

## 摘要

随着科学技术的发展和生产实际的需要，将水力学方法应用于河道汇流越来越普遍，特别是在平原感潮河网地区应用更为广泛。应用经典的圣维南方程组，并采用偏微分方程的数值解法的流域型大范围一维河网水流的数值模拟已经很成熟。河道二维的数值求解在近二十年来也已日趋成熟，但目前二维求解仅限于小范围内的应用，而且多为单一河道水流模拟。本文由此而提出了一种流域型的河网二维水流数值模拟的计算模式，希望能解决大范围内的河网二维水流模拟以及一二维耦合的模拟。

受一维河网计算模式的启发，提出了河网二维基本计算单元的概念。将河网二维的基本单元划分为：单一河道单元、“树状”河道单元、“环状”河道单元、“十字型”河道单元。随着研究问题的深入，计算单元类型会相应的扩充。基本思想是：分别对这些基本单元进行二维数值模拟，利用矩阵追赶法，将单元中的所有待求变量都用单元的边界水位表达。通过这种方式，可以方便地借用一维河网的全隐式解法，用所有单元的边界水位节点作为控制节点，建立闭合的方程组求解这些水位节点，进而可以完成全流域的河网二维或者一二维耦合求解。

**关键词：**流域动力模型、河网二维模型、“树状”河道单元、“环状”河道单元、矩阵追赶法

## Abstract

With the development and need of science and technology , applying the hydraulics method to the river become more and more general, especially using more extensive in the area of plain which include river-network. The method used to simulate waterways of large scale by applying classical Saint-Venant and numerical simulation of differential equation was already very ripe. The method used to simulate two-dim river was also ripe even the past 20 years, but it is limited to apply among a small extend, and more for single river simulation. This paper has proposed to establish a model of two-dim river-network for basin, hope to solve two-dim simulation or two-dim coincidence with one-dim simulation of river-network.

Under the inspiration of one-dim river-network computational pattern, was put forward the basic computing element concept of two-dim river-network. The two-dimensional river-network basic include :"single river" unit 、 "tree-like river-network " unit、 "ring-like river-network" unit、 "cross-like river-network " unit. Along with research went thorough, the computing element could increase correspondingly. The basic thought as follows: simulated these basic two-dimensional units separately. Express all variables to the relations of the water level of each unit the boundary. Through this way, may conveniently learn the hole-implicit method of one-dim river-network. Regarded all units boundary's water level as the control point, established the closed equations to solve these water level points, and then may solve two-dim simulation or two-dim coincidence with one-dim river-network of entire basin.

**Key Words:** Hydrodynamic model for basin、two-dimensional river-network model、tree-like river-network、ring-like river-network、matrix chase-after method

## 学位论文独创性声明

本人所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同事对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。如不实，本人负全部责任。

论文作者（签名）：向小华 2006年6月7日

## 学位论文使用授权说明

河海大学、中国科学技术信息研究所、国家图书馆、中国学术期刊（光盘版）电子杂志社有权保留本人所送交学位论文的复印件或电子文档，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。本人电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期内的保密论文外，允许论文被查阅和借阅。论文全部或部分内容的公布（包括刊登）授权河海大学研究生院办理。

论文作者（签名）：向小华 2006年6月7日

# 第一章 概论

## 1.1 问题的提出及研究意义

由于数学模型理论的不断发展，以及其廉价和易操作等特点，逐步取代物理模型实验而成为研究水流运动规律的重要手段。数学模型是一门综合性的模拟技术，它采用数学的手段来抽象模拟复杂的物理现象，并通过计算机数值计算方法进行近似求解，藉以重现自然演变的过程的总称。数学模型从最初的研究，发展到现在的广泛应用，已经渗入到各个自然科学领域，航天科技，气象预报，水文预报，水环境监测等等，到处都可以见到数学模型的应用。现代河网水流数值模拟也是其中一个相当重要的方面，它是一门以水流为研究对象，以水动力学为基础，采用偏微分方程数值解等数学理论为支撑并结合具体工程而发展起来的新型应用科学。

河流是个综合的动力开放系统，内部存在着复杂的动力反馈机制。冲积平原地区的河流具有自动调节功能，在不同的水沙条件下自我调整形成不同的河形。工程界常将河流划分为四种类型，即顺直型、弯曲型、分汊型和游荡型。自然界中顺直型河道是很少存在的，游荡型河道是最不稳定的河道，相比之下弯曲河道和分汊河道能长时间的保持稳定，也是自然界中最常见的河流，由河流的弯曲以及分汊而产生了纷繁复杂的河网类型：“树状”河道单元，“环状”河道单元等等。对这些河流的模拟也就具有了更强的研究意义和现实意义。

由于数学模型理论及计算技术的飞速发展，对于流域型大范围一维河网水流的数值模拟已经很成熟<sup>[1,2]</sup>，并且广泛应用于各行各业的实际问题中。河道二维水流模拟计算的研究，在近二十年来也已日趋成熟，主要有 ADI<sup>[3]</sup>法、SIMPLE<sup>[4]</sup>及“矩阵追赶法”<sup>[5,6]</sup>等算法，这些算法成功的解决了一些实际问题，但这些问题一般局限在局部小范围区域，且以单一河道模拟计算为多。随着实际应用需求的不断增加，迫切要求研究出流域范围内的河网二维水流模拟的方法以及方便实现全流域河网一、二维耦合的算法。

## 1.2 河道二维水流数值模拟的发展

人们依据普遍的物理规律—质量守恒定律以及动量守恒定律建立了著名的非恒定流运动规律的理论方程组—Navier-Stokes 方程组。由于 Navier-Stokes 方程组是偏微分方程组，在数学上的复杂性限制了它的求解，在此后的八十年中只能根据各种假设将其简化为便于求解的方程组，极大的限制了它的使用。只是到了最近的 50 年，随着高性能计算机硬件以及软件的发展，对完整的 Navier-Stokes 方程组的求解才变为可能。

有限差分法和有限单元法是求解偏微分方程的主要方法，但有限差分法多用于规则几何区域的流体问题，在河道这种不规则区域的应用中受到限制。有限单元法在处理不规则边界方面显示出了极大的优势。但对于河道水流运动来说，有限差分法在计算方法、计算技巧方面比有限单元法成熟许多。因此如何采用有限差分法处理复杂几何区域成为众多学者研究的重点。

### 1.2.1 正交贴体坐标的形式与发展

很多流场的计算方法都对网格的正交性提出了较苛刻的要求。如有限分析法、SIMPLE 法等较成熟的方法，虽然能对对流项进行很好的模拟，计算精度很高，对各种复杂流动的适应性也很强，但是这些方法都要求网格是正交的，否则会给计算精度造成很大的影响。所以构造能适应复杂几何边界的贴体正交网格是现有差分算法成功与否的关键。

目前应用最广的是 20 世纪 70 年代中期 Thompson 等<sup>[7]</sup>提出的椭圆型方程法。该方法应用 Laplace 方程或 Poisson 方程进行坐标变换，将物理区域变换为计算区域，计算区域上的直角正交网格和物理区域上的曲线正交网格一一对应。利用差分法在计算区域内划分的网格上求解物理区域的正交网格点坐标，所生成的贴体网格贴体性好，网格线光滑，而且用 Poisson 方程生成的贴体坐标网格疏密可调，生成的网格满足了水流计算的要求，为了快速准确的生成正交贴体坐标系，国内外许多学者进行了独到的研究。鲁守华<sup>[8]</sup>提出的变换计算平面网格长宽的方法解决了复杂物理边界形状下的紧密贴体问题，所采用的方法适用于单连通区域和多连通区域。程文辉、王船海<sup>[9]</sup>采用固定计算区域网格长宽的方法对 Poisson 方程进行离散，通过选取适当的收缩因子促使变换网格正交，对于边界条件选取造成正交变换不能达到满意效果的问题，提出了“滑移边界”的方法，加快了网格的收敛以及角度的正交性。余利仁<sup>[10]</sup>通过在任意一组邻边上预先指定边界网格点，通过调整计算区域网格长宽的方法获得正交曲线网格的解。

由于对 Laplace 方程或 Poisson 方程进行坐标变换所得到的计算区域内的控制方程是非线性的，而且差分法处理第二类边界条件很困难，难以通过常规的有限差分法构造出满意的正交贴体坐标网格，为了解决这个问题，刘顺隆、郑洪套等<sup>[11]</sup>利用有限元素法对 Laplace 方程在物理区域内直接进行求解，然后用寻找等值线的方法在物理区域内直接生成正交贴体坐标网格，并通过等值线间隔的调整来调整网格的疏密。为了生成正交网格的精度高，速度快，国内外还有很多学者做出了贡献。Gupta<sup>[12]</sup>以及 Bell<sup>[13]</sup>提出了求解 Poisson 方程的双调和方程法，齐学义<sup>[14]</sup>通过求解耦合的 Laplace 方程及 Poisson 方程得到了双调和方程的数值解；同样采用十三点有限差分格式也得到了双调和方程的解。

### 1.2.2 二维数值方法的形成与发展

Navier-Stokes 方程组是三维的偏微分方程组，鉴于天然河道由于其深度与广度相比起来很小，水流状况在深度方向的变化率远较广度方向的变化率小，故可以采用深度方

向均化的方法来简化 Navier-Stokes 方程组，由此产生平面二维浅水运动方程。关于平面二维非恒定流的研究已经有相当长的历史，国内外的许多专家和学者做出了大量的研究成果。Abbott(1979)及 Stelling<sup>[15]</sup>(1984)曾对平面二维浅水方程作出了仔细的分析，更有 Leendertse<sup>s</sup> 将有限差分法以及 ADI 法成功地应用于河口与海岸的平面二维、三维的水力学模型中，随后 Patankar 和 Spaldin<sup>[16]</sup>提出了 SIMPLE 算法，该方法现在被广泛地应用于不可压缩流体的流动数值模拟。在此基础上有了进一步的改进，主要有 SIMPLER<sup>[17]</sup>算法、SIMPLEC<sup>[18]</sup>算法、SIMPLEX<sup>[19]</sup>算法和 SIMPLET<sup>[20]</sup>算法等，这些模型都成功的应用于速度——势耦合的流场模拟，深度均化的浅水流动模型是在静压下导出的，故一般流体模型中的速度——势耦合的问题也就转化成了速度——水深的耦合<sup>[21]</sup>。Holt<sup>tM</sup><sup>[22]</sup>采用“逆风”格式离散平面浅水波的守恒型方程进行水流模拟计算。王船海、程文辉<sup>[5,6,8]</sup>提出了天然河道非恒定流场的通用数学模型，采用正交曲线拟合坐标来克服天然河道复杂的边界给有限差分带来的困难，克服了天然河道边界形状复杂，长宽尺度相差悬殊等问题，采用露滩处理方法——“冻结法”，在计算过程中对“动边界”进行追踪，确定非恒定流时因水位引起的计算区域的变化，从而解决了由水位波动引起的计算边界变化等困难，并采用全隐式方法离散计算，极大地克服了分裂法时间步长的限制。周建军、林秉南和王连祥<sup>[23]</sup>应用破开算子法原理，将平面二维非恒定流方程按不同的物理意义破开成对流、扩散和传播三个子方程，对对流方程，采用特征线的迭代解法，对扩散和传播方程，引入有限差分法求解，用“动边界”技术追踪在非恒定流时因水位的变化而引起的计算区域边界的变化。大连理工大学吴修广、沈永明<sup>[24]</sup>等采用 Laplace 方程坐标变换方法生成正交曲线网格，并对浅水流的控制方程进行坐标变化，方程离散时采用 B 型交错网格。方春明<sup>[25]</sup>针对河道平面形状窄长的特点，采用全隐式差分法求解河道平面二维恒定水流运动方程。刘晓东、华祖林和赵玉萍<sup>[26]</sup>建立了基于四汊树网格的二维水流数学模型，控制方程采用有限体积法对守恒变量进行离散，应用 Godunov 型通量差分格式计算边界上的法向数值通量。李光炽、周晶晏和张贵寿<sup>[27]</sup>在用数值模拟方法研究高桩码头对河道流场影响的基础上，为确保流场模拟精度，采用正交边界拟合坐标变换，应用二维全隐式耦合联解模型离散控制方程，利用矩阵追赶法求解代数方程；同时引入过水率和修正糙率的概念，并提出了间接等效模拟高桩码头对流场影响的方法。邓家泉<sup>[28]</sup>以 BGK 波尔兹曼方程为基本方程，利用有限体积法，建立了满足熵原理的二维明渠非恒定水流的 BGK 数值模型。胡四一、谭维炎<sup>[29]</sup>提出在无结构网格上建立有限体积高性能格式族的统一框架，通过引入跨单元界面法向数值通量的“逆风”解法，将一维 Osher、TVD 两种通量分裂格式自然地推广至二维浅水方程组。王如云、张东生、张长宽和朱寿峰<sup>[30]</sup>针对水动力学中的涌波现象导出二维曲线坐标系下的守恒型方程，然后利用算子分裂法和 TVD 差分格式思想构造出计算格式，在此基础上建立起由实际流场域至方形计算区域的全局同胚映射，对急流过缩窄河道产生的涌波结构进行数值模拟。邵颂东、王光谦和费详俊<sup>[31]</sup>在分析总结有关 LE 法，MAC 法及 PIC 法等优越性的基础上，建立

了适合于计算类似分洪区水流运动的平面二维 LE 法的数学模型。程永光、索丽生<sup>[32]</sup>根据二维浅水波方程的特点,应用由 Boltzmann 方程展开的多尺度方程,建立了一个能模拟二维明渠非恒定流的格子 Boltzmann 模型。魏文礼、沈永明<sup>[33]</sup>等采用基于 MacCormack 预测-校正技术的隐式数值格式,求解控制水流运动的二维浅水方程,建立了模拟大坝瞬间全溃或局部溃倒所致的洪水演进进程数学模型。

### 1.3 一二维耦合及全河网二维水流模拟的发展

由于关注重点区域的需要,全河网一维嵌套局部二维的一二维水动力耦合的水流模式逐渐为学者们所关注。目前一、二维模型耦合求解方法有两种:① 将一、二维模型区域延长一段重叠段求解<sup>[34, 35, 36]</sup>; ② 无需延长一段重叠段,在耦合模型连接断面处,根据水位、流量相同的条件求解<sup>[37, 38, 39]</sup>。后一种方法相对前一种方法更严格、合理。徐祖信、尹海龙<sup>[40]</sup>采用有限元法研究平原感潮河网地区一维、二维水动力耦合模型,该方法对求解单一河道以及一二维耦合问题的时候有其特点,对弯曲的河道适应性较强,但是对于二维的河网区域,有限元处理河道衔接处有相当的困难。诸裕良、严以新<sup>[37]</sup>在一维显式、二维隐式水动力联网数学模型的基础上,建立了一种一维、二维全隐河网海湾水动力联网数学模型,该一维河网模型采用 Preissmann 四点隐式格式,用节点水位控制法进行数值计算,二维海湾模型采用改进型双向隐式(DSI)法进行数值求解。在河口一维、二维连接处,水力因子通过接口断面法传递,无需重叠一个一维河段来传递水力因子,避免了口门处二维网格需取较小尺度的问题。赖锡军、汪德耀<sup>[41]</sup>采用时间滞后条件,构造了虚拟的重叠计算水域,利用重叠~投影法,在连接处建立一、二维耦合模型,实现了由一维计算水域向二维计算水域的准确过度。

全河网二维的研究目前较少,关于河网二维方面的论述多见于多江心洲引起的汊道、河口以及多岛屿造成的多连通区域的处理。李浩麟<sup>[42]</sup>根据迦略金加权剩余原理,推导了河口不恒定流有限元数值计算模式,在空间方面采用二结点线性单元,在时间方面采用加权隐差分格式,对汊道及网河采用分级计算,可将一个大型代数方程组简化为仅包含汊口水位的小型代数方程组求解。王震、张二骏<sup>[43]</sup>采用修正的正交贴体坐标系下平面二维水流方程对多连通河道进行二维模拟,取得了良好的效果。杨胜发等<sup>[44]</sup>建立了水流运动二维数学模型,给出了处理分汊河道复杂边界的方法。王船海、李光炽等<sup>[45]</sup>应用“矩阵追赶法”和“非线性二维潮流模型”等求解方法,很好地模拟了闽江河口复杂的潮流场,计算时间步长可长达十分钟,该数学模型已在闽江口等多个工程中得到应用,效果良好。

### 1.4 现有方法的不足

当前二维交汊河道的处理办法主要有有限元法和有限差分法。有限元法在求解单一河

道以及一二维耦合问题的时候有其特点，对弯曲的河道适应性较强，但是对于二维的河网区域，有限元由于在处理河道衔接处有相当的困难，所以很难适应大范围河网的二维求解。通常的有限差分法计算的方法又分为 ADI 法、SIMPLE 算法以及算子分裂法等，多用于处理河口问题。而且这些方法的缺点是明显的：

- ① 传统的 ADI 法，对于河道型计算区域，因为模拟精度的需求，一般采用的网格步长较小，由于“轴化现象”的限制，相应采用的时间步长也很短，需要很多的计算机时，效率不高。
- ② SIMPLE 算法通过主河道计算的结果给支流提供计算边界，然后支流单独计算，得到的结果又给主河道提供边界，在一个时间步长内反复迭代，直到收敛，然后计算下一时间步。此方法对未知边界的内河网不能计算，因为主河道不能按照单一的河道来处理，不能计算出各条支流河道的边界条件，迭代过程不能构建，另外，这种方法应用在长河段时的工作量是不可想象的。而且 SIMPLE 必须首先给出已知的控制条件，而对于河网这种内边界未知的情形有一定的难度。
- ③ 算子分裂法采用显隐交替的方法计算，在显式的部分仍然采用 ADI 法，这种方法虽然在精度上较传统的 ADI 法有所提高，但仍然受到“轴化现象”及算子分裂误差<sup>[6]</sup>的限制，计算步长很短，效率低。
- ④ 目前有很多一二维算法不能实行耦合的求解。一般先用一维的方法模拟全部河网，通过参数的率定，得出较好的模拟结果。然后对局部区域进行二维模拟，所用的边界条件由一维计算所得的结果提供。该种方法没有真正实现一河网二维求解的联动，影响是单方面的，二维计算不能对一维模拟产生任何影响。也有一些算法实现了一二维隐式的连接，这些方法大多也不具备通用性，不能用一个统一的算法来实现全流域方便的一二维耦合。
- ⑤ 目前大多数二维算法都是针对具体工程问题而研制，且大都是在给定实测边界的条件下求解，不便于与大范围一维河网的求解耦合，不具备通用性。而且计算的区域有限，对于流域的二维模拟不太适用。
- ⑥ 流域河网二维目前研究得不多，大多数以汊道方式、河口方式或者一条河道中呈现多连通区域的方式来表现多条二维河道之间的关联。这些方法中有一个共同的欠缺：关注的区域小，故采用的方法也是局部性的。常见的有河道中大的江心洲采用露滩处理，这种方法对于小的岛屿尚且适用，但对于大的岛屿会造成计算机存储空间浪费，河道分汊口模拟精度不足等问题，对于河道二维之间的衔接采用露滩处理更不现实，将造成巨大的计算机内存消耗，造成计算不能进行。

## 1.5 本文研究的方法与内容

理论分析与数值计算是目前进行水流运动分析的主要手段，随着研究的深入和问题本

身的复杂性，纯粹的理论研究受到了很大的限制。20世纪70年代以来，随着计算机性能的大幅度提高以及计算方法的迅速发展，数值计算逐渐成为研究流体的一种重要手段，而且数值计算的可操作性强，速度快，运用经费少，便于优化，运行容易控制，尤其在规划问题中的优势更是物理实验无法比拟的。本文旨在建立一个通用的河网二维计算模型，通过该模型的建立，可以方便的进行大型河网的一二维耦合求解以及全流域型河网二维的求解。本文的主要研究内容如下：

- ① 简要地回顾了一二维水流数值模拟的历史过程，对现有的方法进行了简单的分析和总结。
- ② 详细的介绍了河道二维计算中使用的正交贴体坐标系的建立办法，证明了正交因子选取的办法，给出了详细的计算过程，并给出了在该方法下的一个实例。
- ③ 结合第②步中的正交贴体坐标系的变换，给出在正交贴体坐标下的平面二维浅水方程的变换形式。受一维河网计算模式的启发，对实际的河网进行二维单元划分，提出河网二维模型建立的基本思路。
- ④ 分别对③中提出的单一河道单元、“树状”河道单元、“环状”河道单元进行了详细的分析，着重对这三种基本河网类型的求解方法进行了阐述，得到了类似一维河网的节点水位控制方程，实现流域型河网二维的求解。
- ⑤ 阐述基本河网的组合方式，实现了一河网二维的耦合以及全流域河网二维求解模型。

## 第二章 曲线正交网格变换与水流控制方程

### 2.1 概述

有限差分法是数值模拟中最原始的方法，它的原理简单，运算方便，为众多学者所推崇，是现在水流数值模拟中应用最为广泛的方法。笛卡尔坐标系下的有限差分方法，由于采用矩形边界的网格计算区域，在与实际河道拟合的时候不得不将实际边界概括成锯齿形边界，与实际河道边界相去甚远，严重地影响了计算精度。为此，多年来人们一直试图探索其他可以克服上述缺陷的方法，如采用有限单元法，准分析法等等，但是这些方法又带来一些其他缺陷，或是运算过于繁冗，稳定性较差；或是在边界条件拟合方面存在不确定因素，特别是在流场计算中不能适应，限制了应用的可能。

贴体坐标法是 70 年代由 Thompson 等<sup>[7]</sup>人提出的一种数值计算方法，它以在计算区域边界上的坐标线与边界线密切贴合为坐标系的建立原则，同时网格的实际尺寸可按需要加以变化，从而克服了笛卡尔坐标系下有限差分法和有限单元法的缺陷，获得了广泛的应用。

### 2.2 Possion 方程的构造

贴体坐标法的主要原理是通过 Possion 方程的求解，设  $(x, y)$  为物理平面上的二维笛卡尔坐标系， $(\xi, \eta)$  为计算平面上的直角坐标系，通过 Possion 变换，希望寻求物理平面  $x - y$  到投影平面  $\xi - \eta$  的坐标变换，也即

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y)\end{aligned}\tag{2-1}$$

根据共轭函数的性质，当  $\xi, \eta$  为一对共轭函数时，其对应的  $x, y$  曲线为物理平面上的等值线簇，并且  $x, y$  曲线彼此相互正交。变换示意如图 2-1。

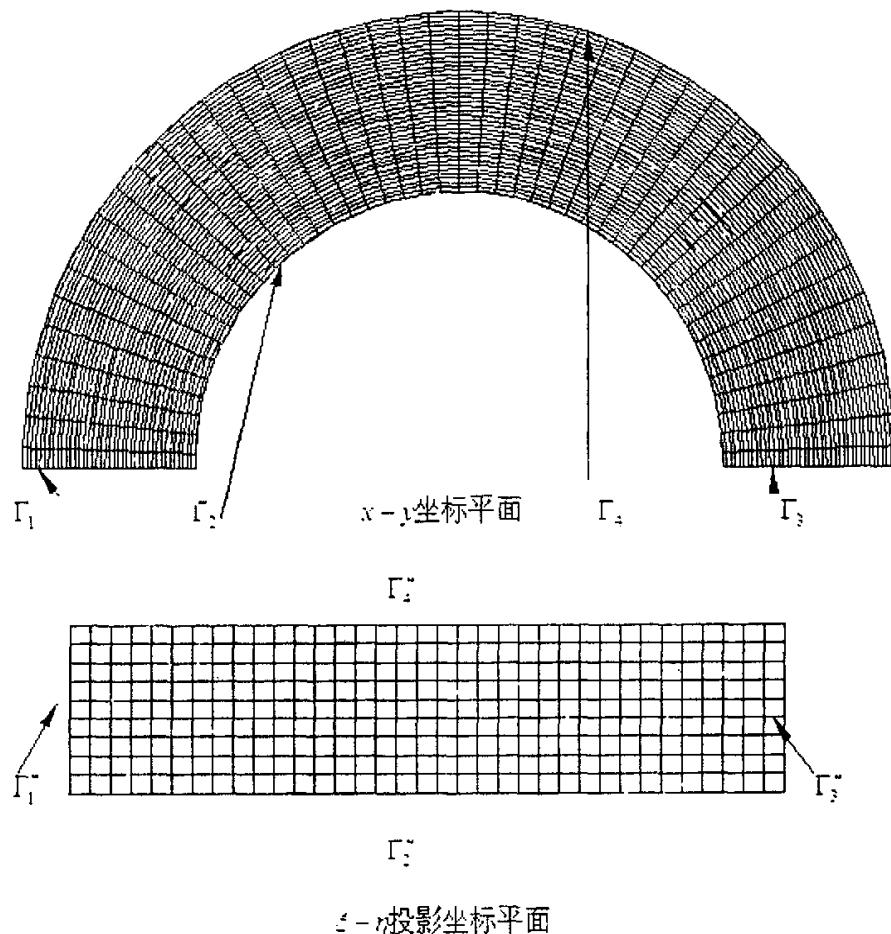


图 2-1 坐标变换示意图

要使  $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$  为一对共轭函数，需要满足柯西—黎曼条件：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{\partial \eta}{\partial x}\end{aligned}\tag{2-2}$$

由  $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$  的逆变换，可以得到

$$\begin{aligned}x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{2-3}$$

将(2-1)中第一式对  $\xi$  求导，(2-3) 中第一式对  $x$  求导，然后两式相减得：

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \quad (2-4)$$

又由(2-2)式代入(2-4)式并消元得(同理得到第二式):

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \xi} &= -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{\partial x}{\partial \xi}\end{aligned}\quad (2-5)$$

由(2-5)式可以得出,如果  $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$  满足共轭条件,那么其逆变换  $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$  也满足共轭条件。

在平面二维水流运动中,由流函数和势函数的性质,它们必定满足柯西—黎曼条件,流函数与势函数正交。在恒定、有压、摩阻比降占优、忽略对流作用等条件下水流运动方程为:

$$ur = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2-6-1)$$

$$vr = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2-6-2)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (2-6-3)$$

