递推公式的计算规律,取 $i=2,3,\dots,N$ 时,可得子波振幅谱的估计值 $|X(i)|$ (其中 $i=0,1,\dots,N$ )。

方法②:最小二乘法<sup>[55]</sup>。

在式(3-78)中,令

$$\begin{aligned} k &= \omega_1, l = \omega_2, k=1,2,\dots,\frac{N}{4}, l=k, k+1,\dots,\frac{N}{2}-k \\ \tilde{X}(k) &= \ln(|X(k)|) \\ \tilde{C}_3(k) &= \ln(|C_3(k,l)|) \end{aligned} \quad (3-117)$$

将式(3-117)带入式(3-78)中,可得

$$\tilde{C}_3(k,l) = \tilde{X}(k) + \tilde{X}(k) + \tilde{X}(l) + \tilde{X}(k+l) \quad (3-118)$$

因此,  $\tilde{C}_3(k,l)$ 可以表示为 $\tilde{X}(k)$ 的线性组合,即

$$\tilde{c} = A\tilde{x} \quad (3-119)$$

其中 $\tilde{c}$ 是 $(N^2/16) \times 1$ 的向量,  $\tilde{x}$ 是 $(N/2) \times 1$ 的向量,  $A$ 为 $(N^2/16) \times (N/2)$ 的矩阵,

并且

$$\tilde{c} = [\tilde{C}_3(1,1), \tilde{C}_3(1,2), \dots, \tilde{C}_3(1, \frac{N}{2}-1), \tilde{C}_3(2,2), \dots, \tilde{C}_3(\frac{N}{4}, \frac{N}{4})] \quad (3-120)$$

$$\tilde{x} = [\tilde{X}(1), \tilde{X}(2), \dots, \tilde{X}(\frac{N}{2})]^T \quad (3-121)$$

以式(3-119)等号右边系数为元素,  $k, l$ 为脚标构造阵 $A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (3-122)$$

于是可以通过最小二乘法计算出 $\tilde{x}$

$$\tilde{x} = (A^T A)^{-1} A^T \tilde{c} \quad (3-123)$$

最后,  $|X(k)|$ 可由 $\tilde{X}(k)$ 利用

$$|X(k)| = \exp[\tilde{X}(k)], \quad k=1,2,\dots,\frac{N}{2} \quad (3-124)$$

和

$$|X(k)| = |X(N-k)|, \quad k = \frac{N}{2}+1, \dots, N-1 \quad (3-125)$$

求出。

而 $|X(0)|$ 的值可以这样确定：计算每次实现的样本均值，然后对每次实现的样本均值再求平均。

方法③：DFT 法。

在式 (3-118) 中令  $k=l=n$ ，则得

$$2\tilde{X}(n) + \tilde{X}(2n) = \tilde{B}(n) \quad (3-126)$$

其中， $\tilde{B}(n) = \tilde{B}(n, n)$ 。定义  $\tilde{X}(n)$  和  $\tilde{B}(n)$  的  $N$  点 DFT 分别为  $\bar{X}(k)$  和  $\bar{B}(k)$ ，于是，由式 (3-126) 得

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right) + \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}(k) \exp\left(j \frac{4\pi}{N} nk\right) \\ = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{B}(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{N} nk\right) \end{aligned} \quad (3-127)$$

Dianat<sup>[54]</sup>和Raghuveer<sup>[52]</sup>提出了求取振幅谱的DFT算法。步骤如下：

步骤1：计算

$$\bar{X}(k) = \frac{1}{2} \bar{B}(k) \quad (k \text{ 为奇数}) \quad (3-128)$$

步骤2：计算

$$\bar{X}(k) = \frac{1}{2} \left[ \bar{B}(k) - \bar{X}\left(\frac{k}{2}\right) - \bar{X}\left(\frac{k}{2} + \frac{N}{2}\right) \right] \quad \left(\frac{k}{2} \text{ 为奇数}\right) \quad (3-129)$$

步骤3：对  $k/2^l$  ( $l=2, 3, \dots, M-1$ ) 为奇数的所有  $k$  值重复步骤2。

$$\text{步骤4：确定 } \bar{X}(0) = \frac{1}{3} \left[ \bar{B}(0) - \bar{X}\left(\frac{N}{2}\right) \right]$$

步骤5：利用离散傅立叶反变换 (IDFT) 计算信号的振幅谱

$$X(n) = \exp\{IDFT[\bar{X}(k)]\} \quad (3-130)$$

### 3. 2. 3. 2. 2 基于倒双谱的子波振幅谱估计<sup>[49]</sup>

由式 (3-78) 两边取对数可得：

$$\ln|C_3(\omega_1, \omega_2)| = \ln|X(\omega_1 + \omega_2)| + \ln|X(\omega_1)| + \ln|X(\omega_2)| \quad (3-131)$$

两边求平方可得

$$\begin{aligned} \ln|C_3(\omega_1, \omega_2)|^2 - \ln|X(\omega_1 + \omega_2)|^4 = \\ \ln|X(\omega_1)|^2 + \ln|X(\omega_2)|^2 - \ln|X(\omega_1 + \omega_2)|^2 \end{aligned} \quad (3-132)$$

另外根据文献[56], 有

$$\ln|X(\omega)|^2 = F\{d'_M(m, 0)\} \quad (3-133)$$

式中,  $F$  代表傅立叶变换,  $F^{-1}$  代表傅立叶逆变换, 上式中,

$$\begin{aligned} d'_M(m, n) = \\ \begin{cases} F^{-1}\{\ln|C_3(\omega_1, \omega_2)|^2 - \ln|X(\omega_1 + \omega_2)|^4\} & m \neq 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3-134)$$

定义

$$d_1(m, n) = 2F^{-1}\{\ln|X(\omega_1 + \omega_2)|\} \quad (3-135)$$

则可以证明

$$d_1(m, 0) = \begin{cases} 2c_{p_r}(0) & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \quad (3-136)$$

式中,  $c_{p_r}(0)$  为倒功率谱在原点的值。由于  $d_1(m, 0)$  为常数, 所以它只影响  $|X(\omega)|^2$  的大小。  $\ln|X(\omega)|^2$  可以通过下式计算

$$\ln[\alpha|X(\omega)|^2] = F\{d_M(m, 0)\} \quad (3-137)$$

式中,  $\alpha$  为一正的常数, 而  $d_M(m, n)$  由下式给出

$$d_M(m, n) = \begin{cases} F^{-1}\{\ln|C_3(\omega_1, \omega_2)|^2\} & m \neq 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases} \quad (3-138)$$

### 3. 2. 4 基于高阶谱（双谱）的地震子波估计

① 对地震记录  $x(n)$  的三阶统计量进行二维傅立叶正变换, 得到其双谱的振幅谱

$|C_3(\omega_1, \omega_2)|$  和相位谱  $\phi(\omega_1, \omega_2)$ 。利用双谱的振幅谱  $|C_3(\omega_1, \omega_2)|$  和相位谱

$\phi(\omega_1, \omega_2)$  分别求取地震子波的振幅谱  $|W(\omega)|$  和相位谱  $\phi(\omega)$ 。

② 由①得到的地震子波的振幅谱  $|W(\omega)|$  和相位谱  $\phi(\omega)$ , 通过傅立叶反变换, 即

可得到地震子波  $w(t)$ 。

### 3. 2. 5 基于高阶谱（双谱）地震反褶积

利用双谱估计出地震子波后，寻求进一步求解反射系数的方法。结合同态反褶积方法思想将地震子波  $w(t)$  和地震记录  $x(n)$  转换到复倒谱域，在复倒谱域求出反射系数，然后转换回时间域得到反射系数  $\rho(t)$ 。

## 3. 3 数值算例

### 3. 3. 1 模拟算例

图3-2(a)为产生的非高斯分布的随机反射系数(196个样点，采样率2ms)，图3-2(b)是地震子波模型，取30个样点作为褶积算子，图3-2(c)是反射系数和子波褶积得到的模拟地震记录(也取196个样点)。

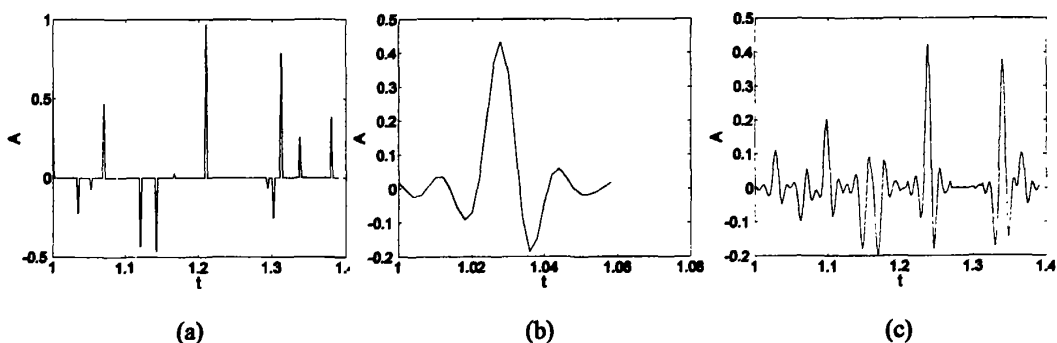


图3-2 随机反射系数(a)，地震子波模型(b)和模拟地震记录(c)

图 3-3(a)和图 3-3(b)为双谱估计出的地震子波的振幅谱和相位谱。图 3-4(a)为采用的双谱估计得到的地震子波，图 3-4(b)为双谱估计得到的地震子波与地震子波模型的对比图。通过图 3-4(b)可以看出基于高阶统计的双谱估计能够利用比较少的地震记录估计出比较精确的非最小相位的地震子波。图 3-4(c)是利用双谱求出的子波结合同态反褶积思想求出的反射系数。



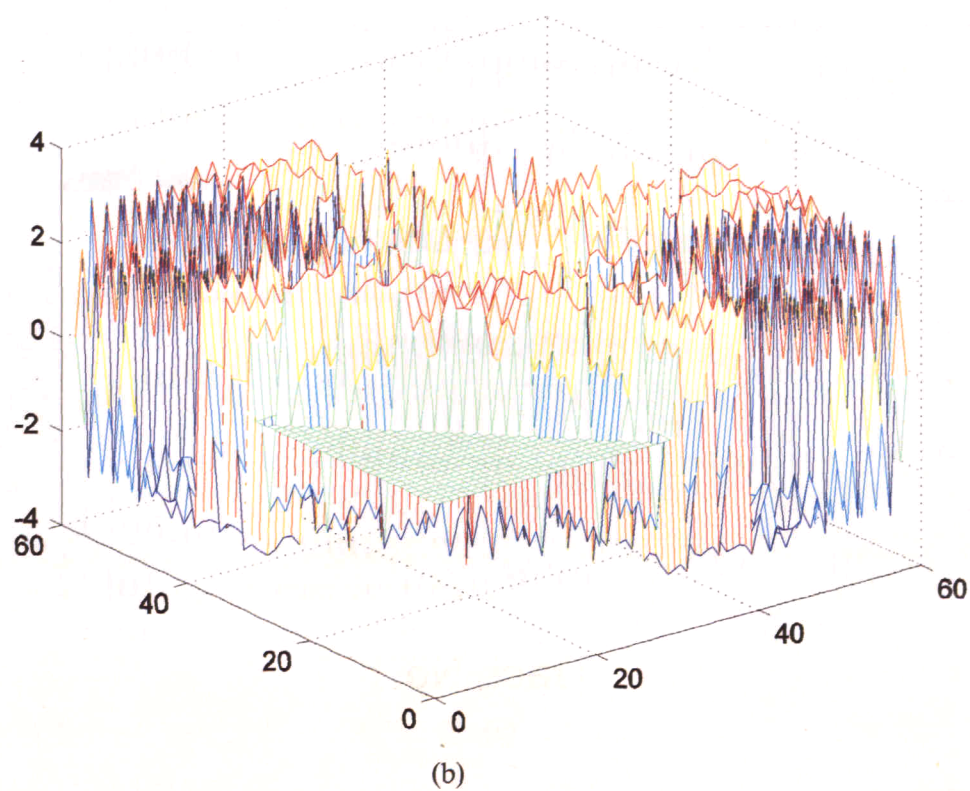
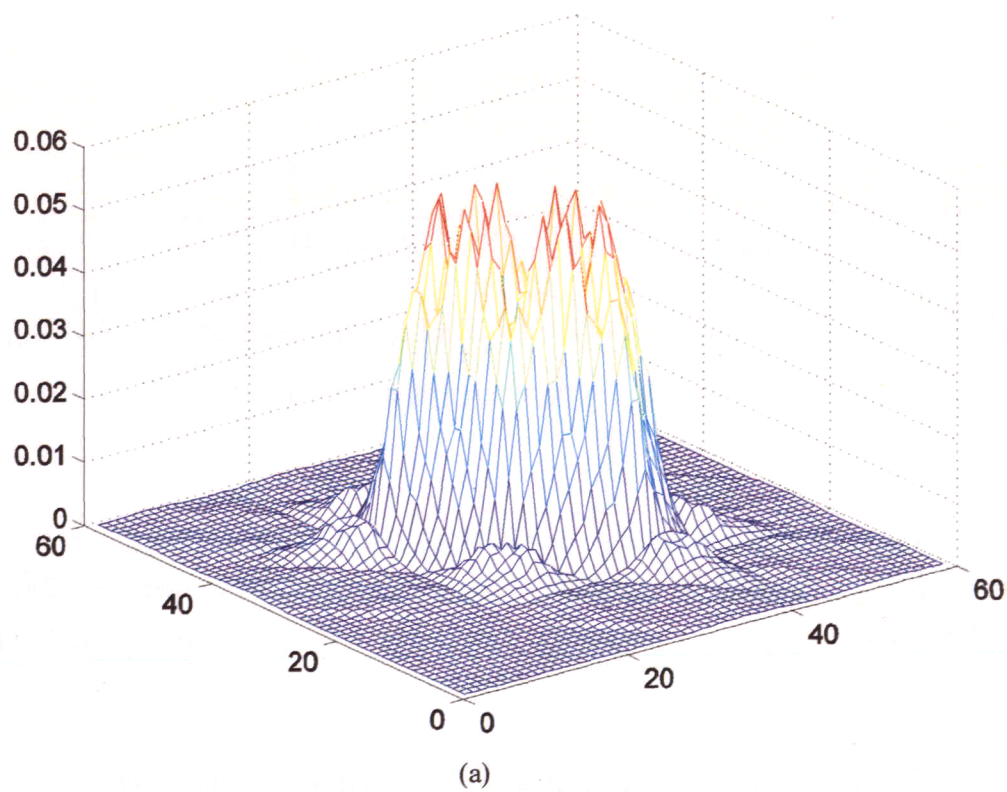


图 3-3 双谱求出的地震子波振幅谱(a)和相位谱(b)

