

第 2 章习题答案

2-1 绘出下列各时间函数的波形图。

(1) $f_1(t) = tu(t-1)$

(2) $f_2(t) = t[u(t) - u(t-1)] + u(t-1)$

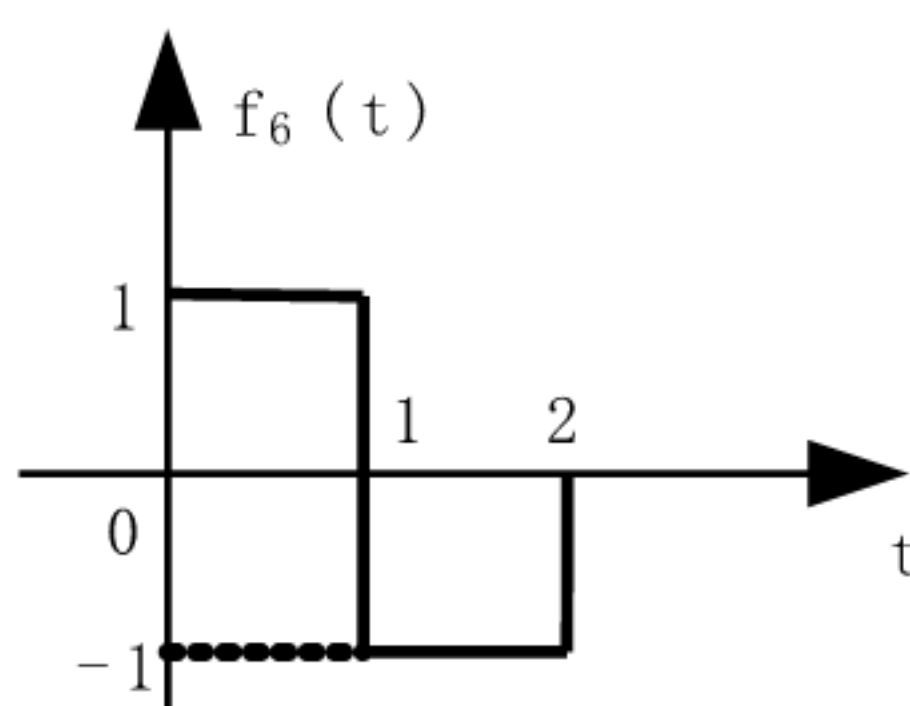
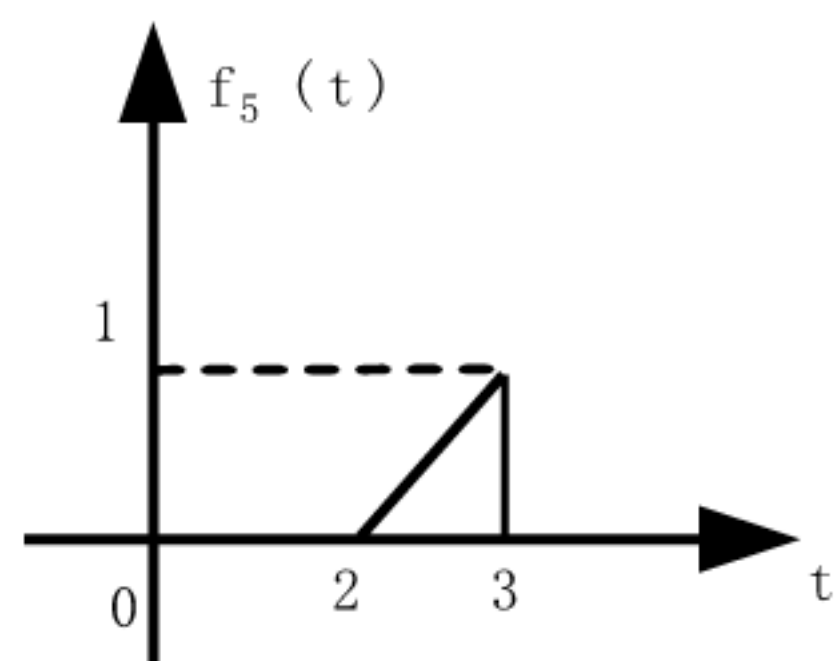
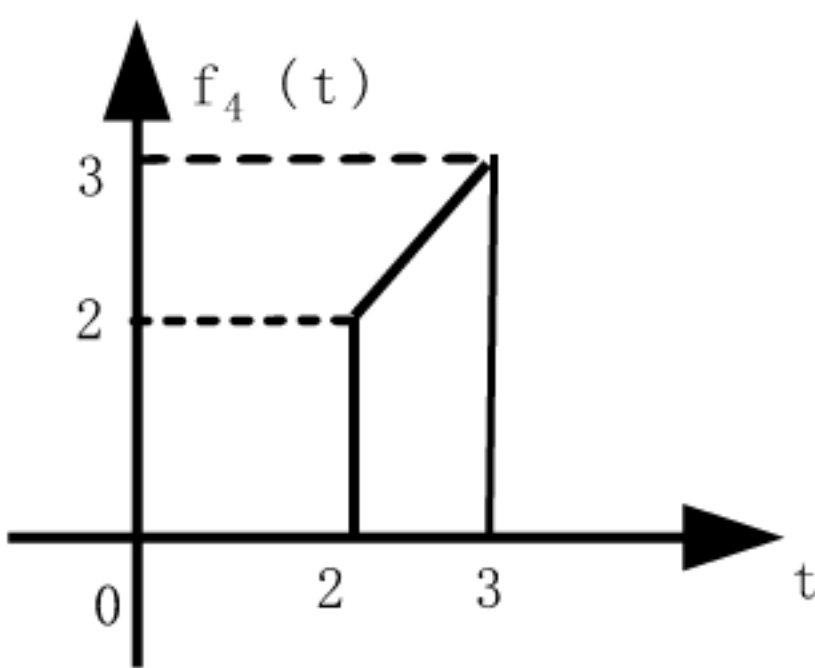
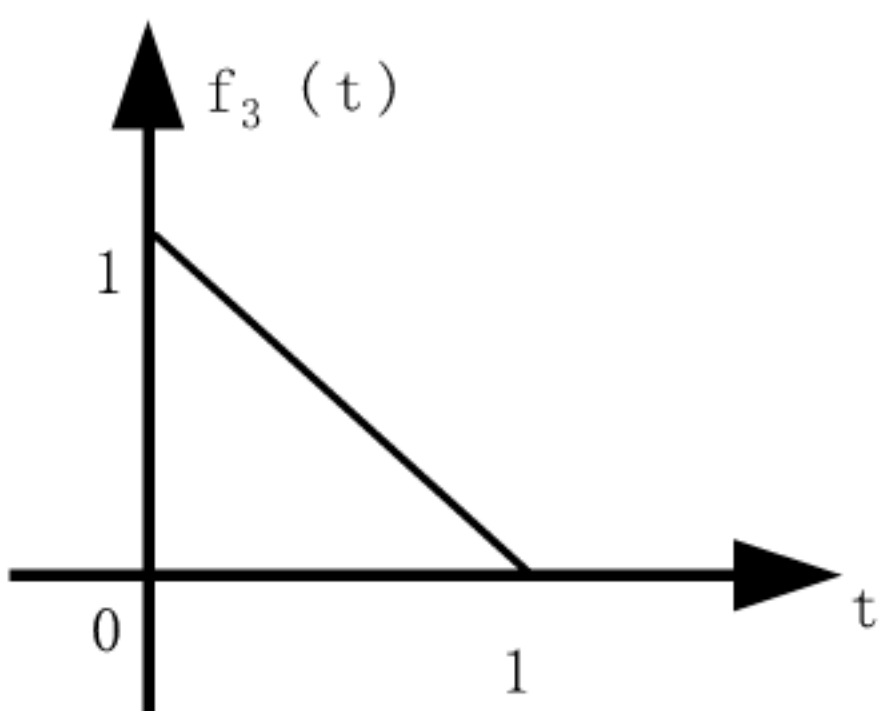
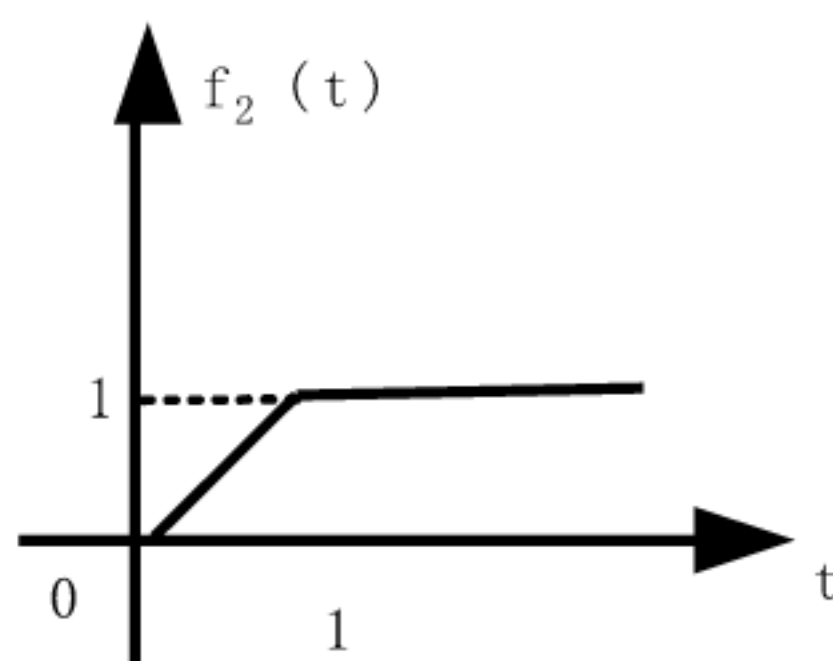
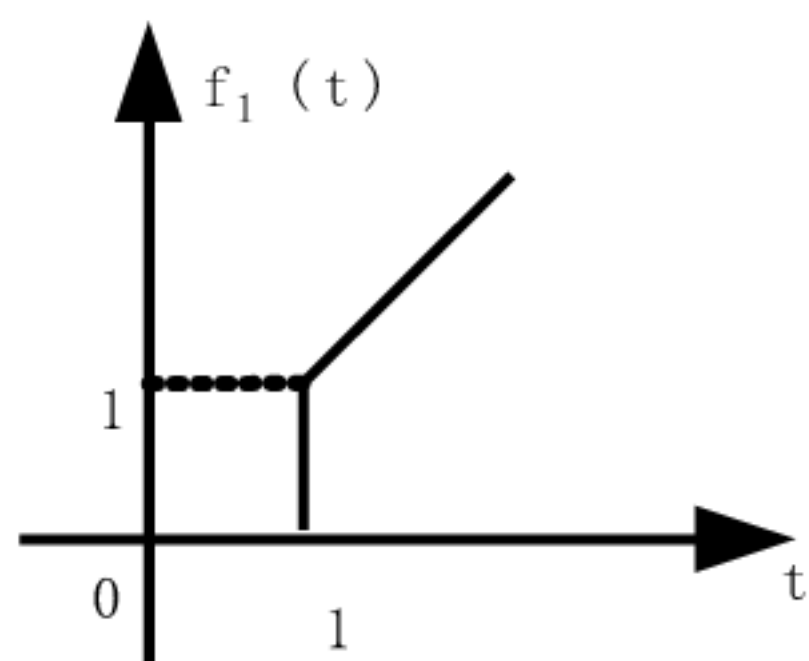
(3) $f_3(t) = -(t-1)[u(t) - u(t-1)]$

(4) $f_4(t) = t[u(t-2) - u(t-3)]$

(5) $f_5(t) = (t-2)[u(t-2) - u(t-3)]$

(6) $f_6(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$

解：



2-5 已知 $f(t)$ 波形如图题 2-5 所示，试画出下列信号的波形图。

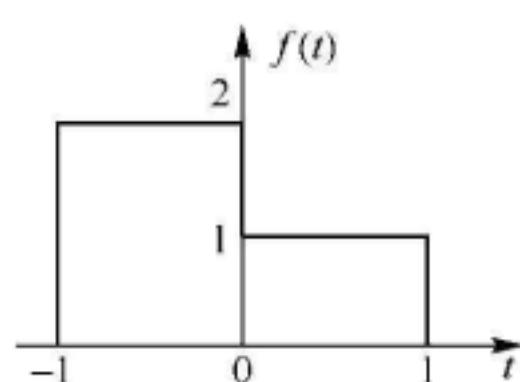
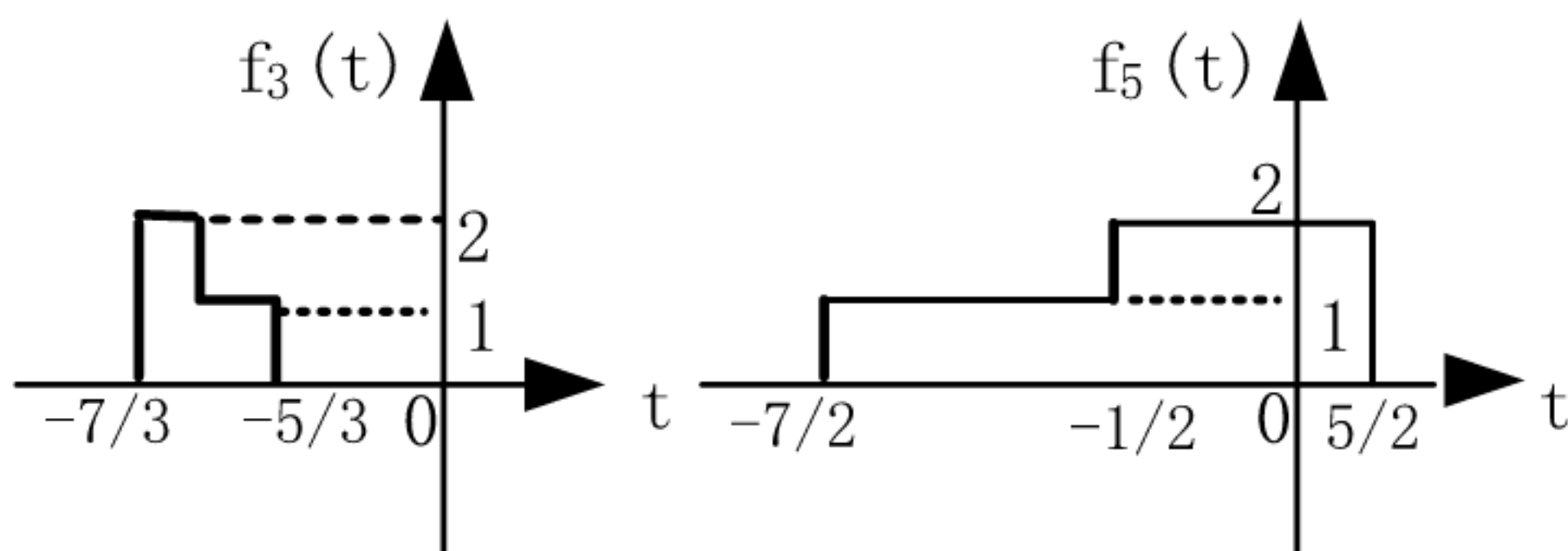


图 题 2-5

$$(3) \quad f_3(t) = f(3t + 6)$$

$$(5) \quad f_5(t) = f\left(-\frac{1}{3}t - \frac{1}{6}\right)$$

解:



2-6 已知 $f(t)$ 波形如图题 2-6 所示, 试画出下列信号的波形图。

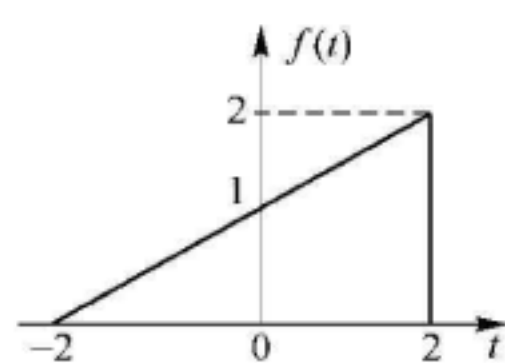
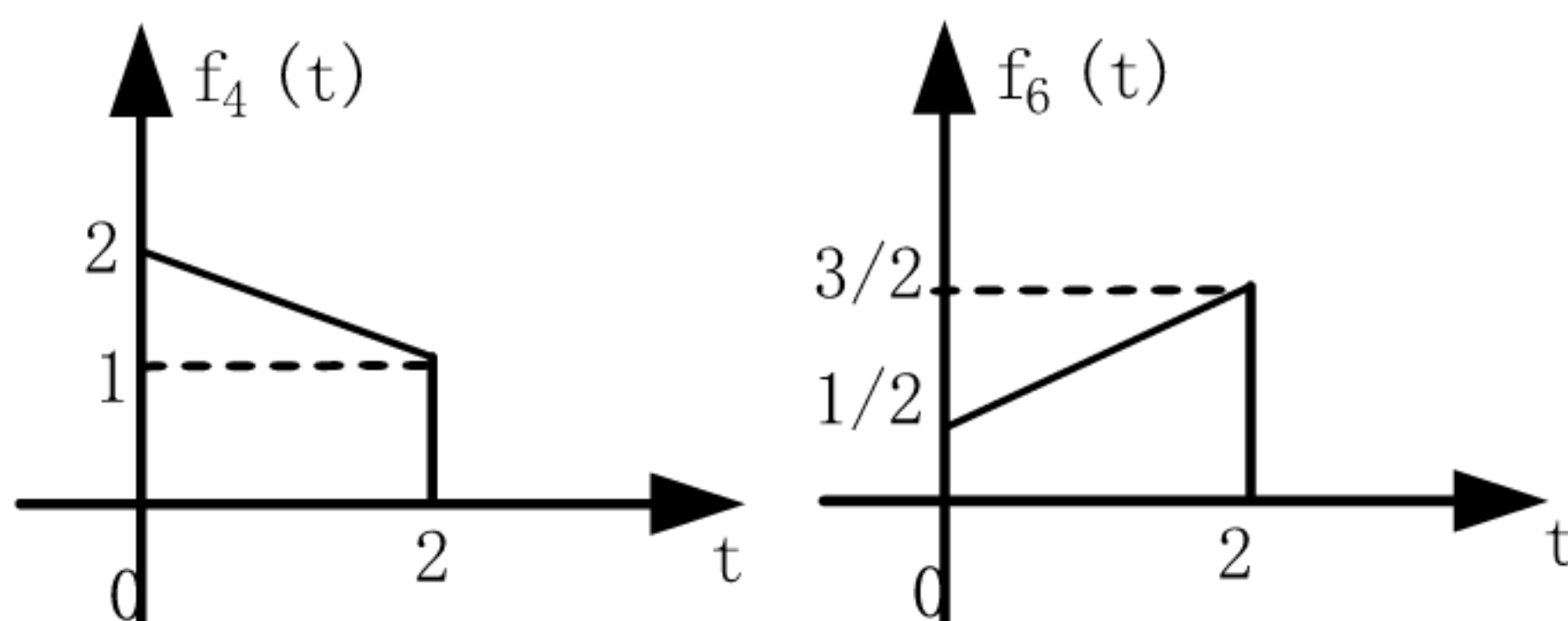


图 题 2-6

$$(4) \quad f_4(t) = f(2 - t)u(2 - t)$$

$$(6) \quad f_6(t) = f(t - 1)[u(t) - u(t - 2)]$$

解:



2-7 计算下列各式。

$$(1) \quad f(t + t_0)\delta(t)$$

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t + t_0)\delta(t - t_0)dt$$

$$(3) \quad \int_{-4}^2 e^t \delta(t + 3)dt$$

$$(4) \quad \int_0^{\infty} e^{-t} \sin t \delta(t + 1)dt$$

$$(5) \quad \frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)]$$

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)\delta(t)dt$$

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0 - t)\delta(t)dt$$

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)u\left(t - \frac{t_0}{2}\right)dt$$

$$(9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)u(t - 2t_0)dt$$

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (e^t + t)\delta(t + 2)dt$$

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} (t + \sin t)\delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right)dt$$

$$(12) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega t}[\delta(t) - \delta(t - t_0)]dt$$

解: (1) 原式 = $f(t_0)\delta(t)$

$$(2) \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0 + t_0) \delta(t - t_0) dt = f(2t_0)$$

$$(3) \text{原式} = \int_{-4}^2 e^{-3} \delta(t + 3) dt = e^{-3}$$

$$(4) \text{原式} = \int_0^{+\infty} e^{-1} \sin(-1) \delta(t + 1) dt = 0 \quad (\delta(t + 1) \text{不在积分区间内})$$

$$(5) \text{原式} = \frac{d}{dt} [e^0 \delta(t)] = \delta'(t)$$

$$(6) \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0 - t_0) \delta(t) dt = f(-t_0)$$

$$(7) \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0 - 0) \delta(t) dt = f(t_0)$$

$$(8) \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) u(t_0 - \frac{t_0}{2}) dt = u(\frac{t_0}{2}) = \begin{cases} 0 & t_0 < 0 \\ 1 & t_0 > 0 \end{cases}$$

$$(9) \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) u(t_0 - 2t_0) dt = u(-t_0) = \begin{cases} 0 & t_0 > 0 \\ 1 & t_0 < 0 \end{cases}$$

$$(10) \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-2} - 2) \delta(t + 2) dt = e^{-2} - 2$$

$$(11) \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}) \delta(t - \frac{\pi}{6}) dt = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$$

$$(12) \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} [e^0 \delta(t) - e^{-j\Omega t_0} \delta(t - t_0)] dt = 1 - e^{-j\Omega t_0}$$

2-8 画出图题 2-8 所示各信号的偶分量和奇分量的波形。

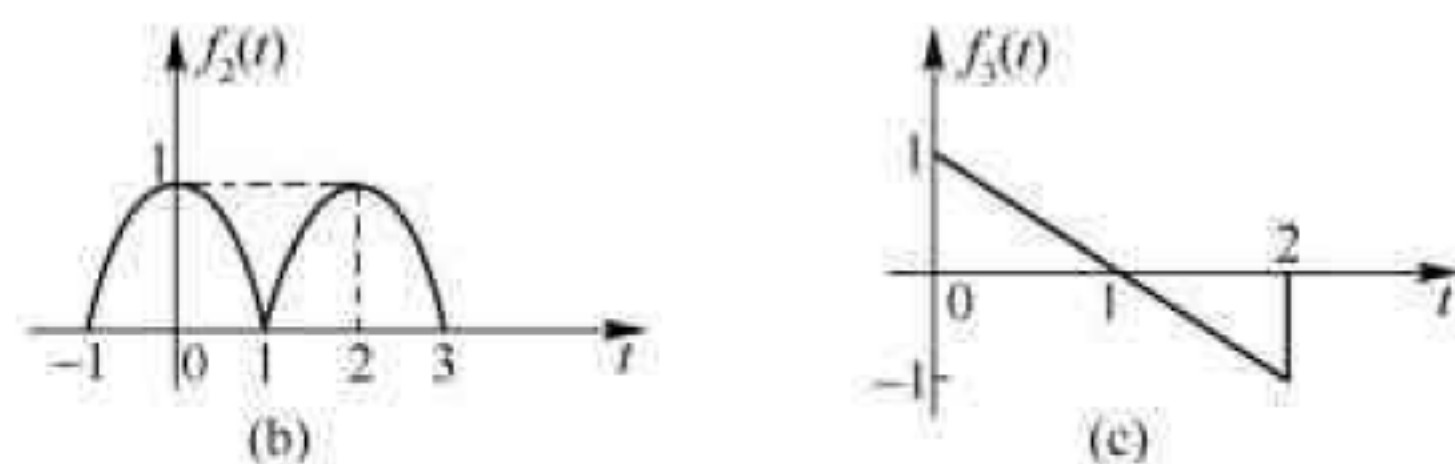
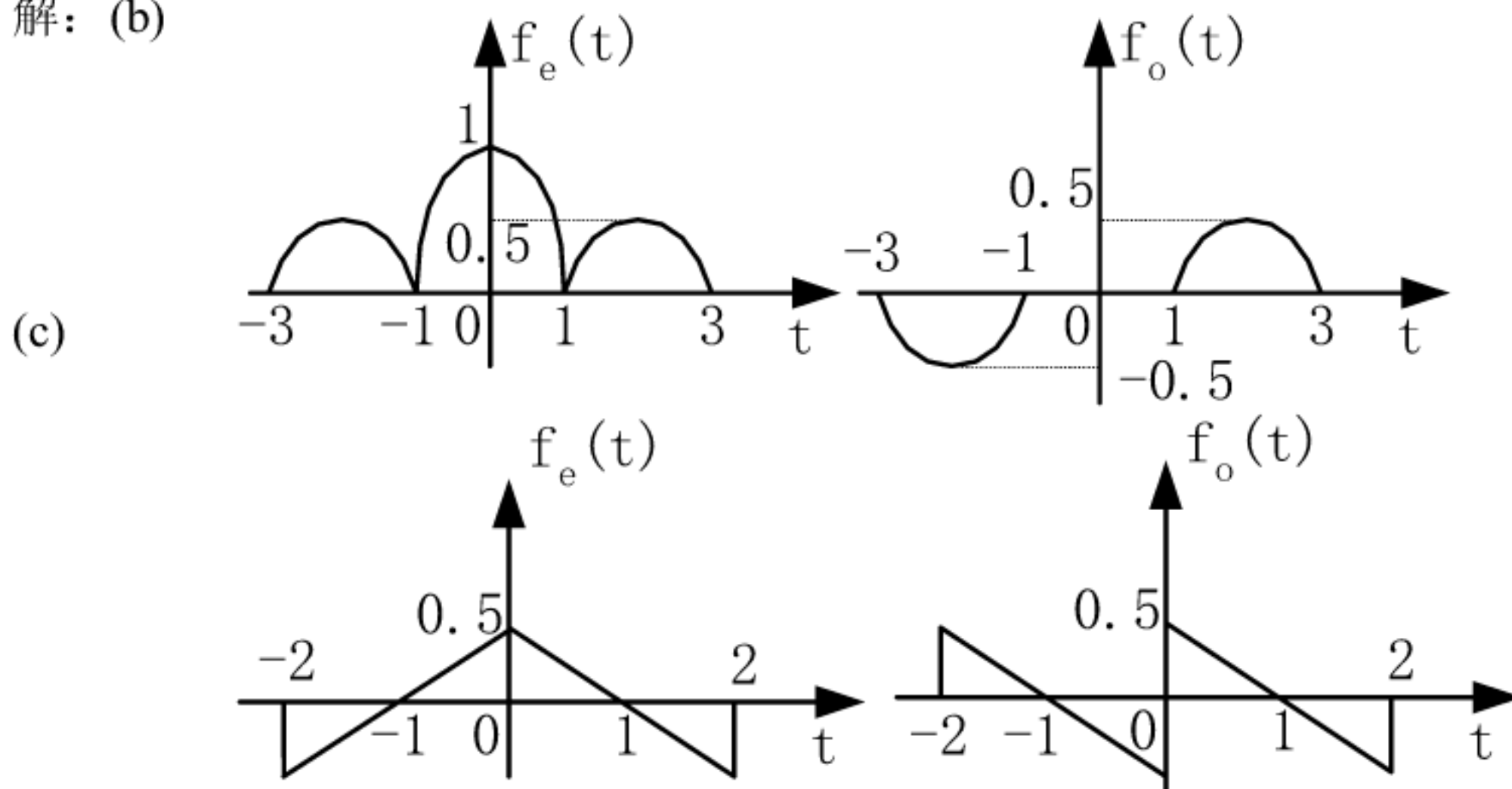


图 题 2-8

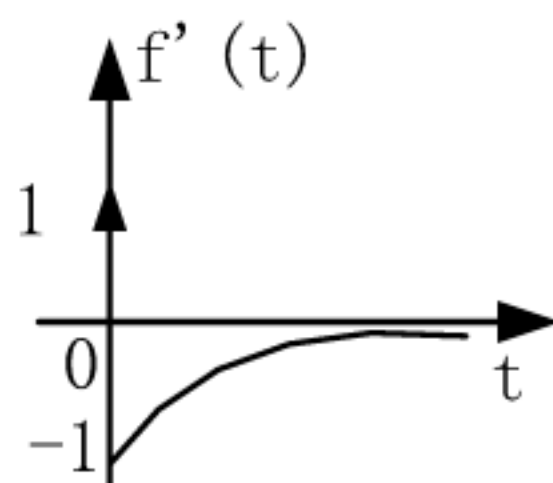
解: (b)



2-12 已知 $f(t) = e^{-t}u(t)$, 求 $f'(t)$ 的表达式, 并画出 $f'(t)$ 的波形图。

解: $f'(t) = e^{-t}\delta(t) - e^{-t}u(t)$

$$= \delta(t) - e^{-t}u(t)$$



2-13 已知 $f(t)$ 的波形如图题 2-13 所示, 求 $f'(t)$ 和 $f''(t)$, 并分别画出 $f'(t)$ 和 $f''(t)$ 的波形图。

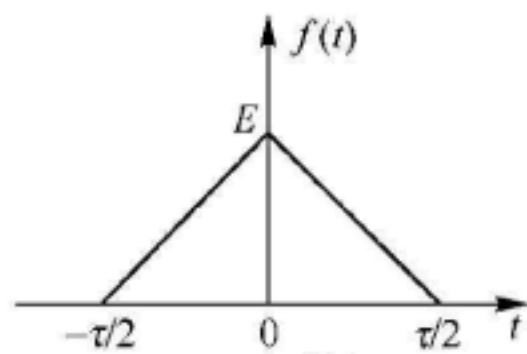
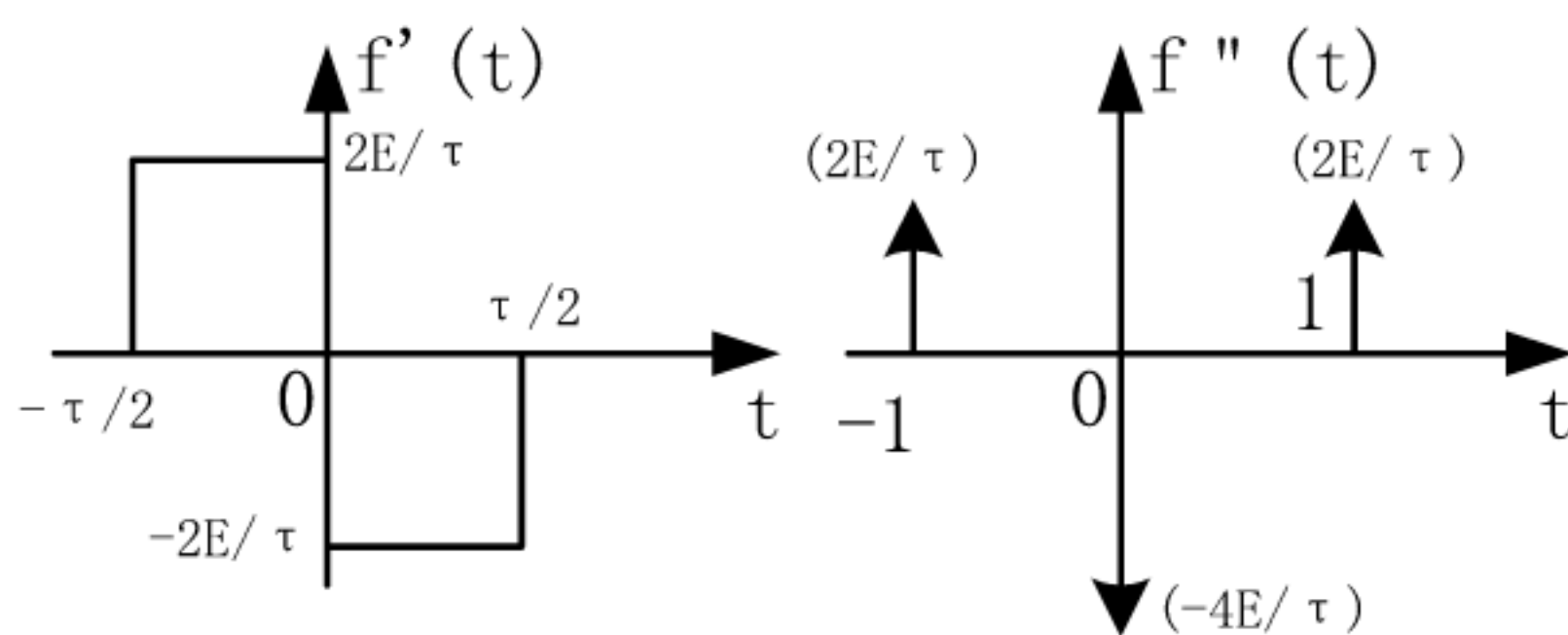


图 题 2-13

$$\text{解: } f'(t) = \frac{2E}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u(t) \right] - \frac{2E}{\tau} \left[u(t) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{2E}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2u(t) + u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$$f''(t) = \frac{2E}{\tau} \left[\delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$



2-14 对下列函数进行积分运算: $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$, 并画出积分后的波形图。

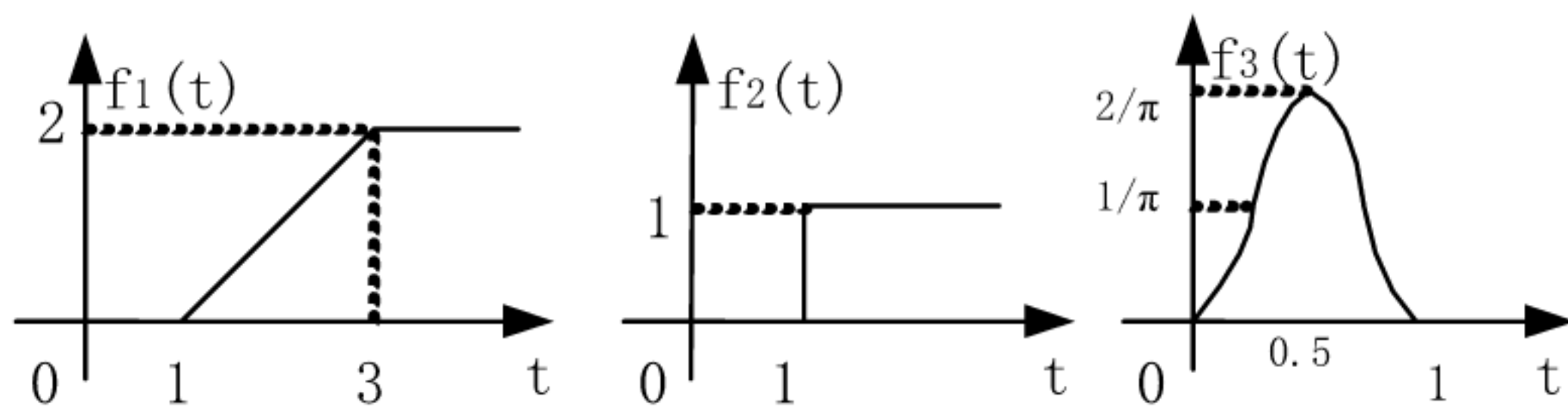
(1) $f_1(t) = u(t-1) - u(t-3)$ (2) $f_2(t) = \delta(t-1)$ (3) $f_3(t) = \sin \pi t u(t)$

解: $f_1^{(-1)}(t) = \int_1^t u(\tau-1) d\tau - \int_3^t u(\tau-3) d\tau$

$$= \tau \Big|_1^t u(t-1) - \tau \Big|_3^t u(t-3) = (t-1)u(t-1) - (t-3)u(t-3)$$

(2) $f_2^{(-1)}(t) = u(t-1)$

(3) $f_3^{(-1)}(t) = \int_0^t \sin \pi \tau d\tau = \frac{-1}{\pi} \cos \pi \tau \Big|_0^t = \frac{1}{\pi} (1 - \cos \pi t)$



第 3 章习题答案

3-1 已知周期矩形脉冲信号的重复频率 $f = 5 \text{ kHz}$, 脉宽 $\tau = 20 \mu\text{s}$, 幅度 $E = 10 \text{ V}$, 如图题 3-1 所示。用可变中心频率的选频回路能否从该周期矩形脉冲信号中选取 5, 12, 20, 50, 80 及 100 kHz 频率分量来? 要求画出图题 3-1 所示信号的频谱图。

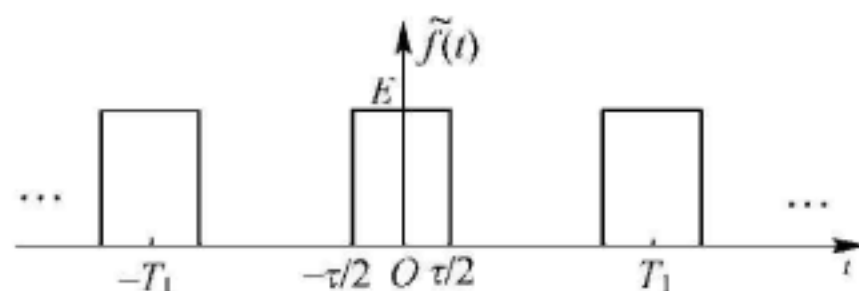
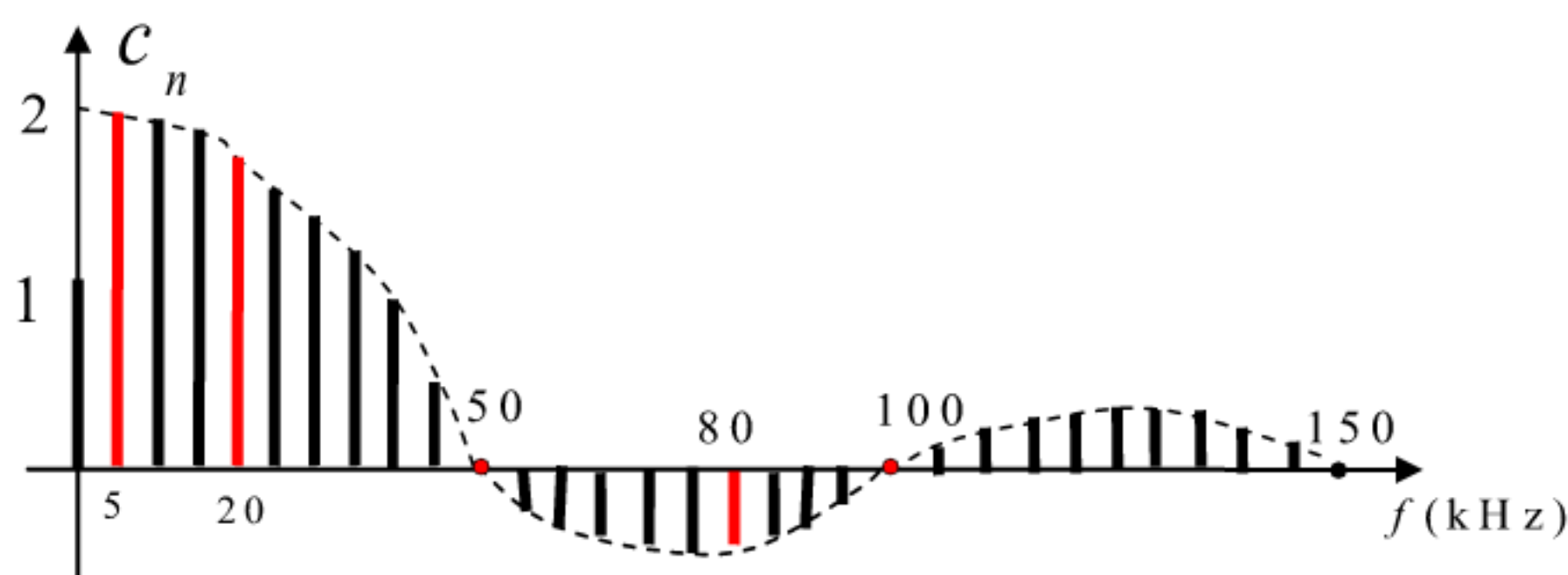


图 题 3-1

解: $f = 5\text{kHz}$, $\tau = 20\mu\text{s}$, $E = 10\text{V}$, $T_1 = \frac{1}{f} = 200\mu\text{s}$, $\Omega_1 = 2\pi f = 10^4\pi$

频谱图为



从频谱图看出, 可选出 5、20、80kHz 的频率分量。

3-3 求图题 3-3 所示周期锯齿信号指数形式的傅里叶级数, 并大致画出频谱图。

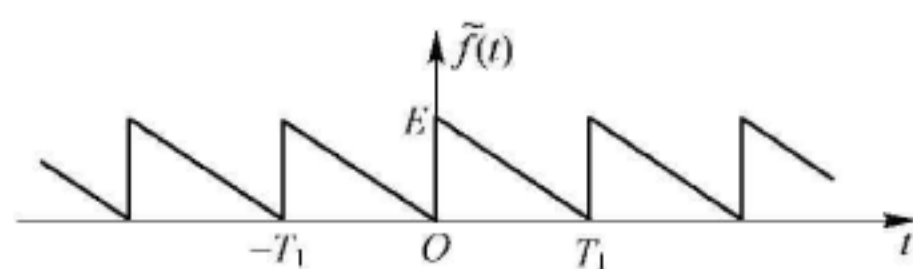


图 题 3-3

解: $f(t)$ 在一个周期 $(0, T_1)$ 内的表达式为: $f(t) = -\frac{E}{T_1}(t - T_1)$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} -\frac{E}{T_1}(t - T_1) e^{-jn\Omega_1 t} dt = -\frac{jE}{2n\pi} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

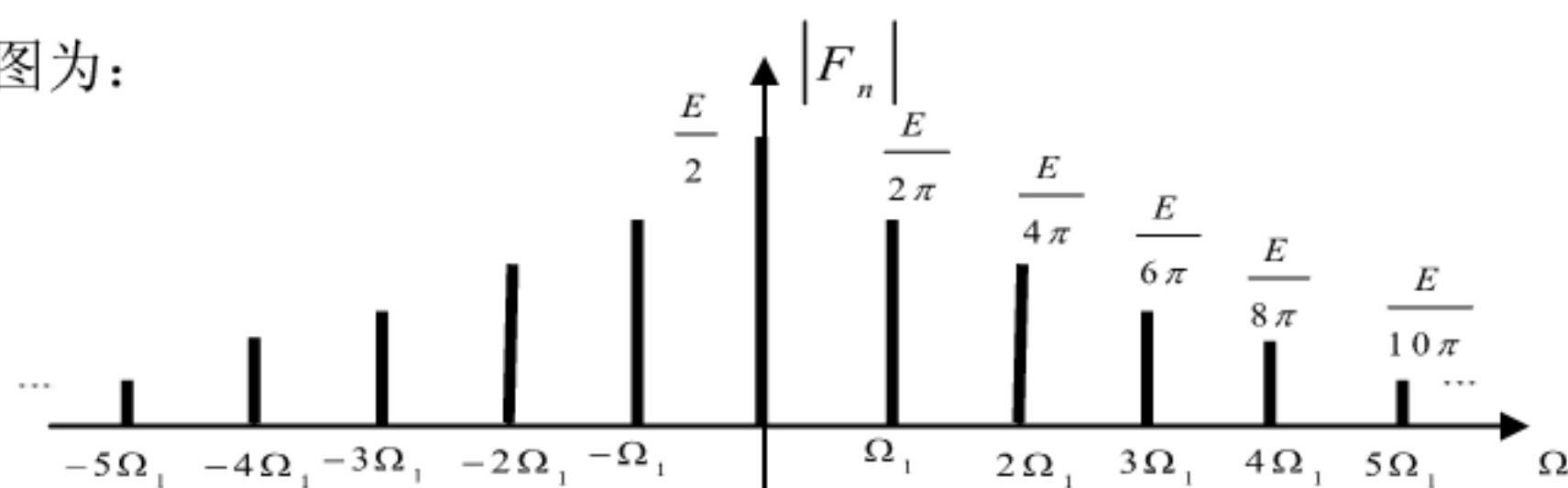
$$F_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) dt = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} -\frac{E}{T_1}(t - T_1) dt = \frac{E}{2}$$

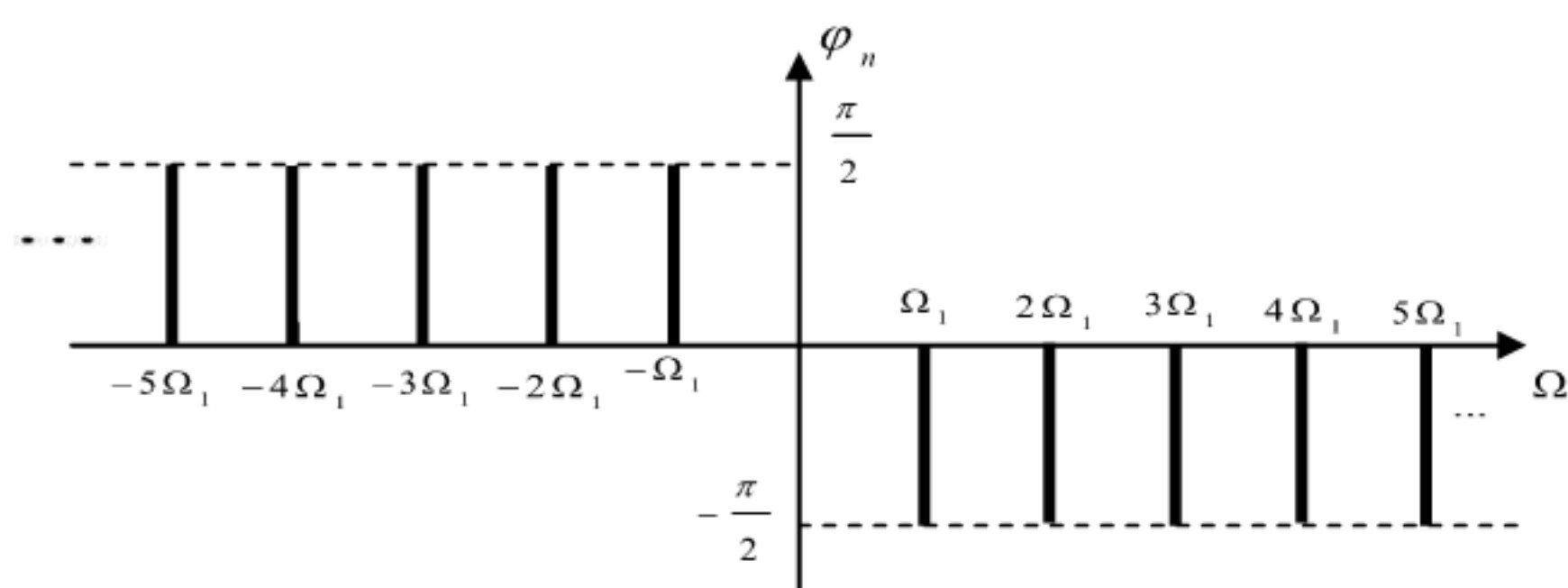
傅氏级数为:

$$f(t) = \frac{E}{2} - \frac{jE}{2\pi} e^{j\Omega_1 t} + \frac{jE}{2\pi} e^{-j\Omega_1 t} - \frac{jE}{4\pi} e^{j2\Omega_1 t} + \frac{jE}{4\pi} e^{-j2\Omega_1 t} - \dots$$

$$|F_n| = \left| \frac{E}{2n\pi} \right| \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots), \quad \varphi_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (n > 0) \\ \frac{\pi}{2} & (n < 0) \end{cases}$$

频谱图为:





3-4 求图题 3-4 所示半波余弦信号的傅里叶级数, 若 $E = 10 \text{ V}$, $f = 10 \text{ kHz}$, 大致画出幅度谱。

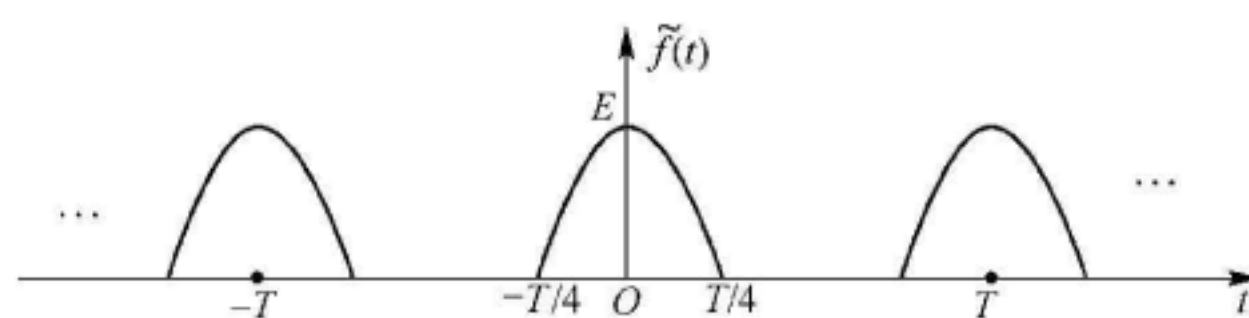


图 题 3-4

解: 由于 $f(t)$ 是偶函数, 所以展开式中只有余弦分量, 故傅氏级数中 $b_n = 0$, 另

由图可知 $f(t)$ 有直流分量, $f(t)$ 在一个周期 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 内的表达式为:

$$f(t) = \begin{cases} E \cos \Omega_1 t & |t| < \frac{T_1}{4} \\ 0 & |t| > \frac{T_1}{4} \end{cases} \quad \text{其中: } \Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} E \cos \Omega_1 t dt = \frac{E}{\pi}$$

$$a_n = c_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{4}}^{\frac{T_1}{4}} E \cos \Omega_1 t \cdot e^{-jn\Omega_1 t} dt$$

$$= \frac{E}{\pi} \left[\frac{\sin \frac{n+1}{2} \pi}{n+1} + \frac{\sin \frac{n-1}{2} \pi}{n-1} \right] = -\frac{2E}{\pi} \frac{1}{n^2-1} \cos \frac{n\pi}{2} \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

$$a_1 = c_1 = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j\Omega_1 t} dt = \frac{E}{2}$$