其中:  $r = g \frac{n^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}$ , 表示摩阻系数;  $\eta = \rho g Z$ , 显然这里  $\eta$  表示势函数, 表达为

$x, y$  的函数  $\eta(x, y)$ , 设  $\xi(x, y)$  表示流函数, 由流函数的性质有:

$$u = \frac{1}{h} \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (2-7-1)$$

$$v = -\frac{1}{h} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2-7-2)$$

将方程(2-6-1)、(2-6-2)代入(2-6-3)得到:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h}{r} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h}{r} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = 0 \quad (2-8)$$

将方程(2-7-1)、(2-7-2)代入(2-6-1)、(2-6-2)并结合(2-2)消去  $\eta$  得到:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{r}{h} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{r}{h} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 0 \quad (2-9)$$

方程(2-8)、(2-9)展开即等价于：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \end{cases} \quad (2-10)$$

$$P(\xi, \eta) = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \ln(r/h) - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \ln(r/h)$$

$$Q(\xi, \eta) = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \ln(h/r) - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \ln(h/r)$$

该方程即是流函数和势函数应该满足的 Poisson 方程，其定解条件为 Dirichlet 条件：

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi = 1 \\ \eta_1(x, y) \end{pmatrix} \quad (x, y) \in \Gamma_1$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi = N \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (x, y) \in \Gamma_3$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1(x, y) \\ \eta = 1 \end{pmatrix} \quad (x, y) \in \Gamma_2$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2(x, y) \\ \eta = M \end{pmatrix} \quad (x, y) \in \Gamma_4$$

$\xi = 1, \xi = N, \eta = 1, \eta = M$  这四条等值线即为图 2-1 中  $\xi - \eta$  平面上的四条边界

$\Gamma_1^*, \Gamma_2^*, \Gamma_3^*, \Gamma_4^*$ ，他们分别与  $x - y$  平面上的四条边界  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  对应。方程(2-10)的逆变换方程的解必然是  $x - y$  平面上一组相互正交的流线和等势线簇。对方程(2-1)的两个等式两边求  $\xi$  的导数：

$$\begin{cases} 1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ 0 = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{cases} \quad (2-11)$$

对方程(2-1)的两个等式两边求  $\eta$  的导数：

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ 0 = \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad (2-12)$$

联立(2-11)、(2-12)求解得关系式:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{cases} \quad (2-13)$$

将(2-13)代入(2-10)得到逆变换方程:

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + J^2 \left( P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) = 0 \\ \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + J^2 \left( P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0 \end{cases} \quad (2-14)$$

其中:  $\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$ ,  $\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2$ ,  $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$ ,  $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ 。因  $\xi$ ,  $\eta$  正交, 所

以  $\beta = 0$ 。相应的定解 Dirichlet 条件为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(\xi=1, \eta) \\ y_1(\xi=1, \eta) \end{pmatrix} \quad \eta \in \Gamma_1^*$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3(\xi=N, \eta) \\ y_3(\xi=N, \eta) \end{pmatrix} \quad \eta \in \Gamma_3^*$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(\xi, \eta=1) \\ y_2(\xi, \eta=1) \end{pmatrix} \quad \xi \in \Gamma_2^*$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4(\xi, \eta=M) \\ y_4(\xi, \eta=M) \end{pmatrix} \quad \xi \in \Gamma_4^*$$

另外由(2-6-1)<sup>2</sup> + (2-6-2)<sup>2</sup> 可以得到:

$$r^2(u^2 + v^2) = \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2-15)$$

由(2-7-1)<sup>2</sup> + (2-7-2)<sup>2</sup> 可以得到:

$$h^2(u^2 + v^2) = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \quad (2-16)$$

由  $\sqrt{(2-16)/(2-15)}$  可以得出:

$$\frac{h}{r} = \rho \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2} \quad \boxed{\text{结合(2-14)}} = \rho \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2} \quad \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} \quad (2-17)$$

为了计算简便又不失一般性，取  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ ，并计  $g_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}$ ，

$g_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}$  分别表示  $x-y$  平面上曲线网格的长和宽，这样就将  $P, Q$  中与速度相

关的量  $\frac{h}{r}$  表示成了与网格长宽的比例，简便了计算过程。上述方程(2-14)的解即为  $\xi, \eta$  平面上网格点点  $(\xi_i, \eta_i)$  对应的  $x, y$  平面上的网格点  $(x_i, y_i)$ 。

## 2.3 方程的求解

方程(2-15)是非线性方程，目前只能通过数值离散的方法求解，采用有限差分法，通过迭代求取最终的结果。对于固定边界的坐标变换是一次性的。

## 2.4 网格计算实例

在 GIS 界面上首先用手工编辑断面，插入相应的垂线，通过断面和垂线的交点得到初始值，然后通过公式(2-14)迭代求解，直到达到每个网格的正交角度都在  $87^{\circ}\sim92^{\circ}$  之间即可。如图 2-2 为没有变换的初始网格，图 2-3 为变换后的正交网格，由图形的对照可以看出上述变换公式在处理的时候是非常有效的。

网格变换完成后，依据 GIS 的功能，用网格所在区域的散点生成 delaunay 三角网，然后用正交曲线网格节点在三角网上插值得到网格点的高程。

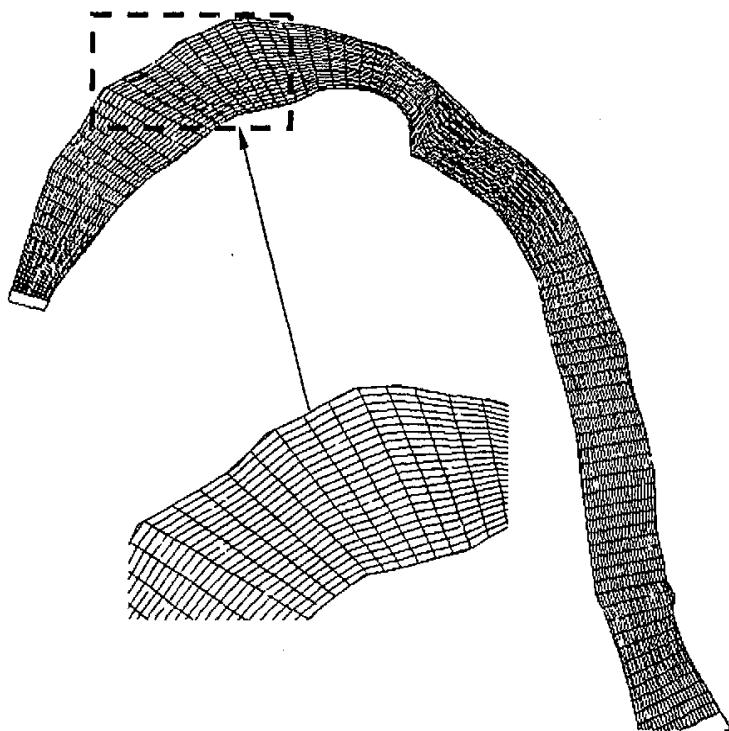


图 2-2 网格变换前

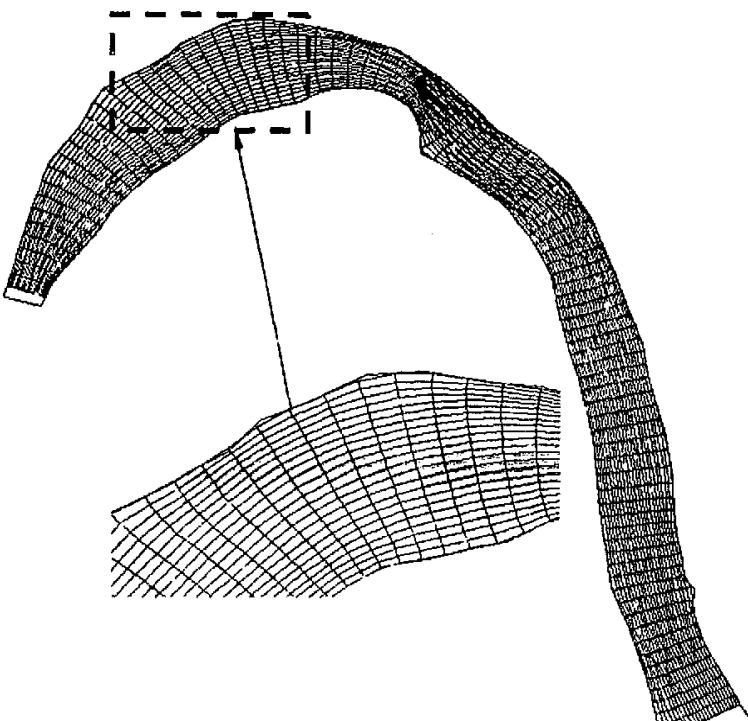


图 2-3 网格变换后

## 2.5 基本水流控制方程

根据基本物理学原理：质量守恒以及动量守恒定理，推导出水力学基本控制方程—— $N-S$  方程。为了满足计算区域内质量守恒以及动量守恒，本论文拟采用守恒型平面二维浅水动力学方程作为控制方程。天然河道由于其深度与广度相比较小，水流状况在深度方向的变化率远较广度方向的变化率小，所以对本方程的建立做了三点假设：①假定压力沿水深方向符合静水压力分布；②忽略风成应力；③不考虑水深方向的有效切应力，沿垂线方向流速平均。将平面笛卡尔坐标系中的方程转化成  $\xi-\eta$  坐标系中的方程，取等间距的  $\Delta\xi$  和  $\Delta\eta$ ，在很大程度上简化了方程的离散计算过程。

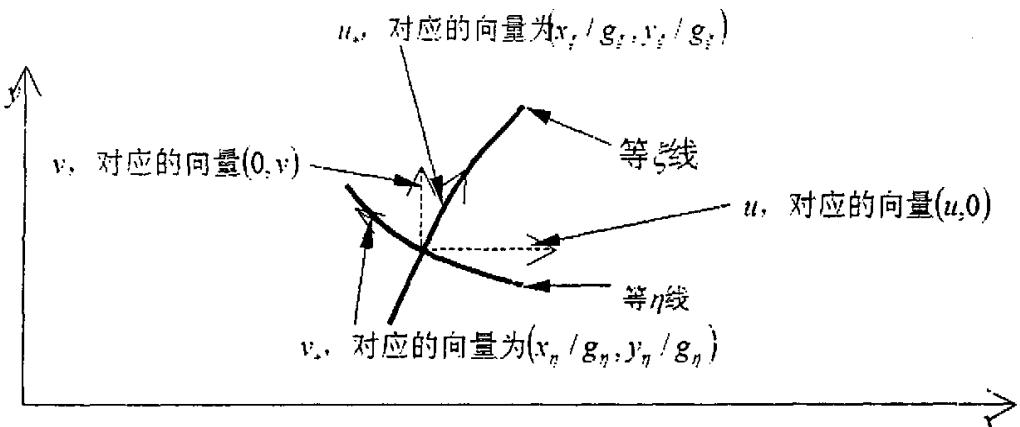
综合上述分析和假定，得出笛卡尔坐标系下的二维浅水动力学方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = q \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial z}{\partial x} + g \frac{n^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{2/3}} u - fv = \frac{\partial}{\partial x} (E_x \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y \frac{\partial u}{\partial y}) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial z}{\partial y} + g \frac{n^2 \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{2/3}} v + fu = \frac{\partial}{\partial x} (E_x \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y \frac{\partial v}{\partial y}) \end{cases} \quad (2-18)$$

式中： $u$ 、 $v$  分别为  $x$ 、 $y$  方向的垂线平均流速； $z$  为水位； $h$  为水深， $h = z - ZD$ ， $ZD$  为河底高程； $f$  为柯氏力系数； $E_x, E_y$  分别为  $x, y$  方向的紊动粘性系数， $q$  为包括取排水在内的源项。

## 2.6 正交曲线坐标下的方程

标记  $\xi-\eta$  坐标系下的沿等  $\xi$  线和等  $\eta$  线速度分别用  $u_*$ 、 $v_*$  表示。在  $x-y$  坐标系下， $u$ 、 $v$ 、 $u_*$ 、 $v_*$  的相互关系如图 2-4 所示：

图 2-4  $x-y$  坐标系中速度关系示意图

依照向量之间的关系,  $u_*$  的大小应该是  $u, v$  在向量  $(x_\xi / g_\xi, y_\xi / g_\xi)$  上的投影之和, 也即(同理可得  $v_*$ ):

$$\begin{cases} u_* = (u, 0) \cdot (x_\xi / g_\xi, y_\xi / g_\xi) + (0, v) \cdot (x_\xi / g_\xi, y_\xi / g_\xi) = (ux_\xi + vy_\xi) / g_\xi \\ v_* = (u, 0) \cdot (x_\eta / g_\eta, y_\eta / g_\eta) + (0, v) \cdot (x_\eta / g_\eta, y_\eta / g_\eta) = (ux_\eta + vy_\eta) / g_\eta \end{cases} \quad (2-19)$$

求解(2-19)有:

$$\begin{cases} u = \frac{u_* g_\xi x_\eta - v_* g_\eta x_\xi}{y_\xi x_\eta - y_\eta x_\xi} \\ v = \frac{u_* g_\xi y_\eta - v_* g_\eta y_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \end{cases} \quad (2-20)$$

将(2-20)代入到(2-18)中, 得到计算平面下的方程:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (g_\xi u_* h) + \frac{\partial}{\partial \eta} (g_\xi v_* h) \right] \right] = q \\ & \frac{\partial u_*}{\partial t} + \frac{u_*}{g_\xi} \frac{\partial u_*}{\partial \xi} + \frac{v_*}{g_\eta} \frac{\partial u_*}{\partial \eta} + \frac{u_* v_*}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta} - \frac{v_*^2}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi} + \frac{gn^2 u_* \sqrt{u_*^2 + v_*^2}}{h^{3/2}} - fv_* + \frac{g}{g_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \\ & \frac{1}{g_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\xi A) - \frac{1}{g_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\eta B) \\ & \frac{\partial v_*}{\partial t} + \frac{u_*}{g_\xi} \frac{\partial v_*}{\partial \xi} + \frac{v_*}{g_\eta} \frac{\partial v_*}{\partial \eta} + \frac{u_* v_*}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi} - \frac{u_*^2}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta} + \frac{gn^2 v_* \sqrt{u_*^2 + v_*^2}}{h^{3/2}} + fv_* + \frac{g}{g_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} = \\ & \frac{1}{g_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\xi A) - \frac{1}{g_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\eta B) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u_* g_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (v_* g_\xi) \right] \\ B = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (v_* g_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (u_* g_\xi) \right] \end{cases} \quad (2-21)$$

式中： $g_\xi, g_\eta$  分别为(2-17)式中的曲线网格的长和宽( $m$ )； $J = g_\xi g_\eta$  表示曲线网格的面积( $m^2$ )， $E_\xi, E_\eta$  分别为  $x, y$  方向的紊动粘性系数。通过正交变换，把原来在  $x-y$  坐标系统中利用方程(2-18)求解变量  $z, u, v$  变为在  $\xi-\eta$  坐标系统中利用方程(2-21)求解  $z, u_*, v_*$ 。

## 2.7 小结

通过正交曲线网格变换，能够得到与实际河道边界拟合的相当好的计算网格，与笛卡尔坐标系下的直角正交网格相比，极大地节省了存储空间，提高了计算精度，是一个切实有效的方法。通过这种正交变换，可以将不规则的物理区域转化为规则的计算区域，相应的水流控制方程也变换为计算区域下的方程，这种变换极大地方便了采用有限差分法对水流方程的离散，由此保证了高精度的计算方法不会因为网格的正交性而受到影响。

## 第三章 基于流域动力模型的河网二维计算模式研究

### 3.1 概述

河网水流模拟一直是众多学者研究的重点。目前河网计算中多采用一维水流模拟，模拟的方法已经非常成熟。对于河网二维的模拟相对比较少，有的也仅限于一个小范围内的汊道或者多连通区域的求解，对于大范围内的河网二维或者对任意区域的一二维耦合求解尚没有成熟的方法。本文拟针对上述需求，提出一种求解大范围河网二维的方法，该方法也能适应任意区域的一二维耦合求解及流域级的河网二维求解。

### 3.2 流域洪水演进模型的思路

流域洪水演进模拟可以分解为基本对象洪水演进模拟，流域基本对象洪水演进模拟可以分解为基本元素洪水演进模拟。把流域看作由流域的基本对象组成，分析建立流域基本对象的模拟模型，由一系列基本对象的模拟模型可以组合构造任何一个自然流域洪水模型，从而实现了流域洪水演进模型的通用化。从现实世界出发，流域可分解为蓄洪区、河道、行洪区、闸、口门等；从抽象世界出发，流域可分解为零维区域、一维区域、二维区域、联系要素等，流域动力要素划分示意图如图 3-1。

构造流域洪水演进模型通用算法的关键技术是：(a) 构造各种对象的耦合结构，使结构具有方便、灵活、容易增加或减少的特点，不会影响计算的编程，有可能形成通用的解法；(b) 计算工作量的协调和处理，应具有高效的算法，使解法具有足够的速度对模型的干预做出反应，使模型能达到实时响应的要求；(c) 数值求解的问题归结于高阶稀疏矩阵的求解方法、方程的形成、系数的存储、求解的过程等，应尽可能做到通用，具有普遍的适应性。

#### 3.2.1 基本对象模拟

零维区域模拟：平原流域的湖荡、水塘和蓄洪区等处有较大的水面，把这些水面归结于某些节点上，认为这些节点是可调蓄节点，调蓄面积为水面面积  $A_s$ 。利用水量平衡原理可得[46]：

$$\sum Q = A_s(z) \frac{Z - Z_0}{\Delta t} \quad (3-1)$$

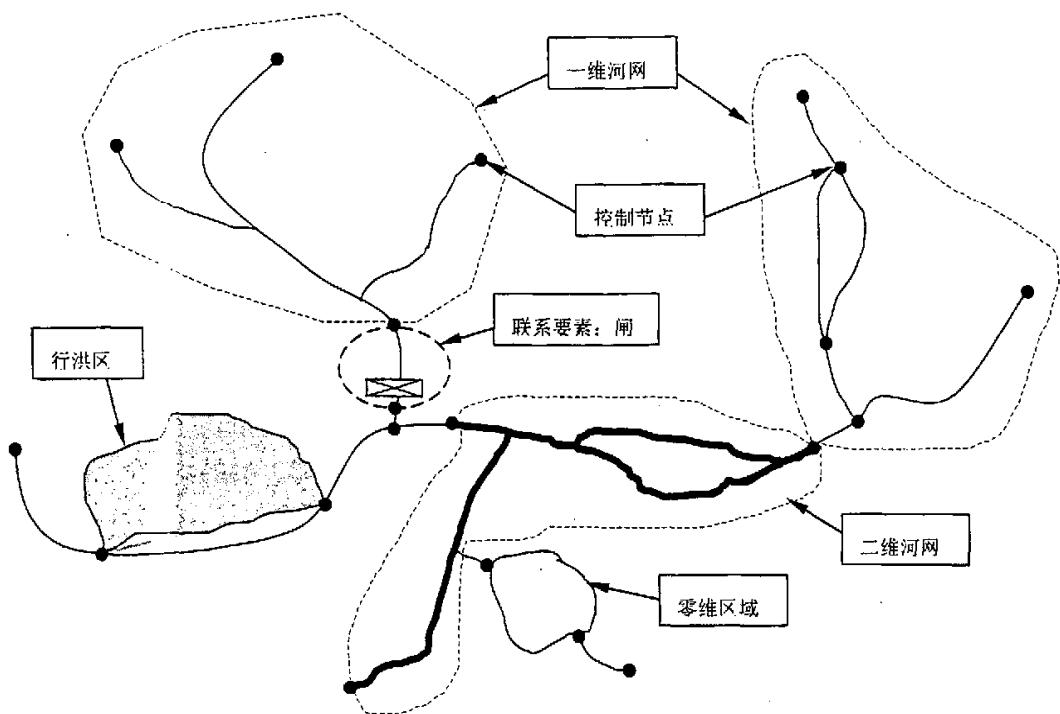


图 3-1 流域动力要素划分示意图

一维水流模拟：描述一维河道水流运动的基本方程为圣维南方程组：

$$\begin{cases} B \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\alpha Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial Z}{\partial x} + gA \frac{|Q|Q}{K^2} = qV_x \end{cases} \quad (3-2)$$

考虑全流域隐式求解的需要，对本方程进行隐式求解，最终得出一维河道首、末断面的流量表示为首、末节点水位的线性函数，表达方式如下[46]：

$$\begin{cases} Q_{L_1} = \alpha_{L_1} Z_{N_b} + \xi_{L_1} Z_{N_e} \\ Q_{L_2} = \theta_{L_2} Z_{N_e} + \xi_{L_2} Z_{N_b} \end{cases} \quad (3-3)$$

联系要素水流模拟：堰闸水流最终的方程也可以表达成联系要素首末断面水位的关系，这里对基本的堰闸过流公式是做了线性化处理，见文献[46]：

$$Q = \alpha_s (Z_a - Z_b) \quad (3-4)$$

二维行洪区：行洪区内单元间的水量交换、二维单元与其它节点间的交换是通过二维方程求解实现的。行洪区与其他要素的关联是通过联系要素实现的。行洪区的边界流量水位方程简写如下[46]：

$$Q = \alpha_s Z_a + \beta_s Z_b + K \quad (3-5)$$

### 3.2.2 节点方程的建立

前面分析得到了河道断面水位、流量与相应河道首、末节点水位的线性函数关系、联系要素的流量与所连接的节点水位的线性关系以及二维行洪区内相邻单元之间的交换流量与相应节点水位的线性关系。这些函数关系通称为水量交换函数。在实现了众多基本要素的求解之后，各要素之间的联系通过节点处的水量守恒实现：

$$\sum Q_i = A \frac{Z_i^{n+1} - Z_i^n}{\Delta t} \quad (3-6)$$

式中： $\sum Q_i$ —流进节点 I 的流量代数和； $A$ —节点水面面积，对于无调蓄节点， $A=0$ 。

通过以上方程，将流量的表达式(3-1)-(3-5)代入(3-6)式，可以构建全流域的水位节点的方程：

$$\begin{cases} f_1(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = 0 \\ f_2(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = 0 \\ \dots \\ f_{n-1}(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = 0 \\ f_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = 0 \end{cases} \quad (3-7)$$

通过求解(3-7)式这个封闭的水位节点方程，可以求解出流域各个节点的水位，然后回代到(3-1)-(3-5)式中就可以对全流域的水位和流量求解。

以上这些基本元素的流量水位关系都已经在文献[50-54]中解决。还有一类要素—河网二维的水位流量表达没有解决，本论文目的就是试图找到一种方法，将河网二维区域内的所有待求解的变量都表达为该区域边界水位的关系式，在边界处与其他的对象模型通过流量守恒条件相连接。通过以上的基本对象的模型划分，就可以很方便地通过节点水位方程的建立整个流域的动力方程。

以下的过程就专门阐述河网二维对象模型的建立过程。最终的目的就是将未知变量确定为河网边界的水位关系式。

### 3.3 河网二维计算模型

河网二维水流模拟计算除了单一河道二维模拟所存在难度外<sup>[6][20]</sup>，还由于河网二维是由若干个单一河道组成，河道分汊口处的模拟精度对于整个区域的精度起着至关重要的作用，尤其是当关注的重点在河口区域处时，因此如何解决河道分汊口的模拟问题是河网二维水流模拟的关键所在。目前常用的一些河道二维水流模拟模型算法一般主要是用在单一河道或单一分汊口岸的河网二维模拟，对于多分汊口的河网二维模拟研究不多；对于多分汊口的河网二维模拟主要有如下几方面的难点：

- ① 多分汊河口区域的模拟问题 目前常用的河道二维算法中, ADI 法由于“轴化现象”的限制<sup>[45]</sup>, 相应采用的时间步长也很短, 需要很多的计算机时, 效率不高, 且精度也难以满足要求, 因此 ADI 法一般的仅仅适用于宽广水域。SIMPLE 算法实际上是一种迭代方法, 对由多河口组成的河网二维计算问题, 由于河道分汊口处的流态复杂, 因而其迭代不易收敛, 对于求解全流域型的河网问题迭代这种算法是不可行的。非分步的全耦合的矩阵追赶法<sup>[5][42]</sup>, 在河道分汊口的处理上有全隐连接、半隐连接等方法, 基本解决了单分汊口的河网二维问题, 但对于多分汊河口目前还无能为力。
- ② 河网一、二维水流模拟的耦合问题 河道二维水流计算的上下边界一般的情况均是上下游水位已知的边界条件, 由于计算范围的问题, 往往是通过一维模型的计算提供。对于流域型河网二维水流计算问题, 由于边界众多, 更需要一维河网模型提供计算边界, 这就提出了一个问题, 能否实现一二维模型的耦合, 希望通过一二维的耦合可以解决河网二维水流计算的边界条件问题, 同时还可以解决边界条件的类型问题(流量边界条件问题), 目前的二维水流模拟算法无法解决上述问题的。

本文拟采用非分步算法, 虽然离散以及计算的方法较复杂, 但是其单步计算时间大约是 ADI 法的 5 倍, 却可以取得远大于 ADI 法步长 5 倍的时间步长, 而且计算效果更好, 所以本文拟采用全隐式格式进行离散。另外, 当前的二维交叉河道的研究多关注于汊道处水流状况, 且仅限于一两条河道的处理, 对于全河网二维以及大范围内一二维耦合求解方法的研究较少。

流域河网一维水流模拟计算中, 是以一条河道作为最小计算单元, 以水位节点作为流域控制方程, 其求解的关键是如何构建流域节点水位方程, 而在构建该方程时的关键是获得了河道(最小计算单元)的首末断面流量与河道首末节点水位的线性关系<sup>[43, 44]</sup>。采用类似的思想, 将流域需要求解的河网二维区域概化为由若干个河网二维计算单元的组合, 对于河网二维计算单元根据河网的形状将其概化为: 单一河道型单元、“树状”河道单元、“环状”河道单元及“十字型”河道单元等类型的河网二维计算单元。河网二维计算单元的类别随着今后问题研究的不断深入会逐步增加。借用一维河网最终的节点水位求解方法, 将河网二维的变量也表达成河网二维计算单元边界节点水位的关系式, 以便应用一维的求解过程及方便与一维河网的耦合求解。将复杂的河网划分成简单河网二维计算单元的组合, 然后对各单元做单独的二维模拟模型, 将单元中的待求解的变量表达成单元外边界水位的表达式, 最终将这些单元体耦合起来求解, 各单元的结合处相当于一维的水位节点。河网二维由于在河道交汇处不能作为节点处理, 所以不能按河道交点划分节点的方法, 需要做一些特殊的划分 如图 3-2 所示的河网一二维计算区域, 通过上述的分解思路, 概化为一个“树状”河道单元、一个“环状”河道单元及一个“十字型”河道单元。

