

## 摘要

本文对于在平稳随机地震激励下部分构件进入非线性弹塑性状态工作的大型复杂结构（如桥梁、高层建筑等）进行抗震分析。采用 Bouc-Wen 等提出的微分方程模型描述进入非线性构件的滞变特性，运用虚拟激励法结合等效线性化进行结构非线性随机振动分析。求解受平稳随机激励的剪切型非线性滞迟系统，并研究了工程结构局部非线性随机地震响应问题。

对于剪切型滞迟系统作了以下工作：i) 运用虚拟激励法结合等效线性化法分析了单自由度滞迟系统在不同强度激励下的响应性态，与基于李亚普诺夫方程的结果及用 Monte-Carlo 法计算的结果作了比较，非常吻合。ii) 运用虚拟激励法结合等效线性化法分析了此类遭受地震激励的多自由度滞迟系统在不同的非线性系数下的平稳随机响应，与时程积分方法的计算结果相比较，比较吻合。

对于工程结构地震作用下局部非线性随机振动，将离散塑性铰模型与虚拟激励法和等效线性化法相结合，求解这一类局部发生弯曲型滞迟效应的非线性问题。以上的算法已在有限元分析软件 DDJ-W 中实现，可以处理具有复杂边界条件的三维结构在地震激励下的局部非线性随机响应分析，并计算了工程中的实际桥梁，得到了比较合理的结果。

在此基础上，探讨了用虚拟激励法分析非线性随机振动问题应用在工程实际中的适用性和精度。本文方法充分利用了虚拟激励法求解复杂线性结构高效、精确的优点，以一系列线性问题的迭代分析，迅速地求得原非线性问题合理的近似解。是一个有实用价值的非线性抗震分析方法。

关键词：非线性，随机振动，滞迟系统，虚拟激励，等效线性化，离散铰模型

## Abstract

In this paper seismic analysis method of large complex structures such as bridges, tall buildings, subjected to stationary random ground excitations is investigated for which the non-linear elasto-plastic characters of some components is taken into account. The Bouc-Wen differential equation model is used in modeling the hysteretic characteristics of these components. The PEM(Pseudo Excitation Method) combined with the ELM(equivalent linearization method) is used to analyze the non-linear random vibration of such structures. The shear-type non-linear hysteretic system subjected to stationary excitation and local non-linear random vibration of engineering structure under earthquake excitation are studied.

The research work about the shear-type hysteretic system includes: i ) Random response of SDOF hysteretic system under variant excitation intensities are analyzed using the PEM combined with the ELM. The results are all in good agreement with those of the Liapunov differential equations and the Monte-Carlo simulation; ii ) The stationary random responses of such MDOF hysteretic systems subjected to earthquake excitation under variant non-linear coefficients are studied using the PEM combined with ELM; The results are compared with those calculated by using integration, the difference is not obvious.

The research work about the local non-linear random vibration of engineering structure under earthquake excitation includes; Discrete hinge model combined with the PEM and the ELM is used to solve such non-linear problem which the bend-type hysteretic effect of some components is taken into account. Algorithm above has been implemented in finite element program DDJ-W, and can analyze non-linear random response of 3-D structure which has complex boundary conditions under earthquake excitation. Practical bridges of engineering are calculated and the results are reasonable.

Finally, the possibility of engineering application and accuracy of the PEM in analyzing the random response of non-linear structures are discussed based on the work outlined above. Method presented in this paper makes full use of the merits of the PEM, i.e. its high efficiency and accuracy in solving the linear random vibration of complex structures. The solution of the original nonlinear problem is reasonably approximated by means of a series of random vibration analyses for the linearized structure using the pseudo excitation method.

**Key words:** non-linear, random vibration, hysteretic system, pseudo excitation, equivalent linearization, discrete hinge model

# 1 概论

## 1.1 引言

在土木、机械、航空、航天及生物工程、海洋工程等几乎所有的工程领域中，非线性现象普遍存在。例如，在土木工程中，房屋、桥梁等建筑物在随机动力荷载作用下，尤其是地震作用下，其结构构件会因屈服而表现出非常明显的非线性滞迟形态；在机械工程中，各种车辆的磨擦减振器以及液(气)压缓冲器都是含有较强非线性阻尼力的非线性元件；在海洋工程中，近海结构、海洋石油平台在波浪力作用下，其桩—土支承系统会显示出较强的非线性性质；船舶在不规则波浪作用下的摇摆，其阻尼力是摇摆角速度及其二次方的函数，该二次项因显著地大于其线性项而表现出较强的非线性；工程实际中广泛应用的各类粘弹性材料以及存在于摩擦作用的构件，都会表现出一定的非线性效应。

当实际结构的非线性比较弱或对所研究的问题不足以产生显著的影响时，线性系统作为对非线性系统，即客观实际的近似模型而得以广泛的应用，解决了大量工程实际问题。当实际结构的非线性比较强或存在本质非线性时，用线性系统分析往往难以做出合理的解释和正确的定性判断；当人们对某些问题需要得到更准确的定量分析时，用线性系统分析有时也难以给出满意的结果。在这些情况下，人们必须依赖于非线性分析而使问题得到更合理的解决。如上文中提到的非线性滞迟效应即是一种非常复杂的非线性现象，其非线性恢复力不仅取决于系统的瞬时位移，而且取决于系统响应的历史。只有建立相应的非线性微分方程模型，才能较准确地描述该现象，并通过适当的手段求得较合理的结果。

## 1.2 结构抗震分析的重要性

随着社会经济的发展，技术的进步，大跨度结构在工程中日益广泛采用，一般都是重要的公众设施，如城市立交桥，高架公路桥，油气管线，水坝，体育场馆等，其地震安全性对于设施的正常运行乃至公众的生命财产等至关重要，一旦在地震中遭到破坏，损失将是巨大的。1971年圣费南多(San Fernando)发生的里氏6.7级地震，两座互通式的立交桥工程严重倒塌毁坏，这两座桥都是高速公路上的枢纽工程，致使交通中断。我国1976年的唐山地震中，遭受破坏的铁路桥梁占总数的39.3%，致使京山铁路中断，芦台运河大桥和滦河大桥的破坏，切断了唐山与天津、沈阳之间的公路交通，给救灾工作带来了极大的困难。而1989年美国洛马普里埃塔(Loma Preta)地震，为7.0级，桥梁破坏的后果再次告诫人们现代城市交通中断的危害性；1994年诺斯雷奇

(Northridge) 地震 6.7 级，造成了洛杉矶市高速公路上的多座桥梁坍塌，严重的交通中断造成了巨大的经济损失；最近的日本阪神地震，7.2 级，是一个中等强度的地震，却造成了大量高速公路及高速铁路的毁坏，导致除了航空以外的交通几乎全部中断，使经济遭受巨大的损失。阪神地震大概损失了 1000 亿美元，是日本自 1923 年关东大地震以来伤亡最严重、经济损失最大的一次破坏性地震。由此可见，作为交通枢纽的桥梁，如果遭到破坏，带来的损失是巨大的。

作为如此重要的公众设施，大跨度结构，特别是作为交通枢纽的大跨度桥梁的安全性受到了格外的重视。如何在设计和建造阶段就使它们具有足够的抗震能力和合理的安全度，始终是各国工程界、学术界十分关心的问题<sup>[15-26]</sup>。世界著名的旧金山海湾大桥在 1989 年的地震中其东段遭到严重损坏，现仍处于带病工作状态。1997 年，加州政府决定拨巨资重建。在国外招标中，加州大学伯克利分校提出的弧形斜拉桥方案十分美观新颖，被认为是夺标的大热门。但是由于很难对这种形状新颖的桥型的抗震性能提供有力的分析验证，最终还是被加州政府组织的专家组否定了。都市交通委员会发言人对此的评论说：“对于这座桥要考虑的大事是其防震能力，而不是美学问题。我们要再造一座桥，不是因为现有的桥梁很丑陋，而是为了提高防震能力”（美洲星岛日报报道）。大跨度桥梁抗震分析方法的重要性由此亦可见一斑。近二十年来，欧美许多国家都投入很大力量进行相关的研究，并在研究的基础上制定了一系列规范。

在地震工程领域，在强烈地震激励的作用下，许多结构会呈现出非线性滞后性态。对于此类结构用等效线性化法处理时，要归结为反复求解等效线性系统的随机响应。对于一些大跨度结构，如桥梁、高架公路、水坝等，还要考虑多点激励和各地面节点之间存在的时间滞后（相位差），即行波效应。计算量之大、计算过程之繁复，是工程界很难接受的。此种局面的改观，迫切需要改进传统计算方法和提出新的计算手段。

### 1.3 抗震分析中的非线性分析方法

虽然线性随机振动的基本理论框架已经建立，发展了许多预测响应的方法，但非线性随机振动分析却存在着极大的困难。首先，叠加原理不再适用于非线性系统，许多在线性分析中十分有效的方法不再适用，如振型分解法；其次，在 Gauss 随机激励下非线性系统的响应不再是 Gauss 过程，不能够仅仅由响应的二阶矩就得到响应的全部统计特性。因而有必要研究响应的高阶矩，或直接寻求响应的概率密度函数，这是非常困难的。

从 60 年代起，非线性随机振动问题的研究受到了普遍重视，迄今已发展了许多分析方法，主要有解析地求解 FPK 方程法、矩函数截断法、随机平均法、等效非线性系统法、数值模拟法及等效线性化法等<sup>[1-5]</sup>。但这些方法或是因其求解范围小，精度不易掌握，或是因其计算量大而大多数难以满足工程需要。其中，精确地求解 FPK 方程法吸引了大批学者的注意力。从理论上说，

它是非线性随机振动分析最严密的方法，可以得到解析解，并且对其研究大大推动了非线性随机振动学科的发展，以及对这类振动现象本质的认识。但该方法可以解决的问题不多，而且附加了苛刻的条件，所以工程应用意义不大。矩函数截断法是一类求解非线性系统反应矩的方法，较常应用的是高斯截断法和累积量截断法，它们都基于响应为 Gauss 分布的假设，可适用于单个或多个自由度非线性系统受平稳或非平稳随机振动的情况。但它们计算过程复杂，计算量大，较难在工程应用中推广。随机平均法是一种将随机平均原理与 FPK 方程解法相结合的方法，有标准随机平均法和能量包线随机平均法，二者分别适用于随机响应为窄带和宽带过程的情形。但仍难以用于求解多自由度非线性体系。等效非线性系统法是以某个具有精确稳态解的非线性系统按某种准则等效代替给定的非线性系统而使该系统得以求解的方法。由于只对少数几类特殊的单自由度非线性系统可以获得精确稳态解，因而这种方法的应用范围非常有限。数值模拟法是非线性随机振动分析中最广泛适用的方法，但其计算特别费时，一般作为检验其他方法的适用性与精度的工具，而在工程中极少应用。与以上各种方法相比，等效线性化法是用线性系统按方差最小原则来等效代替原非线性系统的方法，因而可以用关于线性系统的诸多简便成熟的方法来求出原非线性系统的近似解。简便可行，求解范围广，有良好的工程应用前景。该方法的最大的优点之一是可以很容易地推广应用到多自由度的系统。

此外还有非线性确定性分析方法。对于非线性时程分析，由于对结构构件内力-变形非线性特征的模拟的困难，包括恢复力模型 (F-X)、屈服关系模型 (N-M, N-Q)、弹塑性位移和位移角的算法、阻尼系数的确定和在数值运算中的处理、数值积分方法的优劣等一系列问题的存在，使非线性时程分析变得十分复杂。结构静力弹塑性分析法是近年来在国外得到广泛应用的一种结构抗震能力评价的新方法，其应用范围主要集中于对现有结构或设计方案进行抗侧力能力的计算，从而得到其抗震能力的估计。这种方法从本质上说是一种静力非线性计算方法，与以往的抗震能力计算方法不同之处主要在于它将设计反应谱引入了计算过程和计算成果的解释。这种方法的优点在于：水平力的大小是根据结构在不同工作阶段的周期由设计反映谱求得，而分布则根据结构的振型变化求得。缺点是这种方法对计算机软硬件和分析人员要求较高，工作量也较大，在一段时间内不容易成为一种被广泛采用的方法。

虽然随机振动作为一门新兴的技术学科几十年来发展迅速，但在工程界的应用还不够广泛。究其原因，现有计算方法的复杂性是造成这一现象的瓶颈。例如，地震工程界普遍认为按照概率性的随机振动理论进行抗震分析是较为合理的，分析理论也早已建立，但由于计算量太大，在设计中还是普遍采用比较简化的反应谱理论。线性系统的计算尚且如此困难，对于求解非线性系统所需要的更加巨大的计算量，工程界更难以接受。

近年来，林家浩教授从计算力学的角度对结构的平稳和非平稳随机响应的计算分析提出了高效精确的算法—虚拟激励算法 (Pseudo Excitation Method, 简称 PEM)<sup>[6-7]</sup>，这是解决此类计算问题的有力工具。在线性系统随机响应分析领域内，虚拟激励法已发展为一个高效算法系列。对结构受单点/多点、同

相位/异相位、完全相干/任意相干、平稳/非平稳随机激励均能进行精确、高效的计算<sup>[8-14]</sup>。比之传统算法，其计算效率有极大的提高。尤其是实现了大型复杂结构的多点激励随机响应分析，用微机处理的结构自由度数可以逾万，这是传统算法所难以达到的。对于工程领域中的非线性系统，采用等效线性化法时，如果结合效率极高的虚拟激励法，则显然可以解决传统方法反复求解线性系统时存在的计算效率问题。

在此背景下，本文探索了用虚拟激励法进行非线性系统随机响应分析的可能性，以期突破非线性系统经等效线性化后在计算存在的瓶颈。并对这种方法在工程实际中应用的可行性进行了探索性的研究。

#### 1.4 本文主要工作概述

本文对于在平稳随机地震激励下部分构件进入非线性弹塑性状态工作的大型复杂结构（如桥梁、高层建筑等）进行抗震分析。采用 Bouc-Wen 等提出的微分方程模型描述进入非线性构件的滞变特性，运用虚拟激励法结合统计线性化进行结构非线性随机振动分析。做了以下几方面的工作：

1. 运用虚拟激励法结合等效线性化法分析了单自由度剪切型滞迟系统在不同强度激励下的响应性态，与基于李亚普诺夫方程的结果及 Monte-Carlo 法的计算结果作了比较，非常吻合。并分析了此类多自由度滞迟系统在地震激励下的平稳随机响应，选取不同非线性系数，其计算结果与时程积分方法的计算结果相比较，相差不大
2. 大型复杂结构（如桥梁）在强烈地震激励下，其局部出现非线性滞迟性态，发生弯曲破坏，将离散塑性铰模型与虚拟激励法和等效线性化法相结合，建立桥梁地震作用下运动方程，以一系列线性问题的迭代分析，迅速地求得原非线性问题合理的近似解。
3. 以上算法已在有限元分析程序系统 DDJ-W 上实现，将系统对结构的动力分析推广到非线性结构，可以处理具有复杂边界条件的三维结构在地震激励下的非线性随机响应分析。
4. 计算了一座中小跨度的桥和美国 CALT 桥在平稳随机地震激励下局部进入非线性弹塑性状态工作下的响应，得到了比较合理的结果。

## 2 滞迟系统的模型化及等效线性化法

### 2.1 引言

工程结构的非线性主要分为两类：几何非线性和材料非线性。主要表现在阻尼项和刚度项中。当结构的非线性项表现在阻尼项，刚度项或者两者的耦合项中时，分别称为阻尼非线性、刚度非线性和滞变非线性。作为此三种非线性的典型系统，范德波（Van der pol）振子、杜芬（Duffing）振子和滞迟系统被研究的最多。许多工程结构在严重载荷的作用下（如强地震引起的地面运动），由于材料的屈服，内摩擦或者构件接合面间的摩擦等原因，往往呈现出滞迟特性。滞迟系统的恢复力是一个多值函数，不仅取决于系统的瞬时位移，而且取决于系统响应的历史。滞迟效应主要表现为刚度的减小与能量耗散能力的增加。

结构是由构件组成的，构件的滞变特性是一种强非线性。这种非线性主要表现为构件的恢复力—抗力与变形的关系曲线在加载和卸载过程中不是沿着同一个路径变化，而是形成如图 2.1 所示的滞回环或称滞变曲线。构件具有这种滞变特性的结构，称为滞变体系。