所以, $f(t)$ 的三角形式的傅里叶级数为:



$$f(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \cos \Omega_1 t + \frac{2E}{3\pi} \cos 2\Omega_1 t - \frac{2E}{15\pi} \cos 4\Omega_1 t + \dots$$

3-6 利用信号 $\tilde{f}(t)$ 的对称性, 定性判断图题 3-6 中各周期信号的傅里叶级数中所含有的频率分量。

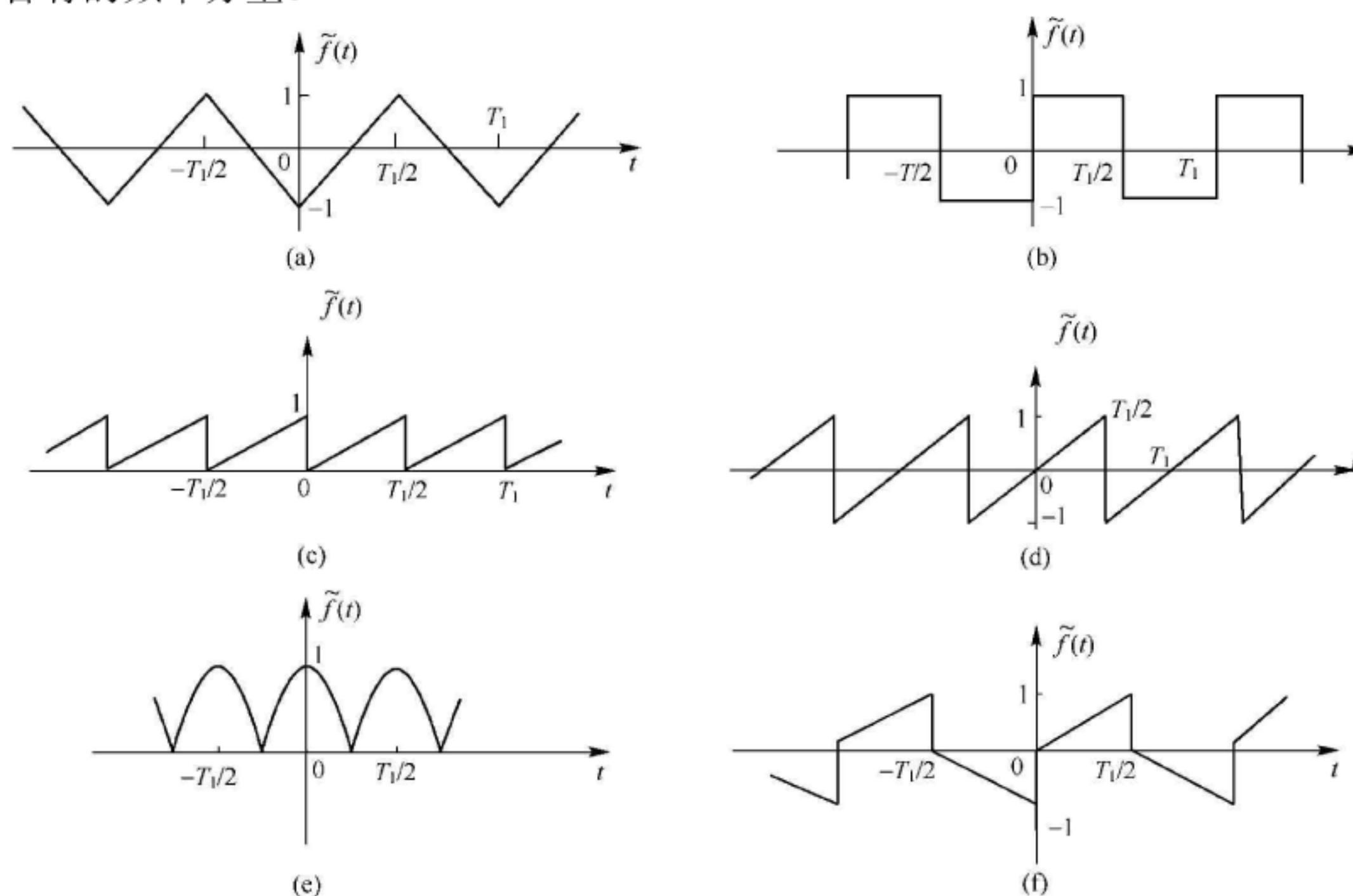


图 题 3-6

解: (a) $f(t)$ 为偶函数及奇谐函数, 傅氏级数中只包含奇次谐波的余弦分量。

(b) $f(t)$ 为奇函数及奇谐函数, 傅氏级数中只包含奇次谐波的正弦分量。

(c) $f(t)$ 为偶谐函数, 而且若将直流分量 (1/2) 去除后为奇函数, 所以傅氏级数中只包含直流以及偶次谐波的正弦分量。

(d) $f(t)$ 为奇函数, 傅氏级数中只包含正弦分量。

(e) $f(t)$ 为偶函数及偶谐函数, 傅氏级数中只包含直流以及偶次谐波的余弦分量。

(f) $f(t)$ 为奇谐函数, 傅氏级数中只包含奇次谐波分量。

3-7 已知周期函数 $\tilde{f}(t)$ 前四分之一周期的波形如图题 3-7 所示。根据下列各种情况的要求画出 $\tilde{f}(t)$ 在一个周期 ($0 < t < T$) 的波形。

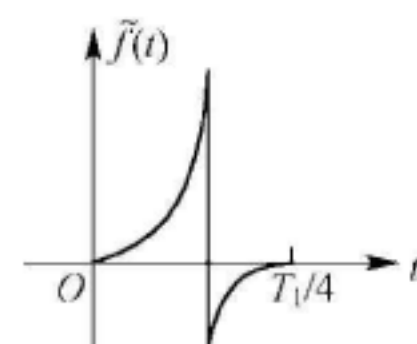


图 题 3-7

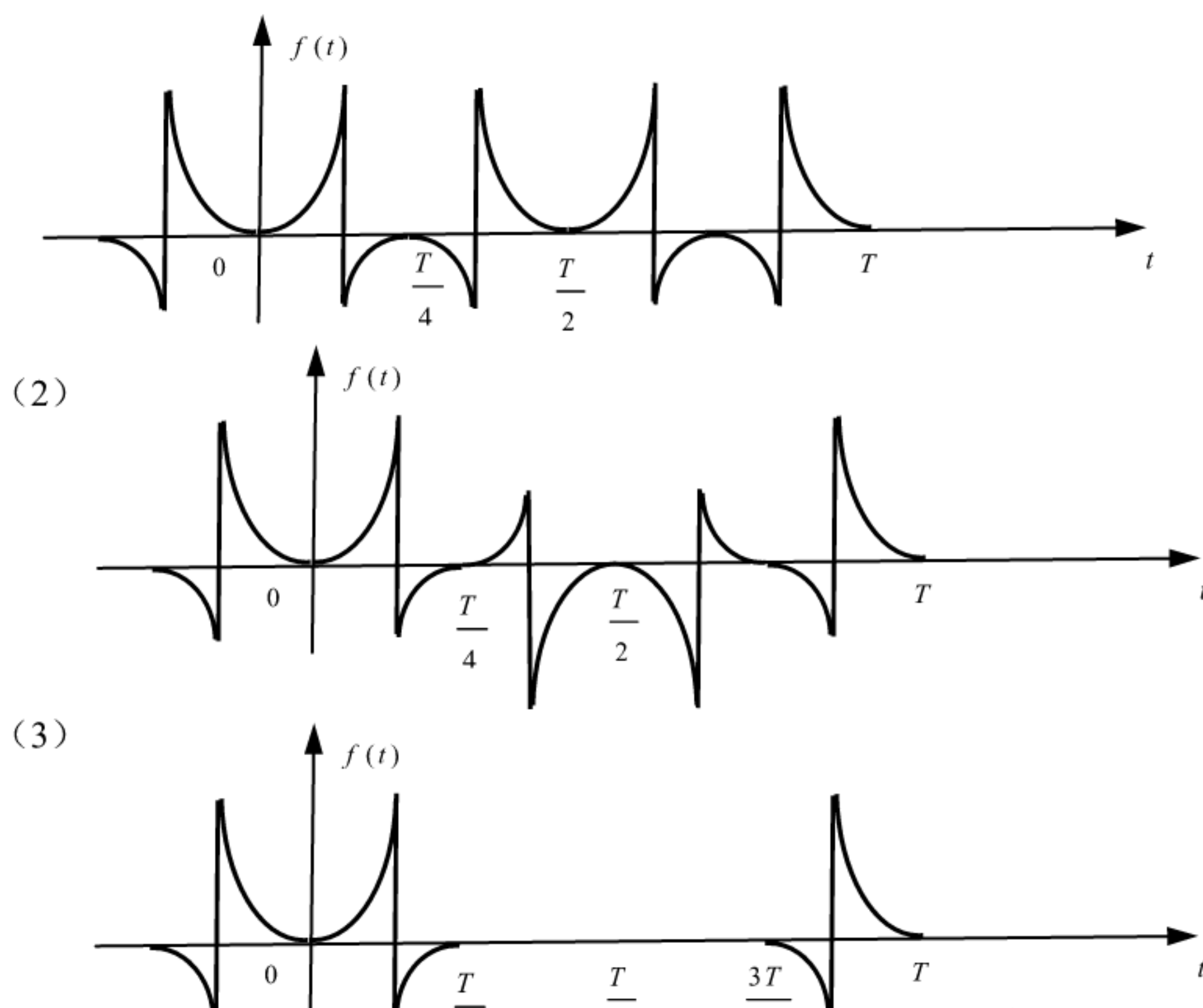
- (1) $\tilde{f}(t)$ 是偶函数, 只含有直流分量和偶次谐波分量;
- (2) $\tilde{f}(t)$ 是偶函数, 只含有奇次谐波分量;
- (3) $\tilde{f}(t)$ 是偶函数, 含有直流分量、偶次和奇次谐波分量。

解: (1) 由 $f(-t) = f(t)$ 画出 $f(t)$ 在 $[-\frac{T}{4}, 0]$ 内的波形, 由 $f(t)$ 在 $[-\frac{T}{4}, 0]$ 内的波

形及 $f(t)$ 是偶谐函数, 它在 $[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}]$ 内的波形与它在 $[-\frac{T}{4}, 0]$ 内的波形相同, 它在

$[\frac{T}{2}, T]$ 内的波形与它在 $[0, \frac{T}{2}]$ 内的波形相同。根据上述分析可画出 $f(t)$ 在 $[0, T]$

内的波形。按上述类似的方法可画出 (2) 和 (3)。



3-8 求图题 3-8 所示半波余弦脉冲的傅里叶变换, 并画出频谱图。

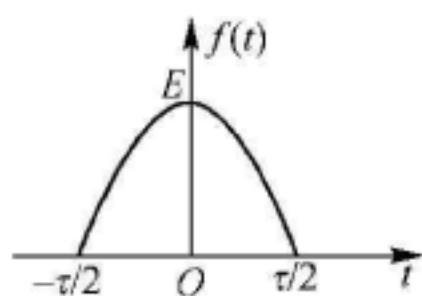


图 题 3-8

解法一：按定义求

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E \cos \frac{\pi}{\tau} t \cdot e^{-j\Omega t} dt$$

由于 $f(t)$ 是偶函数，所以

$$\begin{aligned} F(j\Omega) &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E \cos \frac{\pi}{\tau} t \cos \Omega t dt = 2 \int_0^{\frac{\tau}{2}} E \cos \frac{\pi}{\tau} t \cos \Omega t dt \\ &= \int_0^{\frac{\tau}{2}} E \left[\cos\left(\frac{\pi}{\tau} + \Omega\right)t + \cos\left(\frac{\pi}{\tau} - \Omega\right)t \right] dt = \frac{E\tau}{2} \left[\text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{E\tau}{2} \text{Sa} \left[\left(\Omega + \frac{\pi}{\tau} \right) \frac{\tau}{2} \right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa} \left[\left(\Omega - \frac{\pi}{\tau} \right) \frac{\tau}{2} \right] \end{aligned}$$

化简得：
$$F(j\Omega) = \frac{2E\tau}{\pi} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\Omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}$$

解法二：利用卷积定理求

设： $f_1(t) = \cos \frac{\pi}{\tau} t, \quad f_2(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$

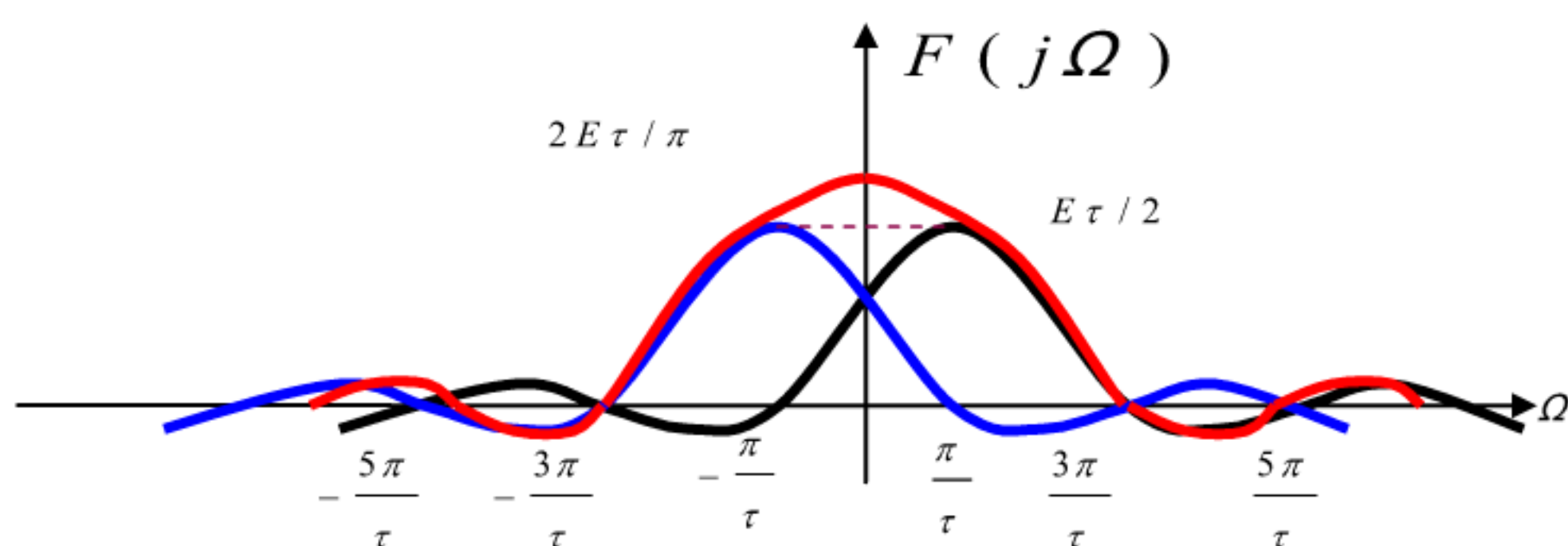
则 $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$ ，于是 $F(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} F_1(j\Omega) * F_2(j\Omega)$

而 $F_1(j\Omega) = \pi \left[\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{\tau}\right) \right], \quad F_2(j\Omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \text{故 } F(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \pi \left[\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{\tau}\right) \right] * E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{E\tau}{2} \text{Sa} \left[\left(\Omega + \frac{\pi}{\tau} \right) \frac{\tau}{2} \right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa} \left[\left(\Omega - \frac{\pi}{\tau} \right) \frac{\tau}{2} \right] \end{aligned}$$

$F(j\Omega)$ 的频谱是将矩形脉冲的频谱 $E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$ 分别向左、右移动 $\frac{\pi}{\tau}$ （幅度乘以

$\frac{1}{2}$ ）后叠加的结果。



3-10 求图题 3-10 所示 $F(j\Omega)$ 的傅里叶逆变换 $f(t)$ 。

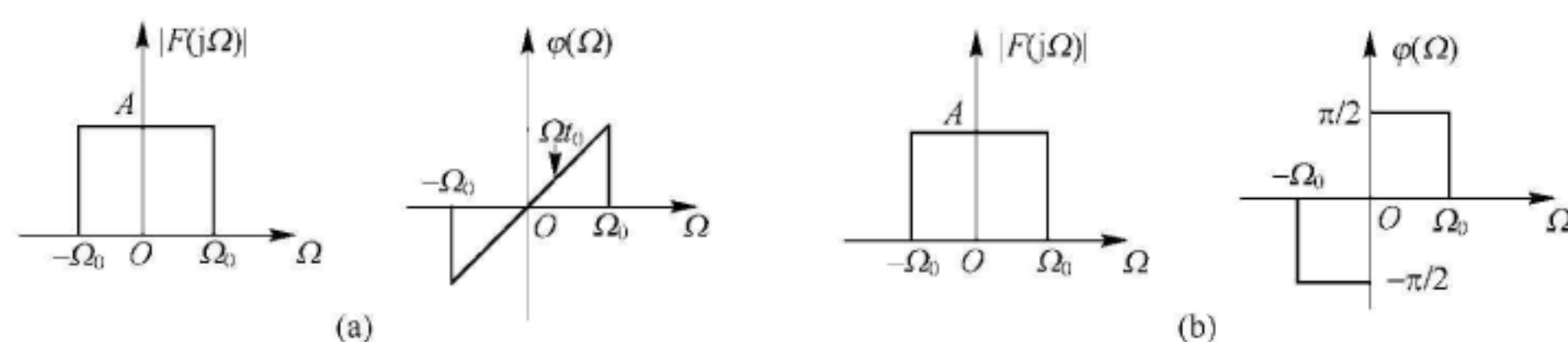


图 题 3-10

解: (a) $F(j\Omega) = Ae^{j\Omega t_0} \quad (-\Omega_0 < \Omega < \Omega_0)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} Ae^{j\Omega t_0} e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \frac{A}{j(t+t_0)} \left[e^{j(t+t_0)\Omega_0} - e^{-j(t+t_0)\Omega_0} \right]$$

$$= \frac{A\Omega_0}{\pi} \text{Sa}[\Omega_0(t+t_0)]$$

$$(b) \quad F(j\Omega) = \begin{cases} Ae^{-j\frac{\pi}{2}} & (-\Omega_0 < \Omega < 0) \\ Ae^{j\frac{\pi}{2}} & (0 < \Omega < \Omega_0) \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\Omega_0}^0 Ae^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\Omega t} d\Omega + \int_0^{\Omega_0} Ae^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\Omega t} d\Omega \right] = -\frac{A\Omega_0}{\pi} \sin \frac{\Omega_0 t}{2} \text{Sa} \frac{\Omega_0 t}{2}$$

$$= \frac{A}{\pi t} (\cos \Omega_0 t - 1)$$

3-13 求函数 $\text{Sa}(\Omega_c t)$ 的傅里叶变换。

解: 利用对偶性求

因 为 $E_{\tau}(\leftrightarrow G_{\tau}) = \frac{\Omega \tau}{2}$, 所 以

$$E_{\tau} \text{Sa} \left(\frac{t\tau}{2} \right) \leftrightarrow \pi 2E_{\tau} \delta(\Omega - \Omega_c) = \pi 2E_{\tau} \delta(\Omega)$$

$$\text{Sa}\left(\frac{t\tau}{2}\right) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\tau} G_{\tau}(\Omega)$$

$$\text{令 } \Omega_c = \frac{\tau}{2}, \text{ 则 } \text{Sa}(\Omega_c t) \leftrightarrow \frac{\pi}{\Omega_c} G_{2\Omega_c}(\Omega)$$

$$\text{即: } \mathcal{F}[\text{Sa}(\Omega_c t)] = \frac{\pi}{\Omega_c} [u(\Omega + \Omega_c) - u(\Omega - \Omega_c)]$$

3-15 对图题 3-15 所示波形, 若已知 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(j\Omega)$, 利用傅里叶变换的性质求图中 $f_2(t)$, $f_3(t)$ 和 $f_4(t)$ 的傅里叶变换。

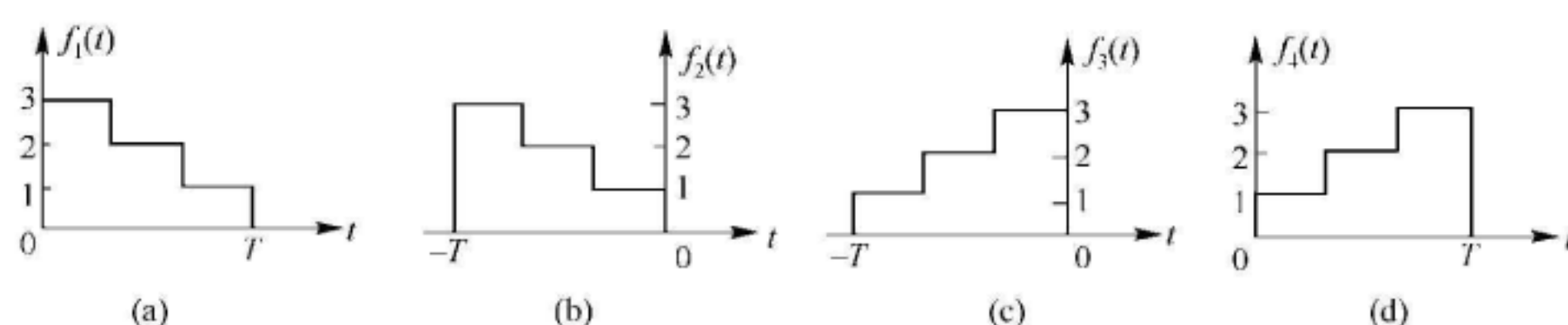


图 题 3-15

解: 已知 $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(j\Omega)$

$$\because f_2(t) = f_1(t+T), \quad \therefore F_2(j\Omega) = F_1(j\Omega) \cdot e^{j\Omega T}$$

$$\because f_3(t) = f_1(-t), \quad \therefore F_3(j\Omega) = F_1(-j\Omega)$$

$$\because f_4(t) = f_1[-(t-T)] = f_3(t-T) \quad \therefore F_4(j\Omega) = F_1(-j\Omega) e^{-j\Omega T}$$

3-21 已知三角脉冲信号 $f_1(t)$ 如图题 3-21(a)所示。试利用有关性质求图题 3-21(b)中的 $f_2(t) = f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cos \Omega_0 t$ 的傅里叶变换 $F_2(j\Omega)$ 。

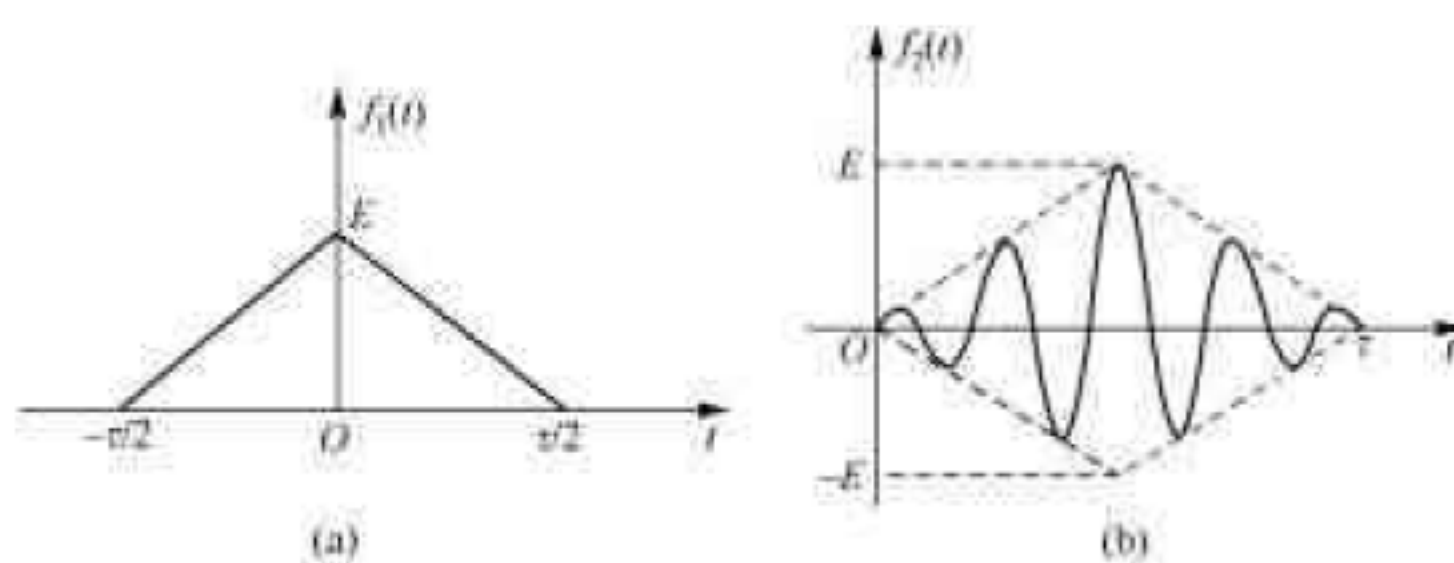


图 题 3-21

$$\text{解: 设 } \mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(j\Omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right)$$

$$\text{则 } \mathcal{F}\left[f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] = F_1(j\Omega)e^{-j\frac{\Omega\tau}{2}} = F_{12}(j\Omega)$$

$$\begin{aligned}\text{而 } \mathcal{F}[f_2(t)] &= \mathcal{F}\left[f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\cos\Omega_0 t\right] = \frac{1}{2}\{F_{12}[j(\Omega + \Omega_0)] + F_{12}[j(\Omega - \Omega_0)]\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{F_1[j(\Omega + \Omega_0)]e^{-j\frac{(\Omega + \Omega_0)\tau}{2}} + F_1[j(\Omega - \Omega_0)]e^{-j\frac{(\Omega - \Omega_0)\tau}{2}}\right\} \\ &= \frac{E\tau}{4}\left[\text{Sa}^2\left(\frac{\Omega + \Omega_0}{4}\tau\right)e^{-j\frac{\Omega_0\tau}{2}} + \text{Sa}^2\left(\frac{\Omega - \Omega_0}{4}\tau\right)e^{j\frac{\Omega_0\tau}{2}}\right]e^{-j\frac{\Omega\tau}{2}}\end{aligned}$$

3-23 利用傅里叶变换的微分与积分特性，求图题 3-23 所示信号的傅里叶变换。

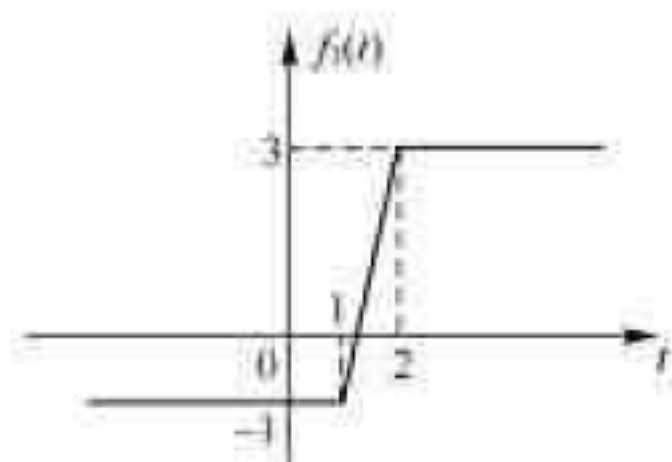


图 题 3-23

$$\text{解: (3) } \varphi_3(t) = \frac{df_3(t)}{dt} = 4[u(t-1) - u(t-2)]$$

$$\Phi_3(j\Omega) = 4\text{Sa}\left(\frac{\Omega}{2}\right)e^{-j\frac{3}{2}\Omega}$$

$$f_3(\infty) = 3, \quad f_3(-\infty) = -1$$

$$F_3(j\Omega) = \frac{\Phi_3(j\Omega)}{j\Omega} + [f_3(\infty) + f_3(-\infty)]\pi\delta(\Omega) = \frac{4\text{Sa}\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{j\Omega}e^{-j\frac{3}{2}\Omega} + 2\pi\delta(\Omega)$$

3-25 若已知 $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega)$ ，利用傅里叶变换的性质求下列信号的傅里叶变换。

$$(2) (t-2)f(t) \qquad (4) t\frac{df(t)}{dt} \qquad (5) f(1-t)$$

$$\text{解: (2) } \mathcal{F}[(t-2)f(t)] = \mathcal{F}[tf(t) - 2f(t)] = j\frac{dF(j\Omega)}{d\Omega} - 2F(j\Omega)$$

$$(4) \mathcal{F}\left[t\frac{df(t)}{dt}\right] = j\frac{d[j\Omega F(j\Omega)]}{d\Omega} = -\left[\Omega\frac{dF(j\Omega)}{d\Omega} + F(j\Omega)\right]$$

$$(5) \mathcal{F}[f(1-t)] = \mathcal{F}\{f[-(t-1)]\} = F(-j\Omega)e^{-j\Omega}$$

3-29 根据附录 B 中给出的频谱公式, 粗略地估计图题 3-29 所示各脉冲的频带宽度 B_f (图中时间单位为 μs)。

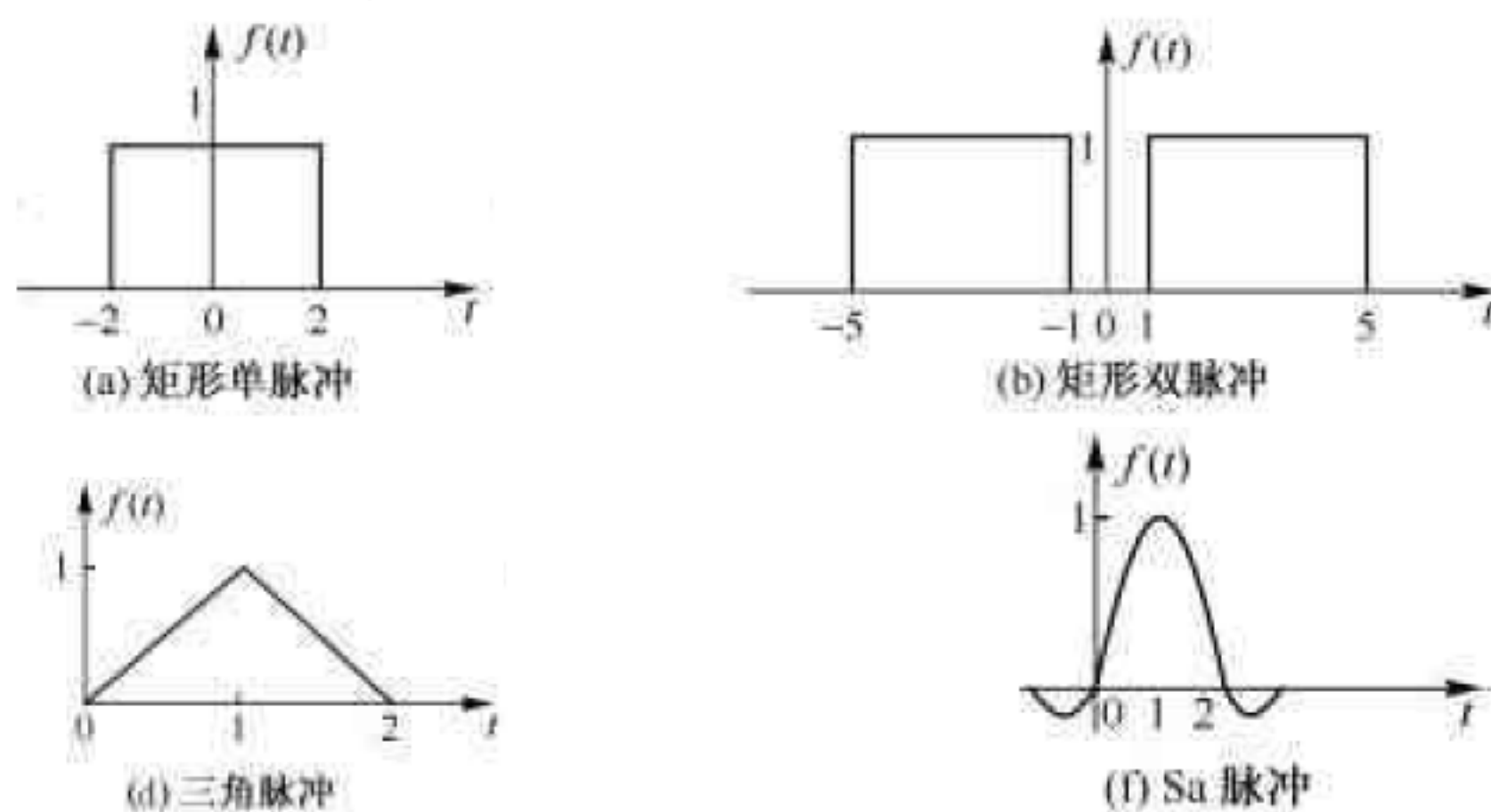


图 题 3-29

- 解: (a) 若时间单位为 μs , 则频带为 $\frac{1}{4} \text{ MHz}$, 即 250 KHz
- (b) 若时间单位为 μs , 则频带为 $\frac{1}{4} \text{ MHz}$, 即 250 KHz
- (c) 若时间单位为 μs , 则频带为 1 MHz
- (d) 频若时间单位为 μs , 则带为 $\frac{1}{2} \text{ MHz}$, 即 500 KHz

3-32 周期矩形脉冲信号 $\tilde{f}(t)$ 如图题 3-32 所示。

- (1) 求 $\tilde{f}(t)$ 的指数形式的傅里叶级数, 并画出频谱图 F_n ;
- (2) 求 $\tilde{f}(t)$ 的傅里叶变换 $F(j\Omega)$, 并画出频谱图 $F(j\Omega)$ 。

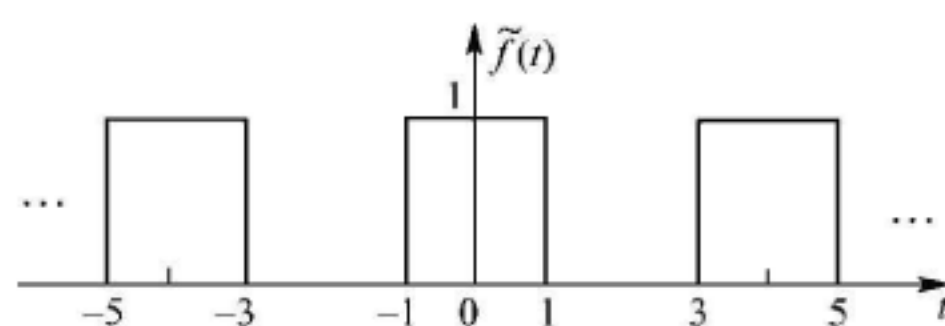


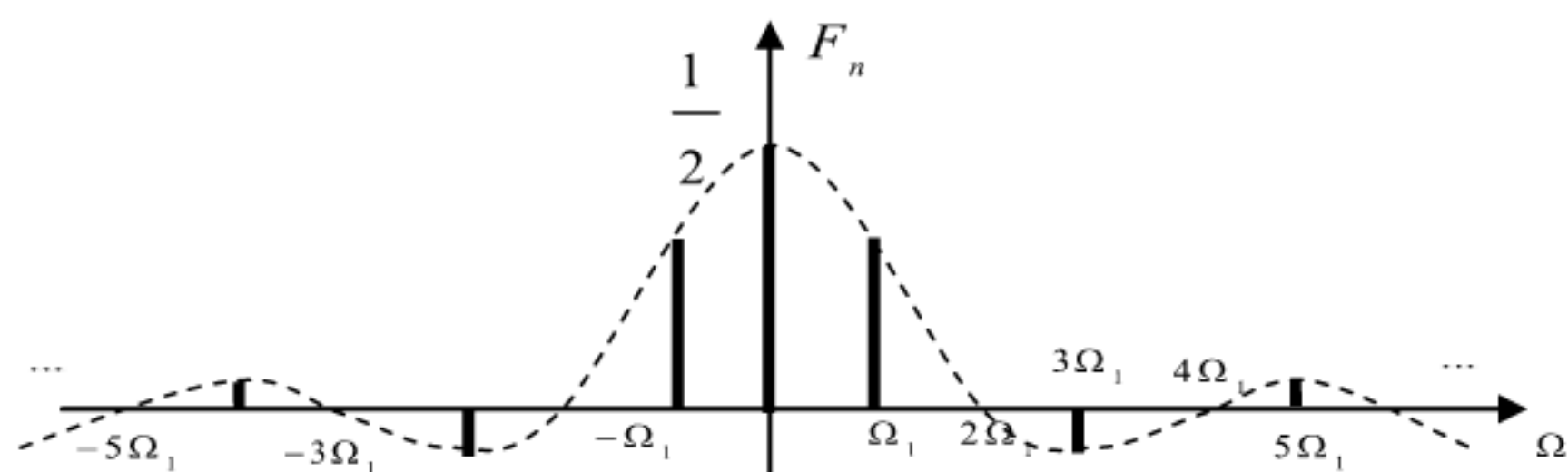
图 题 3-32

解: (1) $\because f_0 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{4}, \therefore \tilde{f}(t) = E \tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega \tau}{2}\right) = 2 \text{Sa}(\Omega)$

$$\therefore F_n = \left. \frac{F_0(j\Omega)}{T_1} \right|_{\Omega=n\Omega_1} = \left. \frac{F_0(j\Omega)}{4} \right|_{\Omega=\frac{\pi n}{2}} = \frac{1}{2} \text{Sa}(n\Omega_1) = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

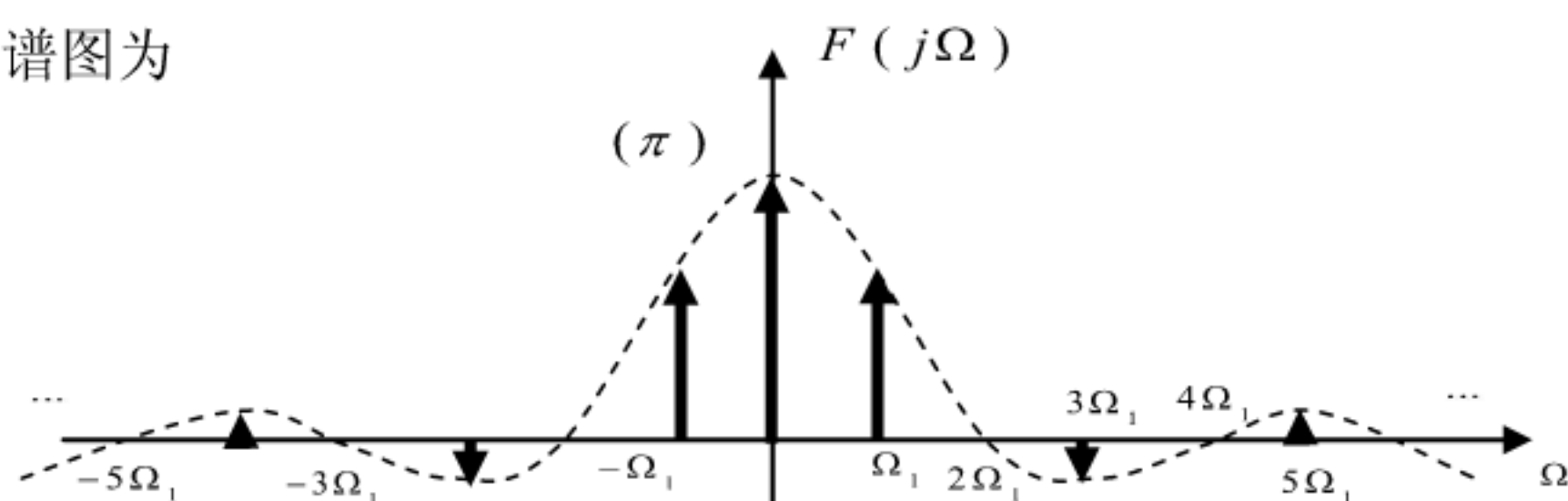
指数形式的傅里叶级数为: $\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{j\frac{n\pi}{2}t}$

频谱图如下图所示，图中： $\Omega_1 = \frac{\pi}{2}$



$$\begin{aligned}
 (2) \quad \mathcal{F}[f(t)] &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\Omega - n\Omega_1) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \text{Sa}(n\Omega_1) \delta(\Omega - n\Omega_1) \\
 &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \delta\left(\Omega - \frac{n\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

频谱图为



3-33 求下列函数的拉氏变换，设 $L[f(t)] = F(s)$ 。

(1) $(1+2t)e^{-t}$

(4) $e^{-(t+a)} \cos \Omega_0 t$

(6) $e^{-\frac{t}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right)$

(8) $\frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{t}$

解：(1) $(1+2t)e^{-t} \leftrightarrow \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} = \frac{s+3}{(s+1)^2} \quad (\because \dots \frac{1}{s^2})$

(4) $e^{-(t+a)} \cos \Omega_0 t = e^{-a} e^{-t} \cos \Omega_0 t$

$$\leftrightarrow e^{-a} \frac{s+1}{(s+1)^2 + \Omega_0^2} \quad (\because \dots \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2})$$

(6) $e^{-\frac{t}{a}} f\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow aF\left(a\left(s + \frac{1}{a}\right)\right) = aF(as+1) \quad (\because \dots, \dots, \dots aF(as))$

(8) $\frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty \left(\frac{1}{\eta+3} - \frac{1}{\eta+5}\right) d\eta = \ln\left(\frac{s+5}{s+3}\right)$

3-35 求下列函数的拉氏变换，注意阶跃函数的跳变时间。

$$(1) \quad f(t) = e^{-t}u(t-2) \quad (2) \quad f(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) \quad (3)$$

$$f(t) = e^{-(t-2)}u(t) \quad \text{解: } (1) \quad f(t) = e^{-t}u(t-2) = e^{-2}e^{-(t-2)}u(t-2)$$

$$F(s) = e^{-2}e^{-2s} \frac{1}{s+1} = \frac{e^{-2}e^{-2s}}{s+1}$$

$$(2) \quad f(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$$

$$F(s) = e^{-2s} \frac{1}{s+1} = \frac{e^{-2s}}{s+1}$$

$$(3) \quad f(t) = e^{-(t-2)}u(t) = e^2e^{-t}u(t)$$

$$F(s) = e^2 \frac{1}{s+1} = \frac{e^2}{s+1}$$

3-39 求下列函数的单边拉普拉斯逆变换。

$$(3) \quad \frac{3s}{(s+4)(s+2)} \quad (4) \quad \frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)} \quad (7) \quad \frac{e^{-s}}{4s(s^2+1)}$$

$$\text{解: } (3) \quad \frac{3s}{(s+4)(s+2)} = \frac{6}{s+4} + \frac{-3}{s+2} \leftrightarrow (6e^{-4t} - 3e^{-2t})u(t)$$

$$(4) \quad \frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{A}{(s+1)^3} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+2}$$

$$\text{where } A = (s+1)^3 \frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)} \Big|_{s=-1} = 2;$$

$$B = \frac{d}{ds} \left[(s+1)^3 \frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)} \right] \Big|_{s=-1} = \frac{-1}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = -1;$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s+1)^3 \frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)} \right] \Big|_{s=-1} = \frac{1}{(s+2)^3} \Big|_{s=-1} = 1;$$

$$D = (s+2) \frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$f(t) = \left[(t^2 - t + 1)e^{-t} - e^{-2t} \right] u(t)$$

$$(7) \quad \frac{e^{-s}}{4s(s^2 + 1)} = \left(\frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} \right) e^{-s}$$

$$\text{where } A = s \frac{1}{4s(s^2 + 1)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4};$$

$$\text{so } F_1(s) = \frac{1}{4s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1} = \frac{s^2 + 1 + 4Bs^2 + 4C}{4s(s^2 + 1)} \equiv \frac{1}{4s(s^2 + 1)};$$

$$\text{so } B = -\frac{1}{4}, \quad C = 0$$

$$f(t) = \frac{1}{4} [1 - \cos(t - 1)] u(t - 1)$$

3-40 试利用拉氏变换的时域卷积定理求下列拉氏变换 $F(s)$ 的原函数 $f(t)$ 。

$$(1) \quad \frac{1}{(s + a)^2}$$

$$\text{解: } \frac{1}{(s + a)^2} = \frac{1}{s + a} \cdot \frac{1}{s + a}$$

$$\text{所以 } f(t) = e^{-at} u(t) * e^{-at} u(t) = t e^{-at} u(t)$$

3-43 分别求下列函数的逆变换之初值和终值。

$$(1) \quad \frac{10(s + 2)}{s(s + 5)}$$

$$(3) \quad \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$\text{解: } (1) \quad \frac{10(s + 2)}{s(s + 5)}$$

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10(s+2)s}{s(s+5)} = 10$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10(s+2)s}{s(s+5)} = 4$$

$$(3) \quad \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 1} = s - 1 + \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1} = 3$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1} = 0$$

第 4 章习题答案

4-2 已知系统微分方程相应的齐次方程为

$$(1) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$$

两系统的起始条件都是： $y(0^-) = 1$, $y'(0^-) = 2$ ，试求两系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ ，并粗略画出波形。

$$\text{解：(1) } \alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0 \quad \alpha_1 = -1 + j \quad \alpha_2 = -1 - j$$

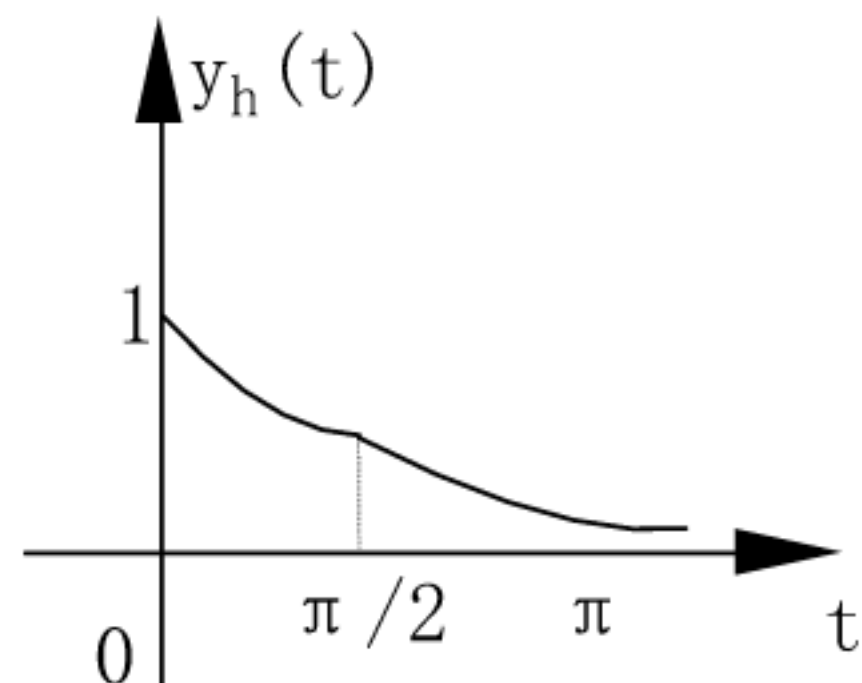
$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} = C_1 e^{-t} \sin t + C_2 e^{-t} \cos t$$

$$y(0^+) = C_2 = 1$$

$$\begin{aligned} y'(0^+) &= C_1 e^{-t} \cos t - C_1 e^{-t} \sin t - C_2 e^{-t} \sin t - C_2 e^{-t} \cos t \Big|_{t=0} \\ &= C_1 - C_2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_h(t) = 3e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t \quad t \geq 0$$



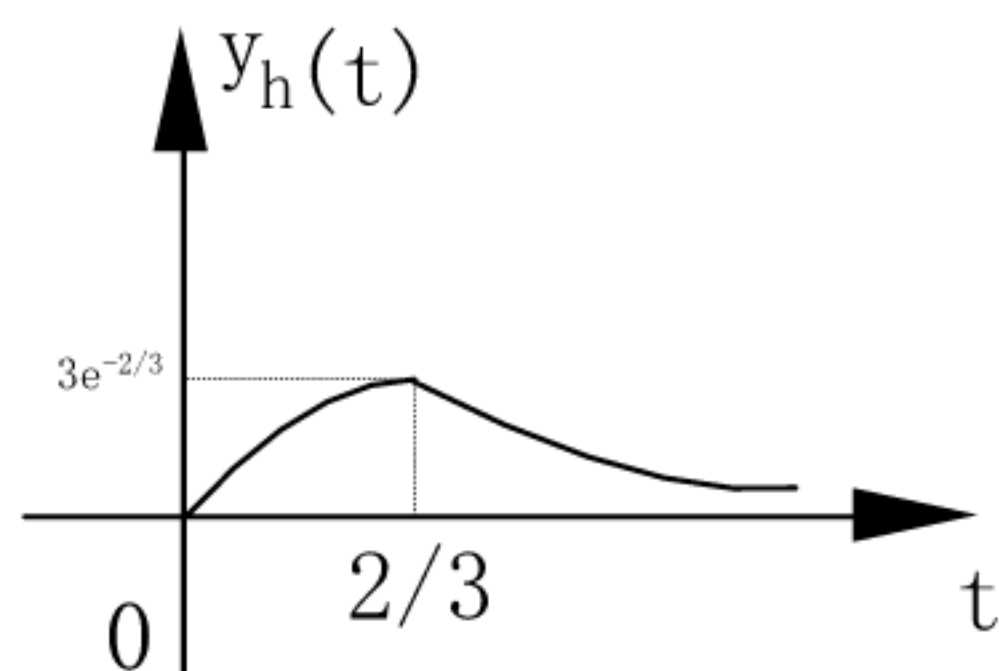
$$(2) \quad \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \quad \alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = -1$$

$$y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t}$$

$$y_h'(t) = -A_1 e^{-t} + A_2 e^{-t} - A_2 t e^{-t}$$

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ -A_1 + A_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 3 \end{cases}$$

$$y_h(t) = e^{-t} + 3te^{-t} \quad t \geq 0$$



4-3 给定系统微分方程、起始状态及激励信号分别如下，试判断系统在起始点是否发生跳变，并据此写出 $y^{(k)}(0^+)$ 的值。

$$(1) \quad \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} \quad y(0^-) \neq 0, \quad x(t) = u(t)$$

$$(2) \quad 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad y(0^-) \neq 0, \quad y'(0^-) = 1, \quad x(t) = u(t)$$

$$* (3) \quad 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \quad y(0^-) \neq 0, \quad y'(0^-) = 1, \quad x(t) = \delta(t)$$