按照上述方法构建的河网二维计算模型完全类似一维河网计算模型, 最终也只要求解

节点水位方程即可。也很方便实现大范围河网计算时的一二维耦合，目前一二维耦合有两种：1. 将一、二维模型区域延长一段重叠段求解；2. 无需延长一段重叠段，在耦合模型连接断面处，根据水位、流量相同的条件求解。后一种方法相对前一种方法更严格、合理。本文提出的方法充分满足了第2种方法的需要，大范围的河网模拟中可以抽取任意关心的一块区域做二维模拟，在一二维衔接处与纯一维河网无任何差异，求解方法也完全一致。这使得该模型具有广泛的通用性。以下各章将详细介绍其求解思路。

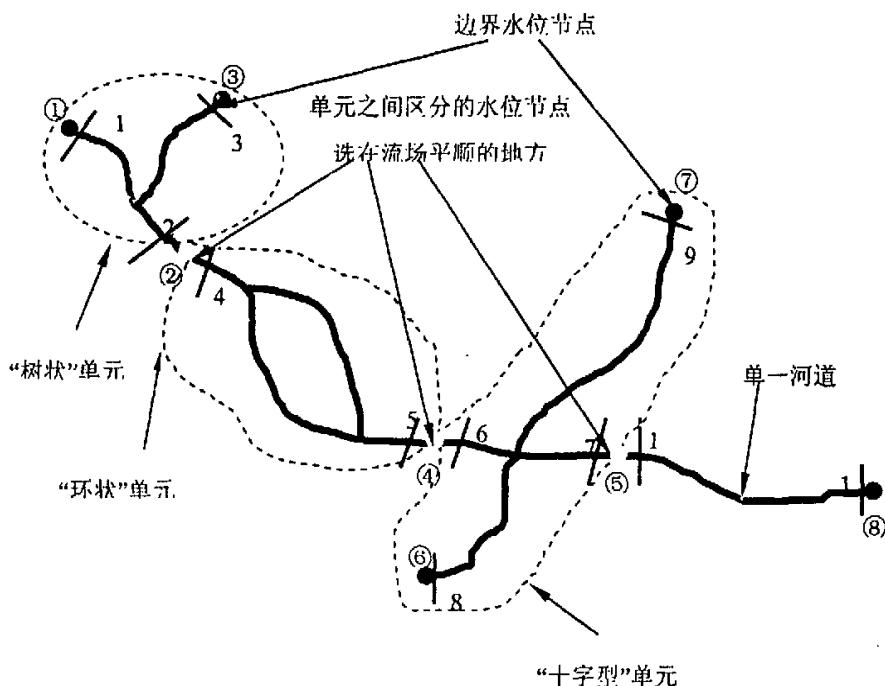


图 3-2 天然二维河网模型分解示意图

### 3.4 小结

随着数学理论和计算机技术的发展，使得流域级的水动力模型的建立成为可能，将整个流域划分为多种简单子动力模型的方法，分别求解这些相对简单的子动力模型，最终将这些子动力通过节点水量平衡方程关联起来，从而建立整个流域的水位节点方程，完成整

个流域的动力要素的求解。这里将流域划分为了几种子模型，其中一些子模型要素的求解已经得到了很好的解决，而河网二维子模型要素的求解问题目前还解决的不是很好。本章结合目前一维河网，一二维耦合河网等的求解思路，提出了一种全新的大范围一二维耦合河网、全流域型河网二维求解的新思路。具体的实现方法将在以下各章介绍。

## 第四章 单一河道二维计算模型

### 4.1 概述

本章主要对第三章推导出的正交贴体坐标下的平面二维水流方程进行离散和数值求解。首先给出基本方程的离散方法，采用“矩阵追赶法”对单一的二维河道从首断面进行追赶，直到末断面，然后回代求解。然后根据一维河道的方法进行扩充，分别对另外三种单元体：Y状单元，十字型单元，两条河道构成的“环状”河道单元进行模拟。

### 4.2 基本运动方程

$\xi - \eta$  坐标系中的平面二维水流运动方程：

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (g_\eta u \cdot h) + \frac{\partial}{\partial \eta} (g_\xi v \cdot h) \right] = 0 \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{g_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{g_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{u \cdot v}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta} - \frac{v^2}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi} + \frac{gn^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{3/2}} - fv = 0 \quad (4-2)$$

$$+ \frac{g}{g_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{g_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\xi A) - \frac{1}{g_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\eta B)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{g_\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{g_\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{u \cdot v}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi} - \frac{u^2}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta} + \frac{gn^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{3/2}} + fv = 0 \quad (4-3)$$

$$+ \frac{g}{g_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{1}{g_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\xi A) - \frac{1}{g_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\eta B)$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (u \cdot g_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (v \cdot g_\xi) \right] \\ B = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (v \cdot g_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (u \cdot g_\xi) \right] \end{cases}$$

各符号的具体涵义见第三章(为方便计算, 以后一律用  $u, v$  代替  $u_*, v_*$ )。

注：由于推导过程中公式众多，现对公式使用标号采用如下约束

以  $CPl_s^2$  为例， $\cdot$  表示某一个向量前的系数矩阵，其中各部分意义如下：

—— “C” 表示该系数为回代系数，没有该符号则表示为追赶系数或者离散系数。

—— “P” 表示该系数后面对应的未知向量类型，“P” 对应于水位  $Z$ ，“Q” 对应于流速  $U$ ，“R” 对应于流速  $V$ ，如  $P1_s^2 Z_3, Q1_s^2 U_6$

—— “1” 该符号表达的是整个方程式是关于某个变量的，“1” 代表连续方程，“2”

代表  $U$  动量方程，“3”代表  $V$  动量方程，如  $Z_3 = P1_3 Z_5 + \dots, U_2 = P2_2 Z_5 + \dots$

——上标“<sup>2</sup>”表示该系数为支流的系数，没有上标则表示为主河道系数

——下标“<sub>5</sub>”该系数表示该方程主向量的断面号。

所有系数的表达形式都是以上一些元素的组合。

### 4.3 定解条件

① 初始条件

② 边界条件

**固壁边界：**对于固壁边界，严格的讲应该采用无滑动边界条件，即流速、紊动能为零，紊动耗散率为有限值。但在实际应用过程中该条件往往无法应用，这是因为在固壁附近粘性层中，速度梯度极为陡峻，为了模拟好必须布置极为细密的网格。这样的计算费用非常昂贵，因此实用上常采用不穿透条件。其具体公式如下：

$$V_n = 0 \quad (4-4)$$

式中： $V_n$  为流速在固体边界法向上的分量。

**自由边界：**自由边界尽量选择在流态比较平稳的地方，基本满足

$v = 0, \partial u / \partial \xi = 0$ ，即垂直于河道方向的流速很小，平行于河道方向在边界处流速梯度变化很小。上边界  $Z_u$  已知，下边界  $Z_d$  已知，这里所说的上下游水位已知并不是说有实测资料，而是把这些边界作为已知的变量代入到方程中。

③ 糙率参数 糙率  $n$  是水流和河床相互作用过程中反映河道边界粗糙情况、河道形态等所有影响水流阻力因素的综合参数，其取值的正确与否直接影响到水力计算结果的精度，在实用上采用实测水位流速等资料进行率定得出。

④ 动边界的处理 在非恒定流的计算中，由于水位的变化起伏不定，导致水流边界在不停的变动，而用于计算的网格边界一经生成即固定不变，所以需要在计算时对实际计算网格边界进行修正。这里采用露滩处理的办法，即在计算的过程中将水位节点的计算水位值与河底高程对比，当河底高程小于水位值的时候该节点取正常的糙率，反之，则将此处的糙率取一无穷大的值。具体的处理可见文献[9]

### 4.4 节点布置

为了便于边界条件的处理，变量采用交错布置，即在网格中心布置水位变量，在网格四边布置相应的流速变量。图4-1为  $\xi - \eta$  坐标系下的交错节点布置示意图。从图4-1中可见，流速  $u$  节点有  $N \cdot M$  个，流速  $v$  节点有  $(N+1) \cdot (M+1)$  个，水位  $z$  节点有  $(N+1) \cdot M$  个。

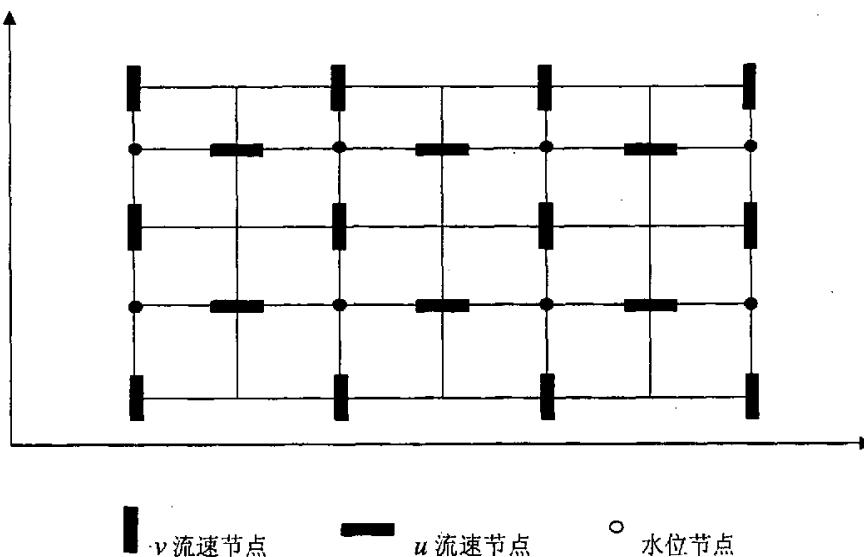


图 4-1 交错网格布置

## 4.5 差分离散

在河道型计算区域内，由于其流态变化很大，网格长宽尺寸相差悬殊，而在河宽方向上的网格宽度一般均较小，有时在几米范围内。对于如此精度的计算要求，采用一般的数值格式如ADI法是没法满足计算要求的。为此采用高离散精度全隐矩阵追赶法求解。

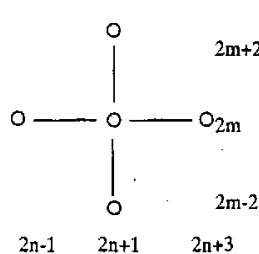


图4-2

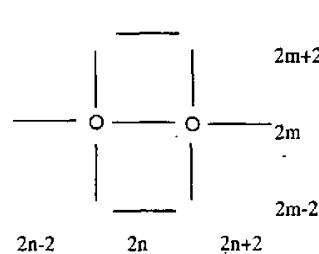


图4-3

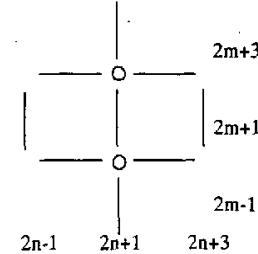


图4-5

### 4.5.1 连续方程的离散

非边界水位节点的离散：

结合图4-2，在点 $(2n+1, 2m)$ 对连续方程(4-1)离散过程如下：

$$J \frac{\partial z}{\partial t} = J_{2n+1,2m} \frac{z_{2n+1,2m} - z_{2n+1,2m}^0}{\Delta t} \quad (4-5)$$

$$\text{设 } \gamma = J/\Delta t, \text{ 则 } J \frac{\partial z}{\partial t} = \gamma_{2n+1,2m} (z_{2n+1,2m} - z_{2n+1,2m}^0)$$

对于非线性项  $g_\eta uh$  以及  $g_\xi vh$  采用如下线性化的方法:

$$\begin{cases} g_\eta uh = g_\eta uh^0 + g_\eta u^0 z - g_\eta u^0 z^0 \\ g_\xi vh = g_\xi vh^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0 \end{cases} \quad (4-6)$$

$z_{2n+1,2m}$  节点处的  $\frac{\partial}{\partial \xi} (g_\eta uh)$  只与  $u_{2n,2m}, u_{2n+2,2m}$  有关, 应用(4-6)离散如下:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (g_\eta uh) = \frac{(g_\eta uh^0 + g_\eta u^0 z - g_\eta u^0 z^0)_{2n+2,2m} - (g_\eta uh^0 + g_\eta u^0 z - g_\eta u^0 z^0)_{2n,2m}}{\Delta \xi} \quad (4-7)$$

参照图4-3, 将  $(g_\eta uh^0 + g_\eta u^0 z - g_\eta u^0 z^0)_{2n+2,2m}$  和  $(g_\eta uh^0 + g_\eta u^0 z - g_\eta u^0 z^0)_{2n,2m}$  展开:

$$z_{2n+2,2m} = (z_{2n+1,2m} + z_{2n+3,2m}) * 0.5$$

$$z_{2n+2,2m}^0 = (z_{2n+1,2m}^0 + z_{2n+3,2m}^0) * 0.5$$

$$h_{2n+2,2m}^0 = z_{2n+2,2m}^0 - uzd_{2n+2,2m}$$

$$z_{2n,2m} = (z_{2n+1,2m} + z_{2n-1,2m}) * 0.5$$

$$z_{2n,2m}^0 = (z_{2n+1,2m}^0 + z_{2n-1,2m}^0) * 0.5$$

$$h_{2n,2m}^0 = z_{2n,2m}^0 - uzd_{2n,2m}$$

为简单起见, 取  $\Delta \xi = 1$ 。将上述式子代入(4-7)中并整理可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (g_\eta uh) &= \alpha_{2n+1,2m}^1 z_{2n-1,2m} + \alpha_{2n+1,2m}^{2a} z_{2n+1,2m} + \\ &\alpha_{2n+1,2m}^3 z_{2n+3,2m} + \beta_{2n+1,2m}^1 u_{2n,2m} + \beta_{2n+1,2m}^2 u_{2n+2,2m} - \Phi_{2n+1,2m}^1 \end{aligned} \quad (4-8)$$

式(4-8)中:

$$\alpha_{2n+1,2m}^1 = -0.5 u_{2n,2m}^0 (g_\eta)_{2n,2m}$$

$$\alpha_{2n+1,2m}^{2a} = -0.5 u_{2n,2m}^0 (g_\eta)_{2n,2m} + 0.5 u_{2n+2,2m}^0 (g_\eta)_{2n+2,2m}$$

$$\alpha_{2n+1,2m}^3 = 0.5 u_{2n+2,2m}^0 (g_\eta)_{2n+2,2m}$$

$$\beta_{2n+1,2m}^1 = -h_{2n,2m}^0 (g_\eta)_{2n,2m}$$

$$\beta_{2n+1,2m}^2 = h_{2n+2,2m}^0 (g_\eta)_{2n+2,2m}$$

$$\Phi_{2n+2,2m}^1 = -z_{2n,2m}^0 u_{2n,2m}^0 (g_\eta)_{2n,2m} + z_{2n+2,2m}^0 u_{2n+2,2m}^0 (g_\eta)_{2n+2,2m}$$

其中:  $(g_\eta)_{2n+2,2m}$  表示在  $u_{2n+2,2m}$  所在的网格节点的宽度,  $uzd_{2n,2m}$  表示在  $u_{2n,2m}$  所在的网格节点的河底高程,  $u_{2n+2,2m}^0$  表示  $u_{2n+2,2m}$  节点处前一时刻的  $u$  速度值,  $z_{2n+1,2m}^0$  表示  $z_{2n+1,2m}$

所在的网格节点前一时刻的水位值。  $z_{2n+1,2m}$  节点处的  $\frac{\partial}{\partial \eta} (g_\xi v h)$  只与  $v_{2n+1,2m-1}$ ,  $v_{2n+1,2m+1}$  有关, 应用(4-6)离散方式如下:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} (g_\xi v h) \\ &= \frac{(g_\xi v h^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0)_{2n+1,2m+1} - (g_\xi v h^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0)_{2n+1,2m-1}}{\Delta \eta} \end{aligned} \quad (4-9)$$

参照图4-3, 将  $(g_\xi v h^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0)_{2n+1,2m+1}$  和  $(g_\xi v h^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0)_{2n+1,2m-1}$  展开:

$$z_{2n+1,2m+1} = (z_{2n+1,2m} + z_{2n+1,2m+2}) * 0.5$$

$$z_{2n+1,2m-1}^0 = (z_{2n+1,2m}^0 + z_{2n+1,2m-2}^0) * 0.5$$

$$h_{2n+1,2m+1}^0 = z_{2n+1,2m+1}^0 - v z d_{2n+1,2m+1}$$

$$z_{2n+1,2m-1} = (z_{2n+1,2m} + z_{2n+1,2m-2}) * 0.5$$

$$z_{2n+1,2m-1}^0 = (z_{2n+1,2m}^0 + z_{2n+1,2m-2}^0) * 0.5$$

$$h_{2n+1,2m-1}^0 = z_{2n+1,2m-1}^0 - v z d_{2n+1,2m-1}$$

将上述式子代入(4-9)中并整理可得:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} (g_\xi v h) = \alpha_{2n+1,2m}^4 z_{2n+1,2m-2} + \alpha_{2n+1,2m}^{2b} z_{2n+1,2m} + \alpha_{2n+1,2m}^5 z_{2n+1,2m+2} + \\ & \beta_{2n+1,2m}^3 v_{2n+1,2m-1} + \beta_{2n+1,2m}^4 v_{2n+1,2m+1} - \Phi_{2n+1,2m}^2 \end{aligned} \quad (4-10)$$

式(4-10)中:

$$\alpha_{2n+1,2m}^4 = -0.5v_{2n+1,2m-1}^0(g_\xi)_{2n+1,2m-1}$$

$$\alpha_{2n+1,2m}^{2b} = -0.5v_{2n+1,2m-1}^0(g_\xi)_{2n+1,2m-1} + 0.5v_{2n+1,2m+1}^0(g_\xi)_{2n+1,2m+1}$$

$$\alpha_{2n+1,2m}^5 = 0.5v_{2n+1,2m+1}^0(g_\xi)_{2n+1,2m+1}$$

$$\beta_{2n+1,2m}^3 = h_{2n+1,2m-1}^0(g_\xi)_{2n+1,2m-1}$$

$$\beta_{2n+1,2m}^4 = h_{2n+1,2m+1}^0(g_\xi)_{2n+1,2m+1}$$

$$\Phi_{2n+1,2m}^2 = -z_{2n+1,2m-1}^0 v_{2n+1,2m-1}^0(g_\xi)_{2n+1,2m-1} + z_{2n+1,2m+1}^0 v_{2n+1,2m+1}^0(g_\xi)_{2n+1,2m+1}$$

其中:  $(g_\xi)_{2n+1,2m-1}$  表示在  $v_{2n+1,2m-1}$  所在的网格节点的宽度,  $v_{2n+1,2m-1}$  表示在  $v_{2n+1,2m-1}$  所在的网格节点的河底高程,  $v_{2n+1,2m-1}^0$  表示  $v_{2n+1,2m-1}$  节点处前一时刻的  $v$  速度值。

结合(4-5), (4-8)以及(4-10)可以得出连续方程在  $z_{2n+1,2m}$  节点的离散方程:

$$f(z_{2n-1,2m}, z_{2n+1,2m}, z_{2n+3,2m}, z_{2n+1,2m-2}, z_{2n+1,2m+2}, u_{2n,2m}, u_{2n+2,2m}, v_{2n+1,2m-1}, v_{2n+1,2m+1}) = \Phi_{2n+1,2m} \quad (4-11)$$

其中:

$$\Phi_{2n+1,2m} = \Phi_{2n+1,2m}^1 + \Phi_{2n+1,2m}^2 + \gamma_{2n+1,2m} z_{2n+1,2m}^0$$

边界水位节点的离散:

当  $m=1$  或者  $m=M$  时, 由交错点布置图(见图 4-1), 此时不存在  $z_{2n+1,0}$  和  $z_{2n+1,2M+2}$ , 并且由固壁边界的不可入条件  $v_{2n+1,1}=0$  以及  $v_{2n+1,2M+1}=0$ , 故此时的水位节点离散应该做特殊处理。

当  $m=1$  时, 对  $z_{2n+1,2}$  节点进行离散,  $\frac{\partial}{\partial\xi}(g_\xi uh)$  与(4-8)式同, 而  $\frac{\partial}{\partial\eta}(g_\xi vh)$  只与  $v_{2n+1,2m+1}$

有关, 离散如下:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(g_\xi vh) = \frac{(g_\xi vh^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0)_{2n+1,3} - (g_\xi vh^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0)_{2n+1,1}}{\Delta\eta} \quad (4-12)$$

将  $(g_\xi vh^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0)_{2n+1,3}$  和  $(g_\xi vh^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0)_{2n+1,1}$  展开:

$$z_{2n+1,3} = (z_{2n+1,2} + z_{2n+1,4}) * 0.5$$

$$z_{2n+1,3}^0 = (z_{2n+1,2}^0 + z_{2n+1,4}^0) * 0.5$$

$$h_{2n+1,3}^0 = z_{2n+1,3}^0 - v z d_{2n+1,3}$$

$$z_{2n+1,1} = z_{2n+1,2}$$

$$z_{2n+1,1}^0 = z_{2n+1,2}^0$$

$$h_{2n+1,1}^0 = z_{2n+1,1}^0 - v z d_{2n+1,1}$$

将上述式子代入(4-12)中并整理可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} (g_\xi v h) &= \alpha_{2n+1,2}^{2b} z_{2n+1,2} + \alpha_{2n+1,2}^5 z_{2n+1,4} \\ &\quad + \beta_{2n+1,2}^3 v_{2n+1,1} + \beta_{2n+1,2}^4 v_{2n+1,3} - \Phi_{2n+1,2}^2 \end{aligned} \quad (4-13)$$

式(4-13)中：

$$\alpha_{2n+1,2}^{2b} = -0.5 v_{2n+1,1}^0 (g_\xi)_{2n+1,1} + 0.5 v_{2n+1,3}^0 (g_\xi)_{2n+1,3}$$

$$\alpha_{2n+1,2}^5 = 0.5 v_{2n+1,3}^0 (g_\xi)_{2n+1,3}$$

$$\beta_{2n+1,2}^3 = -h_{2n+1,1}^0 (g_\xi)_{2n+1,1}$$

$$\beta_{2n+1,2}^4 = h_{2n+1,3}^0 (g_\xi)_{2n+1,3}$$

$$\Phi_{2n+1,2}^2 = -z_{2n+1,1}^0 v_{2n+1,1}^0 (g_\xi)_{2n+1,1} + z_{2n+1,2m+1}^0 v_{2n+1,3}^0 (g_\xi)_{2n+1,3}$$

结合(4-5), (4-8)以及(4-13)可以得出连续方程在 $z_{2n+1,2}$ 节点的离散方程：

$$f(z_{2n-1,2}, z_{2n+1,2}, z_{2n+3,2}, z_{2n+1,2m+2}, u_{2n,2}, u_{2n+2,2}, v_{2n+1,3}) = \Phi_{2n+1,2} \quad (4-14)$$

其中：

$$\Phi_{2n+1,2} = \Phi_{2n+1,2}^1 + \Phi_{2n+1,2}^2 + \gamma_{2n+1,2} z_{2n+1,2}^0$$

同理，当 $m = M$ 时有：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} (g_{\xi} v h) \\ &= \frac{(g_{\xi} v h^0 + g_{\xi} v^0 z - g_{\xi} v^0 z^0)_{2n+1,2M+1} - (g_{\xi} v h^0 + g_{\xi} v^0 z - g_{\xi} v^0 z^0)_{2n+1,2M-1}}{\Delta \eta} \quad (4-15) \end{aligned}$$

将  $(g_{\xi} v h^0 + g_{\xi} v^0 z - g_{\xi} v^0 z^0)_{2n+1,2M+1}$  和  $(g_{\xi} v h^0 + g_{\xi} v^0 z - g_{\xi} v^0 z^0)_{2n+1,2M-1}$  展开：

$$z_{2n+1,2M-1} = (z_{2n+1,2M-2} + z_{2n+1,2M}) * 0.5$$

$$z_{2n+1,2M-1}^0 = (z_{2n+1,2M-2}^0 + z_{2n+1,2M}^0) * 0.5$$

$$h_{2n+1,2M-1}^0 = z_{2n+1,2M-1}^0 - v z d_{2n+1,2M-1}$$

$$z_{2n+1,2M+1} = z_{2n+1,2M}$$

$$z_{2n+1,2M+1}^0 = z_{2n+1,2M+1}$$

$$h_{2n+1,2M+1}^0 = z_{2n+1,2M+1}^0 - v z d_{2n+1,2M+1}$$

将上述式子代入(4-15)中并整理可得：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \eta} (g_{\xi} v h) = \alpha_{2n+1,2M}^4 z_{2n+1,2M-2} + \alpha_{2n+1,2M}^{2b} z_{2n+1,2M} \\ & + \beta_{2n+1,2M}^3 v_{2n+1,2M-1} + \beta_{2n+1,2M}^4 v_{2n+1,2M+1} - \Phi_{2n+1,2M}^2 \quad (4-16) \end{aligned}$$

式(4-16)中：

$$\alpha_{2n+1,2M}^{2b} = -0.5 v_{2n+1,2M-1}^0 (g_{\xi})_{2n+1,2M-1} + 0.5 v_{2n+1,2M+1}^0 (g_{\xi})_{2n+1,2M+1}$$

$$\alpha_{2n+1,2M}^4 = 0.5 v_{2n+1,2M-1}^0 (g_{\xi})_{2n+1,2M-1}$$

$$\beta_{2n+1,2M}^3 = -h_{2n+1,2M-1}^0 (g_{\xi})_{2n+1,2M-1}$$

$$\beta_{2n+1,2M}^4 = h_{2n+1,2M+1}^0 (g_{\xi})_{2n+1,2M+1}$$

$$\Phi_{2n+1,2M}^2 = -z_{2n+1,2M-1}^0 v_{2n+1,2M-1}^0 (g_{\xi})_{2n+1,2M-1} + z_{2n+1,2M+1}^0 v_{2n+1,2M+1}^0 (g_{\xi})_{2n+1,2M+1}$$