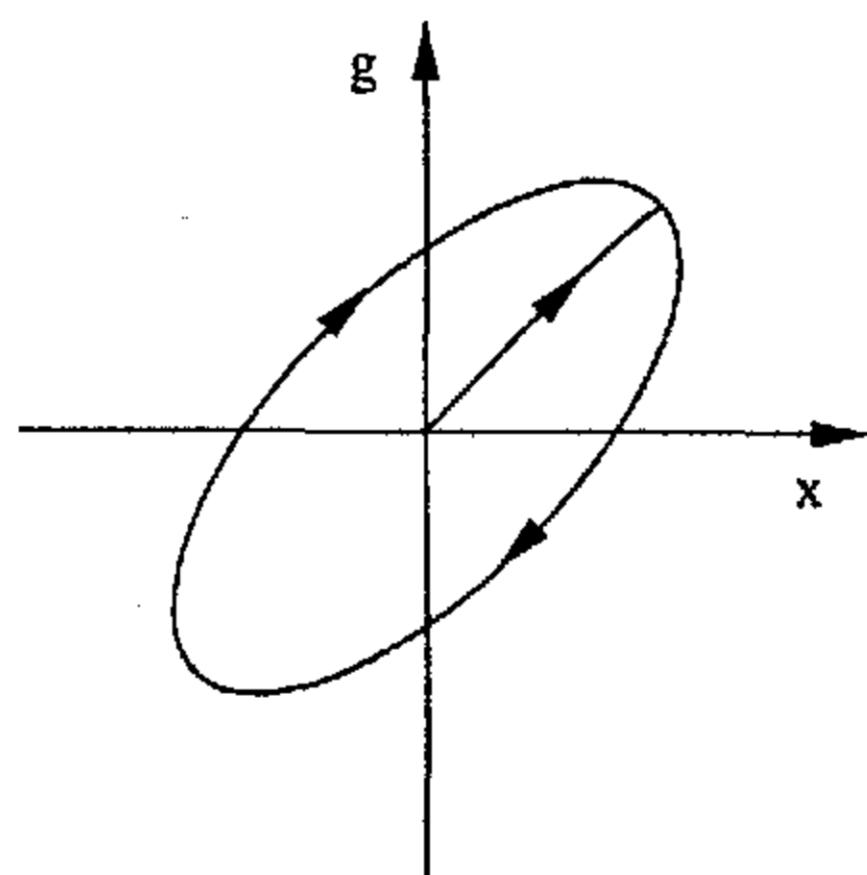


图 2-1 滞变恢复力曲线  
fig 2-1 hysteretic restoring force curve

滞变特性也称为弹塑性，是构件变形过程的一种特有的属性。大多数结构在强干扰作用下都将进入弹塑性变形状态，从而表现出这种滞变特性。

### 2.2 构件的滞变恢复力模型

滞迟系统是一个复杂的非线性系统。人们曾经提出多种描述滞迟恢复力的

模型，主要有双线性模型<sup>[27,28]</sup>、分布弹塑性元件模型<sup>[29]</sup>、Ramberg—Osgood 模型<sup>[30]</sup>、Bouc—Wen 的辅助微分方程模型<sup>[31,32,33]</sup>等。其中，双线性模型最简单，同时抓住了滞迟效应的本质，因而应用较多；Bouc—Wen 辅助微分方程模型变通性最大，可适当调节参数值使之描述各种滞迟特性，且便于和微分方程一起处理，因而越来越普遍地被采用。

构件的滞变恢复力模型是进行结构弹塑性抗震分析的基础。对于随机振动分析需采用微分方程描述。下面分别介绍两类在工程中广泛应用的滞变恢复力模型。

### 2.2.1 双线性模型<sup>[34]</sup>

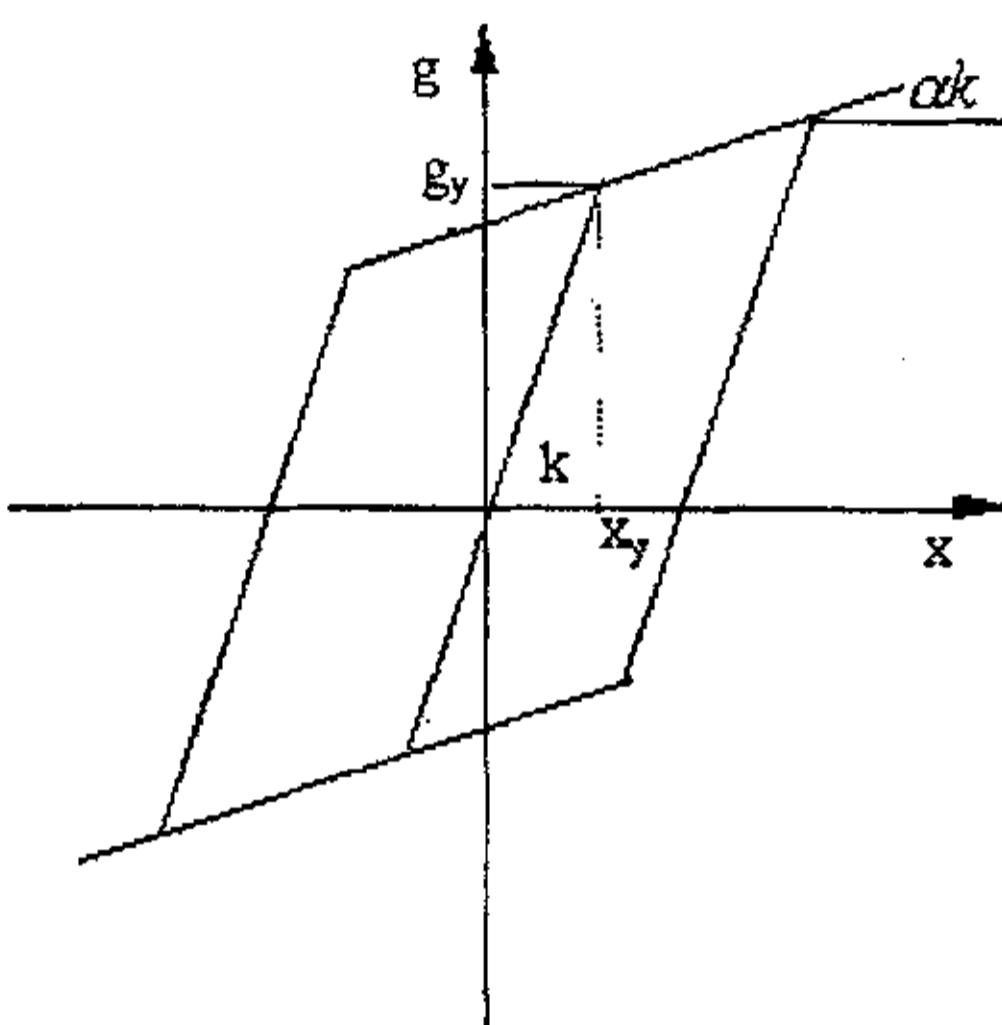


图 2-2 双线性模型

fig 2-2 bilinear model

双线性模型比较简单，它所描述的恢复力骨架曲线和滞回曲线如图 2-2 所示。图中  $g_y$  和  $x_y$  分别是屈服力和屈服位移。在构件未达到屈服时，往复加载的恢复力都按初始弹性刚度  $k$  变化；在构件达到屈服时，加载按第二刚度  $\alpha k$  变化，其中  $\alpha$  称为第二刚度系数，一般  $0 \leq \alpha \leq 1$ ；卸载按初始刚度  $k$  变化。特别地， $\alpha=0$  时，双线性模型变成理想弹塑性模型；当  $k=\infty$  时，第二刚度有限，则双线性模型变成刚塑性模型；当  $k=\infty$ ，第二刚度为零时，双线性模型变成理想刚塑性模型。

### 2.2.2 光滑模型

Bouc 于 1976 年首次提出滞变恢复力过程的微分方程模型，后经 Wen, Baber 等人推广，得到了能概括较大一类光滑恢复力特点的滞变微分方程。根据 Wen 等人提出的滞变微分方程模型，滞迟位移满足如下非线性微分方程<sup>[31]</sup>

$$\dot{z} = A\dot{x} - \beta|\dot{x}|^{n-1}z - \gamma|\dot{x}|^n \quad (2-1)$$

其中参数  $\gamma$  和  $\beta$  控制滞迟环的形状；  $A$  控制滞变位移的初始刚度；  $n$  决定从弹性区到塑性区过渡的光滑程度。适当选择参数，可给出具有不同能量耗散能力、渐软和渐硬的滞迟系统。

## 2.3 滞变恢复力的随机等效线性化

结构在强烈随机干扰下，如果结构构件具有滞变恢复力的特点，则结构的振动是非线性随机振动（或称滞变随机振动）。具有滞变恢复力特点的构件称为滞变构件（或元件、或元素），由滞变构件组成的结构体系称为滞变体系。由于滞变体系是非线性体系的一种特殊形式，在大多数情况下，分析滞变随机反应最实用、最有效的方法是随机等效线性化法。

在用随机等效线性化方法分析滞变体系的随机反应时，我们总是先将构件的滞变恢复力等价线性化，然后用等价线性构件组成等价线性结构体系，即用构件的等价线性恢复力去建立结构体系的等价线性运动方程，最后用线性随机反应的分析方法来分析等价线性结构体系的反应，并将其作为滞变体系随机振动的反应。

### 2.3.1 双线性恢复力模型的等价线性化<sup>[34]</sup>

这种模型的滞变恢复力过程可以表示为

$$g(X, \dot{X}) = \alpha kX + (1 - \alpha)kZ \quad (2-2)$$

式中滞变位移  $Z$  由以下非线性微分方程确定

$$\dot{Z} = \dot{X}[1 - \varepsilon(\dot{X})\varepsilon(Z - x_y) - \varepsilon(-\dot{X})\varepsilon(-Z - x_y)] \quad (2-3)$$

相应的等价线性微分方程可以表示为

$$\dot{Z} = c_x \dot{X} + c_z Z \quad (2-4)$$

式中  $c_x$  和  $c_z$  是待求的等价线性参数。

在这种滞变位移  $Z$  单独由非线性微分方程确定的情况下，我们可以只讨论这个非线性微分方程的等价线性化，而将滞变位移  $Z$  也看作体系的状态向量，它与  $X$  及其导数  $\dot{X}$  的统计矩和概率分布一起由等价线性体系的随机反应分析确定。这样，滞变体系的运动方程由两组微分方程描述，其一是含滞变位移的运动微分方程，其二是确定滞变位移的非线性微分方程或相应的等价线性化方程。

### 2.3.2 光滑型滞变恢复力模型的等价线性化<sup>[34]</sup>

光滑型滞变恢复力亦可以表示为

$$g(X, \dot{X}) = \alpha kX + (1 - \alpha)kZ$$

式中  $Z$  是滞变位移, 对于不同情况可以用不同的非线性微分方程或微分方程组描述。光滑型滞变恢复力的等价线性化主要是滞变位移微分方程或微分方程组的等价线性化。

这种模型的滞变位移  $Z$  的微分方程为

$$\dot{Z} = A\dot{X} - \beta|\dot{X}|^{n-1}Z - \gamma\dot{X}|Z|^n \quad (2-5)$$

将滞变位移  $Z$  视为体系的基本状态变量, 即视为已知的随机状态反应, 则式 (2-5) 的等价线性方程可以表示为

$$\dot{Z} = c_x \dot{X} + c_z Z$$

式中等价线性系数按下式求得:

$$c_x = E\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{X}}\right), \quad c_z = E\left(\frac{\partial H}{\partial Z}\right) \quad (2-6)$$

$H$  是式 (2-5) 右端的具体函数, 将 (2-5) 式代入上式, 得

$$c_x = E[A - \beta \operatorname{sgn}(\dot{X})|Z|^{n-1}Z - \gamma|Z|^n] \quad (2-7)$$

$$c_z = -E[n\beta|\dot{X}|Z|^{n-1} + n\gamma\dot{X}|Z|^{n-2}Z] \quad (2-8)$$

假定  $\dot{X}$  和  $Z$  的均值是零, 将  $\dot{X}$  和  $Z$  的联合正态概率密度代入上式求期望, 得

$$c_x = A - \beta B_1 - \gamma B_2, \quad c_z = -\beta B_3 - \gamma B_4 \quad (2-9)$$

式中

$$B_1 = \frac{\sigma_x^n}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}} (I_{s1} - I_{s2}) \quad (2-10)$$

$$B_2 = \frac{\sigma_x^n}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}} \quad (2-11)$$

$$B_3 = \frac{n\sigma_x\sigma_z^{n-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}} \left[ 2 \frac{(1 - \rho_{xz}^2)^{\frac{n+1}{2}}}{\pi} + \rho_{xz}(I_{s1} - I_{s2}) \right] \quad (2-12)$$

$$B_4 = n\rho_{xz}\sigma_x\sigma_z^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}} \quad (2-13)$$

其中  $\Gamma(\bullet)$  是 Gamma 函数

$$I_{s1} = \int_0^\theta \sin^n \varphi d\varphi, \quad I_{s2} = \int_0^\theta \sin^n \varphi d\varphi \quad (2-14)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1 - \rho_{xz}^2}}{\rho_{xz}} \right] \quad (2-15)$$

特别地，当  $n=1$  时

$$c_x = A - \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta \rho_{xz} + \gamma) \sigma_z \quad (2-16)$$

$$c_z = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\beta + \gamma \rho_{xz}) \sigma_x \quad (2-17)$$

## 2.4 等效线性化的实质与不足

鉴于滞变体系随机反应精确分析的困难，目前大型复杂结构的滞变随机反应分析不得不采用随机等效线性化的这种近似方法。这种方法的实质是在任一时刻  $t$  都计算一个等价线性刚度和阻尼，然后按线性随机振动的分析方法计算随机反应的统计矩。

随机等价线性化方法通常有误差，有时甚至是较大的误差，这是它的不足之一。其次，由于在任一时刻都是用等价线性体系替代滞变体系来确定反应的统计矩，未能反映滞变恢复力过程的一些本质，例如非线性振动的跳跃、分叉等现象。但是对于大部分工程分析而言，这种现象很少发生，也较少关注。

尽管等效线性化方法是一种误差难以准确估计的近似方法，但是，由于精确分析方法的困难，这种近似方法仍然被广泛认为是工程结构非线性随机反应分析的最具实用价值的方法。

### 3 虚拟激励法

#### 3.1 引言

近几十年来，随机振动作为一门新兴技术学科获得了广泛重视与巨大发展，其基本框架已经建立，尤其是线性系统的随机振动理论已很成熟。但是，已经建立的理论成果却在许多工程领域中并未获得充分应用。究其原因，现有方法的计算复杂性是造成这一现象的一道瓶颈。即使对于较简单的结构平稳随机响应分析，其计算工作量也令人难以接受。这种情况不但已经成为应用的严重障碍，而且对于工程应用中很重要的非平稳激振、多点异相位激振等理论发展也造成了障碍，迫切需要寻求解决的方法。

#### 3.2 虚拟激励法

虚拟激励法<sup>[6,7]</sup>是林家浩教授近年提出来的一套高效结构随机响应计算方法，该方法的主要思想是将平稳随机振动的计算转化为稳态简谐响应计算，将非平稳随机振动的计算转化为普通逐步积分计算，从而实现了用最基本的结构动力学方法来处理一般的线性平稳和非平稳随机响应分析问题，特别是在计算很多自由度结构的随机动力响应时，该方法具有简单、高效和精确等突出优点，有着广泛的工程应用前景。

##### 3.2.1 结构平稳随机响应的计算

结构受平稳随机激励的响应分析是线性随机振动理论中业也相当成熟的内  
容，尤其是其功率谱方法，即由给定的激励功率谱求解各种响应的功率谱，该  
方法有下列各表达式表达：

$$\begin{aligned} [S_{yy}] &= [H]^* [S_{xx}] [H]^T \\ [S_{yx}] &= [H]^* [S_{xy}] \\ [S_{xy}] &= [S_{xx}] [H]^T \end{aligned} \quad (3-1)$$

$[H]$ 为频率响应矩阵，上标\*代表求复共轭。这些公式形式非常简单，获得了广泛应用，是随机振动理论的核心成果。但当结构的自由度很高，特别是受到多点随机激励时，计算量巨大，难于为一般工程分析所接受；并且在非比例阻尼情况下，难于实现参振振型间的解耦，又使一大类工程问题难以获得妥善处理。而虚拟激励算法则为工程界提供了使用这些成果的高效手段。