解：(1) $\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3\delta(t)$

因为方程在 $t=0$ 时，存在冲激作用，则起始点会发生跳变

设： $\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = a\delta(t) + bu(t) \\ y(t) = au(t) \end{cases}$ 代入方程

得： $a=3, y(0^+) = 3 + y(0^-) = 3$

(2) $2\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \delta(t)$

因为方程在 $t=0$ 时，存在冲激作用，则起始点会发生跳变

$$\text{设: } \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y(t) = a \delta(t) + bu(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) = au(t) \end{cases} \quad \text{代入方程}$$

$$\text{得: } a=0.5, \quad \begin{cases} y(0^+) = y(0^-) = 1 \\ y'(0^+) = 0.5 + y'(0^-) = 1.5 \end{cases}$$

$$(3) \quad 2 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 4 y(t) = \delta'(t) + \delta(t)$$

因为方程在 $t=0$ 时, 存在冲激和冲激偶作用, 则起始点会发生跳变

$$\text{设: } \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y(t) = a \delta'(t) + b \delta(t) + cu(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) = a \delta(t) + bu(t) \\ y(t) = au(t) \end{cases} \quad \text{代入方程}$$

$$\begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/4 \end{cases} \quad \begin{cases} y(0^+) = a + y(0^-) = 3/2 \\ y'(0^+) = b + y'(0^-) = 3/4 \end{cases}$$

4-4 给定系统微分方程为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \delta(t) + 3u(t)$

若激励信号与起始状态为以下二种情况时, 分别求它们的全响应。并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应和强迫响应各分量(应注意在起始点是否发生跳变)。

$$(1) \quad x(t) = u(t), \quad y(0^-) = 1, \quad y'(0^-) = 2$$

$$(2) \quad x(t) = e^{-3t}u(t), \quad y(0^-) = 1, \quad y'(0^-) = 2$$

$$\text{解: } (1) \quad \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2 y(t) = \delta(t) + 3u(t)$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0 \quad \alpha_1 = -1 \quad \alpha_2 = -2$$

$$\text{齐次解: } y_h(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

特解: $y_p(t) = 3/2$

完全解: $y(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + 3/2$

因为方程在 $t=0$ 时, 存在冲激作用, 则起始点会发生跳变

$$\text{设: } \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y(t) = a \delta(t) + bu(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) = au(t) \end{cases} \quad \text{代入方程}$$

$$\text{得: } a=1, \quad \begin{cases} y(0^+) = y(0^-) = 1 \\ y'(0^+) = 1 + y'(0^-) = 3 \end{cases}$$

$$\text{则: } \begin{cases} A_1 + A_2 + 3/2 = 1 & A_1 = 2 \\ -A_1 - 2A_2 = 3 & A_2 = -5/2 \end{cases}$$

$$\text{完全解: } y(t) = 2e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2} \quad t \geq 0$$

设零输入响应为: $y_{zi}(t) = A_{zi1} e^{-t} + A_{zi2} e^{-2t}$

$$\begin{cases} A_{zi1} + A_{zi2} = y(0^-) = 1 & A_{zi1} = 4 \\ -A_{zi1} - 2A_{zi2} = y'(0^-) = 2 & A_{zi2} = -3 \end{cases}$$

$$\text{则: } y_{zi}(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} \quad t \geq 0$$

$$y_{zs}(t) = y(t) - y_{zi}(t) = -2e^{-t} + 0.5e^{-2t} + 1.5 \quad t \geq 0$$

自由响应: $2e^{-t} - 2.5e^{-2t}$; 强迫响应: 1.5。

(2) 微分方程右边为:

$$-3e^{-3t}u(t) + e^{-3t}\delta(t) + 3e^{-3t}u(t) = \delta(t)$$

$$\text{原方程为: } \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 2y(t) = \delta(t)$$

由上述微分方程可知, $t>0$ 后方程右边没有输入, 因此, 系统没有强迫响应, 完全响应和自由响应相同, 零输入和零状态响应的形式均为齐次解形式, 且零输入响应同 (1), 为:

$$y_{zi}(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} \quad t \geq 0$$

零状态响应的形式为: $y_{zs}(t) = A_{zs1}e^{-t} + A_{zs2}e^{-2t}$

$$\text{设: } \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} y(t) = a\delta(t) + bu(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) = au(t) \end{cases} \quad \text{代入方程}$$

$$\text{得: } a=1, \quad \begin{cases} y(0^+) - y(0^-) = 0 \\ y'(0^+) - y'(0^-) = a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{zs1} + A_{zs2} = 0 & A_1 = 1 \\ -A_{zs1} - 2A_{zs2} = 1 & A_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{则: } y_{zs}(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad t \geq 0$$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = 5e^{-t} - 4e^{-2t} \quad t \geq 0$$

4-6 一线性时不变系统在相同的起始状态下, 当输入为 $x(t)$ 时, 全响应为 $(2e^{-t} + \cos 2t)u(t)$; 当输入为 $2x(t)$ 时, 全响应为 $(e^{-t} + 2\cos 2t)u(t)$, 求输入为 $4x(t)$ 时的全响应。

解: 系统的零状态响应为:

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= y_2(t) - y_1(t) \\ &= (e^{-t} + 2\cos 2t) - (2e^{-t} + \cos 2t) = (-e^{-t} + \cos 2t)u(t) \end{aligned}$$

当输入为 $4x(t)$ 时, 系统的全响应为:

$$y(t) = 3y_{zs}(t) + y_1(t) = (4\cos 2t - e^{-t})u(t)$$

$$y_{zi}(t) = y_1(t) - y_{zs}(t) = 3e^{-t}u(t)$$

4-7 系统的微分方程由下列各式描述, 分别求系统的冲激响应与阶跃响应。

$$(1) \quad \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

解: (1) 首先求阶跃响应, 原方程变为:

$$\frac{d}{dt} g(t) + 2g(t) = u(t)$$

方程右边没有冲激作用, 则起始点不会发生跳变, $g(0^+) = g(0^-) = 0$

特征方程: $\alpha + 2 = 0 \quad \alpha = -2$

齐次解: $g_h(t) = A_1 e^{-2t}$

特解: $B=0.5$

则: $g(t) = A_1 e^{-2t} + 0.5$, 代入初始值, $A_1 + 0.5 = 0$

系统的阶跃响应为: $g(t) = (-0.5_1 e^{-2t} + 0.5)u(t)$

系统的冲激响应为: $h(t) = \frac{d}{dt} g(t) = e^{-2t} u(t)$

*4-12 一线性时不变系统, 当激励信号为 $x_1(t) = \delta(t)$ 时, 全响应为 $y_1(t) = \delta(t) + e^{-t} u(t)$; 当激励信号为 $x_2(t) = u(t)$ 时, 全响应为 $y_2(t) = 3e^{-t} u(t)$ 。求系统的冲激响应 $h(t)$ (两种激励下, 起始状态相同)。

$$\text{解: } \begin{cases} y_1(t) = h(t) + y_{zi}(t) = \delta(t) + e^{-t} u(t) & (1) \\ y_2(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau + y_{zi}(t) = 3e^{-t} u(t) & (2) \end{cases}$$

式(1) - 式(2)得:

$$h(t) - \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \delta(t) - 2e^{-t} u(t)$$

上式求导: $h'(t) - h(t) = \delta'(t) - 2\delta(t) + 2e^{-t} u(t)$

设: $h(t) = A\delta(t) + Be^{-t} u(t)$ 代入上式:

$$A\delta'(t) + B\delta(t) - Be^{-t} u(t) - A\delta(t) - Be^{-t} u(t) = \delta'(t) - 2\delta(t) + 2e^{-t} u(t) \quad \text{方}$$

程两边函数相等: $A = 1, \quad B = -1$

$$h(t) = \delta(t) - e^{-t} u(t)$$

4-13 试求下列各函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$

$$(1) \quad f_1(t) = u(t), \quad f_2(t) = u(t)$$

$$(3) \quad f_1(t) = (1+t)[u(t) - u(t-1)], \quad f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$$

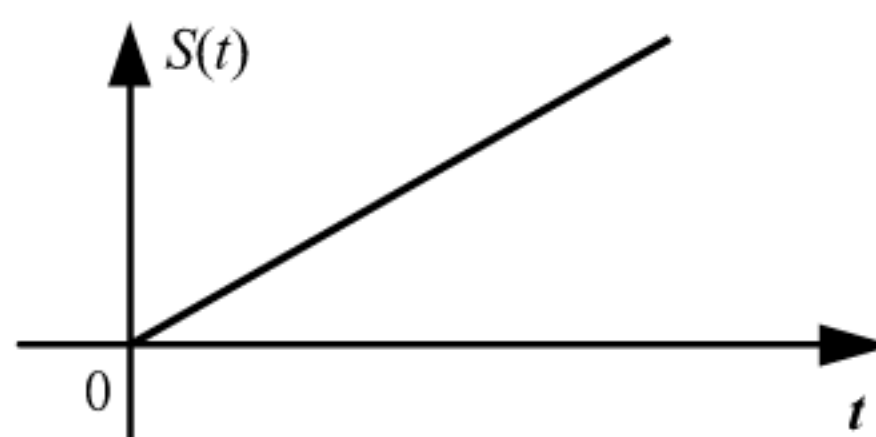
$$\text{解: } (1) \quad \frac{d}{dt} f_1(t) = \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \int_0^t 1 d\tau u(t) = t \Big|_0^t \cdot u(t) = tu(t)$$

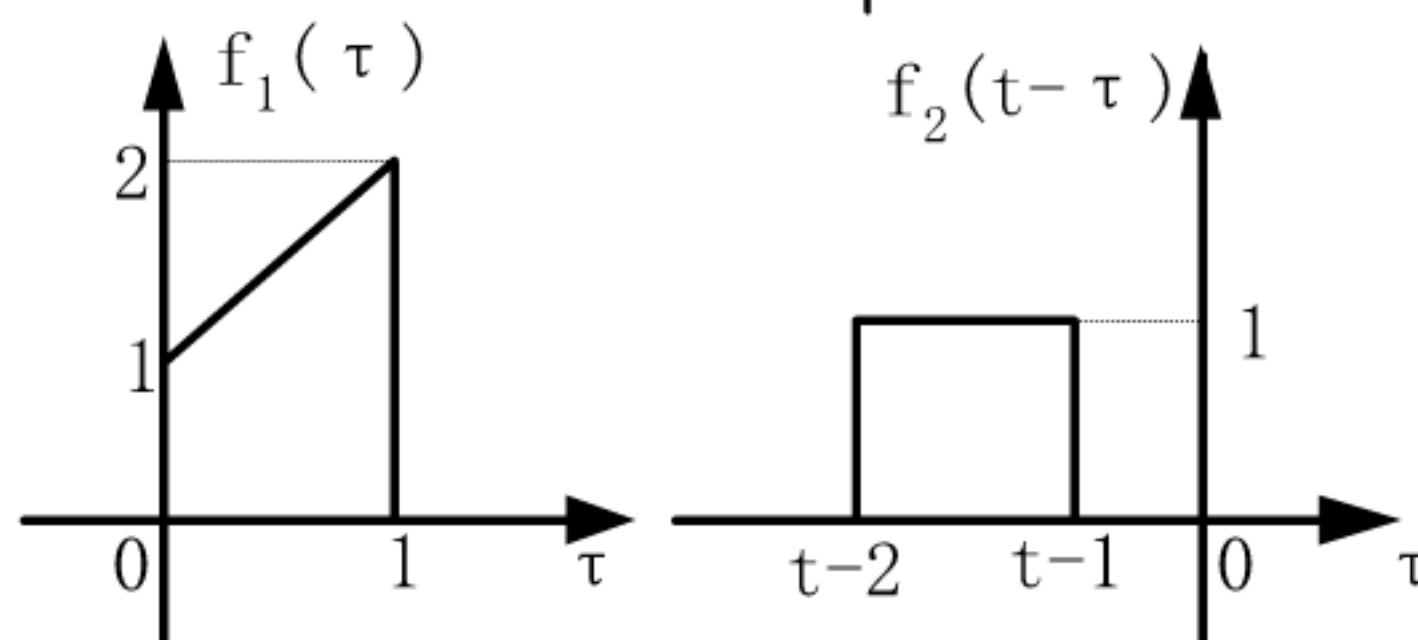
$$s(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$= \frac{d}{dt} f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau$$

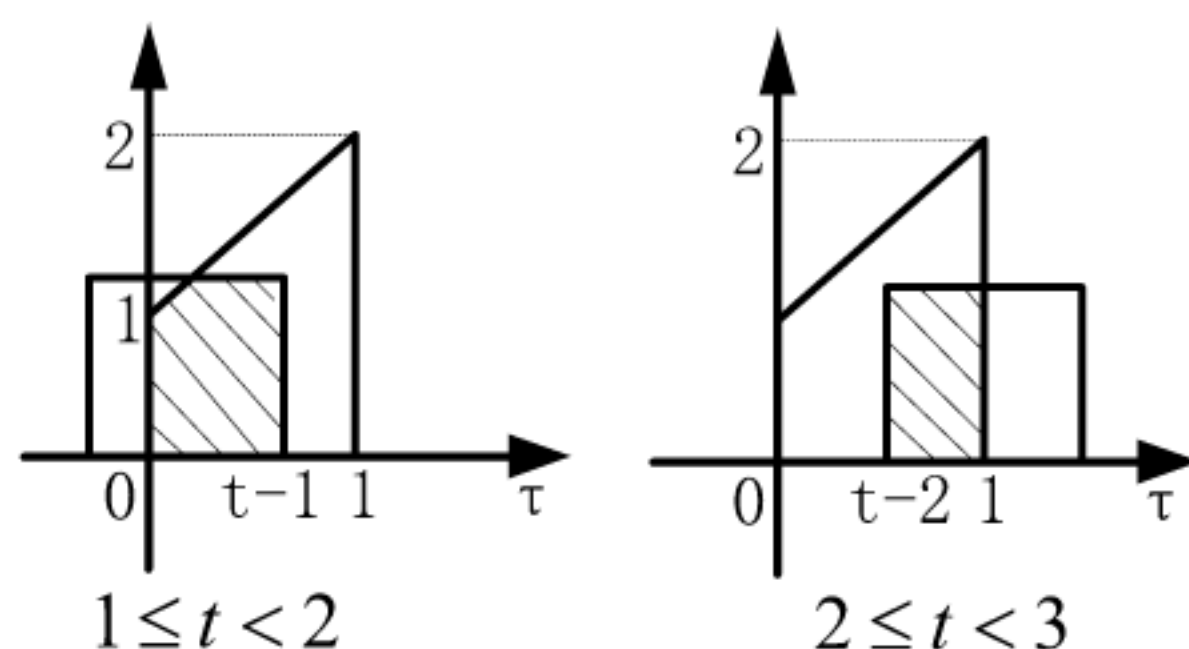
$$= \delta(t) * tu(t) = tu(t)$$



(3)



a) $-\infty < t < 1$ 时 $S(t) = 0$



b) $1 \leq t < 2$ 时 $S(t) = \int_0^{t-1} (1+\tau) d\tau = (\tau + 0.5\tau^2) \Big|_0^{t-1} = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$

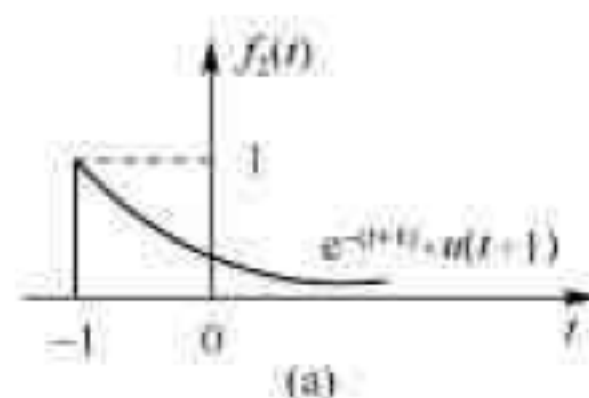
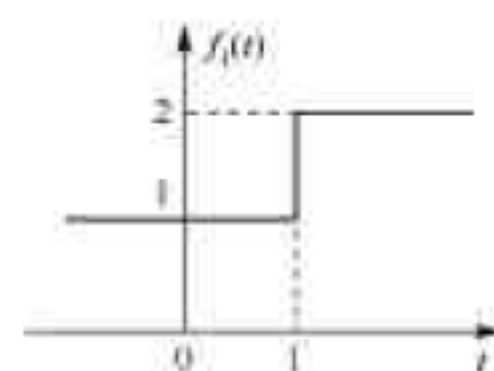
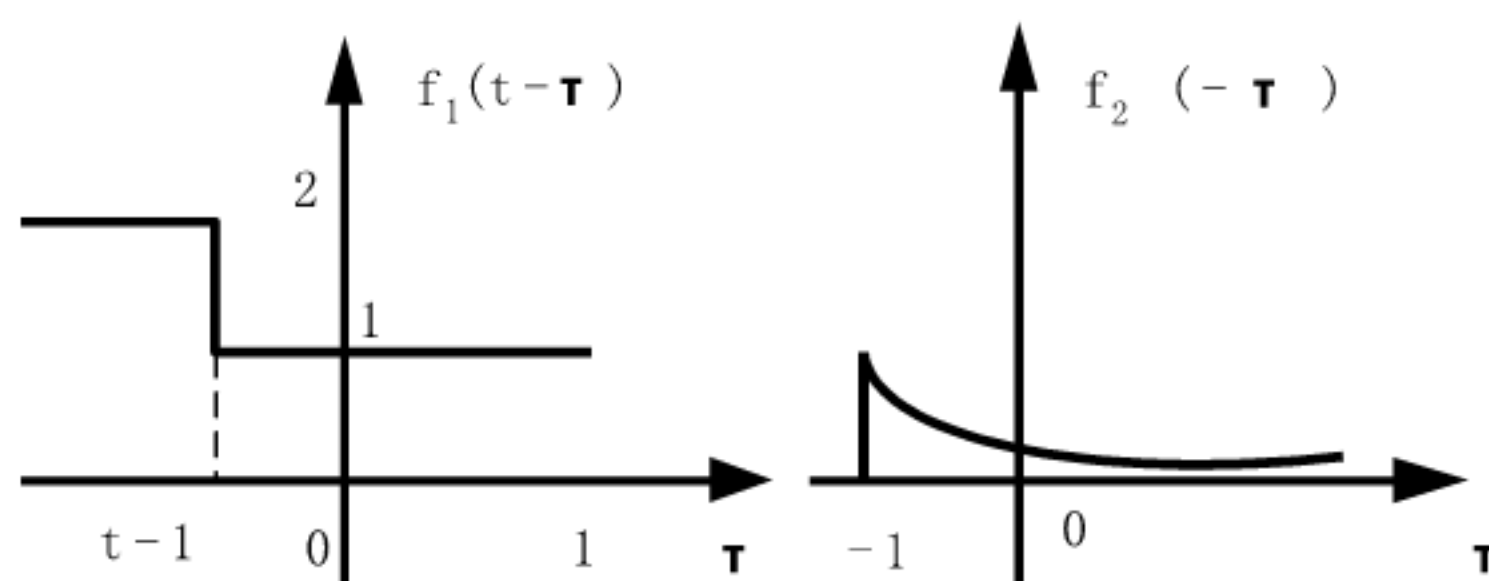
c) $2 \leq t < 3$ 时 $S(t) = \int_{t-2}^1 (1+\tau) d\tau = (\tau + 0.5\tau^2) \Big|_{t-2}^1 = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{3}{2}$

d) $3 \leq t < +\infty$ 时 $S(t) = 0$

*4-14 对图题 4-14 所示的各组信号, 求二信号的卷积

$s(t) = f_1(t) * f_2(t)$, 并绘出 $s(t)$ 的波形。

解: (a)



图题 4-14

$$1) t < 0 \text{ 时} \quad S(t) = \int_{-1}^{\infty} e^{-(\tau+1)} d\tau = -e^{-(\tau+1)} \Big|_{-1}^{\infty} = 1$$

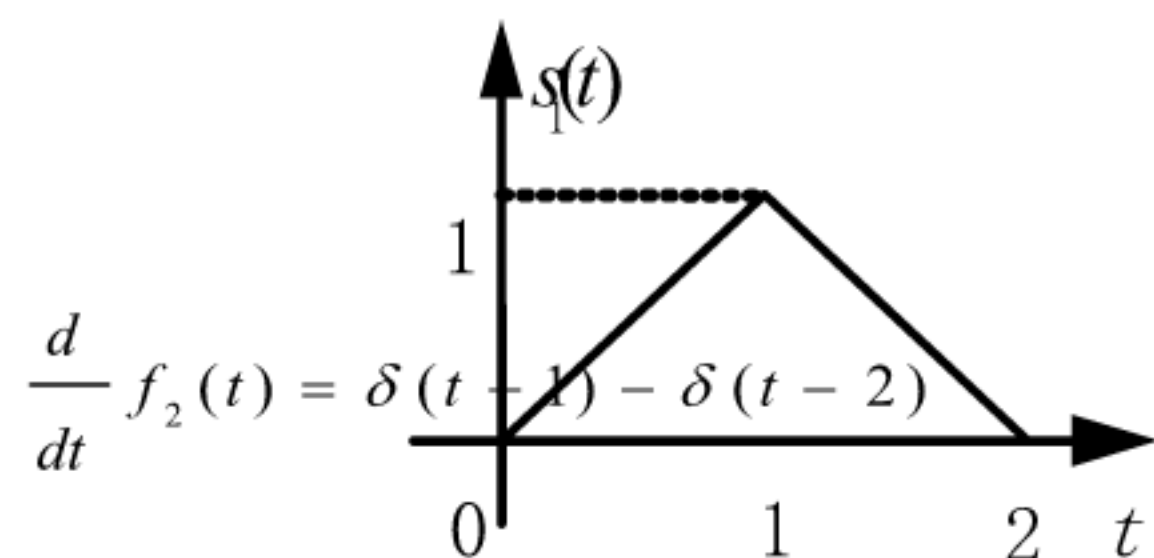
$$2) t \geq 0 \text{ 时} \quad S(t) = 2 \int_{-1}^{t-1} e^{-(\tau+1)} d\tau + \int_{t-1}^{\infty} e^{-(\tau+1)} d\tau = -2e^{-(\tau+1)} \Big|_{-1}^{t-1} - e^{-(\tau+1)} \Big|_{t-1}^{\infty} \\ = -2e^{-t} + 2 + e^{-t} = 2 - e^{-t}$$

4-15 已知 $f_1(t) = u(t) - u(t-1)$, $f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$, 分别求 $s_1(t) = f_1(t) * f_1(t)$ 和 $s_2(t) = f_2(t) * f_2(t)$, 画出 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 的波形, 并比较二者的区别。

$$\text{解: } \frac{d}{dt} f_1(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$$

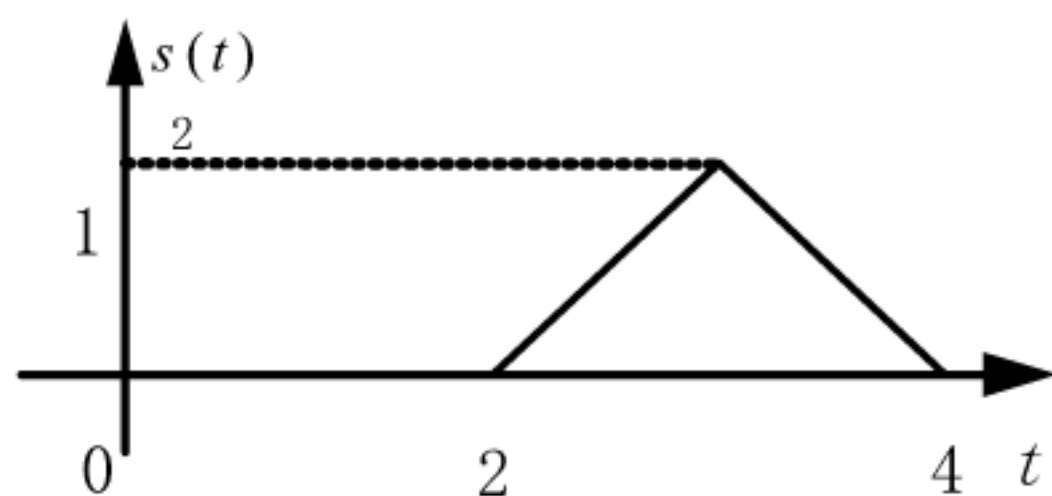
$$\int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t [u(\tau) - u(\tau-1)] d\tau = \int_0^t 1 d\tau u(t) - \int_1^t 1 d\tau u(t-1) \\ = \tau \Big|_0^t \cdot u(t) - \tau \Big|_1^t \cdot u(t-1) = tu(t) - (t-1)u(t-1)$$

$$s_1(t) = f_1(t) * f_1(t) = \frac{d}{dt} f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau \\ = [\delta(t) - \delta(t-1)] * [tu(t) - (t-1)u(t-1)] \\ = tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-1)u(t-2)$$



$$\int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t [u(\tau-1) - u(\tau-2)] d\tau = \int_1^t 1 d\tau u(t-1) - \int_2^t 1 d\tau u(t-2) \\ = \tau \Big|_1^t \cdot u(t-1) - \tau \Big|_2^t \cdot u(t-2) = (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2)$$

$$s_2(t) = f_2(t) * f_2(t) = \frac{d}{dt} f_2(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau \\ = [\delta(t-1) - \delta(t-2)] * [(t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2)] \\ = (t-2)u(t-2) - 2(t-3)u(t-3) + (t-4)u(t-4)$$



*4-16 对图题 4-16 所示的各组信号，求二信号的卷积 $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，并绘出 $s(t)$ 的波形。

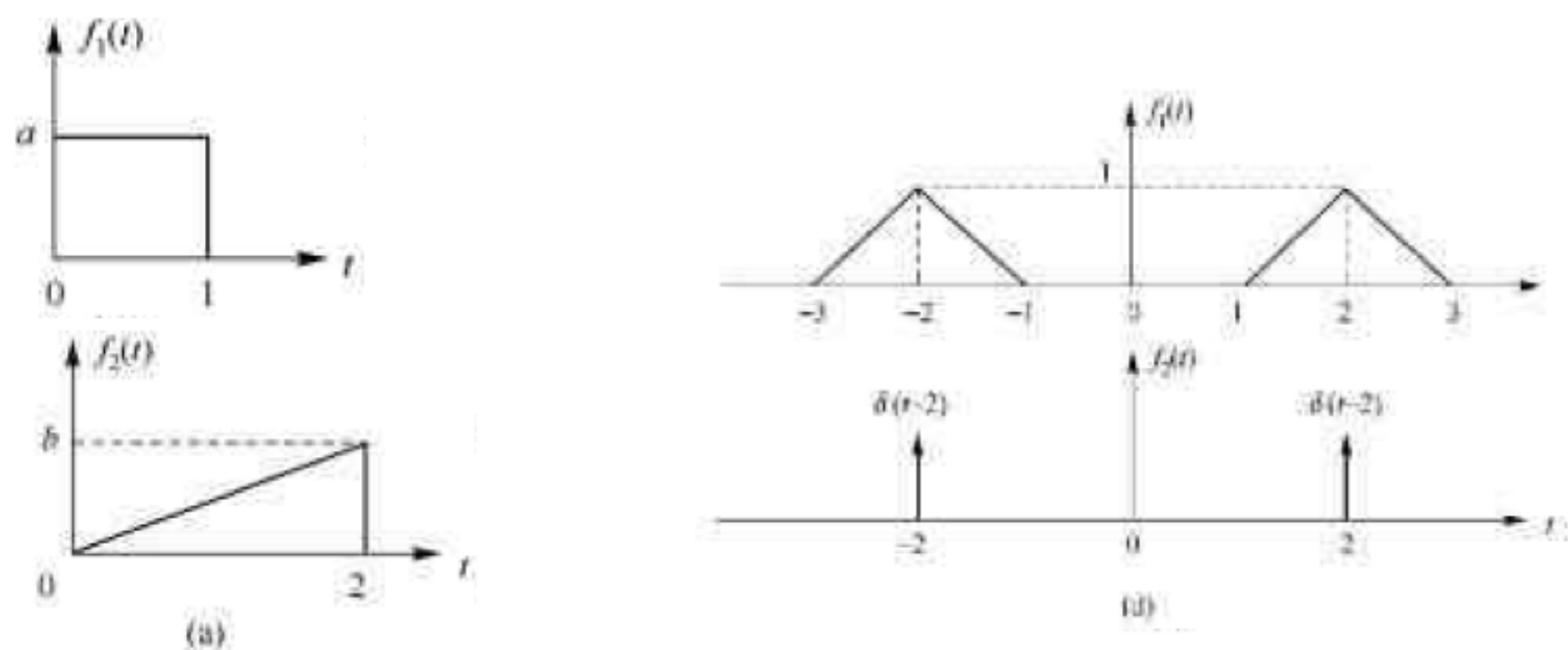
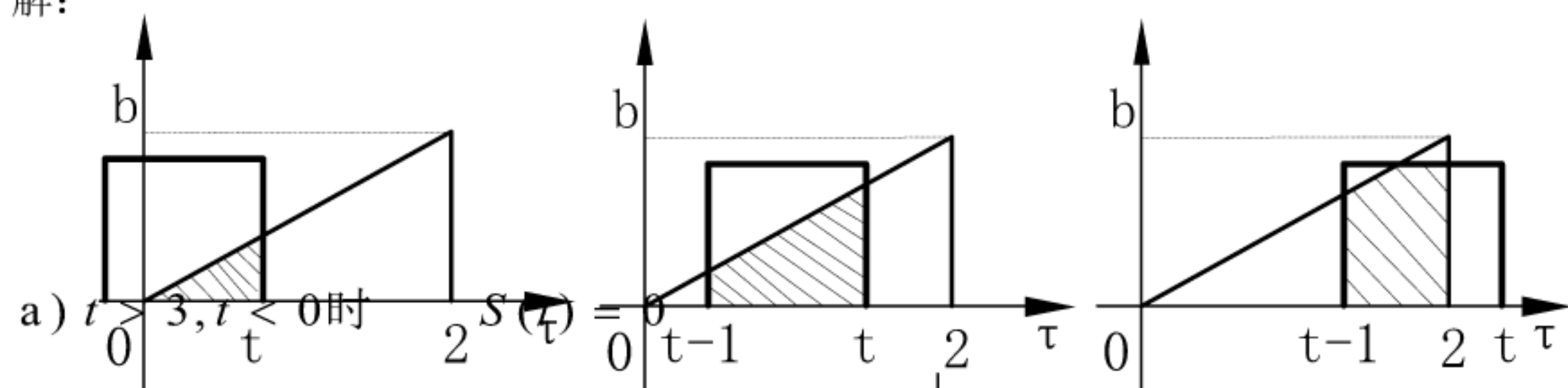
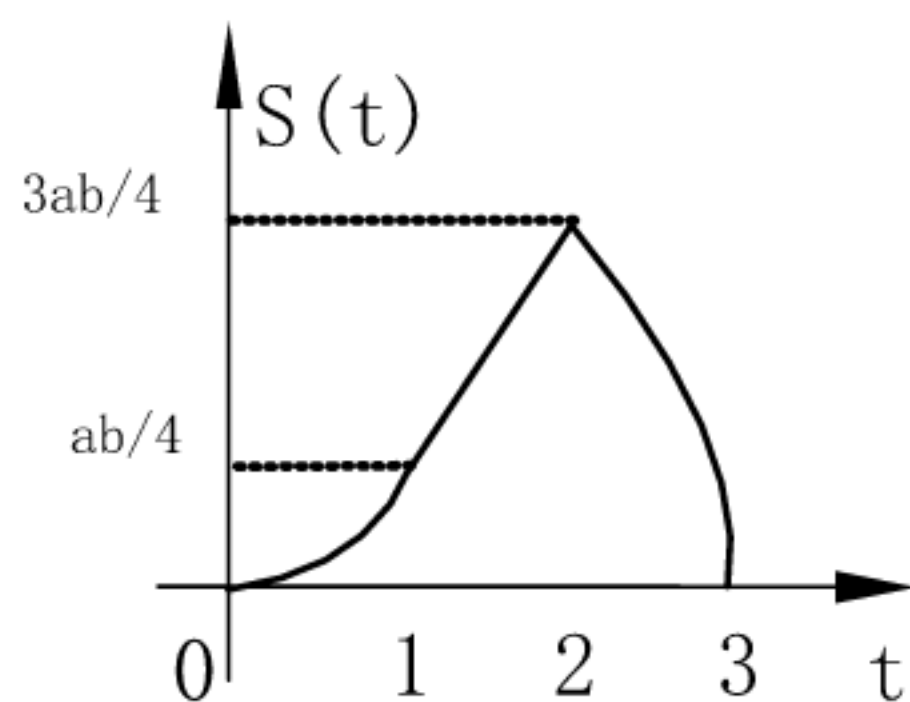


图 题 4-16

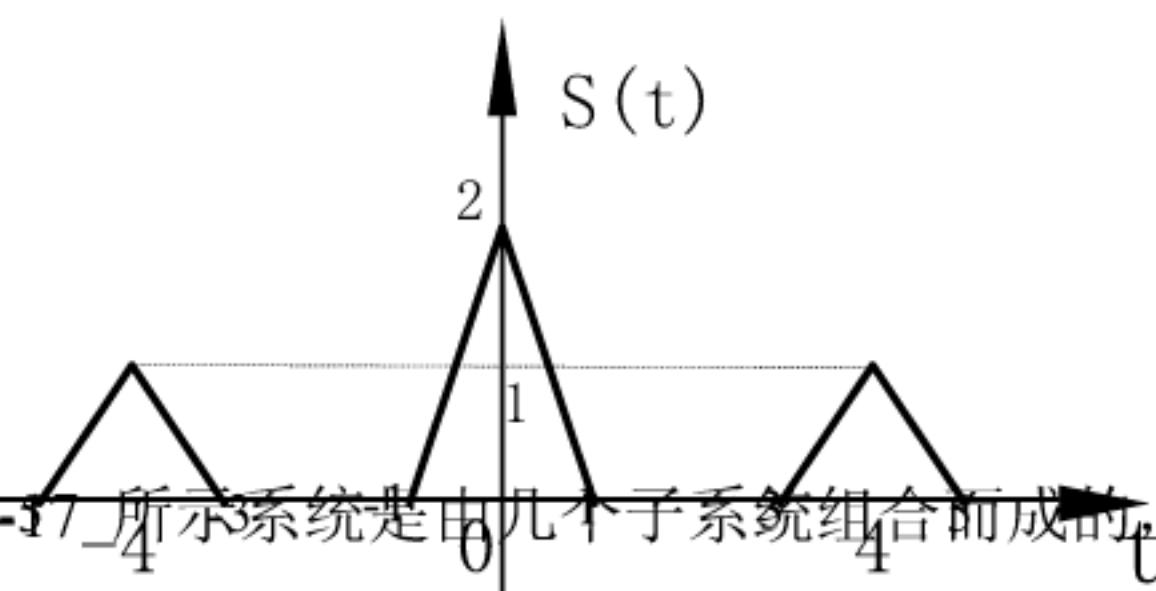
解：



$$\begin{aligned}
 \text{b) } 0 \leq t < 1 \text{ 时} \quad S(t) &= \int_0^t \frac{1}{2} ab \tau d\tau = \frac{ab}{4} \tau^2 \Big|_0^t = \frac{ab}{4} t^2 \\
 \text{c) } 1 \leq t < 2 \text{ 时} \quad S(t) &= \int_{t-1}^t \frac{1}{2} ab \tau d\tau = \frac{ab}{4} \tau^2 \Big|_{t-1}^t = \frac{ab}{4} (2t-1) \\
 \text{d) } 2 \leq t < 3 \text{ 时} \quad S(t) &= \int_{t-1}^2 \frac{1}{2} ab \tau d\tau = \frac{ab}{4} \tau^2 \Big|_{t-1}^2 = \frac{ab}{4} (3+2t-t^2)
 \end{aligned}$$



(d)



4-17 图题 4-17 所示系统是由几个子系统组合而成的。各子系统的冲激响应分别为 $h_D(t) = \delta(t-1)$, $h_G(t) = u(t) - u(t-3)$, 试求总系统的冲激响应 $h(t)$, 并画出 $h(t)$ 的波形。

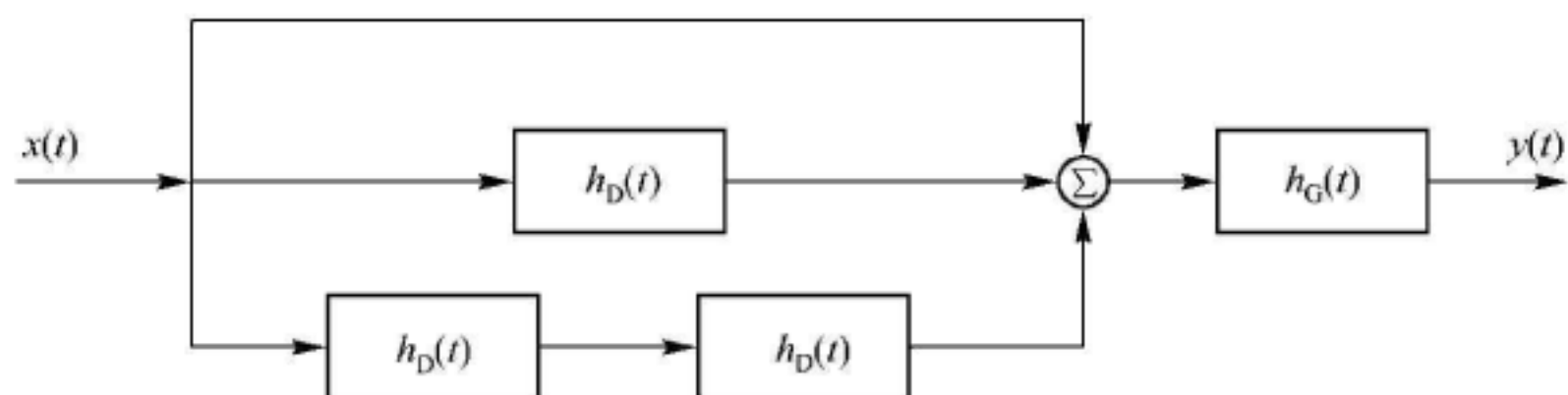


图 题 4-17

解: $h(t) = h_G(t) * [\delta(t) + h_D(t) + h_D(t) * h_D(t)]$
 $= h_G(t) * [\delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-1) * \delta(t-1)]$
 $= [u(t) - u(t-3)] * [\delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2)]$
 $= u(t) + u(t-1) + u(t-2) - u(t-3) - u(t-4) - u(t-5)$

第 5 章习题答案

5-1 图题 5-1 所示 RC 电路中, 当 $t=0$ 时, 开关 S 闭合, 求输出信号 $v_R(t)$ 。输入信号分别为以下几种情况。

(1) $x(t) = Eu(t)$ (3) $x(t) = \begin{cases} E & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t < 0, t > \tau \end{cases}$ (4) $x(t) = \sin \Omega t \cdot u(t)$

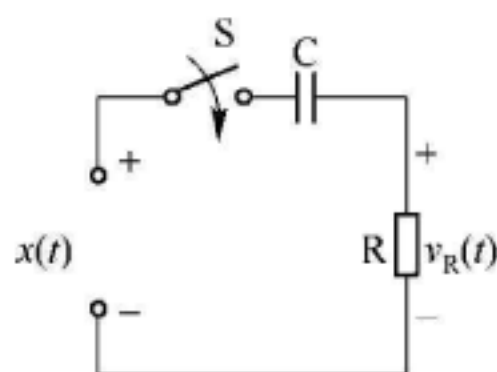


图 题 5-1

解: $V_R(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} X(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} X(s)$

$$(1) \quad X(s) = \frac{E}{s}$$

$$V_R(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{E}{s} = \frac{E}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$v_R(t) = E e^{-\frac{1}{RC}t} u(t)$$

$$(3) \quad X(s) = \frac{E}{s}(1 - e^{-s\tau})$$

$$V_R(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{E}{s}(1 - e^{-s\tau}) = \frac{E}{s + \frac{1}{RC}}(1 - e^{-s\tau})$$

$$v_R(t) = E \left[e^{-\frac{1}{RC}t} u(t) - e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)} u(t-\tau) \right]$$

$$(4) \quad X(s) = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

$$V_R(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

$$= \frac{RC\Omega}{1 + (RC\Omega)^2} \left[\frac{s + RC\Omega^2}{s^2 + \Omega^2} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right]$$

$$v_R(t) = \frac{RC\Omega}{1 + (RC\Omega)^2} \left[\cos \Omega t + RC\Omega \sin \Omega t - e^{-\frac{1}{RC}t} \right] u(t)$$

5-3 电路如图题 5-3 所示, 当 $t < 0$ 时, 电路元件无储能, 当 $t = 0$ 时, 开关闭合。求电压 $v_2(t)$ 的表达式, 并画出 $v_2(t)$ 的波形。

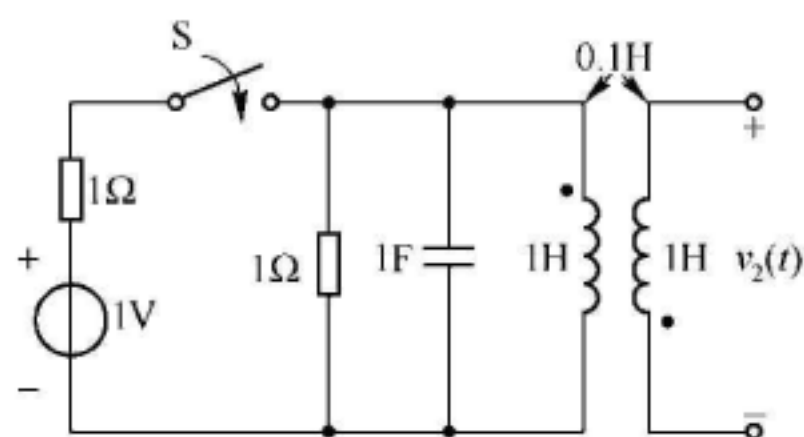
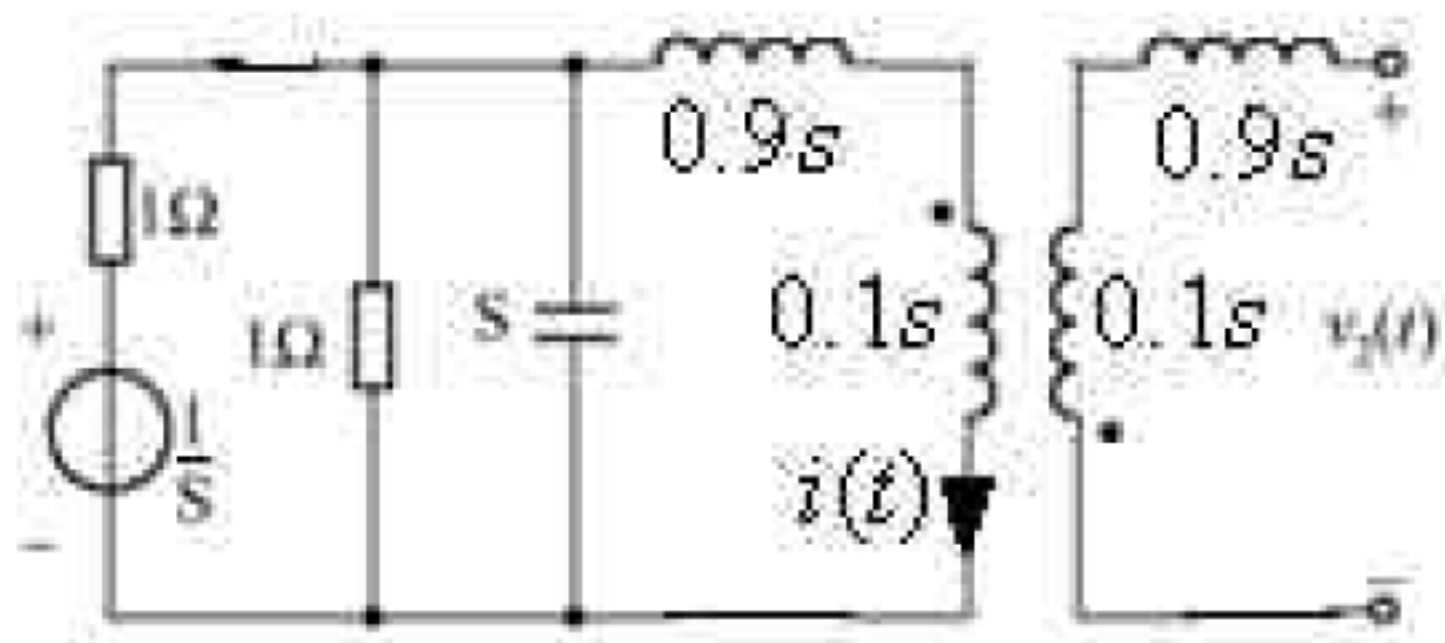


图 题 5-3

解:



电流源电流为: $\frac{1}{s} / 1 = \frac{1}{s}$

$$I(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + 1 + s + \frac{1}{0.9s + 0.1s}} = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)}$$

$$V_2(s) = I(s) \cdot (-0.1s) = -0.1 \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$v_2(t) = -0.1te^{-t}u(t)$$

5-6 系统的微分方程为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$, 初始状态为 $y'(0^-) = -4$, $y(0^-) = 1$ 。若激励为 $x(t) = e^{-2t}u(t)$ 。

(1) 试用拉氏变换分析法求全响应;

(2) 分别求零输入响应和零状态响应, 然后叠加得全响应。

解: 微分方程两边作单边拉氏变换, 得

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) - [sy'(0^-) + y(0^-)] = (2s + 1)X(s) \quad (2)$$

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 4s + 3}X(s) + \frac{sy(0^-) + y'(0^-) - 4y(0^-)}{s^2 + 4s + 3}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad y(0^-) = 1, \quad y'(0^-) = 4$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2s+1}{2} \cdot \frac{1}{s+2}}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{\frac{s+4+4}{2}}_{\text{零输入响应}}$$

$$= \underbrace{\frac{-1/2}{s+2} + \frac{3}{s+2}}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{\frac{-5/2}{s+2} + \frac{7/2}{s+2} + \frac{-5/2}{s+2}}_{\text{零输入响应}}$$

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2} [6e^{-2t} - 5e^{-3t} - e^{-t}]}_{\text{零状态响应}} u(t) + \underbrace{\frac{1}{2} [7e^{-t} - 5e^{-3t}]}_{\text{零输入响应}} u(t)$$

5-7 电路如图题 5-7 所示, 已知 $E = 4\text{V}$, 当 $t < 0$ 时, 开关 S 打开, 电路已达稳态, 设 $v_1(0^-) = 0$ 。当 $t = 0$ 时, 开关 S 闭合。求 $t \geq 0$ 时的 $v_1(t)$ 和 $i(t)$ 。

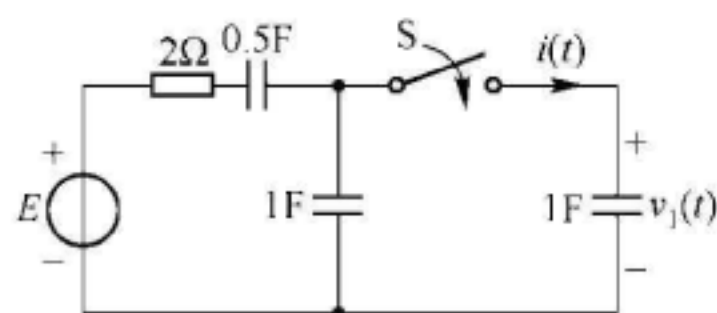
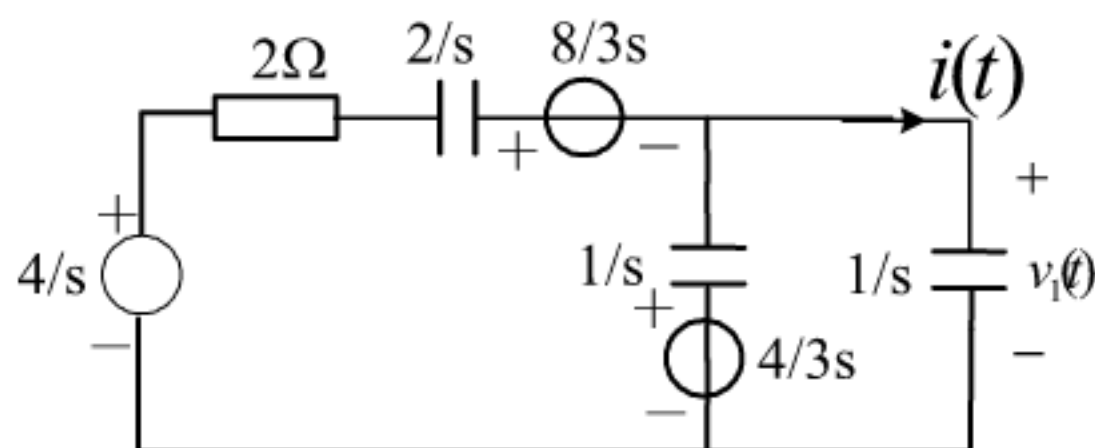


