§4.1 引言

•以傅里叶变换为基础的频域分析方法的优点在于：它给出的结果有着清楚的物理意义，但也有不足之处，傅里叶变换只能处理符合狄利克雷条件的信号，而有些信号是不满足绝对可积条件的，因而其信号的分析受到限制；

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t<\infty$$

•另外在求时域响应时运用傅里叶反变换对频率进行的无穷积分求解困难。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=F^{-1}\left[f(t)\right]$$

为了解决对不符合狄氏条件信号的分析，第三章中引入了广义函数理论去解释傅里叶变换，同时，还可利用本章要讨论的拉氏变换法扩大信号变换的范围。

- 优点：

  求解比较简单，特别是对系统的微分方程进行变换时，初始条件被自动计入，因此应用更为普遍。

- 缺点：

  物理概念不如傅氏变换那样清楚。

本章内容及学习方法

本章首先由傅氏变换引出拉氏变换，然后对拉氏正变换、拉氏反变换及拉氏变换的性质进行讨论。

本章重点在于，以拉氏变换为工具对系统进行复频域分析。

最后介绍系统函数以及$H(s)$零极点概念，并根据他们的分布研究系统特性，分析频率响应，还要简略介绍系统稳定性问题。

注意与傅氏变换的对比，便于理解与记忆。

§ 4.2 拉普拉斯变换的定义、收敛域

主要内容

从傅里叶变换到拉普拉斯变换
拉氏变换的收敛
一些常用函数的拉氏变换

一．从傅里叶变换到拉普拉斯变换

1．拉普拉斯正变换

信号 $f(t)$，乘以衰减因子 $e^{-\sigma t}$（σ为任意实数）后容易满足绝对可积条件，依傅氏变换定义：

$$F_1(\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\cdot e^{-\sigma t}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right]\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-(\sigma+j\omega)t}dt \ = F(\sigma + j\omega)$$

令：$\sigma + j\omega = s$，具有频率的量纲，称为复频率。

则

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

2．拉氏逆变换

$$F(\sigma+\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}t=F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

对于$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$是$F(\sigma+\mathrm{j}\omega)$的傅里叶逆变换

$$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+j\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

两边同乘以$\mathrm{e}^{\sigma t}$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}\omega$$

其中: $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$；若$\sigma$取常数,则$\mathrm{d}s=\mathrm{j}\mathrm{d}\omega$

积分限：对$\omega:\int_{-\infty}^{\infty}\Rightarrow$ 对$s:\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}$

所以
$$f(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

3．拉氏变换对

$$\begin{cases} F(s)=L[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t & \text{正变换} \\ f(t)=L^{-1}[f(t)]=\dfrac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s & \text{逆变换} \end{cases}$$

记作：$f(t)\leftrightarrow F(s)$ $f(t)$称为原函数，$F(s)$称为象函数。

考虑到实际信号都是有起因信号：

所以 $$F(\omega)=\int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

采用0_系统,相应的单边拉氏变换为

$$\begin{cases} F(s)=L[f(t)]=\int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\ f(t)=L^{-1}[f(t)]=\dfrac{1}{2\pi\,\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s \end{cases}$$