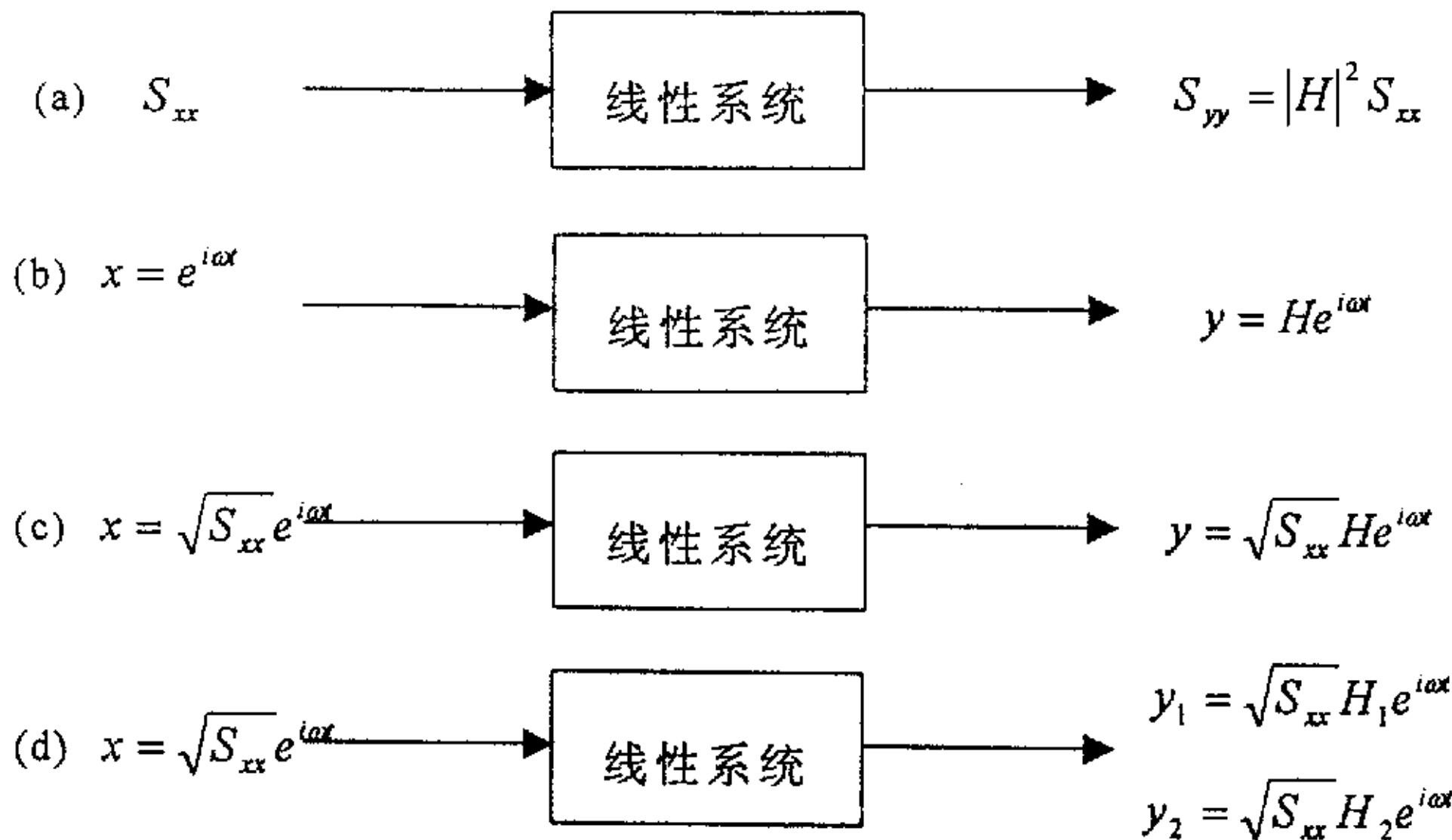


图 3-1 虚拟激励法的基本原理

fig 3-1 principle of Pseudo Excitation Method

### 3.2.2 单点激励或单源多点同相位激励

虚拟激励法的基本原理可用单点激励问题予以阐述，如图 3-1。若一个平稳随机激励作用于一个线性系统，其功率谱密度为  $S_{xx}(\omega)$ ，则任意响应量也为平稳随机过程，其功率谱密度为

$$S_{yy}(\omega) = |H|^2 S_{xx}(\omega) \quad (3-2)$$

如图 3-1 (a) 所示。这里， $H$  为频率响应函数，即当线性系统作用简谐激励  $e^{i\omega t}$  时，相应的响应为  $H \cdot e^{i\omega t}$ ，如图 3-1 (b) 所示。显然，当线性系统作用简谐激励  $\sqrt{S_{xx}(\omega)} e^{i\omega t}$  时，相应的响应为  $\sqrt{S_{xx}(\omega)} H \cdot e^{i\omega t}$ ，如图 3-1 (c) 所示。因此，有

$$\left. \begin{aligned} y^* y &= |y|^2 = |H|^2 S_{xx}(\omega) = S_{yy}(\omega) \\ x^* y &= \sqrt{S_{xx}(\omega)} e^{-i\omega t} \cdot \sqrt{S_{xx}(\omega)} H e^{i\omega t} = S_{xx}(\omega) H = S_{xy}(\omega) \\ y^* x &= \sqrt{S_{xx}(\omega)} H^* e^{-i\omega t} \cdot \sqrt{S_{xx}(\omega)} e^{i\omega t} = H^* S_{xx}(\omega) = S_{yx}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

如果在上述线性系统考虑两个响应量  $y_1, y_2$ ，如图 3-1 (d) 所示，则有

$$\left. \begin{aligned} y_1^* y_2 &= \sqrt{S_{xx}(\omega)} H_1^* e^{-i\omega t} \cdot \sqrt{S_{xx}(\omega)} H_2 e^{i\omega t} = H_1^* S_{xx}(\omega) H_2 = S_{y_1 y_2}(\omega) \\ y_2^* y_1 &= \sqrt{S_{xx}(\omega)} H_2^* e^{-i\omega t} \cdot \sqrt{S_{xx}(\omega)} H_1 e^{i\omega t} = H_2^* S_{xx}(\omega) H_1 = S_{y_2 y_1}(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

若线性时不变系统受单源多点同相位平稳随机激励，则可将外激励代之以虚拟激励  $\{x(t)\} = \{\alpha\} \sqrt{S_{xx}(\omega)} e^{i\omega t}$ ，其中  $S_{xx}(\omega)$  为激励的自谱密度， $\{\alpha\}$  为幅值向量；

并设  $\{y\}$  与  $\{z\}$  为由该虚拟激励激发的两种稳态简谐响应，则下列谱密度矩阵公式成立

$$\begin{aligned} [S_{yy}(\omega)] &= \{y\}^* \{y\}^T \\ [S_{yz}(\omega)] &= \{y\}^* \{z\}^T \\ [S_{zy}(\omega)] &= \{z\}^* \{y\}^T \end{aligned} \quad (3-5)$$

若将激励看作一类特殊的响应，则式 (3-5) 便具有式 (3-1) 的功能。

### 3.2.3 单源多点异相位激励

大跨度结构的地震响应分析应该考虑行波效应，反应谱方法和时程积分方法都很难解决这个问题，即使能够计算，计算量也是非常巨大。而应用随机振动理论处理这种问题是比较方便的，利用虚拟激励方法可以用很小的计算量得到理论上的精确解。

假设系统受单源多点异相位平稳随机激励为

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 f(t-t_1) \\ \alpha_2 f(t-t_2) \\ \vdots \\ \alpha_n f(t-t_n) \end{Bmatrix} \quad (3-6)$$

各输入量具有相同的函数形式，但存在不同的时间滞后。其中， $\alpha_j (j=1, 2, \dots, n)$  是实数； $t_j (j=1, 2, \dots, n)$  为滞后时间量。这种多相位随机激励问题可看作广义单激励问题。设  $f(t)$  的谱密度为  $\sqrt{S_f(\omega)}$ ，则可构造虚拟激励<sup>[8]</sup>

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 e^{-i\omega t_1} \\ \alpha_2 e^{-i\omega t_2} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{-i\omega t_n} \end{Bmatrix} \sqrt{S_f(\omega)} e^{i\omega t} \quad (3-7)$$

这时只要求出该确定性激励作用下系统的稳态响应  $\{y\}$ 、 $\{z\}$  等，就仍可按式 (3-5) 计算有关的功率谱密度矩阵。如将激励  $\{f(t)\}$  看作一类特殊的响应  $\{z\}$ ，则式 (3-5) 便具有了式 (3-1) 的功能。

### 3.2.4 一般多点任意相干激励

对于多点任意相干平稳随机激励问题，也可方便地用虚拟激励法处理。因

激励功率谱矩阵总是厄密特矩阵，故必可分解为<sup>[10]</sup>

$$[S_f(\omega)] = \sum_{j=1}^r \lambda_j \{\varphi_j\}^* \{\varphi_j\}^T \quad (3-8)$$

其中， $\lambda_j$ 与 $\{\varphi_j\}$ 为 $[S_f(\omega)]$ 的第 $j$ 阶非零特征值与相应规一化特征向量。 $r$ 为激励功率谱矩阵 $[S_f(\omega)]$ 的秩。于是可构造 $r$ 个独立的虚拟简谐激励

$$\{f(t)\}_j = \sqrt{\lambda_j} \{\varphi_j\} e^{i\omega t}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (3-9)$$

由 $\{f(t)\}_j$ 可求出任意的稳态响应量 $\{y\}_j$ 、 $\{z\}_j$ 等，则任意的响应功率谱矩阵为<sup>[10]</sup>

$$\left. \begin{aligned} [S_{yy}(\omega)] &= \sum_{j=1}^r \{y\}_j^* \{y\}_j^T \\ [S_{yz}(\omega)] &= \sum_{j=1}^r \{y\}_j^* \{z\}_j^T \\ [S_{zy}(\omega)] &= \sum_{j=1}^r \{z\}_j^* \{y\}_j^T \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

此时，相当于有 $r$ 个简谐干扰力。如果 $r=1$ ，式(3-10)就退化为式(3-5)，即化为广义单激励问题。

### 3.2.5 结构非平稳随机响应

非平稳随机过程有各种数学描述，目前在工程中最为广泛应用的是均匀调制演变随机过程

$$f(t) = g(t)x(t) \quad (3-11)$$

其中， $g(t)$ 是调制函数； $x(t)$ 为零均值平稳随机过程，其自谱密度 $S_{xx}(\omega)$ 给定。

线性时不变系统承受如式(3-11)的非平稳激励时，用虚拟激励法求解的基本原理可在单点激励的情况下予以说明，由激励(3-11)通过一个初始静止的线性时不变系统而产生的响应 $y(t)$ ，可由杜哈曼积分表示为

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (3-12)$$

这里 $h(t)$ 为该系统的脉冲响应函数。 $y(t)$ 的自相关函数为

$$\begin{aligned}
R_{yy}(t_1, t_2) &= E[y(t_1) \cdot y(t_2)] \\
&= E\left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) f(\tau_1) f(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2\right] \\
&= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) E[g(\tau_1) x(\tau_1) g(\tau_2) x(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \\
&= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) g(\tau_1) g(\tau_2) R_{xx}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned} \tag{3-13}$$

因  $x(t)$  是平稳随机过程，所以

$$R_{xx}(\tau_1, \tau_2) = R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \tag{3-14}$$

这里  $\tau = \tau_2 - \tau_1$ ，并已应用了维纳—辛欣关系。将式(3-14)代入式(3-13)，得

$$R_{yy}(\tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} I^*(\omega, t_1) I(\omega, t_2) S_{xx}(\omega) d\omega \tag{3-15}$$

其中

$$I(\omega, t) = \int_0^t h(t - \tau) g(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{3-16}$$

在式(3-15)中令  $t_1 = t_2 = t$ ，即得  $y(t)$  的方差

$$\sigma_y^2(t) = R_{yy}(t, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} I^*(\omega, t) I(\omega, t) S_{xx}(\omega) d\omega \tag{3-17}$$

式(3-17)的被积函数正是响应  $y(t)$  的时变功率谱密度

$$S_{yy}(\omega, t) = I^*(\omega, t) I(\omega, t) S_{xx}(\omega) \tag{3-18}$$

由式(3-16)可知， $I(\omega, t)$  是由激励  $g(t) e^{i\omega t}$  产生的响应（设响应量的初始位移、初始速度皆为零）。若构造虚拟激励

$$f(t) = \sqrt{S_{xx}(\omega)} g(t) e^{i\omega t} \tag{3-19}$$

则由该激励产生的响应为

$$y(\omega, t) = \sqrt{S_{xx}(\omega)} I(\omega, t) \tag{3-20}$$

显然

$$y^* y = I^*(\omega, t) I(\omega, t) S_{xx}(\omega) = S_{yy}(\omega, t) \tag{3-21}$$

即

$$S_{yy}(\omega, t) = y^* y = |y|^2 \tag{3-22}$$

由此可见，非平稳随机响应的时变功率谱密度  $S_{yy}(\omega, t)$  的计算可由确定性的动力分析完成<sup>[29]</sup>。若用逐步积分法求出系统的任意瞬态响应  $\{y(\omega, t)\}$ 、 $\{z(\omega, t)\}$  等，则相应的功率谱矩阵为<sup>[29, 32]</sup>

$$\left. \begin{aligned} [S_{yy}(\omega, t)] &= \{y(\omega, t)\}^* \{y(\omega, t)\}^T \\ [S_{yz}(\omega, t)] &= \{y(\omega, t)\}^* \{z(\omega, t)\}^T \\ [S_{zy}(\omega, t)] &= \{z(\omega, t)\}^* \{y(\omega, t)\}^T \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

比较式(3-5)和式(3-23)可以看到这里的非平稳虚拟激励法是前面平稳情况的推广。当激励是平稳时，只需要求运动方程的稳态解；而对于非平稳激励，则需要求运动方程的瞬态解。

当系统受非平稳单源多点异相位随机激励时，系统所受的外激励可表示为

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} g(t-t_1)x(t-t_1) \\ g(t-t_2)x(t-t_2) \\ \vdots \\ g(t-t_n)x(t-t_n) \end{Bmatrix} \quad (3-24)$$

这是一广义单激励问题，可构造虚拟激励<sup>[8]</sup>

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} g(t-t_1)e^{-i\omega t_1} \\ g(t-t_2)e^{-i\omega t_2} \\ \vdots \\ g(t-t_n)e^{-i\omega t_n} \end{Bmatrix} \sqrt{S_f(\omega)} e^{i\omega t} \quad (3-25)$$

在该确定性激励下，不难求出系统任意瞬态响应  $\{y(\omega, t)\}$ 、 $\{z(\omega, t)\}$  等，并按式(3-23)计算相应的时变功率谱矩阵。

对于线性时不变系统受任意相干非平稳随机激励的问题，可将激励功率谱矩阵按式(3-8)分解，从而将外载分解成若干相互独立的广义单激励。分别求出各有关瞬态响应向量后，就可叠加得到各种功率谱矩阵

$$\left. \begin{aligned} [S_{yy}(\omega, t)] &= \sum_{j=1}^r \{y(\omega, t)\}_j^* \{y(\omega, t)\}_j^T \\ [S_{yz}(\omega, t)] &= \sum_{j=1}^r \{y(\omega, t)\}_j^* \{z(\omega, t)\}_j^T \\ [S_{zy}(\omega, t)] &= \sum_{j=1}^r \{z(\omega, t)\}_j^* \{y(\omega, t)\}_j^T \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

### 3.3 虚拟激励法的特点

以结构受平稳随机地震激励为例，若将地震激励看作单源同相位激励，此时结构的运动方程为

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = -[M]\{E\}\ddot{x}_g \quad (3-27)$$

其中， $\{E\}$ 为惯性指示向量； $\ddot{x}_g$ 为地面加速度，其功率谱密度  $S_{\ddot{x}_g}(\omega)$  已知。对于自由度很多的工程结构，可先用振型叠加法进行降阶处理，再用虚拟激励法求出结构响应  $\{y\}$  的功率谱矩阵为

$$\left. \begin{aligned} [S_{yy}(\omega)] &= \{y\}^* \{y\}^T \\ \{y\} &= \sum_{j=1}^q \gamma_j H_j(\omega) \{\varphi\}_j \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (3-28)$$