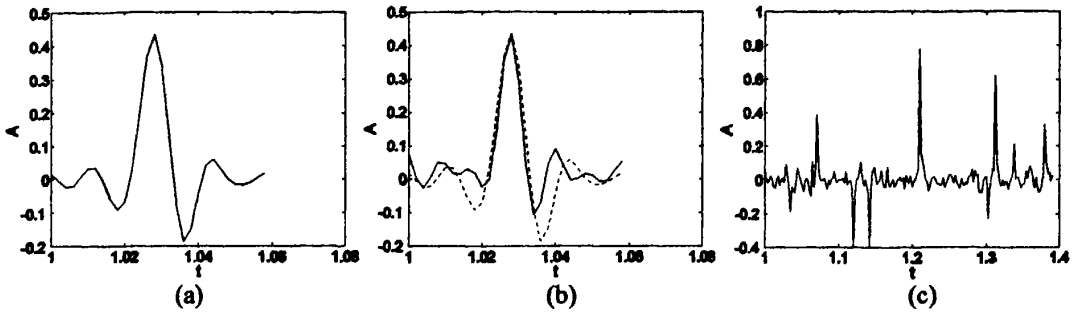
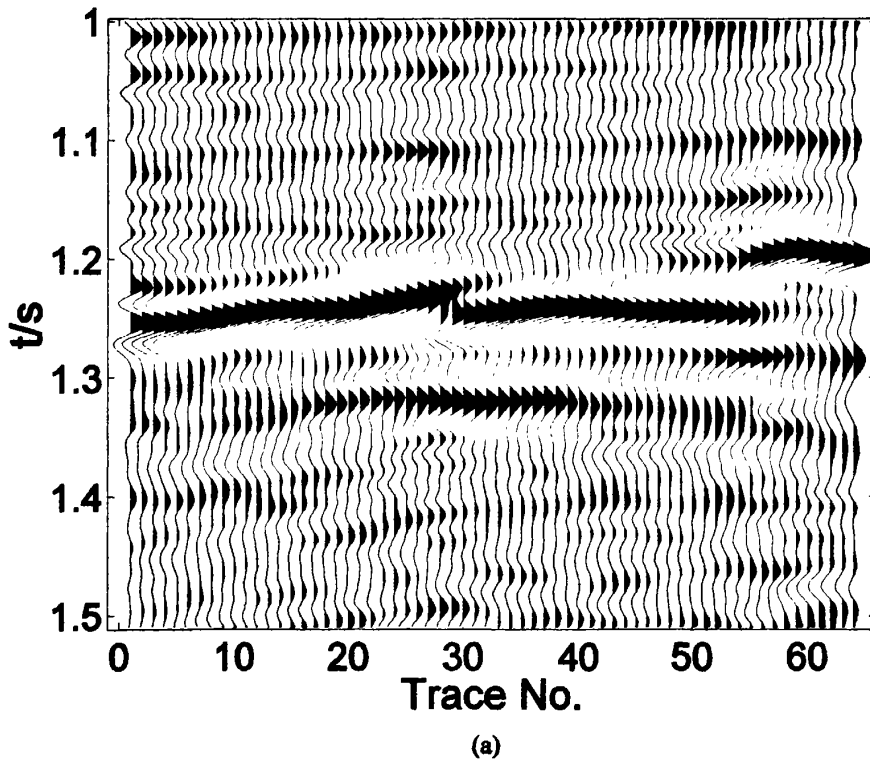
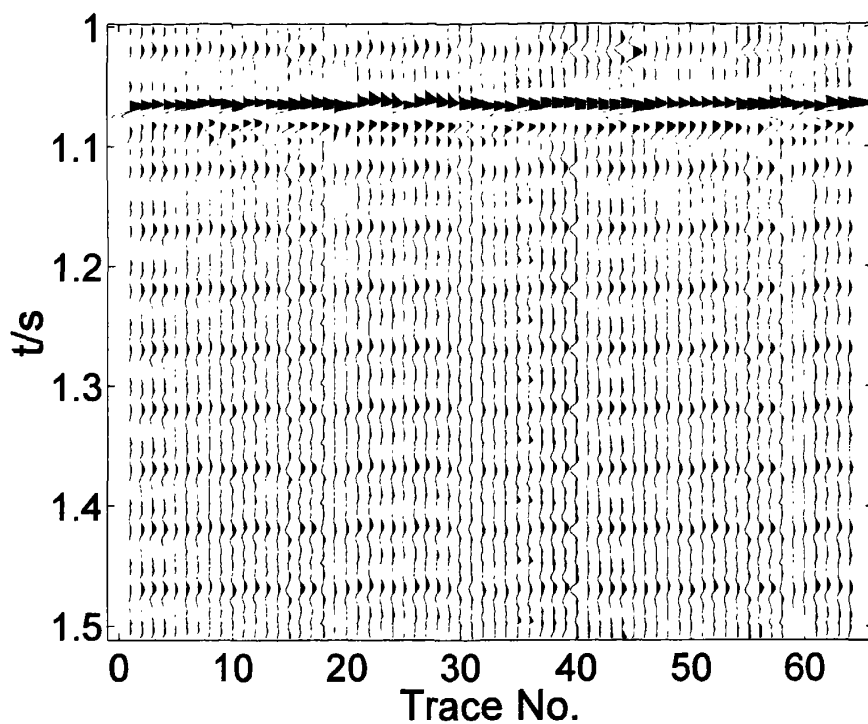


图 3-4 双谱估计出的地震子波(a), 双谱估计出的地震子波与已知地震子波模型的对比(b), 结合同态反褶积思想求出的反射系数(c)

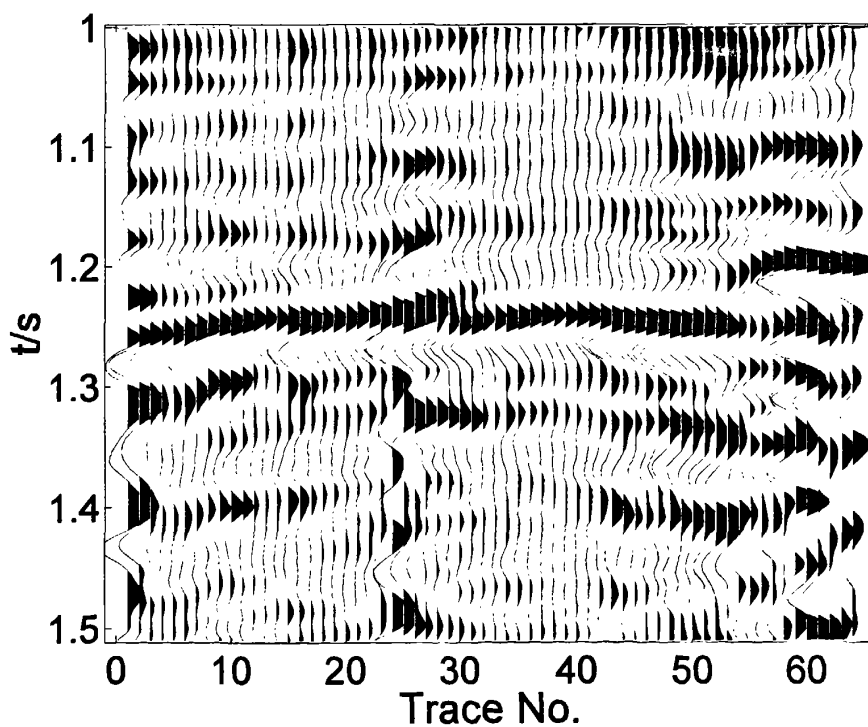
### 3. 3. 2 实际二维剖面算例

图 3-5(a)为一 64 道, 每道有 256 个样点, 采样率为 2ms 的实际二维地震数据剖面。图 3-5(b)采用双谱法估计的地震子波剖面, 图 3-5(c)为结合同态反褶积方法求出反射系数剖面。





(b)



(c)

图 3-5 实际二维地震道(a)，地震子波剖面(b)和相应反射系数剖面(c)

## 4 基于独立变量分析同时实现地震反射系数和子波估计

### 4.1 独立变量分析问题描述

独立变量分析<sup>[57]</sup> (ICA) 方法是近二十年来逐渐发展起来的一种高效盲信号分离方法。它最早是用来解决“鸡尾酒会”问题的<sup>[58]</sup>。然而, 随着研究的深入, 人们发现它的原理在特征提取<sup>[24,59,60]</sup>、图像处理<sup>[61]</sup>、生物医学信号处理<sup>[62]</sup>、通信系统<sup>[63]</sup>、金融<sup>[64]</sup>、语音信号处理<sup>[65]</sup>、雷达和声纳<sup>[66]</sup>和地震信号处理<sup>[67]</sup>等信号处理方面有着广泛的应用。ICA 随之受到了越来越多的关注, 很多种在分离能力、内存需求和计算量等方面有不同优点的 ICA 算法已被提出, 目前 ICA 已成为盲信号处理, 人工神经网络等研究领域中的一个研究热点。本章主要介绍了 ICA 的基本概念、数学模型及实现原理, 并介绍快速 ICA (FastICA) 的相关原理及其在地震盲反褶积中的应用。

ICA 问题的一个典型例子是考虑在一个房间里有三个人聊天的情形(人数可以任意), 用三支麦克风在房间不同的位置记录下了房间里的说话声, 令  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  和  $s_3(t)$  分别表示两人说出的语音信号,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  和  $x_3(t)$  分别表示三支麦克风记录下的信号。由于每一支麦克风都同时记录下三人的声音, 所以很显然有如下表达式:

$$\begin{cases} x_1(t) = h_{11}s_1(t) + h_{12}s_2(t) + h_{13}s_3(t) \\ x_2(t) = h_{21}s_1(t) + h_{22}s_2(t) + h_{23}s_3(t) \\ x_3(t) = h_{31}s_1(t) + h_{32}s_2(t) + h_{33}s_3(t) \end{cases} \quad (4-1)$$

其中,  $h_{ij}(i, j=1, 2, 3)$  是加权系数, 它取决于麦克风位置与说话者之间的距离。这种仅由记录信号  $x_i(t)$  (称为观测信号、混合信号或传感器信号) 来估计原始信号  $s_i(t)$  (称为源信号) 的问题就是所谓的“鸡尾酒会”问题 (Cocktail-Party Problem), 其信号混合模型如图 4-1 所示。

为简单起见, 暂时忽略时延、非线性等因素的影响, 仅考虑最简单的混合系统——线性瞬时混合系统。如果已知混合参数  $h_{ij}$ , 求解的问题就相当简单, 只需对式 (4-1) 的线性系统求逆即可。然而, 通常  $h_{ij}$  和  $s_i(t)$  均未知, 它们对求解系

统而言是“盲”的，所以问题相当棘手。解决该问题的可行方案就是依据源信号  $s_i(t)$  的某些统计特性（或信息）对  $h_{ij}$  和  $s_i(t)$  进行估计。研究表明，只要三个源信号  $s_1(t)$ 、 $s_2(t)$  和  $s_3(t)$  统计独立，便可利用一些盲处理算法从混合信号中恢复出源信号。ICA 正是为了处理这种与“鸡尾酒会”问题有密切联系的相关问题而提出的<sup>[68]</sup>。

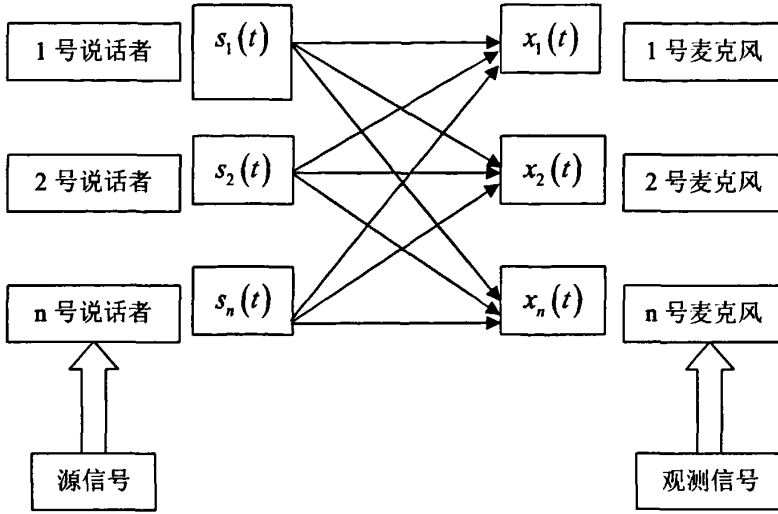


图 4-1 “鸡尾酒会”问题模型

## 4. 2 独立变量分析的定义及其线性模型

设  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  为  $m$  维零均值随机观测向量，它由  $n$  个未知的零均值独立源信号  $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$  线性混合而成的，忽略时间下标  $t$ ，并假设每个混合信号  $x_i$  都是一随机变量，而不是时间信号。每个观测值  $x_i(t)$ ，为该随机变量的一次抽样。这种线性混合模型可表示为：

$$X = HS = \sum_{j=1}^n h_j s_j, j=1, 2, \dots, n \quad (4-2)$$

式中， $H = [h_1, h_2, \dots, h_n]$  为  $m \times n$  阶满秩源信号混合矩阵； $h_j$  为混合矩阵的  $n$  维列向量。式 (4-2) 可写成矩阵形式，即

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{m1} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

式中, 每个混合信号  $x_i(t)$  ( $i=1, \dots, m$ ) 都可以是一随机信号, 其每个观测值  $x_i(t)$  是在  $t$  时刻对随机信号  $x_i$  的一次抽样。由式 (4-3) 看出,  $t$  时刻的各观测数据  $x_i(t)$  是由  $t$  时刻各独立源信号  $s_j(t)$  的值经过不同的  $h_{ij}$  线性加权得到的。式 (4-2) 就是 ICA 的信号混合模型。

### 4. 3 独立变量分析的假设和约束条件及解混模型

在式 (4-2) 中, 由于独立分量  $s_j$  不能被直接观测到, 具有隐藏特性, 因此也称为“隐藏变量”(Latent Variables)。由于混合矩阵  $H$  也是未知矩阵, ICA 问题唯一可利用的信息只有观测到的传感器检测信号  $X$ 。若无任何其它可利用信息, 仅由  $X$  估计出  $S$  和  $H$ , ICA 问题必为多解。为使 ICA 问题有确定的解, 就必须有一些符合工程应用的假设和约束条件。

#### ① 未知源信号独立性要求

针对 ICA 具体模型, 未知源信号间相互独立, 即要求:

$$p(s) = \prod_{i=1}^m p_i(s_i) \quad (4-4)$$

上式中,  $p_i(s_i)$  为各个分量的概率密度 (pdf),  $p(s)$  为源信号的联合概率密度。

#### ② 结果的幅度和符号存在不确定性

由于在  $X = HS$  中,  $H$  和  $S$  未知, 如果将  $S$  中任一分量  $s_i$  扩大  $a$  倍, 只需将  $H$  中相应的混合系数乘以  $1/a$ , 上式仍成立。因此, 在观测信号幅度不变的前提下, 源信号的幅度存在不确定性。同样道理, 在观测信号符号不变的前提下, 源信号的符号同样存在不确定性。

#### ③ 分离结果的排序存在不确定性

由与  $H$  和  $S$  未知, 式 (4-2) 中独立分量的顺序可以调换。在式 (4-2) 中插入一个置换矩阵  $P$  和它的逆矩阵  $P^{-1}$ , 得到  $X = HP \cdot P^{-1}S$ , 将  $HP^{-1}$  看成新的混合矩阵, 则  $P^{-1}S$  中的各分量便成为新的已调换顺序的独立源  $s_i$ 。这表明 ICA 的分离结果在排序上存在不确定性。但一般来说, 幅度、符号和排序的不确定性不会

对 ICA 的应用产生太大影响。

④ 只允许一个源信号  $s_j$  的概率密度函数是高斯函数。

这是由于高斯型信号源的线性组合仍是高斯型，而相对于高斯型信号来说，其目标函数为零，这将使 ICA 算法无法逐一分离出各高斯型信号，但其中的非高斯信号却可以分离出来。

⑤ 信号源数目应小于或等于观测信号道数目，即  $n \leq m$ 。

⑥ 时延和褶积效应

在许多实际应用环境中，如对混合语音的盲分离问题（鸡尾酒会问题），还需要考虑语音信号在传播过程中的时延问题，另外墙壁或其它物体对语音的反射也会形成褶积效应。因此麦克风接收的混合语音信号是不同声源的时延褶积混合。

⑦ 求解 ICA 问题，需对各个源信号的 pdf 有一些先验知识。

为了在混合矩阵  $H$  和源信号  $S$  均未知的情况下，仅利用传感器检测到的信号  $X$ （简称传感器信号或混合信号）和 ICA 的假设条件，尽可能真实地分离出源信号  $S$ ，可构建一个分离矩阵（或称解混矩阵） $W = (w_{ij})_{n \times n}$ ，那么混合信号  $X$  经分离矩阵  $W$  变换后，得到  $n$  维输出列向量  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ 。这样，ICA 问题的求解（或解混模型）就可以表示为

$$Y = WX = WHS = GS \quad (4-5)$$

式中， $G$  为全局传输矩阵（或全局系统矩阵）。若能使  $G = I$ （ $I$  为  $n \times n$  阶单位矩阵），则  $Y = S$ ，从而达到了分离（恢复或估计）源信号的目的。

#### 4. 4 独立变量分析算法的性能指标

求解 ICA 问题有很多种方法，为了评价每种算法的性能，通常采用相应的性能指标<sup>[69]</sup>，下面给出比较精确检验解混算法性能的两指标。

① 相似系数：相似系数是描述估计信号与源信号相似性的参数，定义为

$$\zeta_{ij} = \zeta(y_i, s_j) = \left| \sum_{t=1}^M y_i(t) s_j(t) \right| / \sqrt{\sum_{t=1}^M y_i^2(t) \sum_{t=1}^M s_j^2(t)} \quad (4-6)$$

当  $y_i = cs_j$ （ $c$  为常数）时， $\zeta_{ij} = 1$ ；当  $y_i$  与  $s_j$  相互独立时， $\zeta_{ij} = 0$ 。由式（4-6）可知，相似系数抵消了盲源分离结果在幅值上存在的差异，从而避免了幅值尺度

不确定性的影响。当相似系数构成的相似系数矩阵每行每列都有且仅有一个元素接近于 1，其它元素都接近于 0，则可以认为分离算法效果较为理想。

② 性能指数 (Performance Index, PI): 定义为

$$PI = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^n \left( \frac{|g_{ik}|}{\max_j |g_{ij}|} - 1 \right) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{|g_{ki}|}{\max_j |g_{ji}|} - 1 \right) \right\} \quad (4-7)$$

式中,  $g_{ij}$  为全局传输矩阵  $G$  的元素;  $\max_j |g_{ij}|$  表示  $G$  的第  $i$  行元素绝对值中的最大值;  $\max_j |g_{ji}|$  表示  $G$  的第  $i$  列元素绝对值中的最大值。分离出的信号  $Y$  与源信号  $S$  波形完全相同时,  $PI = 0$ 。实际当  $PI$  达到  $10^{-2}$  时说明该算法分离性能已相当好。

#### 4. 5 独立变量分析的实现原理

ICA 处理过程实际上使分离出的独立分量最大程度地逐步逼近各个源信号, 即建立目标函数<sup>[70]</sup>以寻优来实现逼近。因此, ICA 包括两个方面: 建立目标函数 (优化判据) 和寻优算法。目标函数可以是对比函数 (Contrast Function, 首先由 P.Common 提出<sup>[71]</sup>)、代价函数 (Cost Function)、目标函数 (Objective Function)、损失函数 (Loss Function, 有时是代价函数的瞬时表示形式, 即在线取值) 以及风险函数 (Risk Function, 有时表示目标函数或损失函数的数学期望) 等, 这几种函数紧密相关, 甚至可以互相替代, 但某些情况下它们仍有区别。