图 题 5-7

解:



$$V_1(s) = \left(\frac{4}{s} - \frac{8}{3s}\right) \frac{\frac{1}{s} // \frac{1}{s}}{2 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s} // \frac{1}{s}} + \frac{4}{3s} \frac{(2 + \frac{2}{s}) // \frac{1}{s}}{\frac{1}{s} + (2 + \frac{2}{s}) // \frac{1}{s}}$$

$$= \frac{4}{3s} \left(\frac{1}{4s+5} + \frac{2s+2}{4s+5} \right) = \frac{4}{3s} \frac{2s+3}{4s+5} = \frac{4}{15} \frac{1}{s} - \frac{2}{15} \frac{1}{s+1.25}$$

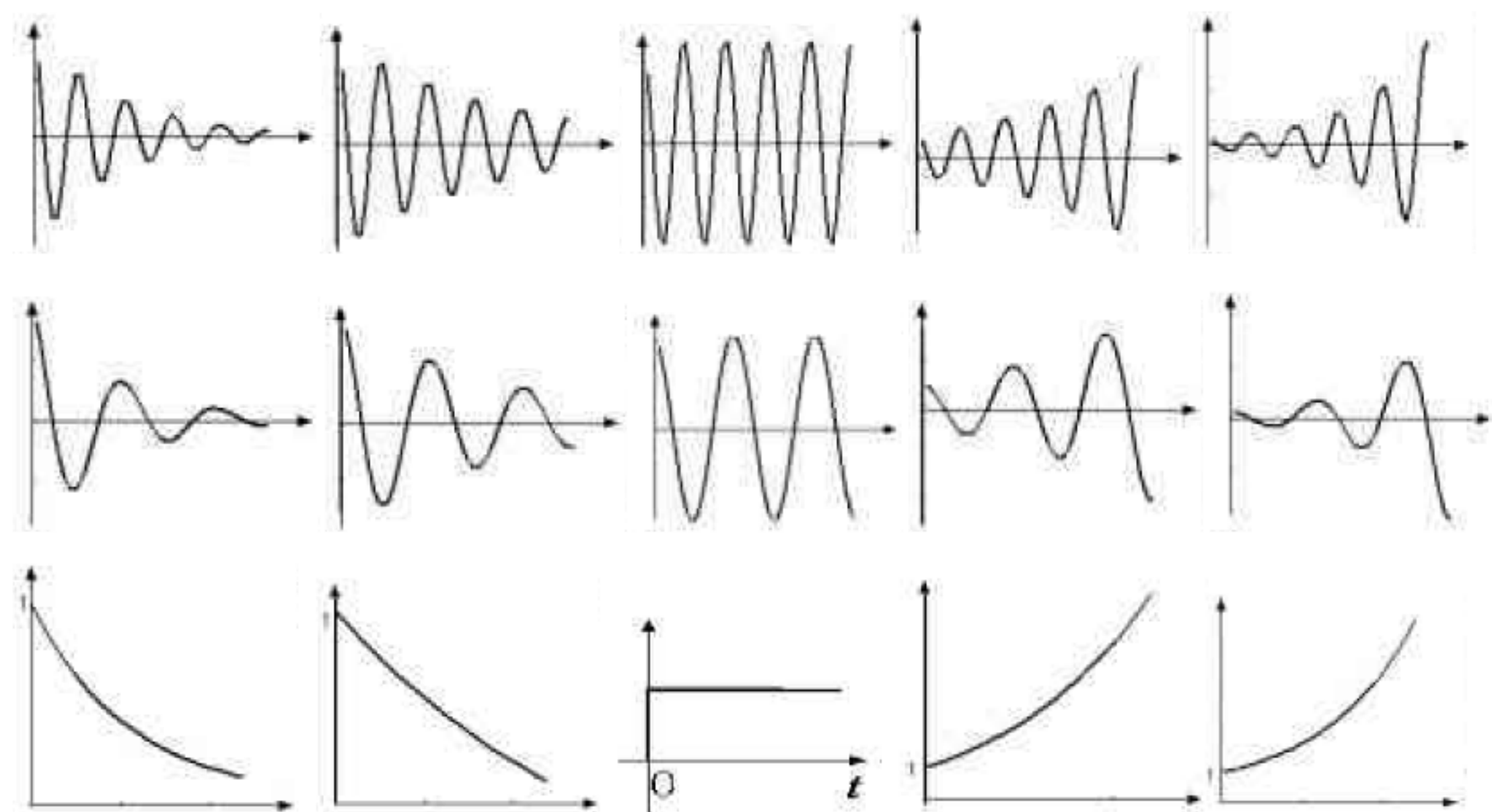
$$v_1(t) = \frac{2}{15} (2 - e^{-1.25t}) u(t)$$

$$I(s) = sV_1(s) = \frac{4}{3} \frac{2s+3}{4s+5} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{4s+5} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \frac{1}{s+1.25}$$

$$i(t) = \frac{2}{3} \delta(t) + \frac{1}{6} e^{-1.25t} u(t)$$

5-10 当 $F(s)$ 的一阶极点落于图题 5-10 所示 s 平面中各方框所处位置时, 画出对应的 $f(t)$ 的波形 (填入方框中)。图中给出了示例, 此例极点实部为正, 波形是增长振荡。

解: 画图:



5-12 求图题 5-12 所示各网络的电压转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, 在 s 平面画出其零、极点分布。若激励信号 $v_1(t)$ 为冲激函数 $\delta(t)$, 求响应 $v_2(t)$, 并画出波形。

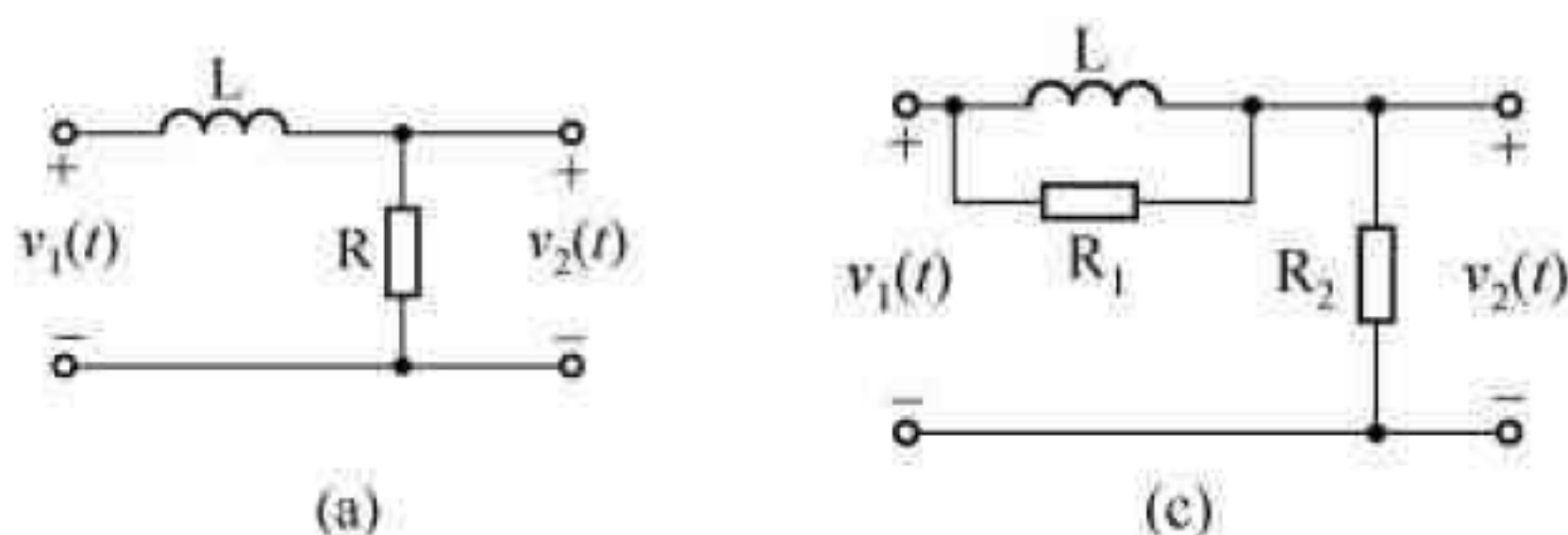
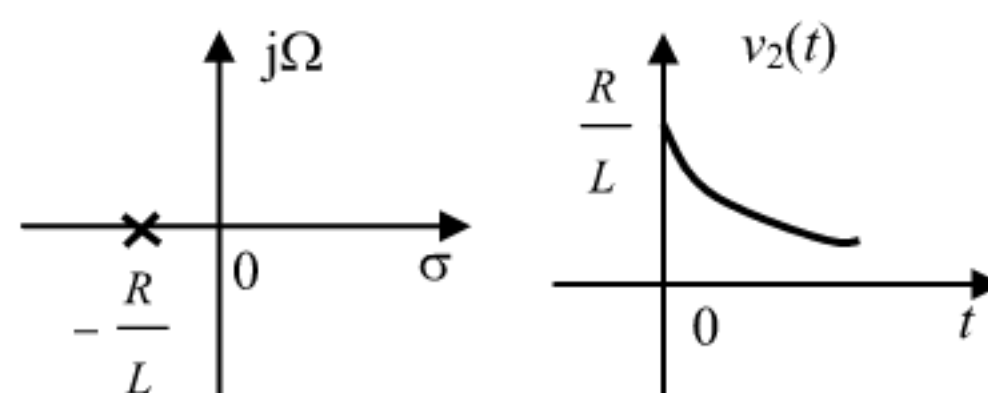


图 题 5-12

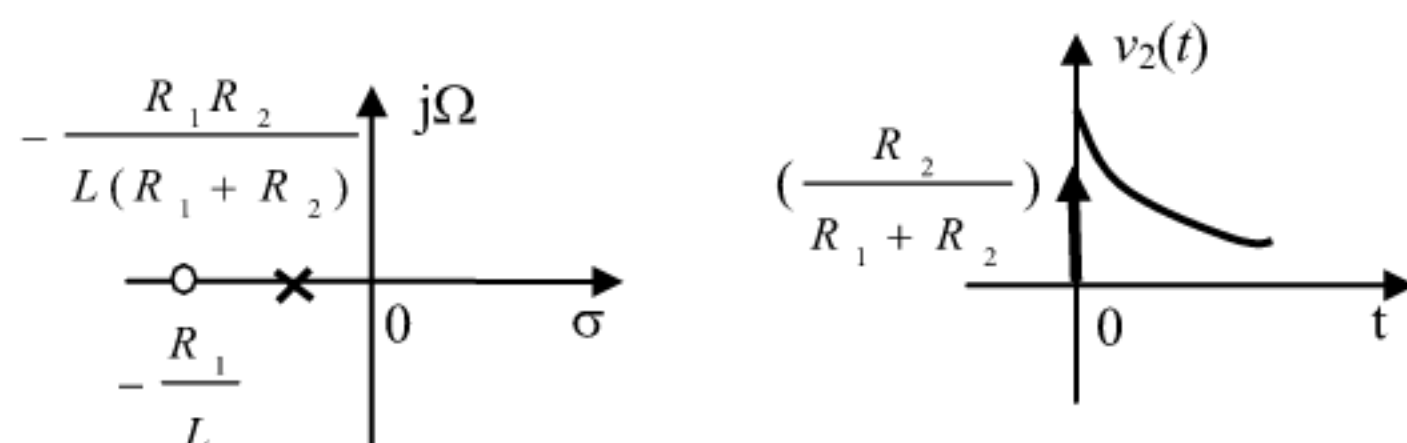
解: (a) $H(s) = \frac{R}{R + sL} = \frac{R/L}{s + R/L}$

$$v_2(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$$



$$(c) \quad H(s) = \frac{R_2}{(sL // R_1) + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{s + \frac{R_1}{L}}{s + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}}$$

$$v_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left[\delta(t) + \frac{R_1^2}{L(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t} u(t) \right]$$



5-14 写出图题 5-14 所示各梯形网络的电压转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ ，在 s 平面示出其零、极点分布。

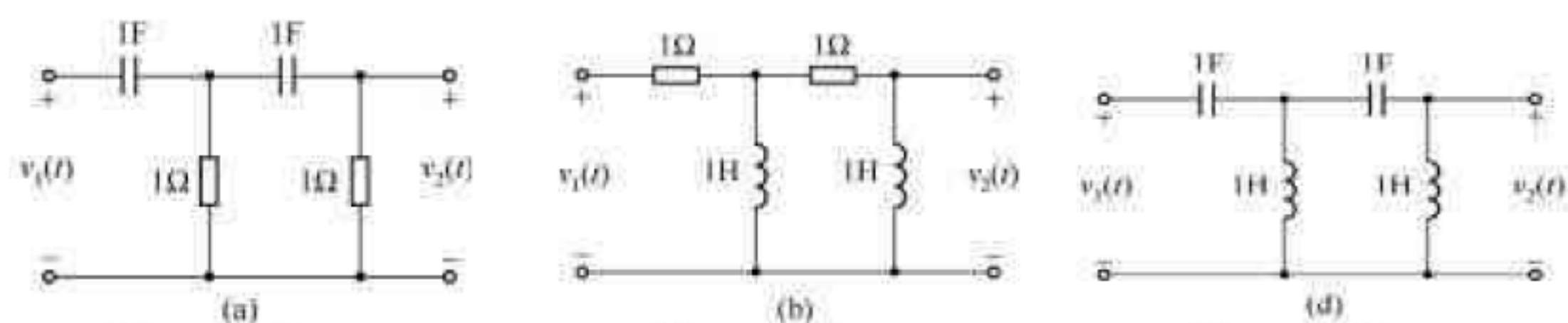
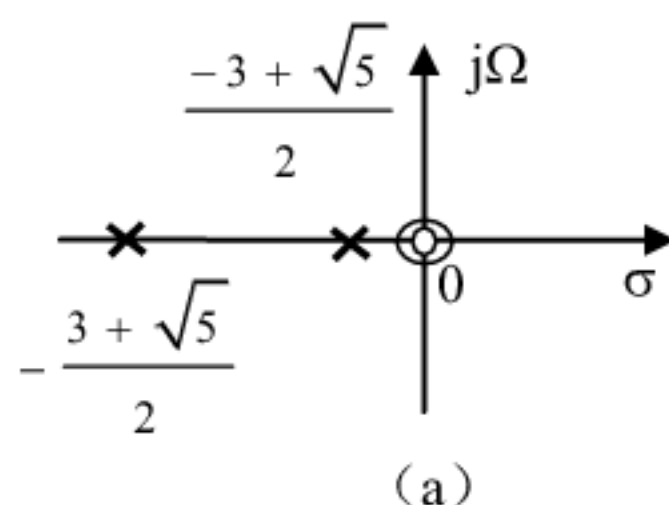


图 题 5-14

解: (a)
$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{s}} \cdot \frac{(1 + \frac{1}{s}) // 1}{(1 + \frac{1}{s}) // 1 + \frac{1}{s}} = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1} = \frac{s^2}{(s - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2})(s - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2})}$$

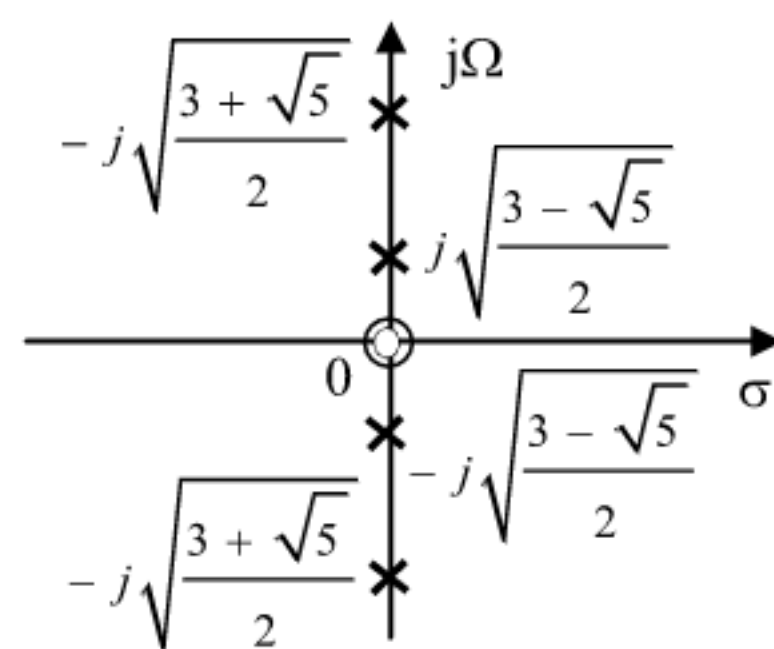


(b)
$$H(s) = \frac{s}{s+1} \cdot \frac{(1+s) // s}{(1+s) // s + 1} = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1} = \frac{s^2}{(s - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2})(s - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2})}$$

零极点图与 (a) 相同，略。

$$(d) \quad H(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{s}} \cdot \frac{\frac{1}{s} + s // s}{\frac{1}{s} + s // s + \frac{1}{s}} = \frac{s^4}{s^4 + 3s^2 + 1}$$

零点为 0, 4 阶; 极点为 $\pm j\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$



(c)

5-15 已知策动点阻抗函数分别为下列各式, 试画出对应的电路图。

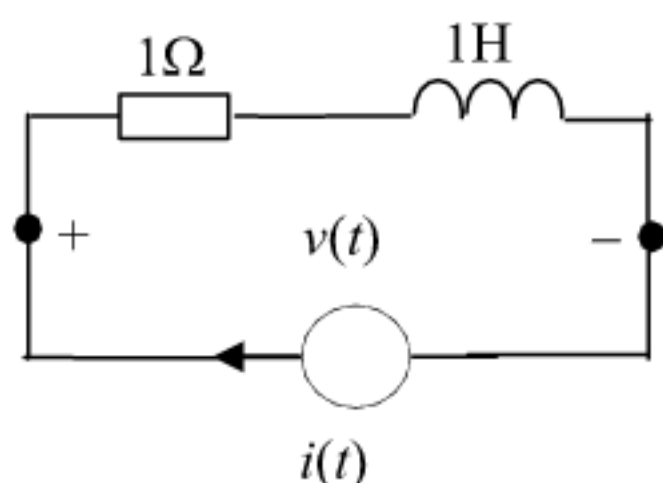
$$(1) \quad 1 + s \quad (2) \quad s + \frac{1}{s} \quad (3) \quad 1 + \frac{1}{s}$$

$$(4) \quad \frac{s}{s^2 + 1} \quad (5) \quad \frac{s}{1 + s} \quad (6) \quad \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

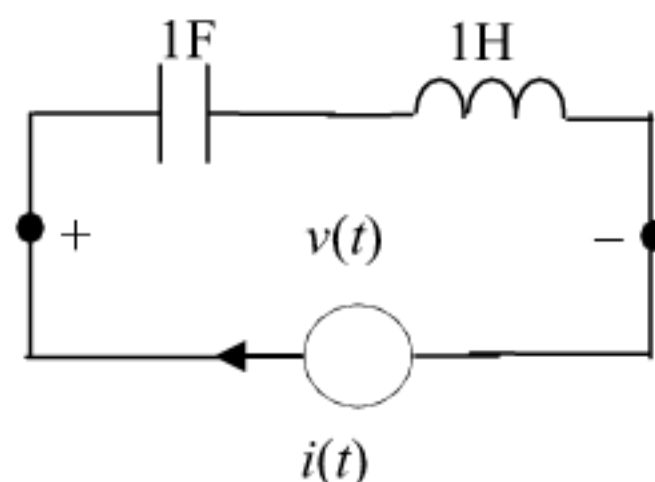
解: $Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)},$

即电路中电流源作为激励信号, 而电路中的电压作为响应信号

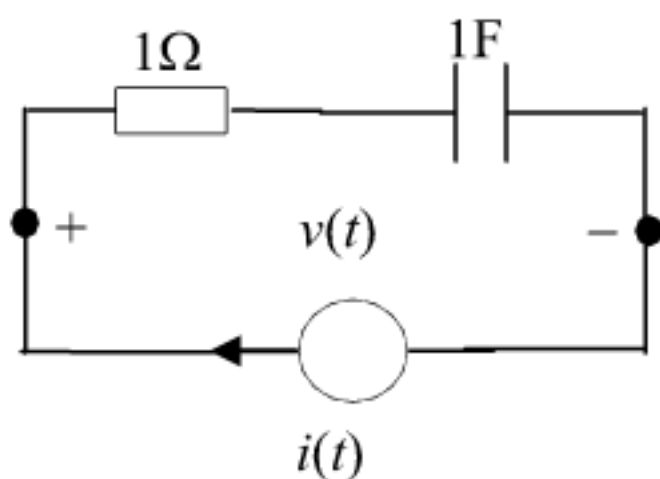
(1) $1 + s$



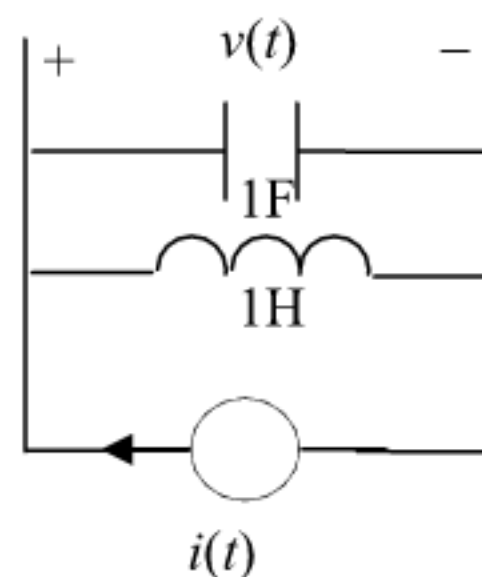
(2) $s + \frac{1}{s}$



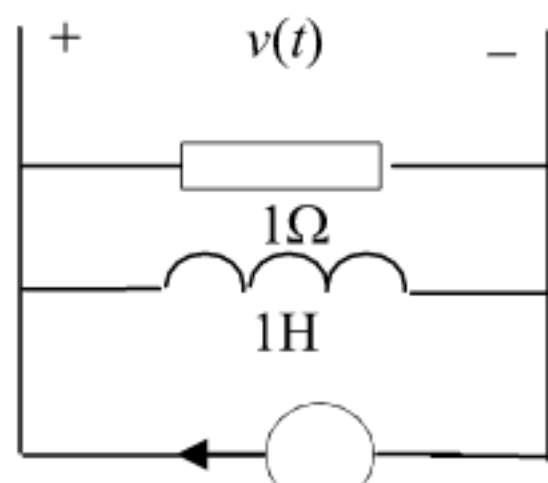
(3) $1 + \frac{1}{s}$



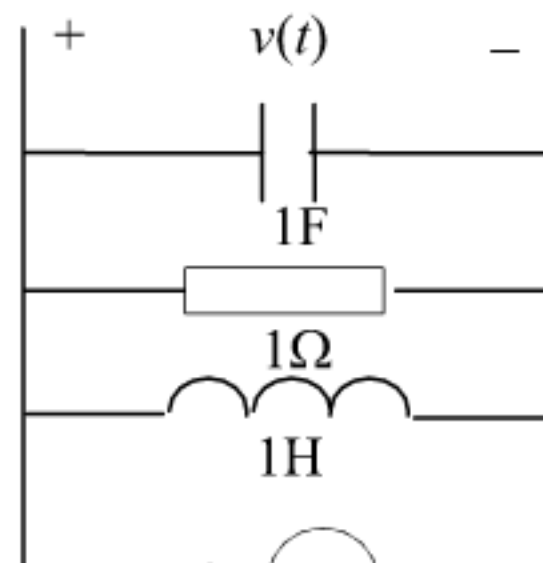
(4) $\frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1}{s + \frac{1}{s}}$



(5) $\frac{s}{1 + s} = \frac{1}{1 + \frac{1}{s}}$



(6) $\frac{s}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{s + 1 + \frac{1}{s}}$



5-19 已知系统的阶跃响应为 $g(t) = (1 - e^{-2t} - te^{-2t})u(t)$ ，为使其零状态响应为

$y(t) = (1 - e^{-2t} - te^{-2t})u(t)$ ，求激励信号 $x(t)$ 。

解： $G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$, $Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$

$$H(s) = \frac{G(s)}{\frac{1}{s}} = 1 - \frac{s}{s+2} = \frac{2}{s+2},$$

$$X(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}}{\frac{2}{s+2}} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2} - \frac{1}{s+2}$$

$$\therefore h(t) = (1 - \frac{1}{2}e^{-2t})u(t)$$

5-20 某系统的起始状态一定，已知输入 $x_1(t) = \delta(t)$ 时，全响应为 $y_1(t) = -3e^{-t}$ ， $t \geq 0$ ；输入 $x_2(t) = u(t)$ 时，全响应为 $y_2(t) = 1 - 5e^{-t}$ ， $t \geq 0$ 。试求输入 $x(t) = tu(t)$ 时的全响应 $y(t)$ 。

解： $X_1(s) = 1$, $Y_1(s) = \frac{-3}{s+1} = \frac{Y}{s+1}$

$$X_2(s) = \frac{1}{s}, \quad Y_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{5}{s+1} = \frac{Y}{s+1}$$

$$H(s) = \frac{Y_2(s) - Y_1(s)}{X_2(s) - X_1(s)} = \frac{1}{s+1}, \quad Y_{zi}(s) = Y_1(s) - H(s) = \frac{-4}{s+1}$$

$$\therefore h(t) = e^{-t}u(t)$$

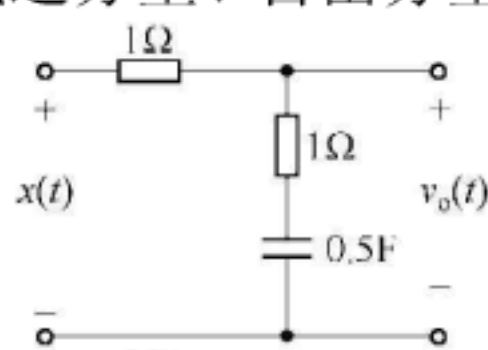
$$X(s) = \frac{1}{s^2},$$

$$Y_{zs}(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{-3}{s+1}$$

故 $y(t) = (t - 1 - 3e^{-t})u(t)$

5-24 如图题 5-24 所示电路，已知激励信号为 $x(t) = (3e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$ ，求响应 $v_2(t)$ ，并指出响应 $v_2(t)$ 中的强迫分量、自由分量、暂态分量与稳态分量各分量。



题 图 5-24

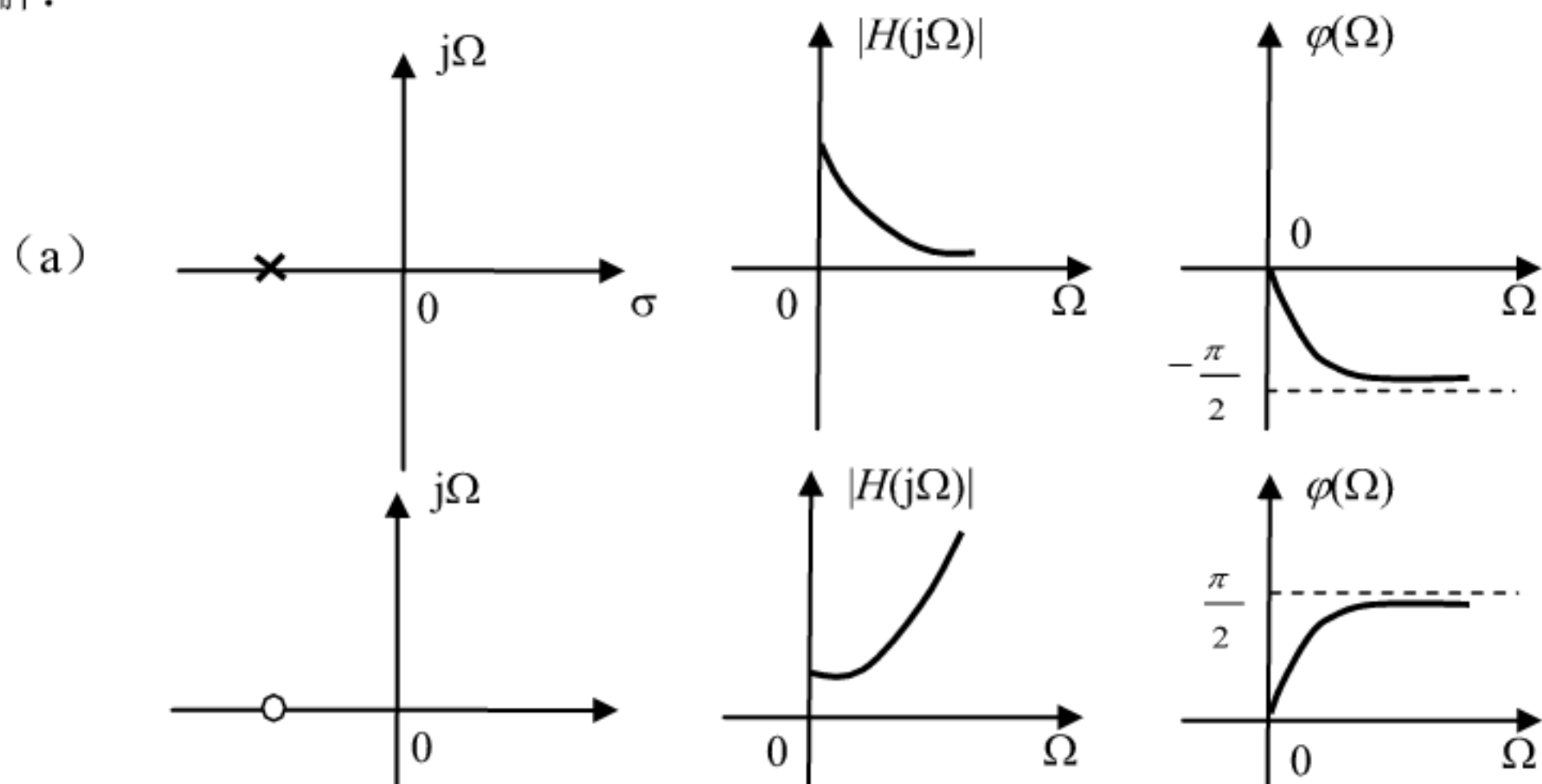
$$\text{解: } H(s) = \frac{V_o(s)}{X(s)} = \frac{1 + \frac{1}{0.5s}}{1 + 1 + \frac{1}{0.5s}} = \frac{s+2}{2s+2} \quad X(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

$$\begin{aligned} V_o(s) &= X(s) \cdot \frac{s+2}{2s+2} = \frac{3}{2(s+1)} + \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{2}{s+1} + \frac{1}{2(s+3)} \end{aligned}$$

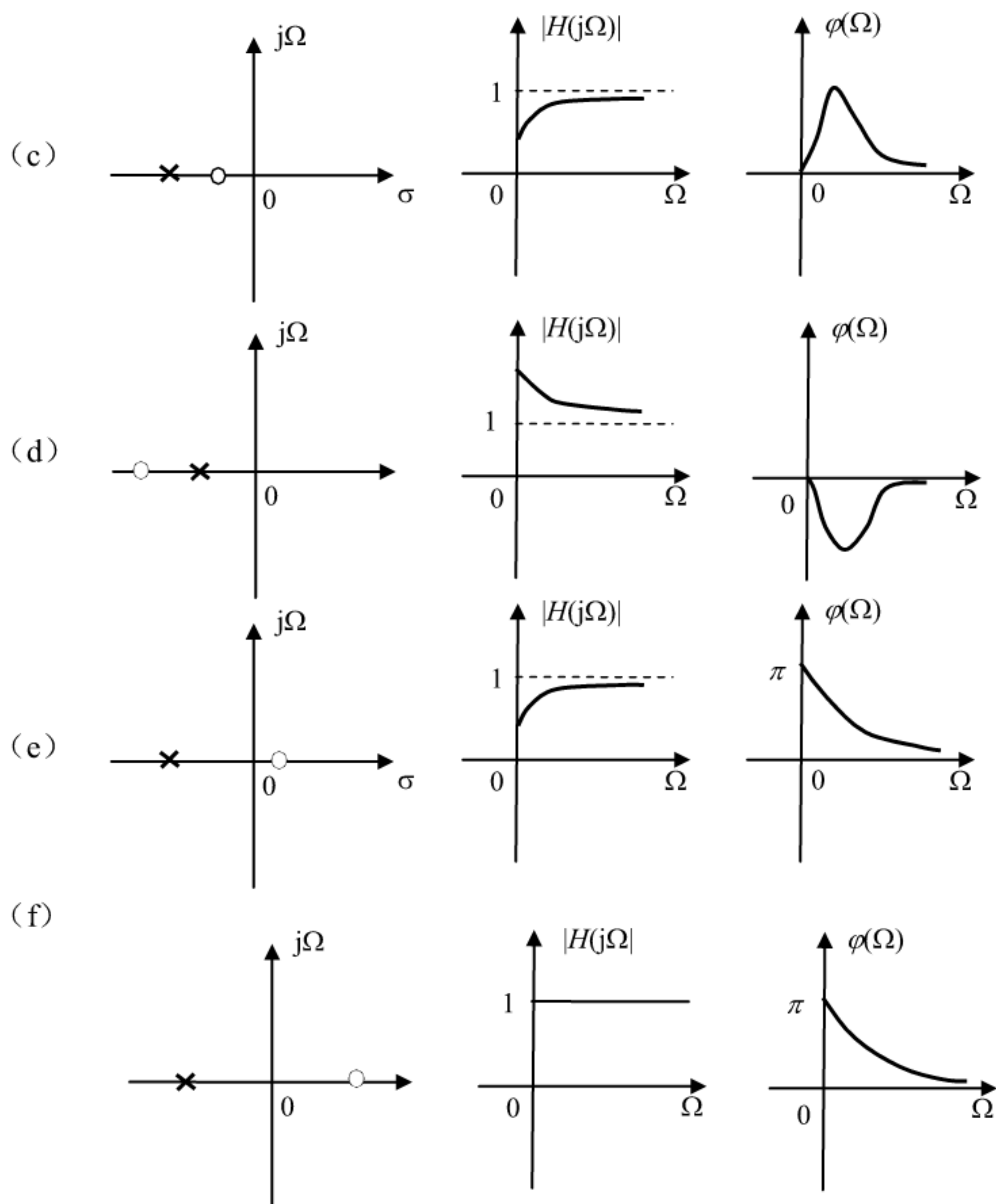
所以响应为 $v_o(t) = (2e^{-t} + 0.5e^{-3t})u(t)$ ， $2e^{-t}$ 是自由响应， $0.5e^{-3t}$ 是强迫响应。 $(2e^{-t} + 0.5e^{-3t})u(t)$ 是暂态响应，稳态响应为 0。

5-29 给定 $H(s)$ 的零、极点分布如图题 5-29 所示，令 s 沿 $j\Omega$ 轴移动，由矢量因子之变化分析频响特性，粗略绘出幅频与相频特性曲线。

解：

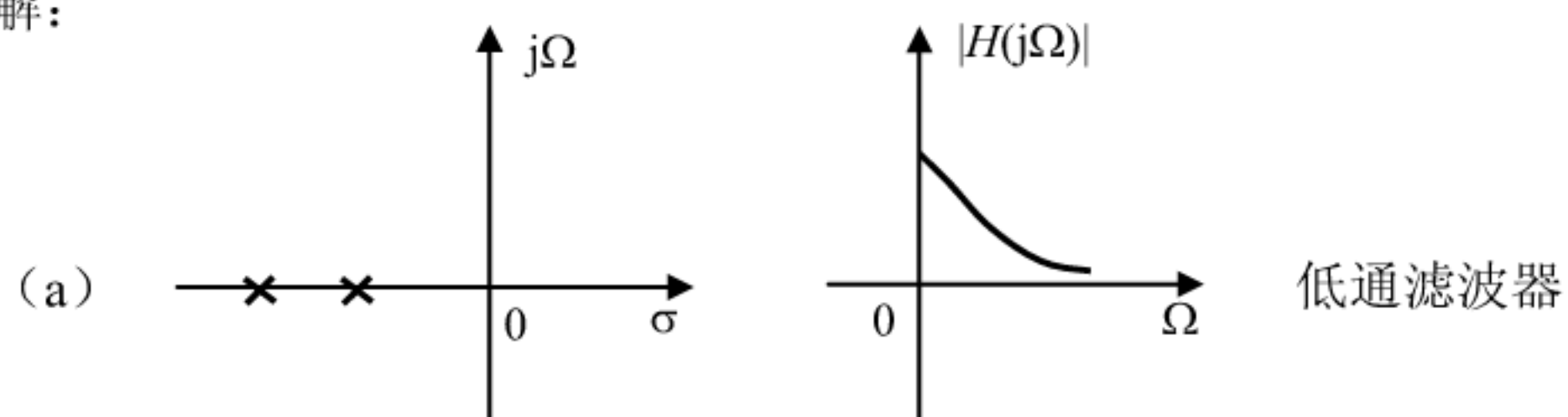


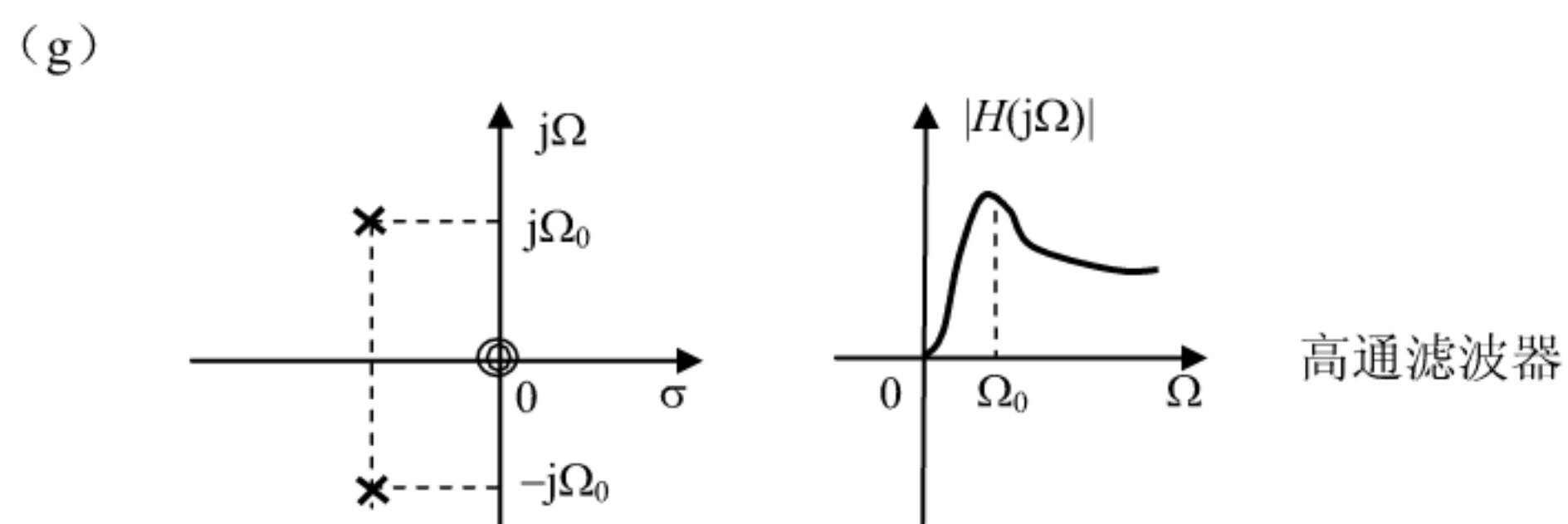
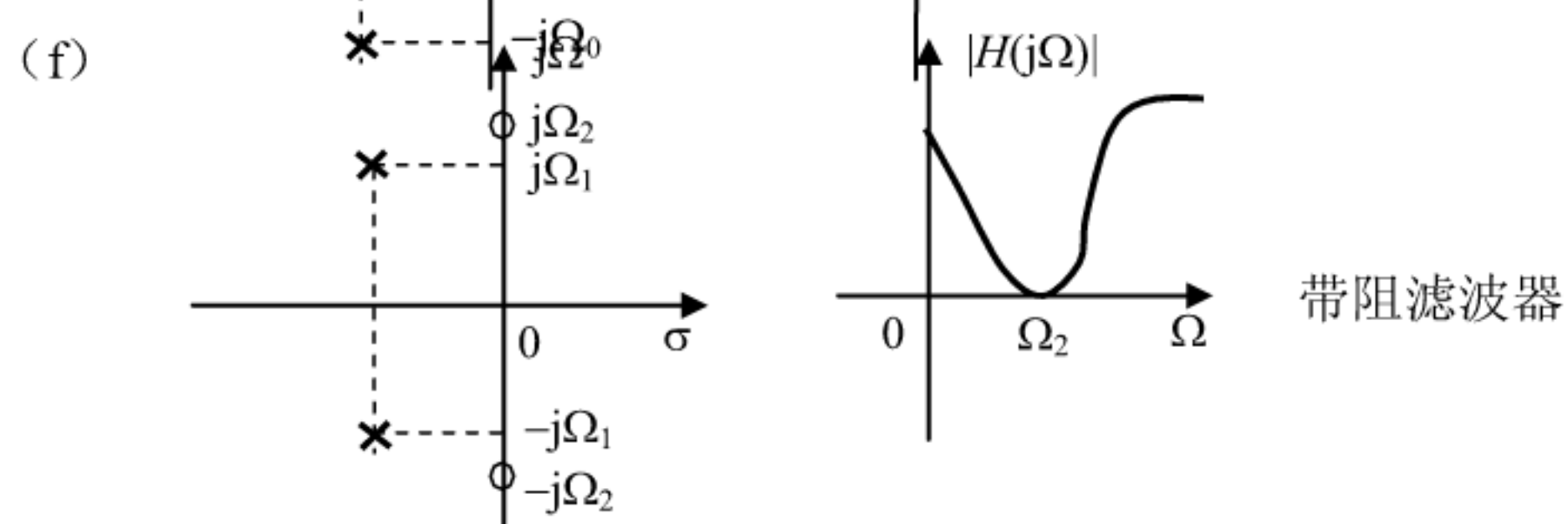
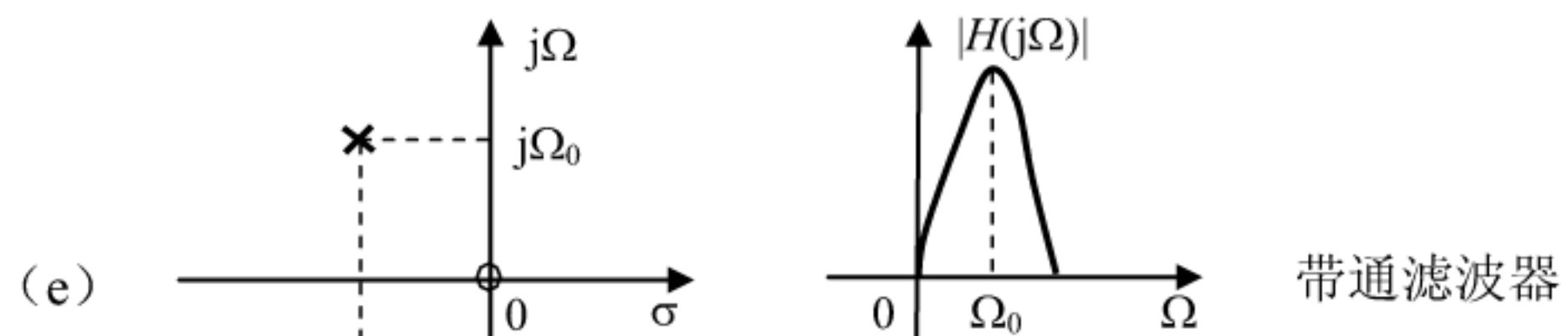
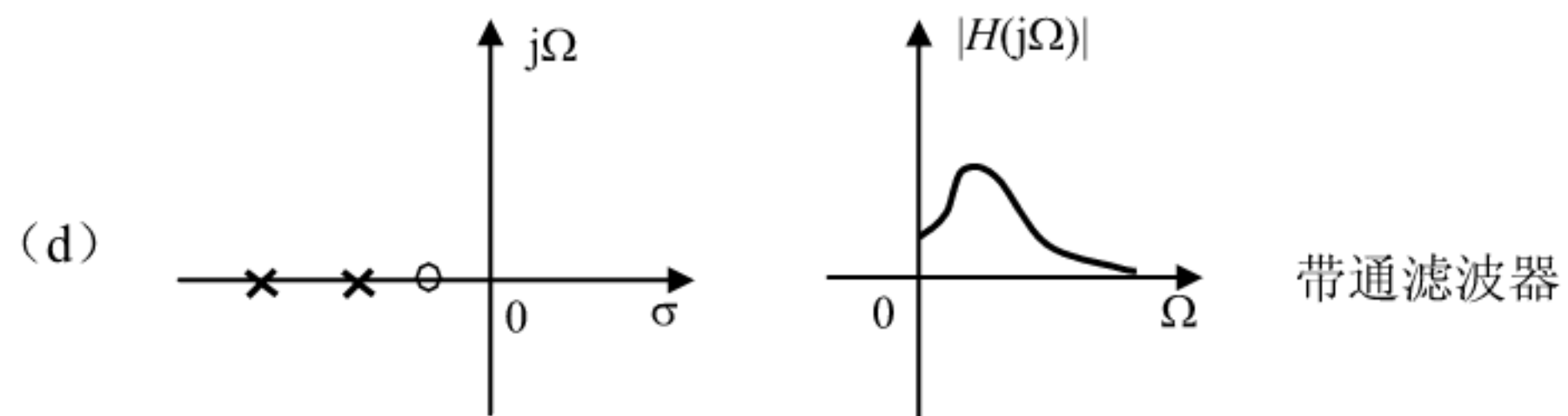
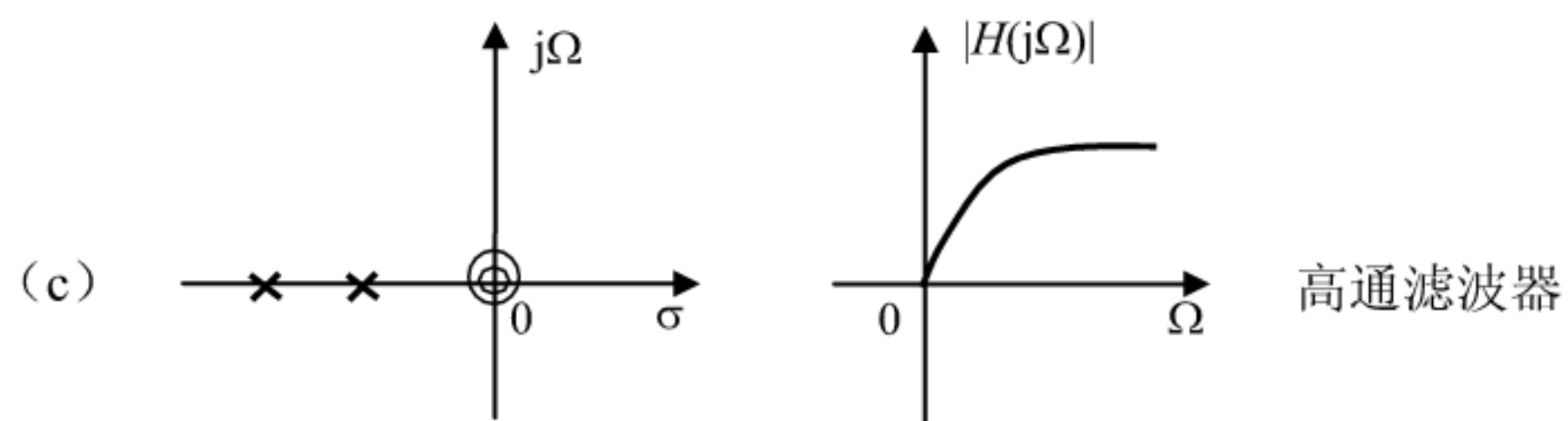
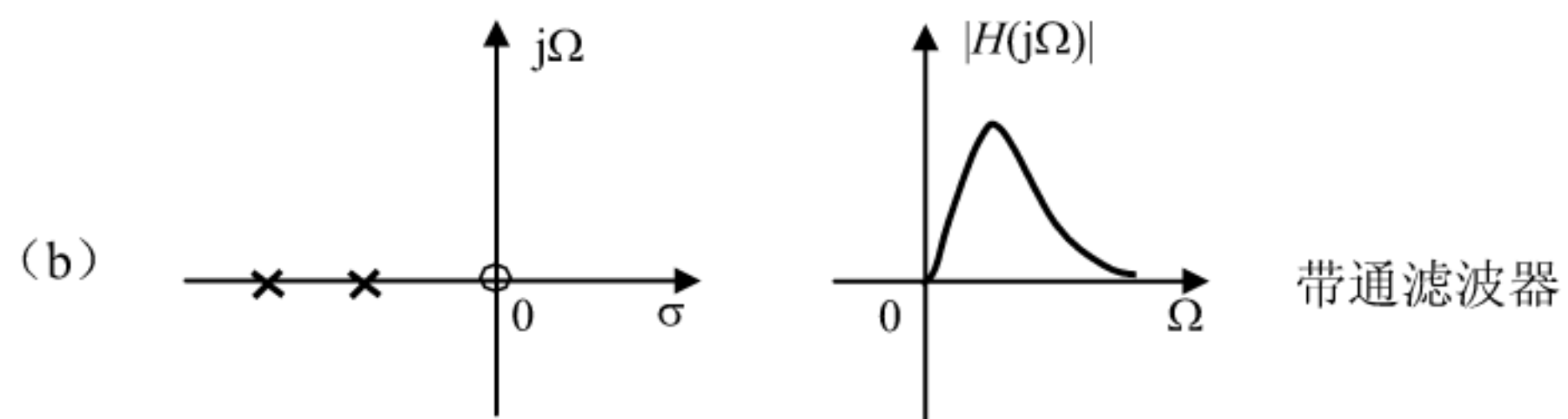
(b)



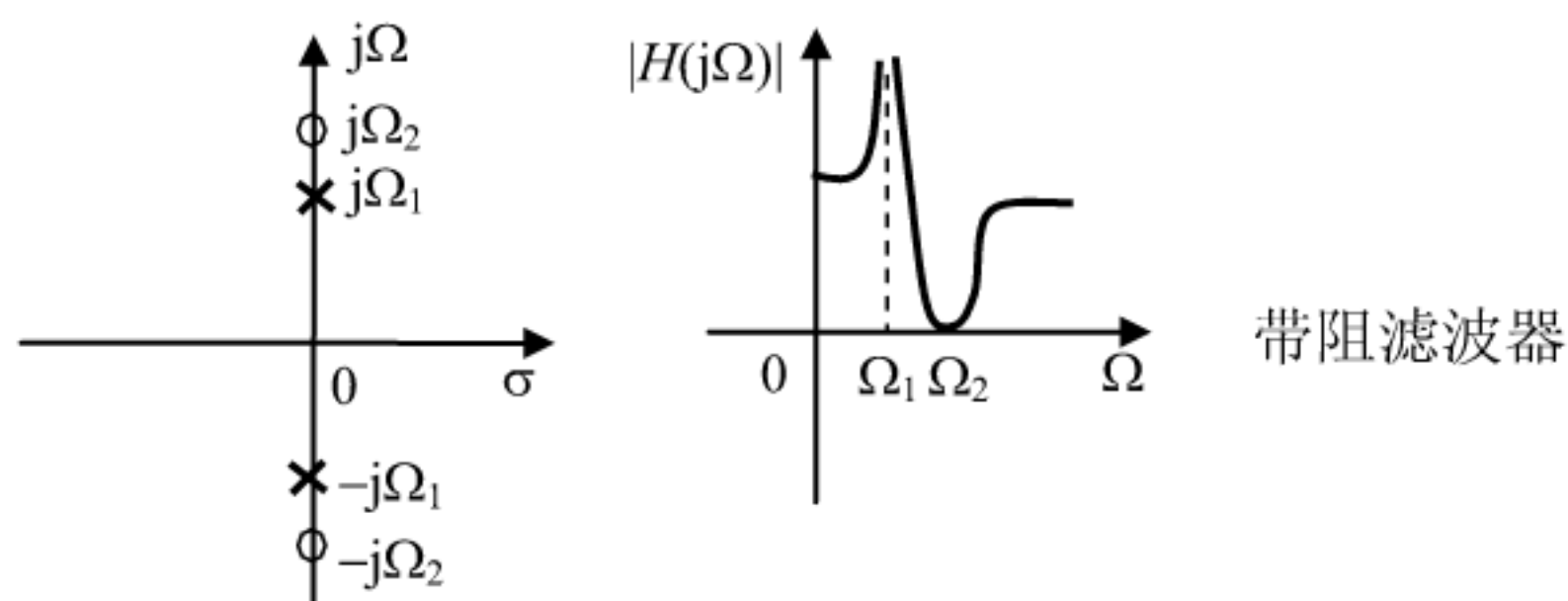
5-30 若 $H(s)$ 的零、极点如图题 5-30 所示，试讨论它们分别是哪种滤波网络（低通、高通、带通、带阻），并绘出各自的幅频特性曲线。

解：



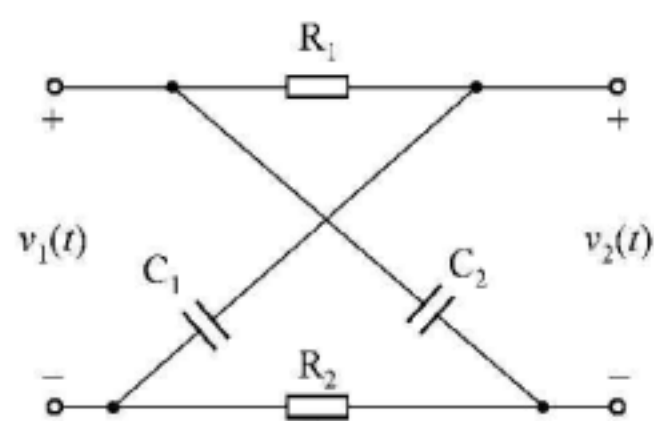


(h)



5-35 图题 5-35 所示格形网络, 写出电压转移函数 $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ 。设 $CR_1 \ll R_2$,

在 s 平面画出 $H(s)$ 零、极点分布图, 指出是否为全通网络。在网络参数满足什么条件下才能构成全通网络?