这里， $\{\varphi\}_j$ 、 $\gamma_j$ 、 $H_j$  分别为第  $j$  阶振型向量及相应的振型参与系数与频响函数。

传统的 CQC (Complete Quadratic Combination) 算法为<sup>[14]</sup>

$$[S_{yy}(\omega)] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \gamma_i \gamma_j H_i^*(\omega) H_j(\omega) \{\varphi\}_i^* \{\varphi\}_j^T S_{\ddot{x}_g}(\omega) \quad (3-29)$$

这是平稳随机响应理论上的精确解。事实上，将式 (3-28) 展开就可得到式 (3-29)，两式计算步骤不同，但在数学上是等价的。故用虚拟激励法求出的结构的响应功率谱矩阵也是理论上的精确解。

由于 CQC 算法式 (3-29) 的计算量很大，当结构的参振频率分布稀疏且各阶阻尼比很小时，许多文献都推荐将式 (3-29) 的交叉项近似忽略，得到

$$[S_{yy}(\omega)] = \sum_{j=1}^q \gamma_j^2 \{\varphi\}_j^* \{\varphi\}_j^T |H_j(\omega)|^2 S_{\ddot{x}_g}(\omega) \quad (3-30)$$

这一算法称为 SRSS (Square Root of the Sum of Squares)。

如果令

$$\{z\}_j = \gamma_j H_j(\omega) \{\varphi\}_j \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} \quad (3-31)$$

则 PEM、CQC 和 SRSS 三种算法可表示为

$$\text{PEM 算法 } [S_{yy}(\omega)] = \left( \sum_{j=1}^q \{z\}_j \right)^* \left( \sum_{j=1}^q \{z\}_j \right)^T \quad (3-32)$$

$$\text{传统 CQC 算法 } [S_{yy}(\omega)] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \{z\}_i^* \{z\}_j^T \quad (3-33)$$

$$\text{SRSS 算法 } [S_{yy}(\omega)] = \sum_{j=1}^q \{z\}_i^* \{z\}_j^T \quad (3-34)$$

从式 (3-32)、(3-33) 与 (3-34) 可以看出, 三种算法在计算响应功率谱矩阵时, 分别要计算 1 次、 $q^2$  次和  $q$  次  $n$  维向量相乘。地震工程中一般参振振型系数  $q = 10 \sim 30$ , 在航天工程中  $q$  可达  $10^2 \sim 10^3$ 。可见三种算法计算量上的差别是巨大的。PEM 算法和传统 CQC 算法的计算结果完全相同, 都为理论上的精确解, 计算效率却相差两个数量级以上; 而 SRSS 算法的假定条件在实际工程结构中一般很难满足, 计算结果不准确, 计算量却比 PEM 算法大许多。可见虚拟激励法是一个高效的精确算法, 它自动计及了参振振型间的耦合项, 不存在相应的 SRSS 公式, 有时也称虚拟激励法为快速 CQC 算法<sup>[10]</sup>。以上是用平稳随机激励问题为例来说明, 对非平稳随机激励问题也是类似的。

### 3.4 随机振动响应的最大反应估计

在参振振型频段内对一系列频率计算出自谱  $S_{yy}$  之后, 就可以按下式计算  $y$  的第  $i$  阶谱矩

$$\lambda_i = 2 \int \omega^i S_{yy}(\omega) d\omega \quad (3-35)$$

工程师一般难以直接利用这些谱矩进行设计。根据随机极值理论可以得到极值响应的分布, 并求得极值响应的均值和方差。根据不同的假定, 有不同的估算最大反应的方法<sup>[35-37]</sup>。

#### 3.4.1 Davenport 方法

假定地震激励是零均值平稳随机正态分布过程, 结构的任意线性响应  $y(t)$  也是零均值平稳正态随机过程。记  $y_e$  为其极值,  $\sigma_y$  为其标准差, 定义无量纲参数

$$\eta = y_e / \sigma_y \quad (3-36)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-37)$$

根据水平跨越次数是 Poisson 过程的假定, Davenport 求得极值的概率分布为

$$P(\eta) = \exp[-\nu T \exp(-\eta^2/2)] \quad \eta > 0 \quad (3-38)$$

极值的期望值近似地为

$$E(\eta) = (2 \ln \nu T)^{1/2} + \frac{\gamma}{(2 \ln \nu T)^{1/2}} \quad (3-39)$$

而标准差为

$$\sigma_\eta \approx \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{(2 \ln \nu T)^{1/2}} \quad (3-40)$$

式中，T 为地震持续时间， $\gamma=0.5772$  为欧拉常数

### 3.4.2 Vanmarcke 方法

对于零均值平稳随机过程  $y(t)$ ，Vanmarcke[1990]基于穿越次数计数过程为 Markov 过程的假定，求得极值的概率分布为

$$P(\eta) = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \right] \cdot \exp\left[-\nu_0 T \frac{1 - \exp(-\sqrt{\pi/2}q^{1/2}\eta)}{\exp(\eta^2/2) - 1}\right] \quad (3-41)$$

其中

$$\nu_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right)^{1/2} \quad (3-42)$$

$$\lambda_i = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^i S_y(\omega) d\omega \quad (3-43)$$

$$q = (1 - \lambda_1^2 / (\lambda_0 \lambda_2))^{1/2} \quad (3-44)$$

$\nu_0$  为平均越零率， $q$  为带宽参数，介于 0 和 1 之间。对于窄带过程， $q$  接近于 0；对于宽带过程， $q$  接近于 1。根据 (3-41) 式给出的概率分布函数，Kiureghian 给出了最大峰值的期望值表达式

$$E(\eta) = (2 \ln \nu_e T)^{1/2} + \frac{\gamma}{(2 \ln \nu_e T)^{1/2}} \quad (3-45)$$

$$\begin{cases} \sigma_\eta = \frac{1.2}{(2 \ln \nu_e T)^{1/2}} - \frac{5.4}{13 + (2 \ln \nu_e T)^{3/2}} & \nu_e T > 2.1 \\ \sigma_\eta = 0.65 & \nu_e T \leq 2.1 \end{cases} \quad (3-46)$$

其中

$$\begin{cases} \nu_e = (1.63q^{0.45} - 0.38)\nu_0 & q < 0.69 \\ \nu_e = \nu_0 & q \geq 0.69 \end{cases} \quad (3-47)$$

T 为地震持续时间。

### 3.5 小结

随机振动方法被广泛认为是处理大跨度结构抗震分析的有力手段。而虚拟激励方法用计算力学的手段突破了随机振动方法计算效率低的瓶颈，使随机振动方法应用于工程中大跨度结构地震响应分析成为可能。

## 4 时程积分及数值模拟

### 4.1 引言

工程结构在突加荷载或冲击荷载作用下，往往要做瞬态响应分析，这时可采用逐步积分法进行求解。逐步积分法已有了多年的研究，一般分为显式积分和隐式积分两类。显式积分在每一时间步上效率较高，但为保证积分稳定性时间步长必须取得很小。隐式积分则可通过恰当的选择参数，保证积分数值的稳定性，故积分步长可选取得大一些。常用的 Newmark 及 Wilson-θ 法都是隐式积分格式。在采用隐式积分求解时为能正确地反映高频振动分量，积分步长也不宜取得过大。又如将其用于一个保守体系，则算法所产生的阻尼会使体系的总能量不能保持守恒。

钟万勰近年来提出了精细逐步积分法<sup>[38,39]</sup>。该法是一种显式无条件稳定的积分格式，其积分步长不受结构自振特性的限制，只要在积分步长内外载是线性变化的，就总能得到计算机精度解答。文献[40]进一步推广了上述精细积分算法，对于外载按简谐规律和不规则变化的情况，仍可用较大的积分步长得到精确或相当精确的计算结果。

### 4.2 多点输入时程积分

当结构受平稳随机地震激励时，若将地震激励看作单源同相位激励，此时结构的动力方程为：

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = -[M]\{E\}\ddot{x}_g \quad (4-1)$$

其中  $\{E\}$  为结构非支座节点惯性力指示向量； $\ddot{x}_g$  为地面加速度。如果给定了地震加速度  $\ddot{x}_g$  的时程曲线，就可以运用时程积分方法对式(4-1)进行求解。

如果考虑多点(N个地面节点)不均匀地震激励问题，运动方程(4-1)成为下列形式

$$\begin{bmatrix} M_s & M_{sb} \\ M_{sb}^T & M_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_s \\ \ddot{X}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & C_{sb} \\ C_{sb}^T & C_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_s \\ \dot{X}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & K_{sb} \\ K_{sb}^T & K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_s \\ X_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_b \end{Bmatrix} \quad (4-2)$$

其中向量  $\{X_b\}$  代表 N 个支座的地面强迫位移， $\{X_s\}$  代表结构系统所有非支座节

点位移， $\{P_b\}$ 代表地面作用于N个支座的力；通常采用集中质量离散化模型， $[M_{sb}]$ 为零。

求解方程(4-2)时，可将绝对位移 $\{X_s\}$ 分解为拟静位移 $\{Y_s\}$ 和动态相对位移 $\{Y_r\}$ 之和

$$\begin{Bmatrix} X_s \\ X_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_s \\ X_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Y_r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-3)$$

其中拟静位移满足

$$\{Y_s\} = -[K_s]^{-1}[K_{sb}]\{X_b\} \quad (4-4)$$

将式(4-3)和(4-4)代入(4-2)，得到

$$\begin{aligned} [M_s]\{\ddot{Y}_r\} + [C_s]\{\dot{Y}_r\} + [K_s]\{Y_r\} &= [M_s][K_s]^{-1}[K_{sb}]\{\ddot{X}_b\} \\ &\quad + ([C_s][K_s]^{-1}[K_{sb}] - [C_{sb}])\{\dot{X}_b\} \end{aligned} \quad (4-5)$$

方程(4-5)在一致地面运动条件下不能退化为广泛应用的方程(4-1)，这是因为在方程(4-2)中假定了阻尼力与绝对速度成正比。为了避免这种不协调，应假定阻尼力与相对速度成正比，即在(4-2)式中以 $\{\dot{Y}_r\}$ 与 $\{0\}$ 代替 $\{\dot{X}_s\}$ 与 $\{\dot{X}_b\}$ ，则(4-5)式成为

$$[M_s]\{\ddot{Y}_r\} + [C_s]\{\dot{Y}_r\} + [K_s]\{Y_r\} = [M_s][K_s]^{-1}[K_{sb}]\{\ddot{X}_b\} \quad (4-6)$$

对于均匀地面运动

$$\{\ddot{X}_b\} = \{E_b\}\ddot{x}_g \quad (4-7)$$

将式(4-7)代入式(4-6)，并利用(4-4)式，就可导出方程(4-1)。

当需要考虑行波效应时，可以利用同一个地面运动加速度记录曲线在地面不同节点处以一定的时间差输入，由此而产生(4-4)式右端的 $\{\ddot{X}_b\}$ 。如果要进一步考虑各地面节点加速度之间的部分相干性，则产生 $\{\ddot{X}_b\}$ 的过程较为复杂，而这类实测资料亦相当缺乏。

### 4.3 精细积分法的基本思想<sup>[38, 39]</sup>

#### 4.3.1 精细积分的通用格式

参考结构地震作用下的运动方程(4-1)结合等式 $\{\dot{y}\}=\{\ddot{y}\}$ , 可导入状态空间, 此时运动方程为

$$\{\ddot{v}\}=[H]\{v\}+\{r\} \quad (4-8)$$

其中

$$[H]=\begin{bmatrix} 0 & I \\ B & D \end{bmatrix} \quad \{v\}=\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad \{r\}=\begin{bmatrix} 0 \\ [M]^{-1}\{f(t)\} \end{bmatrix}$$

$$[B]=-[M]^{-1}[K] \quad [D]=-[M]^{-1}[G]$$

方程(4-8)的齐次解为

$$\{v_h(t)\}=[T(\tau)]\{C\} \quad (4-9)$$

其中

$$[T(\tau)]=\exp([H]\times\tau) \quad (4-10)$$

在积分步长 $t\in[t_k, t_{k+1}]$ 内,  $\tau=t-t_k$ 。当 $\tau=0$ , 即 $t=t_k$ 时,  $[T(\tau)]=I$ , 由此可确定积分常量 $\{C\}$ 。设方程(4-8)的特解为 $\{v_p(t)\}$ , 则方程(3-2)通解为

$$\{v(t)\}=[T(\tau)](\{v(t_k)\}-\{v_p(t_k)\})+\{v_p(t)\} \quad (4-11)$$

将积分步长 $\tau$ 细分为 $m=2^N$ 等份, 即

$$\Delta t=\tau/m=2^{-N}\tau \quad (4-12)$$

一般取 $N=20$ 已经足够, 此时 $\Delta t\approx 10^{-6}\tau$ 。 $\Delta t$ 一般远小于系统的最小自振周期。将式(4-12)代入式(4-10)得

$$\begin{aligned} [T(\tau)] &= [\exp([H]\times\Delta t)]^m \\ &\approx (I+([H]\times\Delta t)+([H]\times\Delta t)^2/2!+([H]\times\Delta t)^3/3!+([H]\times\Delta t)^4/4!)^m \\ &= (I+[T_{a0}])^m \end{aligned} \quad (4-13)$$

令

$$(I+[T_{ai}])=(I+[T_{a,i-1}])^2=(I+2\times[T_{a,i-1}]+[T_{a,i-1}]\times[T_{a,i-1}]) \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

则

$$\begin{aligned} (I+[T_{aN}]) &= (I+[T_{a,N-1}])^2 = (I+[T_{a,N-2}])^4 \\ &= \dots = (I+[T_{a0}])^m = [T(\tau)] \end{aligned} \quad (4-14)$$

在计算 $[T_{aN}]$ 时, 采用了下列递推式进行计算, 以避免因 $I+[T_{ai}]$ 的尾数太小而造

成的有效位数严重丧失。

$$[T_{\alpha t}] = 2 \times [T_{\alpha, t-1}] + [T_{\alpha, t-1}] \times [T_{\alpha, t-1}] \quad (4-15)$$

上面推导中唯一引入的近似是在式(4-14)中泰勒展开中略去了 $\Delta t^5$ 及更高阶的项，其量级约为 $10^{-30}$ 以上，这已经是一般计算机算精度表达的舍入误差之外。故按上述方法计算的指数矩阵 $[T(\tau)]$ 是高度精确的，在计算机精度范围内可以认为是精确的。

#### 4.3.2 常用的精细积分格式

HPD-L 格式：

假定每一积分步长 $t \in (t_k, t_{k+1})$ 内荷载线性变化的，即

$$\{r\} = \{r_0\} + \{r_1\} \times (t - t_0) \quad (4-16)$$

其中 $\{r_0\}$ 与 $\{r_1\}$ 是时不变向量，则方程(4-8)的特解为

$$\{v_p(t)\} = ([H]^{-1} + [I] \times t)(-[H]^{-1}\{r_1\}) - [H]^{-1}(\{r_0\} - \{r_1\} \times t_k) \quad (4-17)$$

将式(4-17)代入式(4-11)即得精细积分的 HPD—L 格式

$$\begin{aligned} \{v(t_{k+1})\} = & [T(\tau)] \times \{\{v(t_k)\}\} + [H]^{-1}(\{r_0\} + [H]^{-1}\{r_1\}) \\ & - [H]^{-1}(\{r_0\} + [H]^{-1}\{r_1\} + \{r_1\} \times \tau) \end{aligned} \quad (4-18)$$

其中，积分步长 $\tau = t_{k+1} - t_k$ 。若在每一积分步内荷载严格按式(4-16)线性变化，则式(4-18)总能给出计算机上的精确解答。

HPD-S 格式：

为便于精细积分在非平稳随机振动中的应用，文[40]将荷载推广为简谐荷载的形式。假定每一积分步长 $t \in (t_k, t_{k+1})$ 内荷载线性变化的，即

$$\{r(t)\} = \{r_1\} \sin \omega t + \{r_2\} \cos \omega t \quad (4-19)$$

其中 $\{r_1\}$ 与 $\{r_2\}$ 是时不变向量，在该荷载作用下，可得方程(4-8)的特解为

$$\{v_p(t)\} = \{A\} \sin \omega t + \{B\} \cos \omega t \quad (4-20)$$

式中

$$\begin{aligned}\{A\} &= (\omega[I] + [H]^2/\omega)^{-1}(\{r_2\} - [H]\{r_1\}/\omega) \\ \{B\} &= (\omega[I] + [H]^2/\omega)^{-1}(-\{r_1\} - [H]\{r_2\}/\omega)\end{aligned}$$