结合(4-5); (4-8)以及(4-16)可以得出连续方程在  $z_{2n+1,2M}$  节点的离散方程：

$$\begin{aligned} & f(z_{2n-1,2M}, z_{2n+1,2M}, z_{2n+3,2M}, z_{2n+1,2M-2}, \\ & u_{2n,2M}, u_{2n+2,2M}, v_{2n+1,2M-1}) = \Phi_{2n+1,2M} \quad (4-17) \end{aligned}$$

其中：

$$\Phi_{2n+1,2M} = \Phi_{2n+1,2M}^1 + \Phi_{2n+1,2M}^2 + \gamma_{2n+1,2M} z_{2n+1,2M}^0$$

方程(4-11), (4-14), (4-17)中的系数分别由其下方的表达式给出。对边界内部第 $2n+1$ 断面的所有水位节点都采用上面的离散方法，因为每个断面有 $M$ 个水位节点，所以可以构造出 $M$ 个方程，组合这 $M$ 个方程，构成一个矩阵方程。形式如下：

$$\begin{aligned} A1_{2n+1} Z_{2n-1} + B1_{2n+1} Z_{2n+1} + C1_{2n+1} Z_{2n+3} + \\ D1_{2n+1} V_{2n+1} + E1_{2n+1} U_{2n} + F1_{2n+1} U_{2n+2} = H1_{2n+1} \end{aligned} \quad (4-18)$$

参照(4-11)~(4-17)式的系数，可以得出各系数表达为如下形式：

$$A1_{2n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_{2n+1,2}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2n-1,4}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2n-1,2M}^1 \end{bmatrix}$$

$$B1_{2n+1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b_{M-1,M-2} & b_{M-1,M-1} & b_{M-1,M} \\ 0 & 0 & 0 & b_{M,M-1} & b_{M,M} \end{bmatrix}$$

其中：

$$b_{i,i} = \gamma_{2n+1,2i} + \alpha_{2n+1,2i}^{2a} + \alpha_{2n+1,2i}^{2b}$$

$$b_{i,i-1} = \alpha_{2n+1,2i}^4$$

$$b_{i,i+1} = \alpha_{2n+1,2i}^5$$

$$C1_{2n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_{2n+1,2}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2n+1,4}^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2n+1,2M}^3 \end{bmatrix} \quad D1_{2n+1} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & d_{M-1,M-2} & d_{M-1,M-1} \\ 0 & 0 & 0 & d_{M,M-1} \end{bmatrix}$$

其中：

$$d_{i,i} = \alpha_{2n+1,2i}^5$$

$$d_{i-1,i} = \alpha_{2n+1,2i}^4$$

$$d_{M,M-1} = \alpha_{2n+1,2M}^4$$

$$E1_{2n+1} = \begin{bmatrix} \beta_{2n+1,2}^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{2n+1,4}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{2n+1,2M}^1 \end{bmatrix} \quad F1_{2n+1} = \begin{bmatrix} \beta_{2n+1,2}^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{2n+1,4}^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{2n+1,2M}^2 \end{bmatrix}$$

$$H1_{2n+1} = \begin{bmatrix} \Phi_{2n+1,2} \\ \Phi_{2n+1,4} \\ \dots \\ \dots \\ \Phi_{2n+1,2M} \end{bmatrix}$$

由上述推导可以得出:  $A1_{2n+1}$  为  $M \cdot M$  的对角矩阵;  $B1_{2n+1}$  为  $M \cdot M$  的三对角矩阵;  $C1_{2n+1}$  为  $M \cdot M$  的对角矩阵; 考虑到两固壁边界上  $v$  速度为 0, 所以  $D1_{2n+1}$  为  $M \cdot (M - 1)$  的二对角矩阵;  $E1_{2n+1}$ ,  $F1_{2n+1}$  为  $M \cdot M$  的对角矩阵;  $H1_{2n+1}$  为  $M$  维的向量。自由边界的水位为已知条件, 除此之外, 可以对全河道另外  $N - 1$  个水位断面构建形如(4-18)的矩阵方程。

#### 4.5.2 $u$ 动量方程的离散

结合图4-3, 对动量方程(4-2)采用差分离散, 由于交错网格的影响, 边界上的  $u$  速度节点的离散需要做特殊的处理。边界点即  $n = 1, n = N, m = 1, m = M$  的点, 对边界点和非边界点分别离散如下:

非边界点的离散:

①、离散  $\frac{\partial u}{\partial t}$  项

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{2n,2m} - u_{2n,2m}^0}{\Delta t} \quad (4-19)$$

②、离散  $\frac{u}{g_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{g_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}$  项

$$\frac{u}{g_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{u_{2n,2m}^0}{(g_\xi)_{2n,2m}} \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\xrightarrow{\text{采用逆风格式}} = \frac{u_{2n,2m}^0 - ku_{2n-2,2m} + (2k-1)u_{2n,2m} + (1-k)u_{2n+2,2m}}{(g_\xi)_{2n,2m}} \Delta\xi \quad (4-20)$$

$$k = \begin{cases} 1.0 & u_{2n,2m}^0 > 0 \\ 0.5 & u_{2n,2m}^0 = 0 \\ 0.0 & u_{2n,2m}^0 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\nu}{g_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\nu_{2n,2m}^0}{(g_\eta)_{2n,2m}} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\xrightarrow{\text{采用逆风格式}} = \frac{\nu_{2n,2m}^0 - ku_{2n,2m-2} + (2k-1)u_{2n,2m} + (1-k)u_{2n,2m+2}}{(g_\eta)_{2n,2m}} \Delta\eta \quad (4-21)$$

$$v_{2n,2m}^0 = (v_{2n-1,2m-1}^0 + v_{2n+1,2m-1}^0 + v_{2n-1,2m+1}^0 + v_{2n+1,2m+1}^0) * 0.25$$

$$k = \begin{cases} 1.0 & v_{2n,2m}^0 > 0 \\ 0.5 & v_{2n,2m}^0 = 0 \\ 0.0 & v_{2n,2m}^0 < 0 \end{cases}$$

③、离散  $\frac{uv}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta} - \frac{v^2}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi} + \frac{gn^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} - fv + \frac{g}{g_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi}$  项

$$\frac{uv}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta} = \frac{u_{2n,2m}^0 v_{2n,2m}^0}{J_{2n,2m}} * \frac{(g_\xi)_{2n,2m+1} - (g_\xi)_{2n,2m-1}}{\Delta\eta}$$

$$\frac{v^2}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi} = \frac{v_{2n,2m}^0 v_{2n,2m}^0}{J_{2n,2m}} * \frac{(g_\eta)_{2n+1,2m} - (g_\eta)_{2n-1,2m}}{\Delta\xi} \quad (4-22)$$

$$\frac{gn^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{\frac{4}{3}}} = \frac{gn^2 \sqrt{u_{2n,2m}^0{}^2 + v_{2n,2m}^0{}^2}}{h_{2n,2m}^0} u_{2n,2m}$$

$$\frac{g}{g_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{g}{(g_\xi)_{2n,2m}} \frac{z_{2n+1,2m} - z_{2n-1,2m}}{\Delta\xi}$$

$$h_{2n,2m}^0 = z_{2n,2m}^0 - hz d_{2n,2m}^0$$

$$fv = fv_{2n,2m}$$

$$v_{2n,2m} = (v_{2n-1,2m-1} + v_{2n+1,2m-1} + v_{2n-1,2m+1} + v_{2n+1,2m+1}) * 0.25$$

④、 $\frac{1}{g_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\xi A) - \frac{1}{g_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\eta B)$  的离散见文献<sup>[5,6]</sup>

这里将其作为常数项处理，设

$$\frac{1}{g_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\xi A) - \frac{1}{g_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\eta B) = A_{2n,2m} \quad (4-23)$$

边界点的离散：

当  $n=1$  时，(4-20) 式中不存在  $u_{2n-2,2m}$  这一项，由边界条件的假设，进出口断面布设在河道流态平顺处，故在  $n=1$  的首断面采用假设  $u_{0,2m} = u_{2,2m}$ ,  $v_{1,2m-1} = v_{1,2m+1} = 0$ 。同理，在  $n=N$  的末断面假设  $u_{2N+2,2m} = u_{2N,2m}$ ,  $v_{2N+1,2m-1} = v_{2N+1,2m+1} = 0$ 。

当  $m=1$  时，(4-21) 式中不存在  $u_{2n,0}$  这一项，在边界处做对称假设  $u_{2n,0} = u_{2n,2}$ ，同理当  $m=M$  时，有  $u_{2n,2M+2} = u_{2n,2M}$

结合(4-19)~(4-23)式可以得出  $u$  动量方程方程(4-2)在  $u_{2n,2m}$  节点的离散方程：

$$f(z_{2n-1,2m}, z_{2n+1,2m}, u_{2n,2m}, u_{2n-2,2m}, u_{2n+2,2m}, \\ u_{2n,2m-2}, u_{2n,2m+2}, v_{2n-1,2m-1}, v_{2n-1,2m+1}, v_{2n+1,2m-1}, v_{2n+1,2m+1}) = \Psi_{2n,2m} \quad (4-24)$$

对边界内部第  $2n$  断面的所有  $u$  流速节点都采用上面的离散方法，因为每个断面有  $M$  个  $u$  流速节点，所以可以构造出  $M$  个方程，组合这  $M$  个方程，构成一个矩阵方程。形式如下：

$$A2_{2n}Z_{2n-1} + B2_{2n}Z_{2n+1} + C2_{2n}U_{2n-2} + D2_{2n}U_{2n} \\ E2_{2n}U_{2n+2} + F2_{2n}V_{2n-1} + G2_{2n}V_{2n+1} = H2_{2n} \quad (4-25)$$

特别地，对于边界点  $n=1$  和  $n=N$ ，矩阵方程表达成：

$$A2_2Z_1 + B2_2Z_3 + D2_2U_2 + E2_2U_4 + G2_2V_3 = H2_2 \quad (4-26)$$

$$A2_{2N}Z_{2N-1} + B2_{2N}Z_{2N+1} + C2_{2N}U_{2N-2} + D2_{2N}U_{2N} + F2_{2N}V_{2N-1} = H2_{2N} \quad (4-27)$$

参照(4-19)~(4-23)式的离散，可以将各矩阵系数表达为如下形式：

$$A2_{2n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{MM} \end{bmatrix} \quad B2_{2n} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{MM} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 C2_{2n} &= \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_{MM} \end{bmatrix} & D2_{2n} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & \dots \\ 0 & c_{32} & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & c_{i,i-1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & c_{M,M-1} & c_{MM} \end{bmatrix} \\
 E2_{2n} &= \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e_{MM} \end{bmatrix} & F2_{2n} &= \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{32} & f_{33} & \dots & \dots \\ \dots & & & f_{(M-1)(M-1)} & \\ 0 & 0 & 0 & f_{M(M-1)} & \end{bmatrix} \\
 G2_{2n} &= \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{32} & g_{33} & \dots & \dots \\ \dots & & & g_{(M-1)(M-1)} & \\ 0 & 0 & 0 & g_{M(M-1)} & \end{bmatrix} & H2_n &= \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ \dots \\ \dots \\ h_{M1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

各系数矩阵的每个元素的值为以上离散方式中的对应系数的组合。

#### 4.5.3 v 动量方程的离散

结合图4-3, 对动量方程(4-3)采用差分离散, 由边界条件假设中的不可入条件知  $v_{2n+1,1} = v_{2n+1,2M+1} = 0$ , 所以  $v$  速度的离散应该从  $v_{2n+1,3}$  开始, 离散过程如下:

①、离散  $\frac{\partial v}{\partial t}$  项

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_{2n+1,2m+1} - v_{2n+1,2m+1}^0}{\Delta t} \quad (4-28)$$

②、离散  $\frac{u}{g_\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{g_\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta}$  项

$$\frac{u}{g_\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{u_{2n+1,2m+1}^0}{(g_\xi)_{2n+1,2m+1}} \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\xrightarrow{\text{采用逆风格式}} = \frac{u_{2n+1,2m+1}^0 - kv_{2n-1,2m+1} + (2k-1)v_{2n+1,2m+1} + (1-k)v_{2n+3,2m+1}}{\Delta \xi} \quad (4-29)$$

$$u_{2n+1,2m+1}^0 = (u_{2n,2m}^0 + u_{2n,2m+2}^0 + u_{2n+2,2m}^0 + u_{2n+2,2m+2}^0) * 0.25$$

$$k = \begin{cases} 1.0 & u_{2n+1,2m+1}^0 > 0 \\ 0.5 & u_{2n+1,2m+1}^0 = 0 \\ 0.0 & u_{2n+1,2m+1}^0 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\nu}{g_\eta} \frac{\partial \nu}{\partial \eta} = \frac{\nu_{2n+1,2m+1}^0}{(g_\eta)_{2n+1,2m+1}} \frac{\partial \nu}{\partial \eta}$$

$$\xrightarrow{\text{采用逆风格式}} = \frac{\nu_{2n+1,2m+1}^0 - kv_{2n+1,2m-1} + (2k-1)v_{2n+1,2m+1} + (1-k)v_{2n+1,2m+3}}{\Delta \eta} \quad (4-30)$$

$$k = \begin{cases} 1.0 & v_{2n+1,2m+1}^0 > 0 \\ 0.5 & v_{2n+1,2m+1}^0 = 0 \\ 0.0 & v_{2n+1,2m+1}^0 < 0 \end{cases}$$

③、离散  $\frac{uv}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi} - \frac{u^2}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta} + \frac{gn^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} + fv + \frac{g}{g_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta}$  项

$$\frac{uv}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi} = \frac{u_{2n+1,2m+1} v_{2n+1,2m+1}^0}{J_{2n+1,2m+1}} * \frac{(g_\eta)_{2n+1,2m+2} - (g_\eta)_{2n+1,2m}}{\Delta \xi}$$

$$\frac{u^2}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta} = \frac{u_{2n+1,2m+1}^0 u_{2n+1,2m+1}}{J_{2n+1,2m+1}} * \frac{(g_\xi)_{2n+1,2m+2} - (g_\xi)_{2n+1,2m}}{\Delta \eta} \quad (4-31)$$

$$\frac{gn^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} = \frac{gn^2 \sqrt{u_{2n+1,2m+1}^0 + v_{2n+1,2m+1}^0}}{h_{2n+1,2m+1}^0} v_{2n+1,2m+1}$$

$$\frac{g}{g_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{g}{(g_\eta)_{2n+1,2m+1}} \frac{z_{2n+1,2m+2} - z_{2n+1,2m}}{\Delta \eta}$$

$$h_{2n+1,2m+1}^0 = z_{2n+1,2m+1}^0 - hzd_{2n+1,2m+1}^0$$

$$fu = fu_{2n+1,2m+1}$$

$$u_{2n+1,2m+1} = (u_{2n,2m} + u_{2n,2m+2} + u_{2n+2,2m} + u_{2n+2,2m+2}) * 0.25$$

④、 $\frac{1}{g_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\xi A) - \frac{1}{g_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\eta B)$  的离散见文献<sup>[5,6]</sup>

这里将其作为常数项处理，设

$$\frac{1}{g_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (E_\xi A) - \frac{1}{g_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (E_\eta B) = B_{2n+1,2m+1} \quad (4-32)$$

结合(4-28)–(4-32)式可以得出 $v$ 动量方程方程(4-3)在 $v_{2n+1,2m+1}$ 节点的离散方程:

$$\begin{aligned} & f(z_{2n+1,2m}, z_{2n+1,2m+2}, u_{2n,2m}, u_{2n,2m+2}, u_{2n+2,2m}, u_{2n+2,2m+2}, \\ & v_{2n-1,2m+1}, v_{2n+1,2m+1}, v_{2n+3,2m+1}, v_{2n+1,2m-1}, v_{2n+1,2m+3}) = \Omega_{2n+1,2m+1} \end{aligned} \quad (4-33)$$

对边界内部第 $2n+1$ 断面的所有 $v$ 流速节点都采用上面的离散方法, 因为每个断面有 $M-1$ 个 $v$ 流速节点, 所以可以构造出 $M-1$ 个方程, 组合这 $M-1$ 个方程, 构成一个矩阵方程。形式如下:

$$\begin{aligned} A3_{2n+1}Z_{2n+1} + B3_{2n+1}U_{2n} + C3_{2n+1}U_{2n+2} + D3_{2n+1}V_{2n-1} \\ E3_{2n+1}V_{2n+1} + F3_{2n+1}V_{2n+3} = H3_{2n+1} \end{aligned} \quad (4-34)$$

特别地, 当 $n=1, n=N-1$ 时, 由于假设 $V_1=0, V_{2N+1}=0$ , 所以方程为:

$$A3_3Z_3 + B3_3U_2 + C3_3U_4 + E3_3V_3 + F3_3V_5 = H3_3 \quad (4-35)$$

$$A3_{2N+1}Z_{2N+1} + B3_{2N+1}U_{2N} + C3_{2N+1}U_{2N+2} + D3_{2N+1}V_{2N-1} + E3_{2N+1}V_{2N+1} = H3_{2N+1} \quad (4-36)$$

参照(4-28)–(4-32)式的离散, 可以将各矩阵系数表达为如下形式:

$$\begin{aligned} A3_{2n+1} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{(M-1)(M-1)} & a_{(M-1)M} \end{bmatrix} & B3_{2n+1} &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & b_{(M-1)(M-1)} & b_{(M-1)M} \end{bmatrix} \\ C3_{2n+1} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & c_{(M-1)(M-1)} & c_{(M-1)M} \end{bmatrix} & D3_{2n+1} &= \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix} \\ E3_{2n+1} &= \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & e_{(M-1)(M-2)} & e_{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix} & F3_{2n+1} &= \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_{22} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix} \\ H_{3n} &= \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ \dots \\ \dots \\ h_{M1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

各系数矩阵的每个元素的值为以上离散方式中的对应系数的组合。

## 4.6 矩阵追赶

以上将二维浅水波方程的三个方程进行了离散, 最终以各断面的待求向量作为未知量

建立矩阵方程组，根据这些矩阵方程组之间的相互关系，可以建立一个矩阵追赶的递推关系式，依据该关系可以沿整个河道递推至末断面。这里的矩阵追赶与文献[45]中的稍有不同，文献[45]中的情况是计算某一特定区域的二维水流状况，故其首末断面水位为实测资料，追赶以及回代时都作为常数处理。本文中的矩阵追赶和回代最终的目标是要建立关于首末断面的水位关系式，故这里首末断面水位是作为未知量参与构建方程的。

由网格点的交错布置以及给定的边界条件可以得出  $Z_1, V_1$  为已知数，即已知的边界条件，故在首断面上不需要对  $Z, V$  进行离散，离散过程从  $U_2$  断面开始。

注：这里为了表达方式容易理解和便于书写，采用标量除法的方式表示矩阵逆阵的左乘。例如  $(D2_2)^{-1}B2_2$  书写为  $\frac{B2_2}{D2_2}$

由(4-26)可以得出：

$$U_2 = P2_2 Z_3 + Q2_2 U_4 + R2_2 V_3 + I2_2 Z1 + K2_2 \quad (4-37)$$

其中：

$$P2_2 = -\frac{B2_2}{D2_2} \quad Q2_2 = -\frac{E2_2}{D2_2} \quad R2_2 = -\frac{G2_2}{D2_2} \quad I2_2 = -\frac{A2_2}{D2_2} \quad K2_2 = -\frac{H2_2}{D2_2}$$

将(4-37)代入(4-35)有：

$$V_3 = P3_3 Z_3 + Q3_3 U_4 + R3_3 V_5 + I3_3 Z1 + K3_3 \quad (4-38)$$

其中

$$P3_3 = -\frac{B3_3 * P2_2 + A3_3}{E3_3 + B3_3 * R2_2} \quad Q3_3 = -\frac{B3_3 * Q2_2 + C3_3}{E3_3 + B3_3 * R2_2} \quad R3_3 = -\frac{F3_3}{E3_3 + B3_3 * R2_2}$$

$$I3_3 = -\frac{B3_3 * I2_2}{E3_3 + B3_3 * R2_2} \quad K3_3 = \frac{H3_3 - B3_3 * K2_2}{E3_3 + B3_3 * R2_2}$$

将(4-37)、(4-38)代入(4-18)有：

$$Z_3 = P1_3 Z_5 + Q1_3 U_4 + R1_3 V_5 + I1_3 Z1 + K1_3 \quad (4-39)$$

其中

$$P1_3 = -\frac{C1_3}{B1_3 + E1_3 * P2_2 + D1_3 * P3_3} \quad Q1_3 = -\frac{F1_3 + E1_3 * Q2_2 + D1_3 * Q3_3}{B1_3 + E1_3 * P2_2 + D1_3 * P3_3}$$

$$R1_3 = -\frac{D1_3 * R3_3}{B1_3 + E1_3 * P2_2 + D1_3 * P3_3} \quad I1_3 = -\frac{E1_3 * I2_2 + D1_3 * I3_3}{B1_3 + E1_3 * P2_2 + D1_3 * P3_3}$$

$$K1_3 = \frac{H1_3 - E1_3 * K2_2 + D1_3 * K3_3}{B1_3 + E1_3 * P2_2 + D1_3 * P3_3}$$

(4-37)-(4-39)为矩阵追赶的一般方法,采用与上述同样的追赶过程,可以对整个河道断面构建以下的追赶公式:

$$U_{2n} = P2_{2n}Z_{2n+1} + Q2_{2n}U_{2n+2} + R2_{2n}V_{2n+1} + I2_{2n}Z1 + K2_{2n} \quad (4-40)$$

$$P2_{2n} = -\frac{B2_{2n} + TTT2_{2n} * P1_{2n-1}}{AH2_{2n}}$$

$$Q2_{2n} = -\frac{E2_{2n}}{AH2_{2n}}$$

$$R2_{2n} = -\frac{G2_{2n} + KKK2_{2n} * R3_{2n-1} + TTT2_{2n} * R1_{2n-1}}{AH2_{2n}}$$

$$I2_{2n} = -\frac{C2_{2n} * I2_{2n-2} + KKK2_{2n} * I3_{2n-1} + TTT2_{2n} * I1_{2n-1}}{AH2_{2n}}$$

$$K2_{2n} = \frac{H2_{2n} - C2_{2n} * K2_{2n-2} - KKK2_{2n} * K3_{2n-1} - TTT2_{2n} * K1_{2n-1}}{AH2_{2n}}$$

其中:

$$AH2_{2n} = D2_{2n} + C2_{2n} * Q2_{2n-2} + TTT2_{2n} * Q1_{2n-1} + KKK2_{2n} * Q3_{2n-1}$$

$$KKK2_{2n} = F2_{2n} + C2_{2n} * R2_{2n-2}$$

$$TTT2_{2n} = A2_{2n} + C2_{2n} * P2_{2n-2} + KKK2_{2n} * P3_{2n-1}$$

$$V_{2n+1} = P3_{2n+1}Z_{2n+1} + Q3_{2n+1}U_{2n+2} + R3_{2n+1}V_{2n+3} + I3_{2n+1}Z1 + K3_{2n+1} \quad (4-41)$$

$$P3_{2n+1} = -\frac{A3_{2n+1} + KKK3_{2n+1} * P1_{2n-1} + TTT3_{2n+1} * P2_{2n}}{AH3_{2n+1}}$$

$$Q3_{2n+1} = -\frac{C3_{2n+1} + TTT3_{2n+1} * Q2_{2n}}{AH3_{2n+1}}$$

$$R3_{2n+1} = -\frac{F3_{2n+1}}{AH3_{2n+1}}$$

$$I3_{2n+1} = -\frac{D3_{2n+1} * I3_{2n-1} + KKK3_{2n+1} * I1_{2n-1} + TTT3_{2n+1} * I2_{2n}}{AH3_{2n+1}}$$

$$K3_{2n+1} = \frac{H3_{2n+1} - D3_{2n+1} * K3_{2n-1} - KKK3_{2n+1} * K1_{2n-1} - TTT3_{2n+1} * K2_{2n}}{AH3_{2n+1}}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 AH3_{2n+1} &= E3_{2n+1} + D3_{2n+1} * R3_{2n-1} + TTT3_{2n+1} * R2_{2n} + KKK3_{2n+1} * R1_{2n-1} \\
 TTT3_{2n+1} &= B3_{2n+1} + D3_{2n+1} * Q3_{2n-1} + KKK3_{2n+1} * Q1_{2n-1} \\
 KKK3_{2n+1} &= D3_{2n+1} * P3_{2n-1} \\
 Z_{2n+1} &= P1_{2n+1}Z_{2n+3} + Q1_{2n+1}U_{2n+2} + R1_{2n+1}V_{2n+3} + I1_{2n+1}Z1 + K1_{2n+1} \\
 P1_{2n+1} &= -\frac{C1_{2n+1}}{AH1_{2n+1}} \\
 Q1_{2n+1} &= -\frac{F1_{2n+1} + KKK1_{2n+1} * Q2_{2n} + TTT1_{2n+1} * Q3_{2n+1}}{AH1_{2n+1}} \\
 R1_{2n+1} &= -\frac{TTT1_{2n+1} * R3_{2n+1}}{AH1_{2n+1}} \\
 I1_{2n+1} &= -\frac{A1_{2n+1} * I1_{2n-1} + KKK1_{2n+1} * I2_{2n} + TTT1_{2n+1} * I3_{2n+1}}{AH1_{2n+1}} \\
 K1_{2n+1} &= \frac{H1_{2n+1} - A1_{2n+1} * K1_{2n-1} - KKK1_{2n+1} * K2_{2n} - TTT1_{2n+1} * K3_{2n+1}}{AH1_{2n+1}}
 \end{aligned} \tag{4-42}$$