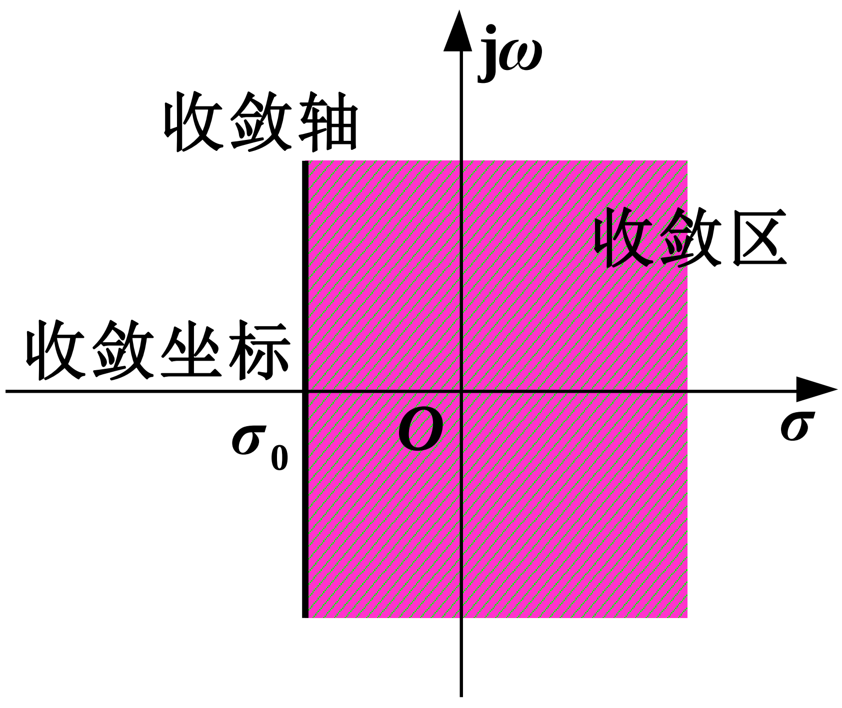
二．拉氏变换的收敛

收敛域：使$F(s)$存在的s的区域称为收敛域。

记为：ROC(region of convergence)

实际上就是拉氏变换存在的条件；

$$\lim_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t} = 0 \qquad \left(\sigma > \sigma_0\right)$$



例题及说明

1.满足$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=0\left(\sigma>\sigma_0\right)$的信号成为指数阶信号;

2.有界的非周期信号的拉氏变换一定存在

3.$\lim\limits_{t\to\infty} t^n\mathrm{e}^{-\sigma t}=0 \quad \left(\sigma>0\right)$

4.$\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{e}^{-\sigma t}=0 \quad \left(\sigma>\alpha\right)$

5.e^{t^2}等信号比指数函数增长快，找不到收敛坐标，为非指数阶信号，无法进行拉氏变换。

6.一般求函数的单边拉氏变换可以不加注其收敛范围。

三. 一些常用函数的拉氏变换

1. 阶跃函数

$$L[u(t)] = \int_0^\infty 1 \cdot \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \frac{1}{-s} \mathrm{e}^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

2. 指数函数

$$L[\mathrm{e}^{-\alpha t}] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)} \Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\alpha+s} \quad (\sigma > -\alpha)$$

3. 单位冲激信号

$$L[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t) \cdot \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = 1$$ 全s域平面收敛

$$L[\delta(t-t_0)] = \int_0^\infty \delta(t-t_0) \cdot \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-st_0}$$

4. $t^n u(t)$

$$L[t^n]=\int_0^\infty t^n\cdot e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{t^n}{-s}e^{-st}\Big|_0^\infty+\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,dt$$

所以 $L[t^n]=\dfrac{n}{s}L[t^{n-1}]$

$n=1$

$$L[t]=\int_0^\infty t\cdot e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{1}{-s}\int_0^\infty t\,de^{-st}$$

$$=\frac{1}{-s}\left[t\cdot e^{-st}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{-st}\,dt\right]$$

$$=-\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_0^\infty\right]=\frac{1}{s^2}$$

$n=2$

$$L[t^2]=\frac{2}{s}L[t]=\frac{2}{s}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{2}{s^3}$$

$n=3$

$$L[t^3]=\frac{3}{s}L[t^2]=\frac{3}{s}\cdot\frac{2}{s^3}=\frac{6}{s^4}$$

……

所以 $L[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

§ 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

主要内容

线性

原函数微分

原函数积分

延时（时域平移）

*s*域平移

尺度变换

初值

终值

卷积

对*s*域微分

对*s*域积分

一. 线性

若 $L[f_1(t)] = F_1(s),\ L[f_2(t)] = F_2(s), K_1, K_2$为常数，

则 $L[K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s)$

例题：

$$f(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)$$

已知

$$L\left[\mathrm{e}^{-\alpha t}\right] = \frac{1}{s+\alpha}$$

则

$$L[\cos(\omega t)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega} + \frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

同理

$$L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

二. 原函数微分

若$L[f(t)]=F(s)$,则$L\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=sF(s)-f(0_-)$