将式(4-20)代入式(4-11)即得精细积分的HPD-S格式

$$\begin{aligned}\{v_p(t_{k+1})\} &= [T(\tau)]\{\{v(t_k)\} - \{A\}\sin\omega t_k - \{B\}\cos\omega t_k\} \\ &\quad + \{A\}\sin\omega t_{k+1} + \{B\}\cos\omega t_{k+1}\end{aligned}\quad (4-21)$$

其中积分步长  $\tau = t_{k+1} - t_k$ 。若在每一积分步内荷载严格按式(4-19)简谐变化，则即使采用较大的积分步长式(4-21)也能给出计算机上精确的数值结果。

#### 4.4 数值模拟—Monte Carlo方法

Monte Carlo方法也称为随机模拟(Random Simulation)方法，有时也称作随机抽样(Random Sampling)技术或统计实验(Statistical Testing)方法。它的基本思想是概率论中基于大数法则的逼近原理，在求解数学、物理、工程技术以及生产管理等方面的问题时，首先建立一个概率模型或随机过程，使它的参数等于问题的解，然后通过对模型或过程的观察或抽样试验来计算所求参数的统计特征，最后给出所求解的近似值，而解的精确度可用估计值的标准误差来表示。

在随机振动中，是利用计算机进行随机振动数值试验的一类方法，系统响应的统计特性可以从大量响应样本中近似获得。

利用数值模拟法来进行随机响应分析，主要包括以下三个步骤：

- 1, 激励过程或场的统计特性产生激励样本；
- 2, 对每个激励样本，数值地求解微分运动方程，产生响应样本；
- 3, 从大量响应样本中获取所需要的响应统计量。

##### 一维平稳随机过程的Monte Carlo数值模拟

均值为零，谱密度函数  $S_0(\omega)$  的一维单变量平稳的高斯随机过程  $f_0(x)$  可表示为余弦函数的级数

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_k t - \varphi_k) \quad (4-22)$$

其中， $\varphi_k$  为 0 到  $2\pi$  之间的随机相角，

$$A_k = [S_0^0(\omega_k) \Delta\omega]^{1/2} \quad (4-23)$$

如果  $S_0(\omega)$  是单边谱密度，则

$$S_1^0(\omega) = S_0(\omega) \quad (4-24)$$

如果  $S_0(\omega)$  是双边谱密度，则

$$S_1^0(\omega) = 2S_0(\omega) \quad (4-25)$$

而

$$\Delta\omega = (\omega_u - \omega_l)/N \quad (4-26)$$

$$\omega_k = \omega_l + (k - \frac{1}{2})\Delta\omega, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4-27)$$

$\omega_l$  和  $\omega_u$  为截止频率下限和上限。

## 4.5 小结

在利用时程分析进行结构的地震响应分析时，只选取一条地震波是无法说明问题的。我国在这方面还没有明确的规定，工程中一般取三条实测地震波和一条人工地震波。时程分析方法在进行非线性地震响应分析时，具有它的优越性，但是时程分析方法太费时间，因此工程中一般很少应用时程分析方法，除非是特别重要的结构或者利用其他方法无法解决时才用。

## 5 用虚拟激励法求解受平稳随机激励的剪切型非线性滞后系统

### 5.1 引言

许多工程结构在严重载荷的作用下（如强地震引起的地面运动），由于材料的屈服，内摩擦或者构件接合面间的摩擦等原因，往往呈现出滞后特性。滞后系统的恢复力是一个多值函数，不仅取决于系统的瞬时位移，而且取决于系统响应的历史。滞后效应主要表现为刚度的减小与能量耗散能力的增加。

许多方法曾被用来解决滞后系统的随机响应问题，如等效线性化法<sup>[31]</sup>、FPK 方程法<sup>[32]</sup>、累积量截断法<sup>[41]</sup>、高斯截断法<sup>[42]</sup>、能量包线随机平均法<sup>[43]</sup>及标准随机平均法<sup>[44]</sup>等。但这些方法多局限于自由度很少的系统，很难推广到较多自由度的系统中。比较简单且易于应用到多自由度系统中的方法是等效线性化法。Caughey 最早用基于克雷洛夫—博戈留波夫假设的等效线性化法研究了滞后系统<sup>[2]</sup>。但该方法要求假设滞后系统的响应是窄带随机过程，滞后能耗很小，而这种情形只发生在结构屈服后刚度与屈服前刚度相差不大，随机激励的强度使得系统很少发生屈服或完全屈服的情况下。在工程实际的许多情形下，响应是一种宽带随机过程。Wen 用 FPK—Galerkin 法对滞后系统作了研究之后，对光滑滞后系统模型，即 Bouc—Wen 辅助微分方程模型，给出了更简捷实用的等效线性化方法<sup>[31]</sup>。该方法将非线性微分方程直接线性化为一组闭合的、可迭代求解的线性化方程组，而没有借助于克雷洛夫—博戈留波夫假设。不局限于只求解响应是窄带随机过程的非线性滞后系统，因而，大大地拓宽了等效线性化法的应用范围。Wen 用此方法求解了单自由度滞后系统的平稳与非平稳响应，后来与他的合作者一起又将此方法推广到了多自由度系统<sup>[45]</sup>、强度与刚度退化<sup>[46,47]</sup>及二维地震地面运动激励<sup>[48]</sup>等情形。但滞后系统经等效线性化后的单自由度或多自由度线性系统，总要归结为求解李亚普诺夫微分方程。若该系统受多点激励或自由度数较多时，计算量将急剧增加，计算过程也变得更为复杂。

本文仍用虚拟激励法求解此类等效线性化问题。求解过程简便，且不受自由度数与激励的影响。特别是当结构自由度数较多时，其计算效率是很高的。

### 5.2 光滑滞后系统的等效线性化

滞后系统的恢复力可表示为：

$$q(y, \dot{y}, t) = g(y, \dot{y}) + cz(t) \quad (5-1)$$

式中  $g$  为非滞迟分量，它是瞬时位移与速度的函数；  $cz(t)$  为滞迟分量，是  $y$  与  $z$  的时间历程函数，满足如下非线性微分方程：

$$\dot{z} = \frac{1}{\eta} [A\dot{y} - \nu(\gamma|\dot{y}|z|z|^{n-1} - \beta\dot{y}|z|^n)] \quad (5-2)$$

其中参数  $\gamma$  与  $\beta$  控制滞迟回线的形状；  $A$ 、 $\nu$  与  $\eta$  支配滞迟的强度与刚度；  $n$  决定从弹性区到塑性区过渡的光滑性，适当选取这些参数，可给出具有各种能量耗散能力、渐软与渐硬的滞迟系统。当 (5-2) 式中  $n=\eta=\nu=1$  时，近于理想弹塑性系统的滞迟位移微分方程可写为：

$$\dot{z} = A\dot{y} - \gamma|\dot{y}|z - \beta\dot{y}|z| \quad (5-3)$$

其等效线性方程为

$$\dot{z} + p\dot{y} + hz = 0 \quad (5-4)$$

等效参数

$$\left. \begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \left[ \gamma \frac{E[\dot{y}z]}{\sigma_s} + \beta \sigma_z \right] - A} \\ h &= \sqrt{\frac{2}{\pi} \left[ \gamma \sigma_y + \beta \frac{E[\dot{y}z]}{\sigma_z} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (5-5)$$

文献[31]给出了  $n \neq 1$  时  $p$  和  $h$  的表达式。

### 5.3 滞迟系统等价线性化后运动方程的建立及平稳随机振动分析

对于含有 WEN 模型非线性构件的滞迟系统<sup>[31,32]</sup>，当构件的滞迟位移微分方程 (5-3) 中  $n=1$  时，其等价线性方程已在上节给出。记  $\{g'\} = [K^h]\{z\} - \{x\}$ ，可得到滞迟系统等价线性化的运动方程

$$\left. \begin{aligned} [M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + [K^h]\{z\} - \{x\} &= -[M]\{E\}\ddot{x}_s \\ \{\dot{z}\} + [P]\{\dot{x}\} + [H]\{z\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-6)$$

方程 (5-6) 的具体推导过程可参看附录。其中， $[K^h]$ 、 $[P]$  和  $[H]$  为  $n \times n$  阶为塑

性刚度矩阵及等效系数矩阵，其具体形式可参看文献[49]。 $\{z\}$ 为滞变位移向量，地面加速度 $\ddot{x}_g$ 的功率谱密度为 $S$ 。

构造虚拟激励 $\ddot{x}_g = \sqrt{S}e^{i\omega t}$ ，代入(5-6)式

$$\left. \begin{aligned} [M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + [K^h]\{z\} - \{x\} &= -[M]\{E\}\sqrt{S}e^{i\omega t} \\ \{\ddot{z}\} + [P]\{\dot{x}\} + [H]\{z\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5-7)$$

则满足该谐振方程组的解具有如下形式

$$\left. \begin{aligned} \{x\} &= \{a\}e^{i\omega t} \\ \{z\} &= \{b\}e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (5-8)$$

将(5-8)式代入式(5-7)，可得

$$\left. \begin{aligned} (-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K] - [K^h] - i\omega[K^h](i\omega[I] + [H])^{-1}[P])\{a\} &= -[M]\{E\}\sqrt{S} \\ \{b\} &= -i\omega(i\omega[I] + [H])^{-1}[P]\{a\} \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

用初始模态对式(5-9)的第一个方程进行降阶，令

$$\{a\} = [\Phi]\{u\} \quad (5-10)$$

将式(5-10)代入式(5-9)得

$$(-\omega^2[I] + i\omega[C^*] + [\Omega^2] - [\Phi]^T[K^h](I) + i\omega(i\omega[I] + [H])^{-1}[P])[\Phi]\{u\} = -\{\gamma\}\sqrt{S} \quad (24)$$

其中， $\{\gamma\} = [\Phi]^T[M]\{E\}$ 。不难得到该方程的解 $\{u\}$ ，进一步由式(5-10)及式(5-9)的第二个方程求得 $\{a\}$ 和 $\{b\}$ ，由此得到式(5-7)的稳态解。

式(5-10)中的虚拟位移向量对时间求一阶导数，即得虚拟速度向量，并由虚拟激励原理计算有关响应量的功率谱矩阵

$$\left. \begin{aligned} [S_{\dot{x}\dot{x}}] &= \{\dot{x}\}^* \{\dot{x}\}^T \\ [S_{zz}] &= \{z\}^* \{z\}^T \\ [S_{\dot{x}z}] &= \{\dot{x}\}^* \{z\}^T \end{aligned} \right\} \quad (5-11)$$

进而由下式计算响应方差和协方差矩阵

$$\left. \begin{aligned} [E[\dot{x}\dot{x}]] &= \int_0^\infty [S_{\dot{x}\dot{x}}] d\omega \\ [E[zz]] &= \int_0^\infty [S_{zz}] d\omega \\ [E[\dot{x}z]] &= \int_0^\infty [S_{\dot{x}z}] d\omega \end{aligned} \right\} \quad (5-12)$$

至此可利用式(5-5)计算构件的等效系数，并最终生成等价系数矩阵 $[P]$ 和 $[H]$ 。由此可见看到，式(5-7)-式(5-12)构成了闭合迭代格式，故可循环求解直到等价系数矩阵 $[P]$ 、 $[H]$ 收敛。在得到原滞迟系统的等价线性系统之后，按上述方法再进行一次重分析，在求得虚拟响应之后，可以按下式计算某一响应的自功率谱密度

$$S_{xx} = |x|^2 \quad (5-13)$$

对一系列频点计算出自谱 $S_{xx}$ 后，可计算 $x$ 的第*i*阶谱矩

$$m_i = 2 \int_0^\infty \omega^i S_{xx}(\omega) d\omega \quad (5-14)$$

由此可计算极值响应的均值及方差。

## 5.4 精细时程分析

工程实际结构通常含有很高的自由度，故需用模态进行降阶处理，对于结构弹塑性抗震分析运动方程的一般形式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + \{g'\} = -[M]\{E\}\ddot{x}_g \quad (5-15)$$

若

$$\left. \begin{aligned} [K][\Phi] &= [M][\Phi][\Omega^2] \\ [\Phi]^T[M][\Phi] &= [I] \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

其中， $[\Phi]$ 为 $n \times q$ 阶质量规一模态矩阵。可令方程(5-15)的解按这些模态进行分解

$$\{x\} = [\Phi]\{u\} \quad (5-17)$$

将 $[\Phi]^T$ 左乘以方程(5-15)的各项，并以(5-17)式代入，得

$$\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [\Omega^2]\{u\} + [\Phi]^T\{g'\} = -[\Phi]^T[M]\{E\}\ddot{x}_g \quad (5-18)$$

引入状态变量，可得运动方程(5-18)在状态空间下一般形式为

$$\{\dot{v}\} = [H]\{v\} + \{f\} \quad (5-19)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \{v\} = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -[\Omega^2] & -[C^*] \end{bmatrix}, \quad \{f\} = \{r\} + \{s\} \\ \{r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -[\Phi]^T [M]\{E\}\ddot{x}_g \end{Bmatrix}, \quad \{s\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -[\Phi]^T \{g'\} \end{Bmatrix} \end{array} \right\} \quad (5-20)$$

假定每一积分步长  $t \in (t_k, t_{k+1})$  内荷载按下式线性变化，即

$$\{r\} = \{r_0\} + \{r_1\} \times (t - t_0) \quad (5-21)$$

文献[39]给出了相应精细积分的 HPD—L 格式

$$\begin{aligned} \{v(t_{k+1})\} = & [T(\tau)] \times [\{v(t_k)\}] + [H]^{-1} (\{r_0\} + [H]^{-1} \{r_1\}) \\ & - [H]^{-1} (\{r_0\} + [H]^{-1} \{r_1\} + \{r_1\} \times \tau) \end{aligned} \quad (5-22)$$

其中， $[T(\tau)]$  为指数矩阵，积分步长  $\tau = t_{k+1} - t_k$ 。如果每一积分步内荷载严格按式 (5-21) 线性变化，则式 (5-22) 总能给出计算机上的精确解答。无论是实际地震波或人工生成地震波都是一系列离散点，如果积分步长取为采样间隔，并设每一积分步内荷载严格按式 (5-21) 线性变化，并不考虑非线性等效外载  $\{s\}$  时，上面的积分格式将会给出高度精确的解答。

现考虑方程 (5-19) 的求解，由式 (5-20) 可知， $\{f\}$  包含实际外载  $\{r\}$  与非线性等效外载  $\{s\}$  两部分。对于非线性等效外载  $\{s\}$ ，由于其含有未知状态向量，故不能利用上面的积分格式予以直接求解。但由上面的分析可知，在每一积分时段上实际外载激励的响应能够获得精确的求解，所以可集中寻找有效的方法处理非线性等效外载部分。本文表明采用迭代修正方法将是很有效的，选取非线性等效外载初值，按下式执行

$$\{v(t_{k+1})\}_0 \rightarrow \{x(t_{k+1})\}_0 \rightarrow \{s(t_{k+1})\}_0 \rightarrow \{f(t_{k+1})\}_0 \rightarrow \{v(t_{k+1})\}_1 \quad (5-23)$$

如果  $\|\{v(t_{k+1})\}_1 - \{v(t_{k+1})\}_0\|_2 < \varepsilon$ ，则停止，否则  $\{v(t_{k+1})\}_1 \rightarrow \{v(t_{k+1})\}_0$ ，循环直到满足收敛精度。具体算法如下

- (1) 给定非线性等效外载初值，由式 (5-22) 计算  $\{v(t_{k+1})\}_0$ ；
- (2) 由  $\{v(t_{k+1})\}_0$  选出  $\{u(t_{k+1})\}_0$ ，利用 (5-17) 式计算  $\{x(t_{k+1})\}_0$ ；