其中：

$$\begin{aligned}
 AH1_{2n+1} &= B1_{2n+1} + A1_{2n+1} * P1_{2n-1} + TTT1_{2n+1} * P3_{2n+1} + KKK1_{2n+1} * P2_{2n} \\
 TTT1_{2n+1} &= D1_{2n+1} + A1_{2n+1} * R1_{2n-1} + KKK1_{2n+1} * R2_{2n} \\
 KKK1_{2n+1} &= E1_{2n+1} + A1_{2n+1} * Q1_{2n-1}
 \end{aligned}$$

至此已经对全二维河道建立起了断面水位流速间的递推关系式，利用上述关系式以及适当的定解条件，并采用下面的回代求解方法即可以求解出各断面的水位以及流速。注，上面的矩阵追赶过程中下标上的 $z, u, v$ 分别代表与 $Z, U, V$ 相关的系数。

## 4.7 回代求解

采用上述矩阵追赶方法，直到 $n = N$ 断面，由边界条件可知 $Z_{2N+1} = Z2$ 为已知向量， $V_{2N+1} = 0$ ，由公式(4-27)中的对称假定 $U_{2N+2} = U_{2N}$ ，可以将 $U_{2N}$ 表达成：

$$\begin{aligned}
 U_{2N} &= CIA2_{2N}Z1 + CIB2_{2N}Z_{2N+1} + CK2_{2N} \\
 &= CIA2_{2N}Z1 + CIB2_{2N}Z2 + CK2_{2N}
 \end{aligned} \tag{4-43}$$

其中：

$$CIA2_{2N} = \frac{I2_{2N}}{E - Q2_{2N}} \quad CIB2_{2N} = \frac{P2_{2N}}{E - Q2_{2N}} \quad CK2_{2N} = \frac{K2_{2N}}{E - Q2_{2N}} \quad E \text{ 为单位阵。}$$

将(4-43)式代入(4-42), 得到关于 $Z_{2N-1}$ 的表达式:

$$Z_{2N-1} = CLA1_{2N-1}Z_1 + CIB1_{2N-1}Z_2 + CK1_{2N-1} \quad (4-44)$$

其中:

$$CLA1_{2N-1} = I1_{2N-1} + Q1_{2N-1} * CLA2_{2N} \quad CIB1_{2N-1} = P1_{2N-1} + Q1_{2N-1} * CIB2_{2N}$$

$$CK1_{2N-1} = K1_{2N-1} + Q1_{2N-1} * CK2_{2N}$$

将(4-43)、(4-44)代入(4-41)中有:

$$V3_{2N-1} = CLA3_{2N-1}Z_1 + CIB3_{2N-1}Z_2 + CK3_{2N-1} \quad (4-45)$$

其中:

$$CLA3_{2N-1} = I3_{2N-1} + Q3_{2N-1} * CLA2_{2N} + P3_{2N-1} * CIB1_{2N-1}$$

$$CIB3_{2N-1} = Q3_{2N-1} * CIB2_{2N} + P3_{2N-1} * CIB1_{2N-1}$$

$$CK3_{2N-1} = K3_{2N-1} + Q3_{2N-1} * CK2_{2N} + P3_{2N-1} * CK1_{2N-1}$$

(4-43)-(4-45)式分别给出了末断面待求的 $Z_{2N-1}$ ,  $U_{2N}$ ,  $V_{2N-1}$ 与首末断面的水位

$Z_p$ ,  $Z_{2N+1}$ 以及常数项的线性关系, 采用以上相同的回代方法以及由(4-37)-(4-42)确定的追赶方程, 可以将整个河道的待求水位和流速都表达成首末断面的水位以及常数项的线性关系。过程如下:

$$U_{2n} = CLA2_{2n}Z_1 + CIB2Z_2 + CK2_{2n} \quad (4-46)$$

其中:

$$CLA2_{2n} = P2_{2n}CLA1_{2n+1} + Q2_{2n}CLA2_{2n+2} + R2_{2n}CLA3_{2n+1} + I2_{2n}$$

$$CIB2_{2n} = P2_{2n}CIB1_{2n+1} + Q2_{2n}CIB2_{2n+2} + R2_{2n}CIB3_{2n+1}$$

$$CK2_{2n} = P2_{2n}CK1_{2n+1} + Q2_{2n}CK2_{2n+2} + R2_{2n}CK3_{2n+1} + CK2_{2n}$$

$$Z_{2n-1} = CLA1_{2n-1}Z_1 + CIB1_{2n-1}Z_2 + CK1_{2n-1} \quad (4-47)$$

其中:

$$CLA1_{2n-1} = P1_{2n-1}CLA1_{2n+1} + Q1_{2n-1}CLA2_{2n} + R1_{2n-1}CLA3_{2n+1} + I1_{2n-1}$$

$$CIB1_{2n-1} = P1_{2n-1}CIB1_{2n+1} + Q1_{2n-1}CIB2_{2n} + R1_{2n-1}CIB3_{2n+1}$$

$$CK1_{2n-1} = P1_{2n-1}CK1_{2n+1} + Q1_{2n-1}CK2_{2n} + R1_{2n-1}CK3_{2n+1} + K1_{2n-1}$$

$$V_{2n-1} = CLA3_{2n-1}Z_1 + CIB3_{2n-1}Z_2 + CK3_{2n-1} \quad (4-48)$$

其中:

$$CLA3_{2n-1} = P3_{2n-1}CLA1_{2n-1} + Q3_{2n-1}CLA2_{2n} + R3_{2n-1}CLA3_{2n+1} + I3_{2n-1}$$

$$CIB3_{2n-1} = P3_{2n-1}CIB1_{2n-1} + Q3_{2n-1}CIB2_{2n} + R3_{2n-1}CIB3_{2n+1}$$

$$CK3_{2n-1} = P3_{2n-1}CK1_{2n-1} + Q3_{2n-1}CK2_{2n} + R3_{2n-1}CK3_{2n+1} + K3_{2n-1}$$

根据假设的初始条件的假设, 首末断面垂直河道方向水位梯度为0, 即首断面的水位

和末断面的水位都是平的，所以可以将首末断面水位作为标量来处理，河道中的待求变量即可以表达成首末断面水位标量和常数的关系。

#### 4.8 边界水位流量关系的表达

由上述所推导的过程，可以看出所划分的单一的二维河道中的所有未知变量都已经表达成了河道首末断面水位的线性表达式，有了这个表达式，就可以很容易的将首末边界处的流量表达成边界水位的表达式，通过这种处理，可以通过流量守恒在边界处与其他计算模型耦合，很容易的将一维河网的计算与二维的计算集合起来。流量水位表达方式如下，以首断面流量为例：

$$\begin{aligned} Q_2 &= \int_0^{M_1} u_{2,j} * uh_{2,j} = \sum_j u_{2,j} * uh_{2,j} = U_2 * UH_2 \\ &= U_2 * UH_2^0 + U_2^0 * ZH_2 - U_2^0 * ZH_2^0 \end{aligned}$$

其中：

$$ZH_2 = (ZH_1 + ZH_2) / 2 = f_{uh}(Z1, Z2)$$

由于  $U_1$  也可以表达成两端边界的水位关系，所以上述  $Q_1$  表达式为非线性的，需要线性化求解，线性化的求解方法见参考文献<sup>[5]</sup>，最终表达式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2 = A1Z1 + A2Z2 + K1 \\ Q_{2N} = B1Z1 + B2Z2 + K2 \end{array} \right. \quad (4-49)$$

将上式代入到节点水位方程(3-6)即可得到整个流域节点水位方程(3-7)。

单一河道二维计算比较简单，实际工程中的例子也非常多，这里就不做算例了。

#### 4.9 小结

本章着重在前一章提出的河网二维思路的基础上，对简单的二维河道计算的具体过程进行重新的设计。本章的表述主要为后续的章节提供基本的计算方法和思路，关于离散等方法后续章节中不再重复。

## 第五章 “树状”河道单元计算模型

### 5.1 概述

本章在第四章单一河道求解的基础上对“树状”河道单元进行求解。在河道交汊口以外的地方的求解过程与单一河道类似，本章着重给出汊道处的处理过程，然后利用类似单一河道的求解方法给出“树状”河道单元的求解过程，基本步骤如下，步骤图见图 5-1：

- ①. 采用单一河道的离散方法和追赶方法求解主河道  $0 \rightarrow 2LI$  河段
- ②. 对于主河道  $2LI \rightarrow 2LI + 2M_2$  河段，离散方式考虑汊道的影响，离散和追赶直到主河道的末断面。
- ③. 采用与单一河道相同的回代方法回代直到  $2LI$  断面，此时主河道中  $2LI$  断面至末断面的未知向量表达成了首末断面水位  $Z_1, Z_2$  以及支流汊道变量  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  的线性关系。
- ④. 使用主河道  $2LI \rightarrow 2LI + 2M_2$  范围内的变量构造支流河道的起始追赶方程，离散和追赶支流河道至支流末断面。
- ⑤. 回代支流河道，将  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  表达成主河道首末断面水位  $Z_1, Z_2$  以及支流的水位  $Z_3$  的线性关系，至此支流河道中的待求变量都表示成了主河道首末断面水位  $Z_1, Z_2$  和支流末断面水位  $Z_3$  的线性关系。
- ⑥. 将主河道  $2LI$  断面至末断面的未知向量中的  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  替换。回代  $2LI \rightarrow 0$  之间的主河道，此时主河道未知向量已全部表达成首末断面水位  $Z_1, Z_2$  和支流末断面水位  $Z_3$  的线性关系，完成了“树状”河道单元的求解。

以上为“环状”河道单元计算的基本思路，以下则按照这些思路展开论述。此外，上述公式中的系数表达法与第四章同。

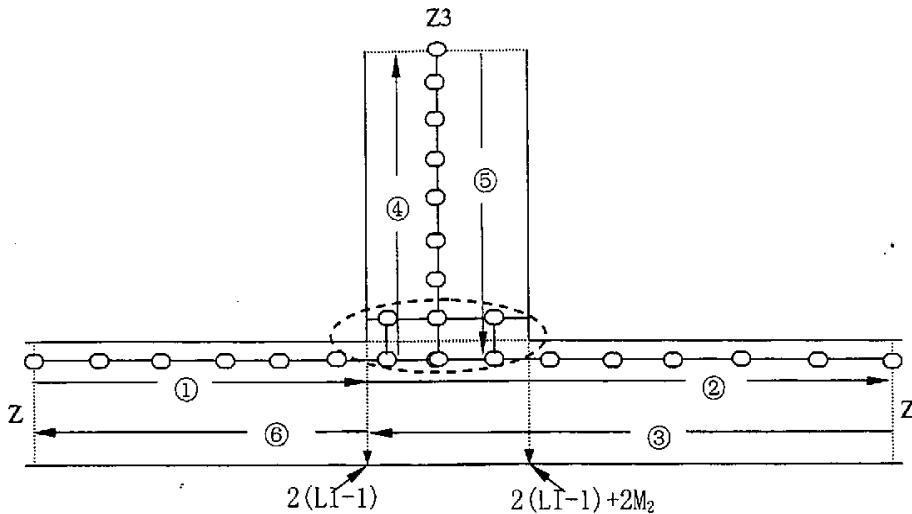


图 5-1 环状河网计算步骤图

## 5.2 汉道处的离散

对应于基本步骤中的第①、②步。两条河的汊道处网格连接示意图见图 5-1。由交错网格的布置可以知道，主河道上有  $N_1 + 1$  排水位、 $V$  流速断面， $N_1$  排  $U$  流速断面，支流河道上共有  $N_2 + 1$  排水位、 $V$  流速断面， $N_2$  排  $U$  流速断面。主河道上第  $2(LI - 1)$  断面对应于支流上第 1 条垂线相连，由交错网格的布置，则主河道上该断面对应的是  $u$  速度断面。主河道上第  $2LI + 2M_2$  断面对应于支流上第  $2M_2 + 1$  根垂线，在主河道上该断面对应的也为  $u$  速度断面。支流上第 1 和第 2 断面与主河道第  $2M_1$  垂线以及第  $2M_1 + 1$  垂线上相应的节点重合，具体示意见图 5-1。

主河道上  $1 \rightarrow 2LI$  断面的离散与单一河道的离散相同，具体的离散过程见(4-5)–(4-36)式，这里不再累述。以下着重考虑主河道  $2LI \rightarrow (2LI + 2M_2)$  断面的离散。

### 5.2.1 连续方程的离散

连续方程中  $J \frac{\partial z}{\partial t}$  项和  $\frac{\partial}{\partial \xi} (g_n u h)$  项的离散与单一河道相同，分别采用(4-5)式和(4-8)式。由于支流的影响， $\frac{\partial}{\partial \eta} (g_n v h)$  的离散需要重新设计。

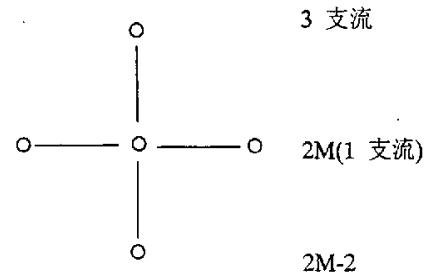


图 5-2 边界水位节点离散示意图

由图 5-1 可知, 主河道中当  $m < M$  时  $\frac{\partial}{\partial \eta} (g_\xi v h)$  的离散与单一河道相同, 采用(4-10)式, 当  $m = M$ , 原先主河道中的边界水位节点  $z_{2n+1,2m}$  此时成为两条河道的交接点, 离散过程需要考虑支流的影响。图 5-2 是主河道中  $m = M$  时, 水位节点离散的示意图。结合图 5-1 和图 5-2, 主河道中  $2M$  垂线上的水位节点也即是支流第 1 断面的水位节点;  $2M + 1$  垂线上的  $v$  流速节点也即是支流第 2 断面的  $u$  流速节点, 故此处不能应用边界条件中的不可入条件, 应将支流和主河道的相应节点连接起来考虑。离散过程如下:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (g_\xi v h) = \frac{(g_\xi v h^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0)_{2n+1,2m+1} - (g_\xi v h^0 + g_\xi v^0 z - g_\xi v^0 z^0)_{2n+1,2m-1}}{\Delta \eta} \quad (5-1)$$

参照图 5-2, 其中  $v_{2n+1,2m+1}$  即是支流河道中的  $u_{2,(2n-2L+2)}^2$ , 展开上式:

$$z_{2n+1,2m+1} = (z_{2n+1,2m} + z_{3,(2n-2L+2)}^2) * 0.5$$

$$z_{2n+1,2m+1}^0 = (z_{2n+1,2m}^0 + z_{3,(2n-2L+2)}^0)^2 * 0.5$$

$$h_{2n+1,2m+1}^0 = z_{2n+1,2m+1}^0 - v z d_{2n+1,2m+1}$$

$$z_{2n+1,2m-1} = (z_{2n+1,2m} + z_{2n+1,2m-2}) * 0.5$$

$$z_{2n+1,2m-1}^0 = (z_{2n+1,2m}^0 + z_{2n+1,2m-2}^0) * 0.5$$

$$h_{2n+1,2m-1}^0 = z_{2n+1,2m-1}^0 - v z d_{2n+1,2m-1}$$

将上述式子代入(5-1)中并整理可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} (g_\xi v h) &= \alpha_{2n+1,2m}^4 z_{2n+1,2m-2} + \alpha_{2n+1,2m}^{2b} z_{2n+1,2m} + \alpha_{2n+1,2m}^5 z_{3,(2n-2L+2)}^2 \\ &+ \beta_{2n+1,2m}^3 v_{2n+1,2m-1} + \beta_{2n+1,2m}^4 u_{2,(2n-2L+2)}^2 - \Phi_{2n+1,2m}^2 \end{aligned} \quad (5-2)$$

式(5-2)中:

$$\alpha_{2n+1,2m}^4 = -0.5 v_{2n+1,2m-1}^0 (g_\xi)_{2n+1,2m-1}$$

$$\alpha_{2n+1,2m}^{2b} = -0.5 v_{2n+1,2m-1}^0 (g_\xi)_{2n+1,2m-1} + 0.5 v_{2n+1,2m+1}^0 (g_\xi)_{2n+1,2m+1}$$

$$\alpha_{2n+1,2m}^5 = 0.5 v_{2n+1,2m+1}^0 (g_\xi)_{2n+1,2m+1}$$

$$\beta_{2n+1,2m}^3 = -h_{2n+1,2m-1}^0 (g_\xi)_{2n+1,2m-1}$$

$$\beta_{2n+1,2m}^4 = h_{2n+1,2m+1}^0 (g_\xi)_{2n+1,2m+1}$$

$$\Phi_{2n+1,2m}^2 = -z_{2n+1,2m-1}^0 v_{2n+1,2m-1}^0 (g_\xi)_{2n+1,2m-1} + z_{2n+1,2m+1}^0 v_{2n+1,2m+1}^0 (g_\xi)_{2n+1,2m+1}$$

其中  $z_{3,(2n-2LI+2)}^2$  表示支流中  $(3, 2n - 2LI + 2)$  节点上的水位,  $u_{2,(2n-2LI+2)}^2$  表示支流中  $(2, 2n - 2LI + 2)$  节点上的  $u$  流速, 其余符号意义与前同。结合(4-5), (4-8)以及(5-2)式可以得出连续方程在  $z_{2n+1,2M}$  节点的离散方程:

$$f(z_{2n-1,2M}, z_{2n+1,2M}, z_{2n+3,2M}, z_{2n+1,2m-2}, z_{3,(2n-2LI+2)}^2, u_{2n,2M}, u_{2n+2,2M}, v_{2n+1,2M-1}, u_{2,(2n-2LI+2)}^2) = \Phi_{2n+1,2M} \quad (5-3)$$

表达式中的各变量的系数由以上离散公式给出。则此时构造出的形如(4-18)式的矩阵方程组为:

$$\begin{aligned} & A1_{2n+1} Z_{2n-1} + B1_{2n+1} Z_{2n+1} + C1_{2n+1} Z_{2n+3} + \\ & D1_{2n+1} V_{2n+1} + E1_{2n+1} U_{2n} + F1_{2n+1} U_{2n+2} + P1_{2n+1} Z_3^2 + Q1_{2n+1} U_2^2 = H1_{2n+1} \end{aligned} \quad (5-4)$$

其中  $Z_3^2$  表示支流河道中第 3 断面的水位节点向量,  $U_2^2$  表示支流河道中第 2 断面的  $u$  流速水位节点向量。系数矩阵  $A1_{2n+1} \rightarrow F1_{2n+1}$  单一河道离散中已经给出,  $P1_{2n+1}$ ,  $Q1_{2n+1}$  表达如下:

$$P1_{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p_{M,(2n-2LI+2)} & \dots & 0 \end{bmatrix}_{M \times M_2} \quad p_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{2n+1,2m}^5 & i = M, j = 2n - 2LI + 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$Q1_{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q_{M,(2n-2LI+2)} & \dots & 0 \end{bmatrix}_{M \times M_2} \quad q_{i,j} = \begin{cases} \beta_{2n+1,2m}^4 & i = M, j = 2n - 2LI + 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

### 5.2.2 $u$ 动量方程的离散

与连续方程的离散类似，汊道处以外的节点离散和单一河道相同，当  $m = M$  时  $u$  速度节点需要和支流节点一起离散，离散示意图见下图 5-3。结合该图可知，动量方程在汊道处离散过程与单一河道的离散差别在于  $\frac{v}{g_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}$ ,  $\frac{uv}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta}$ ,  $\frac{v^2}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi}$ ,  $f\nu$  这三个与支流相应节点有关的项的离散，其余项的离散与单一河道相同，在  $u_{2n,2M}$  点对这三项的离散过程如下：

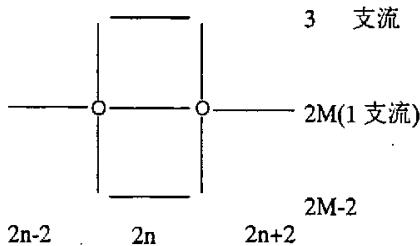


图 5-3 边界  $u$  流速节点离散示意图

①、 $\frac{v}{g_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}$  的离散

$$\frac{v}{g_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{v_{2n,2M}^0}{(g_\eta)_{2n,2M}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \xrightarrow{\text{采用逆风格式}} = \frac{v_{2n,2M}^0 - ku_{2n,2M-2} + (2k-1)u_{2n,2M} + (1-k)v_{3,(2n-2L+1)}^2}{(g_\eta)_{2n,2M} \Delta \eta}$$

(5-5)

$$v_{2n,2M}^0 = (v_{2n-1,2M-1}^0 + v_{2n+1,2M-1}^0 + v_{2n-1,2M+1}^0 + v_{2n+1,2M+1}^0) * 0.25 \quad k = \begin{cases} 1.0 & v_{2n,2M}^0 > 0 \\ 0.5 & v_{2n,2M}^0 = 0 \\ 0.0 & v_{2n,2M}^0 < 0 \end{cases}$$

②、 $\frac{uv}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta} - \frac{v^2}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi} - f\nu$  的离散

$$\frac{uv}{J} \frac{\partial g_\xi}{\partial \eta} = \frac{u_{2n,2M}^0 v_{2n,2M}^0}{J_{2n,2M}} * \frac{(g_\xi)_{2n,2M+1} - (g_\xi)_{2n,2M-1}}{\Delta \eta}$$

$$\frac{v^2}{J} \frac{\partial g_\eta}{\partial \xi} = \frac{v_{2n,2M}^0 v_{2n,2M}^0}{J_{2n,2M}} * \frac{(g_\eta)_{2n+1,2M} - (g_\eta)_{2n-1,2M}}{\Delta \xi} \quad (5-6)$$

$$f\nu = f\nu_{2n,2M}$$

$$v_{2n,2M}^0 = (v_{2n-1,2M-1}^0 + v_{2n+1,2M-1}^0 + u_{2,(2n-2L+1)}^2 + u_{2,(2n-2L+2)}^2) * 0.25$$

其中  $u_{2,(2n-2LI)}^2$  表示支流中  $(2, 2n - 2LI)$  节点上的  $u$  流速,  $v_{3,(2n-2LI+1)}^2$  表示支流中  $(3, 2n - 2LI + 1)$  节点上的  $v$  流速, 其余符号意义与前同。结合 (4-19), (4-20), (4-23) 以及 (5-5), (5-6) 式可以得出  $u$  动量方程在  $u_{2n,2M}$  节点的离散方程:

$$\begin{aligned} & f(z_{2n-1,2M}, z_{2n+1,2M}, u_{2n,2M}, u_{2n-2,2M}, u_{2n+2,2M}, \\ & u_{2n,2M-2}, v_{3,(2n-2LI+1)}^2, v_{2n-1,2M-1} + v_{2n+1,2M-1} + u_{2,(2n-2LI)}^2 + u_{2,(2n-2LI+2)}^2) = \Psi_{2n,2M} \end{aligned} \quad (5-7)$$

表达式中的各变量的系数由以上离散公式给出。则此时构造出的形如 (4-25) 式的矩阵方程组为:

$$\begin{aligned} & A2_{2n}Z_{2n-1} + B2_{2n}Z_{2n+1} + C2_{2n}U_{2n-2} + D2_{2n}U_{2n} \\ & E2_{2n}U_{2n+2} + F2_{2n}V_{2n-1} + G2_{2n}V_{2n+1} + R2_{2n}V_3^2 + Q2_{2n}U_2^2 = H2_{2n} \end{aligned} \quad (5-8)$$

其中:  $V_3^2$  表示支流河道中第 3 断面的  $v$  流速节点向量,  $U_2^2$  表示支流河道中第 2 断面的  $u$  流速水位节点向量。系数矩阵  $A2_{2n} \rightarrow G2_{2n}$  单一河道离散中已经给出,  $P2_{2n}$ ,  $Q2_{2n}$  表达如下:

$$R2_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & r_{M,(2n-2LI+1)} & \dots & 0 \end{bmatrix}_{M \times (M_2-1)}$$

$$r_{i,j} = \begin{cases} \text{前述的 } v_{3,(2n-2LI+1)}^2 \text{ 前的系数} & i = M, j = 2n - 2LI + 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$Q2_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q_{M,(2n-2LI)} & q_{M,(2n-2LI+2)} & \dots & 0 \end{bmatrix}_{M \times M_2}$$

$$q_{i,j} = \begin{cases} \text{前述的 } u_{2,(2n-2LI)}^2 \text{ 或 } u_{2,(2n-2LI+1)}^2 \text{ 前的系数} & i = M, j = 2n - 2LI + 2 \text{ 或 } j = 2n - 2LI \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

### 5.2.3 $v$ 动量方程的离散

当  $m = M - 1$  时  $v$  速度节点需要和支流节点一起离散, 离散示意图见下图 5-4。结合该图可知, 动量方程在汊道处离散过程与单一河道的离散差别在于

$\frac{v}{g_\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta}$  这一项与支流相应节点有关的项的离散, 其

余项的离散与单一河道相同, 在  $v_{2n+1,2M-1}$  点对该项的离散过程如下:

①、 $\frac{v}{g_\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta}$  的离散

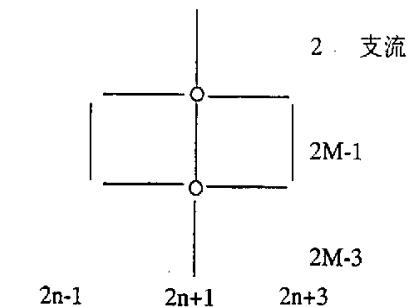


图 5-4 边界  $v$  流速节点离散示意图

$$\frac{v}{g_\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{v_{2n+1,2M-1}^0}{(g_\eta)_{2n+1,2M-1}} \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$\xrightarrow{\text{采用逆风格式}} = \frac{v_{2n+1,2M-1}^0 - kv_{2n+1,2M-3} + (2k-1)v_{2n+1,2M-1} + (1-k)u_{2,(2n-2LI+2)}^2}{\Delta \eta} \quad (5-9)$$

$$k = \begin{cases} 1.0 & v_{2n+1,2M-1}^0 > 0 \\ 0.5 & v_{2n+1,2M-1}^0 = 0 \\ 0.0 & v_{2n+1,2M-1}^0 < 0 \end{cases}$$