证明:

$$\int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty-\left[\int_0^\infty -sf(t)\mathrm{e}^{-st}\right]\mathrm{d}t$$

$$=-f(0)+sF(s)$$

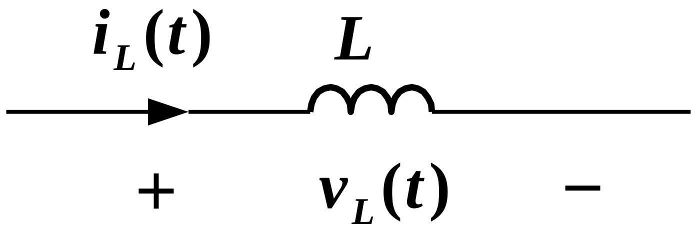
推广:

$$L\left[\frac{\mathrm{d}f^2(t)}{\mathrm{d}t}\right]=s[F(s)-f(0_-)]-f'(0_-)$$

$$=s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$$

$$L\left[\frac{\mathrm{d}f^n(t)}{\mathrm{d}t}\right]=s^nF(s)-\sum_{r=0}^{n-1}s^{n-r-1}f^{(r)}(0_-)$$

电感元件的s域模型



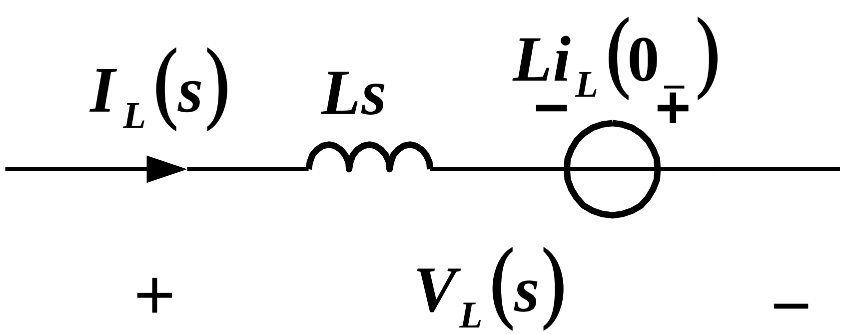
$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

设

$$\mathcal{L}\left[i_L(t)\right] = I_L(s),\ \mathcal{L}\left[v_L(t)\right] = V_L(s)$$

应用原函数微分性质

$$V_L(s) = \mathcal{L}\left[sI_L(s) - i_L(0_-)\right] = sL\,I_L(s) - Li_L(0_-)$$



电感元件的s模型

三. 原函数的积分

若$L\left[f(t)\right]=F(s)$，则

$$L\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$$

证明：

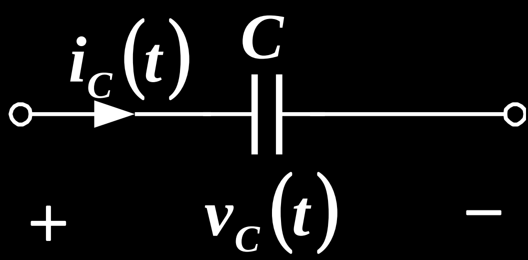
$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau=\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(\tau)\mathrm{d}\tau}_{①}+\underbrace{\int_{0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau}_{②}$$

① $f^{(-1)}(0)\rightarrow\dfrac{f^{(-1)}(0)}{s}$

② $$\int_0^{\infty}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^t f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{s}\int_0^t f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{F(s)}{s}$$

电容元件的s域模型



$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

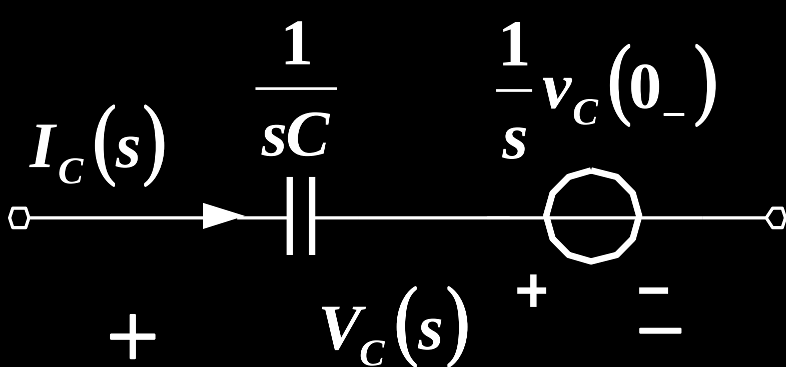
设$L[i_C(t)]=I_C(s)$,
$L[v_C(t)]=V_C(s)$

$$V_C(s)=\frac{1}{C}\left[\frac{I_C(s)}{s}+\frac{i_C{}^{(-1)}(0_-)}{s}\right]$$

$$=\frac{1}{sC}I_C(s)+\frac{1}{s}v_C(0_-)$$

$$\frac{1}{C}i_C{}^{(-1)}(0_-)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0_-} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=v_C(0_-)$$