- (3) 依据构件的滞迟恢复力模型形成  $\{g'(t_{k+1})\}_0$  项, 形成  $\{g'(t_{k+1})\}_0$  之后由式 (5-20) 计算  $\{s(t_{k+1})\}_0$ ;
- (4) 由  $\{f(t_{k+1})\}_0 = \{s(t_{k+1})\}_0 + \{r(t_{k+1})\}$  计算  $\{f(t_{k+1})\}_0$ , 注意, 对于该时刻的迭代循环,  $\{r(t_{k+1})\}$  是始终不变的;
- (5) 由式 (5-22) 计算在外载  $\{f(t_{k+1})\}_0$  作用下的结构响应  $\{v(t_{k+1})\}_1$ ;
- (6) 由式  $\|\{v(t_{k+1})\}_1 - \{v(t_{k+1})\}_0\|_2 < \varepsilon$  判断是否收敛, 如收敛停止迭代, 进行下一时刻计算, 否则将  $\{v(t_{k+1})\}_1$  赋给  $\{v(t_{k+1})\}_0$ , 重新执行 (2) - (6) 步, 直到收敛。

上述算法计算时间量主要消耗在迭代收敛过程, 由于在每一时间步上塑性等效外载的增加不很大, 所以直接用上一时刻的塑性等效外载作为该步迭代初值是比较有利的, 一般只需循环 2—3 步就可达到收敛。

## 5.5 算例及分析

算例一：一个近似于理想弹塑性系统的单自由度滞迟系统受白噪声激励：

$$A=1.0, \quad \gamma=\beta=0.5, \quad \alpha=1/21, \quad n=1, \quad m=k=1.0, \quad c=0 \text{ 或 } 0.1$$

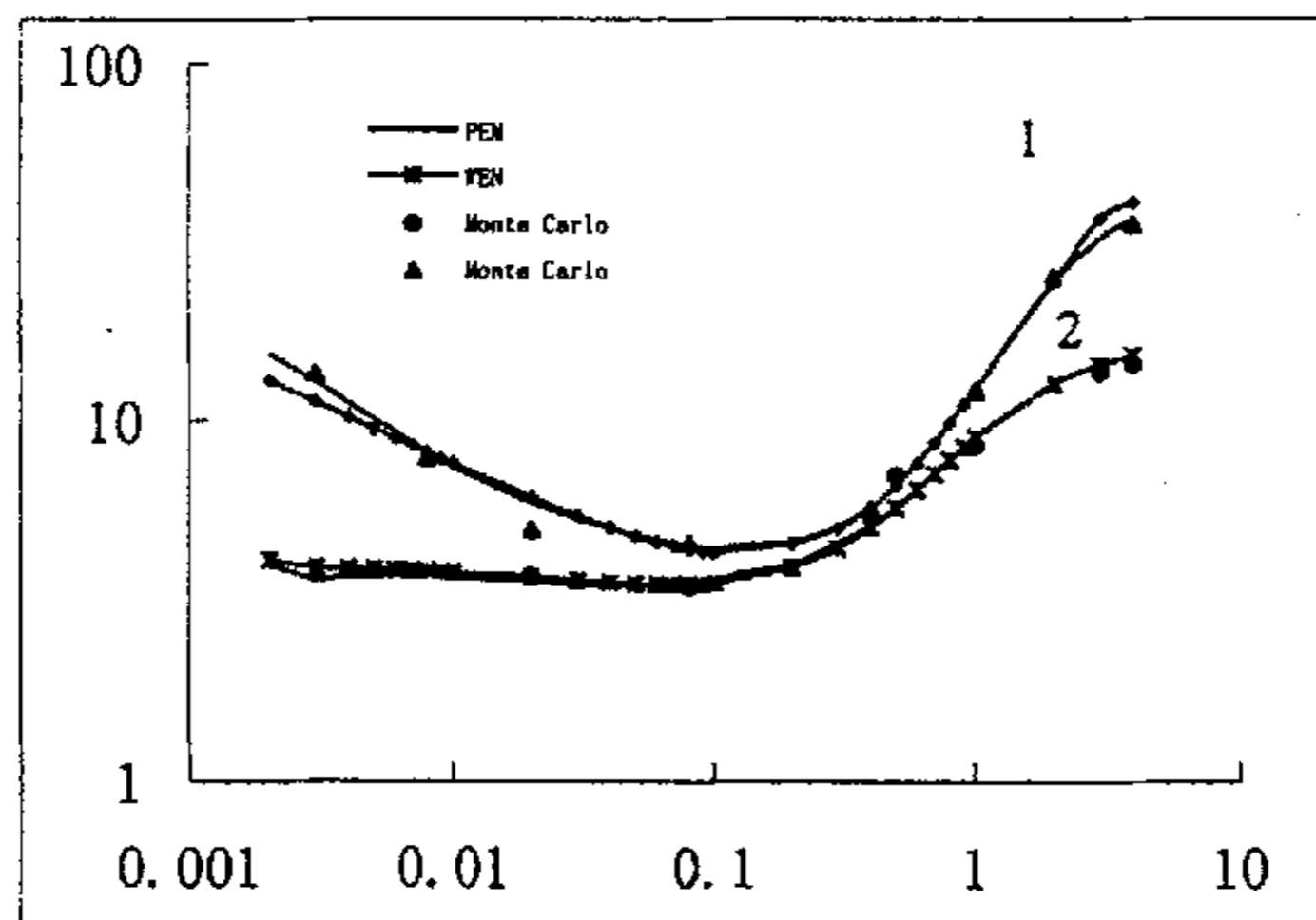


图 5-1 单自由度滞迟系统用不同方法计算的位移均方根响应比较 ①  $c=0$ , ②  $c=0.1$   
fig.5-1 displacement variance response comparison of SDOF hysteretic  
system in different method ①  $c=0$ , ②  $c=0.1$

用虚拟激励法结合等效线性化法 (PEM) 分析了此单自由度滞迟系统在不

同强度激励下的的响应性态，并用文献[39]中精细积分法求李亚普诺夫微分方程方法(WEN)迭代地求解了该滞迟系统等效线性化后的李亚普诺夫方程，两种方法的计算结果十分一致，绘于图 5-1 和图 5-2 中。

图中 D 是特征长度， $D = \sqrt{2S_0/\omega_0^3}$ ， $Y_u = \sqrt[n]{A/(\gamma + \beta)}$  是屈服位移。

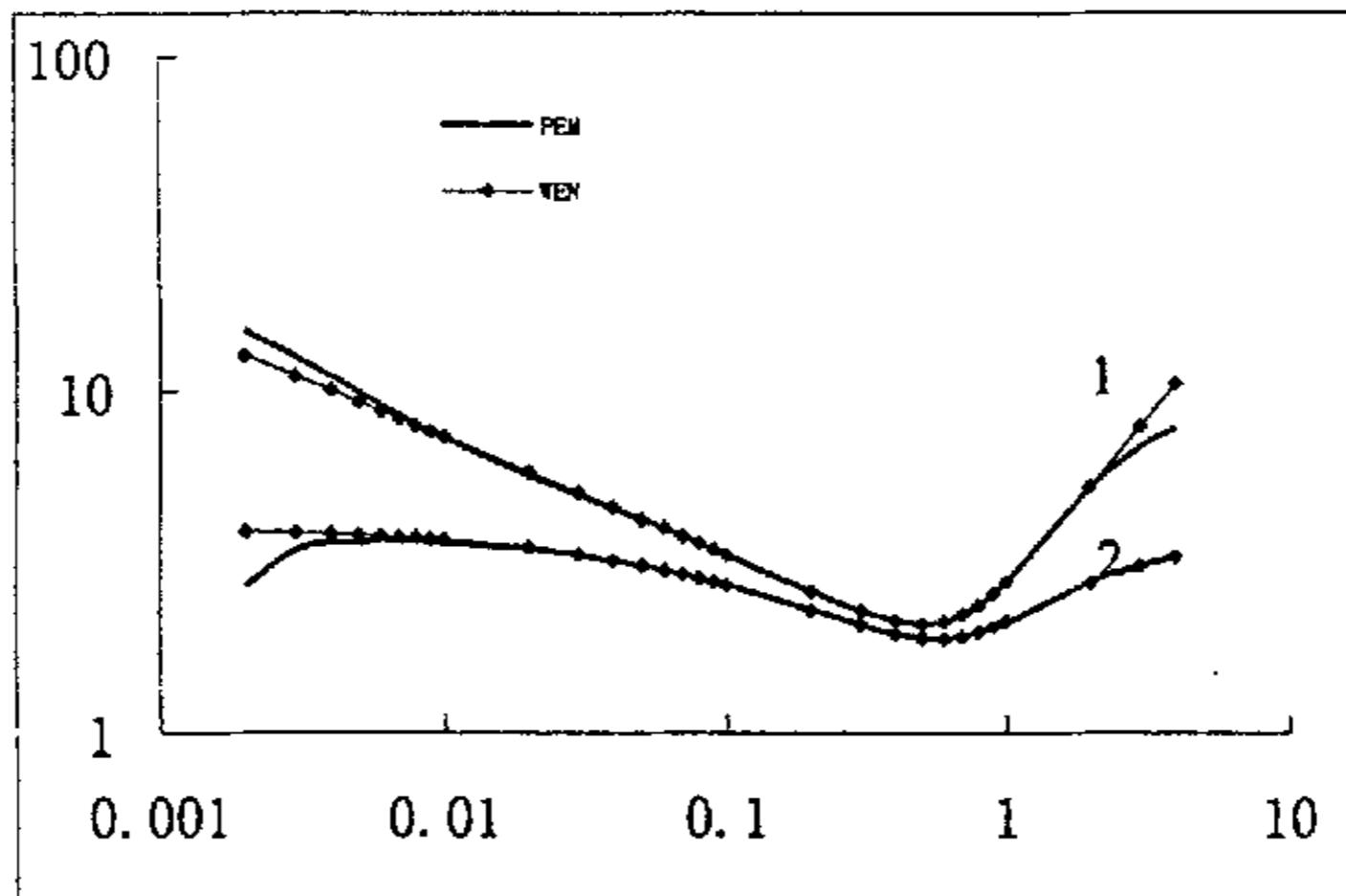


图 5-2 单自由度滞迟系统用不同方法计算的速度均方根响应比较 1  $c=0$ ， 2  $c=0.1$

fig.5-2 velocity variance response comparison of SDOF hysteretic system in different method ①  $c=0$ , ②  $c=0.1$

图 5-1 横坐标为  $D/Y_u$ ，左端表示弱的随机激励，右端则表示强激励。纵坐标为  $\sigma_y/D$ ，是系统的无量纲的位移均方根响应。从图 5-1 可以看出，用虚拟激励法得到的计算结果曲线与等效线性化后求李亚普诺夫方程得到的计算结果曲线几乎完全重合，这是二者都基于相同的等效线性化法则，这两种方法的计算结果与数值模拟法结果非常吻合，表明二者具有相当高的精度。

算例二：如图 5-3 所示单自由度结构，自振圆频率  $\omega_0 = 3.1415$ ，阻尼比  $\zeta = 0.05$ 。抗震分析条件：二类场地，远震，设防烈度为 7 度，8 度，9 度（罕遇）。时程分析采用双线性模型（计算了 10 个样本），随机振动分析采用双曲线模型，计算选取不同模型参数时，结构在不同抗震条件下的位移响应极值。在计算分析时，使双线性和双曲线模型的屈服后与屈服前刚度比  $\alpha$  保持一致，并且  $\alpha$  由小到大变化， $\alpha = 0.05$  为近似理想弹塑性情况， $\alpha = 1.0$  为完全弹性情况；屈服位移  $\delta_0$  均取为 0.1。

(1) 采用双曲线恢复力模型时，各参数为  $A = 1.0$ ， $\alpha = 0.05$ ， $\gamma = \beta = 5.0$ ， $n = 1$ ；采用双线性模型时，屈服后与屈服前刚度比  $\alpha = 0.05$ ，屈服位移  $\delta_0 = 0.1$ 。计算

结果的比较列于表 5-1:

表 5-1 不同设防烈度下结构位移响应

table 5-1 structure displacement response under different protected intensity

设防烈度	时程积分	随机振动(D)	随机振动(V)	相对误差(%)	
				D	V
7	0.09723	0.08670	0.08409	10.83	13.51
8	0.17718	0.16710	0.16512	5.69	6.81
9	0.37117	0.34264	0.34114	7.69	8.09

(2) 采用双曲线恢复力模型时, 各参数为  $A=1.0$ ,  $\alpha=0.1$ ,  $\gamma=\beta=5.0$ ,  $n=1$ ;  
采用双线性模型时, 屈服后与屈服前刚度比  $\alpha=0.1$ , 屈服位移  $\delta_0=0.1$ 。计算结果的比较列于表 5-2:

表 5-2 不同设防烈度下结构位移响应

table 5-2 structure displacement response under different protected intensity

设防烈度	时程积分	随机振动(D)	随机振动(V)	相对误差(%)	
				D	V
7	0.09722	0.08755	0.08483	9.95	12.74
8	0.17215	0.16862	0.16642	2.05	3.33
9	0.33961	0.34078	0.33866	0.34	0.28

(3) 采用双曲线恢复力模型时, 各参数为  $A=1.0$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\gamma=\beta=5.0$ ,  $n=1$ ;  
采用双线性模型时, 屈服后与屈服前刚度比  $\alpha=0.5$ , 屈服位移  $\delta_0=0.1$ 。计算结果的比较列于表 5-3:

表 5-3 不同设防烈度下结构位移响应

table 5-3 structure displacement response under different protected intensity

设防烈度	时程积分	随机振动(D)	随机振动(V)	相对误差(%)	
				D	V
7	0.09715	0.09464	0.09050	2.58	6.85
8	0.16428	0.16951	0.16389	3.18	0.24
9	0.27107	0.28077	0.27195	3.58	0.32

(4) 采用双曲线恢复力模型时, 各参数为  $A=1.0$ ,  $\alpha=1.0$ ,  $\gamma=\beta=5.0$ ,  $n=1$ ;

采用双线性模型时，屈服后与屈服前刚度比  $\alpha = 1.0$ ，屈服位移  $\delta_0 = 0.1$ 。计算结果的比较列于表 5-4：

表 5-4 不同设防烈度下结构位移响应

table 5-4 structure displacement response under different protected intensity

设防烈度	时程积分	随机振动(D)	随机振动(V)	相对误差(%)	
				D	V
7	0.10831	0.11613	0.10716	7.22	1.06
8	0.19171	0.20896	0.19231	9.00	0.31
9	0.29868	0.32505	0.29915	8.83	1.57

算例一只是一个单自由度滞迟系统对理想白噪声激励进行分析，考察虚拟激励法结合等效线性化方法进行非线性分析的精度。算例二按工程规定的地震激励进行抗震分析。激励选取实际的地震波，抗震条件为二类场地土，远震，设防烈度 7 度、8 度、9 度（罕遇），结构进入弹塑性，来分析这种方法应用到实际抗震工程中的可行性。时程分析方法是一种比较成熟的非线性抗震分析方法，但是计算的效率非常低，同样选取单自由度系统来对比计算结果，在不同的参数下两种方法计算的结果列于表 5—1 至表 5—4 中，随机振动(D)表示 Davenport 方法计算的位移响应极值，随机振动(V)表示 Vanmarcke 方法计算的位移响应极值。从表中可以看出，时程分析方法计算的极值与随机振动方法计算的极值有一定的误差。这是因为不但等效线性化会带来误差，而且时程分析采用双折线模型，随机振动采用双曲线模型，两种模型之间的转换这里采用的是屈服位移相对应准则，引入误差也在所难免。此外时程积分计算依赖于样本的选取，样本选取的多少也会影响到计算的结果。主要的误差是由于随机振动算法中采用等效线性化引起的。从表中的结果可以看到，两种方法的计算结果相差并不大，按 Davenport 方法计算，则最大误差仅在 10% 左右，这是工程上可以接受的。下面计算一个三自由度的高层剪切型结构，进一步考察虚拟激励法结合等效线性化法计算非线性问题应用到工程中的可行性。

算例三：如图 5-4 三自由度剪切结构，阻尼比  $\zeta = 0.02$   $K_1 = 9.664 \times 10^5 N/m$ ，  
 $K_2 = 8.782 \times 10^5 N/m$ ， $K_3 = 8.148 \times 10^5 N/m$ ， $M_1 = 9371.0 Kg$ ， $M_2 = 9545.0 Kg$ ，  
 $M_3 = 8635.0 Kg$ ，抗震分析条件：2 类场地土，远震，设防烈度为 7 度。时程积分计算采用 10 个样本