##### 4. 5. 1 互信息最小化目标函数

KL 散度 (Kullback-Leibler) 是统计独立性的参数, 它与信息熵表示的互信息量相当, 常常互用。ICA 的目的是使输出信号  $Y(t)$  各分量尽可能独立, KL 散度 (或互信息量) 自然可作为度量参数。针对 ICA 问题的特点和假设条件, 一个很自然的想法就是采用 KL 散度或互信息量作为 ICA 目标函数, 使输出信号  $Y(t)$  的互信息量最小化就成为 ICA 的目标。

设  $X$  和  $Y$  都为  $n$  维列向量, 其概率密度函数分别是  $p_x(X)$  和  $p_y(Y)$ , 它们的相互独立性可以用 KL 散度来衡量。KL 散度定义如下



$$K[p_x(X)|p_y(Y)] = \int p_x(X) \log \left[ \frac{p_x(X)}{p_y(Y)} \right] dx \quad (4-8)$$

式中,  $p_y(Y)$  也称为参考分布。

KL 散度的主要性质是

$$K[p_x(X)|p_y(Y)] \geq 0 \quad (4-9)$$

$p_x(X)$ 、 $p_y(Y)$  二者越不相似, KL 值越大。当且仅当  $p_x(X) = p_y(Y)$  时, 式 (4-9) 取等号。

设  $n$  维输出列向量  $Y$  的联合概率密度函数为  $p_y(Y)$ , 它的各个分量  $y_i$  的概率密度函数为  $p_i(y_i)$ ,  $i=1,2,\dots,n$ 。可以用  $p_y(Y)$  和  $\prod_{i=1}^n p_i(y_i)$  之间的 KL 散度来衡量  $Y$  各分量之间的统计独立性。输出  $Y$  各分量间的统计独立性。输出  $Y$  各分量间的互信息量可表示为

$$I(Y) = K \left[ p_y(Y) \middle| \prod_{i=1}^n p_i(y_i) \right] = \int_Y p_y(Y) \log \left[ \frac{p_y(Y)}{\prod_{i=1}^n p_i(y_i)} \right] dY \quad (4-10)$$

可以看出,  $I(Y)=0$ 、 $p_y(Y) = \prod_{i=1}^n p_i(y_i)$  与  $Y$  的各分量统计独立这三种表述完全等价。显然,  $I(Y)$  可以作为一种目标函数 (或对比函数)。目标函数  $I(Y)$  最小化就可以减小  $Y$  中各个分量的依存性,  $I(Y)=0$  时各分量达到互相独立。

也可以用度量信息量的熵作为目标函数, 根据联合熵与互信息量的关系, 有

$$H(Y) = H(y_1) + H(y_2) + \dots + H(y_n) - I(Y) \quad (4-11)$$

式中,  $H(y_i)$  为输出的边缘熵。最大联合熵  $H(Y)$  包含最大化边缘熵和最小化互信息量两项内容。选择熵作为目标函数是因为熵是随机变量无序性的度量以及信息量大小 (不确定信息的多少) 的测度。  $Y$  各分量的统计独立性越高, 则相应  $Y$  的熵越大, 所含信息也越多。

#### 4. 5. 2 信息传输最大化或负熵最大化目标函数

在信噪比较高的情况下, 输入与输出之间互信息量的最大化 (信息传输最大

化)意味着输入与输出之间的信息冗余量达到最小,这样就使得各输出之间的互信息量最小化了,从而各输出分量互相统计独立。由互信息量的定义式(4-10)可知,  $I(X|Y)$  是系统输出  $Y$  和输入  $X$  的互信息量表达式,当两者的冗余信息最小时,  $I(X|Y)$  达到最大值。

负熵是从熵的概念中引申而来的,输出  $Y$  的负熵定义为

$$J(Y) = H(Y_g) - H(Y) \quad (4-12)$$

式中,  $Y_g$  是与  $Y$  方差相同的高斯随机向量。

负熵的特点是它对  $Y$  的任意线性变换不变,而且总是非负的,只有当  $Y$  是高斯分布时才为零。基于这一特点,负熵是一个很好的目标函数。令系统的输出负熵(Negentropy)最大化也能导致信号的分离。可以证明,负熵与互信息量的关系为

$$I(Y) = J(Y) - \sum_{i=1}^n J_i(y_i) + \frac{1}{2} \log \frac{\prod_{i=1}^n C_{ii}}{\det(C)} \quad (4-13)$$

式中,  $C$  为  $Y$  的协方差矩阵;  $C_{ii}$  为矩阵的对角元素。当  $Y$  的各分量不相关时,式(4-13)右边第三项为零,可将其简化为

$$I(Y) = J(Y) - \sum_{i=1}^n J_i(y_i) \quad (4-14)$$

由此式不难看出,最小化输出信号  $Y$  各分量之间的互信息量  $I(Y)$  等价于最大化各分量的负熵和  $\sum_{i=1}^n J_i(y_i)$ 。因此基于负熵的目标函数可以写为

$$\rho(Y) = \sum_{i=1}^n J_i(y_i) \quad (4-15)$$

需指出,以后各章常  $J$  (或  $\rho$ ) 表示目标函数或损失函数,而风险函数或代价函数则常用  $R$  表示。

#### 4. 5. 3 独立变量分析的最大似然目标函数

最大似然估计(MLE)的目标就是由观测数据样本估计样本的真实概率密度,具有诸如一致性、方差最小及全局最优等优点。应用最大似然估计实现 ICA 就是比较自然的选择,但该方法的缺点是需要输入信号概率密度分布函数的先验知

识。

设  $\hat{p}_x(X)$  是对观测向量  $X$  的概率密度  $p_x(X)$  的估计, 源信号的概率密度函数为  $p_s(S)$ , 根据线性变换下两个 pdf 相等的关系, 观测数据  $X$  的概率密度函数的估计  $\hat{p}_x(X)$  与源信号概率密度函数  $p_s(S)$  满足

$$\hat{p}_x(X) = \frac{p_s(H^{-1}X)}{|\det H|} \quad (4-16)$$

对于给定的源信号混合模型  $X = HS$ , 观测数据  $X$  的似然函数定义为

$$L(H) = E\{\log \hat{p}_x(X)\} = \int p_x(X) \log p_s(H^{-1}X) dX - \log |\det H| \quad (4-17)$$

它是混合矩阵  $H$  的函数, 分离矩阵  $W = H^{-1}$  时, 对数似然函数为

$$L(W) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{\log p_s(WX_i)\} + \log |\det W| \quad (4-18)$$

式中,  $n$  为独立同分布观测数据的样本数。

#### 4. 6 数据的预处理

一般情况下, 所获得的数据都具有相关性, 所以通常都要求对数据进行初步的白化或球化处理, 因为白化处理可去除各观测信号之间的相关性, 从而简化了后续独立分量的提取过程。通常情况下, 数据进行白化处理与不对数据进行白化处理相比, 算法的收敛性较好。

若一零均值的随机向量  $Z = (Z_1, \dots, Z_M)^T$  满足  $E\{ZZ^T\} = I$ , 其中:  $I$  为单位矩阵, 我们称这个向量为白化向量。白化的本质为去相关, 这同主分量分析的目标是一样的。在 ICA 中, 对于零均值的独立源信号  $S(t) = [S_1(t), \dots, S_N(t)]^T$  各分量必然是不相关的, 即:

$$E\{S_i S_j\} = E\{S_i\} E\{S_j\} = 0, \text{ 当 } i \neq j \quad (4-19)$$

为避免尺度的不确定性, 可对独立源信号进行能量归一化处理, 则归一化后各分量的自相关函数满足

$$E\{S_i^2\} = 1, \quad \forall i \quad (4-20)$$

式 (4-19) 和式 (4-20) 同时成立, 等价于源信号的自协方差矩阵

$$\text{cov}(S) = I \quad (4-21)$$

对任意多维信号施加一个线性变换使其变为白化信号的处理过程称为白化处理 (whiting) 或归一化解相关, 相应的变换矩阵称为白化矩阵。若  $Q$  为观测信号  $X(t)$  的白化矩阵, 则

$$\bar{X}(t) = QX(t) \quad (4-22)$$

式中,  $\bar{X}(t)$  是白化后的混合信号, 于是  $\text{cov}(\bar{X}) = I$ 。将  $X = HS$  代入 (4-22) 并令  $G = QH$  ( $G$  为全局混合矩阵), 得

$$\bar{X}(t) = QHS(t) = GS(t) \quad (4-23)$$

由于线性变换  $G$  所连接的  $\bar{X}(t)$  和  $S(t)$  是两个随机向量, 因而矩阵  $G$  一定是正交阵。如果把  $\bar{X}(t)$  看做新的观测信号, 那么白化就是使原来的混合矩阵  $H$  简化成一个新的正交矩阵  $G$ , 即

$$E\{\bar{X}\bar{X}^T\} = E\{GSS^TG^T\} = GE\{SS^T\}G^T = GG^T = I \quad (4-24)$$

类似地, 若分离矩阵  $W$  针对的是白化后的混合信号  $\bar{X}(t)$ , 分离输出  $y$  满足  $E\{yy^T\} = I$  时, 有

$$E\{yy^T\} = E\{W\bar{X}\bar{X}^TW^T\} = WW^T = I \quad (4-25)$$

式 (4-25) 表明, 数据白化后的盲分离矩阵  $W$  必然为正交矩阵。

实际上, 正交变换相当于对多维矢量所在的坐标系进行一个旋转。在多维情况下, 白化后新的混合矩阵  $G$  是  $N \times N$  阶正交矩阵, 其自由度降为  $N \times (N-1)/2$ , 所以说白化使得 ICA 问题的工作量几乎减少了一半。

白化这种常规的方法作为 ICA 的预处理可以有效地降低问题的复杂度, 而且算法简单, 用传统的 PCA 就可完成。用 PCA 对观测信号进行白化的预处理使得原来所求的解混合矩阵退化成一个正交阵, 减少了 ICA 的工作量。此外, PCA 本身具有降维功能, 当观测信号的个数大于源信号个数时, 经过白化可以自动将观测信号数目降到与源信号维数相同。

#### 4.7 快速 ICA (FastICA) 算法

FastICA<sup>[72]</sup> 算法, 又称固定点 (Fixed-Point) 算法, 是由芬兰赫尔辛基大学 Aapo Hyvarinen<sup>[73,74]</sup> 等人提出来的, 是一种快速寻优迭代算法。与普通的神经网络

络算法不同的是这种算法采用了批处理的方式,即在每一步迭代中有大量的样本数据参与运算。但是从分布式并行处理的观点来看,该算法仍可认为是一种神经网络算法。FastICA 算法有基于峭度、基于似然最大、基于负熵最大等形式,这里,我们介绍基于负熵最大的 FastICA 算法。它以负熵最大作为一个搜寻方向,可以实现顺序地提取独立源,充分体现了投影追踪 (Projection Pursuit) 这种传统线性变换的思想。此外,该算法采用了定点迭代的优化算法,使得收敛更加快速、稳健。

因为 FastICA 算法以负熵最大作为一个搜寻方向,因此先讨论一下负熵判决准则。由信息论理论可知:在所有等方差的随机变量中,高斯变量的熵最大,因而我们可以利用熵来度量非高斯性,常用熵的修正形式,即负熵。根据中心极限定理,若一随机变量  $X$  由许多相互独立的随机变量  $S_i (i=1,2,3,\dots,N)$  之和组成,只要  $S_i$  具有有限的均值和方差,则不论其为何种分布,随机变量  $X$  较  $S_i$  更接近高斯分布。换言之,  $S_i$  较  $X$  的非高斯性更强。因此,在分离过程中,可通过对分离结果的非高斯性度量来表示分离结果间的相互独立性,当非高斯性度量达到最大时,则表明已完成对各独立分量的分离。

负熵的定义:

$$N_g(Y) = H(Y_{Gauss}) - H(Y) \quad (4-26)$$

式中,  $Y_{Gauss}$  是一与  $Y$  具有相同方差的高斯随机变量,  $H(\cdot)$  为随机变量的微分熵

$$H(Y) = - \int p_Y(\xi) \lg p_Y(\xi) d\xi \quad (4-27)$$

根据信息理论,在具有相同方差的随机变量中,高斯分布的随机变量具有最大的微分熵。当  $Y$  具有高斯分布时,  $N_g(Y) = 0$ ;  $Y$  的非高斯性越强,其微分熵越小,  $N_g(Y)$  值越大,所以  $N_g(Y)$  可以作为随机变量  $Y$  非高斯性的测度。由于根据式 (4-27) 计算微分熵需要知道  $Y$  的概率密度分布函数,这显然不切实际,于是采用如下近似公式

$$N_g(Y) = \{E[g(Y)] - E[g(Y_{Gauss})]\}^2 \quad (4-28)$$

其中,  $E[\cdot]$  为均值运算;  $g(\cdot)$  为非线性函数,可取  $g_1(y) = \tanh(a_1 y)$ , 或  $g_2(y) = y \exp(-y^2/2)$  或  $g_3(y) = y^3$  等非线性函数,这里,  $1 \leq a_1 \leq 2$ , 通常我们取  $a_1 = 1$ 。

快速 ICA 学习规则是找一个方向以便  $W^T X$  具有最大的非高斯性。这里，非高斯性用式 (5-7-3) 给出的负熵  $N_g(W^T X)$  的近似值来度量， $W^T X$  的方差约束为 1，对于白化数据而言，这等于约束  $W$  的范数为 1。FastICA 算法的推导如下。首先， $W^T X$  的负熵的最大近似值能通过对  $E\{G(W^T X)\}$  进行优化来获得。根据 Kuhn-Tucker 条件，在  $E\{(W^T X)^2\} = \|W\|^2 = 1$  的约束下， $E\{G(W^T X)\}$  的最优值能在满足下式的点上获得。

$$E\{Xg(W^T X)\} + \beta W = 0 \quad (4-29)$$

这里， $\beta$  是一个恒定值， $\beta = E\{W_0^T Xg(W_0^T X)\}$ ， $W_0$  是优化后的  $W$  值。下面我们利用牛顿迭代法解方程 (4-29)。用  $F$  表示式 (4-29) 左边的函数，可得  $F$  的雅可比矩阵  $JF(W)$  如下：

$$JF(W) = E\{XX^T g'(W^T X)\} - \beta I \quad (4-30)$$

为了简化矩阵的求逆，可以近似为式 (4-30) 的第一项。由于数据被球化， $E\{XX^T\} = I$ ，所以， $E\{XX^T g'(W^T X)\} \approx E\{XX^T\} E\{g'(W^T X)\} = E\{g'(W^T X)\} I$ 。因而雅可比矩阵变成了对角阵，并且能比较容易地求逆。因而可以得到下面的近似牛顿迭代公式：

$$\begin{aligned} W^* &= W - [E\{Xg(W^T X)\} - \beta W] / [E\{g'(W^T X)\} - \beta] \\ W &= W^* / \|W^*\| \end{aligned}$$

(4-31)

这里， $W^*$  是  $W$  的新值， $\beta = E\{W^T Xg(W^T X)\}$ ，规格化能提高解的稳定性。简化后就可以得到 FastICA 算法的迭代公式：

$$\begin{aligned} W^* &= E\{Xg(W^T X)\} - E\{g'(W^T X)\} W \\ W &= W^* / \|W^*\| \end{aligned} \quad (4-32)$$

实际中，FastICA 算法中用的期望必须用它们的估计值代替。当然最好的估计是相应的样本平均。理想情况下，所有的有效数据都应该参与计算，但这会降低计算速度。所以通常用一部分样本的平均来估计，样本数目的多少对最后估计的精确度有很大影响。迭代中的样本点应该分别选取，假如收敛不理想的话，可以增加样本的数量。

一元 FastICA 算法的基本步骤如下:

- ① 对观测数据  $X$  进行中心化, 使它的均值为 0;
- ② 对数据进行白化,  $X \rightarrow Z$ 。
- ③ 选择一个初始权矢量 (随机的)  $W$ 。
- ④ 令  $W^* = E\{Zg(W^T Z)\} - E\{g'(W^T Z)\}W$ , 非线性函数  $g$  的选取见前文非线性函数的选取。
- ⑤ 令  $W = W^* / \|W^*\|$ 。
- ⑥ 假如不收敛的话, 返回第④步。

收敛意味着  $W$  的新值和老值指向同一方向, 即它们的点积为 1。没有必要使向量收敛到一点, 因为  $W$  和  $-W$  指的是同一方向。

如果要估计多个分量, 我们可以按如下步骤计算:

- ① 对观测数据  $X$  进行中心化, 使它的均值为 0;
- ② 对数据进行白化,  $X \rightarrow Z$ ;
- ③ 选择需要估计的分量的个数  $m$ , 设迭代次数  $p \leftarrow 1$ ;
- ④ 选择一个初始权矢量 (随机的)  $W_p$ ;
- ⑤ 令  $W_p = E\{Zg(W_p^T Z)\} - E\{g'(W_p^T Z)\}W_p$ , 非线性函数  $g$  的选取见前文;
- ⑥  $W_p = W_p - \sum_{j=1}^{p-1} (W_p^T W_j) W_j$ ;
- ⑦ 令  $W_p = W_p / \|W_p\|$ ;
- ⑧ 假如  $W_p$  不收敛的话, 返回第 5 步;
- ⑨ 令  $p = p + 1$ , 如果  $p \leq m$ , 返回第 4 步。