题 图 5-35

$$\text{解: } H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} - \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{-s^2 + \frac{1}{R_1C_1} \frac{1}{R_2C_2}}{(s + \frac{1}{R_1C_1})(s + \frac{1}{R_2C_2})}$$

$$\text{极点为: } p_1 = -\frac{1}{R_1C_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{R_2C_2}$$

$$\text{零点为: } s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{R_1C_1} \cdot \frac{1}{R_2C_2}}$$

当网络参数满足: $R_1C_1 = R_2C_2$ 时, 系统为全通系统。

5-37 求图题 5-37 所示各流图的增益。

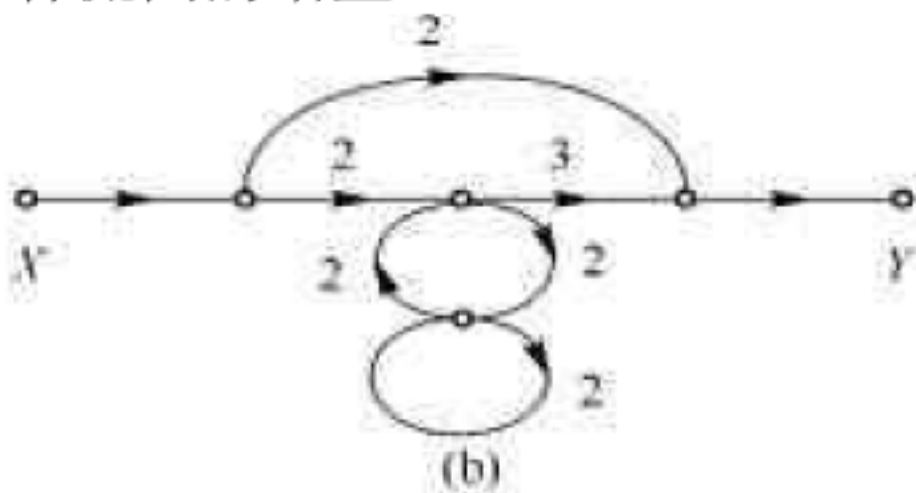


图 题 5-37

解: (b)

$$\Delta = 1 - (2 \times 2 \times 2) = -5$$

$$L_1: g_1 = 2, \Delta_1 = -1 \times (2 + 2) = -2$$

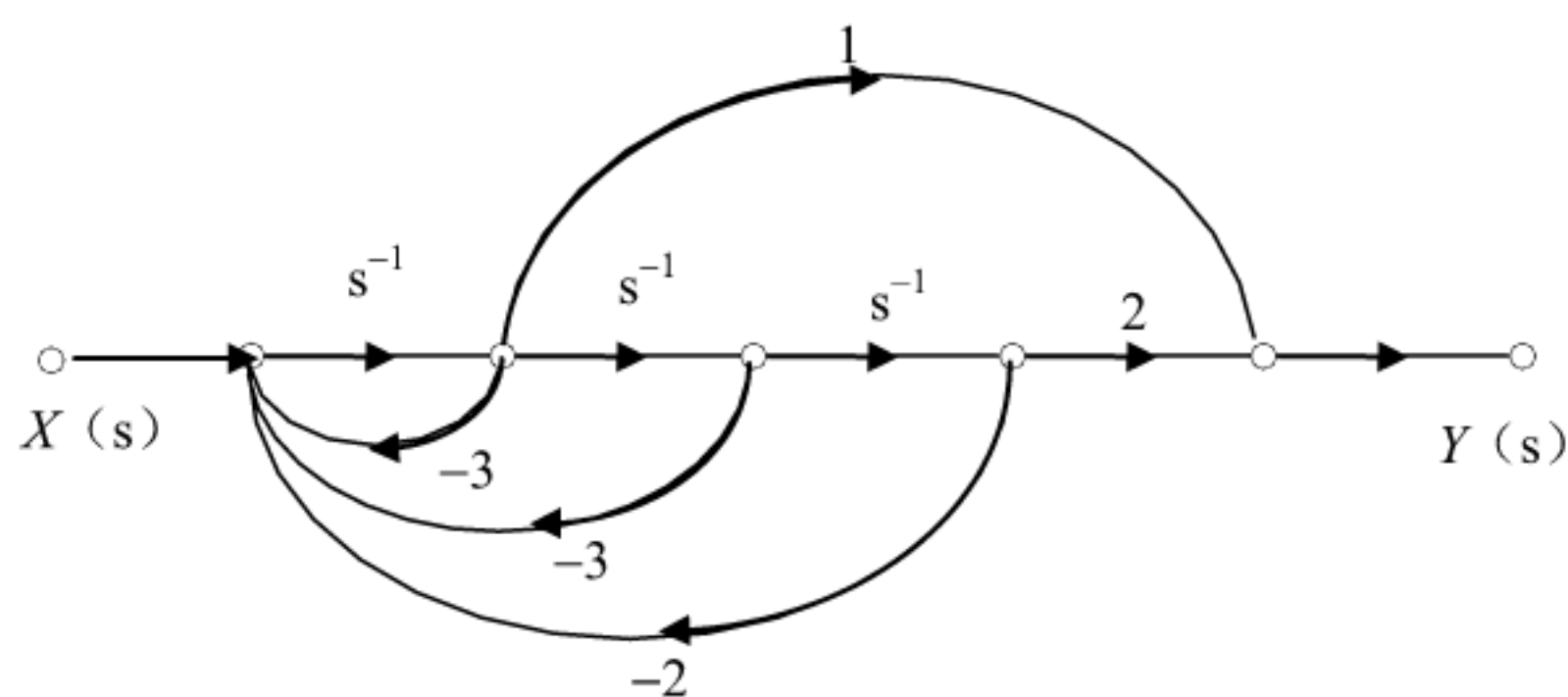
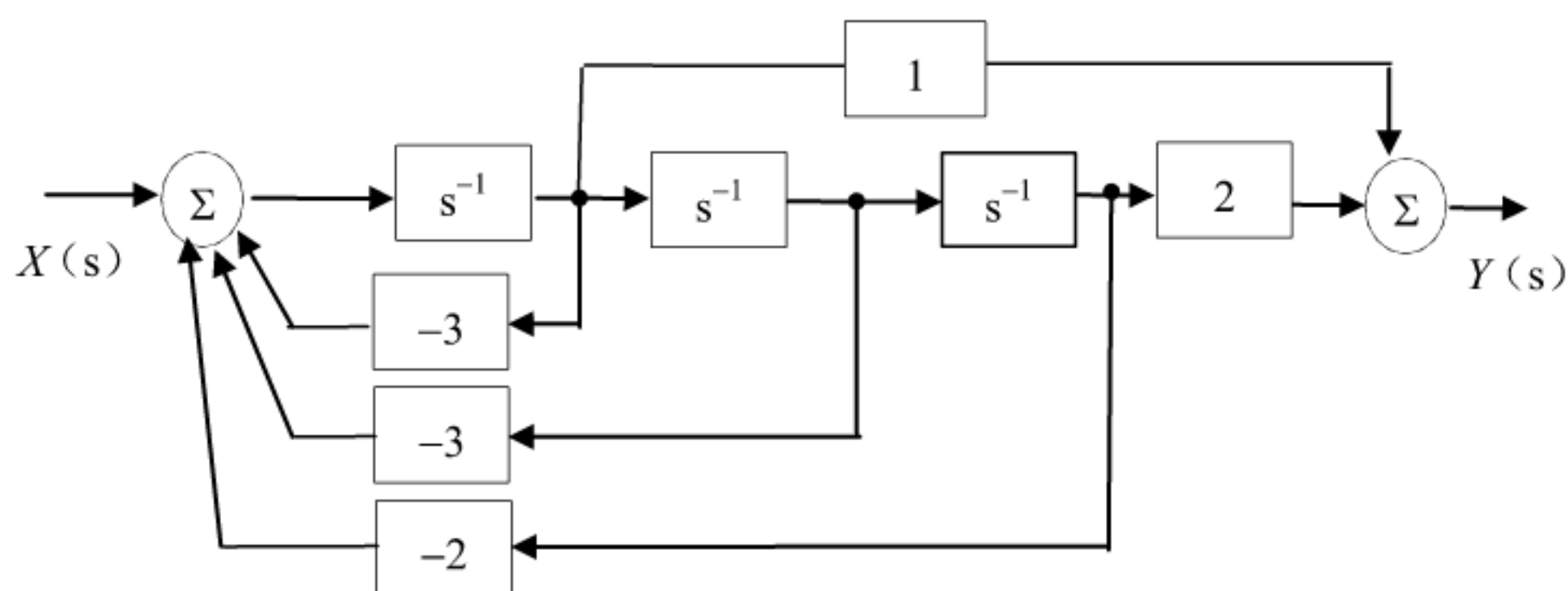
$$L_2: g_2 = 2 \times 3 = 6, \Delta_2 = -1 = -2$$

$$H = \frac{1}{\Delta}(g_1 \Delta_1 + g_2 \Delta_2) = \frac{16}{5}$$

5-38 试绘出下列微分方程描述的系统直接形式的模拟框图或信号流程图。

$$(2) \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2 y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \frac{dx(t)}{dt}$$

解: (2)
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 2}{s^3 + 3s^2 + 3s + 2} = \frac{s^{-1} + 2s^{-3}}{1 + 3s^{-1} + 3s^{-2} + 2s^{-3}}$$

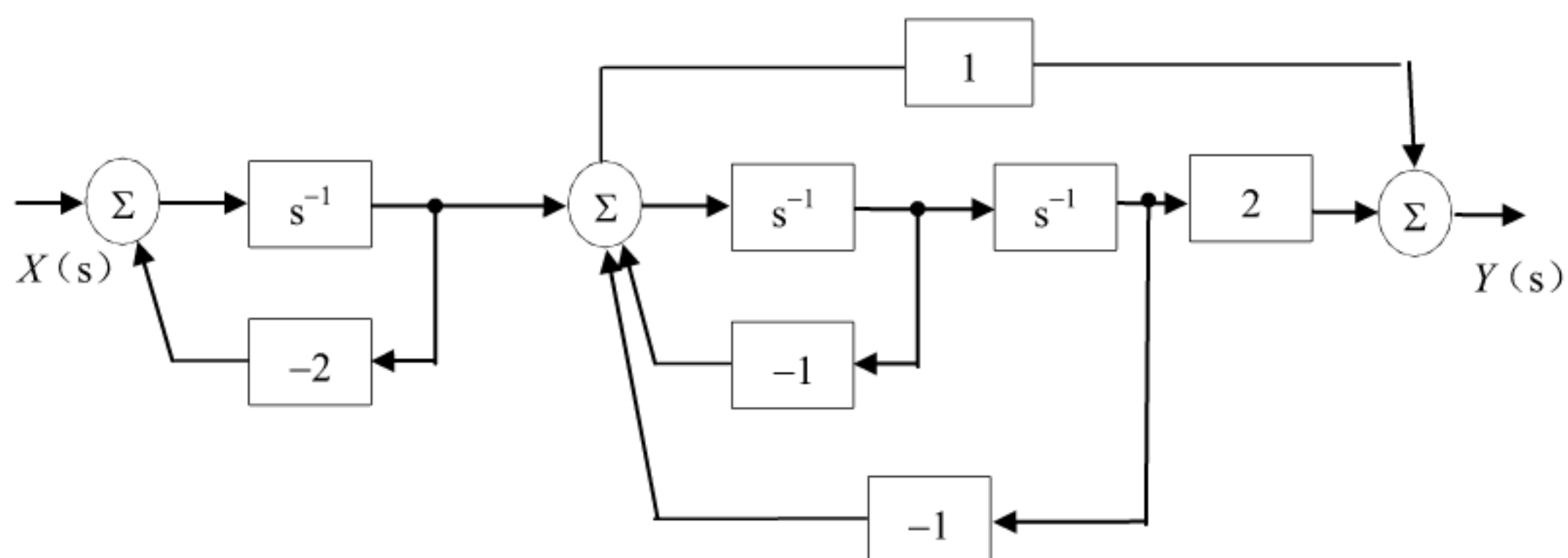


5-39 用级联形式和并联形式模拟上题的系统, 并画出方框图。

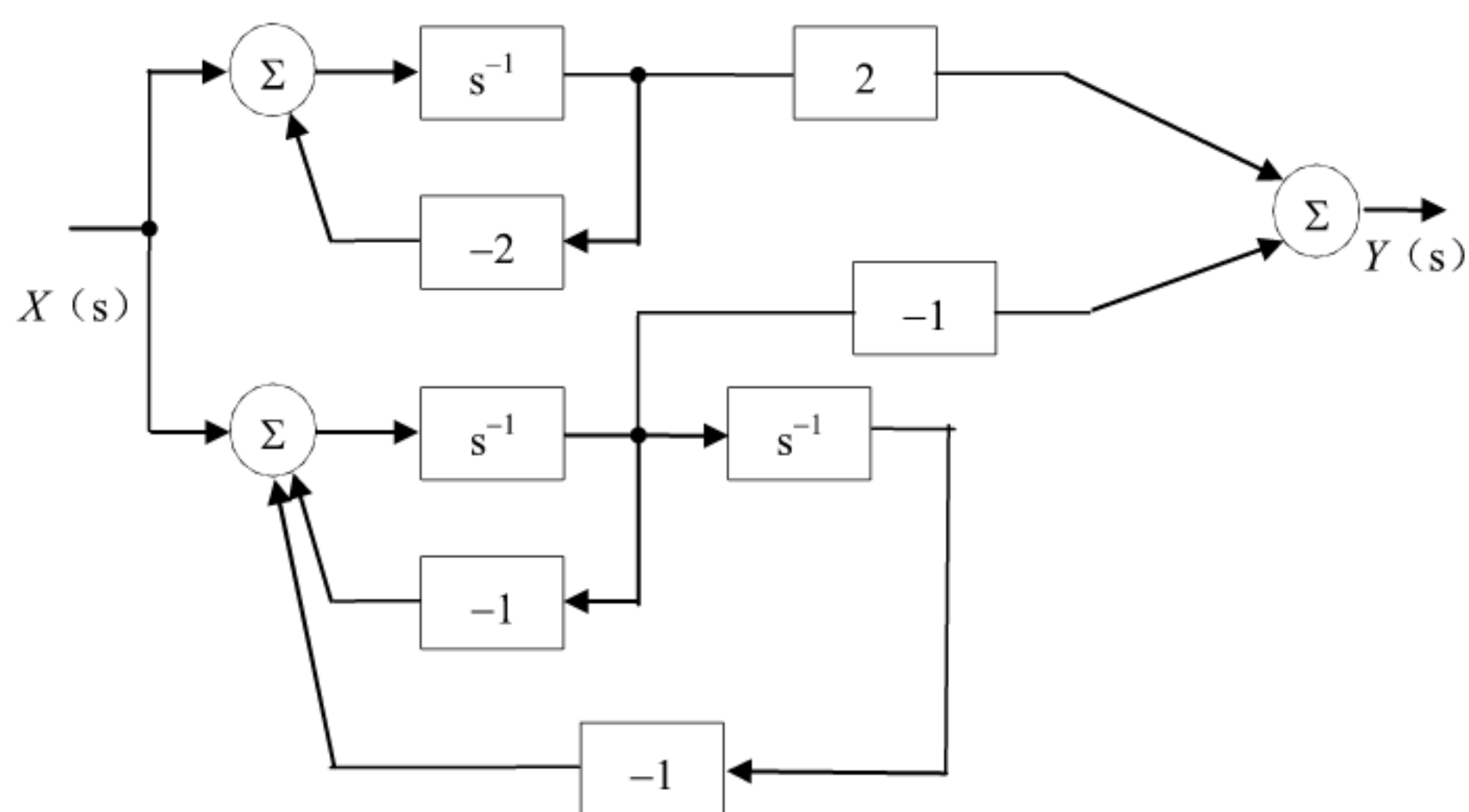
解: (2)
$$\frac{s^2 + 2}{(s + 2)(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s + 2} \cdot \frac{s^2 + 2}{s^2 + s + 1} = \frac{s^{-1}}{1 + 2s^{-1}} \cdot \frac{1 + 2s^{-2}}{1 + s^{-1} + s^{-2}}$$

和
$$\frac{s^2 + 2}{(s + 2)(s^2 + s + 1)s + 2} = \frac{2}{s + 2} + \frac{-s}{s^2 + s + 1} = \frac{2s^{-1}}{1 + 1s^{-1} + s^{-2}} + \frac{-s^{-1}}{1 + s^{-1} + s^{-2}}$$

系统的级联形式的方框图为

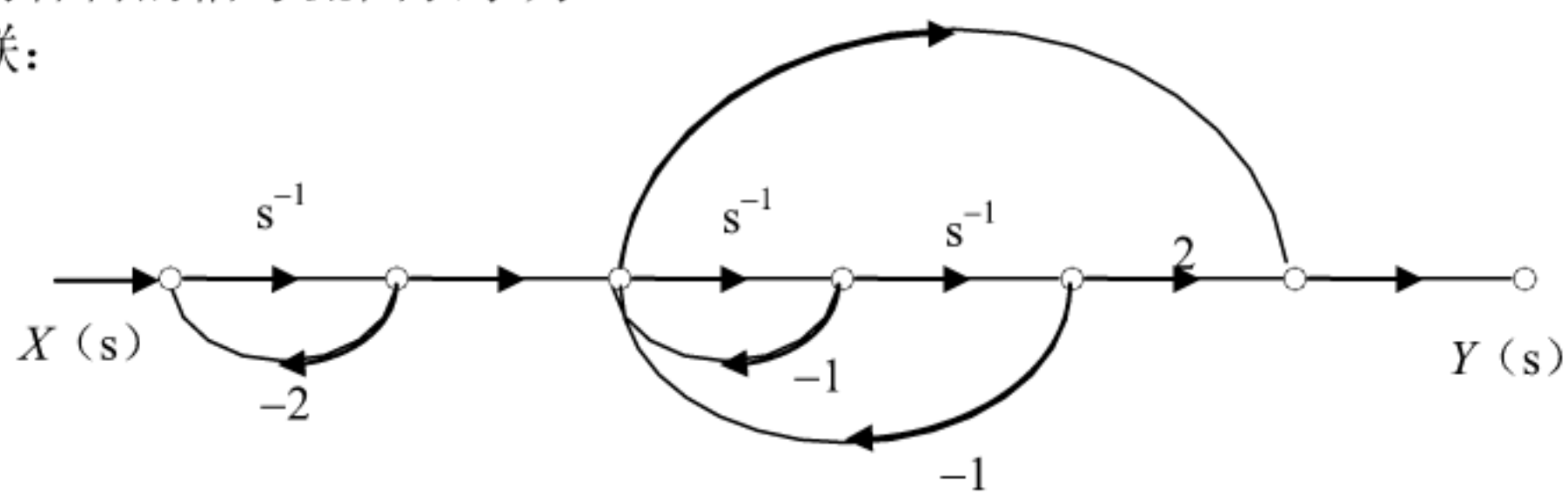


系统的并联形式的方框图为

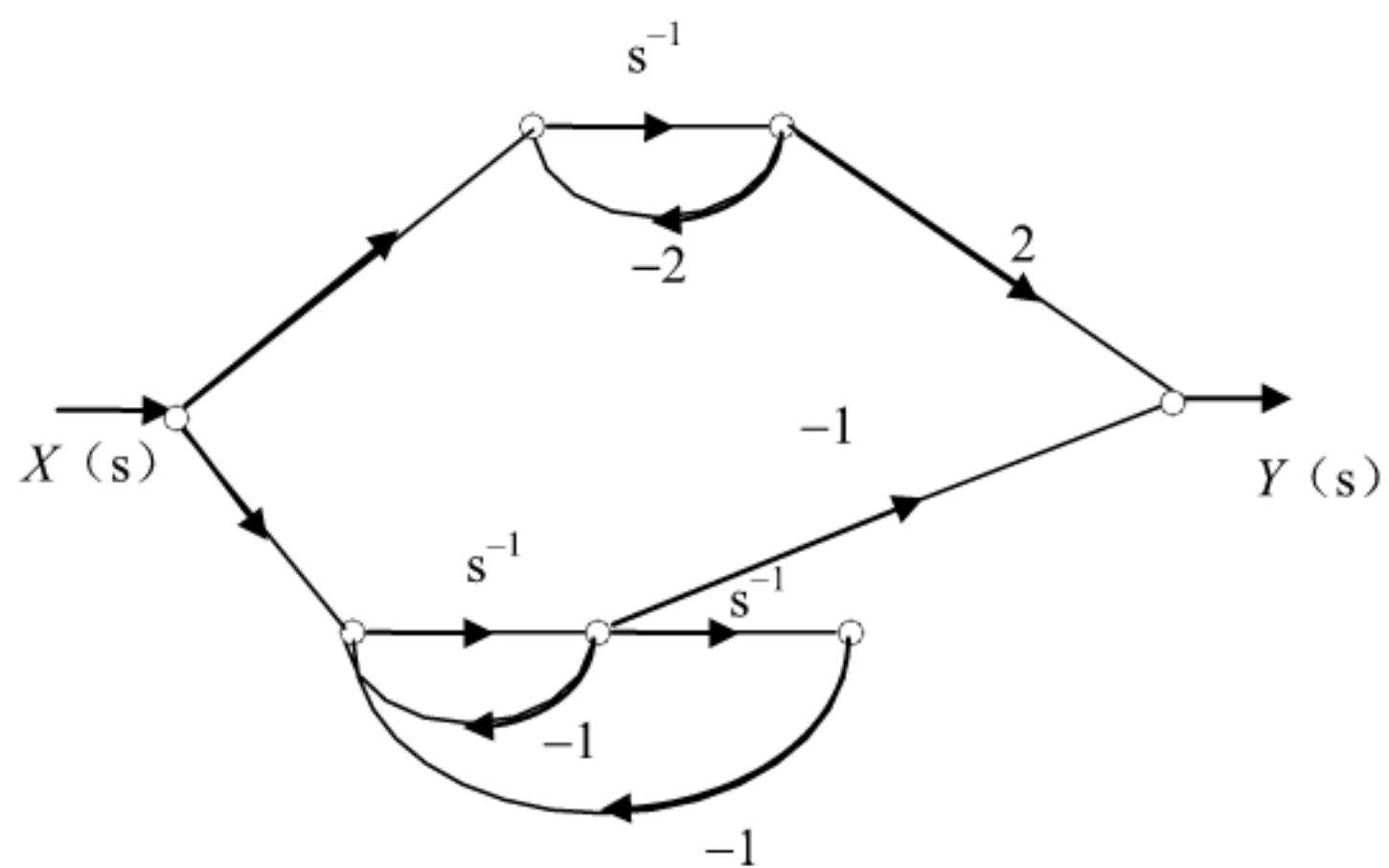


或用各自的信号流图表示为：

级联：



并联：



5-41 图题 5-41 所示反馈电路中, $kv_2(t)$ 是受控源。

- (1) 求电压转移函数 $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)}$; (2) k 满足什么条件时系统稳定?

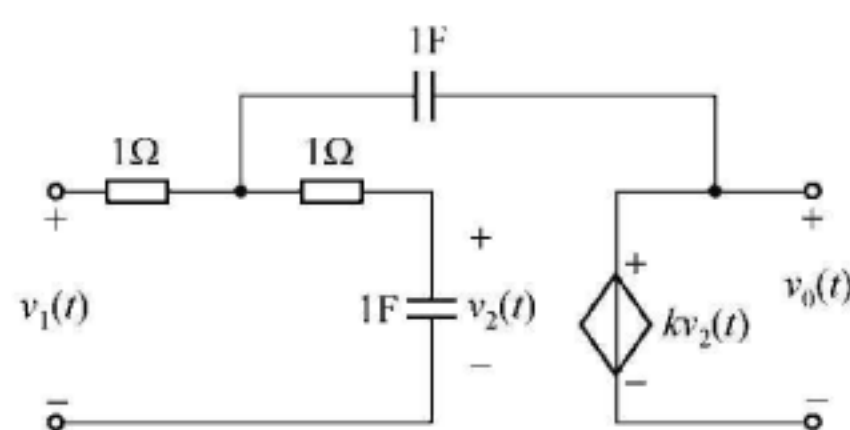


图 题 5-41

$$\text{解: (1) } H(s) = \frac{V_o(s)}{V_1(s)} = \frac{V_o(s)}{V_2(s)} \cdot \frac{V_2(s)}{V_4(s)} \cdot \frac{V_4(s)}{V_1(s)} = k \cdot \frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s} + 1} \cdot \frac{V_4(s)}{V_1(s)} = \frac{k}{s+1} \cdot \frac{V_4(s)}{V_1(s)}$$

$$\text{而 } V_1(s) = V_4(s) + sV_2(s) = [s + 1]V_4(s)$$

$$\text{所以 } \frac{V_4(s)}{V_1(s)} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + s(1-k)}$$

$$H(s) = \frac{k}{s+1} \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2 + s(1-k)} = \frac{k}{s^2 + s(3-k) + 1}$$

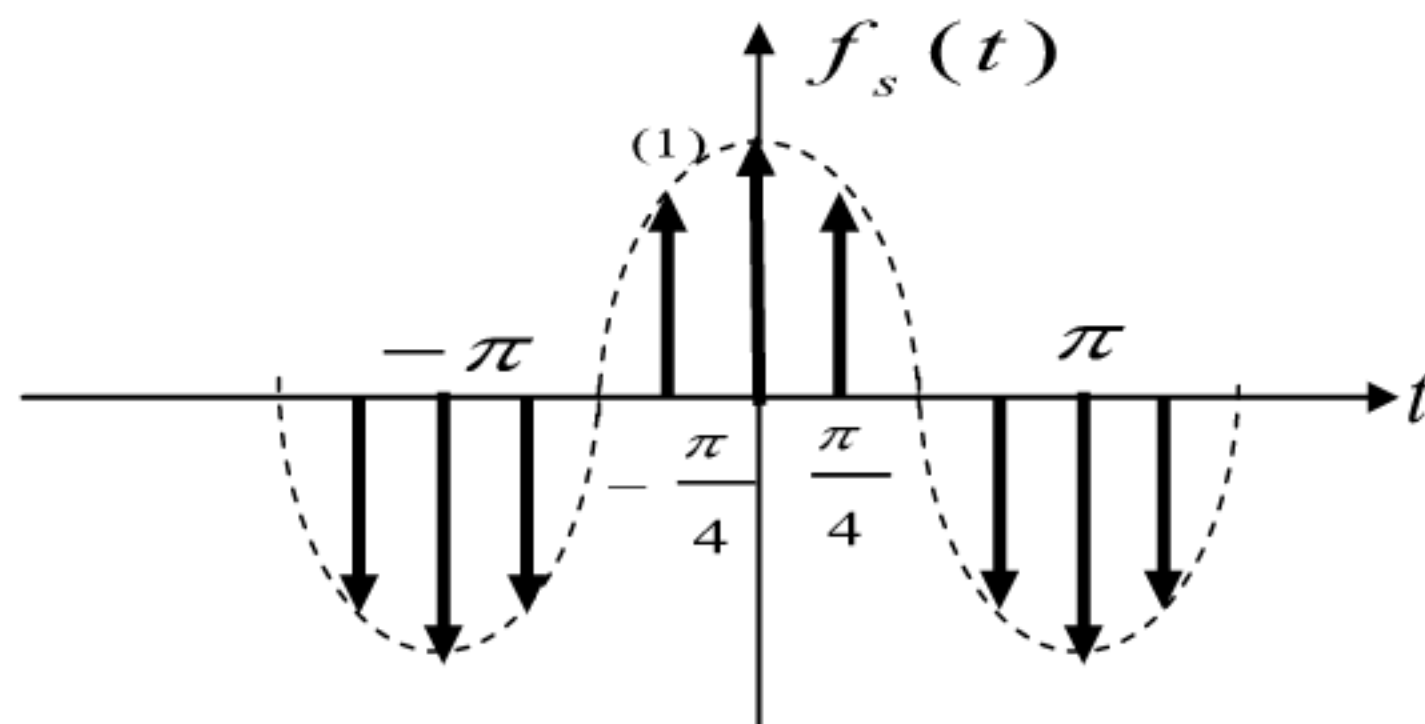
- (2) 要使系统稳定, 对于二阶系统, 只要分母多项式各次系数非负, 即 $k \leq 3$

第 6 章习题答案

6-1 已知 $f(t) = \cos t$, 现用 $T_s = \pi/4$ 的时间间隔对其进行理想采样。

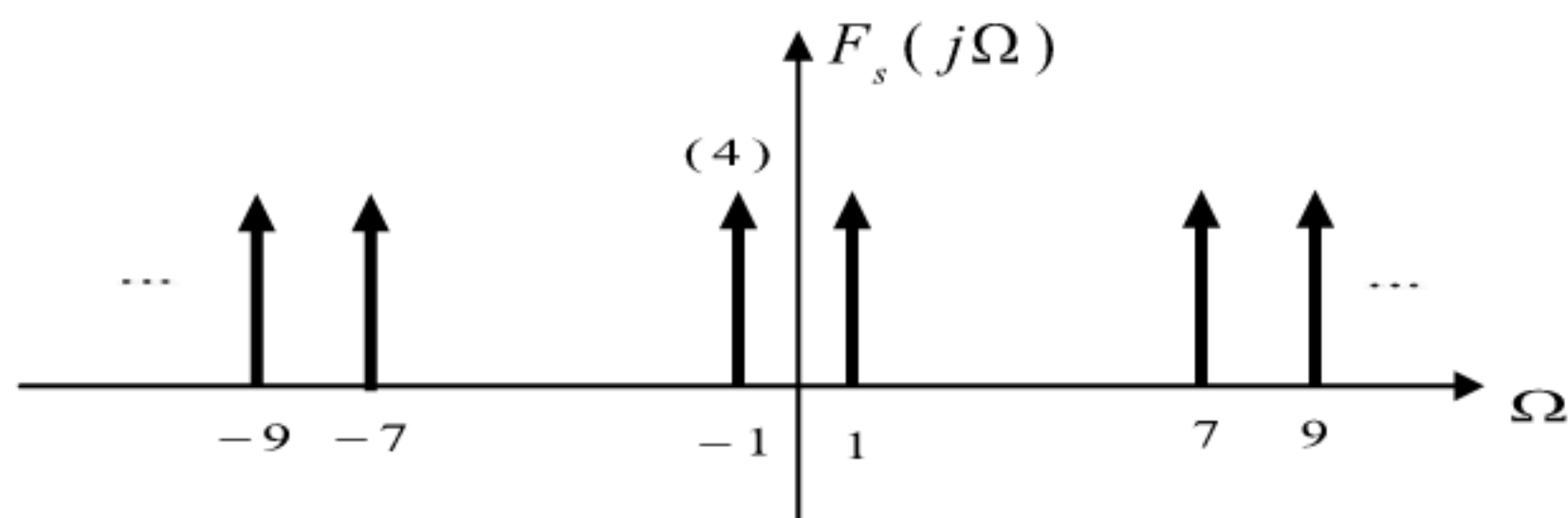
- (1) 画出 $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$ 的波形图; (2) 求 $F_s(j\Omega) = F[f_s(t)]$, 并画出频谱图。

解: (1)



$$(2) \because f_s(t) = \mathcal{F}[\cos t] = \pi [\delta(\Omega + 1) + \delta(\Omega - 1)], \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 8 \text{ rad/s}$$

$$\therefore F_s(j\Omega) = \mathcal{F}[f_s(t)] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\Omega - n\Omega_s)] = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega + 1 - 8n) + \delta(\Omega - 1 - 8n)]$$



6-2 已知三角脉冲信号的频谱（见附录 B），求图题 6-2 中各脉冲被冲激采样后信号的频谱 $F_s(j\Omega)$ ，并大致画出频谱图（采样间隔 $T_s = \tau/12$ ）。

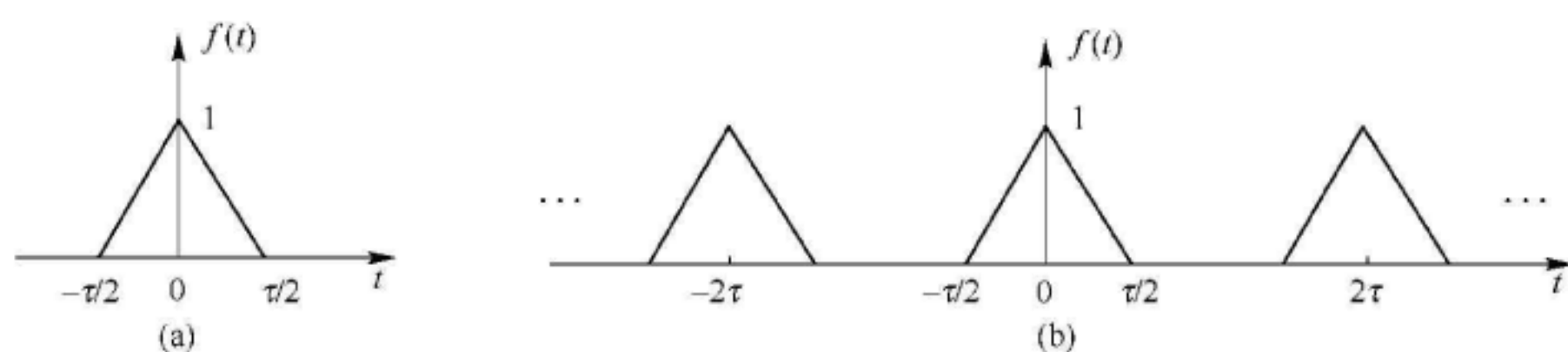
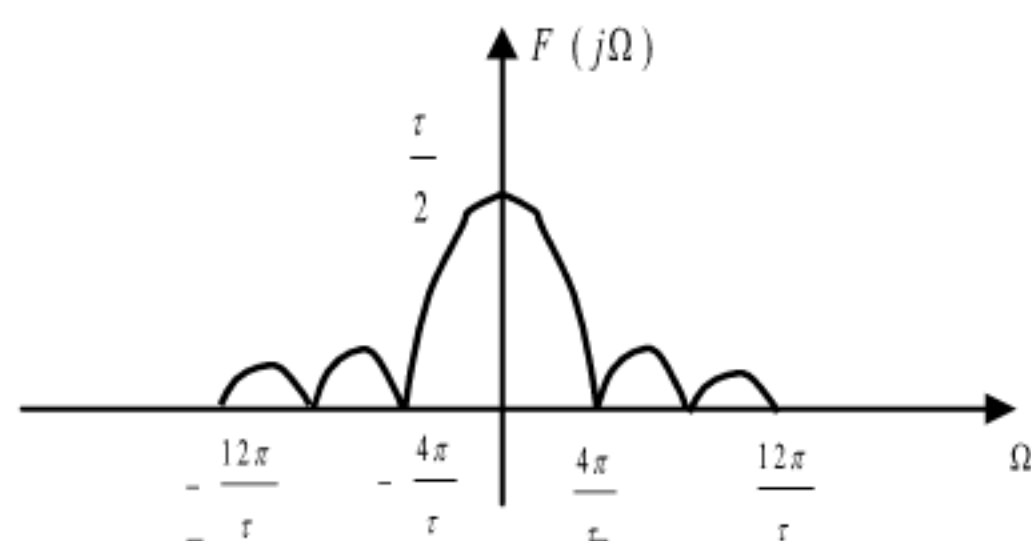


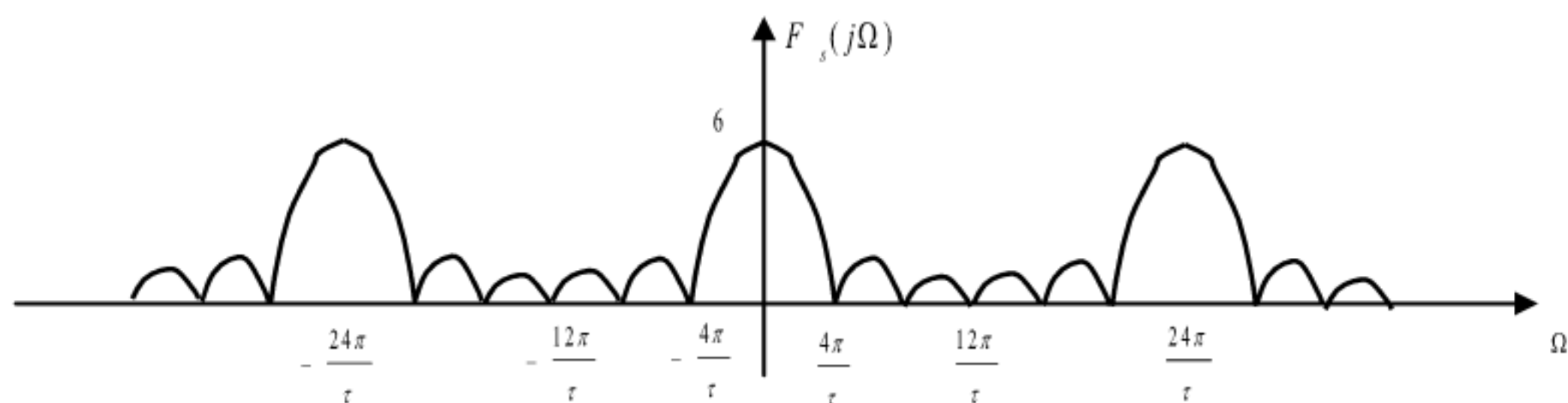
图 题 6-2

$$\text{解: (a) } F(j\Omega) = \frac{\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right)$$

$$\because T_s = \frac{\tau}{12} \therefore \Omega_s = \frac{24\pi}{\tau}$$



$$F_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left[j\left(\Omega - n\Omega_s\right)\right] = 6 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2\left[\frac{\left(\Omega - n\frac{24\pi}{\tau}\right)\tau}{4}\right]$$

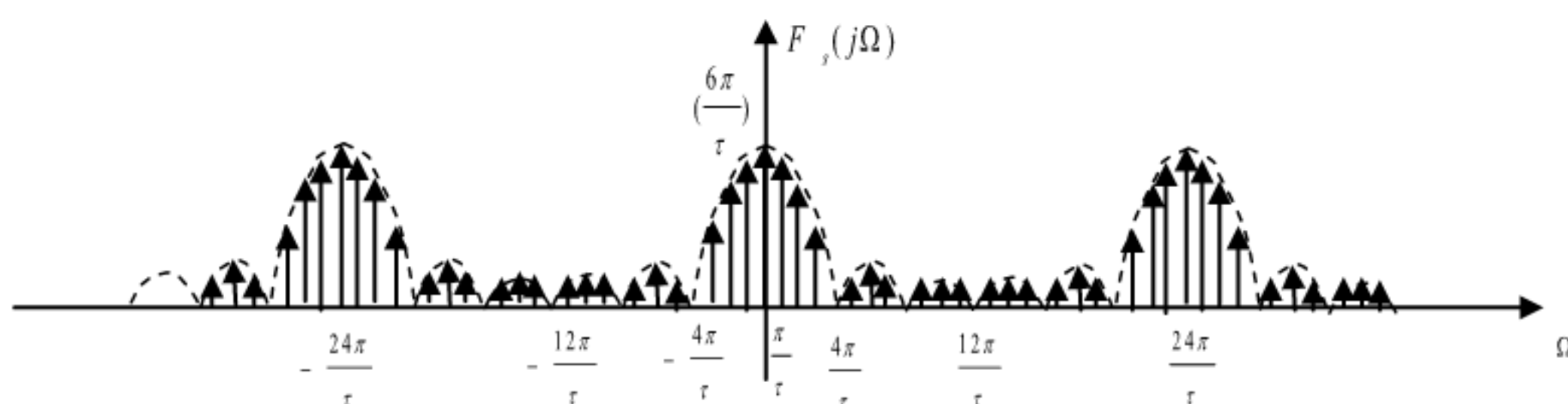


$$(b) \quad T_1 = 2\tau \quad \Omega_1 = \frac{\pi}{\tau} \quad T_s = \frac{\tau}{12} \quad \Omega_s = \frac{24\pi}{\tau}$$

$$\therefore F_0(j\Omega) = \frac{\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right) \quad \therefore F_n = \frac{F_0(j\Omega)}{T_1} \bigg|_{\Omega=n\Omega_1} = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{n\Omega_1\tau}{4}\right) = \frac{1}{4} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$F(j\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\Omega - n\Omega_1) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

$$\therefore F_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F[j(\Omega - m\Omega_s)] = \frac{6\pi}{\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) \delta(\Omega - n\Omega_1 - m\Omega_s)$$



6-3 确定下列信号的奈奎斯特采样率与奈奎斯特间隔。

$$(1) \text{Sa}(100t) \quad (2) \text{Sa}^2(100t) \quad (3) \text{Sa}(100t) + \text{Sa}(50t) \quad (4)$$

$$\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$$

$$\text{解: (1)} \quad \because \mathcal{F}[\text{Sa}(100t)] = \begin{cases} \frac{\pi}{100} & |\Omega| \leq 100 \\ 0 & |\Omega| > 100 \end{cases}$$

所以 $\text{Sa}(100t)$ 的最高角频率为 $\Omega_m = 100 \text{ rad/s}$

这样, 奈奎斯特取样率为: $\Omega_{s \min} = 2\Omega_m = 200 \text{ rad/s}$, 或: $f_{s \min} = \frac{\Omega_{s \min}}{2\pi} = \frac{100}{\pi} \text{ Hz}$

$$\text{奈奎斯特间隔: } T_{s \max} = \frac{1}{f_{s \min}} = \frac{\pi}{100} \text{ s}$$

(2) 由于信号自乘, 频带展宽一倍, $\Omega_m = 200 \text{ rad/s}$

$$\Omega_{s \min} = 2\Omega_m = 400 \text{ rad/s} \quad f_{s \min} = \frac{\Omega_{s \min}}{2\pi} = \frac{200}{\pi} \text{ Hz} \quad T_{s \max} = \frac{1}{f_{s \min}} = \frac{\pi}{200} \text{ s}$$

(3) $\text{Sa}(100t)$ 与 $\text{Sa}(50t)$ 叠加, 最高频率同 $\text{Sa}(100t)$

$$\Omega_{s \min} = 2\Omega_m = 200 \text{ rad/s} \quad f_{s \min} = \frac{100}{\pi} \text{ Hz} \quad T_{s \max} = \frac{\pi}{100} \text{ s}$$

(4) 由于 $\text{Sa}(60t)$ 的最高角频率为 $\Omega_m = 60 \text{ rad/s}$ ，而 $\text{Sa}^2(60t)$ 的最高角频率展宽一倍，即 $\Omega_m = 120 \text{ rad/s}$ ，又 $\text{Sa}(100t)$ 的最高角频率为 $\Omega_m = 100 \text{ rad/s}$ ，所以， $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$ 的最高角频率为 $\Omega_m = 120 \text{ rad/s}$ ，这样， $\Omega_{s \min} = 2\Omega_m = 240 \text{ rad/s}$

$$f_{s \min} = \frac{120}{\pi} \text{ Hz} \quad T_{s \max} = \frac{\pi}{120} \text{ s}$$