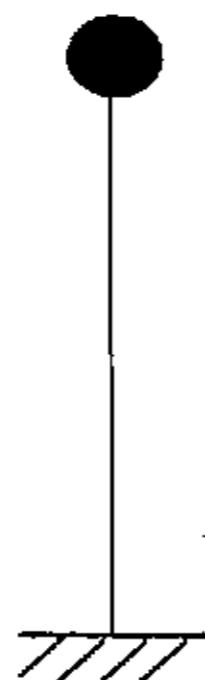


图 5-3 单自由度剪切型结构  
fig 5-3. SDOF shear-type structure

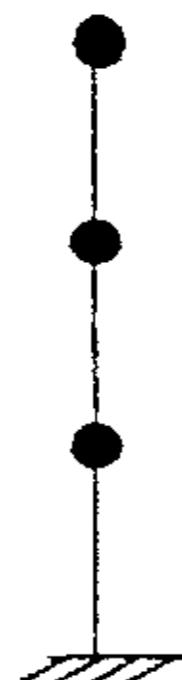


图 5-4 多自由度剪切型结构  
fig 5-4. MDOF shear-type structure

表 5-5 结构自振频率

table 5-5 structure natural frequency

阶 数	1	2	3
圆 频 率	4.484	12.182	17.322

表 5-6 第一 层:  $\alpha = 1.0$  第二 层:  $\alpha = 1.0$  第三 层:  $\alpha = 1.0$ 

表 5-6 不同方法计算结构位移响应比较

table 5-6 structure displacement response using different methos

响 应 位 置	时 程 积 分	随机振动(D)	随机振动(V)	相对误差(%)	
				D	V
第一 层	0.06724m	0.06603m	0.06276m	1.80	6.66
第二 层	0.11331m	0.12081m	0.10848m	6.62	4.26
第三 层	0.14021m	0.15370m	0.13685m	9.62	2.40

表 5-7

第一 层:  $A = 1.0$ ,  $\alpha = 0.5220$ ,  $\gamma = 33.5570$ ,  $\beta = 33.5570$ ,  $x_u = 0.0149m$

第二 层:  $A = 1.0$ ,  $\alpha = 0.6738$ ,  $\gamma = 42.0168$ ,  $\beta = 42.0168$ ,  $x_u = 0.0119m$

第三 层:  $A = 1.0$ ,  $\alpha = 0.5473$ ,  $\gamma = 61.7284$ ,  $\beta = 61.7284$ ,  $x_u = 0.0081m$

5-7 不同方法计算结构位移响应比较

table 5-7 structure displacement response using different methos

响 应 位 置	时 程 积 分	随机振动(D)	随机振动(V)	相对误差(%)	
				D	V
第一 层	0.04492	0.03657	0.03616	18.59	19.5
第二 层	0.07374	0.06243	0.06065	15.34	17.7
第三 层	0.09429	0.08658	0.08298	8.18	11.99

表 5-8

第一 层:  $A = 1.0$ ,  $\alpha = 0.5220$ ,  $\gamma = 22.3174$ ,  $\beta = 44.7428$ ,  $x_u = 0.0149m$

第二 层:  $A = 1.0$ ,  $\alpha = 0.6738$ ,  $\gamma = 28.0112$ ,  $\beta = 56.0224$ ,  $x_u = 0.0119m$

第三 层:  $A = 1.0$ ,  $\alpha = 0.5473$ ,  $\gamma = 82.3046$ ,  $\beta = 41.1523$ ,  $x_u = 0.0081m$

表 5-8 不同方法计算结构位移响应比较

table 5-8 structure displacement response using different methos

响 应 位 置	时 程 积 分	随机振动(D)	随机振动(V)	相对误差(%)	
				D	V
第一 层	0.04492	0.03712	0.03667	17.36	18.37
第二 层	0.07374	0.06336	0.06147	14.08	16.64
第三 层	0.09429	0.08791	0.08416	6.77	10.74

表 5-9

第一 层:  $A = 1.0$ ,  $\alpha = 0.5220$ ,  $\gamma = 44.7428$ ,  $\beta = 22.3714$ ,  $x_u = 0.0149m$

第二 层:  $A = 1.0$ ,  $\alpha = 0.6738$ ,  $\gamma = 56.0224$ ,  $\beta = 28.0112$ ,  $x_u = 0.0119m$

第三 层:  $A = 1.0$ ,  $\alpha = 0.5473$ ,  $\gamma = 82.3046$ ,  $\beta = 41.1523$ ,  $x_u = 0.0081m$

表 5-9 不同方法计算结构位移响应比较

table 5-9 structure displacement response using different methos

响 应 位 置	时 程 积 分	随机振动(D)	随机振动(V)	相对误差(%)	
				D	V
第一 层	0.04492	0.03622	0.03584	19.37	20.2
第二 层	0.07374	0.06182	0.06010	16.16	18.5
第三 层	0.09429	0.08565	0.08217	9.16	12.8

算例三是一多自由度剪切型结构的非线性抗震分析问题。从表 5-6 中的结果可以看出，线性时随机振动方法与时程积分方法的计算结果相差很小，误差仅在 1.80%—9.62% 之间。从表 5-7 至表 5-9 中的非线性计算结果可以看到，两种方法的误差最大达到 20.21%。这是因为随机振动方法进行非线性分析时，采用等效线性化法会带来较大的误差；在随机分析中滞迟恢复力曲线选取双曲线模型；在时间历程分析中滞迟恢复力曲线选取双线性模型。两种模型的转换也在所难免地引入一定的误差。所以非线性分析时的计算结果相差较大，但还是可以接受的。时程积分方法中样本的选取也会对结果有一定影响。

## 5.6 用虚拟激励法求解非线性系统的适用性和精度

虚拟激励法是否适用于求解非线性系统，归根到底要依赖于等效线性化法的适用范围。由于用虚拟激励法求得的线性系统的随机响应是极其精确的，因而在求解非线性系统时，其解的精度完全决定于等效线性化法。

一般来说，等效线性化法可应用于包括材料非线性和几何非线性的各类非线性问题；激励并不要求一定是白噪声，可以是平稳或非平稳的正态随机过程；响应的分布虽不可能严格满足正态分布，但要求是接近正态分布的随机过程。等效线性化法由于是用一系列稳定的线性系统等效代替原非线性系统，所以不能够描述象跳跃、极限环、参数振动等本质非线性现象。由等效线性化法得到的响应统计量，其误差尚无一般性的理论界限。对简单系统可通过与精确解或数值模拟结果作比较来确定。由于一般的等效线性化法都是基于均方误差最小原则建立的，因而，对均方位移和速度响应其精度比较好，典型的误差范围是小于 20%。但对于除均方响应之外的其它响应统计量，如自相关函数、极值等，其误差可能更大。

用虚拟激励法求解非线性系统时，其适用性和精度完全决定于等效线性化本身。而虚拟激励法本身基本上不产生进一步的误差。

## 6 工程结构地震作用下局部非线性随机振动

### 6.1 引言

在中等以上地震作用下，大型复杂结构（如桥梁、高层建筑等）会局部进入弹塑性状态工作。在工程中广泛应用的反应谱法从本质讲是一种确定性的线性方法，尽管已有一些学者提出了弹塑性反应谱，但是对于其理论基础的合理性仍颇多争议<sup>[50,51]</sup>。目前最常用的弹塑性抗震分析方法是时程分析法，该法以实际地震波或者人工地震波作为地震激励输入，在时域内进行积分，得到结构的响应时间历程<sup>[52-54]</sup>。该法原理比较简单，易于编程，但计算结果过于依赖所选取的时间历程曲线；且计算量很大，应用不甚方便。

地震作用是随机性的。对于线性结构体系作随机振动（功率谱法）分析近年来有了很大的发展；虚拟激励法<sup>[6-7]</sup>具有快速、精确的特点，已达到工程实用程度。不过按随机振动方法来分析复杂结构非线性随机振动仍然缺乏有效的途径。统计线性化方法被认为是求解这类问题最有希望的方法。以往由于对大型的线性随机振动分析也很困难，所以统计线性化法也仅限于对简单的结构实施。本文采用 Bouc-Wen 等提出的微分方程模型描述进入非线性构件的滞变特性，将离散塑性铰模型结合虚拟激励法和等效线性化进行结构非线性随机振动分析。克服了以往计算效率低下的困难。特别是考虑到结构的弹塑性只发生在局部高应力区域，大部分区域始终在弹性范围工作，这更有利于提高计算效率。文中给出的数值结果表明这是一种有实际应用价值的计算方法。

### 6.2 离散塑性铰模型<sup>[45,55]</sup>

考虑如图 6-1 所示的框架离散铰模型

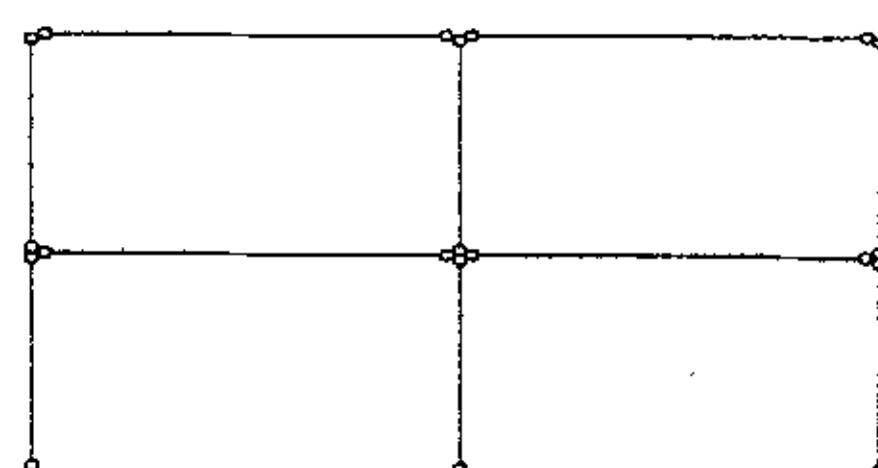


图 6-1 平面框架的离散铰模型  
fig 6-1 discrete hinge model of plan frame

在地震激励下，假定塑性铰出现在梁单元的两侧，并用塑性铰单元来反映构件的这种滞迟现象，如图 6-2 所示。

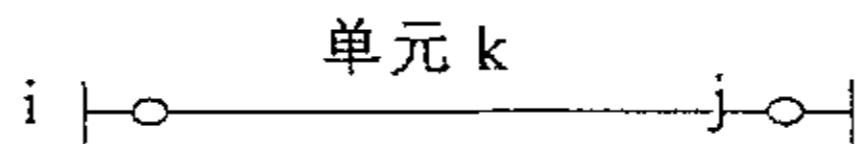


图 6-2 单元的离散铰模型  
fig 6-2 discrete hinge model of element

单元 k 两端的铰单元的弯矩分别为：

$$\begin{aligned} P_{ki} &= \alpha_i K_i \bar{U}_{ki} + (1 - \alpha_i) K_i Z_i \\ P_{kj} &= \alpha_j K_j \bar{U}_{kj} + (1 - \alpha_j) K_j Z_j \end{aligned} \quad (6-1)$$

其中  $\bar{U}_{ki}$ 、 $\bar{U}_{kj}$  分别是单元 i 端和 j 端塑性铰的角度位移，如图 6-3 所示， $Z_i$  和  $Z_j$  表示对应的滞迟位移， $\alpha$  和  $K$  分别是非线性系数和铰单元的刚度。该单元的等效线性化方程的矩阵形式可表为：

$$\dot{Z} = C_e \dot{\bar{U}} + K_e Z \quad (6-2)$$

$$C_e = \begin{bmatrix} C_{e1} & & & \\ & C_{e2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{em} \end{bmatrix} \quad K_e = \begin{bmatrix} K_{e1} & & & \\ & K_{e2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & K_{em} \end{bmatrix}$$

$\bar{U} = \{\bar{U}_{ki}, \bar{U}_{kj}\}^T$  是单元两端塑性铰的角度位移向量， $Z = \{Z_i, Z_j\}^T$  是滞迟位移向量， $C_e$ 、 $K_e$  是等效系数矩阵，等效系数确定用式 (5-5)。两个铰单元之间是线弹性单元，如果忽略弹性单元外的塑性铰微段长度，节点 i、j 处弹性单元的末端角位移就等于节点的角度位移减去与之相连的铰单元的角度位移。第 k 单元的力向量  $F_k$  可以写成：

$$F_k = [K]_k^e (\{\tilde{U}_k\} - \{\bar{U}_k\}) \quad (6-3)$$

其中  $[K]_k^e$  是线性单元 k 的刚度阵， $\{\tilde{U}_k\}$  是单元两端的节点位移向量。铰单元两端的弯矩相等，则

$$\left. \begin{aligned} F_{ki} &= P_{ki} \\ F_{kj} &= P_{kj} \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

$F_{ki}, F_{kj}$  分别是全梁单元在 i、j 端的弯矩，式 (6-4) 为离散铰处弯矩平衡方程。

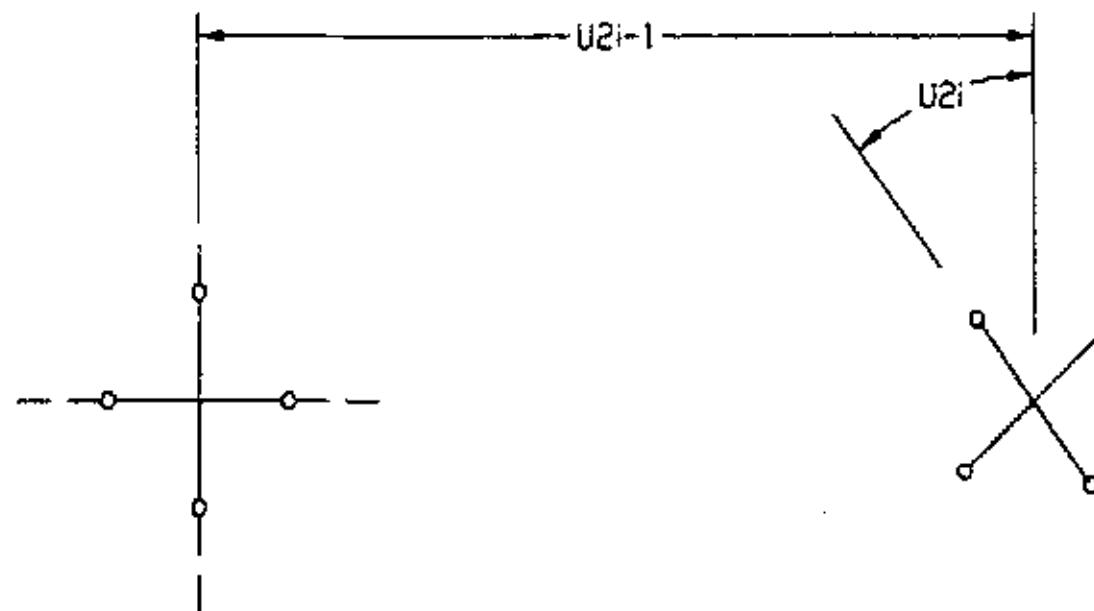


图 6-3 a) 节点全局位移  
fig 6-3 a) node global displacement

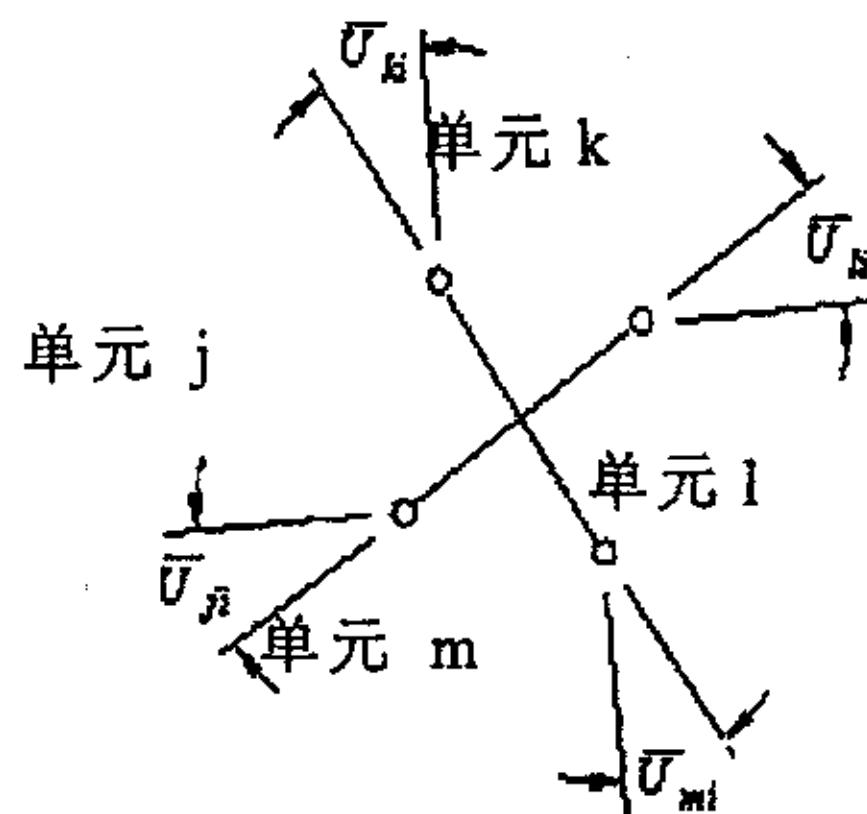


图 6-3 b) 铰位移  $\bar{U}$   
fig 6-3 b) hinge displacement  $\bar{U}$

图 6-3 a) 中下标 i 表示节点号， $U_{2i-1}$  表示节点的纵向位移， $U_{2i}$  表示节点的转角位移。

### 6.3 复杂结构局部非线性运动方程的建立

在强烈地震下，假设结构有  $m$  个构件单元进入弹塑性。其第  $k$  个单元的塑性区力平衡方程及滞变恢复力模型的统计线性化方程可表示为<sup>[45,55]</sup>

$$[T_1]_k [K^e]_k (\{\tilde{x}\}_k - [T_1]^T_k \{\bar{x}\}_k) - ([K_p]_k \{\bar{x}\}_k + [K_r]_k \{z\}_k) = \{0\} \quad (6-5)$$

$$\{\dot{z}\}_k = [P]_k \{\dot{\bar{x}}\}_k + [H]_k \{z\}_k \quad k = 1, 2, 3, \dots, m \quad (6-6)$$