电容元件的s模型

四. 延时（时域平移）

若$L\left[f(t)\right]=F(s)$，则

$$L\left[f(t-t_0)u(t-t_0)\right]=F(s)\mathrm{e}^{-st_0}$$

证明：

$$L\left[f(t-t_0)u(t-t_0)\right]=\int_{0_-}^{\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

令$\tau=t-t_0$，则有$t=\tau+t_0, \mathrm{d}t=\mathrm{d}\tau$，代入上式

$$L\left[f(t-t_0)u(t-t_0)\right]=\int_{0_-}^{\infty} f(\tau)\mathrm{e}^{-st_0}\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=F(s)\mathrm{e}^{-st_0}$$

时移特性、例题

【例4-3-1】已知 $f(t)=tu(t-1)$,求$F(s)$

解答

$$F(s)=L[tu(t-1)]=L[(t-1)u(t-1)+u(t-1)]$$

$$=\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\right)\mathrm{e}^{-s}$$

【例4-3-2】已知$f(t)=\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)u(t)$,求$F(s)$。

解答

$$f(t)=\sqrt{2}\cos t\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\sin t\sin\frac{\pi}{4}=\cos t-\sin t$$

$$F(s)=\frac{s}{1+s^2}-\frac{1}{1+s^2}=\frac{s-1}{1+s^2}$$

用时移性质求单边信号抽样后的拉氏变换

$$L\left[f_{s}(t)\right]=\int_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)\,\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\,\mathrm{e}^{-nsT}$$

抽样信号的拉氏变换可表示为s域的级数。

例如$f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$,则

$$L\left[f_{s}(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha nT}\cdot\mathrm{e}^{-snT}$$

$$=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-(\alpha+s)T}}$$

五．s域平移

若$L\left[f(t)\right]=F(s)$，则

$$L\left[f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]=F(s+\alpha)$$

证明：

$$L\left[f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]=\int_{0_-}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=F(s+\alpha)$$

例4-3-3

求$\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega_0 t$的拉氏变换

解答

$$\text{已知:}\ L\left[\cos\left(\omega_0 t\right)u(t)\right]=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\text{所以}\quad \mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\left(\omega_0 t\right)u(t)\leftrightarrow\frac{s+\alpha}{\left(s+\alpha\right)^2+\omega_0^2}$$

$$\text{同理:}\ \mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\left(\omega_0 t\right)u(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{\left(s+\alpha\right)^2+\omega_0^2}$$

六. 尺度变换

若$L\left[f(t)\right]=F(s)$，则

$$L\left[f(at)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad(a>0)$$

证明：

$$L\left[f(at)\right]=\int_{0_-}^{\infty}f(at)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

令$\tau=at$，则

$$L\left[f(at)\right]=\int_{0_-}^{\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau}\mathrm{d}\left(\frac{\tau}{a}\right)=\frac{1}{a}\int_{0_-}^{\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

时移和标度变换都有时：

若$L\left[f(at-b)u(at-b)\right]=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\mathrm{e}^{-s\frac{b}{a}}\quad(a>0,b>0)$

七．初值

若$f(t)$及$\dfrac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t}$可以进行拉氏变换，且$f(t)\longleftrightarrow F(s)$,则

$$\lim_{t\to 0_+} f(t)=f(0_+)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

证明

若$F(s)$不是真分式,应化为真分式:

$$F_1(s)=F(s)-k$$

$$f(0_+)=\lim_{s\to\infty} s\left[F(s)-k\right]=\lim_{s\to\infty}\left[sF(s)-ks\right]=\lim_{t\to 0_+} f(t)$$