FastICA 算法和其他的 ICA 算法相比, 有许多我们期望的特性:

- ① 收敛速度快;
- ② 和梯度算法不同, 无须选步长参数, 易于使用;
- ③ 能利用任何的非线性函数  $g$  直接找出任何非高斯分布的独立分量。而对于其他的算法来说, 概率密度函数的估计不得不首先进行, 因而必须选择非线性;
- ④ 它的性能能够通过选择适当的非线性函数  $g$  来最佳化;
- ⑤ 独立分量可被逐个估计出来, 类似于做投影追踪, 这在仅需要估计几个

(不是全部)独立分量的情况下,能减小计算量;

- ⑥ FastICA 算法有许多神经算法的优点:它是并行的、分布式的且计算简单,内存要求很少。

## 4.8 基于 ICA 算法同时实现地震反射系数和子波估计

应用ICA算法进行地震盲反褶积处理,对于一道地震记录来说,为了更容易的解决问题,提取一些时间上延迟的混合信号,用它们构造一个具有多个实现的任意向量矩阵 $\mathbf{x}$ ,又称为混合向量,是由一个未知量混合矩阵 $\mathbf{A}$ 和相应的加入时间延迟因子的源信号向量矩阵 $\mathbf{s}$ 的乘积构成。根据褶积的性质,混合矩阵 $\mathbf{A}$ 中的非零元素排列为带状,且这些非零元素中包含着子波 $h$ 的信息。混合矩阵 $\mathbf{A}$ 中的这个带状特性作为先验知识并入ICA的算法中便产生了一种解决盲反褶积问题的新方法——带状ICA算法(B-ICA)。应用B-ICA算法可同时恢复出地震子波和反射系数。

### 4.8.1 地震盲反褶积 ICA 模型的建立

地震勘探中的地震记录可用褶积模型近似描述。令 $x(t)$ 和 $h(t)$ 分别表示地震记录和地震子波,在无噪情况下,褶积过程数学模型描述为:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i h(t - \tau_i), \quad (4-33)$$

其中 $\rho_i$ 是地下第 $i$ 个界面的反射系数, $\tau_i$ 从激发点经地下第 $i$ 个界面反射到接收点的双程旅行时。式(4-33)可以表示成褶积形式:

可以表示成褶积形式:

$$x(t) = \rho(t) * h(t) \quad (4-34)$$

其中反射率函数 $\rho(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i \delta(t - \tau_i)$ 。长期以来,褶积模型广泛用于描述地震信号。顾名思义,反褶积就是褶积的逆过程,从地震记录 $x(t)$ 中恢复出反射率函数 $\rho(t)$ 和地震子波 $h(t)$ 。若仅从地震记录 $x(t)$ 中重构出地震子波 $h(t)$ 与反射率函数 $\rho(t)$ ,实际上就是一个褶积型混合信号的盲源分离问题,即所谓盲反褶积问题,通过时间延迟可以转化为ICA模型,用ICA的方法解决



将式(4-33)写成如下矩阵形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{x}$$

(4-35)

其中, 反射系数向量为  $\mathbf{s}^T = (\rho(t_1) \ \rho(t_2) \ \cdots \ \rho(t_n))$  包含  $n$  个样点 ( $n > nw$ ) 的时间序列, 而反射地震记录的长度也取  $n$  个样点,  $\mathbf{x}^T = (x(t_1) \ x(t_2) \ \cdots \ x(t_n))$ , 这样, 褶积矩阵  $\mathbf{A}$  中每个列向量包含着时间延迟后的地震子波  $\mathbf{h}$  的信息, 地震子波算子  $\mathbf{h}^T = (h(t_1) \ h(t_2) \ \cdots \ h(t_{nw}))$  包含  $nw$  个时间样点, 矩阵  $\mathbf{A}$  是原褶积矩阵截去后面  $(nw-1)$  行, 构成的一个  $n \times n$  阶的带状褶积矩阵, 即

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n] = [\mathbf{N}_1 \mathbf{h} | \mathbf{N}_2 \mathbf{h} | \cdots | \mathbf{N}_n \mathbf{h}] \quad (4-36)$$

其中褶积矩阵  $\mathbf{A}$  的列向量  $\mathbf{a}_i = \mathbf{N}_i \mathbf{h}$ ,  $\mathbf{N}_i$  为加零算子, 表示列向量  $\mathbf{a}_i$  第  $i$  个元素为  $h(t_1)$ , 第  $(i+1)$  个元素是  $h(t_2)$ ,  $\cdots$ , 依此类推, 其余元素为零, 图4-2为行数  $n=100$ , 列数  $nw=20$  的带状矩阵  $\mathbf{A}$  的示意图, 很明显其非零元素的排列为带状。

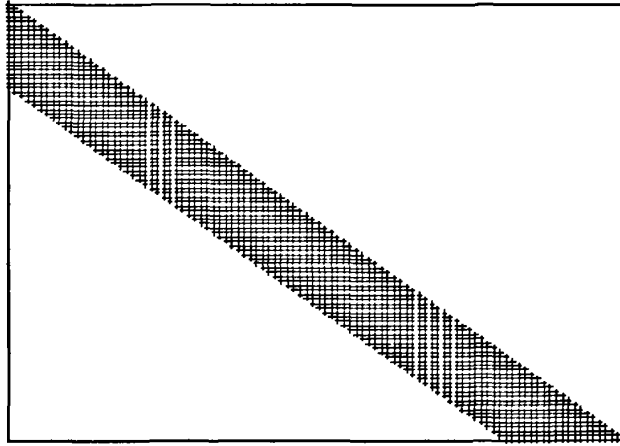


图 4-2 一个带状混合矩阵, 其非零元素排列为带状( $n=100$ ,  $nw=20$ )

褶积模型(4-35)可以看作ICA模型, 但仅提供源信号向量  $\mathbf{s}$  和混合信号向量  $\mathbf{x}$  各自的一个实现, 不能充分的描述它们所对应的统计学性质, 不能构成真正意义上的ICA模型。可以重新排列信息构成信号的多次实现, 满足ICA模型要求。具体策略<sup>[75]</sup>: 考虑  $\rho(t)$  和  $x(t)$  的时间延迟, 将反射系数向量(源信号)和地震记录向量(混合信号)扩展成随机向量(矩阵), 矩阵的每一列都是延迟后向量的一次实现, 即

$$\mathbf{s} = [z^{n-1}\rho(t) \ z^{n-2}\rho(t) \ \cdots \ z\rho(t) \ \rho(t)] \quad (4-37)$$

$$\mathbf{x} = [z^{n-1}x(t) \quad z^{n-2}x(t) \cdots zx(t) \quad x(t)] \quad (4-38)$$

其中  $z$  为单位时间延迟算子，每次实现取  $n$  个值，写成矩阵形式：

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho(t_1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \rho(t_1) & \rho(t_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \rho(t_1) & \rho(t_2) & \cdots & \rho(t_{n-2}) & \rho(t_{n-1}) \\ \rho(t_1) & \rho(t_2) & \rho(t_3) & \cdots & \rho(t_{n-1}) & \rho(t_n) \end{pmatrix} \quad (4-39)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x(t_1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x(t_1) & x(t_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x(t_1) & x(t_2) & \cdots & x(t_{n-2}) & x(t_{n-1}) \\ x(t_1) & x(t_2) & x(t_3) & \cdots & x(t_{n-1}) & x(t_n) \end{pmatrix} \quad (4-40)$$

则  $\mathbf{x}$  的第  $j$  次实现， $j=1,2,\dots,n$ ，为  $\mathbf{x}$  的第  $j$  次实现与子波算子  $\mathbf{h}$  的褶积，即

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{h} * \mathbf{s}_j \quad (4-41)$$

从而使式(4-35)满足 ICA 算法的条件，可以作为 ICA 算法的基本模型，应用 ICA 算法来实现盲反褶积，求出子波和反射系数。ICA 算法能够算出矩阵  $\mathbf{s}$  的每行的近似值，每行中都包含了一部分反射系数的信息，但 ICA 算法并不能直接计算出子波算子  $\mathbf{h}$ ，计算是出的混合信号与独立分量间的映射关系矩阵。另外，ICA 算法是依赖独立分量的统计特性进行计算，显然， $\mathbf{s}$  和  $\mathbf{x}$  的最初的少数行提供很少的非零实现，这对确定相应的随机变量统计特性作用较小。

#### 4. 8. 2 基于 ICA 算法实现地震盲反褶积的原理

ICA 算法常用下列式子<sup>[73,75]</sup>描述：

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{\Gamma A s} = \mathbf{\Gamma x} = \mathbf{W s} = \mathbf{z}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{B x}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Q z} \quad (4-42)$$

其中  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{Q}$  均为  $n \times n$  阶的矩阵， $\mathbf{\Gamma}$  的选取是使  $\mathbf{z}$  为白化矩阵，而  $\mathbf{Q}$  的选定是使  $\mathbf{y}$  的各行随机变量  $y_i$  为独立的分量，对各  $i$  行随机变量  $y_i \propto s_i$ ， $s_i$  是  $\mathbf{s}$  的第  $i$  行随机变量。另外，定义一个新的矩阵  $\mathbf{P}$ ，使得

$$\mathbf{P y} = \mathbf{x} \quad (4-43)$$

其中  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_2 | \cdots | \mathbf{p}_m]$ ，由于 ICA 的不确定性<sup>[75]</sup>，得到的独立分量  $\mathbf{y}$  与  $\mathbf{s}$  在幅度和排序上有所差异，矩阵  $\mathbf{P}$  和矩阵  $\mathbf{A}$  映射作用相似（或认为相同）。这里对基本 ICA

算法进行改进,不再求矩阵  $\mathbf{Q}$  的行,而是求矩阵  $\mathbf{P}$  的列。这样可以更方便的将先验信息应用到 ICA 算法中,即矩阵  $\mathbf{A}$  的带状性质可以应用到矩阵  $\mathbf{P}$  上,从而产生一种新的所谓 B-ICA 算法并得到盲反褶积问题的解。

ICA的一般算法是求目标函数  $\phi(\mathbf{q}_i^T)$  的最小值,即用独立分量  $\mathbf{y}_i = \mathbf{q}_i^T \mathbf{z}$  负熵<sup>[76]</sup>测度  $\{-J(\mathbf{y}_i)\}$  来计算,其中  $\mathbf{q}_i^T$  是矩阵  $\mathbf{Q}$  的第  $i$  行,负熵定义为:

$$\phi(\mathbf{q}_i^T) = -J(\mathbf{y}_i) \approx -\frac{k_3^2(\mathbf{y}_i)}{12} - \frac{k_4^2(\mathbf{y}_i)}{48} \quad (4-44)$$

式中  $k_3(\mathbf{y}_i)$  和  $k_4(\mathbf{y}_i)$  分别是  $\mathbf{y}$  中第  $i$  个独立分量的斜度和峰度。由 ICA 算法可求出矩阵  $\mathbf{Q}$  各个行  $\mathbf{q}_i^T$ , 而列  $\mathbf{q}_i$  和列  $\mathbf{p}_i$  的关系很容易求得。另外,独立分量  $\mathbf{y}_i$  是零均值不相关单位方差的随机变量。

由  $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{z}$  得  $E(\mathbf{y}\mathbf{y}^T) = E(\mathbf{Q}\mathbf{z}\mathbf{z}^T\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}E(\mathbf{z}\mathbf{z}^T)\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ , 其中,  $\mathbf{I}$  是单位矩阵。若  $\mathbf{Q}^{-1}$  存在,  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ , 即  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$ 。进一步,由式(4-42)得,  $\mathbf{z} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{Q}^T\mathbf{y} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}$ , 于是

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{y} \quad (4-45)$$

比较式(4-43)和式(4-45)可以得到矩阵  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  的关系,  $\mathbf{P} = \mathbf{\Gamma}^{-1}\mathbf{Q}^T$  或  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{\Gamma}\mathbf{P}$ , 因此,列之间关系为  $\mathbf{q}_i = \mathbf{\Gamma}\mathbf{p}_i$ 。认为矩阵  $\mathbf{P}$  和矩阵  $\mathbf{A}$  映射作用相同,则

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{q}_i^T \mathbf{z} = (\mathbf{\Gamma}\mathbf{p}_i)^T \mathbf{z} = (\mathbf{\Gamma}\mathbf{N}_i\mathbf{h})^T \mathbf{z} = \mathbf{h}^T (\mathbf{N}_i^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{z}) = \mathbf{h}^T \tilde{\mathbf{x}} \quad (4-46)$$

其中:  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{N}_i^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{N}_i$  为加零算子矩阵,使向量  $\mathbf{h}$  映射为矩阵  $\mathbf{P}$  的第  $i$  列,且从  $i$  开始放置向量  $\mathbf{h}$  第一个元素,依次类推,其它元素为零,非零元呈带状排列。 $\mathbf{N}_i$  作为先验信息,限制混合矩阵  $\mathbf{A}$  具有这种带限性质,也就是使矩阵  $\mathbf{P}$  具有与  $\mathbf{A}$  相同已知的稀疏结构。

在式(4-46)中,  $\tilde{\mathbf{x}}$  可认为是一组新的与独立分量  $\tilde{\mathbf{y}}$  对应的混合向量(总数是  $nw$  个),即  $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}$ , 其中,  $\tilde{\mathbf{B}}^T = [\tilde{\mathbf{h}}_1 | \tilde{\mathbf{h}}_2 | \cdots | \tilde{\mathbf{h}}_{nw}]$  是一个  $nw \times nw$  阶的矩阵。式(4-46)可推广成一个新的 ICA 模型:

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{\Gamma}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{z}} \quad (4-47)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{\Gamma}}$ 。那么,只要给定  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{N}_i^T \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{z}$ , 应用 ICA 算法就能够求解  $\tilde{\mathbf{y}}$  和  $\tilde{\mathbf{B}}$ 。 $\tilde{\mathbf{y}}$  的某向量(第  $i$  个)就是期望的独立分量(反射系数的一次实现),而矩阵  $\tilde{\mathbf{B}}$  的某行(第  $i$  行)就是矩阵  $\mathbf{P}$  的某列(第  $i$  列)中的那些非零元素。也就是说,对某

个  $i$ ，满足  $\tilde{\mathbf{h}}_i \propto \mathbf{h}$ 。算法中的  $\mathbf{N}_i$  作为先验信息，限定求第  $i$  个独立分量（反射系数一次实现）和混合矩阵中的  $\mathbf{a}_i$  列（子波序列）。

上述算法称为B-ICA算法，虽利用了混合矩阵结构已知的先验信息，但B-ICA算法仍存在模糊性，即算法会产生与  $\mathbf{h}$  维数（ $n_w$ ）个数一样多的独立分量，还要对选取最佳的分量及其矩阵  $\tilde{\mathbf{B}}$  中相应的的行向量。

式（4-35）将无噪地震褶积模型等价于基本ICA模型，但式（4-37）和（4-38）中前几个向量中非零实现较少，对相应的随机变量反映不足，要对算法进行改进，弥补所缺少的信息，然后再使用B-ICA求出与  $\mathbf{h}$  维数（ $n_w$ ）个数一样多的独立分量和相应的子波序列，最后从这些候选解中选取最优解，得到反射系数和子波的一个最佳近似。

使用一个近似褶积模型  $\mathbf{A}\mathbf{s} \approx \mathbf{x}$ ，

$$\mathbf{s} = [z^{m-1}\rho(t) \quad z^{m-2}\rho(t) \quad \cdots \quad z\rho(t) \quad \rho(t)] \quad (4-48)$$

$$\mathbf{x} = [z^{m-1}x(t) \quad z^{m-2}x(t) \quad \cdots \quad zx(t) \quad x(t)] \quad (4-49)$$

其中， $m < n$ 。这时褶积混合矩阵并不精确，但随机变量有较多非零元素，可较好地反映随机性，满足ICA的要求。

显然给定  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{s}$ ，计算  $\mathbf{x}$ ，对于元素  $x_i(t_i)$  在  $(i \in \{1 \cdots m\}) \cap (j \in \{(m-1) \cdots n\})$  范围内结果不正确的，但是，对  $\mathbf{x}$  的剩余部分则是正确的。因此选取适当的  $m$ ，给出式（4-49）形式的  $\mathbf{x}$ ，就可以利用B-ICA算法按真正褶积模型求出子波和反射系数。这时ICA模型（4-47）式中矩阵  $\tilde{\mathbf{B}}$  计算对应  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{N}_{m-n_w-10}^T \Gamma^T \mathbf{z}$ ，即应用了褶积矩阵结构的已知信息。

本文采用改进的FastICA算法<sup>[77]</sup>，目标函数用负熵非多项式展开表示，

$$J(\tilde{\mathbf{y}}_i) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \{E[r_k(\tilde{\mathbf{y}}_i)]\}^2 \quad (4-50)$$