6-4 已知某系统如图题 6-4 所示，输入信号 $x(t) = \text{Sa}(t)$ ，理想低通滤波器的频响特性为

$$H(j\Omega) = u(\Omega + 6) - u(\Omega - 6)。$$

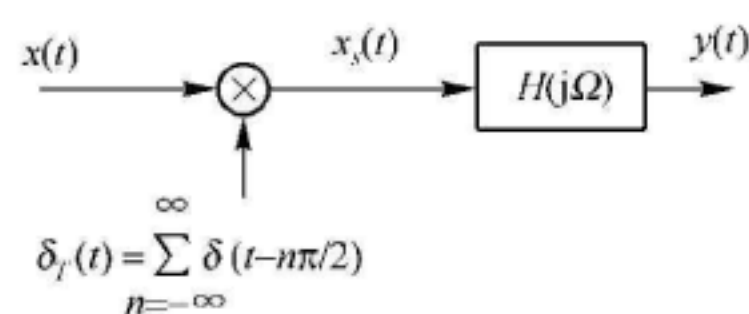


图 题 6-4

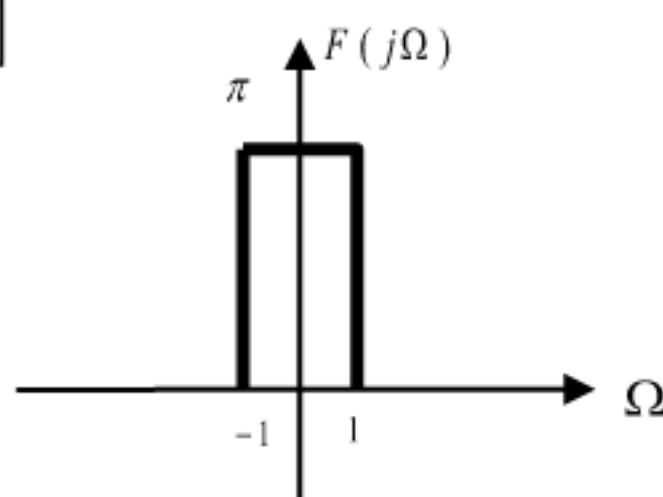
(1) 求 $X_s(j\Omega) = F[x_s(t)]$ ，并画出频谱图；

(2) 画出 $y(t)$ 的频谱图 $Y(j\Omega) = F[y(t)]$ ；

(3) 求输出 $y(t)$ 的表达式。

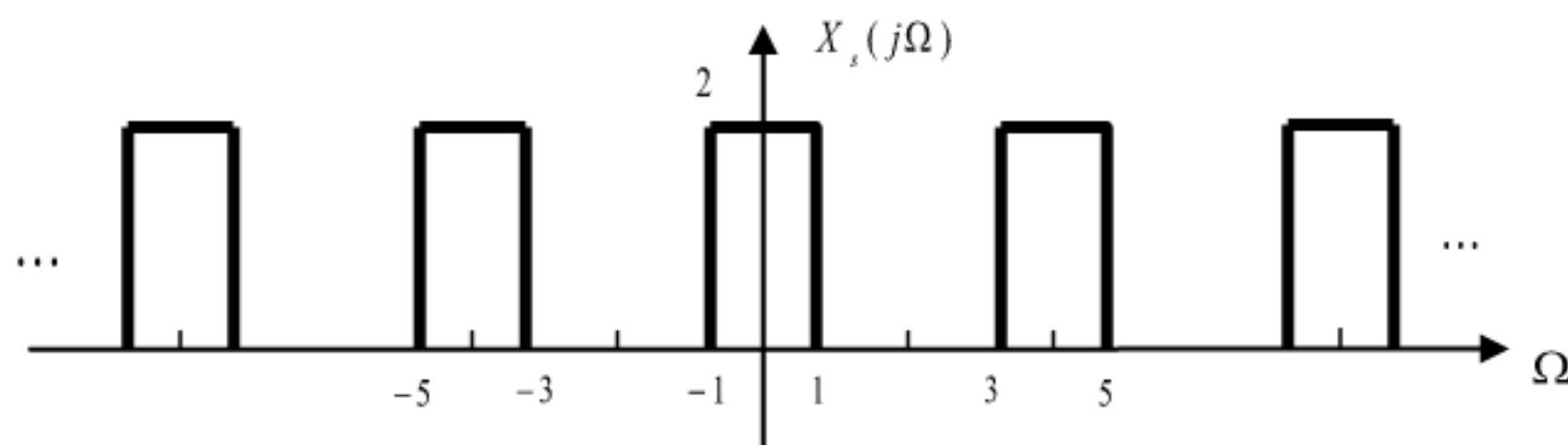
解：(1) $F(j\Omega) = \pi [u(\Omega + 1) - u(\Omega - 1)]$

$$T_s = \frac{\pi}{2} \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 4$$

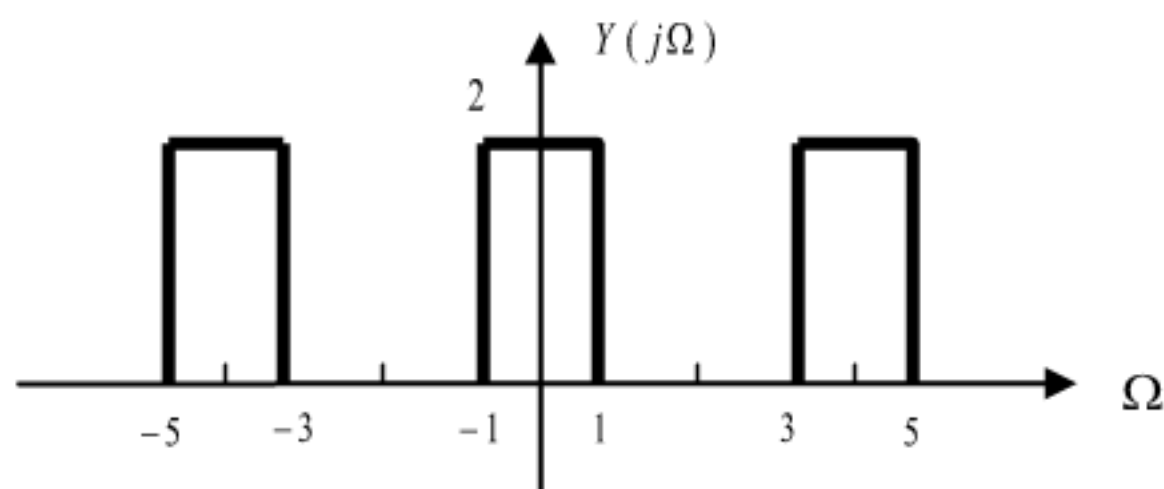


$$\therefore X_s(j\Omega) =$$

$$\frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - n\Omega_s)] = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(\Omega - 4n + 1) - u(\Omega - 4n - 1)]$$



$$(2) \therefore Y(j\Omega) = H(j\Omega)X_s(j\Omega)$$



(3) 根据 $\mathcal{F}[\text{Sa}(\Omega_c t)] = \frac{\pi}{\Omega_c} [u(\Omega + \Omega_c) - u(\Omega - \Omega_c)]$ 以及

$$\mathcal{F}[f(t) \cos(\Omega_0 t)] = \frac{1}{2} \{ F[j(\Omega + \Omega_0)] - F[j(\Omega - \Omega_0)] \}$$

$$\text{可得 } y(t) = \frac{2}{\pi} \text{Sa}(t) + \frac{4}{\pi} \text{Sa}(t) \cos 4t$$

6-5 已知带限信号 $f(t)$ 的频谱函数 $F(j\Omega)$ 如图题 6-5(a)所示, 试画出当 $f(t)$ 通过图题 6-5(b)所示系统时, 在系统中 A,B,C,D 各点信号的频谱图。图题 6-5(b)中两个理想滤波器的频响特性分别为

$$H_1(j\Omega) = \begin{cases} K, & |\Omega| > \Omega_c \\ 0, & |\Omega| < \Omega_c \end{cases}; \quad H_2(j\Omega) = \begin{cases} K, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

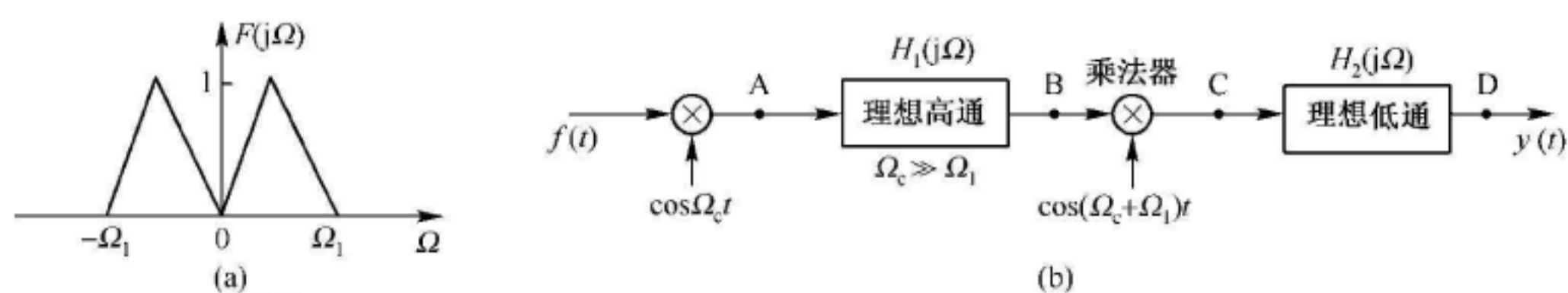
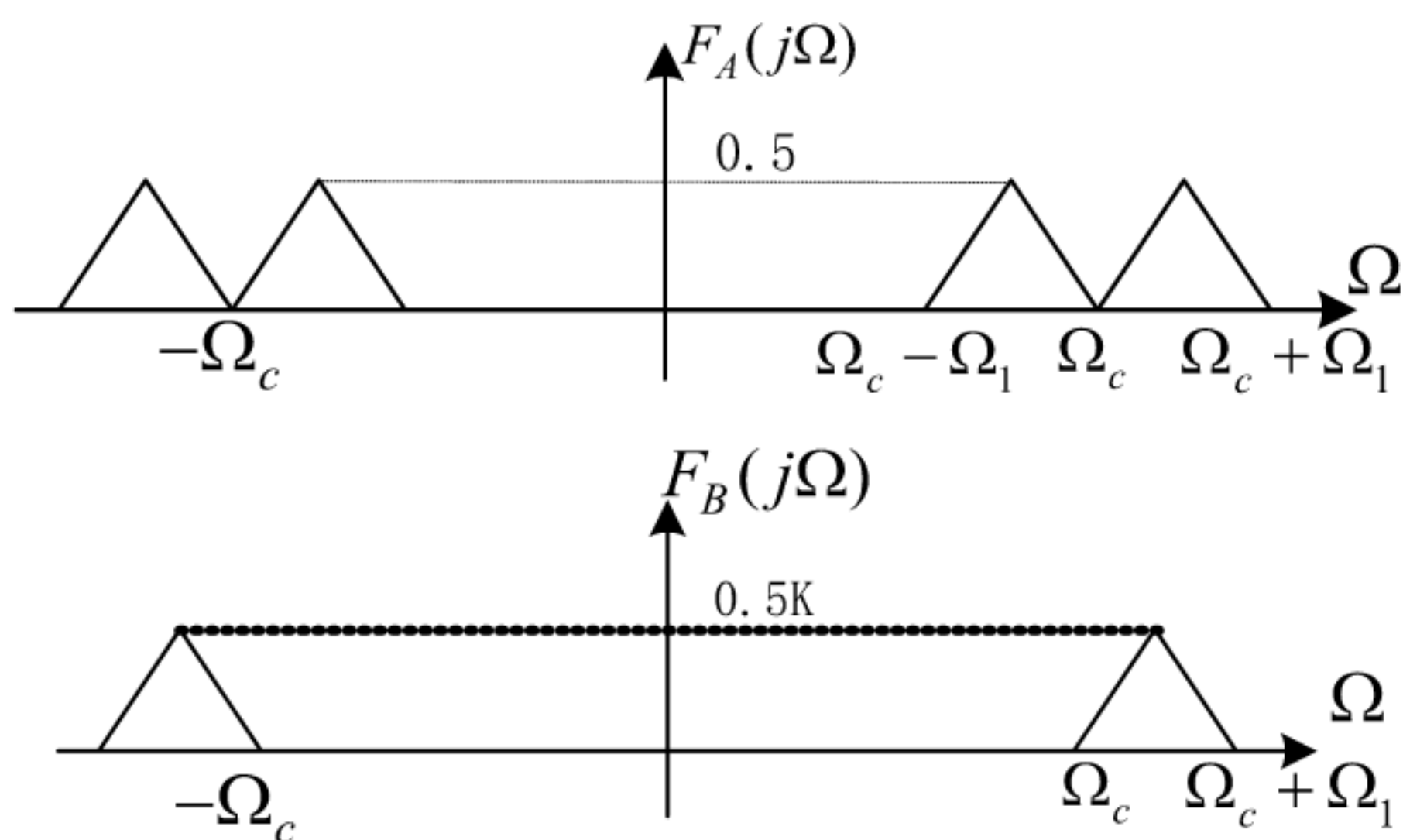
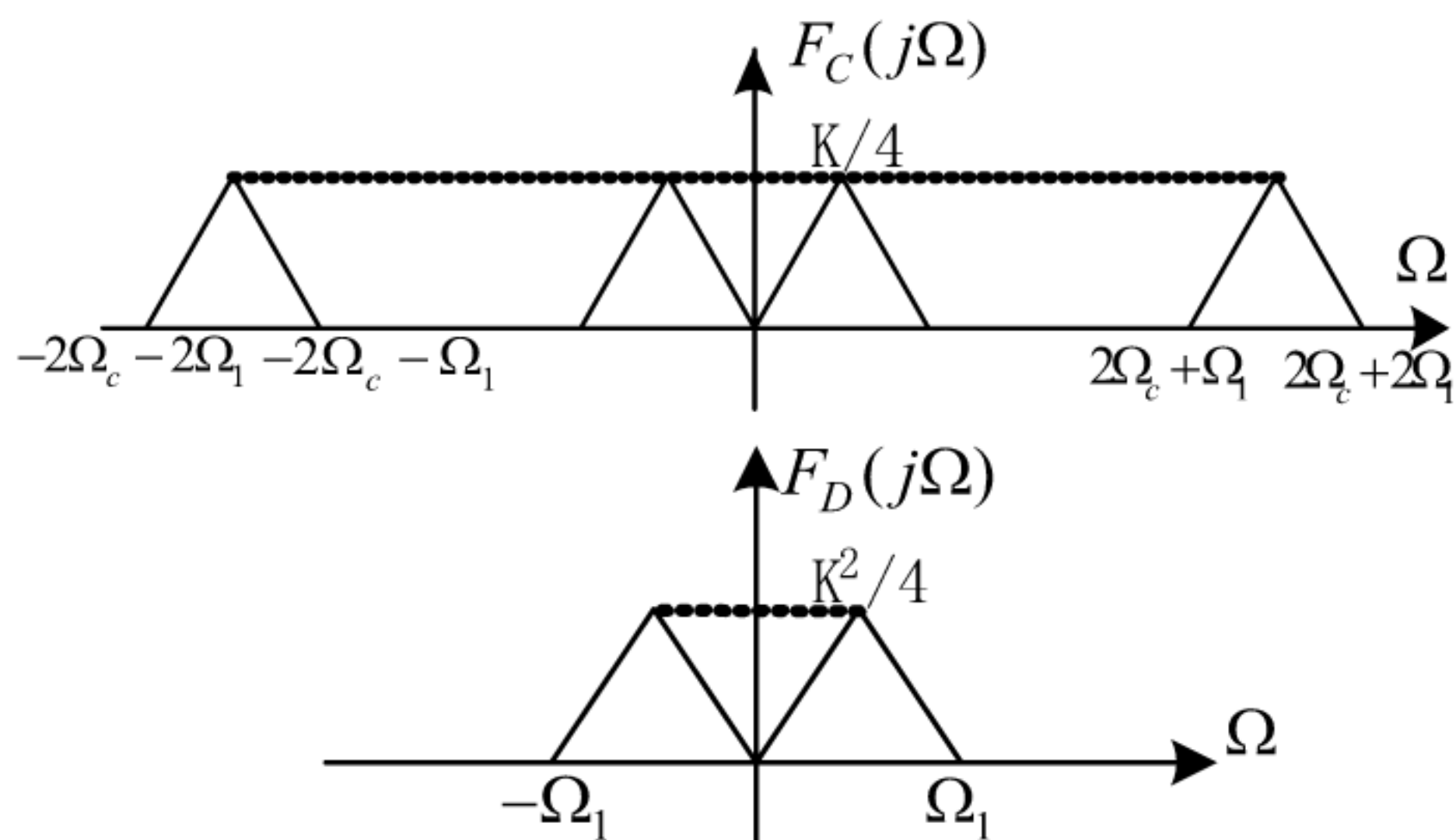


图 题 6-5

解:





6-6 对于图 6.4-6 所示的抑制载波调幅信号的频谱 $S_{\text{DSB}}(j\Omega)$ ，由于 $F(j\Omega)$ 的偶对称性，使 $S_{\text{DSB}}(j\Omega)$ 在 Ω_0 和 $-\Omega_0$ 左右对称，利用此特点，可以只发送如图题 6-6 所示的信号的频谱 $F_1(j\Omega)$ ，称为单边带信号，以节省频带。试证明在接收端用同步解调的方法可以恢复原信号 $F(j\Omega)$ 。

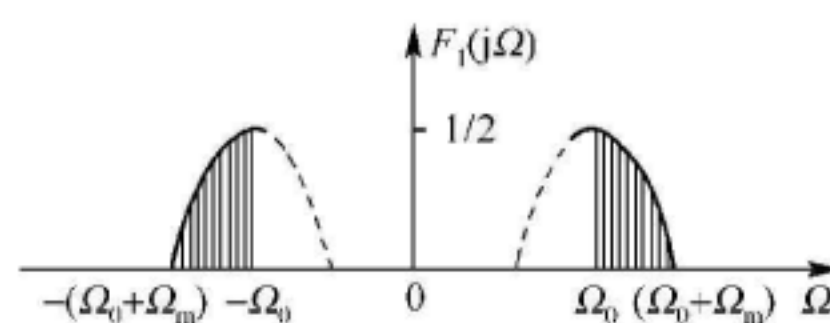


图 题 6-6

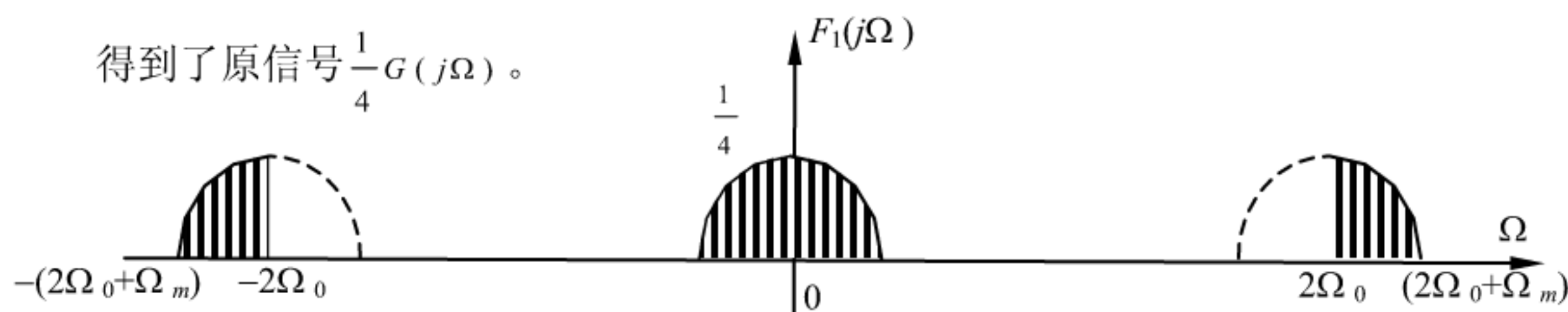
证明：同步解调就是使单边带信号 $f(t)$ 在时域上乘以 $\cos \Omega_0 t$ ，在频域上则是

$F(j\Omega)$ 与 $\pi [\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$ 卷积(幅度上乘以 $\frac{1}{2\pi}$)，卷积结果如下图所示，

从此图可以看到，卷积结果得到了原信号 $\frac{1}{4}G(j\Omega)$ 和一载频为 $2\Omega_0$ 的单边带信号

号，再利用一低通滤波器 ($\Omega_m \leq \Omega_c \leq 2\Omega_0$) 滤除载频为 $2\Omega_0$ 的单边带信号后就

得到了原信号 $\frac{1}{4}G(j\Omega)$ 。



6-12 电路如图题 6-12 所示，写出系统频率响应特性 $H(j\Omega) = \frac{V_2(j\Omega)}{V_1(j\Omega)}$ 。为得到

无失真传输，元件参数 R_1, R_2, C_1, C_2 应满足什么关系？

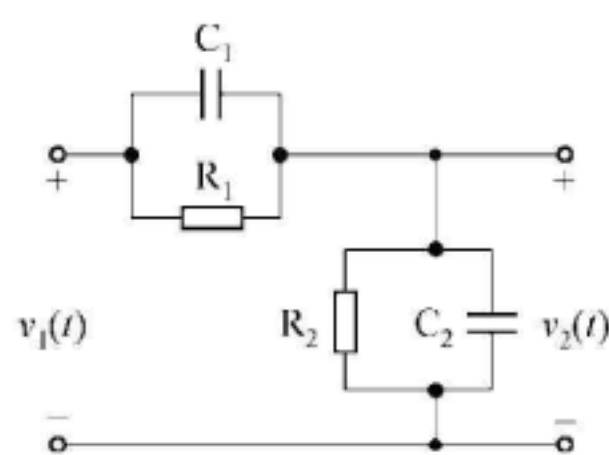


图 题 6-12

解：由电路图得：

$$H(j\Omega) = \frac{V_2(j\Omega)}{V_1(j\Omega)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\Omega C_2}}{\frac{1}{\frac{1}{R_1} + j\Omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\Omega C_2}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{j\Omega + \frac{1}{R_1 C_1}}{j\Omega + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}}$$

$$|H(j\Omega)| = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \sqrt{\frac{\Omega^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1}\right)^2}{\Omega^2 + \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}\right]^2}}$$

可见，为了得到无失真传输，应有： $\frac{1}{R_1 C_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}$

也即： $R_1 C_1 = R_2 C_2$ ，这样 $H(j\Omega) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$ ，所以， $\varphi(\Omega) = 0$ ，满足无失真传

输的条件。

6-14 一个理想低通滤波器的网络函数为 $H(j\Omega) = |H(j\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)}$ ，其幅频特性

$|H(j\Omega)|$ 与相频特性 $\varphi(\Omega)$ 如图题 6-14 所示。试证明此滤波器对于 $\frac{\pi}{\Omega_c} \delta(t)$ 和 $\frac{\sin \Omega_c t}{\Omega_c t}$ 的响应是相同的。

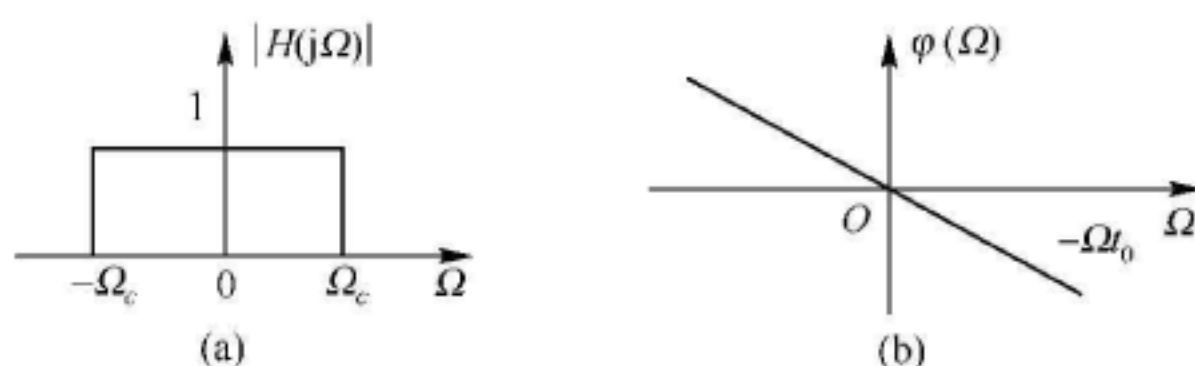


图 题 6-14

证明：设 $x_1(t) = \frac{\pi}{\Omega_c} \delta(t)$, $x_2(t) = \frac{\sin \Omega_c t}{\Omega_c t}$

$$\text{则： } X_1(j\Omega) = \frac{\pi}{\Omega_c}, \quad X_2(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\Omega_c} & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

因为 $H(j\Omega) = |H(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)}$

$$\text{式中： } |H(j\Omega)| = \begin{cases} 1 & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad \varphi(\Omega) = -t_0 \Omega$$

$$\text{所以 } Y_1(j\Omega) = H(j\Omega) X_1(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\Omega_c} e^{-jt_0 \Omega} & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

$$Y_2(j\Omega) = H(j\Omega) X_2(j\Omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\Omega_c} e^{-jt_0 \Omega} & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

因此， $Y_1(j\Omega) = Y_2(j\Omega)$ ，故两者响应一样，即

$$y_1(t) = y_2(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y_1(j\Omega)] = \text{Sa}[\Omega_c(t - t_0)]$$

6-18 图题 6-18 所示系统中， $H_L(\omega)$ 为理想低通特性，即

$$H_L(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

(1) 若 $v_1(t)$ 为单位阶跃信号 $u(t)$ ，写出 $v_2(t)$ 的表达式；

(2) 若 $v_1(t) = \frac{2 \sin(t/2)}{t}$ ，写出 $v_2(t)$ 的表达式。

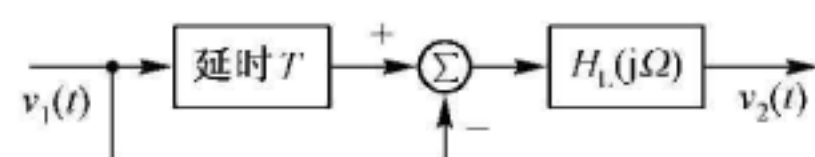


图 题 6-18

解：(1) 由图知，直接加在滤波器 $H_L(j\Omega)$ 上的信号是

$$v_1(t - T) - v_1(t)$$

因为 $v_1(t) = u(t)$ ，而理想低通滤波器 $H_L(j\Omega)$ 的阶跃响应为

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\Omega_c(t - t_0)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(t - t_0)$$

所以响应 $v_2(t)$ 为： $v_2(t) = g(t - T) - g(t) = \frac{1}{\pi} [\text{Si}(t - t_0 - T) - \text{Si}(t - t_0)]$

(2) 若 $v_1(t) = \frac{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t} = \text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right)$, 则 $V_1(j\Omega) = 2\pi \left[u\left(\Omega + \frac{1}{2}\right) - u\left(\Omega - \frac{1}{2}\right) \right]$

因此 $V_1(j\Omega)$ 的频带范围限制在 $|\Omega| < \frac{1}{2}$ 内, 最高频率 $\Omega_m = \frac{1}{2}$, 又 $H_L(j\Omega)$ 的截止频

率 $\Omega_c = 1$, $\Omega_m < \Omega_c$, 故 $H_L(j\Omega)$ 对 $v_1(t) = \text{Sa}\left(\frac{t}{2}\right)$ 是无失真传输, 从而有:

$$v_2(t) = \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(t - t_0 - T)\right] - \text{Sa}\left[\frac{1}{2}(t - t_0)\right]$$

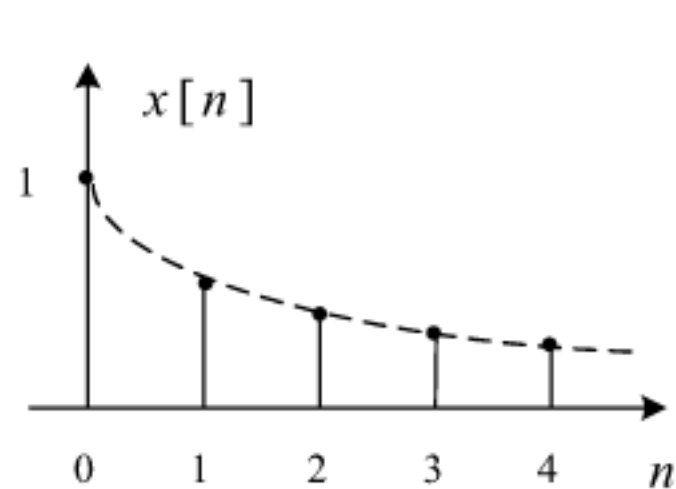
第 7 章习题答案

7-1 分别绘出下列各序列的图形。

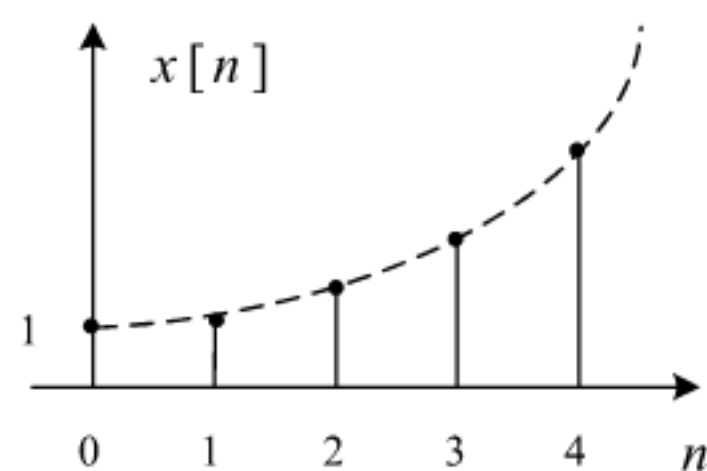
(1) $x[n] = (1/2)^n u[n]$ (2) $x[n] = 2^n u[n]$ (3) $x[n] = (-1/2)^n u[n]$ (4)

$x[n] = (-2)^n u[n]$

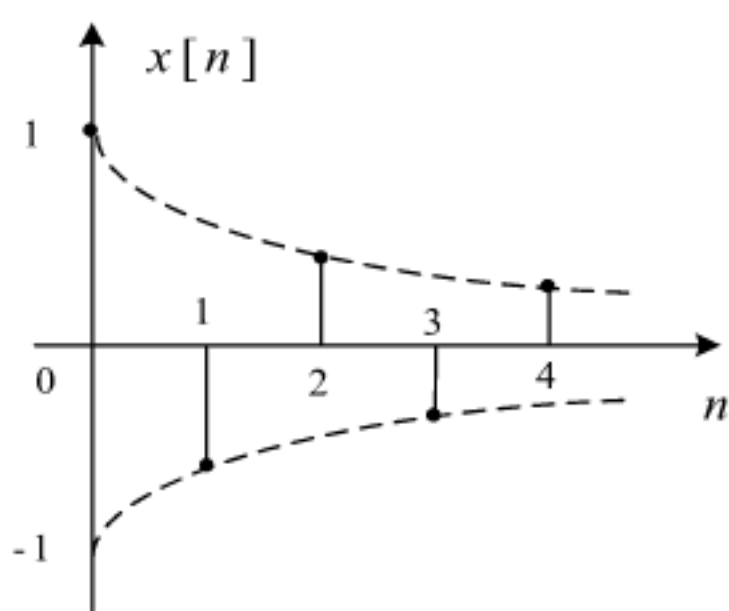
解:



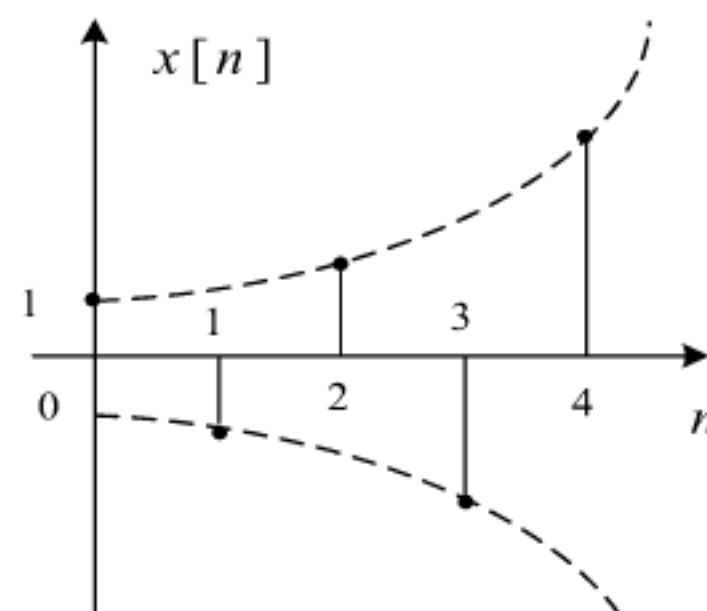
(1)



(2)



(3)



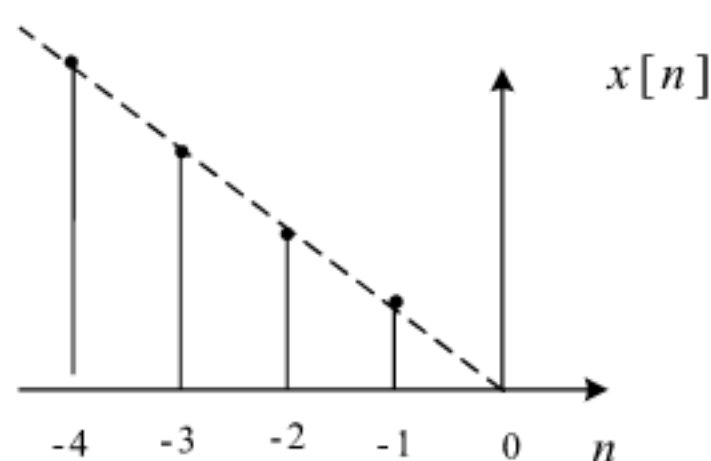
(4)

7-2 分别绘出下列各序列的图形。

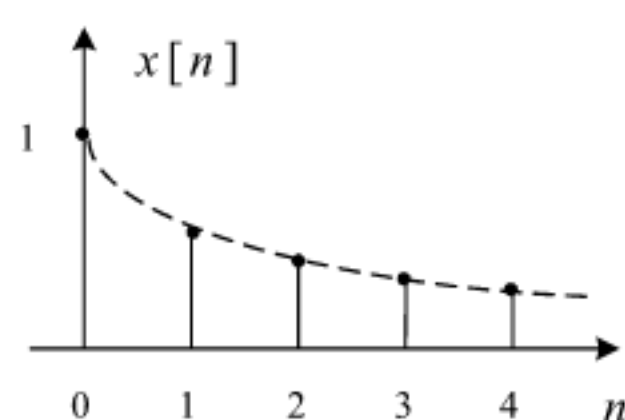
(1) $x[n] = -nu[-n]$ (2) $x[n] = 2^{-n} u[n]$ (3) $x[n] = (-1/2)^{-n} u[n]$ (4)

$x[n] = -(1/2)^n u[-n]$

解:



(1)



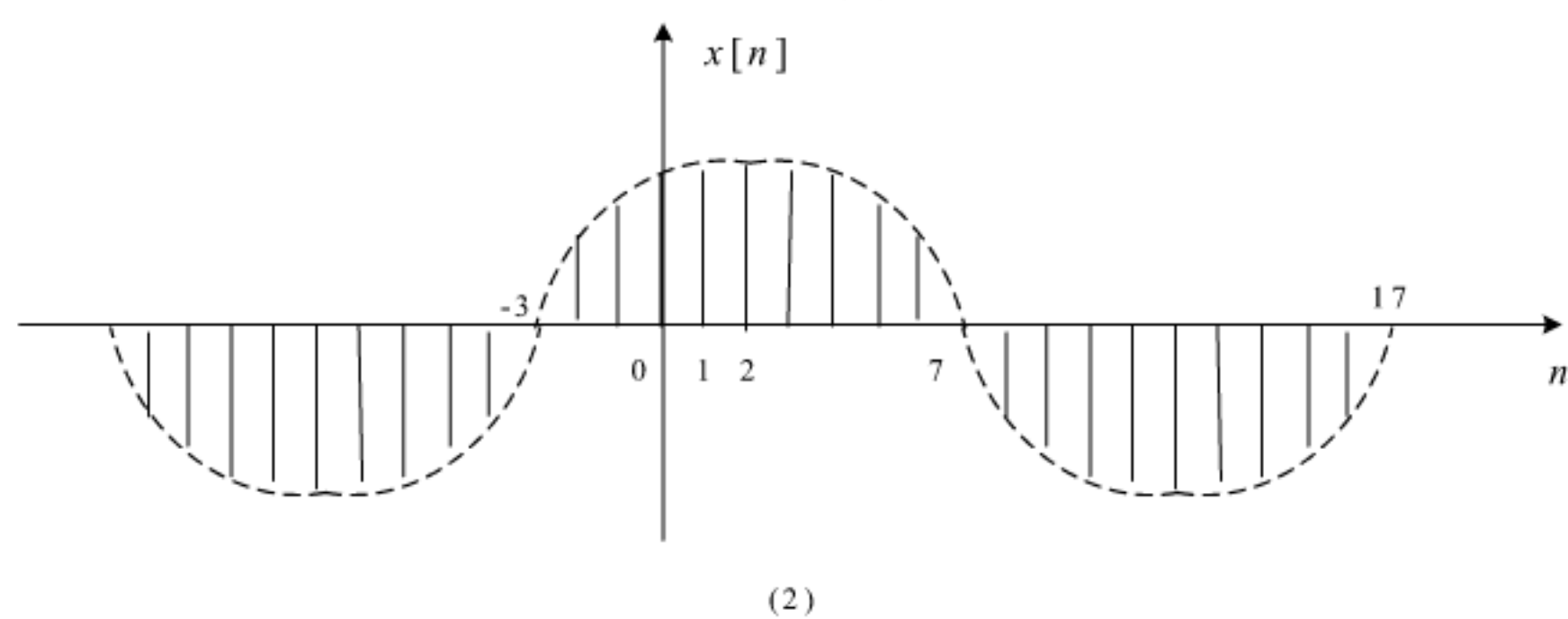
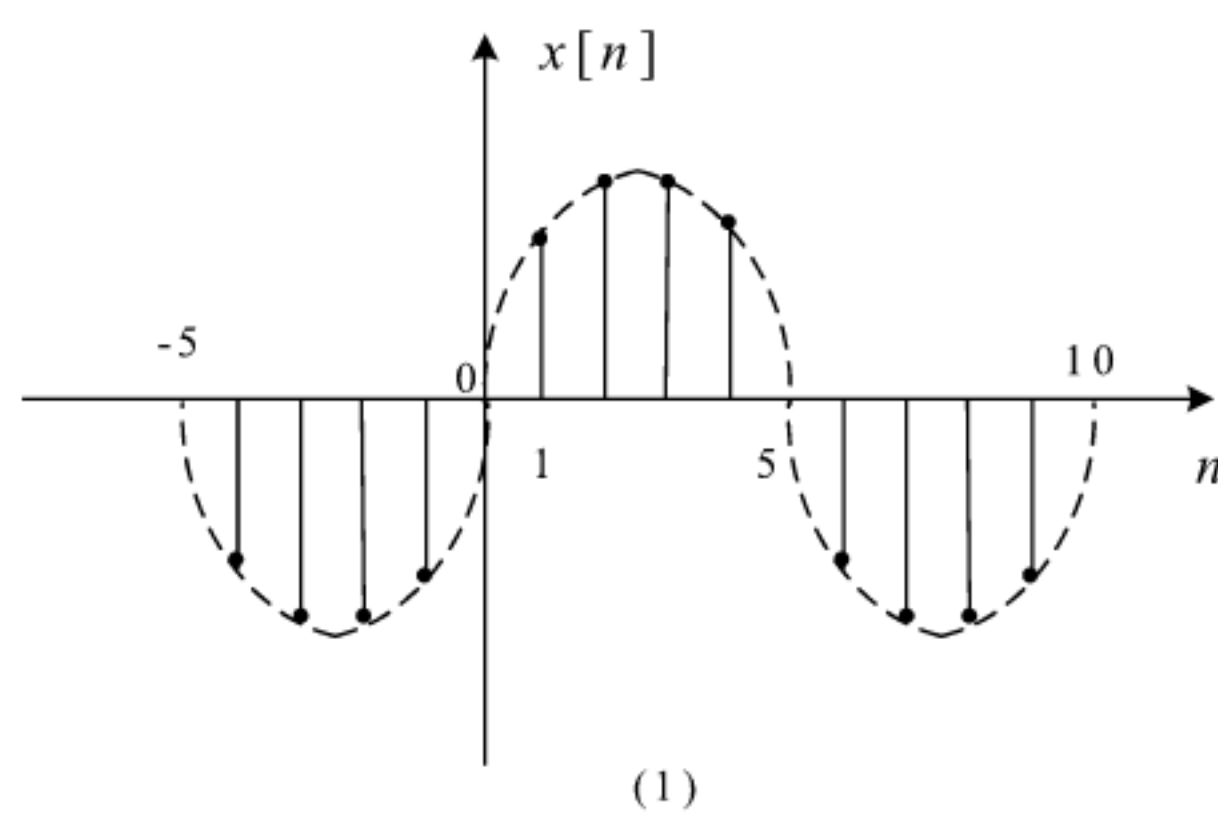
(2)

7-3 分别绘出下列各序列的图形。

(1) $x[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$

(2) $x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{10} - \frac{\pi}{5}\right)$

解：



7-5 序列 $x[n]$ 如图题 7-5 所示，把 $x[n]$ 表示为 $\delta[n]$ 的加权与延迟之线性组合。

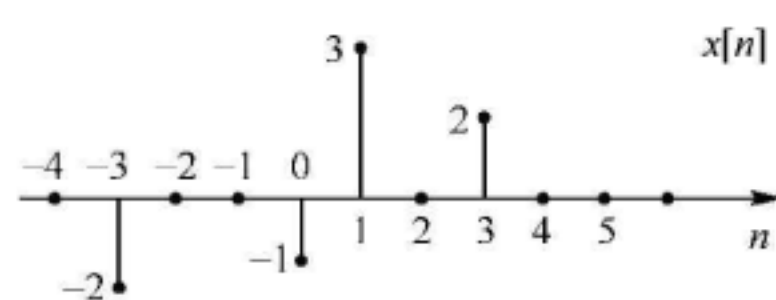


图 题 4

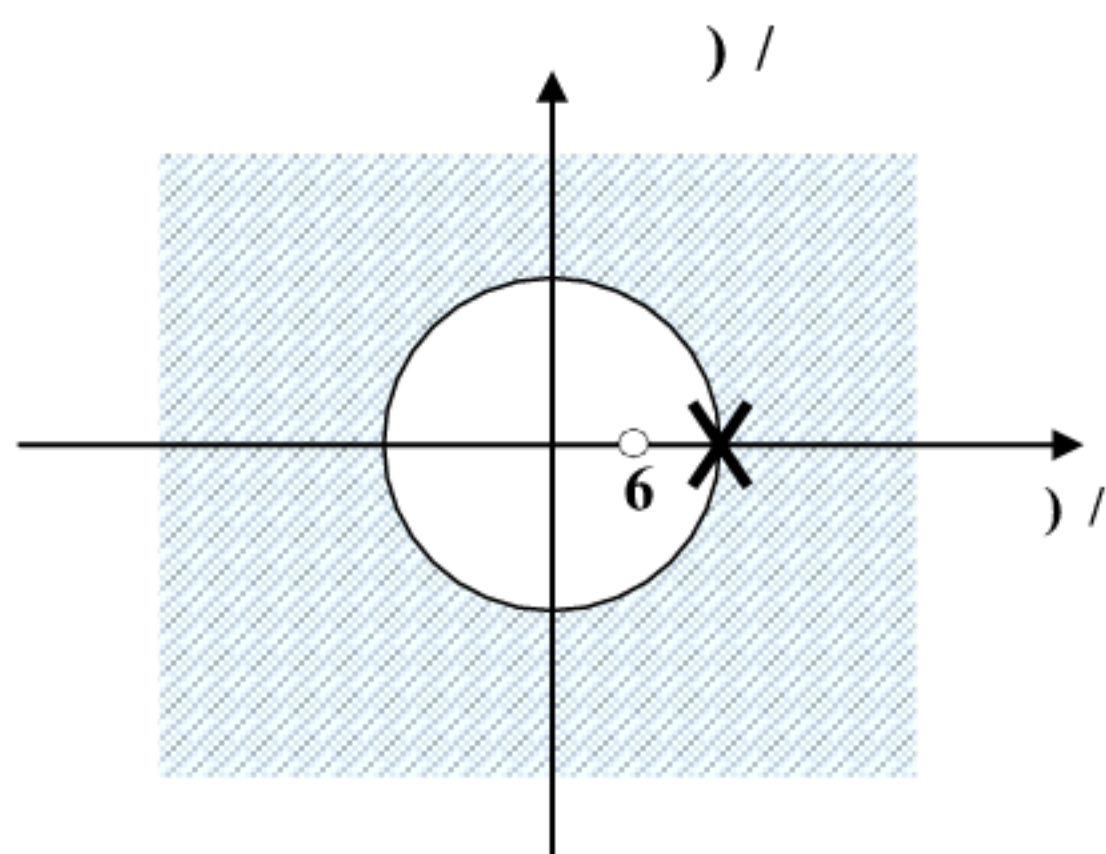
解: $x[n] = -\delta[n+1] - \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$

4 求下列序列的 z 变换 $X(z)$, 并注明收敛域, 绘出 $X(z)$ 的零极点图。

() $6^{-n} u[n] + 2\delta[n]$ () $6^{-n} u[n] - u[n-1]$ () $\delta[n] - \delta[n-1]$

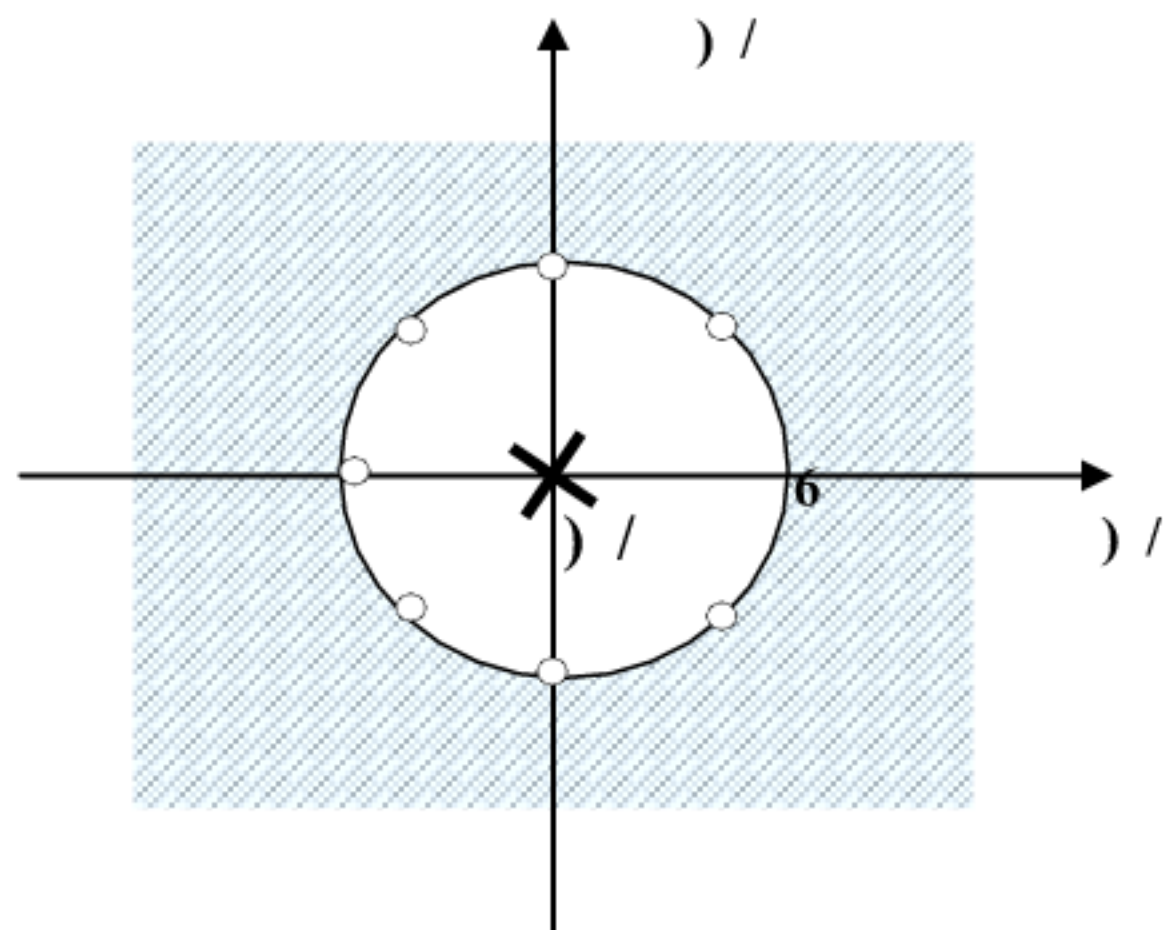
解: () $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (6^{-n} u[n] + \delta[n]) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 6^{-n} z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n}$

$$= \frac{z}{z-6} + 1 = \frac{z-6+6}{z-6} \quad |z| > 6$$



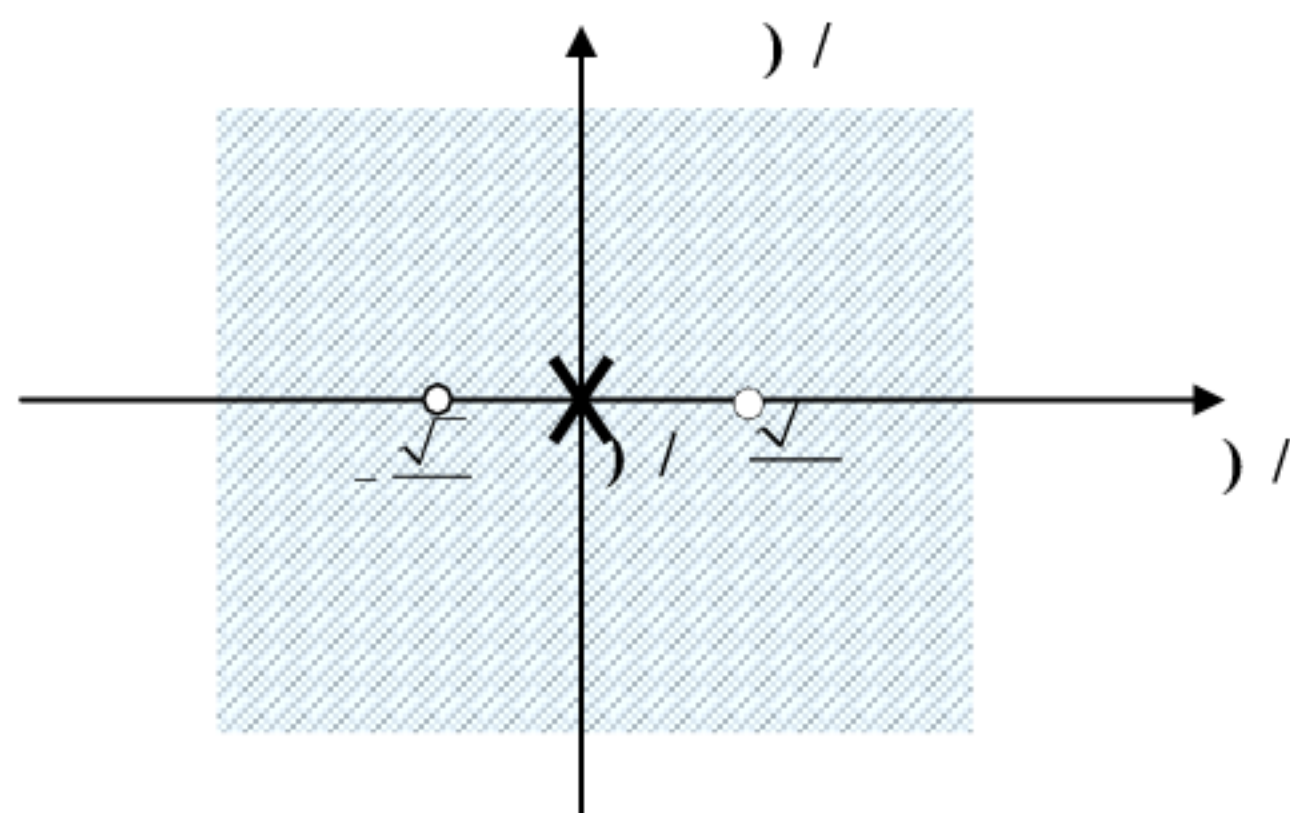
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$= \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad || >$$