其中  $u_{2,(2n-2LI+2)}^2$  表示支流中  $(2, 2n-2LI+2)$  节点上的  $u$  流速, 其余符号意义与前同。结合 (4-28), (4-29), (4-31), (4-32) 以及 (5-9) 式可以得出  $v$  动量方程在  $v_{2n+1,2M-1}$  节点的离散方程:

$$f(z_{2n+1,2M-2}, z_{2n+1,2M}, u_{2n,2M-2}, u_{2n,2M}, u_{2n+2,2M-2}, v_{2n-1,2M-1}, v_{2n+1,2M-1}, v_{2n+3,2M-1}, v_{2n+1,2M-3}, u_{2,(2n-2LI+2)}^2) = \Omega_{2n+1,2M-1} \quad (5-10)$$

表达式中的各变量的系数由以上离散公式给出。则此时构造出的形如 (4-34) 式的矩阵方程组为:

$$A3_{2n+1}Z_{2n+1} + B3_{2n+1}U_{2n} + C3_{2n+1}U_{2n+2} + D3_{2n+1}V_{2n-1} + E3_{2n+1}V_{2n+1} + F3_{2n+1}V_{2n+3} + Q3_{2n+1}U_2^2 = H3_{2n+1} \quad (5-11)$$

其中  $U_2^2$  表示支流河道中第 2 断面的  $u$  流速水位节点向量。系数矩阵  $A3_{2n+1} \rightarrow F3_{2n+1}$  单

一河道离散中已经给出,  $P3_{2n+1}$  表达如下:

$$Q3_{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q_{(M-1),(2n-2LI+1)} & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(M-1) \times M_2}$$

$$q_{i,j} = \begin{cases} \text{前述的 } u_{3,(2n-2LI+2)}^2 \text{ 前的系数 } i = M - 1, j = 2n - 2LI + 2 \\ 0 \quad \text{其他} \end{cases}$$

至此, “树状” 河道单元与单一河道离散的差别之处已经由上述过程给出, 河网结合处以外的节点离散均与单一河道相同。

### 5.3 矩阵追赶

“树状” 河道单元的矩阵追赶过程与单一河道类似, 主河道中从起始断面到汊道处开始处 ( $n <= LI$ ) 的追赶过程与单一河道完全相同, 追赶过程参见 (4-37) – (4-42) 式。当  $n > LI$  时, 由上述的离散过程可知, 此时的追赶过程将要考虑到支流要素的影响。则从汊道处开始直到主河道末断面的追赶过程如下:

$$\begin{aligned} U_{2n} = & P2_{2n}Z_{2n+1} + Q2_{2n}U_{2n+2} + R2_{2n}V_{2n+1} + I2_{2n}Z1 + K2_{2n} \\ & + P2_{2n}^2Z_3^2 + Q2_{2n}^2U_2^2 + R2_{2n}^2V_3^2 \end{aligned} \quad (5-12)$$

上式中  $P2_{2n} \rightarrow K2_{2n}$  的系数已经由单一河道的追赶过程给出, 具体见 (4-40) 式, 按照类似的方法, 将与支流河道变量相关的系数表达如下:

$$\begin{aligned} P2_{2n}^2 = & -\frac{C2_{2n} * P2_{2n-2}^2 + KKK2_{2n} * P3_{2n-1}^2 + TTT2_{2n} * P1_{2n-1}^2}{AH2_{2n}} \\ Q2_{2n}^2 = & -\frac{C2_{2n} * Q2_{2n-2}^2 + KKK2_{2n} * Q3_{2n-1}^2 + TTT2_{2n} * Q1_{2n-1}^2 + Q2_{2n}}{AH2_{2n}} \\ R2_{2n}^2 = & -\frac{C2_{2n} * R2_{2n-2}^2 + KKK2_{2n} * R3_{2n-1}^2 + TTT2_{2n} * R1_{2n-1}^2 + R2_{2n}}{AH2_{2n}} \end{aligned}$$

采用上面相同的方法, 可以构造另外的两组追赶方程:

$$\begin{aligned} V_{2n+1} = & P3_{2n+1}Z_{2n+1} + Q3_{2n+1}U_{2n+2} + R3_{2n+1}V_{2n+3} + I3_{2n+1}Z1 + K3_{2n+1} \\ & + P3_{2n+1}^2Z_3^2 + Q3_{2n+1}^2U_2^2 + R3_{2n+1}^2V_3^2 \end{aligned} \quad (5-13)$$

其中:

$$P3_{2n+1}^2 = -\frac{D3_{2n+1} * P3_{2n-1}^2 + KKK3_{2n+1} * P1_{2n-1}^2 + TTT3_{2n+1} * P2_{2n}^2}{AH3_{2n+1}}$$

$$\begin{aligned}
 Q3_{2n+1}^2 &= -\frac{D3_{2n+1} * Q3_{2n-1}^2 + KKK3_{2n+1} * Q1_{2n-1}^2 + TTT3_{2n+1} * Q2_{2n}^2 + Q3_{2n+1}}{AH3_{2n+1}} \\
 R3_{2n+1}^2 &= -\frac{D3_{2n+1} * R3_{2n-1}^2 + KKK3_{2n+1} * R1_{2n-1}^2 + TTT3_{2n+1} * R2_{2n}^2}{AH3_{2n+1}} \\
 Z_{2n+1} &= P1_{2n+1}Z_{2n+3} + Q1_{2n+1}U_{2n+2} + R1_{2n+1}V_{2n+3} + I1_{2n+1}Z1 + K1_{2n+1} \\
 &\quad + P1_{2n+1}^2Z_3^2 + Q1_{2n+1}^2U_2^2 + R1_{2n+1}^2V_3^2
 \end{aligned} \tag{5-14}$$

其中：

$$\begin{aligned}
 P1_{2n+1}^2 &= -\frac{A1_{2n+1} * P1_{2n-1}^2 + KKK1_{2n+1} * P2_{2n}^2 + TTT1_{2n+1} * P3_{2n+1}^2 + P1_{2n+1}}{AH1_{2n+1}} \\
 Q1_{2n+1}^2 &= -\frac{A1_{2n+1} * Q1_{2n-1}^2 + KKK1_{2n+1} * Q2_{2n}^2 + TTT1_{2n+1} * Q3_{2n+1}^2 + Q1_{2n+1}}{AH1_{2n+1}} \\
 R1_{2n+1}^2 &= -\frac{A1_{2n+1} * R1_{2n-1}^2 + KKK1_{2n+1} * R2_{2n}^2 + TTT1_{2n+1} * R3_{2n+1}^2}{AH1_{2n+1}}
 \end{aligned}$$

## 5.4 主河道回代求解

采用上述矩阵追赶方法，直到  $n = N$  断面，由边界条件可知  $Z_{2N+1}$  为已知向量，  
 $V_{2N+1} = 0$ ，由公式(4-27)中的对称假定  $U_{2N+2} = U_{2N}$ ，利用公式(5-12)可以将  $U_{2N}$  表达成：

$$U_{2N} = CIA2_{2N}Z1 + CIB2_{2N}Z2 + CK2_{2N} + CP2_{2N}Z_3^2 + CQ2_{2N}U_2^2 + CR2_{2N}V_3^2 \tag{5-15}$$

前面的系数由(4-43)给出，与支流变量相关的系数为：

$$CP2_{2N} = \frac{P2_{2N}^2}{E - Q2_{2N}} \quad CQ2_{2N} = \frac{Q2_{2N}^2}{E - Q2_{2N}} \quad CR2_{2N} = \frac{R2_{2N}^2}{E - Q2_{2N}} \quad E \text{ 为单位阵}$$

将(5-15)式代入(5-14)，得到关于  $Z_{2N-1}$  的表达式：

$$\begin{aligned}
 Z_{2N-1} &= CIA1_{2N-1}Z1 + CIB1_{2N-1}Z2 + CK1_{2N-1} + \\
 &\quad CPI_{2N-1}Z_3^2 + CQ1_{2N-1}U_2^2 + CR1_{2N-1}V_3^2
 \end{aligned} \tag{5-16}$$

其中：

$$CPI_{2N-1} = P1_{(2N-1)z}^2 + Q1_{2N-1} * CP2_{2N} \quad CQ1_{2N-1} = Q1_{(2N-1)z}^2 + Q1_{2N-1} * CQ2_{2N}$$

$$CR1_{2N-1} = R1_{2N-1}^2 + Q1_{2N-1} * CR2_{2N}$$

将((5-15)、(5-16))代入(5-13)中有：

$$\begin{aligned}
 V_{2N-1} &= CIA3_{2N-1}Z1 + CIB3_{2N-1}Z2 + CK3_{2N-1} + \\
 &\quad CP3_{2N-1}Z_3^2 + CQ3_{2N-1}U_2^2 + CR3_{2N-1}V_3^2
 \end{aligned} \tag{5-17}$$

其中：

$$CP3_{2N-1} = P3_{2N-1}^2 + Q3_{2N-1} * CP2_{2N} + P3_{2N-1} * CPI_{2N-1}$$

$$CQ3_{2n-1} = Q3_{2n-1}^2 + Q3_{2n-1} * CQ2_{2n} + P3_{2n-1} * CQ1_{2n-1}$$

$$CR3_{2n-1} = R3_{2n-1}^2 + Q3_{2n-1} * CR2_{2n} + P3_{2n-1} * CR1_{2n-1}$$

(5-15)~(5-17)的回代过程将  $U_{2n}$ ,  $Z_{2n-1}$ ,  $V_{2n-1}$  均表达成了主河道首末断面的水位  $Z_1$ ,  $Z_{2n+1}$  以及汊道变量  $U_2^2$ ,  $Z_3^2$ ,  $V_3^2$  关系式。采用相同的方式逐步回代, 可以得到如下表达式:

$$U_{2n} = CIA2_{2n}Z1 + CIB2_{2n}Z2 + CK2_{2n} + CP2_{2n}Z_3^2 + CQ2_{2n}U_2^2 + CR2_{2n}V_3^2 \quad (5-18)$$

其中:

$$CP2_{2n} = P2_{2n}CP1_{2n+1} + Q2_{2n}CP2_{2n+2} + R2_{2n}CP3_{2n+1} + P2_{2n}^2$$

$$CQ2_{2n} = P2_{2n}CQ1_{2n+1} + Q2_{2n}CQ2_{2n+2} + R2_{2n}CQ3_{2n+1} + Q2_{2n}^2$$

$$CR2_{2n} = P2_{2n}CR1_{2n+1} + Q2_{2n}CR2_{2n+2} + R2_{2n}CR3_{2n+1} + R2_{2n}^2$$

$$Z_{2n-1} = CIA1_{2n-1}Z1 + CIB1_{2n-1}Z2 + CK1_{2n-1} + \\ CP1_{2n-1}Z_3^2 + CQ1_{2n-1}U_2^2 + CR1_{2n-1}V_3^2 \quad (5-19)$$

其中:

$$CP1_{2n-1} = P1_{2n-1}CP1_{2n+1} + Q1_{2n-1}CP2_{2n} + R1_{2n-1}CP3_{2n+1} + P1_{2n-1}^2$$

$$CQ1_{2n-1} = P1_{2n-1}CQ1_{2n+1} + Q1_{2n-1}CQ2_{2n} + R1_{2n-1}CQ3_{2n+1} + Q1_{2n-1}^2$$

$$CR1_{2n-1} = P1_{2n-1}CR1_{2n+1} + Q1_{2n-1}CR2_{2n} + R1_{2n-1}CR3_{2n+1} + R1_{2n-1}^2$$

$$V_{2n-1} = CIA3_{2n-1}Z1 + CIB3_{2n-1}Z2 + CK3_{2n-1} + \\ CP3_{2n-1}Z_3^2 + CQ3_{2n-1}U_2^2 + CR3_{2n-1}V_3^2 \quad (5-20)$$

其中:

$$CP3_{2n-1} = P3_{2n-1}CP1_{2n-1} + Q3_{2n-1}CP2_{2n} + R3_{2n-1}CP3_{2n+1} + P3_{2n-1}^3$$

$$CQ3_{2n-1} = P3_{2n-1}CQ1_{2n-1} + Q3_{2n-1}CQ2_{2n} + R3_{2n-1}CQ3_{2n+1} + Q3_{2n-1}^3$$

$$CR3_{2n-1} = P3_{2n-1}CR1_{2n-1} + Q3_{2n-1}CR2_{2n} + R3_{2n-1}CR3_{2n+1} + R3_{2n-1}^3$$

(5-18)~(5-20)式中的其他系数与单一河道回代过程中的相同, 具体见(4-46)~(4-48)式。重复以上回代过程, 直到  $n = LI$  时停止回代过程, 此时主河道中  $2LI$  至末断面的所有节点上的未知水位和流速都表达成了主河道首末断面水位以及汊道变量的线性关系, 见图 5-5:

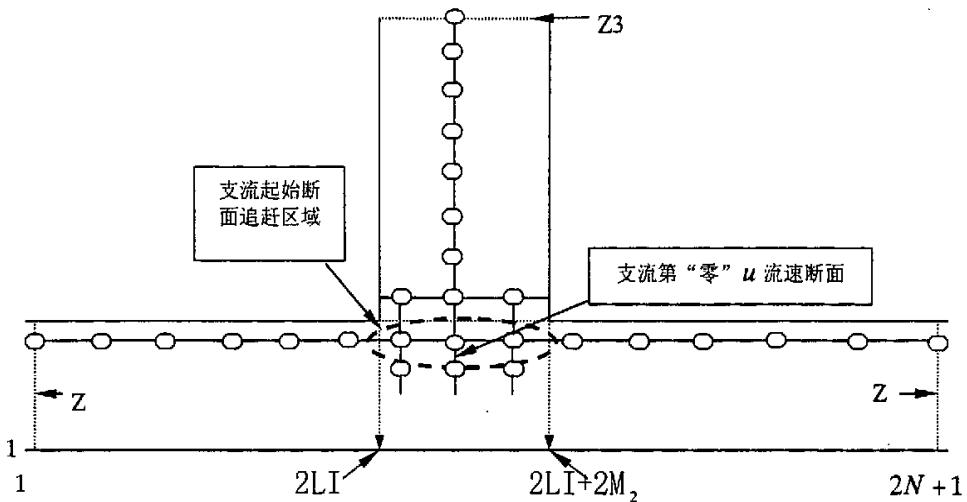


图 5-5 分汊河道关联示意图

## 5.5 支流的追赶与回代

### 5.5.1 支流起始追赶公式的构造

主河道  $2LI \rightarrow 2LI + 2M_2$  范围内的水位和流速变量也表达成了  $Z_1, Z_{2N+1}$  以及汊道变量  $U_2^2, Z_3^2, V_3^2$  的关系式, 由上图可知支流的第一断面水位节点与主河道的边界垂线上的水位节点重合; 支流第一断面的  $v$  流速节点与主河道边界垂线上的  $u$  流速节点重合; 支流第“零”断面的  $u$  流速节点与主河道边界垂线上的  $v$  流速节点重合, 单一河道离散过程中对第二断面的  $u$  流速的离散采用了对称假定而虚设了一个第“零”断面, 详见第四章相关论述, 这里的第“零”断面并不包括在支流河道中, 而是作为第二断面的  $u$  流速离散时的补充条件。由此可以构造出支流河道起始的追赶关系式, 将主河道  $2LI \rightarrow 2LI + 2M_2$  范围内的边界上的水位节点, 流速节点分别组成向量, 由(5-15)–(5-17)式可知这三个向量也可以表达成主河道首末断面水位以及汊道变量的线性关系, 表达如下:

支流第一断面的水位向量由主河道相应节点上的水位节点元素构成:

$$Z_1^2 = \begin{bmatrix} Z_{1,2}^2 \\ Z_{1,4}^2 \\ \dots \\ Z_{1,2M_2}^2 \end{bmatrix}_{M_2 \times 1} = \begin{bmatrix} Z_{2LI+1,2M} \\ Z_{2LI+3,2M} \\ \dots \\ Z_{2LI+2M_2-1,2M} \end{bmatrix}_{M_2 \times 1} \quad (5-21)$$

$$= P1_1^2 Z_3^2 + Q1_1^2 U_2^2 + R1_1^2 V_3^2 + I1_1^2 Z1 + IB1_1^2 Z2 + K1_1^2$$

支流第一断面的 $v$ 流速向量由主河道相应节点上的 $u$ 流速元素构成，考虑到在支流河道中由边界条件假设的不可入条件，边界 $v$ 速度为0，故 $v_{2n+1,1} = 0$ ,  $v_{2n+1,2M_2+1} = 0$ ：

$$V_1^2 = \begin{bmatrix} v_{1,3}^2 \\ v_{1,5}^2 \\ \dots \\ v_{1,2M_2-1}^2 \end{bmatrix}_{(M_2-1) \times 1} = \begin{bmatrix} u_{2LI+2,2M} \\ u_{2LI+4,2M} \\ \dots \\ u_{2LI+2M_2-2,2M} \end{bmatrix}_{(M_2-1) \times 1} \quad (5-22)$$

$$= P3_1^2 Z_3^2 + Q3_1^2 U_2^2 + R3_1^2 V_3^2 + LA3_1^2 Z1 + IB3_1^2 Z2 + K3_1^2$$

支流第零断面的 $u$ 流速向量由主河道相应节点上的 $v$ 流速元素构成：

$$U_0^2 = \begin{bmatrix} u_{0,2}^2 \\ u_{0,4}^2 \\ \dots \\ u_{0,2M_2}^2 \end{bmatrix}_{M_2 \times 1} = \begin{bmatrix} v_{2LI+1,2M-1} \\ v_{2LI+3,2M-1} \\ \dots \\ v_{2LI+2M_2-1,2M-1} \end{bmatrix}_{M_2 \times 1} \quad (5-23)$$

$$= P2_0^2 Z_3^2 + Q2_0^2 U_2^2 + R2_0^2 V_3^2 + LA2_0^2 Z1 + IB2_0^2 Z2 + K2_0^2$$

以上各系数矩阵可以由主河道中对应节点的系数组合而得。

### 5.5.2 支流的离散

支流的离散过程与主河道完全相同，这里不再累述，详细的推导过程见第四章。

### 5.5.3 支流的矩阵追赶

支流的矩阵追赶过程与主河道的追赶过程的唯一差别在于首断面的追赶，其余的部分与主河道完全相同，以下为首断面追赶公式的建立过程。

#### a. 第二断面 $u$ 速度节点的离散

由(4-24)式，支流河道上 $u_{2,2m}^2$ 节点的离散方程为：

$$f(z_{1,2m}^2, z_{3,2m}^2, u_{2,2m}^2, u_{0,2m}^2, u_{4,2m}^2, u_{2,2m-2}^2, u_{2,2m+2}^2, v_{1,2m-1}^2, v_{1,2m+1}^2, v_{3,2m-1}^2, v_{3,2m+1}^2) = \Psi_{2,2m}^2 \quad (5-24)$$

对支流河道第二断面 $M_2$ 个 $u$ 流速节点采用(5-24)式的离散，可以构造出 $M_2$ 个方程，组合这 $M_2$ 个方程，构成一个矩阵方程：

$$A2_2^2 Z_1^2 + B2_2^2 Z_3^2 + C2_2^2 U_0^2 + D2_2^2 U_2^2 + E2_2^2 U_4^2 + F2_2^2 V_1^2 + G2_2^2 V_3^2 = H2_2^2 \quad (5-25)$$

将(5-21)、(5-22)、(5-23)代入(5-22)式，整理后得到：

$$U_2^2 = P2_2^2 Z_3^2 + Q2_2^2 U_4^2 + R2_2^2 V_3^2 + LA2_2^2 Z1 + IB2_2^2 Z2 + K2_2^2 \quad (5-26)$$

其中：

$$P2_2^2 = -\frac{B}{A} \quad Q2_2^2 = -\frac{E2_2^2}{A}$$

$$R2_2^2 = -\frac{C}{A} \quad LA2_2^2 = -\frac{D}{A}$$

$$IB2_2^2 = -\frac{E}{A} \quad K2_2^2 = -\frac{F}{A}$$

$$A = D2_2^2 + A2_2^2Q1_1^2 + C2_2^2Q2_0^2 + F2_2^2Q3_1^2$$

$$B = B2_2^2 + A2_2^2P1_1^2 + C2_2^2P2_0^2 + F2_2^2P3_1^2$$

$$C = G2_2^2 + A2_2^2R1_1^2 + C2_2^2R2_0^2 + F2_2^2R3_1^2$$

$$D = A2_2^2LA1_1^2 + C2_2^2LA2_0^2 + F2_2^2LA3_1^2$$

$$E = A2_2^2IB1_1^2 + C2_2^2IB2_0^2 + F2_2^2IB3_1^2$$

$$F = -H2_2^2 + A2_2^2K1_1^2 + C2_2^2K2_0^2 + F2_2^2K3_1^2$$

b. 第三断面  $v$  速度节点的离散

由(4-33)式，支流河道上  $v_{3,2m+1}^2$  节点的离散方程为：

$$f(z_{3,2m}^2, z_{3,2m+2}^2, u_{2,2m}^2, u_{2,2m+2}^2, u_{4,2m}^2, u_{4,2m+2}^2, v_{1,2m+1}^2, v_{3,2m+1}^2, v_{5,2m+1}^2, v_{3,2m-1}^2, v_{3,2m+3}^2) = \Omega_{3,2m+1}^2 \quad (5-27)$$

对支流河道第三断面  $M_2 - 1$  个  $v$  流速节点采用(5-27)式的离散，可以构造出  $M_2 - 1$  个方程，组合这  $M$  个方程，构成一个矩阵方程：

$$A3_3^2Z_3^2 + B3_3^2U_2^2 + C3_3^2U_4^2 + D3_3^2V_1^2 + E3_3^2V_3^2 + F3_3^2V_5^2 = H3_3^2 \quad (5-28)$$

将(5-21)、(5-22)、(5-26)代入(5-28)式，整理后得到：

$$V_3^2 = P3_3^2Z_3^2 + Q3_3^2U_4^2 + R3_3^2V_5^2 + LA3_3^2Z1 + IB3_3^2Z2 + K3_3^2 \quad (5-29)$$

其中：

$$P3_3^2 = -\frac{B}{A} \quad Q3_3^2 = -\frac{C}{A}$$

$$R3_3^2 = -\frac{F3_3^2}{A} \quad LA3_3^2 = -\frac{D}{A}$$

$$IB3_3^2 = -\frac{E}{A} \quad K3_3^2 = -\frac{F}{A}$$

$$KU = D3_3^2Q3_1^2 + B3_3^2$$

$$\begin{aligned}
 A &= E3_3^2 + R2_2^2 KU + D3_3^2 R3_1^2 \\
 B &= A3_3^2 + P2_2^2 KU + D3_3^2 P3_1^2 \\
 C &= C3_3^2 + Q2_2^2 KU \\
 D &= LA2_2^2 KU + D3_3^2 LA3_1^2 \\
 E &= IB2_2^2 KU + D3_3^2 IB3_1^2 \\
 F &= -H3_3^2 + K2_2^2 KU + D3_3^2 K3_1^2
 \end{aligned}$$

### c. 第三断面水位节点的离散

由(4-17)式, 支流河道上 $z_{3,2m}^2$ 节点的离散方程为:

$$\begin{aligned}
 f(z_{1,2m}^2, z_{3,2m}^2, z_{5,2m}^2, z_{3,2m-2}^2, z_{3,2m+2}^2, \\
 u_{2,2m}^2, u_{4,2m}^2, v_{3,2m-1}^2, v_{3,2m+1}^2) = \Phi_{3,2m}^2
 \end{aligned} \tag{5-30}$$

对支流河道第三断面 $M_2$ 个水位节点采用(5-30)式的离散, 可以构造出 $M_2$ 个方程, 组合这 $M_2$ 个方程, 构成一个矩阵方程:

$$A1_3^2 Z_1^2 + B1_3^2 Z_3^2 + C1_3^2 Z_5^2 + D1_3^2 U_2^2 + E1_3^2 U_4^2 + F1_3^2 V_3^2 = H1_3^2 \tag{5-31}$$

将(5-21)、(5-26)、(5-28)代入(5-31)式, 整理后得到:

$$Z_3^2 = P1_3^2 Z_5^2 + Q1_3^2 U_4^2 + R1_3^2 V_5^2 + LA1_3^2 Z_1 + IB1_3^2 Z_2 + K1_3^2 \tag{5-32}$$

其中:

$$P1_3^2 = -\frac{C1_3^2}{A} \quad Q1_3^2 = -\frac{B}{A}$$

$$R1_3^2 = -\frac{C}{A} \quad LA1_3^2 = -\frac{D}{A}$$

$$IB1_3^2 = -\frac{E}{A} \quad K1_3^2 = -\frac{F}{A}$$

$$KU = D1_3^2 + A1_3^2 Q1_1^2$$

$$KV = F1_3^2 + A1_3^2 R1_1^2 + R2_2^2 KU$$

$$A = B1_3^2 + A1_3^2 P1_1^2 + P2_2^2 KU + P3_2^2 KV$$

$$B = E1_3^2 + Q2_2^2 KU + Q3_3^2 KV$$

$$C = R3_3^2 KV$$

$$D = A1_3^2 LA1_1^2 + IA2_2^2 KU + IA3_3^2 KV$$

$$E = A1_3^2 IB1_1^2 + IB2_2^2 KU + IB3_3^2 KV$$

$$F = -H3_3^2 + A1_3^2 K1_1^2 + K2_2^2 KU + K3_3^2 KV$$

支流河道在汊道口的三个向量的追赶过程如上述过程, 以下的追赶过程和主河道完全

相同，这里不再累述。

#### 5.5.4 支流的回代

支流的回代方法和主河道相同，差别在于支流河道的未知向量表达为四个量的线性表达式：主河道首末断面水位  $Z_1, Z_2$ ，支流河道末断面水位  $Z_3$  以及常数项。这里仅给出回代表达式，详细的回代方法见第四章。

$$\begin{aligned} Z_{2n+1}^2 &= CIA_{2n+1}^2 Z_1 + CIB_{2n+1}^2 Z_2 + CIC_{2n+1}^2 Z_3 + CK_{2n+1}^2 \\ U_{2n}^2 &= CIA_{2n}^2 Z_1 + CIB_{2n}^2 Z_2 + CIC_{2n}^2 Z_3 + CK_{2n}^2 \\ V_{2n+1}^2 &= CIA_{2n+1}^2 Z_1 + CIB_{2n+1}^2 Z_2 + CIC_{2n+1}^2 Z_3 + CK_{2n+1}^2 \end{aligned} \quad (5-33)$$