一般取  $l=1$  时，近似求出  $J(\tilde{\mathbf{y}}_i)$ ，这时  $r_1(\tilde{\mathbf{y}}_i) = \exp(-\frac{\tilde{\mathbf{y}}_i^2}{2})$ 。

B-ICA算法求出与  $\mathbf{h}$ （或  $\mathbf{h}_i$ ）的维数一样多的反射系数和子波。但实际中地震子波是未知的，因此简单的选择是不够的。可以通过褶积模型，计算相关系数  $c_i$ ，使褶积模型误差最小，来挑选最佳结果，目标函数如下，

$$\psi(c_i) = \|\mathbf{x}_k - c_i \tilde{\mathbf{h}}_i * \tilde{\mathbf{y}}_i\|_2^2 \quad (4-51)$$

其中,  $\mathbf{x}_k^T = [x_k(t_1) \ x_k(t_2) \cdots x_k(t_n)]$  和  $\tilde{\mathbf{y}}_i^T = [\tilde{y}_i(t_1) \ \tilde{y}_i(t_2) \cdots \tilde{y}_i(t_n)]$  分别是第  $k$  个混合信号和第  $i$  个独立分量 (反射系数)。利用最小二乘法, 很容易得到极小值点

$$c_i = c_i^{(*)} = \frac{\mathbf{x}_k^T (\tilde{\mathbf{h}}_i * \tilde{\mathbf{y}}_i)}{(\tilde{\mathbf{h}}_i * \tilde{\mathbf{y}}_i)^T (\tilde{\mathbf{h}}_i * \tilde{\mathbf{y}}_i)} \quad (4-52)$$

而反射系数和子波的最优结果  $(\tilde{\mathbf{y}}_*, \tilde{\mathbf{h}}_*)$ , 可用下式计算得到,

$$\psi(c_i^{(*)}) = \min_i \{\psi(c_i^{(*)})\}, i = 1 \dots nw \quad (4-53)$$

#### 4. 8. 3 基于 ICA 算法的地震盲反褶积的数值算例

##### ① 模型数据试算

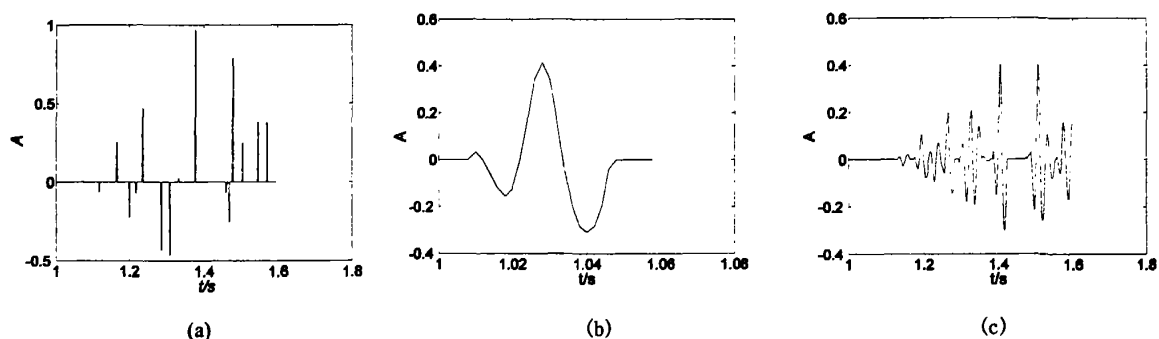


图4-3 随机反射系数(a), 模拟的非最小相位地震子波(b)和模拟地震记录(c)

图4-3(a)为产生的非高斯分布的随机反射系数(300个样点, 采样率2ms), 图4-3 (b)是模拟的非最小相位地震子波, 取30个样点作为褶积算子, 图4-3(c)是反射系数和子波褶积得到的模拟地震记录(也取300个样点)。

图4-3为应用B-ICA算法得到的与独立分量的数目相同的反射系数和子波(与地震子波样点数相同)。为解决时间延迟褶积模型随机变量反映不足, 选取式(4-48)和式(4-49)中  $m = 125 < n = 300$ 。由于ICA算法自身的模糊性<sup>[78]</sup>, B-ICA算法得到的结果在振幅和相位上与真实结果难免有一定的出入。进一步通过求解相关系数的极值得到最优反射系数序列和相应的地震子波, 如图4-4所示。由图4-4可以看出, B-ICA算法能够较为理想地同时反演反射系数和地震子波, 解决盲反褶积问题。

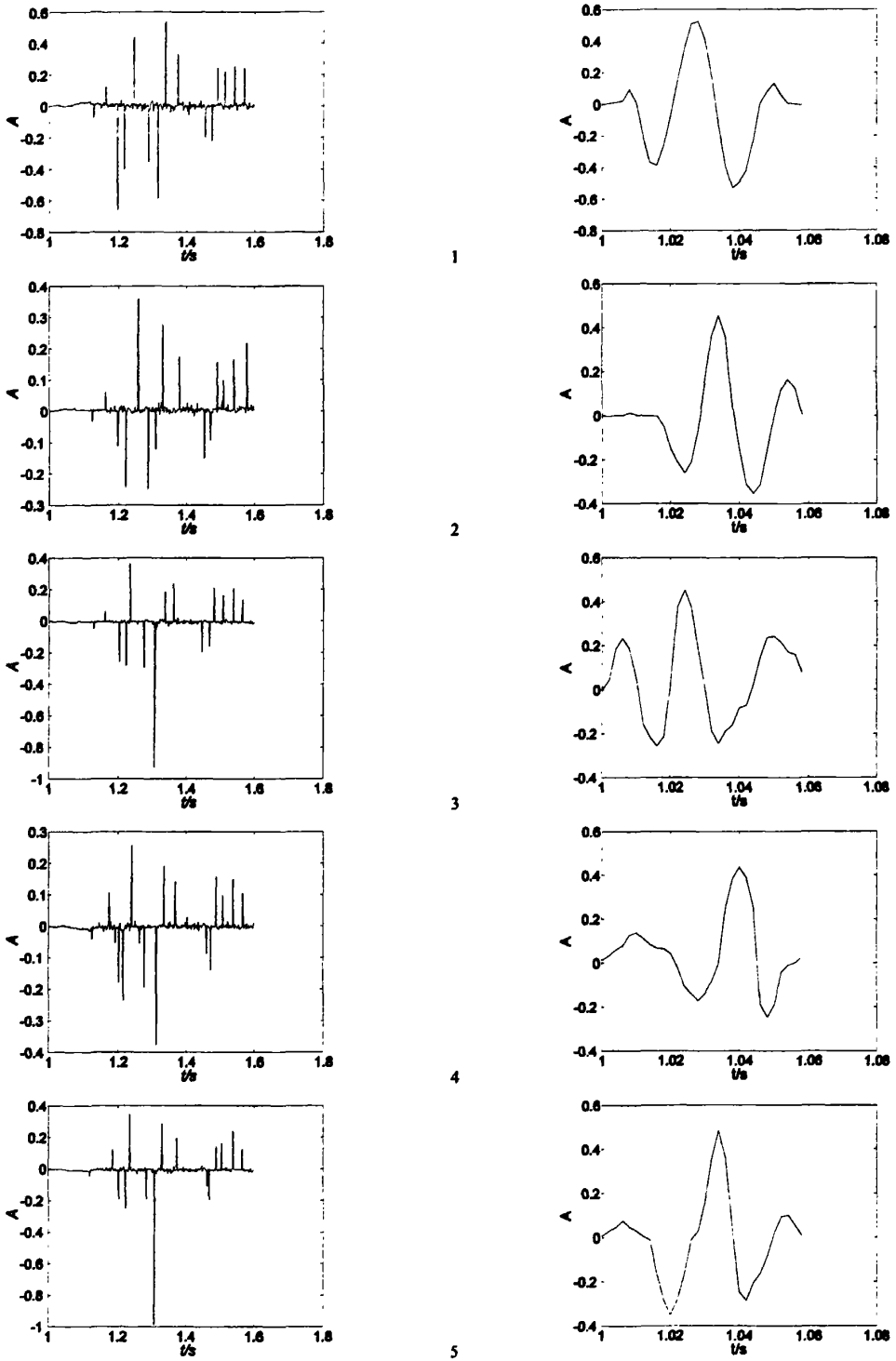


图4-3 应用B-ICA算法计算得到的反射系数和子波得到的30对候选结果

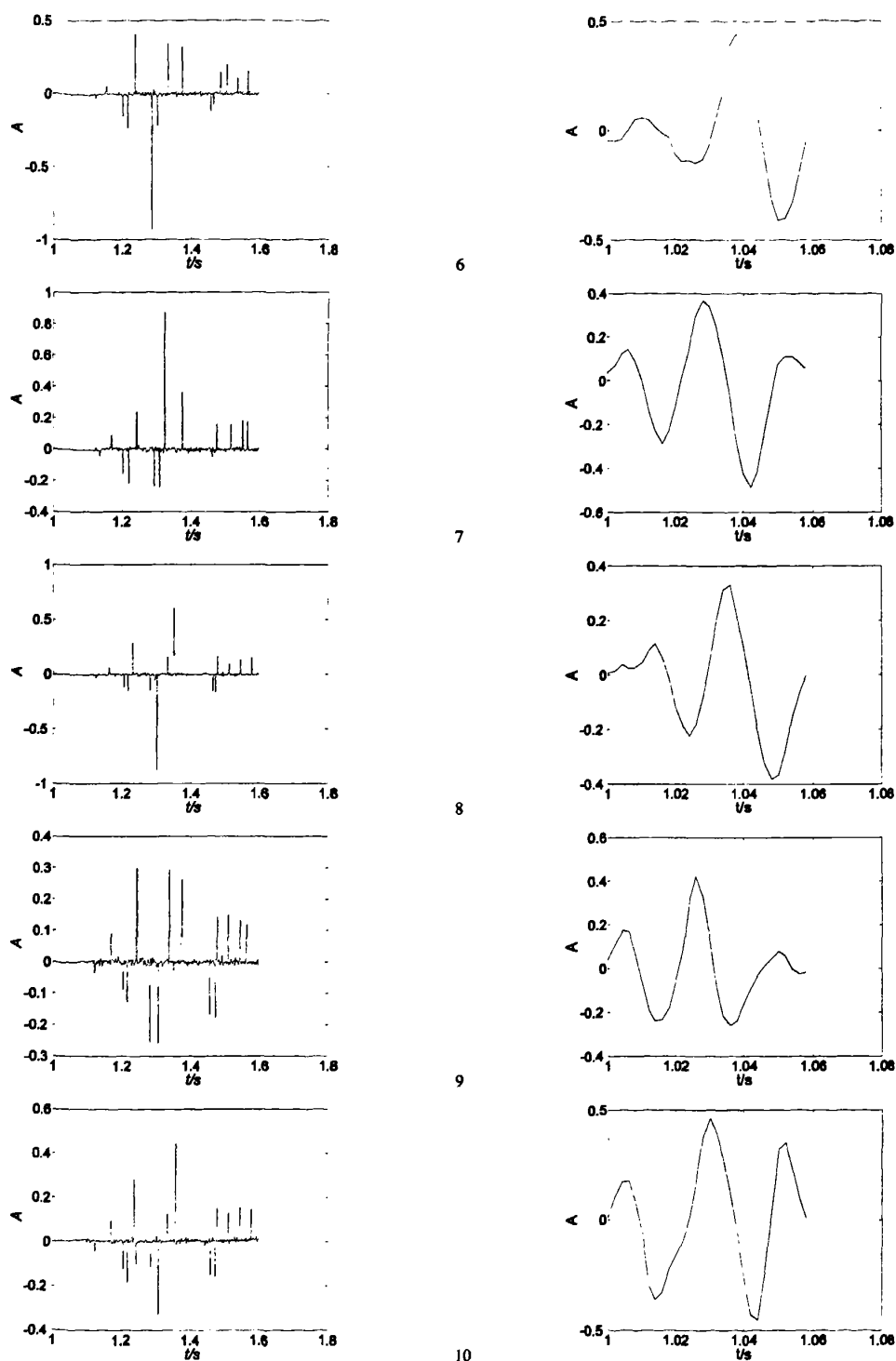


图4-3 应用B-ICA算法计算得到的反射系数和子波得到的30对候选结果 (续1)

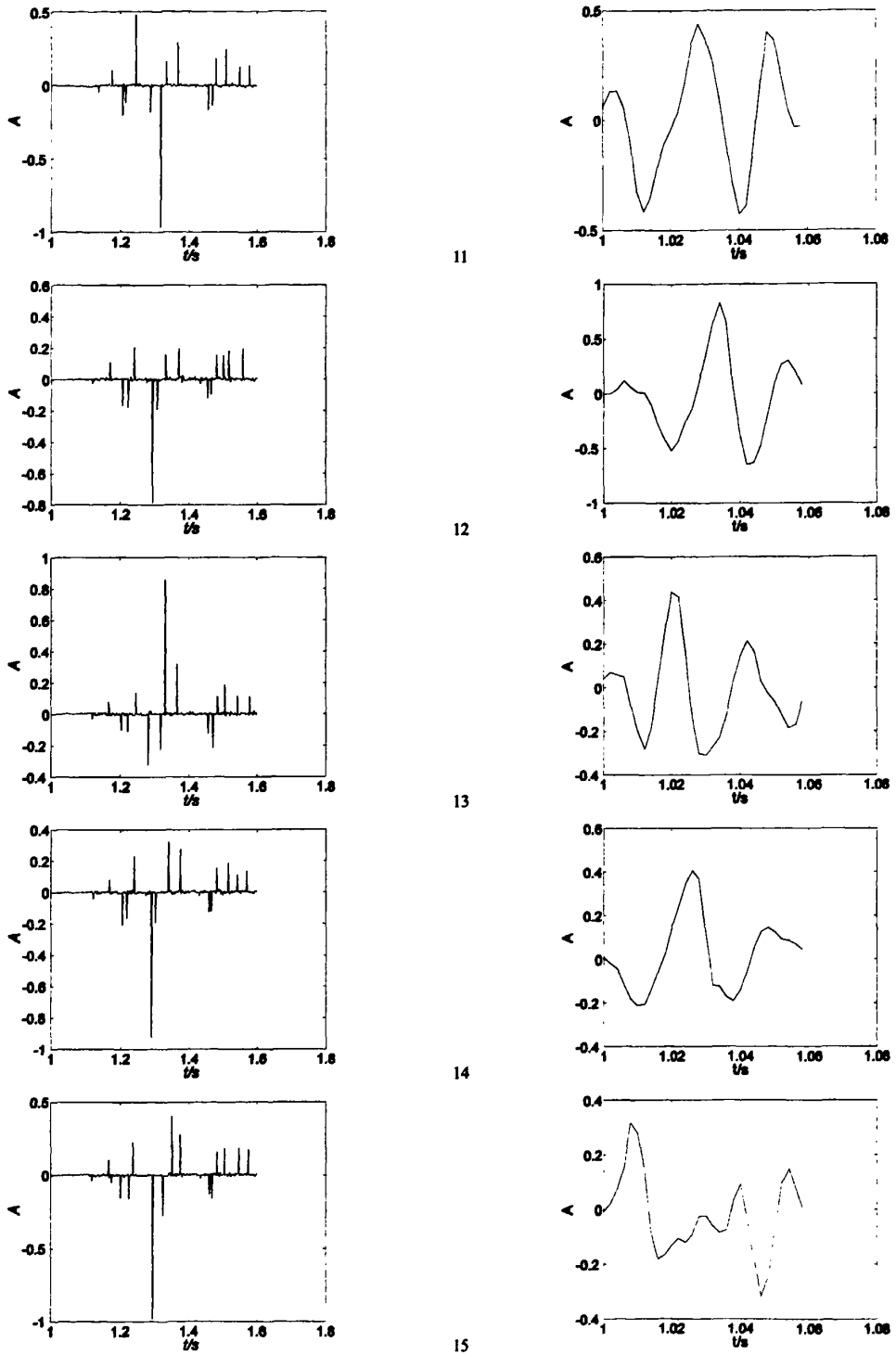


图4-3 应用B-ICA算法计算得到的反射系数和子波得到的30对候选结果 (续2)