$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] - \delta[n] = \dots$$

$$= \dots \quad |z| > 1$$



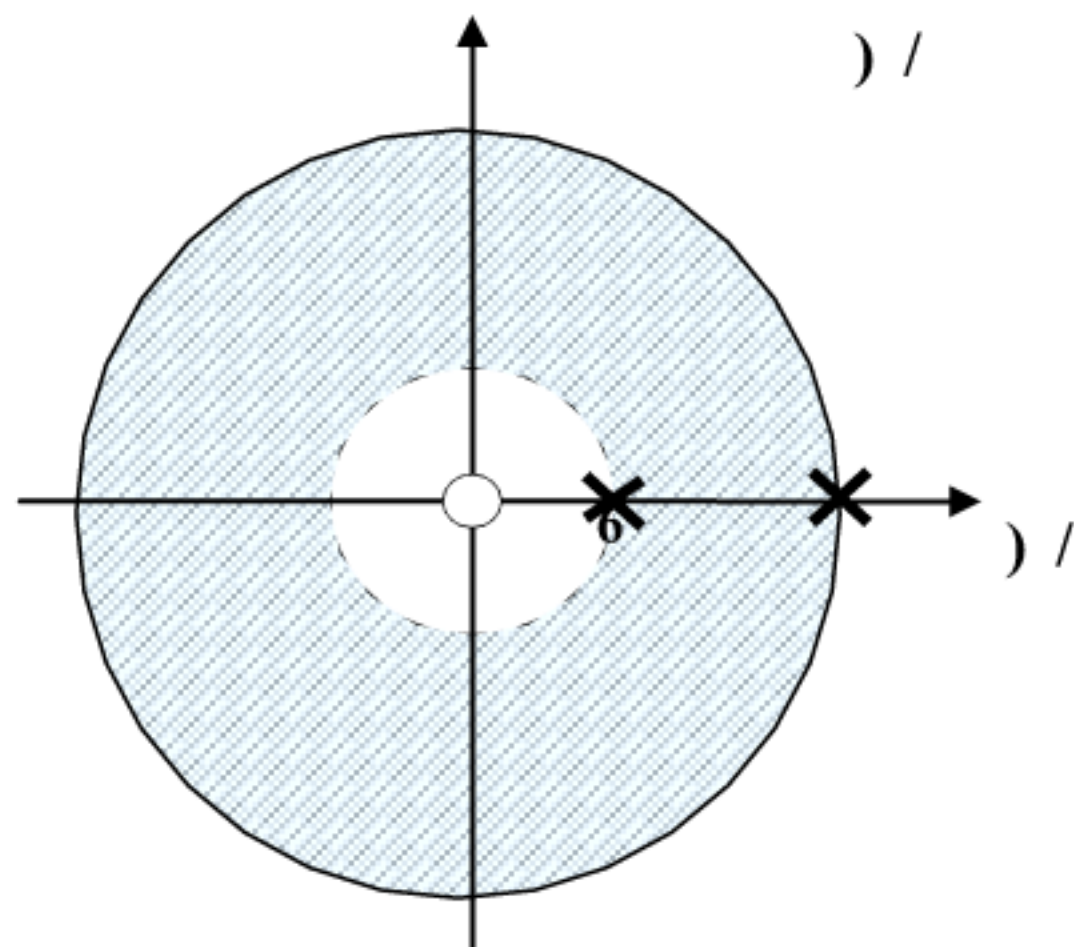
4 求双边序列 $x[n] = 6^{-|n|}$ 的 z 变换，标明收敛域及绘出零极点图。

解：

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 6^{-|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 6^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 6^{-n} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 6^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 6^{-n} z^{-n} = \frac{1}{1 - 6z^{-1}} + \frac{1}{1 - 6z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1 - 6z^{-1}} \quad |z| < 6$$



4 画出 $X(z) = \frac{1-z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$ 的零极点图，在下列三种收敛域下，哪种情况对应左边序列，哪种情况对应右边序列，哪种情况对应双边序列 并求出各对应序列。

() $|z| < 1$ () $|z| > 2$ 95 () 95 $1 < |z| < 2$
解：

$$\begin{aligned} \therefore X(z) &= \frac{1-z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}} \\ &= \frac{z^2-1}{z^2-z+1} = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{(z-1)(z+1)}{(z-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \\ &= \frac{(z-1)(z+1)}{(z-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \end{aligned}$$

() 当 $|z| > 2$ 时， 为右边序列

$$= \dots$$

() 当 $|z| < 1$ 时， 为左边序列

$$x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n u[-n-1]$$

() 当 $\frac{1}{2} < |z| < 1$ 时, $x[n]$ 为双边序列

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]$$

4 已知 $X(z) = \frac{1}{(1-z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$

() 确定与 $X(z)$ 有关的收敛域可能有几种情况, 画出各自的收敛域图;

() 求以上各种收敛域所对应的离散时间序列的表达式;

() 以上序列中哪一种序列存在傅氏变换

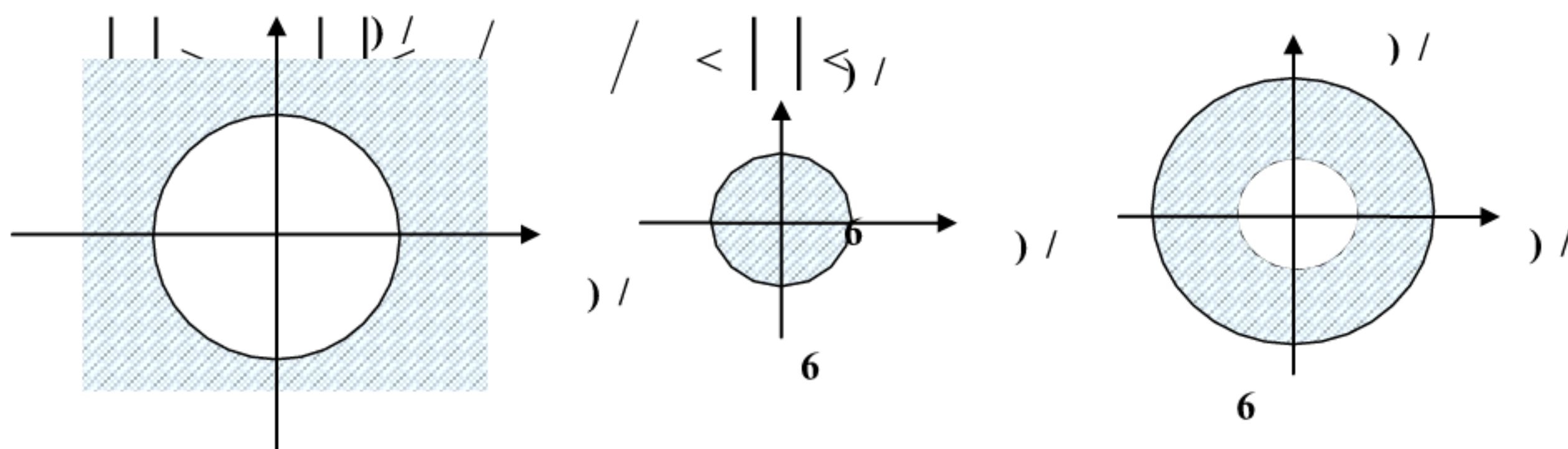
解:

$$\therefore \frac{1}{(1-z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{1}{(1-z)(1-\frac{1}{2z})}$$

$$\frac{1}{(1-z)(1-\frac{1}{2z})} = \frac{1}{(1-z)(\frac{z-1/2}{z})} = \frac{z}{(1-z)(z-1/2)} = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-1/2}$$

$$\therefore \frac{1}{(1-z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-1/2}$$

() 收敛域可能有三种情况:



() 对应的序列分别为:

$$|z| > 1 \quad x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$|z| < 1 \quad x[n] = -\left(\frac{1}{9}\right)^n u[-n-1]$$

$$1 < |z| < 9 \quad x[n] = -\left(\frac{1}{9}\right)^n u[n+1] - \left(\frac{1}{9}\right)^n u[-n-1]$$

() 序列 的收敛域包括单位圆，所以此序列存在傅氏变换。

4 已知 $X(z) = \frac{z^2 - z}{(z+1)(z-1)(z+1/9)}$ ，若收敛域分别为 $|z| < 1$ 和 $|z| > 9$ 两种

情况，求对应的逆变换 $x[n]$ 。

解：

$$\therefore \text{部分分式展开} \quad \frac{z^2 - z}{(z+1)(z-1)(z+1/9)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1/9}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z - 1}{(z+1)(z-1)(z+1/9)}$$

$$= \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1/9}$$

$$\therefore X(z) = \frac{z}{z+1} + \frac{z}{z-1} - \frac{z}{9(z+1/9)}$$

$$|z| < 1 \quad x[n] = -\left(\frac{1}{9}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{9}\right)^n u[-n-1]$$

$$|z| > 9 \quad x[n] = -\left(\frac{1}{9}\right)^n u[n+1] + \left(\frac{1}{9}\right)^n u[-n-1]$$

4 利用卷积定理求 $y[n] = x[n] * h[n]$ 。已知

() $x[n] = R_N[n] u[n-N]$ ， $h[n] = a^n u[n]$ ， $|a| < 1$

解：() $\because R_N[n] = u[n] - u[n-N]$

$$h[n] = a^n u[n]$$

$$\therefore X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z^{-N+1}}{z-1} \quad |z| > 1$$

$$H(z) = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$$

根据卷积定理得：

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z - z^{-N+1}}{z - a} \frac{z}{z - a} \quad |z| >$$

$$\begin{aligned} \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{z - a} \frac{z - z^{-N+1}}{z - a} \\ &= \frac{z}{z - a} - \frac{a z^{-N}}{z - a} \end{aligned}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z - a} - \frac{a z^{-N}}{z - a}$$

由于 $x[n]$ 、 $h[n]$ 均为因果序列，因此 $y[n]$ 亦为因果序列，根据移位性质可求得

$$y[n] = Z^{-1}\{Y(z)\} = \frac{1}{1 - a} \delta[n] - \frac{a^{n+1}}{1 - a} u[n - N]$$

4 计算下列序列的傅里叶变换。

$$(1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[-n] e^{-j\omega n} \quad (2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n}$$

解：

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[-n] e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[-n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] e^{j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{j\omega n} = \frac{1}{1 - e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - e^{j\omega}} \end{aligned}$$

$$(2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1$$

第 4 章习题答案

4 列出图题 4 所示系统的差分方程，指出其阶次。

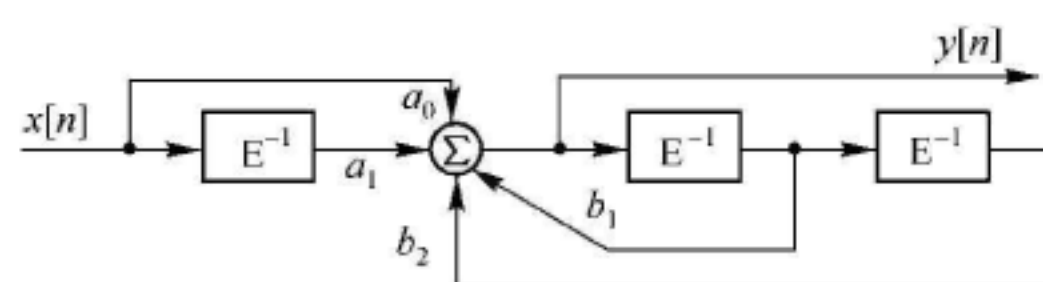


图 题 4

解: $y[n] - b y[n-1] - b y[n-2] = a_1 x[n] + a_2 x[n-1]$ 二阶

4 列出图题 4 所示系统的差分方程, 已知边界条件 $y[-1] = 9$, 分别求以下输入序列时的输出 $y[n]$, 并绘出其图形 (用逐次迭代方法求)。

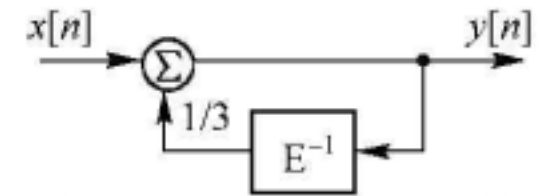


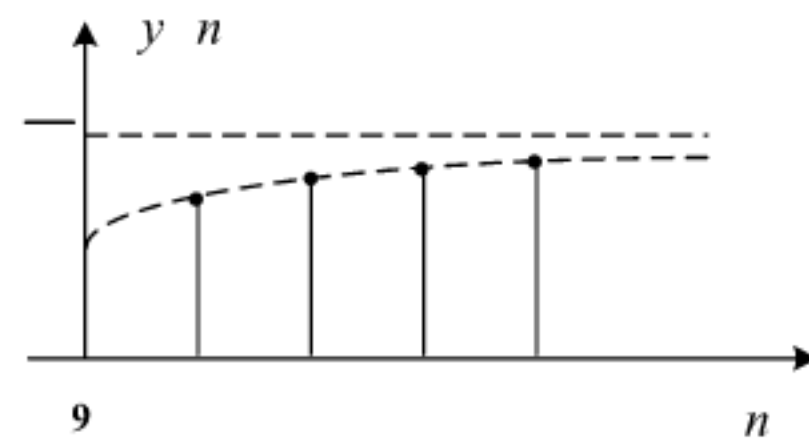
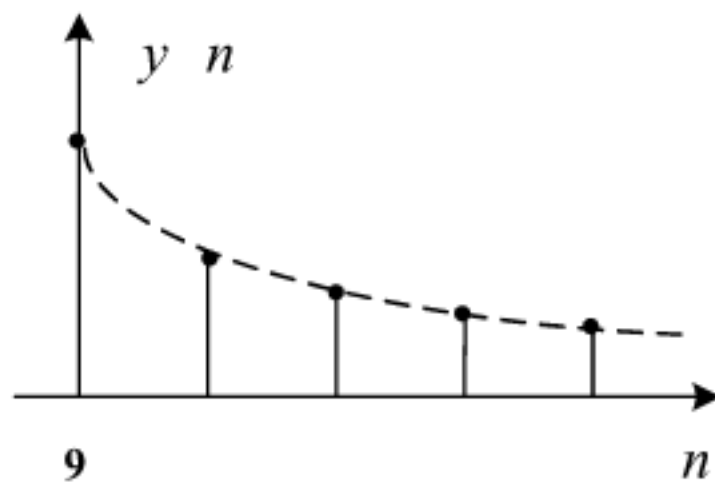
图 题 4

() $x[n] = \delta[n]$ () $x[n] = u[n]$

解: $y[n] - y[n-1] = x[n]$

() $y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

() $y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n / u[n]$



4 求解下列差分方程的完全解。

() $y[n] + y[n-1] = n - 3, y[-1] = 9$

() $y[n] = -y[n-1] + n3, y[-1] = 9$

解: () 方程齐次解为: $y[n] = C(-1)^n$, 特解为: $y[n] = Dn + D$, 代入原方程

$$Dn + D + D(n-1) + D = n - 3 \rightarrow D = -3, D = -$$

完全响应为: $y[n] = C(-1)^n + -n -$, 代入 $y[-1] = 9$ 得: $C = -$

$$\therefore y[n] = -(-1)^n + -n -$$

() 方程齐次解为: $y[n] = C(-1)^n$, 特解为: $y[n] = Dn + D$, 代入原方程

$$Dn + D = -D(n-1) - D + n \rightarrow D = -3, D = -$$

完全响应为: $y[n] = C(-1)^n + -n +$, 代入 $y[-1] = 9$ 得: $C = -$

$$y_n = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} + \frac{1}{2} n + \frac{1}{2}$$

4 用单边 z 变换解下列差分方程。

$$(1) y_n - 2y_{n-1} - 9y_{n-2} = 9u_n, y_{-1} = 0, y_{-2} = 0$$

$$(2) y_n - 9y_{n-1} - 9y_{n-2} = u_n, y_{-1} = 0, y_{-2} = 0$$

$$(3) y_n - 2y_{n-1} - 9y_{n-2} = n^{-1}u_n, y_{-1} = 0, y_{-2} = 0$$

解: (1) 差分方程两边同时进行 z 变换:

$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) - 9z^{-2}Y(z) + y_{-1} - 2y_{-2} = \frac{9}{z-1}$$

$$Y(z) \left(1 - 2z^{-1} - 9z^{-2} \right) = \frac{9}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{9}{(z-1)(z^2-2z-9)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}} + \frac{C}{z-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}} + \frac{C}{z-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}}$$

$$y_n = \frac{9}{z-1} + \frac{9}{z-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}} = 9u_n + 9 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2} \right)^n u_n$$

(2) 由差分方程得:

$$y_n - 9y_{n-1} - 9y_{n-2} = u_n \quad \therefore y_n - 9y_{n-1} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^n u_n$$

差分方程两边同时进行 z 变换:

$$Y(z) - 9z^{-1}Y(z) = \frac{z}{z-1/2}$$

$$Y(z) \left(1 - 9z^{-1} \right) = \frac{z}{z-1/2}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1/2)(z+1/9)} = \frac{A}{z-1/2} + \frac{B}{z+1/9}$$

$$= \frac{1}{(z-1/2)(z+1/9)} + \frac{-1}{(z-1/2)(z+1/9)} + \frac{1}{z+1/9}$$

$$y_n = \left(-\frac{1}{2} \right)^n - \left(-\frac{1}{9} \right)^n + \left(-\frac{1}{9} \right)^n u_n$$

4 若描述某线性时不变系统的差分方程为： $y[n] - y[n-1] = y[n-1] + x[n] + x[n-1]$ ，已知 $y[-1] = 0$ ， $y[-2] = 6$ ， $x[n] = u[n]$ 。求系统的零输入响应和零状态响应。

解：差分方程两边同时进行 z 变换：

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) - y[-1] = z^{-1}Y(z) + z^{-1}Y(z) + X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) - z^{-1}Y(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-1}Y(z) + X(z) + z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) = \frac{z + z^{-1}}{-z^{-1} - z^{-1}} X(z) + \frac{z + z^{-1}}{-z^{-1} - z^{-1}}$$

$$Y_{zi}(z) = \frac{z + z^{-1}}{-z^{-1} - z^{-1}} = \frac{z^2 + 1}{-z - 1}$$

$$\frac{Y_{zi}(z)}{z} = \frac{A}{z-1} + \frac{A}{z+1} = \frac{-1}{z-1} + \frac{-1}{z+1}$$

$$y_{zi}[n] = (-1)^n u[n-1] - (-1)^n u[n]$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{z + z^{-1}}{-z^{-1} - z^{-1}} X(z) = \frac{z + 1}{z - 1} \times \frac{z}{z - 1}$$

$$\frac{Y_{zs}(z)}{z} = \frac{B}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{B}{z-1} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}$$

$$y_{zs}[n] = (-1)^n + (-1)^n - (-1)^n u[n]$$

4 对于由差分方程 $y[n] = 2y[n-1] + x[n]$ 所表示的因果离散系统：

(1) 求系统函数 $H(z)$ 及单位样值响应 $h[n]$ ，并说明系统的稳定性；

(2) 若系统起始状态为零，而且输入 $x[n] = 9^n u[n]$ ，求系统的响应 $y[n]$ 。

解：(1) 差分方程两边同时进行 z 变换：

$$Y(z) + z^{-1}Y(z) = X(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + z^{-1}} = \frac{z}{z + 1}$$

$$h[n] = (-1)^n u[n]$$

系统的收敛域不包括单位圆，所以不稳定。

$$) / X(z) = \frac{9z}{z-1} \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{9z}{(z-1)(z+1)} = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1}$$

$$y[n] = 1^n + (-1)^n u[n]$$

4 因果系统的系统函数 $H(z)$ 如下，试说明这些系统是否稳定。

$$() \frac{z+1}{z-1} \quad () \frac{-z^{-1}-z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}} \quad () \frac{z+1}{z+z^{-1}} \quad ()$$

$$\frac{1+z^{-1}}{-z^{-1}+z^{-2}}$$

解：

$$() \text{ 收敛域为 } |z| > 1, \text{ 包括单位圆，所以稳定。}$$

$$() \text{ 收敛域为 } |z| > 1, \text{ 不包括单位圆，所以不稳定。}$$

$$() \text{ 收敛域为 } |z| > 1, \text{ 不包括单位圆，所以不稳定。}$$

$$() \text{ 收敛域为 } |z| > 1, \text{ 不包括单位圆，所以不稳定。}$$

4.9 已知系统函数为 $H(z) = \frac{5z}{(z-9.5)(9-z)}$ ，分别在 $|z| > 9.5$ 及 $|z| < 9$ 两种

收敛域情况下，求系统的单位样值响应，并说明系统的稳定性与因果性。

解：

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{5}{(z-9.5)(9-z)} = \frac{5}{z-9.5} - \frac{5}{z-9}$$

$$h[n] = 9.5^n - 9^n u[n] \quad |z| > 9.5$$

系统是因果，不稳定的。

$$h[n] = 9.5^n u[n] + 9^n u[-n-1] \quad 9.5 < |z| < 9$$

系统是非因果，稳定的。

4 建立图题 4 所示各系统的差分方程，并求单位样值响应 $h[n]$ 。

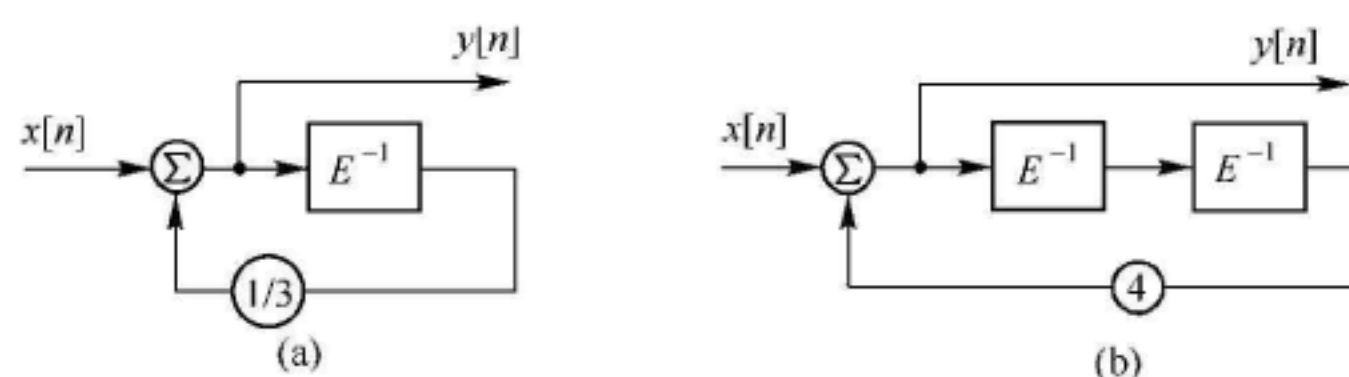


图 题 4

解：() $y[n] - y[n-1] = x[n]$ $h[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

() $y[n] - y[n-2] = x[n]$ $h[n] = -\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right] u[n]$

4 如下各序列中， $x[n]$ 是系统的激励序列， $h[n]$ 是线性时不变系统的单位样值响应。分别求出各响应 $y[n]$ ，画出 $y[n]$ 的图形（用卷积方法）。

() $x[n]$ 3 $h[n]$ 如图题 4) / 所示。 () $x[n]$ 3 $h[n]$ 如图题 4) / 所示。

() $x[n] = \alpha^n u[n]$, $0 < \alpha < 1$; $h[n] = \beta^n u[n]$, $0 < \beta < 1$ 且 $\beta \neq \alpha$ 。

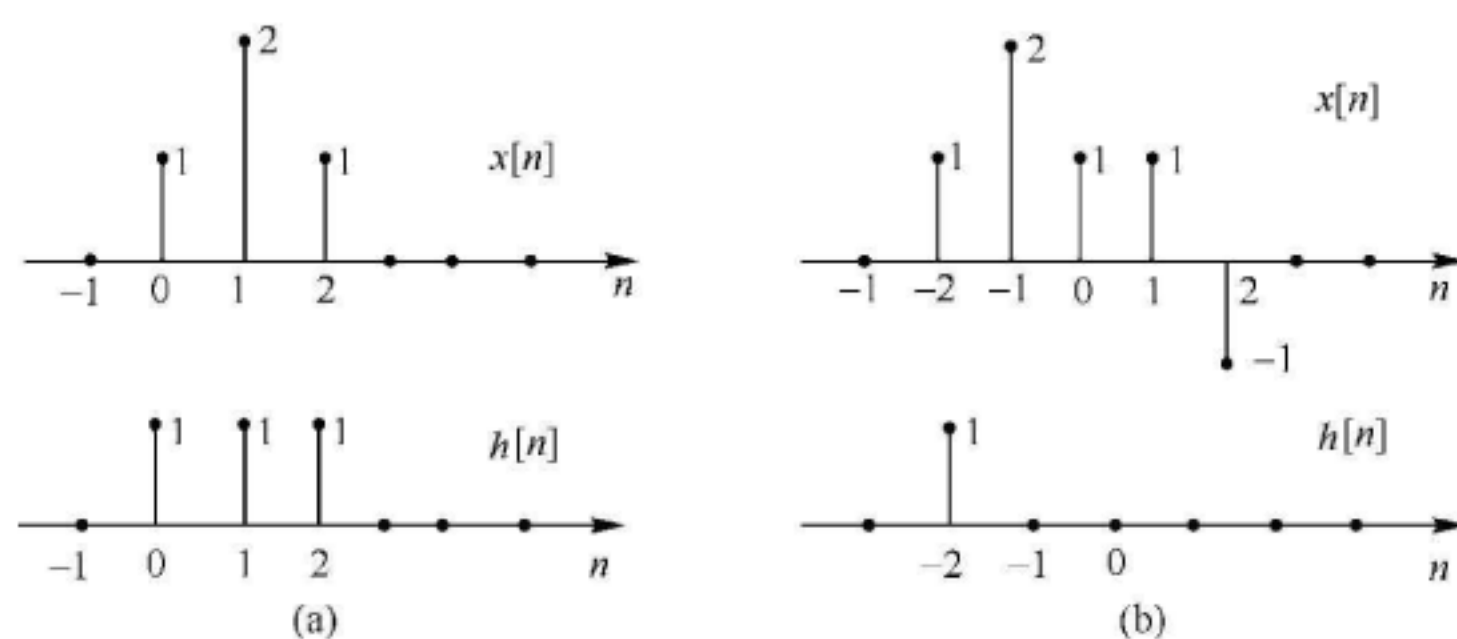
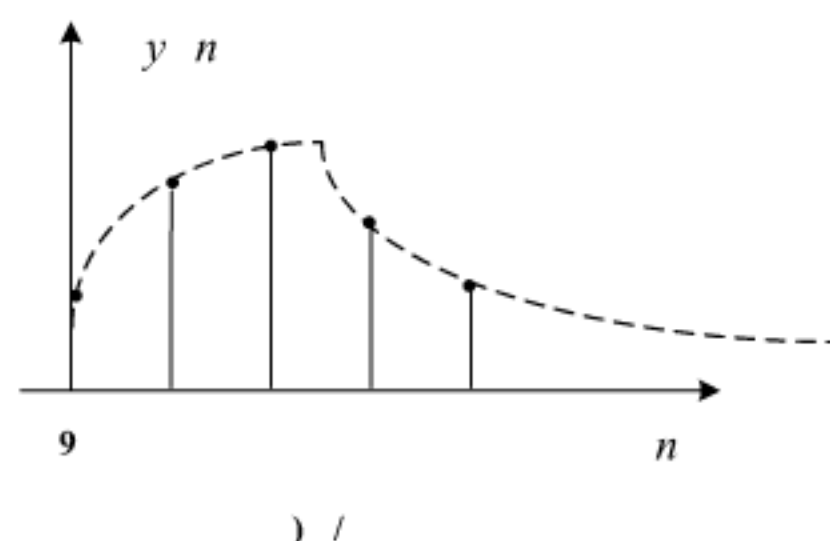
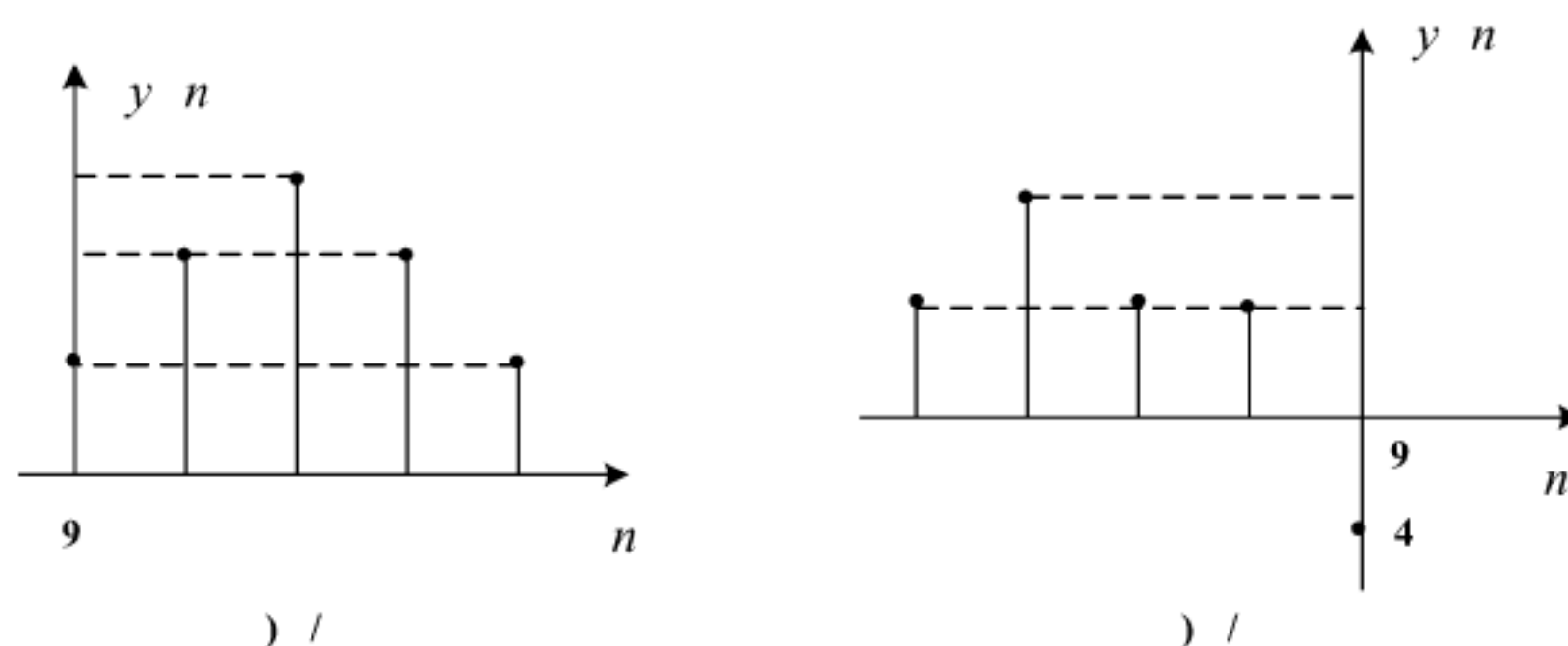


图 题 4

解：() $y[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$

() $y[n] = -\delta[n] + \delta[n+1] + \delta[n+2] + \delta[n+3] + \delta[n+4]$



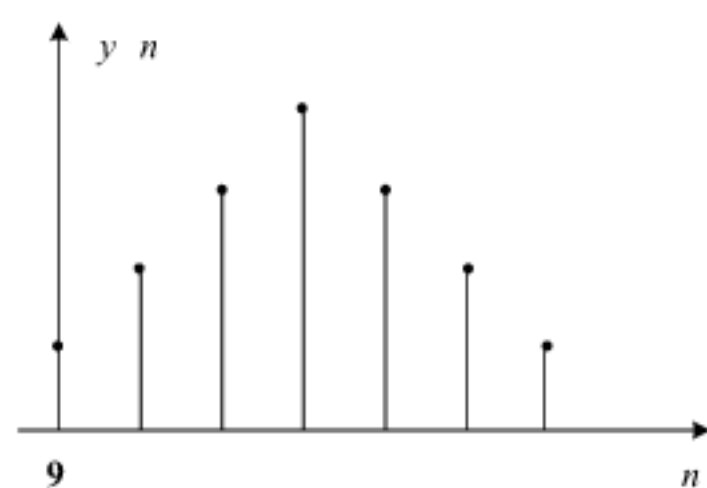
$$() y[n] = \frac{\beta^{n+} - \alpha^{n+}}{\beta - \alpha} u[n]$$

4 已知线性时不变系统的单位样值响应 $h[n]$ 和输入 $x[n]$ 分别如下所示，求输出序列 $y[n]$ ，并绘出 $y[n]$ 的图形。

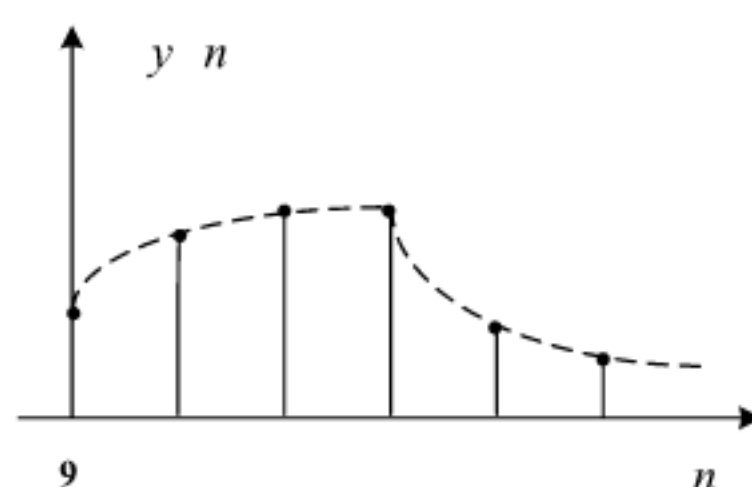
$$() h[n] = R[n] \quad 3 \quad x[n] = R[n] \quad () h[n] =) \quad 6 \quad / \quad u[n] \quad 3 \quad x[n] = R[n]$$

解：() $y[n] = \delta[n] + \delta[n-] + \delta[n-] + \delta[n-] + \delta[n-] + \delta[n-] + \delta[n-] + \delta[n-]$

$$() y[n] = \frac{-95^{n+}}{-95} u[n] - \frac{-95^{n-}}{-95} u[n-]$$



) /



) /

4 图题 4 所示的系统包括两个级联的线性时不变系统，它们的单位样值响应分别为 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ ，已知 $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-3]$ $h_2[n] =)95 / ^n u[n]$ ，令 $x[n] = u[n]$ 。

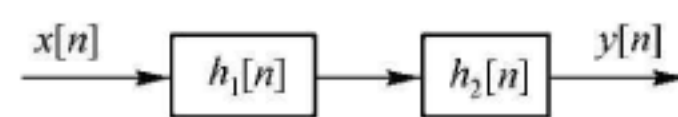


图 题 4

() 按下式求 $y[n]$ ： $y[n] = x[n] \mathbf{1} h_1[n] \mathbf{1} h_2[n]$

() 按下式求 $y[n]$ ： $y[n] = x[n] \mathbf{1} h_2[n] \mathbf{1} h_1[n]$

注：以上两种方法的结果应该相同（卷积结合律）。

解：() $y[n] = x[n] \mathbf{1} h_1[n] \mathbf{1} h_2[n] = u[n] - u[n-3] - \mathbf{1})95 / ^n u[n]$

$$= u[n] \mathbf{1})95 / ^n u[n] - u[n-3] \mathbf{1})95 / ^n u[n]$$

$$= \frac{-95^{n+}}{-95} u[n] - \frac{-95^{n-}}{-95} u[n-3]$$

() $y[n] = x[n] \mathbf{1} h_2[n] \mathbf{1} h_1[n] = u[n] \mathbf{1})95 / ^n u[n] -)95 / ^{n-} u[n-3]$

$$= u[n] \mathbf{1})95 / ^n u[n] - u[n-3] \mathbf{1})95 / ^{n-} u[n-3]$$

$$= \frac{-95^{n+}}{-95} u[n] - \frac{-95^{n-}}{-95} u[n-3]$$

4 用计算机对测量的随机数据 $x[n]$ 进行平均处理，当收到一个测量数据后，计算机就把这一次输入数据与前三次输入数据进行平均。试求这一运算过程的频

率响应。

解：设本次输入为 $x[n]$ ，则本次与前三次数据的平均值为：

$$y[n] = \frac{1}{4} (x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3])$$

对上式进行 z 变换得：

$$Y(z) = \frac{1}{4} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) X(z)$$

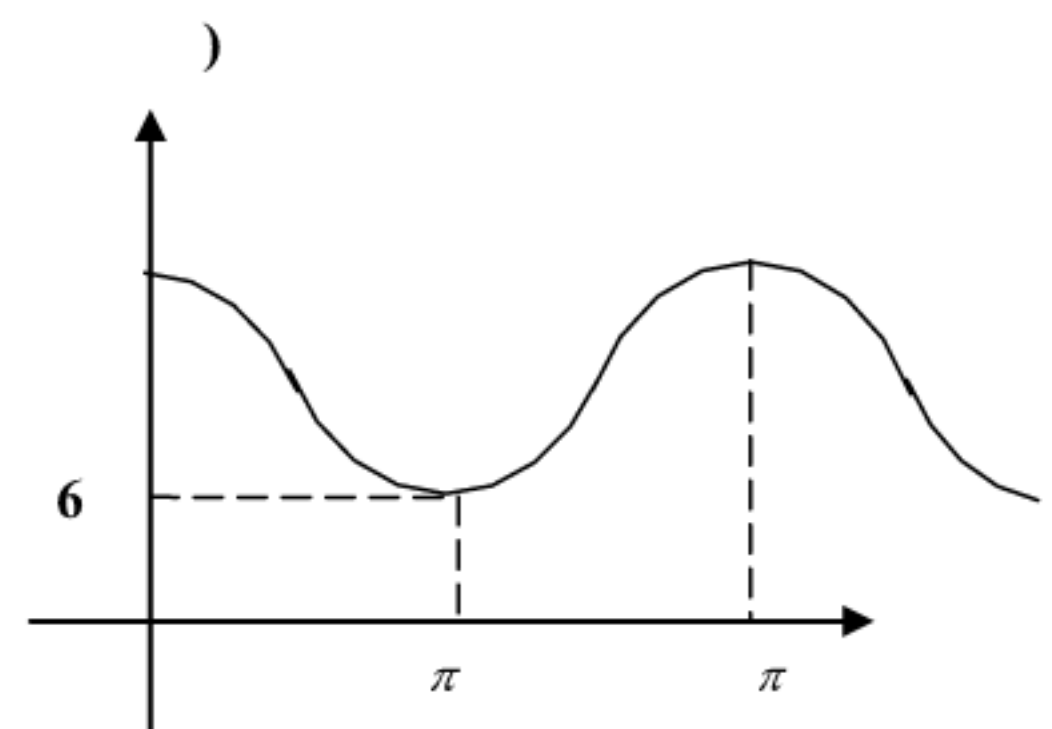
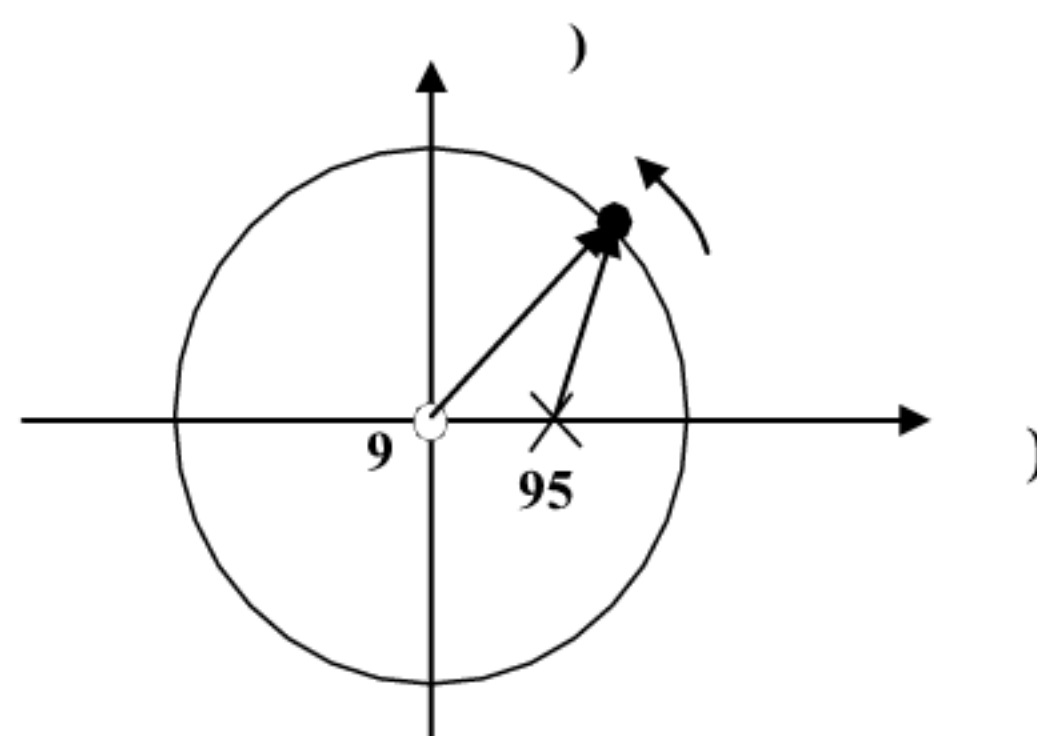
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{4} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}) = \frac{1}{4} (1 + z^{-1}) (1 + z^{-2})$$

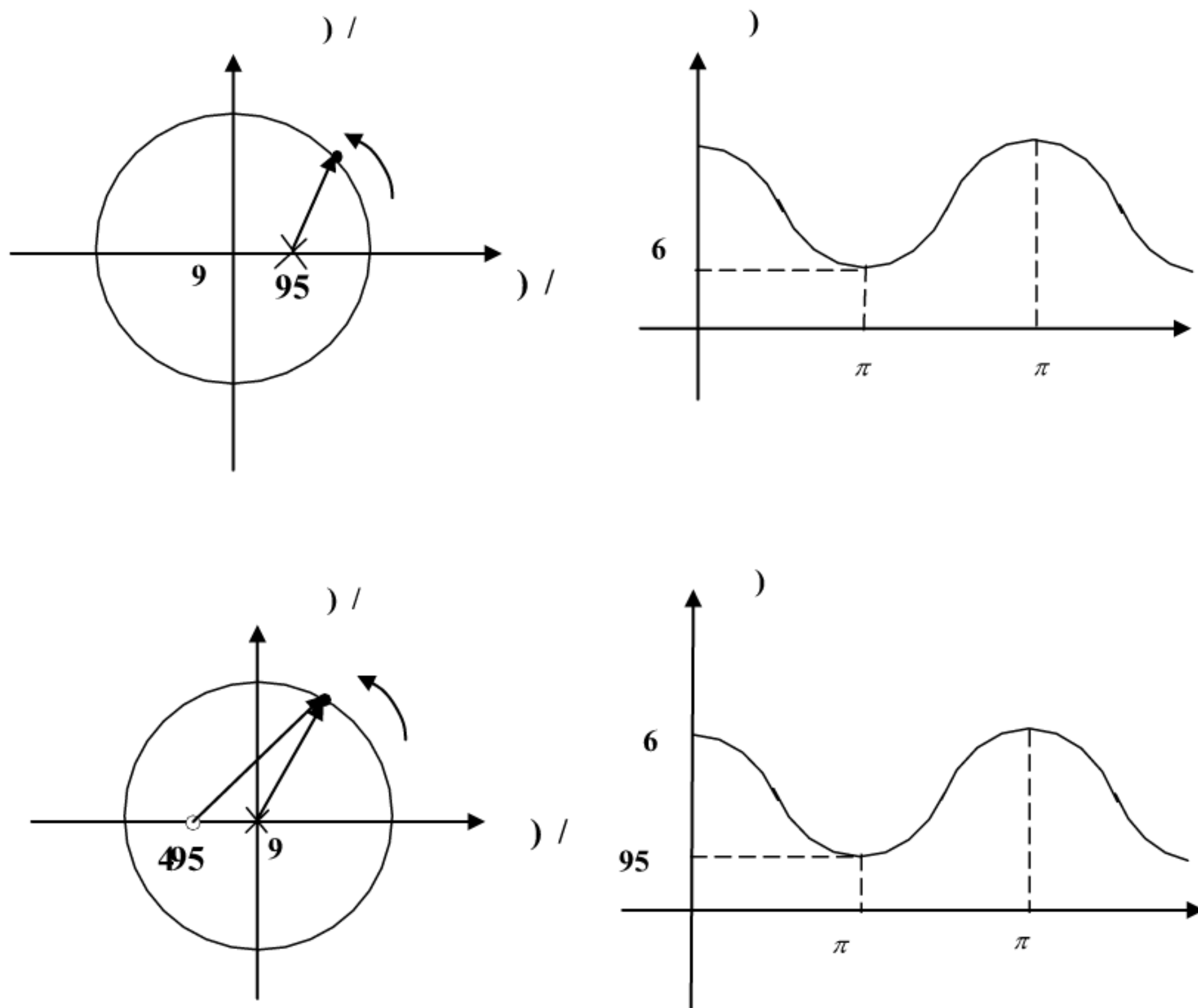
$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{4} (1 + e^{-j\omega}) (1 + e^{-j2\omega}) \\ &= \frac{1}{4} e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}) e^{-j\omega} (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \\ &= e^{-j3\omega/2} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos(\omega) \end{aligned}$$

4 利用 z 平面零极点分布的几何作图法粗略画出下列各系统函数所对应系统的幅频特性曲线。

(a) $H(z) = \frac{z}{z - 0.95}$ (b) $H(z) = \frac{z + 0.95}{z}$ (c) $H(z) = \frac{z + 0.95}{z - 0.95}$

解：





- 4 已知横向数字滤波器的结构如图题 4 所示。试以 M 为例。
- () 写出差分方程； () 求系统函数 $H(z)$ ； () 求单位样值响应 $h[n]$ ；
- () 画出 $H(z)$ 的零极点图； () 粗略画出系统的幅频特性曲线。