$F(s)$中有常数项，说明$f(t)$中有$\delta(t)$项。

初值定理证明

由原函数微分定理可知

$$sF(s) - f(0_-) = L\left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$= \int_{0_-}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{0_-}^{0_+} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t + \int_{0_+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

$$= f(0_+) - f(0_-) + \int_{0_+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

所以 $$sF(s) = f(0_+) + \int_{0_+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t$$

$$\lim_{s\to\infty}\left[\int_{0_+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-st} \mathrm{d}t\right] = \int_{0_+}^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \left[\lim_{s\to\infty} \mathrm{e}^{-st}\right] \mathrm{d}t = 0$$

例4-3-4　已知：$F(s)=\frac{1}{s}$，求$f(0_+)=?$

解答 $f(0_+)=\lim\limits_{t\to 0_+} f(t)=\lim\limits_{s\to\infty} sF(s)=1$

即单位阶跃信号的初始值为1。

例4-3-2　$F(s)=\frac{2s}{s+1}$，求$f(0_+)=?$

$f(t)$中有$2\delta(t)$项

解答 因为 $F(s)=\frac{2s}{s+1}=-\frac{2}{s+1}+2$

所以 $f(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty}\left[sF(s)-ks\right]=\lim\limits_{s\to\infty}\left[s\left(2-\frac{2}{s+1}\right)-2s\right]$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{-2s}{s+1}=\lim_{s\to\infty}\frac{-2}{1+\frac{1}{s}}=-2$$

所以 $f(0_+)=-2$

八．终值

设$f(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t}$的拉氏变换存在，若$\mathscr{L}\left[f(t)\right]=F(s)$，则

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

终值存在的条件:

$sF(s)$在右半平面和 $\mathrm{j}\omega$ 轴(原点除外)上无极点。

证明:

根据初值定理证明时得到的公式

$$sF(s)=f(0_+)+\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t$$

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=f(0_+)+\lim_{s\to 0}\int_{0_+}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\,t$$

$$=f(0_+)+\lim_{t\to\infty} f(t)-f(0_+)=\lim_{t\to\infty} f(t)$$

九．卷积

若$L[f_1(t)] = F_1(s)$，$L[f_2(t)] = F_2(s)$，$f_1(t), f_2(t)$为有始信号，

则

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$$

$$L[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} F_1(s) * F_2(s)$$

证明：

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f_1(\tau)u(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\ \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

交换积分次序

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^{\infty} f_1(\tau)\left[\int_0^{\infty} f_2(t-\tau)u(t-\tau)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau$$

令$x = t-\tau, t = x+\tau$,积分区间:$\int_{-\tau}^{\infty}$同$\int_0^{\infty}$

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^{\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\left[\int_0^{\infty} f_2(x)\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\tau$$

$$= F_1(s)F_2(s)$$

十．对s微分

若$L\left[f(t)\right]=F(s)$，则

$$L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}^n s} \quad n\text{取正整数}$$

常用形式：$L\left[tf(t)\right]=-\dfrac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$

十一．对s积分

若$L[f(t)]=F(s)$，则$L\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s$

证明：

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

两边对s积分：

$$\int_s^{\infty}F(s)\,\mathrm{d}s=\int_s^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s$$

交换积分次序：

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[\int_s^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left[-\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-st}\Big|_s^{\infty}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t}\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

§ 4.4 拉普拉斯逆变换

主要内容

由象函数求原函数的三种方法

部分分式法求拉氏逆变换

两种特殊情况

一．由象函数求原函数的三种方法

(1)部分分式法

(2)利用留数定理——围线积分法

(3)数值计算方法——利用计算机

二．$F(s)$的一般形式

通常$F(s)$具有如下的有理分式形式：

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1 s+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}$$

a_i,b_i为实数，m,n为正整数。当$m<n$, $F(s)$为有理真分式

分解 $$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{b_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

零点 $z_1,z_2,z_3\cdots z_m$是$A(s)=0$的根,称为$F(s)$的零点

（因为$A(s)=0\Rightarrow F(s)=0$）

极点 $p_1,p_2,p_3\cdots p_n$是$B(s)=0$的根,称为$F(s)$的极点

（因为$B(s)=0\Rightarrow F(s)=\infty$）

三. 拉氏逆变换的过程

找出$F(s)$的极点

将$F(s)$展成部分分式

查拉氏变换表求$f(t)$

四．部分分式展开法($m<n$)