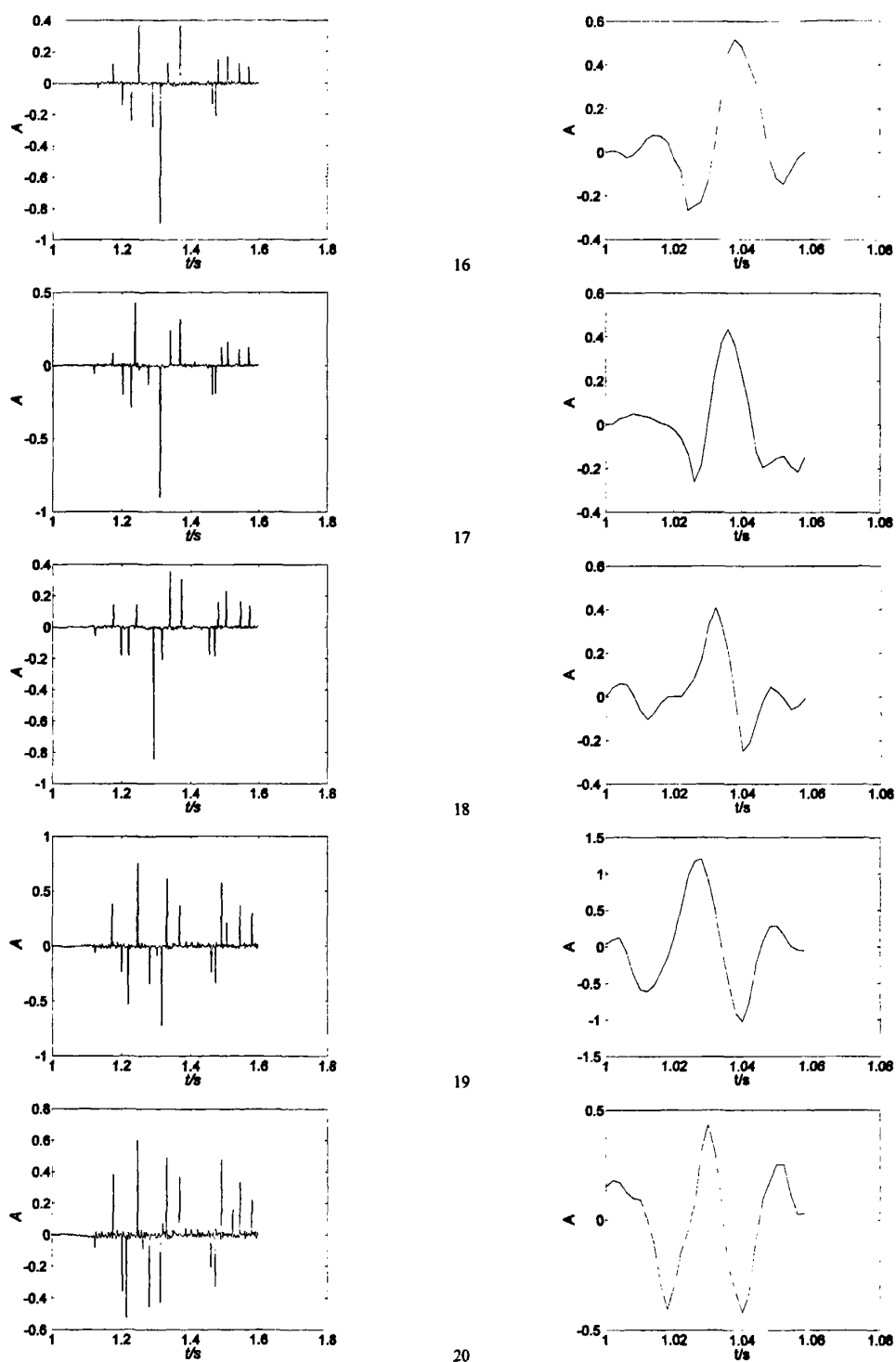


图4-3 应用B-ICA算法计算得到的反射系数和子波得到的30对候选结果 (续3)

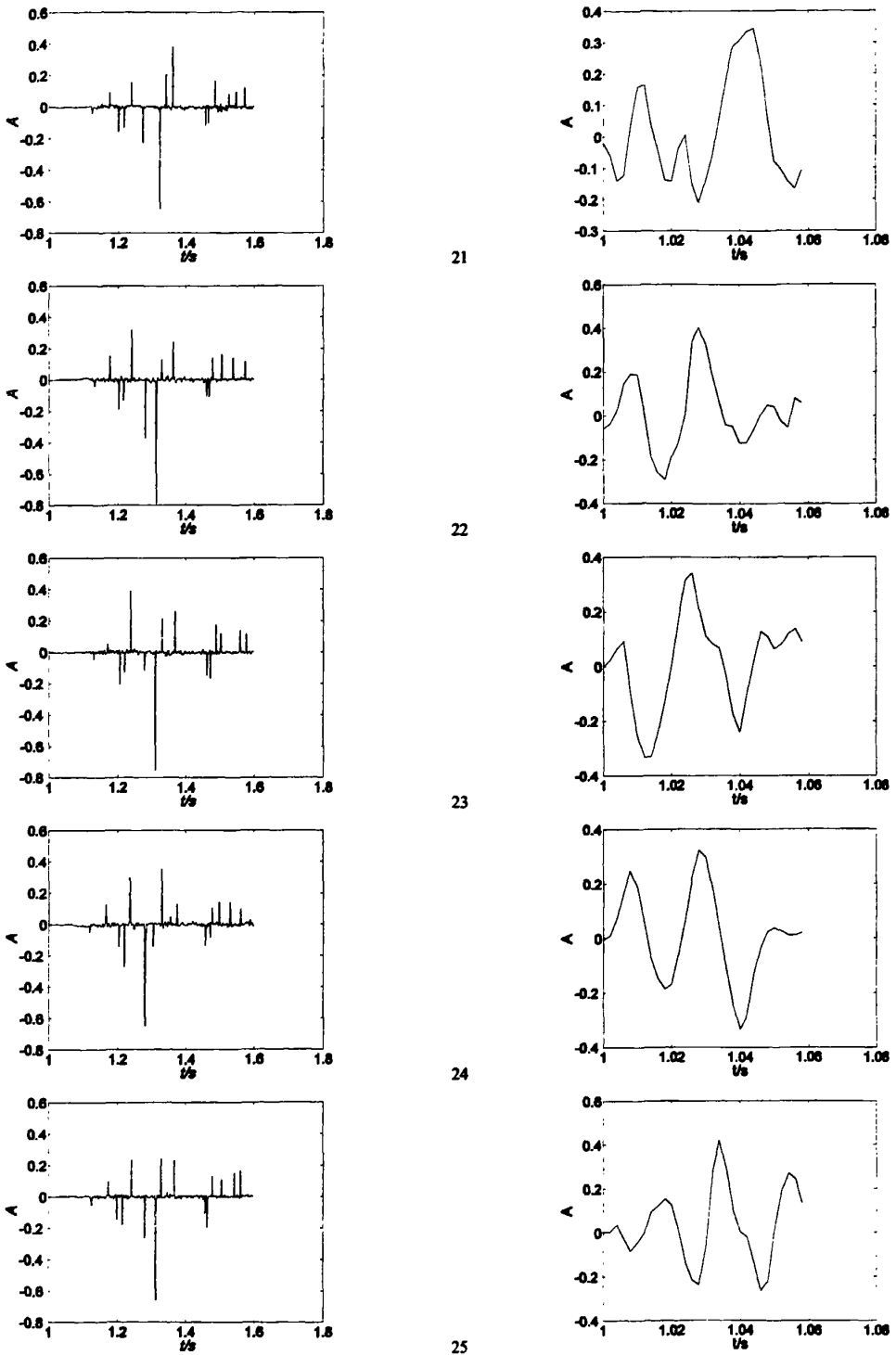


图4-3 应用B-ICA算法计算得到的反射系数和子波得到的30对候选结果 (续4)

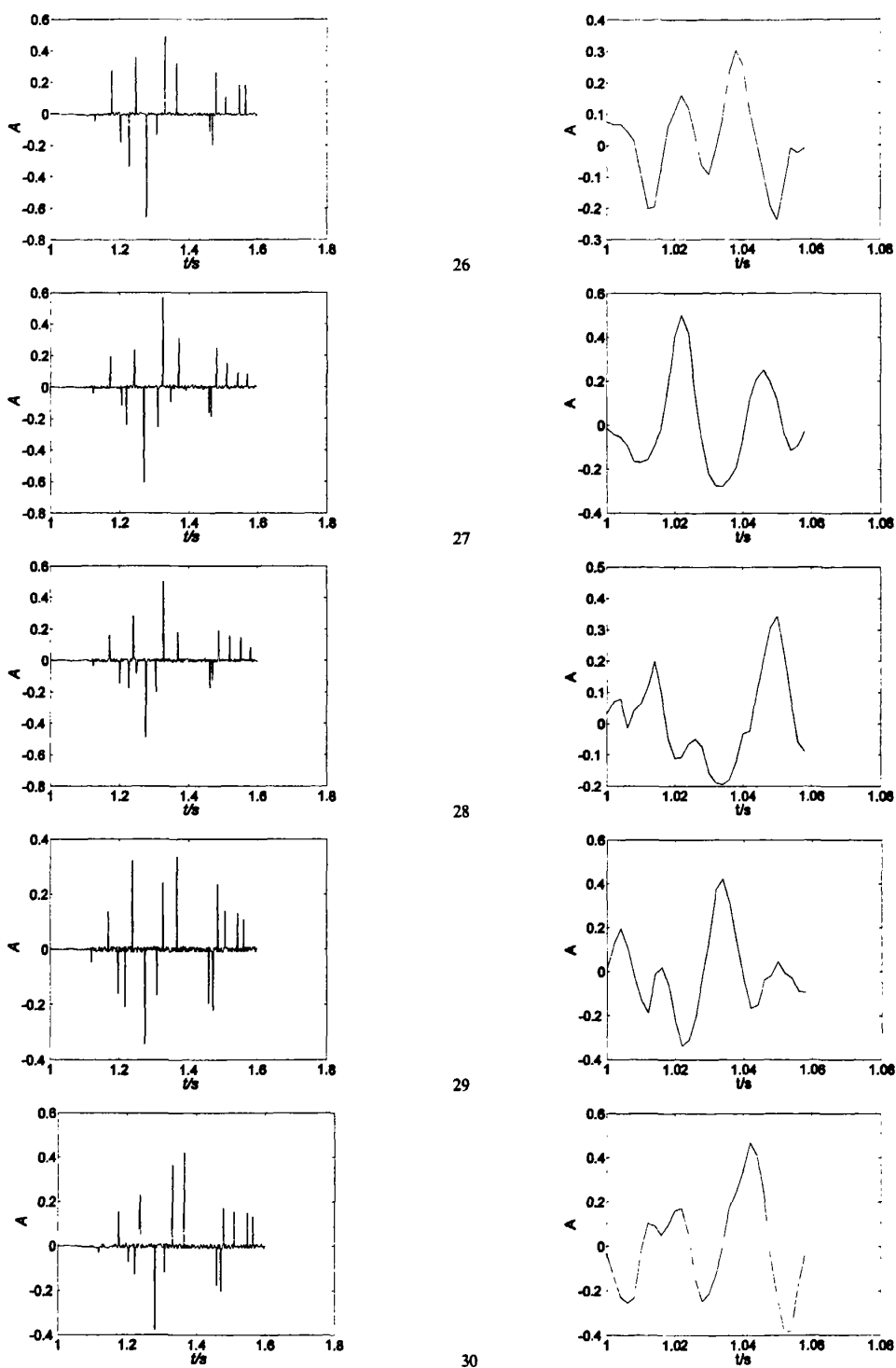


图4-3 应用B-ICA算法计算得到的反射系数和子波得到的30对候选结果（续5）

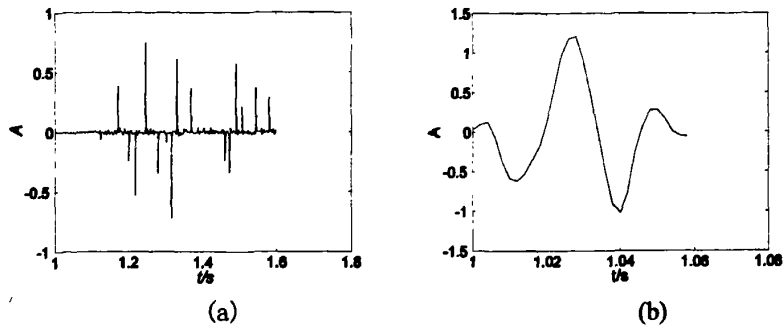
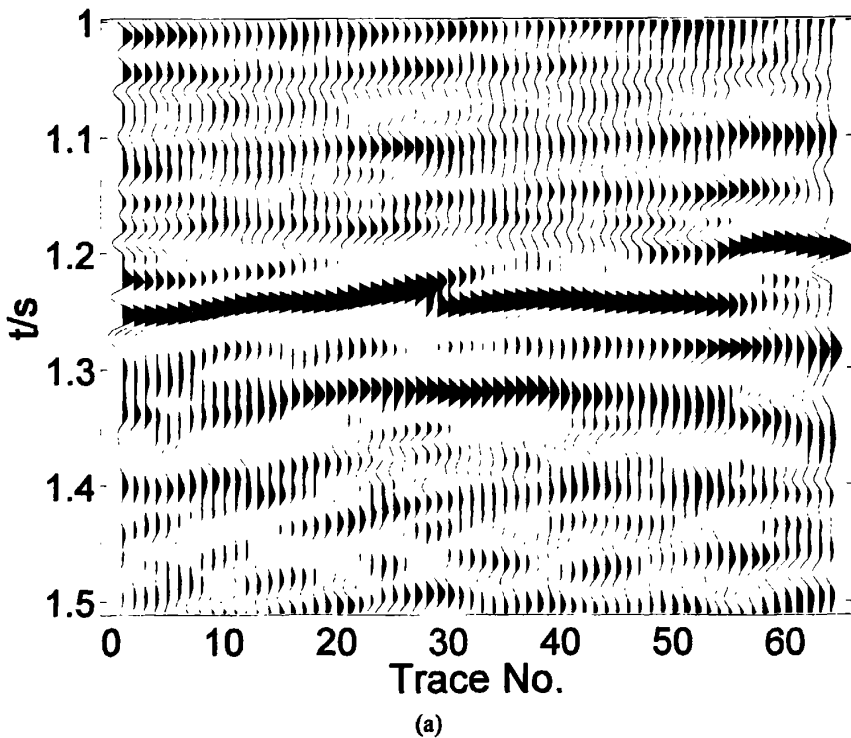


图4-4 通过B-ICA算法得到的最佳反射系数(a)和子波(b)

## ② 实际二维地震数据试算

图 4-5(a)为一 64 道、每道有 256 个样点的实际二维地震数据,采样率为 2ms。在图 4-5(b)和图 4-5(c)分别为采用 B-ICA 盲反褶积反演得到了反射系数剖面 and 地震子波剖面,在无噪条件下,较好地实现了反射系数和地震子波同时反演的盲反褶积(非高斯和非最小相位假设),表明 B-ICA 地震盲反褶积具有一定的实用性,值得进一步深入研究。



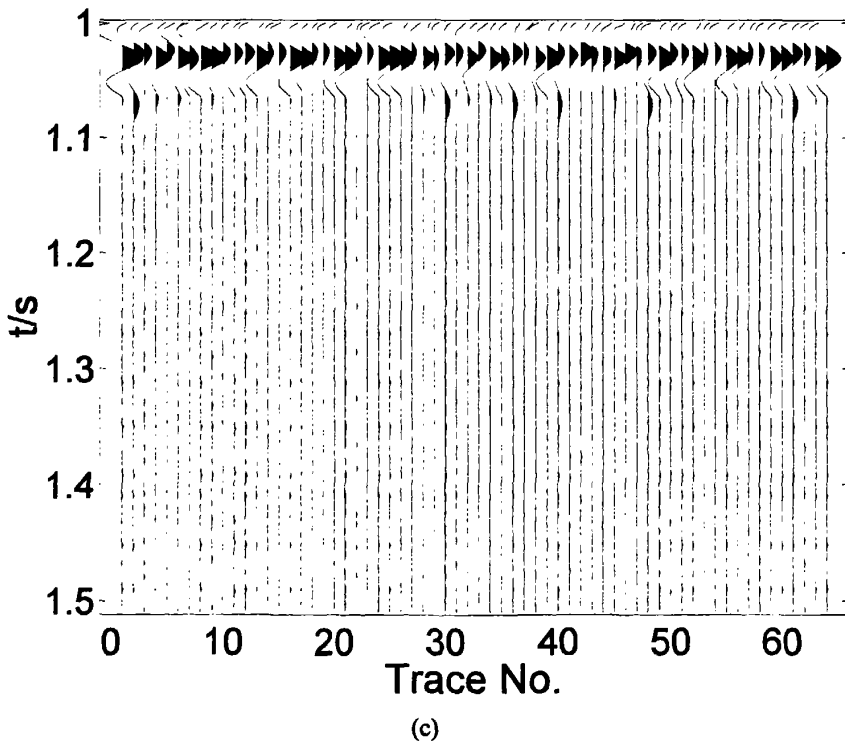
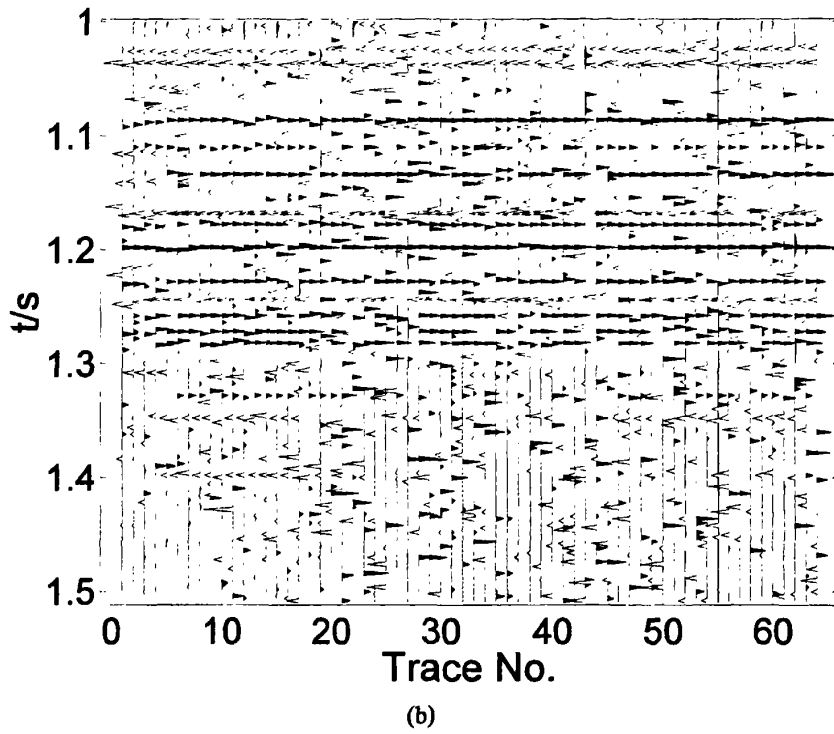