#### 5.6 主河道的最终回代求解

由(5-33)确定的支流最终的回代表达式可以得出与主河道相关的三个汊道变量的表达式如下：

$$\begin{aligned} Z_3^2 &= CIA_3^2 Z_1 + CIB_3^2 Z_2 + CIC_3^2 Z_3 + CK_3^2 \\ U_2^2 &= CIA_2^2 Z_1 + CIB_2^2 Z_2 + CIC_2^2 Z_3 + CK_2^2 \\ V_3^2 &= CIA_3^2 Z_1 + CIB_3^2 Z_2 + CIC_3^2 Z_3 + CK_3^2 \end{aligned} \quad (5-34)$$

将(5-33)式分别代入(5-18)、(5-18)、(5-20)中，就可以将主河道  $2LI \rightarrow 2N+1$  范围内所有断面未知向量表达成主河道首末断面水位  $Z_1, Z_2$ 、支流河道末断面水位  $Z_3$  以及常数项的线性关系式，表示为如下形式：

$$\begin{aligned} Z_{2n+1} &= CIA_{2n+1} Z_1 + CIB_{2n+1} Z_2 + CIC_{2n+1} Z_3 + CK_{2n+1} \\ U_{2n} &= CIA_{2n} Z_1 + CIB_{2n} Z_2 + CIC_{2n} Z_3 + CK_{2n} \\ V_{2n+1} &= CIA_{2n+1} Z_1 + CIB_{2n+1} Z_2 + CIC_{2n+1} Z_3 + CK_{2n+1} \end{aligned} \quad (5-35)$$

最后使用单一河道回代中相同的方法回代主河道  $2LI \rightarrow 0$  断面，可以最终将主河道以及支流分别表达成形如(5-34)式以及(5-35)式的表达式，达到要求的形式。

通过以上方法，可以将复杂的“树状”河道单元划分为众多的基本的“树状”河道单元后求解，各单元之间通过水位关系连接，实现了大型“树状”河道单元的二维联解。

#### 5.7 边界水位流量关系的表达

由上述所推导的过程，可以看出所划分的“树状”河道单元中的所有未知变量都已经表达成了“树状”河道单元三个边界水位的线性表达式，有了这个表达式，就可以很容易的将三个边界处的流量表达成边界水位的表达式，这样就达到了“树状”河道单元的计算目标，可以通过流量守恒在边界处与其他计算模型耦合。流量水位表达方式如下，具体的方式与第四章相同。

$$\begin{cases} Q_1 = A1Z1 + A2Z2 + A3Z3 + K1 \\ Q_{2N} = B1Z1 + B2Z2 + B3Z3 + K1 \\ Q_{2N_1} = C1Z1 + C2Z2 + C3Z3 + K1 \end{cases} \quad (5-36)$$

将上式代入到节点水位方程(3-6)即可得到关于“树状”河道单元的整个流域节点水位方程(3-7)。

## 5.8 算例

算例取福建闽江河口“乌龙江大桥—闽安镇”河口处的码头段的整治问题，进行二维水流模拟，网格空间步长约在20~800m之间，采用变步长网格，计算时间步长为10min，曼宁糙率系数取0.016~0.018之间。图5-6为依据第二章的正交曲线网格变换方法而生成的计算网格；图5-7为各水位以及流速测点的布置。图5-8分别为涨急和落急时刻的流场图。其流场分布与滩槽走向一致，基本反映了闽江口河网流速场的实际分布情况。图5-9反映的是两断面的实测流量过程与计算值的对比。图5-10反映各潮流实测值与计算值的对比。

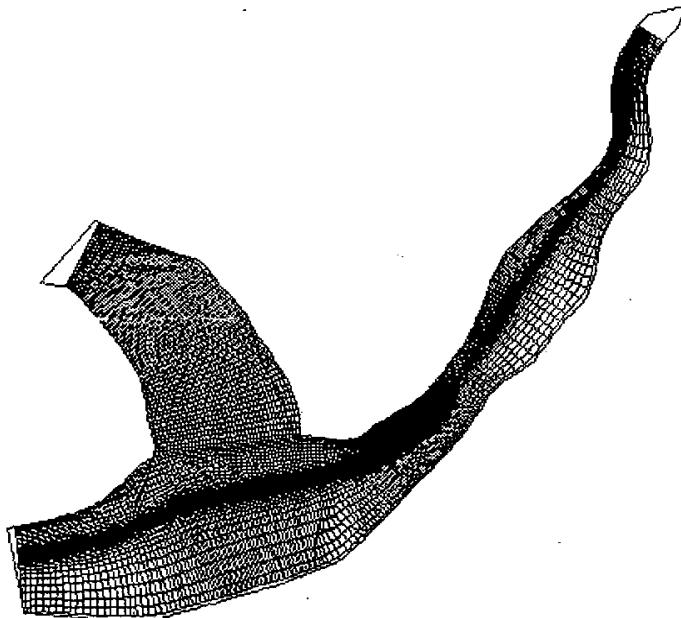


图 5-6 河网正交贴体网格

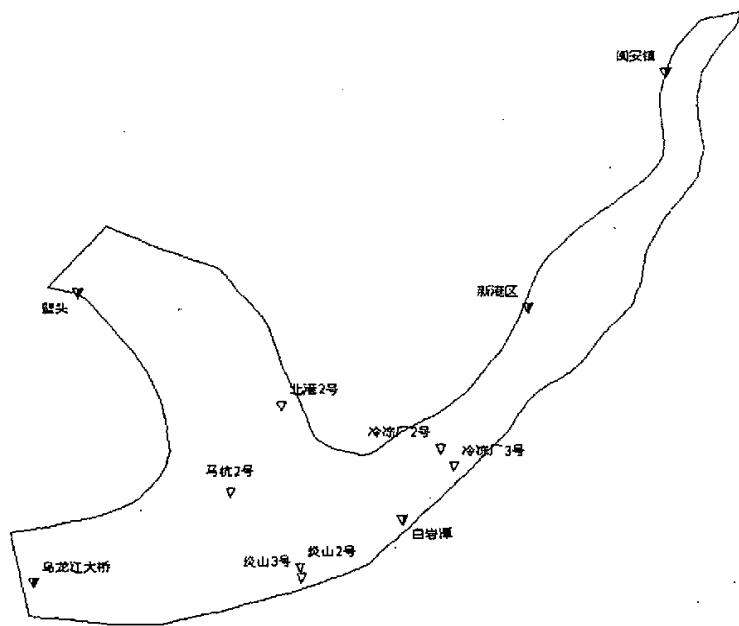


图 5-7 测点布置图

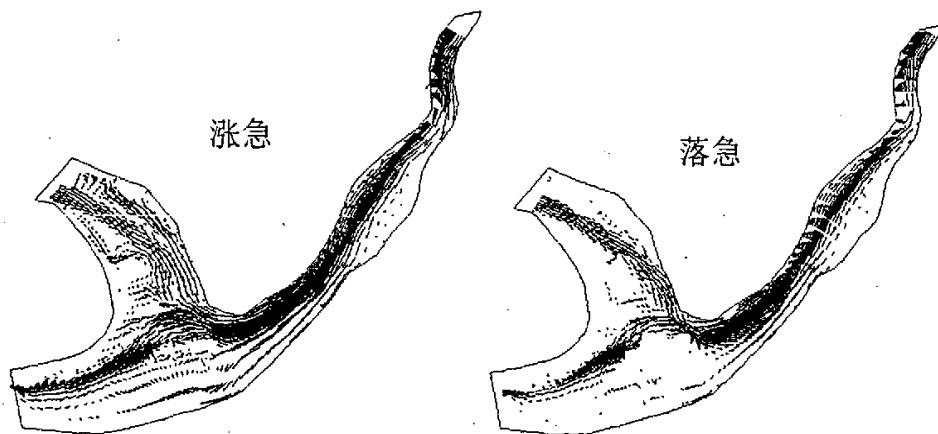


图 5-8 涨急落急流场图

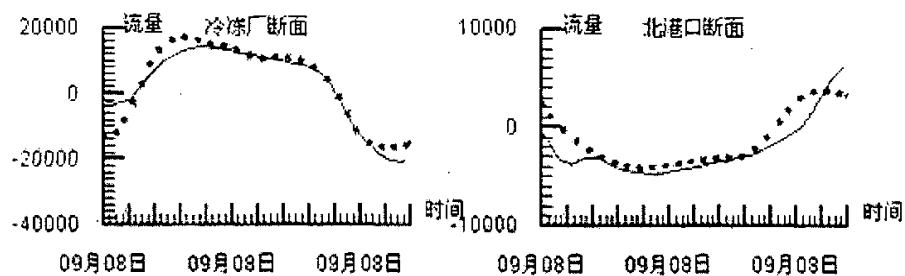


图 5-9 流量对比图

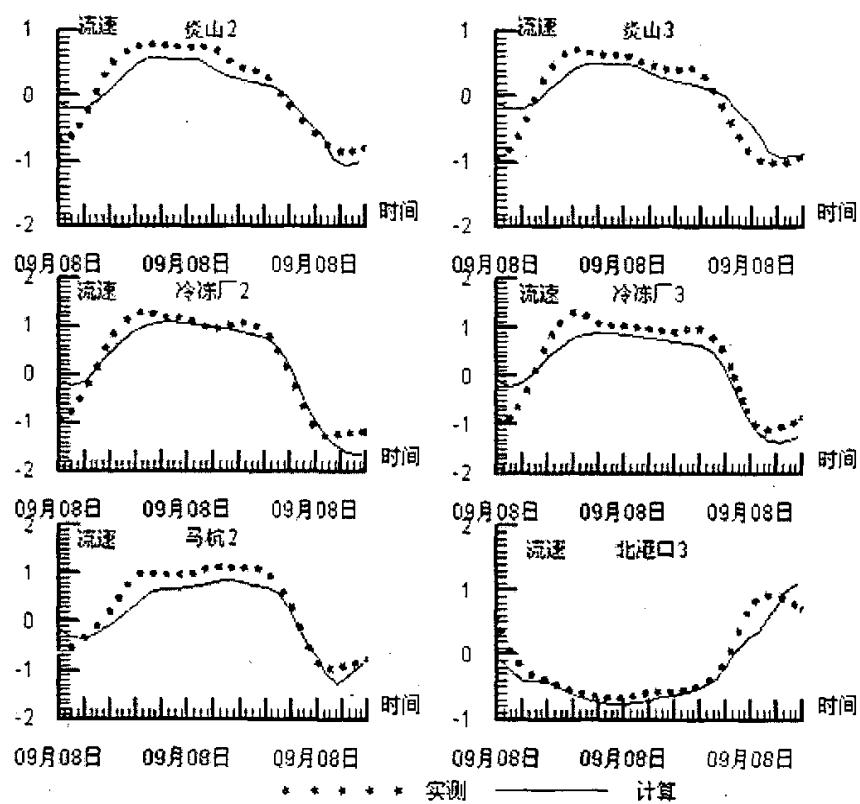


图 5-10 流速与流量对比图

由上述的计算与实测对比可见，实测与计算吻合良好，并利用该模型为基础进行分析，所提出的整治方案，经过近几年的验证，整治效果良好，达到了预期的整治效果，表明了该数学模型格式的精度满足了生产实际的要求。

## 5.9 小结

本文完成了一个通用化的“树状”河道单元平面二维模拟概化模式，通过该单元的求解，方便地将流域二维“树状”河网划分为基本“树状”河道单元，各单元之间通过水位节点关联求解，方便地实现了河网二维的关联以及一河网二维的耦合求解。通过“树状”河道单元二维计算单元求解模型的推导与实现，验证了概化模式的可行性，结果表明该思路可以应用于大型流域河网一、二维水流模拟，具有很好的实用价值。

## 第六章 “环状”河道单元计算模型

### 6.1 概述

本章在第四章和第五章的基础上对“树状”河道单元进行求解。“环状”河道单元的离散在汊道以外的部分和单一河道相同；汊道处的离散与“树状”河道单元的汊道离散相同；在主河道  $0 \rightarrow 2LI$  段的追赶过程与单一河道相同，从  $2LI_2$  断面到末断面的离散与“树状”河道单元相同。“环状”河道单元的求解基本步骤如下，步骤图见图 6-1：

- ①. 采用单一河道的离散方法和追赶方法求解主河道  $0 \rightarrow 2LI$  河段
- ②. 采用“树状”河道单元的离散方法和追赶方法求解主河道  $2LI \rightarrow 2LI_2$  河段；对于主河道  $2LI_2 \rightarrow 2LI_2 + 2M_2$  河段，同样采用“树状”河道单元的离散方式考虑汊道的影响，离散和追赶直到主河道的末断面。
- ③. 采用“树状”河道单元的回代方法回代直到  $2LI_2$  断面，此时主河道中  $2LI_2$  断面至末断面的未知向量表达成了首末断面水位  $Z1, Z2$  以及支流第一汊道变量  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$ ，第二汊道变量  $Z_{2N_2-1}^2, U_{2N_2}^2, V_{2N_2-1}^2$  的线性关系。
- ④. 采用“树状”河道单元中的方法，使用主河道  $2LI_2 \rightarrow 2LI_2 + 2M_2$  范围内的变量构造支流河道的起始追赶方程，离散和追赶支流河道。
- ⑤. 支流河道起始追赶公式中包括  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$ ，支流追赶直到将支流变量表达成  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  和主河道首末断面水位  $Z1, Z2$  时为止，
- ⑥. 回代支流河道，回代到支流末断面，将  $Z_{2N_2-1}^2, U_{2N_2}^2, V_{2N_2-1}^2$  表达成  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  和主河道首末断面水位  $Z1, Z2$  的线性关系。
- ⑦. 将主河道  $2LI_2$  断面至末断面的未知向量中的  $Z_{2N_2-1}^2, U_{2N_2}^2, V_{2N_2-1}^2$  替换。回代  $2LI_2 \rightarrow 2LI$  之间的主河道，此时主河道  $2LI$  至末断面的未知变量都表达成了  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  和主河道首末断面水位  $Z1, Z2$  的线性关系。
- ⑧. 按照单一河道追赶的方法追赶出  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  与  $Z_1^2, U_0^2, V_1^2$  的关系式。而按照“树状”河道单元中的起始断面追赶公式的建立方法，可以将  $Z_1^2, U_0^2, V_1^2$  表达为  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$

与主河道首末断面水位  $Z_1, Z_2$  的线性关系。这样就可以构成一个闭合的关于  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  的方程组，可以求解出  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$ ，将其表达成主河道首末断面水位  $Z_1, Z_2$  的表达式。

- ⑨. 将  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  代入到主河道  $2L_1$  至末断面的未知变量中，可以将这些未知变量表达为首末断面水位  $Z_1, Z_2$  的线性关系，最后回代直到主河道的起始断面，主河道中的所有变量都表达成了首末断面水位  $Z_1, Z_2$  的线性关系；将  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  带入支流河道的回代方程，支流河道中的所有变量也可以表达成首末断面水位  $Z_1, Z_2$  的线性关系，完成“环状”河道单元的计算。

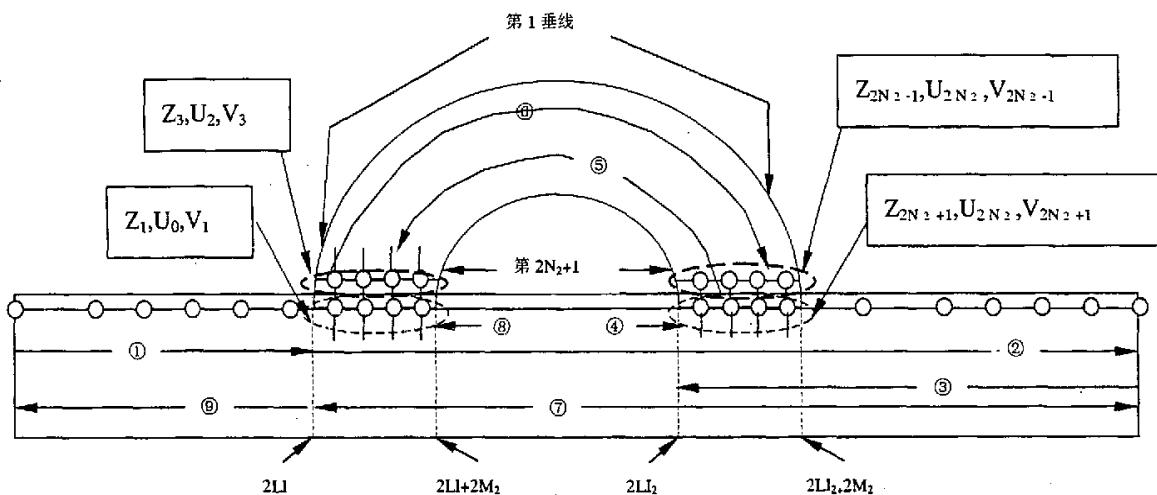


图 6-1 环状河网计算步骤图

以上为“环状”河道单元计算的基本思路，以下则按照这些思路展开论述。

注：上述公式中的系数表达法与第四章同。

## 6.2 主河道方程的离散

对应于基本步骤中的第①、②两步。“环状”河道单元的离散在汊道以外的地方与单一河道的离散相同，在汊道口处的离散方法与“树状”河道单元相同，第一个汊道口处的离散已经在第五章中给出，这里不再介绍。第二个汊道的离散方法与第一个汊道相同，在此区域中与主河道关联的支流变量的向量为  $Z_{2N_2-1}^2, U_{2N_2}^2, V_{2N_2-1}^2$ ，这里只给出离散的公式。

连续方程：

$$\begin{aligned} A1_{2n+1}Z_{2n-1} + B1_{2n+1}Z_{2n+1} + C1_{2n+1}Z_{2n+3} + \\ D1_{2n+1}V_{2n+1} + E1_{2n+1}U_{2n} + F1_{2n+1}U_{2n+2} + P1_{2n+1}Z_{2N_2-1}^2 + Q1_{2n+1}U_{2N_2}^2 = H1_{2n+1} \end{aligned} \quad (6-1)$$

$u$  动量方程:

$$\begin{aligned} A2_{2n}Z_{2n-1} + B2_{2n}Z_{2n+1} + C2_{2n}U_{2n-2} + D2_{2n}U_{2n} + \\ E2_{2n}U_{2n+2} + F2_{2n}V_{2n-1} + G2_{2n}V_{2n+1} + R2_{2n}V_{2N_2-1}^2 + Q2_{2n}U_{2N_2}^2 = H2_{2n} \end{aligned} \quad (6-2)$$

$v$  动量方程:

$$\begin{aligned} A3_{2n+1}Z_{2n+1} + B3_{2n+1}U_{2n} + C3_{2n+1}U_{2n+2} + D3_{2n+1}V_{2n-1} + \\ E3_{2n+1}V_{2n+1} + F3_{2n+1}V_{2n+3} + Q3_{2n+1}U_{2N_2}^2 = H3_{2n+1} \end{aligned} \quad (6-3)$$

### 6.3 主河道方程的追赶

对应于基本步骤中的第②步。追赶方法与单一河道以及“树状”河道单元的追赶相同，这里也就只给出相应的追赶公式，详细的追赶方法见第四章和第五章，追赶分为三段。

$0 \rightarrow 2LI$  断面:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{2n+1} = P1_{2n+1}Z_{2n+3} + Q1_{2n+1}U_{2n+2} + R1_{2n+1}V_{2n+3} + I1_{2n+1}Z1 + K1_{2n+1} \\ U_{2n} = P2_{2n}Z_{2n+1} + Q2_{2n}U_{2n+2} + R2_{2n}V_{2n+1} + I2_{2n}Z1 + K2_{2n} \\ V_{2n+1} = P3_{2n+1}Z_{2n+1} + Q3_{2n+1}U_{2n+2} + R3_{2n+1}V_{2n+3} + I3_{2n+1}Z1 + K3_{2n+1} \end{array} \right. \quad (6-4)$$

$2LI \rightarrow 2LI_2$  断面:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{2n+1} = P1_{2n+1}Z_{2n+3} + Q1_{2n+1}U_{2n+2} + R1_{2n+1}V_{2n+3} + I1_{2n+1}Z1 + K1_{2n+1} + \\ PA1_{2n+1}Z_3^2 + QA1_{2n+1}U_2^2 + RA1_{2n+1}V_3^2 \\ U_{2n} = P2_{2n}Z_{2n+1} + Q2_{2n}U_{2n+2} + R2_{2n}V_{2n+1} + I2_{2n}Z1 + K2_{2n} + \\ PA2_{2n}Z_3^2 + QA2_{2n}U_2^2 + RA2_{2n}V_3^2 \\ V_{2n+1} = P3_{2n+1}Z_{2n+1} + Q3_{2n+1}U_{2n+2} + R3_{2n+1}V_{2n+3} + I3_{2n+1}Z1 + K3_{2n+1} + \\ PA3_{2n+1}Z_3^2 + QA3_{2n+1}U_2^2 + RA3_{2n+1}V_3^2 \end{array} \right. \quad (6-5)$$

$2LI_2 \rightarrow$  末断面:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{2n+1} = P1_{2n+1}Z_{2n+3} + Q1_{2n+1}U_{2n+2} + R1_{2n+1}V_{2n+3} + I1_{2n+1}Z1 + K1_{2n+1} + \\ PA1_{2n+1}Z_3^2 + QA1_{2n+1}U_2^2 + RA1_{2n+1}V_3^2 + \\ PB1_{2n+1}Z_{2N_2-1}^2 + QB1_{2n+1}U_{2N_2}^2 + RB1_{2n+1}V_{2N_2-1}^2 \\ \\ U_{2n} = P2_{2n}Z_{2n+1} + Q2_{2n}U_{2n+2} + R2_{2n}V_{2n+1} + I2_{2n}Z1 + K2_{2n} + \\ PA2_{2n}Z_3^2 + QA2_{2n}U_2^2 + RA2_{2n}V_3^2 + \\ PB2_{2n}Z_{2N_2-1}^2 + QB2_{2n}U_{2N_2}^2 + RB2_{2n}V_{2N_2-1}^2 \\ \\ V_{2n+1} = P3_{2n+1}Z_{2n+1} + Q3_{2n+1}U_{2n+2} + R3_{2n+1}V_{2n+3} + I3_{2n+1}Z1 + K3_{2n+1} + \\ PA3_{2n+1}Z_3^2 + QA3_{2n+1}U_2^2 + RA3_{2n+1}V_3^2 + \\ PB3_{2n+1}Z_{2N_2-1}^2 + QB3_{2n+1}U_{2N_2}^2 + RB3_{2n+1}V_{2N_2-1}^2 \end{array} \right. \quad (6-6)$$

## 6.4 主河道的回代和支流的追赶

对应于基本步骤中的第③、④步。主河道的回代方式也与“树状”河道单元相同，如图 6-1 回代主河道至  $2LI_2$  断面，主河道  $2LI_2$  断面至末断面的未知向量都可以表达成主河道首末断面水位  $Z1, Z2$  和汊道变量  $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$  和  $Z_{2N_2-1}^2, U_{2N_2}^2, V_{2N_2-1}^2$  的线性关系。

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{2n+1} = CP1_{2n+1}Z_3^2 + CQ1_{2n+1}U_2^2 + CR1_{2n+1}V_3^2 + \\ CPK1_{2n+1}Z_{2N_2-1}^2 + CQK1_{2n+1}U_{2N_2}^2 + CRK1_{2n+1}V_{2N_2-1}^2 + \\ CIA1_{2n+1}Z1 + CIB1_{2n+1}Z2 + CK1_{2n+1} \\ \\ U_{2n} = CP2_{2n}Z_3^2 + CQ2_{2n}U_2^2 + CR2_{2n}V_3^2 + \\ CPK2_{2n}Z_{2N_2-1}^2 + CQK2_{2n}U_{2N_2}^2 + CRK2_{2n}V_{2N_2-1}^2 + \\ CIA2_{2n}Z1 + CIB2_{2n}Z2 + CK2_{2n} \\ \\ V_{2n+1} = CP3_{2n+1}Z_3^2 + CQ3_{2n+1}U_2^2 + CR3_{2n+1}V_3^2 + \\ CPK3_{2n+1}Z_{2N_2-1}^2 + CQK3_{2n+1}U_{2N_2}^2 + CRK3_{2n+1}V_{2N_2-1}^2 + \\ CIA3_{2n+1}Z1 + CIB3_{2n+1}Z2 + CK3_{2n+1} \end{array} \right. \quad (6-7)$$

在  $2LI_2 \rightarrow 2LI_2 + 2M_2$  范围内采用“树状”河道单元相同的方法构建支流河道的起始追赶方程，方程构建如下，详细的构建过程见第五章。

支流初始水位追赶方程：

$$\begin{aligned} Z_{2N_2+1}^2 = & P1_{2N_2+1}^2 Z_{2N_2-1}^2 + Q1_{2N_2+1}^2 U_{2N_2}^2 + R1_{2N_2+1}^2 V_{2N_2-1}^2 + \\ & PK1_{2N_2+1}^2 Z_3^2 + QK1_{2N_2+1}^2 U_2^2 + RK1_{2N_2+1}^2 V_3^2 + LA1_{2N_2+1}^2 Z1 + \\ & IB1_{2N_2+1}^2 Z2 + K1_{2N_2+1}^2 \end{aligned} \quad (6-8)$$

支流初始  $U$  速度追赶方程:

$$\begin{aligned} U_{2N_2+2}^2 = & P2_{2N_2+2}^2 Z_{2N_2-1}^2 + Q2_{2N_2+2}^2 U_{2N_2}^2 + R2_{2N_2+2}^2 V_{2N_2-1}^2 + \\ & PK2_{2N_2+2}^2 Z_3^2 + QK2_{2N_2+2}^2 U_2^2 + RK2_{2N_2+2}^2 V_3^2 + LA2_{2N_2+2}^2 Z1 + \\ & IB2_{2N_2+2}^2 Z2 + K2_{2N_2+2}^2 \end{aligned} \quad (6-9)$$