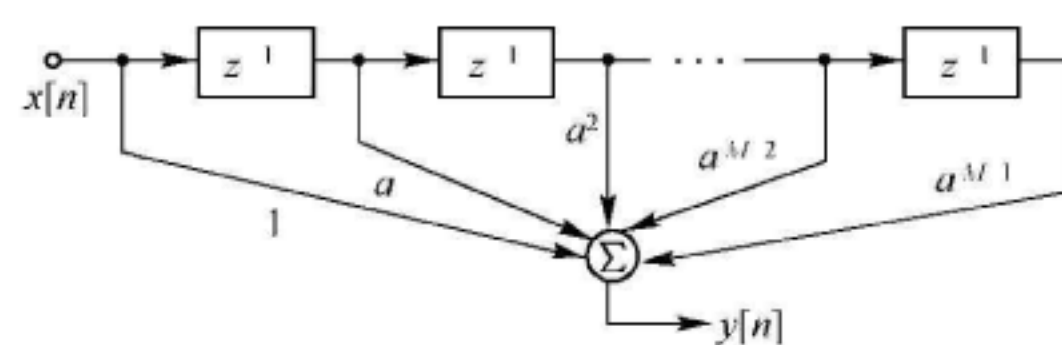


图 题 4

解

$$y[n] = x[n] + ax[n-1] + a^2x[n-2] + \dots + a^{M-1}x[n-M+1]$$

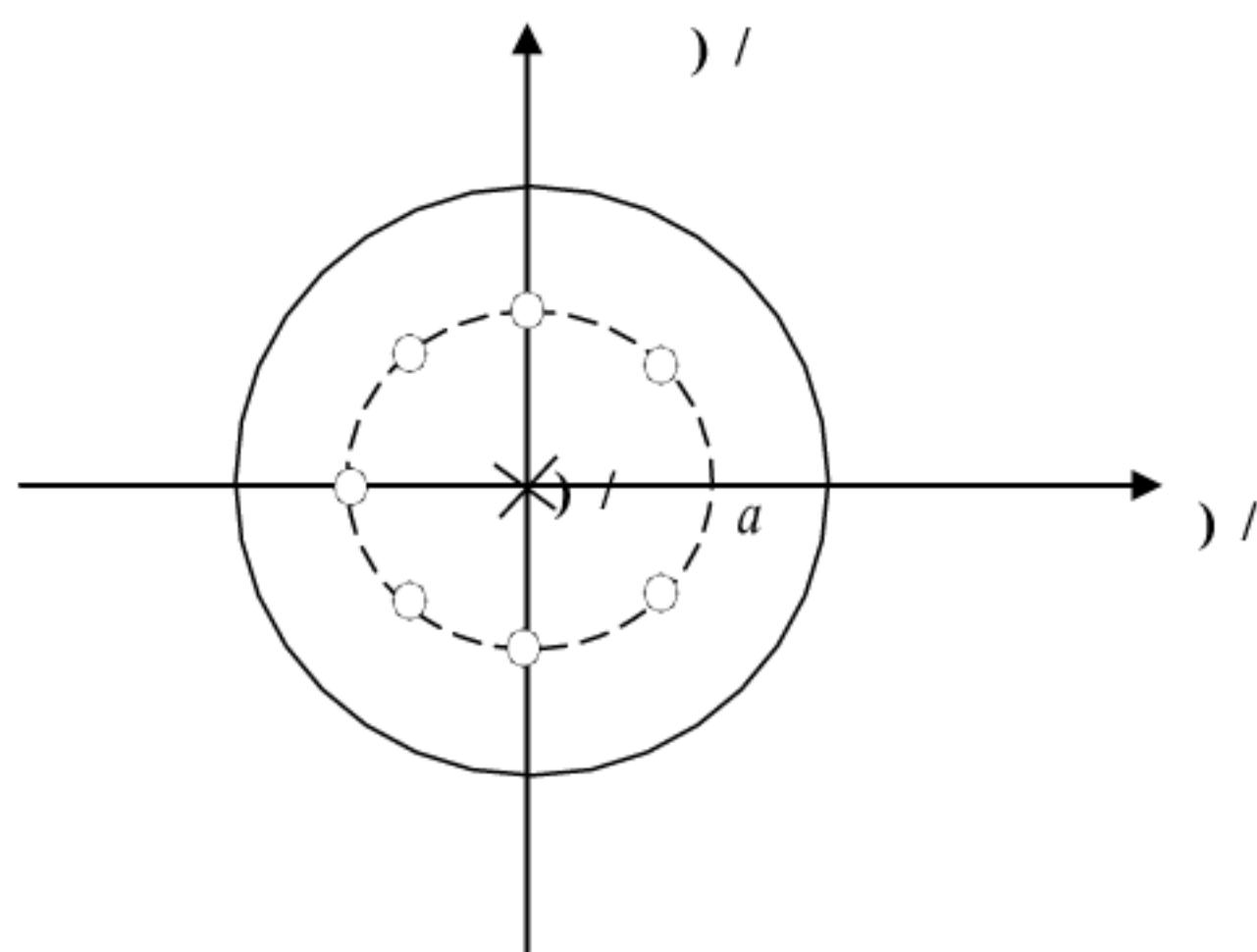
$$= \sum_{k=0}^{M-1} a^k x[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} a^k x[n-k]$$

$$\begin{aligned}) / H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M-1} a^k z^{-k} = \frac{1 - a^M z^{-M}}{1 - a z^{-1}} = \frac{1 - a^M z^{-M}}{1 - a z^{-1}} \\ &= \frac{z^M - a^M}{z^M(z - a)} \quad |z| > a \end{aligned}$$

$$) / h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \sum_{k=0}^{M-1} a^k \delta[n-k] = \sum_{k=0}^{M-1} a^k \delta[n-k] = a^n u[n] - a^M u[n-M]$$

$$) / z_i = a e^{j\frac{\pi}{3}} i = 3 \dots \dots \rho = a 3^p = 9 \quad (\text{阶})$$

为保证系统稳定，设 $a < 1$ 则零极点图如下：



4 由下列差分方程画出因果离散系统的结构图，求系统函数 $H(z)$ 及单位样值响应 $h[n]$ 。

$$() y[n] - y[n-1] = x[n] \quad () y[n] = x[n] - x[n-1] + x[n-2]$$

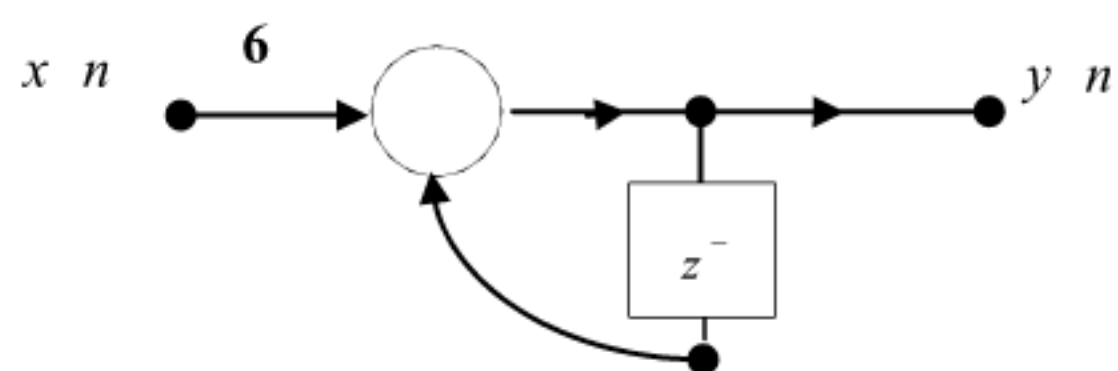
$$() y[n] - y[n-1] + y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

$$() y[n] - y[n-1] + y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

解

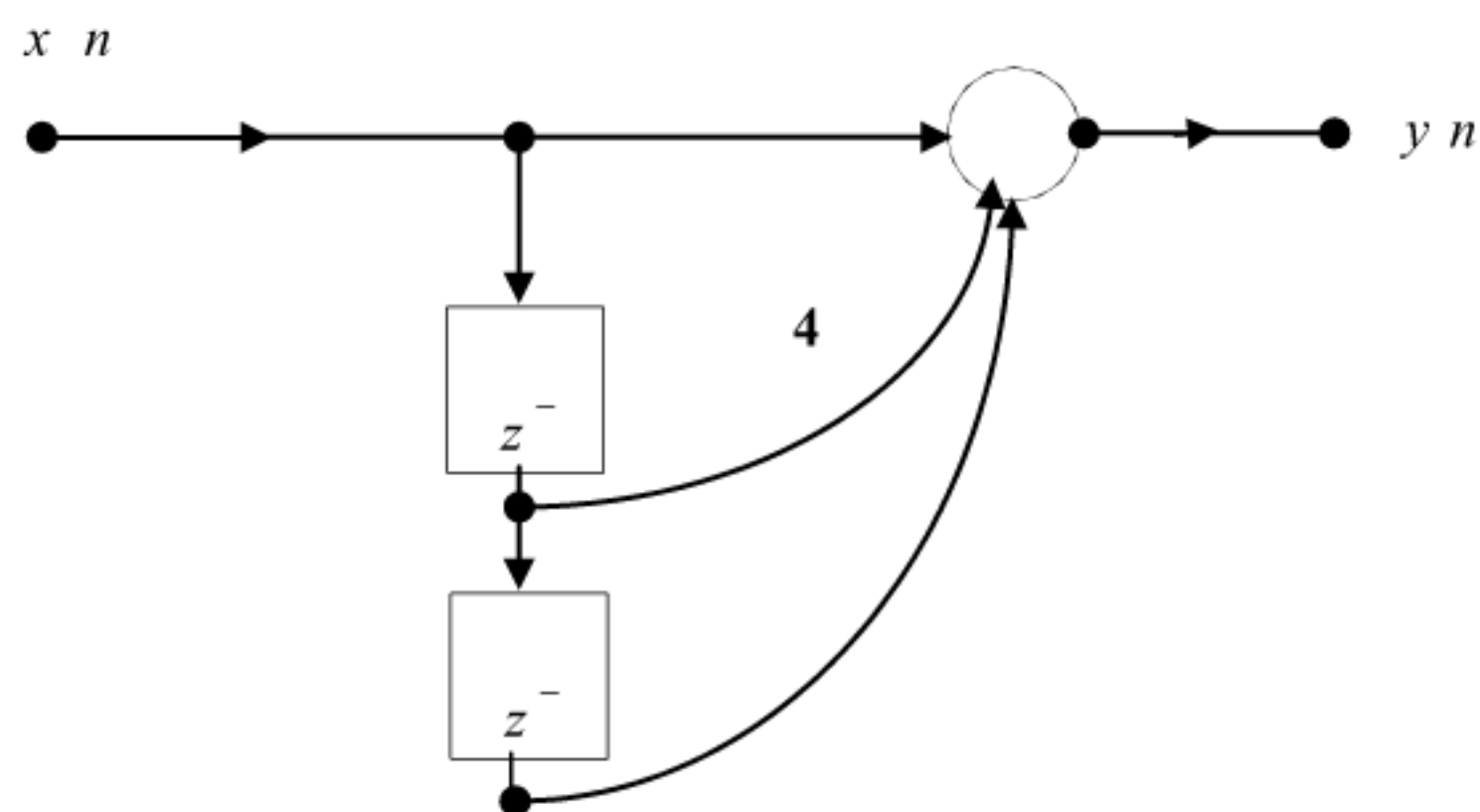
$$) / H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z - 1} = \frac{z}{z - 1}$$

$$h[n] = 1^n u[n]$$



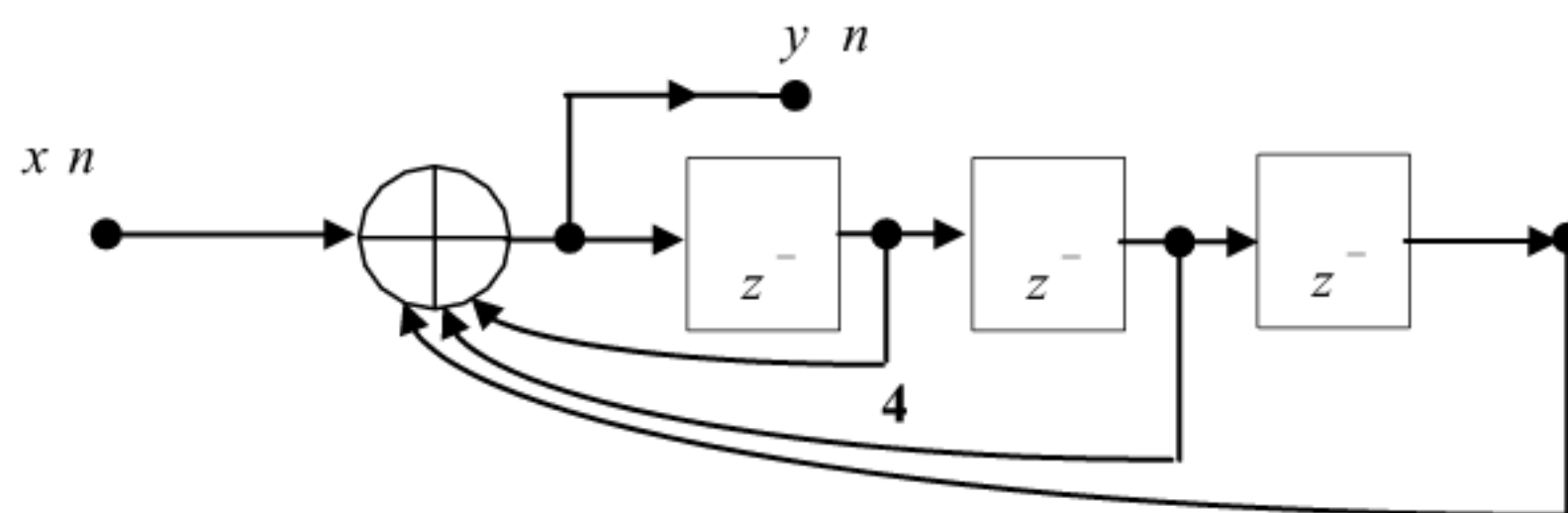
$$) \quad / \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$$



$$) \quad / \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z - z + z - z} = \frac{z}{z - z + z - z} = \frac{z}{z - 1}$$

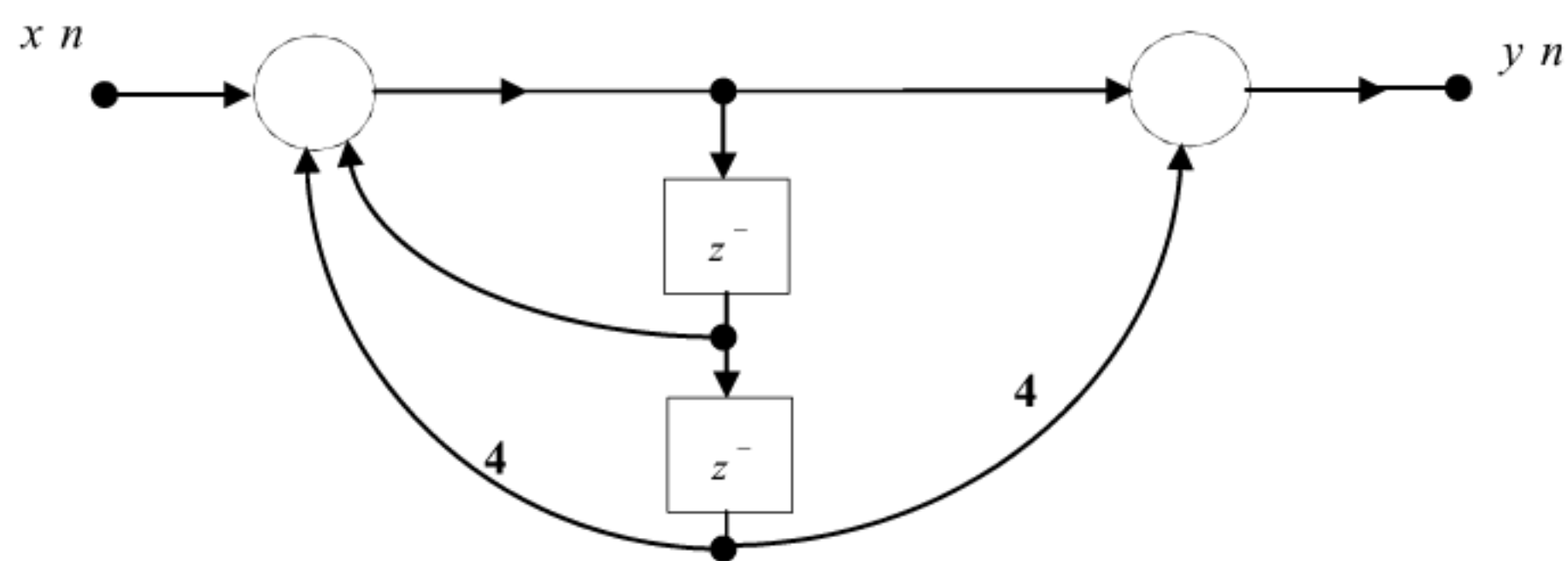
$$h[n] = \frac{(n+1)n+1}{u[n]}$$



$$) \quad / \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

$$= \frac{z - 1}{(z - 1)(z - 1)} = \frac{1}{z - 1}$$

$$h[n] = 1 \times n - n^{-1} / u[n] - \delta[n]$$



4 已知某离散系统的系统函数为 $H(z) = \frac{z}{z - m}$ ， m 为常数。

() 写出对应的差分方程；

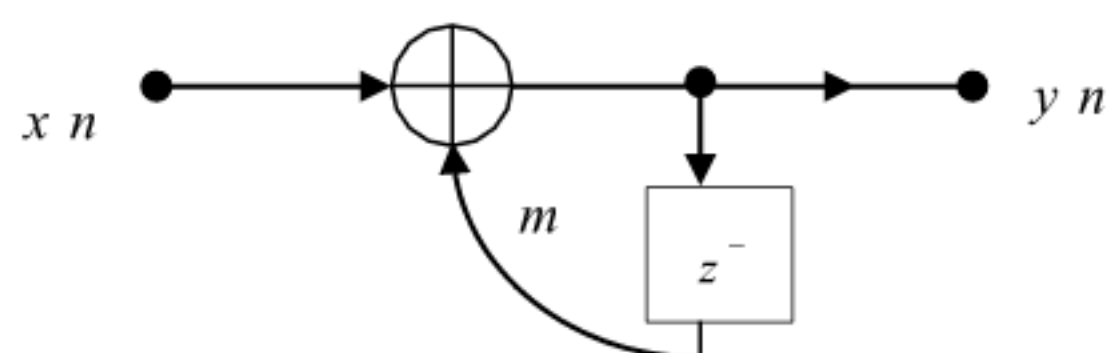
() 画出该系统的结构图；

() 求系统的频率响应特性，并画出 $m = 0.93953$ 三种情况下系统的幅频特性与相频特性曲线。

解

$$H(z) = \frac{z}{z - m} = \frac{1}{1 - mz^{-1}}$$

$$y[n] - my[n-1] = x[n]$$



$$) / \quad H)e^{j\omega} / = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - m} = \frac{1}{1 - m e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - m \cos \omega + jm \sin \omega}$$

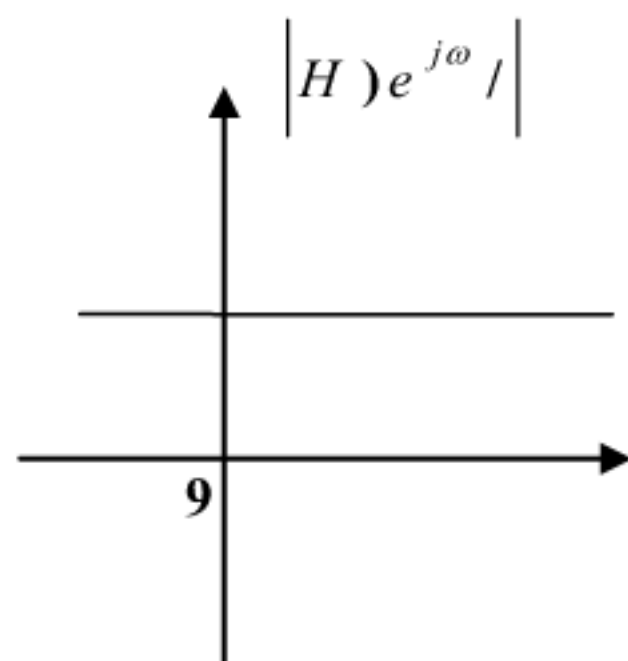
$$\left| H)e^{j\omega} / \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \omega}} \quad \varphi(\omega) / = - \frac{m \sin \omega}{1 - m \cos \omega}$$

$$) / \quad m = 9 \quad \left| H)e^{j\omega} / \right| = 3 \quad \varphi(\omega) / = 9$$

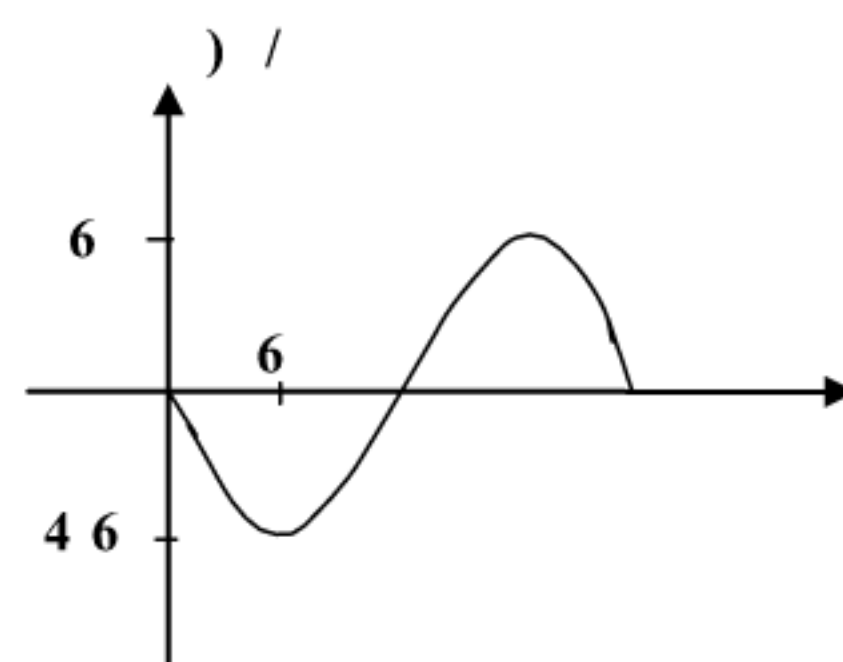
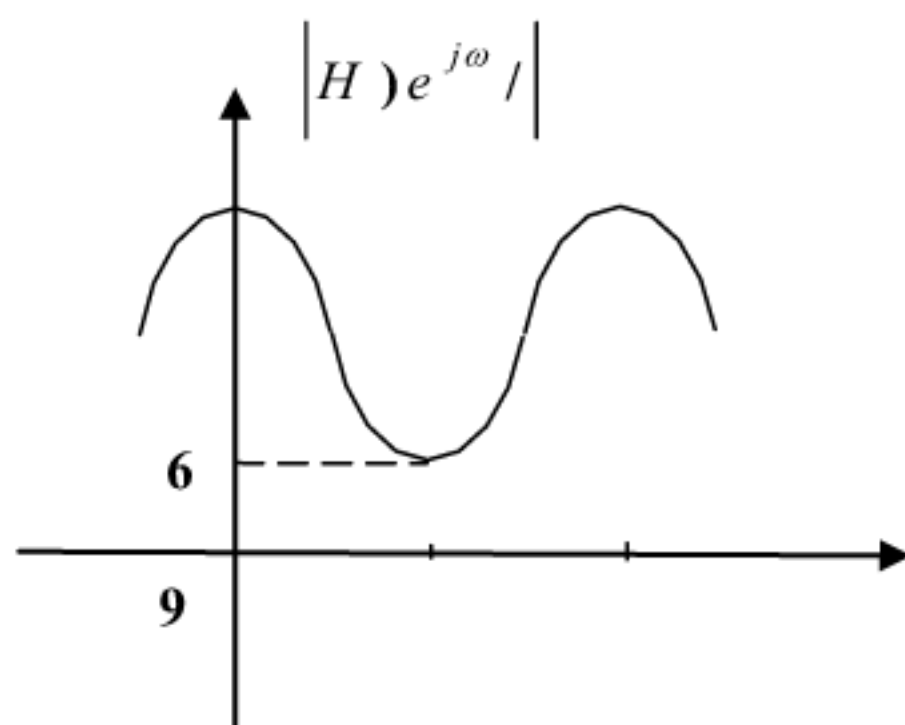
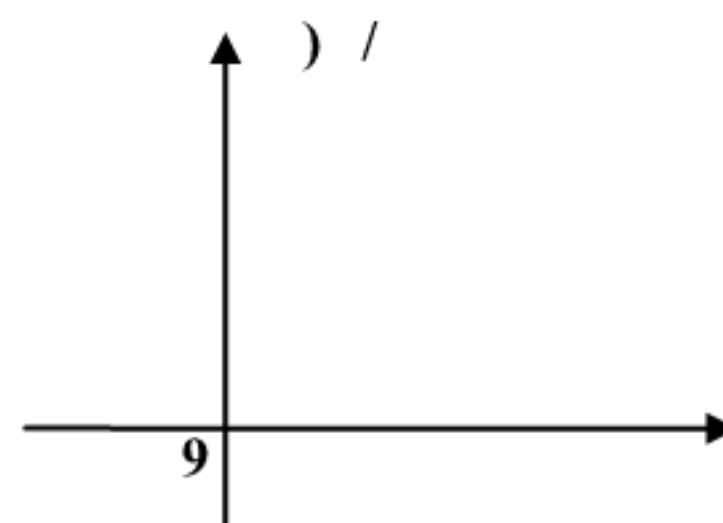
$$) / \quad m = 95 \quad \left| H)e^{j\omega} / \right| = \frac{1}{\sqrt{5 - \cos \omega}} \quad \varphi(\omega) / = - \frac{\sin \omega}{5 - \cos \omega}$$

$$) / \quad m = \quad \left| H)e^{j\omega} / \right| = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \omega}} = \frac{1}{\left| 1 - e^{j\omega} / \right|}$$

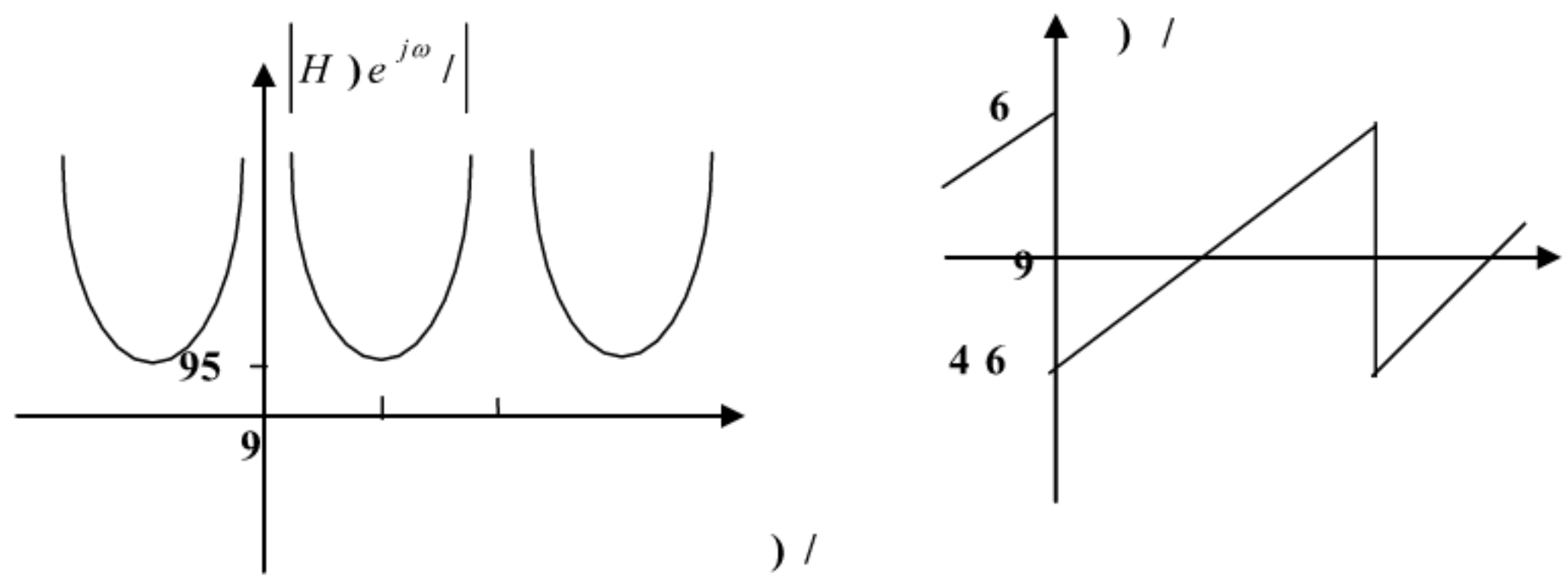
$$\varphi(\omega) / = - \quad)c \quad \frac{\omega}{2} / = \frac{\omega - \pi}{2}$$



) /



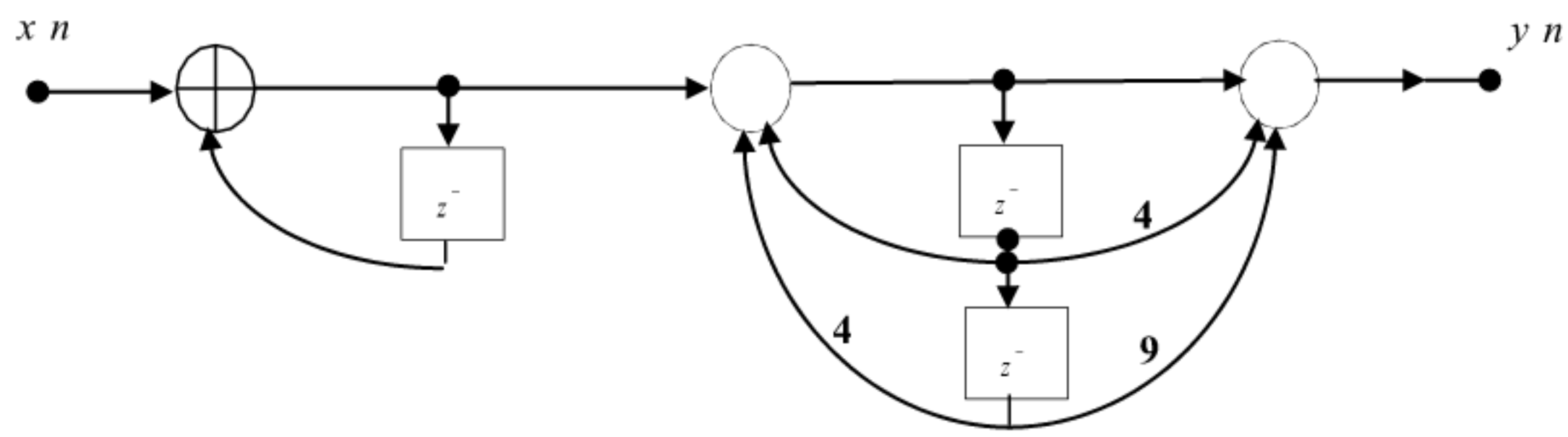
) /



4 画出系统函数 $H(z) = \frac{z^2 - z + 9}{z^2 - z + 1}$ 所表示的系统的级联和并联形式的结构图。

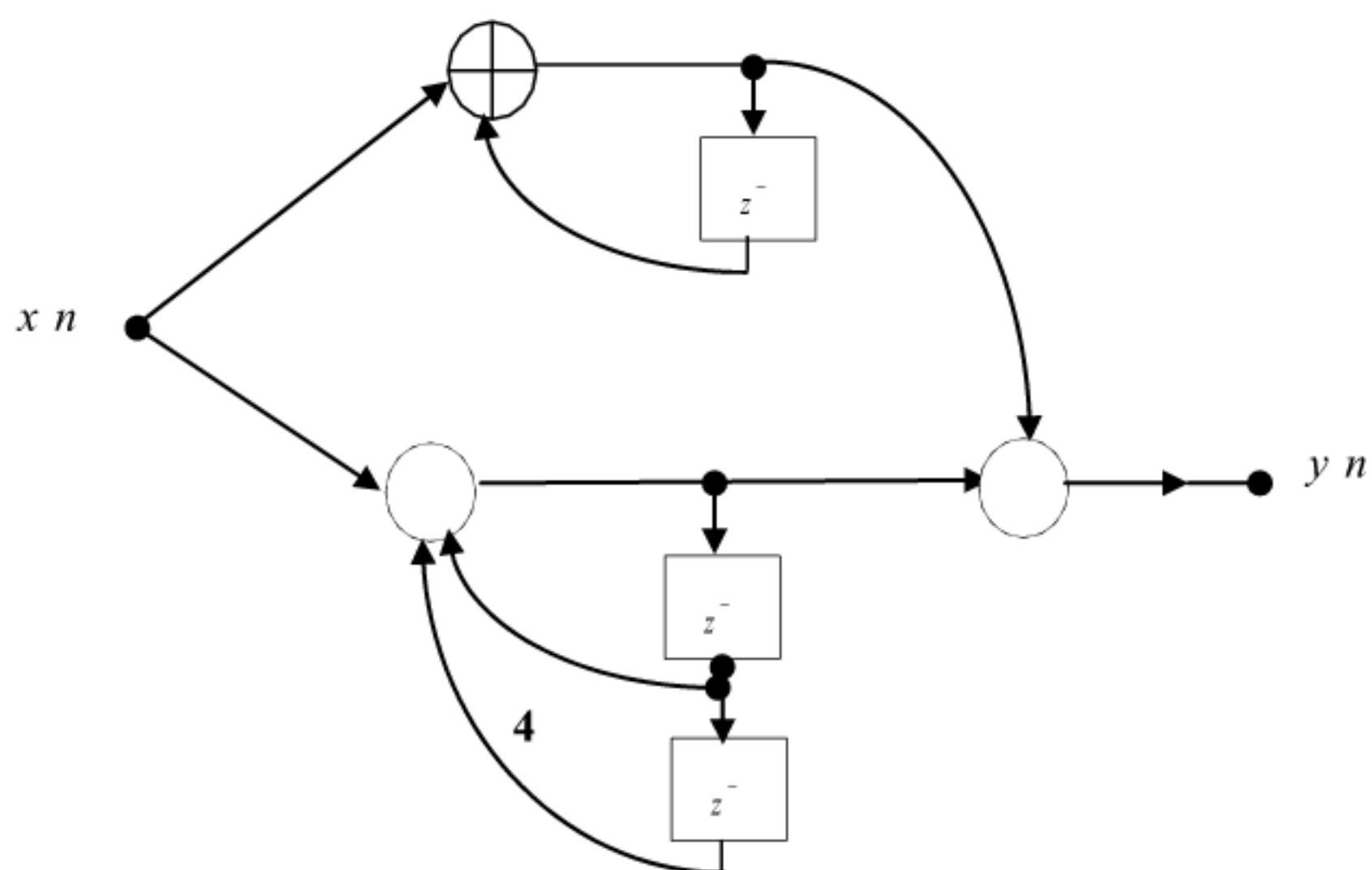
解： 级联形式

$$H(z) = \frac{z^2 - z + 9}{z^2 - z + 1} = \frac{(z - 1/2) \left(z - \frac{1}{2} + 9 \right)}{(z - 1/2) \left(z - \frac{1}{2} + 1 \right)} = \frac{z - 1/2}{z - 1/2} \times \frac{z^2 - z + 9}{z^2 - z + 1}$$



() 并联形式

$$H(z) = \frac{z^2 - z + 9}{z^2 - z + 1} = \frac{z}{z - 1/2} + \frac{z}{z^2 - z + 1} = \frac{z}{z - 1/2} + \frac{z}{z^2 - z + 1}$$



第 4 章习题答案

4 建立图题 4 所示电路的状态方程。

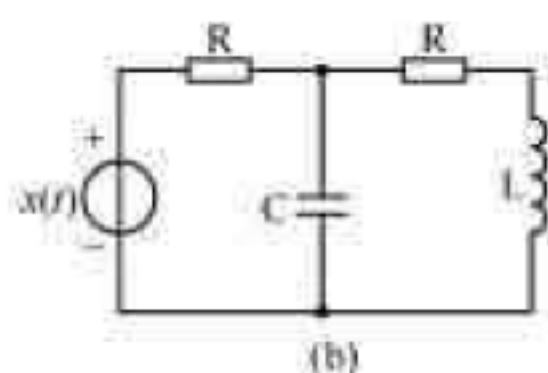


图 题 4

解: ()
$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} \\ -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{RC} \end{bmatrix} x(t)$$

4 建立图题 4 所示电路的状态方程。若指定输出为电阻 3 上的电压, 写出输出方程。

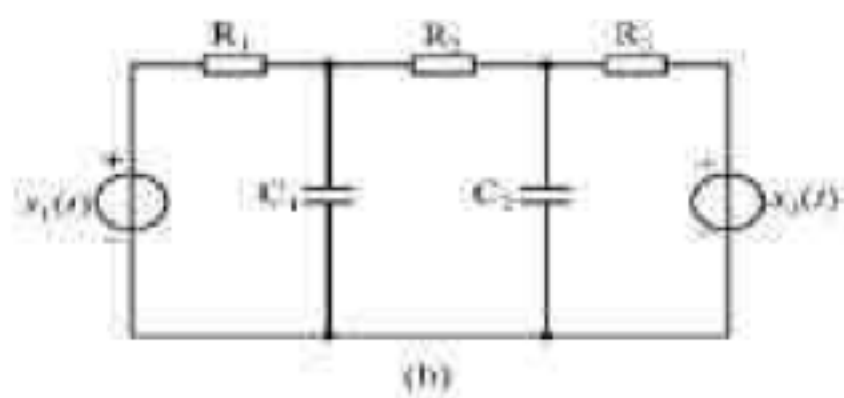


图 题 4

$$\text{解: () } \begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R+R}{RRC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{R+R}{RRC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_R \\ v_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 0 \\ & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$$

4 将图题 4) //所示系统画成流图形式, 并列写系统的状态方程和输出方程。

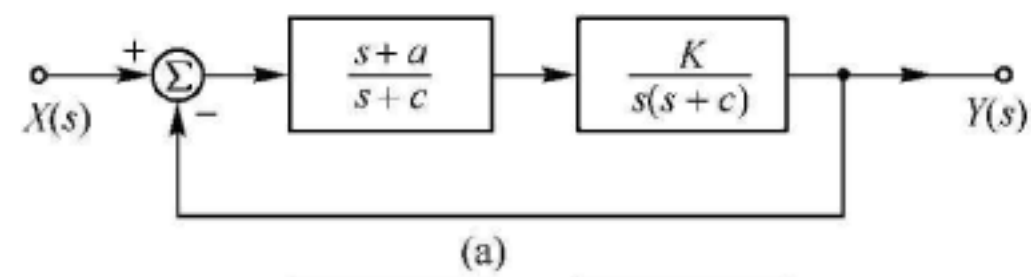
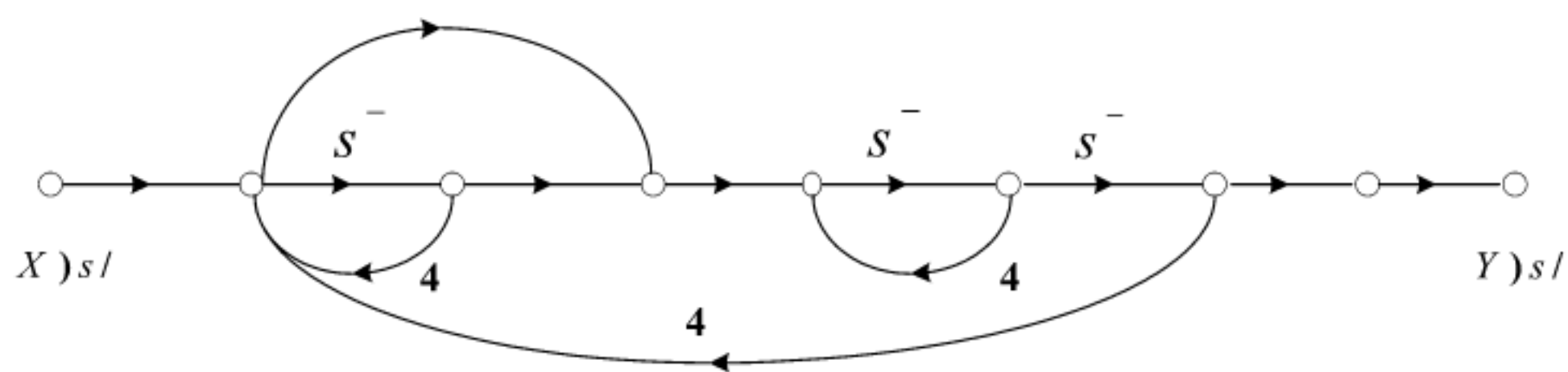


图 题 4

$$\text{解: () } \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -K & -c & a-c \\ K & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$y = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$



4 系统为如图题 4 所示的方框图, 试列写状态方程和输出方程。

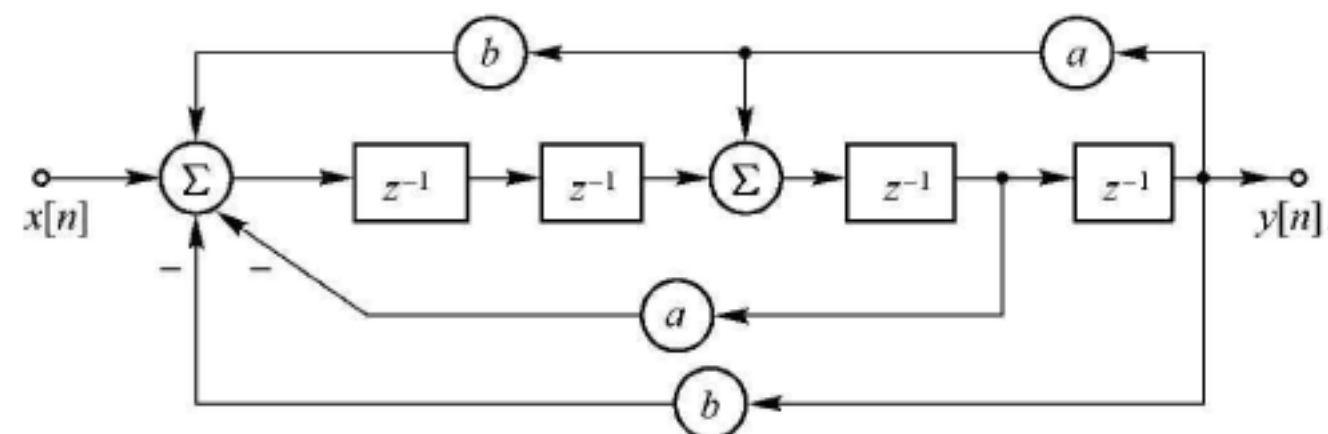


图 题 4

$$\text{解: } \begin{bmatrix} \lambda[n+1] \\ \lambda[n+1] \\ \lambda[n+1] \\ \lambda[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b(a-1) & -a & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda[n] \\ \lambda[n] \\ \lambda[n] \\ \lambda[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda[n] \\ \lambda[n] \\ \lambda[n] \\ \lambda[n] \end{bmatrix}$$

4 给定系统的状态方程和起始条件分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} \lambda(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}$$

求解该系统。

$$\text{解: } \Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - & - \\ - & s - \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s - 1)(s - 1)} \begin{bmatrix} s - & - \\ - & s - \end{bmatrix}$$

$$\Lambda(s) = (sI - A)^{-1} \lambda(0) = \frac{1}{(s - 1)(s - 1)} \begin{bmatrix} s - & - \\ - & s - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s -}{(s - 1)(s - 1)} \\ \frac{s +}{(s - 1)(s - 1)} \end{bmatrix}$$

$$\lambda(t) = 9e^{-t} - e^{-t} 3\lambda(t) = -e^{-t} + e^{-t}$$

4.9 系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} x(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}$$

且已知 $\lambda(0) = 1$, $\lambda(0) = 1$, $x(t) = u(t)$ 。

() 求系统函数矩阵 $H(s)$; () 求输出 $y(t)$ 。

$$\text{解: } H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = 9 \begin{bmatrix} s + & - \\ 9 & s + \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{s + 1}$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} \lambda(0) + H(s)X(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t} - e^{-t}/u(t)$$

4 一离散系统如图题 4 所示。

() 当输入 $x[n] = \delta[n]$ 时, 求 $\lambda[n]$ 和 $h[n]$;
() 列写系统的差分方程。

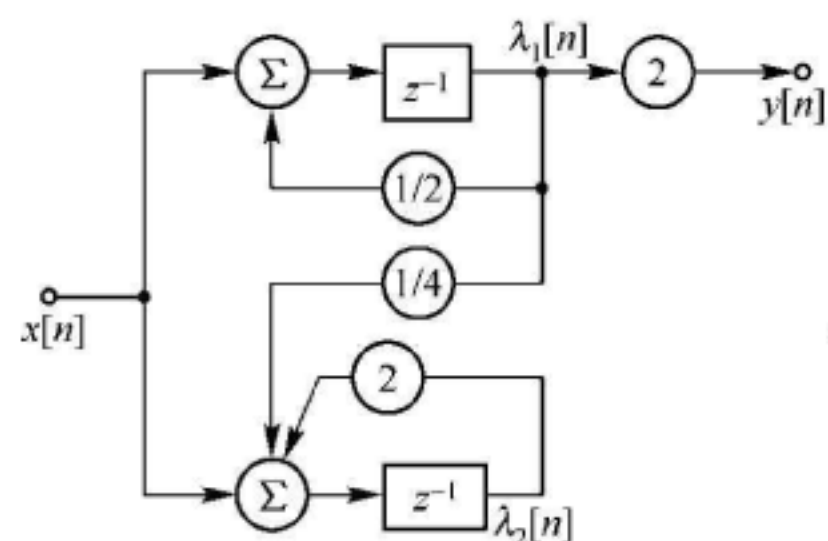


图 题 4

解:
$$\begin{bmatrix} \lambda & n+ \\ \lambda & n+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{9} \\ - & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & n \\ \lambda & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} x_n$$

$$y_n = \begin{bmatrix} & \mathbf{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & n \\ \lambda & n \end{bmatrix}$$

$$(\quad) \begin{bmatrix} \lambda & n \\ \lambda & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix})- /^{n4} u_{n4} \\ -)- /^{-n} -)- /^{n4} u_{n4} \end{bmatrix}$$

$$y_n =)- /^{n4} u_{n4}$$

$$(\quad) y_n - y_{n-} = x_{n-}$$

4 系统的状态方程和输出方程分别为

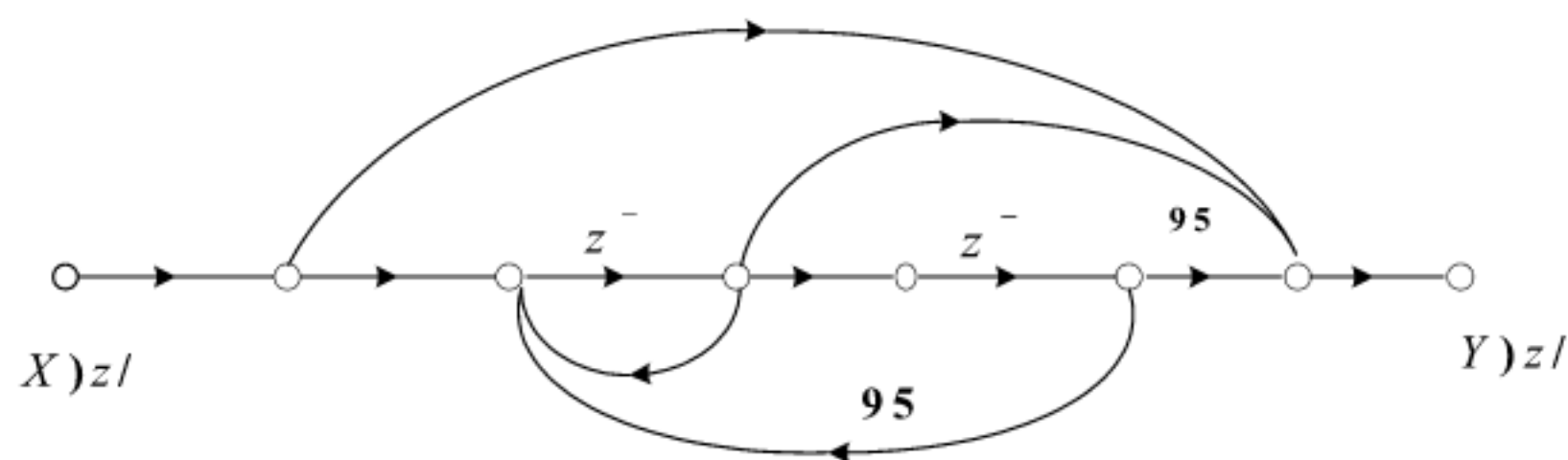
$$\begin{bmatrix} \lambda & n+ \\ \lambda & n+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} & \\ \mathbf{95} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & n \\ \lambda & n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{9} \\ \end{bmatrix} u_n$$

$$y_n = \begin{bmatrix} \mathbf{95} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & n \\ \lambda & n \end{bmatrix} + u_n$$

已知 $\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{9} \\ \lambda & \mathbf{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{9} \end{bmatrix}$ 。

() 画出模拟框图和信号流图; () 求系统函数 $H(\quad)$; () 求 y_n 。

解: ()



$$(\quad) H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} z & - \\ \mathbf{95} & z- \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{9} \\ \end{bmatrix} +$$

$$= \frac{z}{z - z - \mathbf{95}}$$

$$(\quad) Y(z) = H(z)X(z) = \frac{z}{z - z - \mathbf{95}} \cdot \frac{z}{z-} = z) \frac{ / }{z- \mathbf{5}} + \frac{ / }{z+ \mathbf{95}} - \frac{\mathbf{99} / }{z-}$$

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \frac{1}{n} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$$