图 4-5 实际二维地震道(a), B-ICA 反射系数剖面(b)和相应的地震子波剖面(c)

## 4. 9 基于 ICA 的同态盲反褶积

与常规的地震反褶积方法相比, 同态反褶积对地震记录不作任何先验假设, 如最小相位子波与反射系数序列均匀随机分布等, 因而不会产生由这些假设条件不满足而引入的误差<sup>[79]</sup>。同态反褶积方法虽然在对地震子波不做最小相位假设, 利用对数谱平均提取子波直接分离出地震子波和反射系数<sup>[13]</sup>。但是, 在用同态反褶积方法估算出的若干个地震子波当中, 如何选取一个最佳的地震子波却是比较困难的问题。因为人工挑选不仅需要花费大量的时间, 而且还需要一定的经验, 挑选的结果往往因人而异。

本文对同态反褶积方法进行了探索性改进, 将基于高阶统计量的盲源分离方法——独立分量分析(ICA)与同态反褶积相结合, 将地震褶积模型从时间域变换到复倒谱域, 使褶积模型变成加法模型以满足 ICA 的算法模型, 采用 FastICA 算法将地震子波和反射系数分离。文献[18]提出用 ICA 实现同态反褶积(盲反褶积)的方法来进行语音信号的分离, 地震信号的反褶积可以借鉴。

### 4. 9. 1 基于 ICA 的同态盲反褶积的原理和步骤

地震勘探中的地震记录可用褶积模型近似描述。令  $x(t)$  表示一道地震记录  $h(t)$  和  $s(t)$  分别表示地震子波和反射系数, 在无噪情况下, 褶积过程数学模型描述为:

$$x(t) = h(t) * s(t) \quad (4-54)$$

对式 (4-54) 两侧求复倒谱可得:

$$\hat{x}(t) = \hat{h}(t) + \hat{s}(t) \quad (4-55)$$

由式 (4-55) 可知  $\hat{h}(t)$  和  $\hat{s}(t)$  相互独立, 满足了 ICA 算法的条件, 可用 ICA 算法进行分离。另外, 在同一地震记录中, 由于地震子波  $h(t)$  可近似认为是不变的, 相邻的两道地震记录因地下界面的相似而大体一致, 因此可以选择相邻的两道地震道来进行研究, 其复倒谱可表示为:

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t) = \hat{h}(t) + \hat{s}(t) \\ \hat{x}_2(t) = \hat{h}(t) + \alpha \hat{s}(t) \end{cases} \quad (4-56)$$

其中,  $\hat{h}(t)$  为复倒谱域中的地震子波,  $\hat{s}(t)$  为在复倒谱域中的平均反射系数。 $\alpha$  为一绝对值非常接近1的常数, 这是因为相邻的两道地震记录存在着细微的差异, 但是又十分接近。需要指出的是, 由于时域信号与其复倒谱之间的变换为非线性变换, 因此不能简单地由式 (4-56) 直接估计平均反射系数  $s(t)$ 。根据式 (4-56), 在复倒谱域, 系统的等效混合矩阵为一非奇异矩阵, 因此, 可以实现信号的分离。

虽然 ICA 算法可以恢复独立分量的波形, 但分离出的信号却存在着三种不确定性, 即分离信号的顺序、幅度及相位的不确定性。在大多数情况下, 由于应用 ICA 算法只要求获得独立分量的波形, 因此这些不确定性是可以忽略的。本文中, 应用 ICA 算法所解决的问题中只包含两个混合信号, 因此可以不考虑分离信号顺序的不确定性。但是, 在将信号由复倒谱域变换回时域时, 幅度和相位的不确定性将直接影响到最终的盲反褶积的结果<sup>[29]</sup>。因此, 在应用 ICA 算法进行分离的同时还要消除复倒谱  $\hat{h}(t)$  和  $\hat{s}(t)$  的振幅和相位的不确定性<sup>[80]</sup>。

假设经过 ICA 算法分离后, 独立分量的向量为  $I_d = [id_1, id_2]^T$ , 分离矩阵为  $W$ , 则混合矩阵:

$$A = W^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

构造向量  $R_1 = [a_{11}, 0]$ ,  $R_2 = [0, a_{12}]$ , 则有:

$$\hat{s}_1(t) = R_1 I_d \quad (4-57)$$

$$\hat{s}_2(t) = R_2 I_d \quad (4-58)$$

ICA 算法分离后的独立分量  $I_d$  经过式(4)和(5)计算后所得的  $\hat{s}_1(t)$  和  $\hat{s}_2(t)$  与复倒谱  $\hat{h}(t)$  和  $\hat{s}(t)$  之间的幅度和相位的不确定性已完全消除, 只存在着顺序上的不确定性了。

基于 ICA 的同态反褶积方法实现地震盲反褶积的步骤总结如下:

- ① 取相邻的两道地震道  $x_1(t)$  和  $x_2(t)$  求复倒谱  $\hat{x}_1(t)$  和  $\hat{x}_2(t)$ 。
- ② 利用 ICA 算法对复倒谱  $\hat{x}_1(t)$  和  $\hat{x}_2(t)$  进行分离。

③ 采用式(4)和(5)的方法计算  $\hat{s}_1(t)$  和  $\hat{s}_2(t)$ ，消除分离后复倒谱信号幅度和相位的不确定性。

④ 将  $\hat{s}_1(t)$  和  $\hat{s}_2(t)$  由复倒谱域反变换回时域，重构时域信号  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$ 。

$s_1(t)$  和  $s_2(t)$  即为所求的结果，其中一个为地震子波  $h(t)$ ，另一个则为平均反射系数  $s(t)$ 。

#### 4. 9. 2 基于 ICA 的同态反褶积的数值算例

##### ① 模型数据试算

图4-6(a)是模拟的非最小相位的地震子波  $h(t)$ ，取300个样点作为褶积算子，图4-6(b)为产生的非高斯分布的随机反射系数  $s(t)$  (300个样点，采样率2ms)，图4-6(c)是地震子波  $h(t)$  和反射系数  $s(t)$  褶积得到的模拟地震记录  $x_1$  (也取300个样点)，图4-6(d)是取  $\alpha = 0.9999$  时，地震子波  $h(t)$  和反射系数  $s(t) * \alpha$  褶积得到的模拟地震记录  $x_2$  (也取300个样点)。图4-7(a)是利用基于ICA的同态反褶积方法得到的地震子波，图4-7(b)是利用基于ICA的同态反褶积方法得到的反射系数。

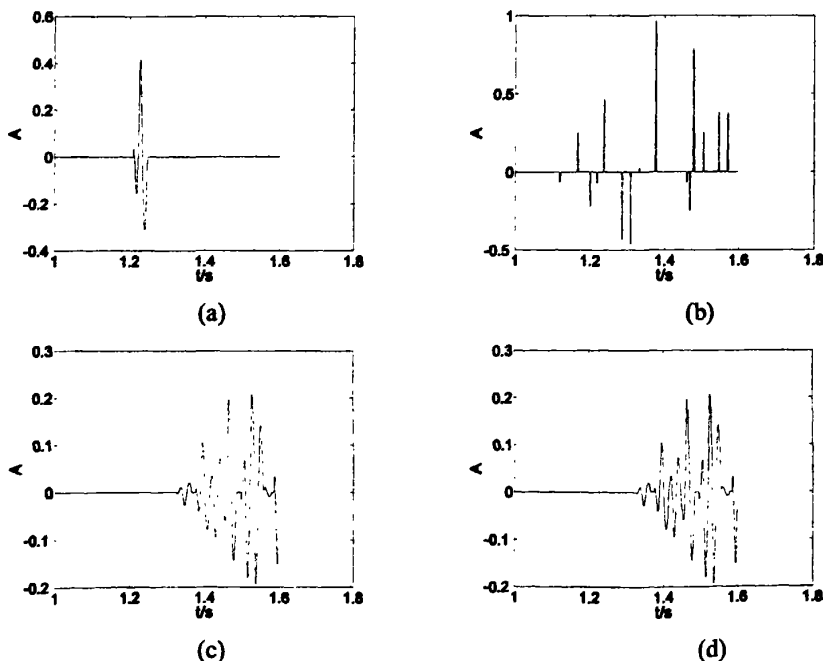


图 4-6 地震子波(a)，随机反射系数(b)，模拟地震记录 1(c)和模拟地震记录 2(d)



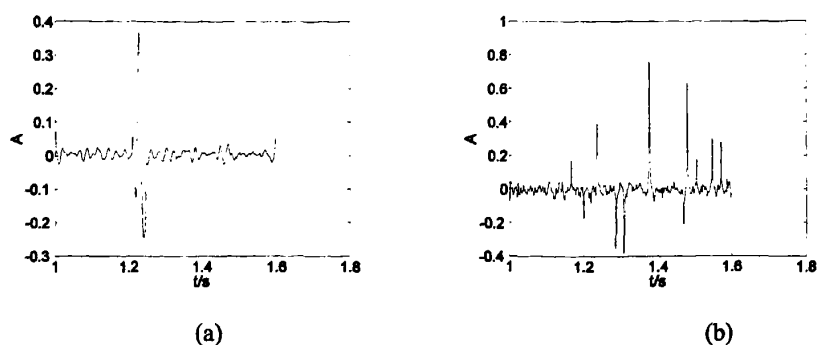
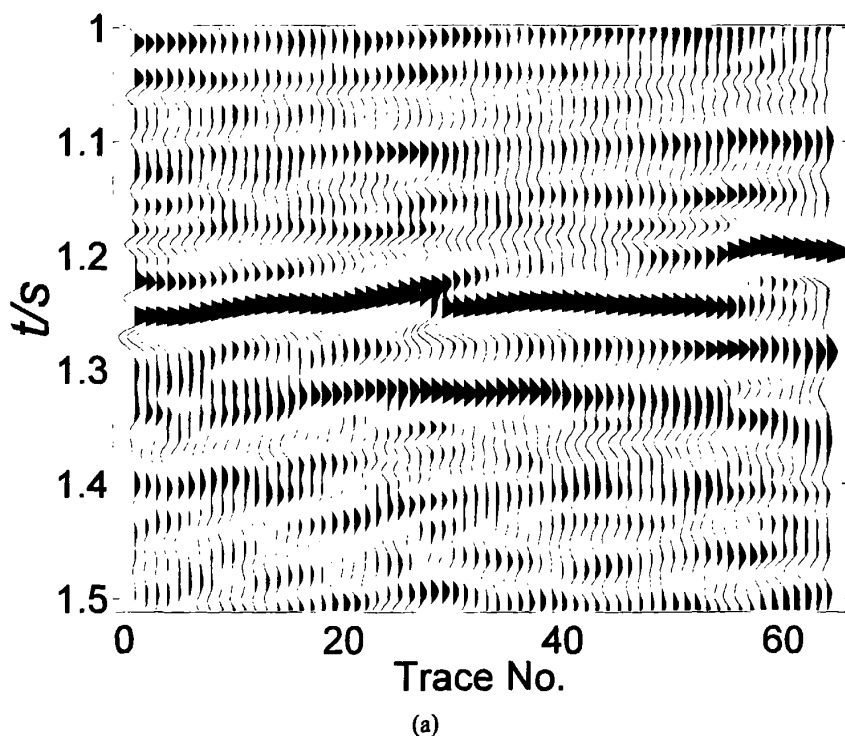


图 4-7 基于 ICA 的同态反褶积方法所得到的平均地震子波(a)和反射系数(b)

## ② 实际二维地震数据试算

图 4-8(a)为 64 道、每道有 256 个样点的实际二维地震数据，采样率为 2ms。图 4-8(b)和(c)分别为采用基于 ICA 的同态反褶积方法反演得到的反射系数剖面 and 地震子波剖面，在无噪条件下，较好地实现了反射系数和地震子波同时反演的盲反褶积（非高斯和非最小相位假设），表明基于 ICA 的同态反褶积方法在地震盲反褶积的应用上具有一定的实用性，值得进一步深入研究。



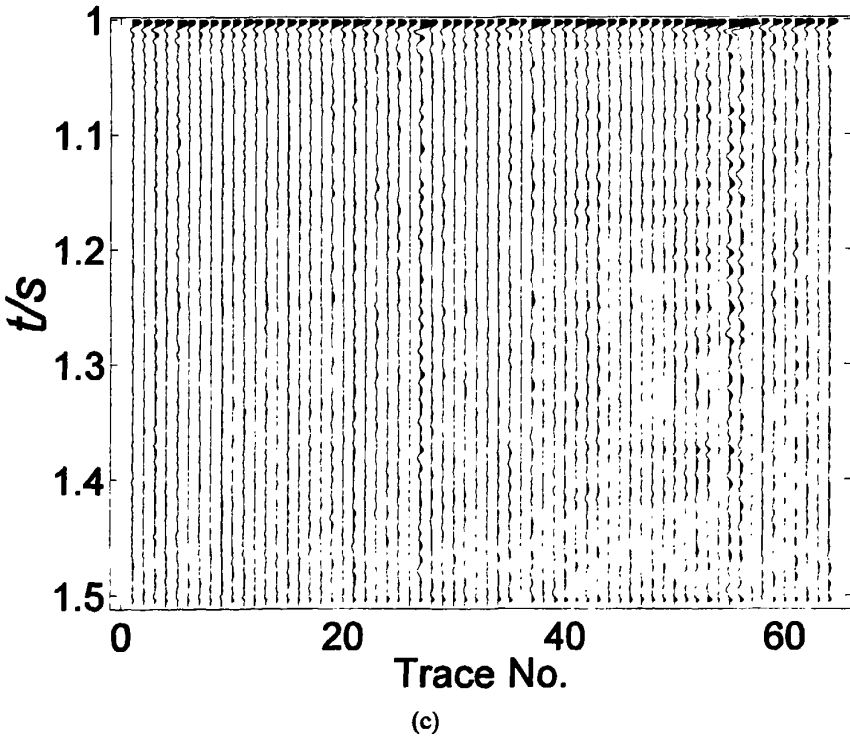
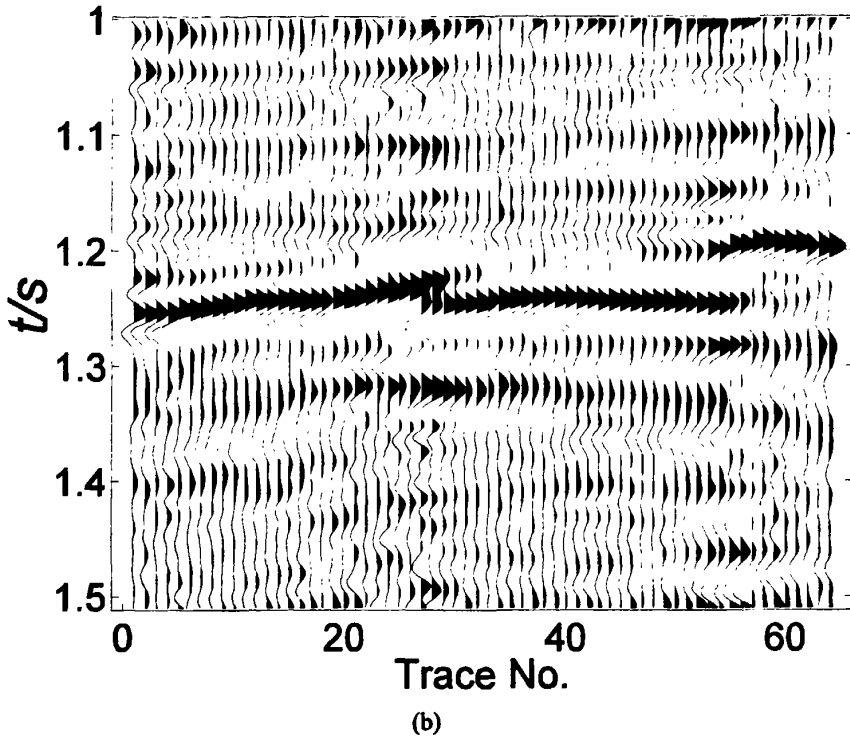


图 4-8 实际二维地震道(a), 求出的反射系数剖面(b)和相应的地震子波剖面(c)