支流初始  $V$  速度追赶方程:

$$\begin{aligned} V_{2N_2+1}^2 = & P3_{2N_2+1}^2 Z_{2N_2-1}^2 + Q3_{2N_2+1}^2 U_{2N_2}^2 + R3_{2N_2+1}^2 V_{2N_2-1}^2 + \\ & PK3_{2N_2+1}^2 Z_3^2 + QK3_{2N_2+1}^2 U_2^2 + RK3_{2N_2+1}^2 V_3^2 + LA3_{2N_2+1}^2 Z1 + \\ & IB3_{2N_2+1}^2 Z2 + K3_{2N_2+1}^2 \end{aligned} \quad (6-10)$$

由图 6-1 的示意, 支流的追赶是从末断面至首断面的反向追赶, 追赶方法和单一河道完全相同, 这里仅给出支流河道追赶的一般方程, 详细的推导过程见第四章, 第五章。

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{2n+1}^2 = P1_{2n+1}^2 Z_{2n-1}^2 + Q1_{2n+1}^2 U_{2n}^2 + R1_{2n+1}^2 V_{2n-1}^2 + \\ \quad PK1_{2n+1}^2 Z_3^2 + QK1_{2n+1}^2 U_2^2 + RK1_{2n+1}^2 V_3^2 + LA1_{2n+1}^2 Z1 + \\ \quad IB1_{2n+1}^2 Z2 + K1_{2n+1}^2 \\ \\ U_{2n}^2 = P2_{2n}^2 Z_{2n-1}^2 + Q2_{2n}^2 U_{2n-2}^2 + R2_{2n}^2 V_{2n-1}^2 + \\ \quad PK2_{2n}^2 Z_3^2 + QK2_{2n}^2 U_2^2 + RK2_{2n}^2 V_3^2 + LA2_{2n}^2 Z1 + \\ \quad IB2_{2n}^2 Z2 + K2_{2n}^2 \\ \\ V_{2n+1}^2 = P3_{2n+1}^2 Z_{2n+1}^2 + Q3_{2n+1}^2 U_{2n}^2 + R3_{2n+1}^2 V_{2n-1}^2 + \\ \quad PK3_{2n+1}^2 Z_3^2 + QK3_{2n+1}^2 U_2^2 + RK3_{2n+1}^2 V_3^2 + LA3_{2n+1}^2 Z1 + \\ \quad IB3_{2n+1}^2 Z2 + K3_{2n+1}^2 \end{array} \right. \quad (6-11)$$

按照上述追赶方法, 追赶到支流河道第 4 断面和第 5 断面, 有如下追赶方程:

$$\begin{aligned} Z_5^2 = & P1_5^2 Z_3^2 + Q1_5^2 U_4^2 + R1_5^2 V_3^2 + PK1_5^2 Z_3^2 + \\ & QK1_5^2 U_2^2 + RK1_5^2 V_3^2 + LA1_5^2 Z1 + IB1_5^2 Z2 + K1_5^2 \end{aligned} \quad (6-12)$$

$$\begin{aligned} V_5^2 = & P3_5^2 Z_5^2 + Q3_5^2 U_4^2 + R3_5^2 V_3^2 + PK3_5^2 Z_3^2 + \\ & QK3_5^2 U_2^2 + RK3_5^2 V_3^2 + LA3_5^2 Z1 + IB3_5^2 Z2 + K3_5^2 \end{aligned} \quad (6-13)$$

$$\begin{aligned} U_4^2 = & P2_4^2 Z_3^2 + Q2_4^2 U_2^2 + R2_4^2 V_3^2 + PK2_4^2 Z_3^2 + \\ & QK2_4^2 U_2^2 + RK2_4^2 V_3^2 + LA2_4^2 Z1 + IB2_4^2 Z2 + K2_4^2 \end{aligned} \quad (6-14)$$

## 6.5 支流河道的回代

对应与基本步骤中的第⑤、⑥两步，采用与“树状”河道单元中支流的回代相同的方法，由支流第4断面开始回代，由公式(6-14)的形式，可以将支流河道中第4断面直到末断面的所有未知变量都表达为 $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$ 以及主河道的首末断面水位 $Z1, Z2$ 的线性关系。因此主河道追赶公式中的第二汊道变量 $Z_{2N_2-1}^2, U_{2N_2}^2, V_{2N_2-1}^2$ 也可以表达为第一汊道变量 $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$ 以及首末断面水位 $Z1, Z2$ 的线性关系，表达式如下，具体的推导过程见第五章“树状”河道单元支流的回代过程：

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{2n+1}^2 = CP1_{2n+1}^2 Z_3^2 + CQ1_{2n+1}^2 U_2^2 + CR1_{2n+1}^2 V_3^2 + CIA1_{2n+1}^2 Z1 + \\ \quad CIB1_{2n+1}^2 Z2 + CK1_{2n+1}^2 \\ \\ U_{2n}^2 = CP2_{2n}^2 Z_3^2 + CQ2_{2n}^2 U_2^2 + CR2_{2n}^2 V_3^2 + CLA2_{2n}^2 Z1 + \\ \quad CIB2_{2n}^2 Z2 + CK2_{2n}^2 \\ \\ V_{2n+1}^2 = CP3_{2n+1}^2 Z_3^2 + CQ3_{2n+1}^2 U_2^2 + CR3_{2n+1}^2 V_3^2 + CIA3_{2n+1}^2 Z1 + \\ \quad CIB3_{2n+1}^2 Z2 + CK3_{2n+1}^2 \end{array} \right. \quad (6-15)$$

## 6.6 主河道的回代以及汊道变量的求解

对应于基本步骤中的第⑦步，由支流的回代过程，可以将第二汊道变量也表达为(6-15)式的形式。将第二汊道变量 $Z_{2N_2-1}^2, U_{2N_2}^2, V_{2N_2-1}^2$ 代入(6-7)确定的主河道 $2LI_2$ 断面至末断面的未知向量中，可以将该范围内的未知向量都表达为第一汊道变量 $Z_3^2, U_2^2, V_3^2$ 以及首末断面水位 $Z1, Z2$ 的线性关系，表达如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{2n+1} = CP1_{2n+1} Z_3^2 + CQ1_{2n+1} U_2^2 + CR1_{2n+1} V_3^2 + CIA1_{2n+1} Z1 + \\ \quad CIB1_{2n+1} Z2 + CK1_{2n+1} \\ \\ U_{2n} = CP2_{2n} Z_3^2 + CQ2_{2n} U_2^2 + CR2_{2n} V_3^2 + CLA2_{2n} Z1 + \\ \quad CIB2_{2n} Z2 + CK2_{2n} \\ \\ V_{2n+1} = CP3_{2n+1} Z_3^2 + CQ3_{2n+1} U_2^2 + CR3_{2n+1} V_3^2 + CIA3_{2n+1} Z1 + \\ \quad CIB3_{2n+1} Z2 + CK3_{2n+1} \end{array} \right. \quad (6-16)$$

然后依照单一河道的回代方法，结合追赶公式(6-5)回代主河道 $2LI \rightarrow 2LI_2$ 河段，

也可以将该段中的未知变量表达为(6-16)式的形式。

## 6.7 第一汊道变量的求解

对应与基本步骤中的第⑧步，这一步求解是整个河网求解中最关键的部分。离散第一汊道变量对应的变量，离散的矩阵方程如下：

连续方程：

$$A1_3^2 Z_1^2 + B1_3^2 Z_3^2 + C1_3^2 Z_5^2 + D1_3^2 V_3^2 + E1_3^2 U_2^2 + F1_3^2 U_4^2 = H1_3^2 \quad (6-17)$$

$u$  动量方程：

$$A2_2^2 Z_1^2 + B2_2^2 Z_3^2 + C2_2^2 U_0^2 + D2_2^2 U_2^2 + E2_2^2 U_4^2 + F2_2^2 V_1^2 + G2_2^2 V_3^2 = H2_2^2 \quad (6-18)$$

$v$  动量方程：

$$A3_3^2 Z_3^2 + B3_3^2 U_2^2 + C3_3^2 U_4^2 + D3_3^2 V_1^2 + E3_3^2 V_3^2 + F3_3^2 V_5^2 = H3_3^2 \quad (6-19)$$

由支流回代的(6-15)式可知  $Z_5^2$ ,  $U_4^2$ ,  $V_5^2$  都已经表示成了  $Z_3^2$ ,  $U_2^2$ ,  $V_3^2$  的表达式，将  $Z_5^2$ ,  $U_4^2$ ,  $V_5^2$  对应的回代表达式都代入(6-17)–(6-19)方程中，可以消去上述三个变量，得到如下方程组：

$$\begin{cases} A1_3^2 Z_1^2 + B1_3^2 Z_3^2 + D1_3^2 V_3^2 + E1_3^2 U_2^2 = H1_3^2 \\ A2_2^2 Z_1^2 + B2_2^2 Z_3^2 + C2_2^2 U_0^2 + D2_2^2 U_2^2 + F2_2^2 V_1^2 + G2_2^2 V_3^2 = H2_2^2 \\ A3_3^2 Z_3^2 + B3_3^2 U_2^2 + D3_3^2 V_1^2 + E3_3^2 V_3^2 = H3_3^2 \end{cases} \quad (6-20)$$

上述方程只整理过后的方程，对应的系数需要在(6-17)–(6-19)式的基础上做出相应的调整，这里不详细给出。通过(6-20)式，将  $Z_3^2$ ,  $U_2^2$ ,  $V_3^2$  三个向量作为未知量，可以将这三个变量表达成  $Z_1^2$ ,  $U_0^2$ ,  $V_1^2$  的表达式：

$$\begin{cases} Z_3^2 = P1_3^2 Z_1^2 + Q1_3^2 U_0^2 + R1_3^2 V_1^2 + I1_3^2 Z1 + IB1_3^2 Z2 + K1_3^2 \\ U_2^2 = P2_2^2 Z_1^2 + Q2_2^2 U_0^2 + R2_2^2 V_1^2 + I2_2^2 Z1 + IB2_2^2 Z2 + K2_2^2 \\ V_3^2 = P3_3^2 Z_1^2 + Q3_3^2 U_0^2 + R3_3^2 V_1^2 + I3_3^2 Z1 + IB3_3^2 Z2 + K3_3^2 \end{cases} \quad (6-21)$$

又由“树状”河道单元中构建起始断面追赶方程的方法，可以构建形如(5-18)–(5-20)的方程，将这一组方程和(6-21)联立求解，即可以解出  $Z_3^2$ ,  $U_2^2$ ,  $V_3^2$  的表达式，可以表述为如下形式：

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_3^2 = KA1_3^2Z1 + KB1_3^2Z2 + KK1_3^2 \\ U_2^2 = KA2_2^2Z1 + KB2_2^2Z2 + KK2_2^2 \\ V_3^2 = KA3_3^2Z1 + KB3_3^2Z2 + KK3_3^2 \end{array} \right. \quad (6-22)$$

## 6.8 最终的回代

对应于基本过程中的第⑨步。至此已经将第一汊道变量表达成了已知的首末断面的表达式，主河道回代方程(6-16)中的相关变量即可以求解。将(6-22)式代入(6-16)式中，主河道2LI断面至末断面的未知量均表达成了已知的首末断面水位的表达式，这些变量可以根据已知的首末断面求解。同时，将(6-22)式确定的变量关系代入支流的回代方程(6-15)中，所有支流待求变量都表达成了首末断面向量的关系式。最后完成主河道中2LI → 0河段的回代。

经过上述过程，“环状”河道单元中主河道和支流中的所有未知变量都表达成了主河道首末断面的关系式，到达河网求解的目标。

## 6.9 边界水位流量关系的表达

由上述所推导的过程，可以看出所划分的“环状”河道单元中的所有未知变量都已经表达成了主树道边界水位的线性表达式，有了这个表达式，就可以很容易的将边界处的流量表达成边界水位的表达式，这样就达到了“环状”河道单元的计算目标，可以通过流量守恒在边界处与其他计算模型耦合。流量水位表达方式如下，具体的方式与第四章相同。

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = A1Z1 + A2Z2 + K1 \\ Q_{2N+1} = B1Z1 + B2Z2 + K2 \end{array} \right. \quad (6-23)$$

将上式代入到节点水位方程(3-6)即可得到包含“环状”河道单元的整个流域节点水位方程(3-7)。

## 6.10 算例



图 6-2 河网正交贴体网格

算例取福建闽江河口“竹岐—亭江”该河段由南港和北港两支构成一个“环状”河道单元，本算例对此进行二维水流模拟。主河道也即南港网格数为 585\*93，北港网格数为 295\*61。网格空间步长约在 20~800m 之间，采用变步长网格，计算时间步长为 10min，曼宁糙率系数取 0.016~0.018 之间。为依据第二章的正交曲线网格变换方法而生成的计算网格；图 6-3 分别为涨急和落急时刻的流场图。其流场分布与滩槽走向一致，基本反映了闽江口河网流速场的实际分布情况。

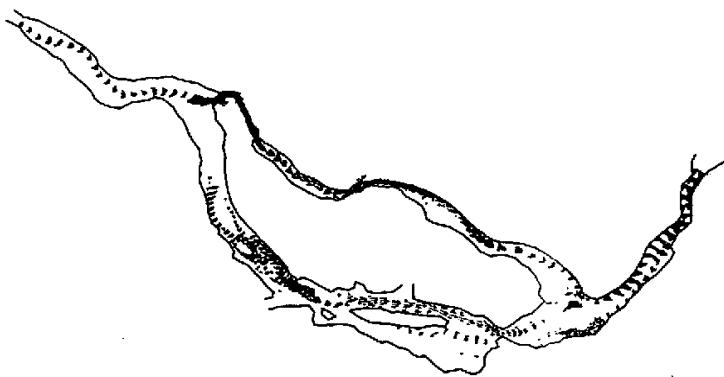


图 6-3 落急流场图

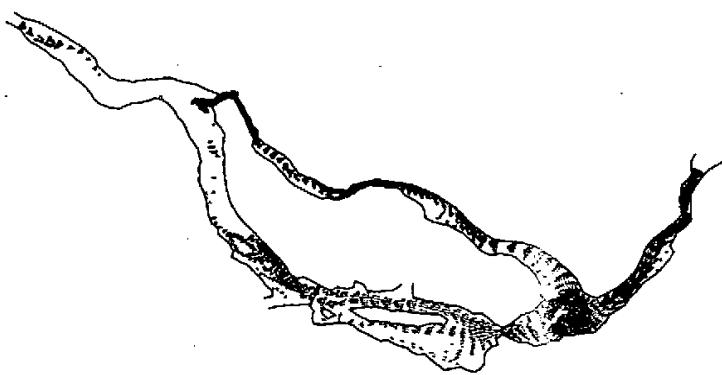


图 6-4 涨急流场图

## 6.11 小结

本章在第四章的基础上对“环状”河道单元的求解方法进行了详细的叙述，通过最终对复杂问题的求解验证，该方法是有效的。

## 第七章 结论与展望

### 7.1 结论

水是人类赖以生存的最基本的物质，也是万事万物繁荣的基础，与国民经济息息相关。随着国民经济的发展，人们对水的需求日益增加，而我国又是一个缺水的国家，如何合理的利用就显得非常重要。如何合理的分配水，如何定时取得定量的水，这些都与水力学密切相关。而掌握全流域水资源分配状况无疑是解决这些问题的前提。由此引发了建立流域水流动力模型的需求，一般一个流域中存在种类繁多的水体样式，这些水体的样式千差万别，水体的物理性质也不尽相同，实际中将流域的水系作为一个整体建立水流数学模型是不太现实的。这里结合前人的研究成果，将一个流域按照物理性质和实际需求划分成诸多的子要素：零维区域要素、一维河网要素、联系要素、二维行洪区要素、河网二维要素等等，随着需求的增加，要素的种类也会随之增加。

在前人所做的研究之中，零维区域要素、一维河网要素、联系要素、二维行洪区要素等基本要素的求解方法已经很成熟，在建立流域水流动力中的应用也得到了相当多的验证，取得了良好的效果。河网二维要素目前的研究不多，本文着重提出一种河网二维水流计算模式。希望通过该模式解决流域水流动力模型的河网二维子模型要素的求解。

流域水流动力模型以节点水位方程作为整个流域的控制方程，通过求解水位节点方程组实现全流域流速流量等的求解。受到这个思想的影响，希望河网二维的求解方式也可以由水位节点方程的求解来控制。考虑到河网二维的特殊性，不能采用一维河网求解中以河道交汇点作为控制节点的方法，由此提出了另外一种河网二维的单元划分方法：将大范围内的河网二维通过汇流方式划分为：单一河道二维、“树状”河道单元、“环状”河道单元、“十字型”河道单元等基本单元，目前就划分为这几种形式，随着需求的增加可以划分为更多的形式。这些基本单元求解的最终表现形式就是其边界水位的表达式，这样就实现了河网二维节点水位方程的构建，在全流域的水流动力系统中可以很方便的将任何所关心的河道或者河网作为河网二维，和其他子模型完全耦合的求解。

提出了河网二维求解的基本模型后，各章就这几种基本模型进行求解，通过最终的算例验证表明这些二维基本模型的构建思路是正确的，计算方法是有效的。

### 7.2 展望

本论文虽然提出了河网二维的基本计算模型，但是目前还有如下一些问题需要考虑，这些问题留待日后解决：

- ① 论文中对河网二维基本模型进行了划分，只对其中的几种进行了就算求解，对“十字型”河道单元的求解还有待继续研究。
- ② 本文提出的方法在理论上对任何范围内的河网均实用。但论文中的算例都只是一个小范围内的模拟，还缺少在大范围河网中应用的实践，需要大量的实际验证才能确定其可靠性。
- ③ 流域水流动力系统中同样存在本文提出的河网二维相似的三维问题，目前三维求解还不能方便实现全流域动力模型的耦合，这是以后研究的重点。

## 参考文献

- [1] 王船海, 李光炽. 流域洪水模拟. 水利学报. 1996年第3期:44-50.
- [2] Akan A O, Yen B C. Diffusion wave flood routing in channel networks[J]. Journal of Hydraulics Division, ASCE, 1981, 107(7) : 719 - 732.
- [3] Stelling G S. On the Construction of Computational Methods for Shallow Water Flow Problems [D]. Delft: Delft University of Technology, the Netherlands, 1983.
- [4] Patankar SV, Spalding DB. Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in 3D Flows[J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 1972 (15), 1987-1806.
- [5] 王船海, 程文辉. 河道二维非恒定流场计算方法研究. 水利学报. 1991年第1期:10-17.
- [6] 王船海, 程文辉. 河道二维非恒定流计算. 河海大学学报. 第15卷第3期.  
1987. 6 :39-53.
- [7] Thompson, J. F., F. C. Thames, C. W. Martin, Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinates System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, J. Comput. Phys. Vol. 15, 1974, 299-319
- [8] 鲁守华. 贴体曲线坐标系的数值生成方法. 宇航学报. (3), 7, 1985:22-30
- [9] 程文辉, 王船海. 用正交曲线网格及“冻结”法计算河道流速场. 水利学报1988年第6期:13-24.
- [10] 余利仁. 二维正交贴体坐标系的数值生成和通用程序[J]. 水动力学研究与进展A辑, 1989, (01) .
- [11] 刘顺隆, 郑洪套. 正交贴体坐标网格的生成. 哈尔滨工程大学学报. (3), 1997:42:46.
- [12] Gupta, M. M., R. P. Manohar, Direct Solution of the Biharmonic Equation Using Noncoupled Approach, J. Comput. Phys. Vol. 33, 1979, 236-248.
- [13] Bell, J. B., G. R. Shubin, A. B. Stephens, A Segmentation Approach To Grid Generation Using Biharmonics,  
J. Comput. Phys. Vol. 47, 1982, 463-472.
- [14] 齐学义. 双调和方程生成正交曲线坐标网格技术的研究. 水力发电学报. (3), 2000:84-89.
- [15] Stelling G S. On the Construction of Computational Methods for Shallow Water Flow Problems [D]. Delft: Delft University of Technology, the Netherlands, 1983.
- [16] Patankar SV, Spalding DB. Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in 3D Flows[J]. Int. J. Heat Mass Transfer, 1972 (15):1987-1806.
- [17] Patankar SV. Numerical heat transfer and fluid flow[M]. New York:Mc Graw Hill, 1980.
- [18] Van Doormaal J P, Raithby GD. Enhancement of SIMPLE method for predicting incompressible

- fluid flows[J]. Numer Heat Transfer, 1984(7):147-163.
- [19] Raithby GD , Schneider G E. Elliptic systems : finite difference methods II [M] . New York : John Wiley & Sons, 198.
- [20] Sheng Y, Shoukri M, Sheng G, Wood P. A modification to the SIMPLE method for buoyancy2driven flows [J ] . Numer Heat Transfer , Part B, 1998, 33(1):65 - 78.
- [21] Jian Guo Zhou. Velocity2Depth Coupling in Shallow2Water Flows [J ] . J . Hydr. Engrg. , ASCE , 1995 , 121 (10) :717 - 724.
- [22] HoltM. Numerical Methods in Fluid Dynamics [M]. Berlin:Springer-Verlag, 1984.
- [23] 周建军,林秉南,王连祥.河道平面二维水流数值计算.水利学报. (5), 1991:8-18.
- [24] 吴修广,沈永明等.非正交曲线坐标下二维水流计算的SIMPLEC算法.水利学报. (2), 2003:25-30.
- [25] 方春明.全隐式差分法求解河道平面二维恒定水流运动方程.水利学报. (4), 1997:42-48.
- [26] 刘晓东,华祖林,赵玉萍.基于四叉树网格的GODUNOV型二维水流数值计算模式.河海大学学报. 30(6), 2002:7-10.
- [27] 李光炽,周晶晏,张贵寿.高桩码头对河道流场影响的数值模拟.河海大学学报, 32(2), 2004:217-220.
- [28] 邓家泉.二维明渠非恒定水流 BGK 数值模型.水利学报, (4), 2002:1-7.
- [29] 胡四一,谭维炎.无结构网格上二维浅流动的数值模拟.水科学进展, 6(1), 1995:1-9.
- [30] 王如云,张东生等.曲线坐标网格下二维涌波数值模拟的 TVD 型格式.水利学报. (10), 2002:72-77
- [31] 邵颂东,王光谦,费详俊.平面二维 Lagrange-Euler 方法及其在水流运动中的应用.水利学报. (6), 1997:34-39.
- [32] 程永光,索丽生.二维明渠非恒定流的格子 Boltzmann 模拟.水科学进展. 14(9), 2003:9-14.
- [33] 魏文礼,沈永明.二维溃坝洪水波演进的数值模拟.水力学报, (9), 2003:43-47.
- [34] 赖锡军,汪德.非恒定水流的一维、二维耦合数值模拟[J].水利水运工程学报, 2002 , 2 :48-51.
- [35] 张惠英,严以新.黄茅海域及上游河网区一、二维联网潮流计算整体数学模型[ J ].江苏交通工程, 1994(6) :12-20.
- [36] ZHU Yu-liang, ZHANG Hui-ying , MAO Li-hua. The application of combined numerical model in regulation project at river mouth [A]. Advances in Hydro-Science and Engineering, Vol. II [ C ]. Beijing:Tsinghua University Press, 1995 , 1391-1398.
- [37] 诸裕良,严以新等.河网海湾水动力联网数学模型.水科学进展,第14 卷第2期2003年3月:131-135
- [38] 程杭平、韩曾萃.热污染的一、二维耦合模型及其应用[J ].水动力学研究与进展, A 辑, 2002, 17 (6):647-655.
- [39] 徐峰俊,朱士康,刘俊勇.珠江河口区水环境整体数学模型研究[J ].人民珠江, 2003, 5:12-18.
- [40] 徐祖信,尹海龙.平原感潮河网地区一维、二维水动力耦合模型研究.水动力学研究与进展. A 辑第

- 19 卷第6 期, 2004 年11月:744-752.
- [41] 赖锡军, 汪德爟. 非恒定水流的一维、二维耦合数值模型. 水利水运工程学报, 编辑部邮箱  
2002年 02期:48-51.
- [42] 李浩麟. 河口汊道不恒定流有限元数值计算. 水力学报. (4), 1983.
- [43] 王震, 张二骏. 贴体坐标系下平面二维多连通域非恒定流水流数学模型. 河海大学学报, 第 24 卷第  
3 期, 1996. 5: 49-54
- [44] 杨胜发, 赵志丹. 叉道水流数值模拟. 重庆交通学院院报, 第 21 卷, 第 1 期, 2002. 3:116-120
- [45] 王船海, 李光炽. 闽江口河网二维潮流数学模型. 台湾海峡, 第21 卷第4期2002. 11:389-399.
- [46] 李光炽, 王船海. 流域洪水模拟通用模型结构研究[J ]. 河海大学学报(自然科学版),  
2005, 33(1):14-17.
- [47] 李光炽, 王船海. 大型河网水流模拟的矩阵标识法[J ]. 河海大学学报, 1995,  
23 (1):36-43.
- [48] 李光炽, 王船海. 内涝型流域洪灾洪水模拟[J ]. 成都科技大学报, 1995(1) :87-96.
- [49] 王船海, 李光炽. 行洪区型流域洪水模拟[J ]. 成都科技大学学报, 1995(2) :6-14.

## 致 谢

论文完卷之际，思绪如潮。在此，特向所有关心、帮助过我的老师和同学致以最诚挚的谢意。

本论文自始至终得到了我的导师——王船海老师的指导和帮助，导师严谨的治学态度、高深的学术造诣和敏捷的思维能力使我获益非浅。每当论文遇到难点，导师总会耐心开导、不吝指教。三年来，导师无论在治学方面还是在对待人生的价值方面都给我作出了榜样，并将指引我今后的人生道路。感谢长江水利委员会的导师张京生副总工程师对我学习的教导以及对我生活的关心，让我在武汉期间受益匪浅。

感谢我的父母和哥哥，感谢他们的养育之恩。

特别感谢师兄石朋博士和师姐瞿思敏博士对我生活上的照顾、以及学习上的支持和鼓励。

感谢师兄虞玉成硕士、周全硕士，师姐南嵒博士，师弟曾贤敏硕士，师妹吴晓玲博士、王娟硕士以及其他同门的关心和帮助。祝他们前程似锦，工作顺利。

三年来，河海大学水环院和研究生院的各位老师和领导在学习和工作方面都给予了我很多的支持和帮助，在此深表感激。