1. 第一种情况：单阶实数极点

$$F(s)=\frac{A(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$p_1, p_2, p_3 \cdots p_n$为不同的实数根

$$F(s)=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-p_n}$$

求出$k_1, k_2, k_3 \cdots k_n$,即可将$F(s)$展开为部分分式

2. 第二种情况：极点为共轭复数

3. 第三种情况：有重根存在

第一种情况：单阶实数极点

$$F(s)=\frac{2s^2+3s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$$

(1)找极点 $F(s)=\dfrac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

(2)展成部分分式

$$F(s)=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s+3}$$

求系数 所以 $F(s)=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-5}{s+2}+\dfrac{6}{s+3}$

(3)逆变换 根据 $L\left[e^{-\alpha t}u(t)\right]=\dfrac{1}{s+\alpha}$

得：$f(t)=e^{-t}-5e^{-2t}+6e^{-3t} \quad (t\geq 0)$

如何求系数k_1, k_2, k_3……?

对等式两边同乘以$s+1$,且令$s=-1$

$$右边=(s+1)\left(\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s+3}\right)\Bigg|_{s=-1}=k_1$$

$$左边=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}$$

$$=(s+1)\frac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)}\Bigg|_{s=-1}=1$$

所以 $k_1=1$

同理:$k_2=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=-5,$

$$k_3=(s+3)F(s)\big|_{s=-3}=6$$

所以 $F(s)=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{-5}{s+2}+\dfrac{6}{s+3}$

第二种情况：极点为共轭复数

$$F(s)=\frac{A(s)}{D(s)\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]}=\frac{F_1(s)}{(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}$$

共轭极点出现在 $-\alpha\pm j\beta$

$$F(s)=\frac{K_1}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K_2}{s+\alpha+j\beta}+\cdots\cdots$$

$$K_1=(s+\alpha-j\beta)F(s)\Big|_{s=-\alpha+j\beta}=\frac{F_1(-\alpha+j\beta)}{2j\beta}$$

$$K_2=(s+\alpha-j\beta)F(s)\Big|_{s=-\alpha-j\beta}=\frac{F_2(-\alpha-j\beta)}{-2j\beta}$$

可见K_1,K_2成共轭关系：

$$K_1=A+jB\qquad K_2=A-jB=K_1^{*}$$

求$f(t)$

$$K_1 = A + \mathrm{j}B \qquad K_2 = A - \mathrm{j}B = K_1^*$$

$$f_C(t) = L^{-1}\left[\frac{K_1}{s+\alpha-\mathrm{j}\beta} + \frac{K_2}{s+\alpha+\mathrm{j}\beta}\right]$$

$$= \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(K_1\,\mathrm{e}^{\beta t} + K_1^*\,\mathrm{e}^{-\beta t}\right)$$

$$= 2\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[A\cos(\beta t) - B\sin(\beta t)\right]$$

例题

求$F(s)=\dfrac{s^2+3}{(s+2)(s^2+2s+5)}$的逆变换$f(t)$。

解答

$$F(s)=\frac{s^2+3}{(s+1+\mathrm{j}2)(s+1-\mathrm{j}2)(s+2)}$$

$$=\frac{K_0}{s+2}+\frac{K_1}{s+1-\mathrm{j}2}+\frac{K_2}{s+1+\mathrm{j}2}$$

$\alpha=-1,$

$\beta=2,$取$\beta>0$

$$K_0=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\frac{7}{5}$$

$$K_1=\left.\frac{s^2+3}{(s+2)(s+1+\mathrm{j}2)}\right|_{s=-1+\mathrm{j}2}=\frac{-1+\mathrm{j}2}{5}$$

$A=-\dfrac{1}{5},B=\dfrac{2}{5}$

$$f(t)=\frac{7}{5}\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{-t}\left[-\frac{1}{5}\cos(2t)-\frac{2}{5}\sin(2t)\right]\quad(t\geq 0)$$

另一种方法

求下示函数$F(s)$ 的逆变换$f(t)$: $F(s)=\dfrac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2+\beta^2}$

解:

$F(s)$具有共轭极点，不必用部分分式展开法

利用 $L\left[e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\right]=\dfrac{\beta}{\beta+(s+\alpha)^2}$

$$L\left[e^{-\alpha t}\cos(\beta t)\right]=\frac{s}{\beta^2+(s+\alpha)^2}$$

$$F(s)=\frac{s+\alpha}{(s+\gamma)^2+\beta^2}-\frac{-\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta}\beta}{(s+\gamma)^2+\beta^2}$$

求得 $f(t)=e^{-\alpha t}\cos(\beta t)-\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t)\quad(t\geq 0)$

3. 第三种情况：有重根存在

$$F(s)=\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+1}+\frac{k_3}{(s+1)^2}$$

k_1 为单根系数,k_3为重根最高次系数

$$k_1=(s+2)\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}\bigg|_{s=-2}=4$$

$$k_3=(s+1)^2\frac{s^2}{(s+2)(s+1)^2}\bigg|_{s=-1}=1$$

如何求k_2?

如何求k_2?

设法使部分分式只保留k_2，其他分式为0

对原式两边乘以$(s+1)^2\dfrac{s^2}{s+2}=(s+1)^2\dfrac{k_1}{s+2}+k_2(s+1)+k_3$

令$s=-1$时,只能求出$k_3=1$,若求k_2,两边再求导

$$右边=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+1)^2\frac{k_1}{s+2}+(s+1)k_2+k_3\right]$$

$$=\frac{2(s+1)(s+2)k_1-k_1(s+1)^2}{(s+2)^2}+k_2+0$$

$$左边=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+1)^2F(s)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{s^2}{s+2}\right]=\frac{2s(s+2)-s^2}{(s+2)^2}=\frac{s^2+4s}{(s+2)^2}$$

此时令$s=-1$,右$=k_2$　左边$=\left.\dfrac{s^2+4s}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=-3$

所以 $k_2=-3$

逆变换

$$F(s)=\frac{4}{s+2}+\frac{-3}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

所以 $f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=4\mathrm{e}^{-2t}-3\mathrm{e}^{-t}+t\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \left(t\geq 0\right)$

一般情况

$$\frac{A(s)}{(s-p_1)^k}=\frac{k_{11}}{(s-p_1)^k}+\frac{k_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}+\cdots+\frac{k_{1(k-1)}}{(s-p_1)^2}+\frac{k_{1k}}{s-p_1}$$

求k_{11}，方法同第一种情况：

$$k_{11}=F_1(s)\big|_{s=p_1}=(s-p_1)^k F(s)\big|_{s=p_1}$$

求其他系数，要用下式

$$k_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}\,s^{i-1}}F_1(s)\bigg|_{s=p_1}\qquad i=1,2,3,\cdots k$$

$$当i=2,\quad K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}F_1(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$当i=3,\quad K_{13}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,s^2}F_1(s)\Big|_{s=p_1}$$

五．$F(s)$两种特殊情况

非真分式——— 化为真分式＋多项式

含e^{-s}的非有理式

1. 非真分式——真分式＋多项式

$$F(s)=\frac{s^3+5s^2+9s+7}{s^2+3s+2}$$

作长除法

$$\begin{array}{r}
s+2 \\
s^2+3s+2\overline{\big)\, s^3+5s^2+9s+7} \\
\underline{s^3+3s^2+2s} \\
2s^2+7s+7 \\
\underline{2s^2+6s+4} \\
s+3
\end{array}$$

$$F(s)=s+2+\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=s+2+F_1(s)$$

$$F_1(s)=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$f(t)=\delta'(t)+2\delta(t)+2\mathrm{e}^{-t}u(t)-\mathrm{e}^{-2t}u(t)$$

2. 含e^{-s}的非有理式

e^{-s} 项不参加部分分式运算 ， 求解时利用时移性质 。

$$\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+3s+2}=F_1(s)\mathrm{e}^{-2s}$$

$$F_1(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+2}$$

所以 $f_1(t)=L^{-1}\left[F_1(s)\right]=\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$

所以 $f\left(t\right)=f_1\left(t-2\right)=\left[\mathrm{e}^{-(t-2)}-\mathrm{e}^{-2(t-2)}\right]u(t-2)$