本文对传统的同态反褶积方法进行算法上的改进。将无噪地震褶积模型有时间域变换到复倒谱域, 使无噪地震褶积模型满足独立变量算法(ICA)的要求, 通

过独立变量算法(ICA)将地震子波和反射系数进行分离,再将分离的结果变换回时间域,从而获得实现地震盲反褶积的一种新方法——基于 ICA 的同态反褶积算法。通过模拟和实际数据的试算和检验可以看出:当 $\alpha$ 的绝对值非常接近 1 时,该算法能够同时得到地震子波和反射系数,分离效果十分明显;而对于实际的二维地震数据来说,效果并不理想,这是由于在实际的应用中,相邻的两道地震道的反射系数的相似程度远远达不到模拟时的条件。因此,该算法还有待进一步的改进,值得深入研究。

## 5 结论与建议

一般情况下,常规的地震子波估计和反褶积需要在地震子波是最小相位和反射系数是白噪的假设前提下来实现。而本文利用高阶统计的相关知识对子波估计和地震反褶积处理进行了具体的研究,摆脱了地震子波是最小相位和反射系数是白噪的假设条件,并且在统计独立的假设条件下,利用基于高阶统计的独立变量分析方法实现了地震子波和反射系数的同时求取。通过上述各章的分析和论述,可以得到以下结论:

① 基于高阶统计的地震子波估计方法能够有效的提取非最小相位的子波,而且,在此基础上结合同态反褶积思想可以进一步有效的实现地震反褶积。模拟和实际数据的试算表明:该方法在提取非最小位子波时效果比较好,而反褶积的结果比较差,还需要进一步的研究。

② 在无噪条件下,利用带状矩阵将地震褶积模型转化为 ICA 模型,在统计条件下满足独立变量算法(ICA)的要求,从而获得解决地震盲反褶积的一种新方法——基于带状矩阵的独立变量算法(B-ICA)。通过模拟和实际数据的试算和检验,证明了: B-ICA 算法在无噪情况下能够同时计算出地震子波和反射系数,并具有一定的实用性,值得深入研究。

③ 对传统的同态反褶积方法进行了算法上的改进。在无噪条件下,利用快速独立变量算法(FastICA)将地震子波和反射系数在复倒谱域进行分离,并通过构造向量消除 ICA 算法分离的结果中固有的振幅以及相位的不确定性,最后将分离的结果变换回时间域,得到相应的地震子波和反射系数。通过模拟和实际数据的试算和检验,证明了:当 $\alpha$ 的绝对值非常接近 1 时,即两道的反射系数十分接近时,该算法能够同时得到地震子波和反射系数,分离效果比较明显,证明该方法具有一定的实用性,值得深入研究。

基于高阶统计的子波估计和地震反褶积,尤其是基于高阶统计的独立变量分析作为一种新的地震资料的处理方法,其理论体系尚不完善,在地震反褶积处理中仍存在一些实际问题需要解决。本文仅对独立变量的方法进行了研究,其实际的应用效果有待进一步改进。

① 由于 ICA 方法固有的模糊性问题,本文提出的 B-ICA 算法反演结果在幅

度和相位上有一定的偏差，希望通过进一步的研究能够克服。

② 本文的所有方法均是在无噪条件下实现的，因此在含噪条件下，如何利用 ICA 算法直接反演出地震子波、反射系数和噪声是下一步研究的目标。

③ 本文提出的 B-ICA 算法虽然能同时求得地震子波和反射系数，但是还需要通过正演模型挑选出最佳结果，如何将基于高阶统计量的子波估计结合 ICA 算法，形成约束条件来实现地震盲反褶积，值得进一步研究。

④ 基于 ICA 的同态盲反褶积，由于在实际的应用中，相邻的两道地震道的反射系数的相似程度远远达不到模拟时的条件，结果并不理想，还有进一步的改进。

## 参考文献

- [1] Giannakis G B. Cumulants: A Powerful Tool in signal Processing. Pro. IEEE, 1987, 75: 1333~1334
- [2] Meridel M. Tutorial on Higher-order Statistics (Spectra) in Signal Processing and System Theory: Theory Results and Some Application. Pro. IEEE, 1991, 79 (3) : 278~305
- [3] Nikias L C, Gaghuvveer M R. Bispectrum estimation: A digital signal processing framework. Pro. IEEE, 1987, 75: 869~891
- [4] 梁光河. 地震子波提取方法研究. 石油物探, 1998, 37 (1) : 31~39
- [5] 刘金俊, 王修田, 徐世浙. 实现地震道零相位化的子波相位谱消去法. 海洋地质与第四纪地质, 1999, 19 (4) : 89~96
- [6] Guillaume Cambois, Paul Stoffa. Surface-consistent phase decomposition in the log Fourier domain. Geophysics, 1993, 58 (8) : 1099~1111
- [7] Gregory D Lazear. An examination of the exponential decay method of mixed-phase wavelet estimation. Geophysics, 1984, 49 (12) : 2094~2099
- [8] Gregory D Lazear. Mixed-phase wavelet estimation using fourth-order cumulants. Geophysics, 1993, 58 (7) : 1042~1051
- [9] Danilo R Velis, Tadeusz J Ulrych. Simulated annealing wavelet estimation via fourth-order cumulant matching. Geophysics, 1996, 61 (6) : 1939~1948
- [10] Tadeusz J Ulrych, Danilo R Velis, Mauricio D Sacchi. Wavelet estimation revisited. The Leading Edge, 1995, 14 (11) : 1139~1142
- [11] 尹成, 唐斌, 谢桂生. 地震子波估计——高阶累积量矩阵方程法. 信号处理, 2000, 16 (增刊) : 83~87
- [12] 谢桂生, 石玉梅, 尹成. 高阶累积量法子波估计与处理. 石油物探, 2000, 39 (4) : 19~25
- [13] A V Oppenheim, Supperposition in a class of nonlinear systems, Technical Report No 432, Reaearch Laboratory of Electronics, MIT, Cambridge, Mass, Mar, 1965
- [14] 周兴元. 应用同态理论估算地震子波. 石油地球物理勘探, 1983, 18 (6) : 510~521
- [15] R W Schafer. Echo removal discrete generalized linear filtering. Technical Report No. 466, Research Laboratory of Electronics, M. I. T., Cambridge, Mars, 1969
- [16] P L Stoffa et al. The application of homomorphic deconvolution to shallow-water marine seismology——Part I : models, Geographysics, 1974, 39 (4) : 510~521
- [17] P L Stoffa et al. The application of homomorphic deconvolution to shallow-water marine seismology——Part II : real data, Geographysics, 1974, 39 (4) : 417~426

- [18] 俞寿朋. 相位谱及其计算. 石油地球物理勘探, 1981, 16 (5): 1~14
- [19] 凌云, 俞寿朋, 周熙襄. 零相位同态反褶积. 石油地球物理勘探, 1995, 30 (3): 299~309
- [20] 王君, 周兴元, 曹孟起. 同态反褶积的改进与应用. 石油地球物理勘探, 2003, 28 (增刊): 27~30
- [21] 刘喜武, 刘洪. 地震盲反褶积综述. 地球物理学进展, 2003, 6, 18 (2): 203~209
- [22] Wiggins R A. Minimum entropy deconvolution. Geoexploration, 1978, 16 (1): 21~35
- [23] Donoho D. On minimum entropy deconvolution. Applied Time Analysis II. New York: Academic Press, 1981
- [24] Aapo Hyvarinen, E Oja. Independent Component Analysis. Neural Networks, 2000, 13: 411~430
- [25] 刘喜武, 刘洪, 李幼铭. 独立分量分析及其在地震信息处理中应用初探. 地球物理学进展, 2003, 18 (1): 90~96
- [26] 刘喜武, 刘洪, 李幼铭. 快速独立分量变换与去噪初探. 中国科学院研究生院学报, 2003, 20 (4): 488~492
- [27] 刘喜武, 刘洪, 郑天愉. 用独立分量分析实现地震转换波与多次反射波分离. 防灾减灾工程学报, 2003, 23 (1): 11~19
- [28] 陆文凯, 骆毅, 赵波, 等. 基于独立分量分析的多次波自适应相减技术. 地球物理学报, 2004, 47 (5): 886~891
- [29] 杨红卫, 杨丽, 王炳锡. 一种基于 ICA 的同态盲反卷积算法. 计算机工程与用, 2005, 17: 30~32
- [30] 徐伯勋, 白旭滨, 于常青. 信号处理及应用. 北京: 地质出版社, 1997. 35~43
- [31] 徐伯勋, 白旭滨, 于常青. 信号处理及应用. 北京: 地质出版社, 1997. 115~122
- [32] J P Burg. Maximum entropy spectral analysis. The 37th Annual International SEG Meeting, 1967
- [33] 徐伯勋, 白旭滨, 赵静萱. 最大熵谱估计. 石油物探, 1984, 23 (4): 65~78
- [34] 徐伯勋, 白旭滨. 最大熵子波反褶积. 石油地球物理勘探, 1987, 22 (5): 590~599
- [35] 周兴元. 应用同态理论估算地震子波. 石油地球物理勘探, 1983, 18(6): 510~521
- [36] 牟永光. 地震勘探资料数字处理方法. 北京: 石油工业出版社, 1981.85~95
- [37] 徐伯勋, 林贵标. 希尔伯特变换子波反褶积. 石油物探, 1987, 26 (1): 63~77
- [38] J. F. 克利尔波特, 陈玉, 陈乾元, 刘则仁, 周继康, 译. 地球物理数据处理基础. 北京, 石油化学工业出版社. 1979, 67~85
- [39] 张贤达. 时间序列分析——高阶统计量方法. 北京: 清华大学出版社, 1996. 1~77 和 406~410
- [40] 张贤达. 现代信号处理. 清华大学出版社, 1995. 373~380, 436

- [41] 沈凤麟, 叶中付, 钱玉美. 信号统计分析与处理. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001. 112~122
- [42] 姚天任, 孙洪. 现代数字信号处理. 武汉: 华中科技大学出版社, 1999. 187~194
- [43] 吉宏宇. 基于高阶谱的时延估计方法研究: [硕士学位论文]. 吉林: 吉林大学数学研究所, 2004
- [44] Pan R, Nikias C L. The complex cepstrum of higher-order-cumulants and nonminimum phase system identification. IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing, 1988, 36: 186~205
- [45] 梁光河. 测井约束地震子波外推方法研究. 石油地球物理勘探, 1998, 33(3): 296~304
- [46] 谢桂生, 石玉梅, 尹成. 高阶累积量法子波估计预处理. 石油物探, 2000, 39(4): 19~25
- [47] 尹成, 伍志明, 邓怀群. 高阶统计量方法在地震勘探中的应用. 地球物理学进展, 2003, 18(3): 546~550
- [48] 黄健英, 李录明, 罗省贤. 基于高阶谱的地震子波估计. 成都理工大学学报(自然科学版), 2006, 33(2): 188~192
- [49] 李大卫, 田继东, 成竹, 杨旭明. 基于高阶统计的混合相位子波估计及其处理. 勘探地球物理进展, 2005, 28(2): 117~121
- [50] Brillinger D R. An introduction to polyspectra. Ann Math Statist, 1965, 36(1): 1351~1374
- [51] Matsuoka T, Ullrich T J. Phase estimation using the bispectrum. Proc. IEEE, 1984, 72: 1403~1411
- [52] Rosenblatt M, Van Ness J W. Estimation of the bispectrum. Ann. Math. Statist, 1965, 36(1): 1120~1136
- [53] Velis D R, Ullrich T J. Simulated annealing wavelet estimation via fourth-order cumulant matching. Geophysics, 1996, 61(6): 1939~1948
- [54] Dianat S A, Raghuveer M R. Fast algorithms for phase and magnitude reconstruction from bispectrum. Opt. Engr, 1990, 29: 504~512
- [55] 李大卫, 尹成, 熊晓军, 马洪艳. 高阶谱混合方法地震子波估计及处理. 地球物理学进展, 2005, 20(1): 29~33
- [56] Petropulu A P, Nikias C L. Signal reconstruction from the phase of the bispectrum. IEEE Trans, Signal Processing, 1992, 40: 601~610
- [57] 马建仓, 牛奕龙, 陈海洋. 盲信号处理. 北京: 国防工业出版社, 2006. 85~98
- [58] Bell A J, Sejnowski T J. An information maximization approach to blind separation and blind deconvolution. Neural Computation, 1995, 7(6): 1004~1034
- [59] P O Hoyer, Aapo Hyvarinen. Independent Component Analysis Applied to Feature Extraction from Colour and Stereo Images. Network: Computation in Neural Systems, 2000, 11(3): 191~210



- [60] J Hurri, Aapo Hyvarinen, J Karhunen, E Oja. Image feature extraction using independent component analysis. NORSIG'96, Espoo, Finland, 1996. 475~478
- [61] Aapo Hyvarinen, P O Hoyer. Emergence of phase and shift invariant features by decomposition of natural images into independent feature subspaces. Neural Computation, 2000, 12 (7) :1705~1720
- [62] R Vig'ario, Aapo Hyvarinen, E Oja. ICA fixed-point algorithm in extraction of artifacts from EEG. In Proc. NORSIG'96, Espoo, Finland, 1996, 383~386
- [63] Joutsensalo J, Ristaniemi T. Learning algorithms for blind multiuser detection in CDMA downlink. IEEE International Symposium Personal, indoor and mobile radio communication. Boston, 1998: 1040~1044
- [64] Aapo Hyvarinen. Independent component analysis for time-dependent stochastic processes. In Proc. Int. Conf. on Artificial Neural Networks (ICANN'98), Skovde, Sweden, 1998, 135~140
- [65] A J Bell, T J Sejnowski. The independent components' of natural scenes are edge filters. Vision Research, 1997, 37 (23) :3327~3338
- [66] M Bouzaien, A Mansour. HOS Criteria & ICA Algorithms Applied to Radar Detection. 4th International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA2003), Nara, Japan April, 2003
- [67] Filipe Aires, Alain Chédin. Rotation of EOFs by the Independent Component Analysis: Toward a Solution of the Mixing Problem in the Decomposition of Geophysical. Time Series Journal of the Atmospheric Sciences, 2001, 59 (1) :111~123
- [68] 李大卫. 地震资料数字处理的高阶统计量方法研究: [硕士学位论文]. 四川: 西南石油大学石油工程学院, 2005
- [69] 王亮. 基于独立成分分析的盲信号分离算法研究: [硕士学位论文]. 西安: 西北工业大学机械工程系, 2005
- [70] 李著成. 基于独立分量分析盲源分离算法的研究: [硕士学位论文]. 西安: 太原理工大学信息与通信工程系, 2006
- [71] Common P. Independent component analysis, a new concept? Signal Processing, 1994, 36 (3) : 287~314
- [72] 杨福生, 洪波. 独立分量分析的原理与应用. 北京: 清华大学出版社, 2006. 97~101
- [73] A Hyvarinen. et al. A fast fixed-point algorithm for independent component analysis. Neural Computation, 1997, 9 (7) : 1483~1492
- [74] A Hyvarinen. Fast and robust fixed-point algorithm for independent component analysis. IEEE Trans. Neural Network, 1999, 10 (3) : 626~634
- [75] Aapo Hyvarinen, J Karhunen, E Oja. Independent Component Analysis. New-York: Wiley, 2001

- [76] 郭 松, 孙云莲. 基于独立分量分析盲源分离快速算法. 电子测量技术, 2004, (2): 12~14
- [77] Yuan Z, Oja E. A FastICA Algorithm for Non-negative Independent Component analysis In: Proc. ICA2004, Granada, Spain, 2004: 1~8
- [78] 张贤达. 盲信号分离. 电子学报, 2001, 12 (29): 1766~1770
- [79] 胡启宇. 用于同态反褶积的最小相位变换. 石油地球物理勘探, 1984, (2): 126~139
- [80] Ikeda S, Murata N. A method of International Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation, Aussois, France, 1999.365~371

## 致谢

首先我要感谢的是我的导师刘喜武老师, 在本论文的研究和写作过程中以及整个研究学习阶段都得到了刘老师的悉心指导。刘老师渊博的知识、严谨的治学态度以及孜孜以求的探索精神深深地值根在我心底, 并成为我终生学习的楷模。

我还要感谢的是我的同学张宁、刘婉莹、李达。在我攻读硕士期间, 他们给予了我很多专业上的帮助, 帮我解决了不少专业问题。另外, 还要感谢我的父亲、母亲和我的女友孙建业, 是她们在我最困难的时候陪伴我、鼓励我, 给我面对困难的勇气。我还要感谢我的好朋友丁飞、李兵和王洪伟, 在论文修改期间他们给予了我很大的帮助, 与他们的交流也极大的丰富了我的人生。

## 个人简历

1982 年 11 月 17 日出生于山东省潍坊市。

2001 年 9 月考入青岛理工大学环境学院环境科学专业，2005 年 7 月本科毕业并获得理学学士学位。

2005 年 9 月考入中国海洋大学海洋地球科学学院地球探测与信息技术专业，攻读硕士学位至今。

## 发表的学术论文

- [1] 刘喜武, 高伟, 张宁, 刘婉莹. 基于带状混合矩阵 ICA 实现地震盲反褶积. 地球物理学进展, 2007, 22 (4): 1153~1163
- [2] 张宁, 刘喜武, 高伟, 刘婉莹, 李达. 基于局域波分解的地震信号时频属性提取. 中国海洋大学学报 (自然版)