其中，下标  $k$  表示考虑的第  $k$  个构件单元， $[K^e]$  和  $[T_1]_k$  为单元局部弹性刚度阵和提取变换阵； $[K_p]_k$  和  $[K_r]_k$  为滞变恢复力模型中相应的刚度阵； $[P]_k$  和  $[H]_k$  为将式 (5-3) 统计线性化后的系数阵； $[K_p]_k$ 、 $[K_r]_k$ 、 $[P]_k$  和  $[H]_k$  均为对角阵。

经等效线性化及单元组装后，非线性结构运动微分方程可表示为如下形式 [55]

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K^e]\{x\} + [K^h]\{\hat{x}\} = -[M]\{E\}\ddot{x}_g \quad (6-7)$$

其中， $[M]$  和  $[C]$  为系统质量阵和阻尼矩阵； $[K^e]$  和  $[K^h]$  为初始线弹性刚度矩阵和与非弹性变形相应的结构矩阵； $\{E\}$  为惯性力指示向量， $\ddot{x}_g$  为地面加速度。

方程 (5) - (7) 中其它符号的意义如下：

$\{x\}$  为结构总位移向量，由所有节点的独立位移组成。

$\{\hat{x}\}$  为结构非弹性位移向量，由所有  $m$  个构件单元塑性区的非弹性变位组成，它可由各  $\{\bar{x}\}_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) 按有限元方法组装而得。

$\{\tilde{x}\}_k$  为第  $k$  个单元全位移，即单元两端节点的全部线变位与角变位<sup>[56]</sup>

$$\{\tilde{x}\}_k = \left\{ \begin{matrix} u_x & u_y & u_z & \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{matrix} \right\}_i \left\{ \begin{matrix} u_x & u_y & u_z & \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{matrix} \right\}_j \}^T \quad (6-8)$$

$\{\bar{x}\}_k$  为第  $k$  个单元非弹性位移，即该构件单元可能发生的全部非线性线变位或角变位，当考虑构件产生剪切型非弹性变形时（如剪切型多层建筑的层间位移）

$$\{\bar{x}\}_k = \left\{ \Delta \bar{u}_y \quad \Delta \bar{u}_z \right\}^T \quad (6-9)$$

相应于构件单元全位移的提取变换阵为

$$[T_1]_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当考虑构件产生塑性铰时

$$\{\bar{x}\}_k = \left\{ \bar{\theta}_y \quad \bar{\theta}_z \right\}_i \left\{ \bar{\theta}_y \quad \bar{\theta}_z \right\}_j \}^T \quad (6-10)$$

相应构件单元全位移的提取变换阵为

$$[T_1]_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\{z\}_k$  为 Bouc-Wen 模型中的滞迟位移。

## 6.4 复杂结构局部非线性运动方程的虚拟激励分析

为用虚拟激励法求解方程 (6-5) — (6-7), 构造虚拟激励

$$\ddot{x}_g = \sqrt{S(\omega)} e^{i\omega t} \quad (6-11)$$

其中,  $S(\omega)$  为地面加速度功率谱密度。

在上述虚拟激励作用下, 结构各虚拟响应向量可设为

$$\{x\} = \{q_1\} e^{i\omega t} \quad (6-12)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\tilde{x}\}_k &= \{q_1\}_k e^{i\omega t} \\ \{\bar{x}\}_k &= \{q_2\}_k e^{i\omega t} \\ \{z\}_k &= \{q_3\}_k e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (6-13)$$

将 (6-13) 式代入方程 (6-5) - (6-6), 可得

$$[T_1]_k [K^e]_k \{q_1\}_k - [T_1]_k [K^e]_k [T_1]^T_k \{q_2\}_k - [K_p]_k \{q_2\}_k - [K_r]_k \{q_3\}_k = \{0\} \quad (6-14)$$

$$(i\omega) \{q_3\}_k = (i\omega) [P]_k \{q_2\}_k + [H]_k \{q_3\}_k \quad (6-15)$$

由 (6-14) 式和 (6-15) 式, 得到

$$\{q_2\}_k = [B]_k \{q_1\}_k \quad (6-16)$$

$$\{q_3\}_k = [A]_k \{q_2\}_k \quad (6-17)$$

其中

$$[A]_k = (i\omega)((i\omega)[I]_k - [P]_k)^{-1} [H]_k$$

$$[B]_k = ([T_1]_k [K^e]_k [T_1]^T_k + [K_p]_k + [K_r]_k [A]_k)^{-1} ([T_1]_k [K^e]_k)$$

至此, 对于第  $k$  个单元, 由 (6-13) 式和 (6-16) 式可得全位移与非弹性位移有如下关系

$$\{\bar{x}\}_k = [B]_k \{\tilde{x}\}_k \quad (6-18)$$

结构总位移向量  $\{x\}$  和第  $k$  个单元全位移向量  $\{\tilde{x}\}_k$  之间关系为<sup>[56]</sup>

$$\{\tilde{x}\}_k = [T_e]_k \{x\} \quad (6-19)$$

其中,  $[T_e]_k$  为位移提取变换阵。

利用式 (6-18) 和式 (6-19), 可建立虚拟激励作用下线性化后结构运动方程的另一种形式, 为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K^e]\{x\} + [K^{nh}]\{x\} = -[M]\{E\}\sqrt{S(\omega)}e^{i\omega t} \quad (6-20)$$

$$\text{其中, } [K^{nh}] = -\sum_{k=1}^m [T_e]^T_k [K^e]_k [T_e]^T_k [B]_k [T_e]_k.$$

比较方程 (6-5) 和方程 (6-20), 可以看出通过虚拟激励求解的上述坐标变换, 方程 (6-5) 中的非弹性刚度矩阵  $[K^h]$  变为方程 (6-20) 中的非弹性刚度矩阵  $[K^{nh}]$ , 其所对应的位移向量已为结构总位移向量  $\{x\}$ 。

将 (6-12) 式代入 (6-20) 式, 可得

$$(-\omega^2)[M] + (i\omega)[C] + [K^e] + [K^{nh}]\{q_1\} = -[M]\{E\}\sqrt{S(\omega)} \quad (6-21)$$

实际结构通常含有很高的自由度, 故其弹性部分需用模态进行降阶处理, 由于只有局部构件进入塑性, 采用弹性模态降阶显著提高了计算效率, 计算精度也得到保证<sup>[57]</sup>。

对于由 (6-5) 式表达的运动方程, 若

$$\left. \begin{aligned} [K^e][\Phi] &= [M]\Phi[\Omega^2] \\ [\Phi]^T[M][\Phi] &= [I] \end{aligned} \right\} \quad (6-22)$$

其中,  $[\Phi]$  为相应于结构弹性刚度的振型,  $[\Omega^2]$  为谱矩阵,  $[I]$  为单位阵。

如结构弹性部分阻尼为正交阻尼, 则有

$$[\Phi]^T[C]\Phi = [C^*] \quad (6-23)$$

其中,  $[C^*]$  为对角阵。

令  $\{q_1\} = [\Phi]\{u\}$ , 代入方程 (6-21), 并左乘  $[\Phi]^T$ , 得

$$(-\omega^2)[I] + (i\omega)[C^*] + [\Omega^2]\{u\} = -[\Phi]^T[M]\{E\}\sqrt{S(\omega)} + [H]\{u\} \quad (6-24)$$

其中， $[H] = -[\Phi]^T [K^{nh}] [\Phi]$ 。

由方程 (6-24) 解出  $\{u\}$ ，进而可计算出  $\{q_1\}$ 。至此，不难利用 (6-19) 式和 (6-16) — (6-17) 式计算  $\{q_1\}_k$ 、 $\{q_2\}_k$  和  $\{q_3\}_k$ 。

由虚拟激励原理计算响应功率谱矩阵<sup>[7,11]</sup>

$$\left. \begin{aligned} [S_{22}]_k &= \{q_2\}_k^* \{q_2\}_k^T \\ [S_{33}]_k &= \{q_3\}_k^* \{q_3\}_k^T \\ [S_{23}]_k &= \{q_2\}_k^* \{q_3\}_k^T \end{aligned} \right\} \quad (6-25)$$

可按下式计算所需方差和协方差矩阵

$$\left. \begin{aligned} [\sigma_{22}]_k &= \int_{-\infty}^{\infty} [S_{22}]_k d\omega \\ [\sigma_{33}]_k &= \int_{-\infty}^{\infty} [S_{33}]_k d\omega \\ [\sigma_{23}]_k &= \int_{-\infty}^{\infty} [S_{23}]_k d\omega \end{aligned} \right\} \quad (6-26)$$

利用 (5-5) 式再次形成等效系数矩阵  $[P]_k$  和  $[H]_k$ 。在给定  $[P]_k$  阵和  $[H]_k$  阵初值情况，迭代求解线性化后的方程 (6-20)，直至  $[P]_k$  阵和  $[H]_k$  阵收敛。在得到原滞迟系统的等价线性系统之后，按上述方法再进行一次重分析，求得虚拟响应，之后可以按下式计算在一响应  $v$  的自谱密度

$$S_{vv} = |v|^2 \quad (6-27)$$

对一系列频点计算出自谱  $S_{vv}$  后，可计算  $v$  的第  $i$  阶谱矩

$$m_i = 2 \int_0^{\infty} \omega^i S_{vv}(\omega) d\omega \quad (6-28)$$

由此可计算工程设计中感兴趣的极值响应均值及方差。例如应用得较为普遍的基于泊松假定的 Davenport 方法<sup>[36,58]</sup>。

这个算法已经在有限元程序 DDJ-W 上实现。在非线性分析前，我们要给出需要的数据，离散铰的描述，模型参数，所在节点和单元，位移规格。非线性分析是一个反复迭代的过程，下面列出迭代的步骤：

- (1) 出现塑性铰的单元，生成  $[K_p]_k$ ， $[K_r]_k$ ， $[K^e]_k$ ， $[T_1]_k$ ； $k=1,2,\dots,m$
- (2) 给定初始的  $[P]_k$ ， $[H]_k$ ； $k=1,2,\dots,m$
- (3) 用虚拟激励法求解，计算  $[A]_k$ ， $[B]_k$ ； $k=1,2,\dots,m$ ，生成塑性刚

度阵  $[K^{nh}]$ ;

(4) 由方程 (6-24) 解出  $\{u\}$ , 进而可计算出  $\{g_i\}$ 。利用 (6-19) 式和 (6-16) — (6-17) 式计算  $\{g_1\}_k$ 、 $\{g_2\}_k$  和  $\{g_3\}_k$ 。

(5) 由式 (6-24) 计算谱阵, 进一步由式 (6-25) 计算出所需方差和协方差矩阵

(6) 形成新的  $[P]_k$ ,  $[H]_k$ ;  $k=1,2,\dots,m$

(7) 重复 (3) — (6), 直至收敛;

由于取为结构初始弹性刚度阵, 故在进行结构弹塑性抗震分析时, 可依据上式在初始模态上进行动力分析, 避免在每一塑性状态下求解振型, 并可保证较高的精度, 这对于分析只有局部构件考虑滞迟效应的系统显然更为有利。

## 6.5 算例及分析

算例一: 图 6-4 为四跨公路桥模型, 下部桥台高 2m, 桥墩高 7.5m, 每跨长 40m。地震时全桥将表现为相互耦连的整体振动, 此时, 上部结构和桥墩之间可近似地视为固定铰结, 地震力将按桥墩的刚性进行分配。这种桥梁的低墩受力大, 如果只允许结构在桥墩底处出现塑性铰, 并按中国建筑结构抗震设计规范 (GBJ11-89) 反算出的当量地面加速度功率谱曲线作为地面输入, 按二类场地土, 远震, 设防烈度为 8 度, 进行桥梁的局部非线性分析。计算桥面上各截面处的弯矩, 并与线性结果和时程积分方法计算的非线性结果相比较。表 6-1 给出了结构中各单元的刚度性质。作为提供设计的参考, 应该与规范反应谱法具有可比性。所以这里时间历程法列出的响应是对于各地面激励时间历程样本 (取十个样本) 的最大响应的平均值; 而随机振动分析列出的结果则是等效线性化系统对于平稳随机激励的极值响应的数学期望。

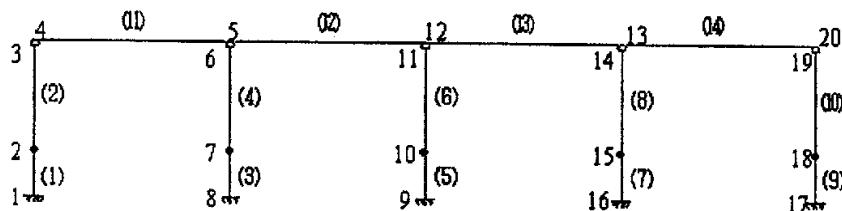


图 6-4 四跨公路桥模型  
fig 6-4 four span road bridge model

表 6-1 单元刚度性质

table 6-1 element stiffness property

单元号	EF(N)	EJ <sub>y</sub> (N M <sup>2</sup> )	EJ <sub>z</sub> (N M <sup>2</sup> )	GJ <sub>d</sub> (N M <sup>2</sup> )	GF <sub>y</sub> (N)	GF <sub>z</sub> (N)
11,12,13,14	1.39E11	3.30E15	3.30E15	5.0E9	4.95E10	4.95E10
1,9	6.25E11	2.00E17	2.00E17	5.0E9	2.23E11	2.23E11
2,10	1.60E11	3.17E11	3.17E11	5.0E9	5.72E10	5.72E10
3,5,7	8.27E11	2.16E17	2.16E17	5.0E9	2.95E11	2.95E11
4,6,8	2.14E11	5.47E10	5.47E10	5.0E9	7.65E10	7.65E10

表中, E 为杨氏模量, G 为剪切模量; F 为横截面积, J<sub>y</sub>, J<sub>z</sub> 是截面的几何惯性矩; F<sub>y</sub>=F<sub>z</sub>=F/1.2, J<sub>d</sub>=F<sup>4</sup>/40(J<sub>y</sub>+J<sub>z</sub>)。因为是平面问题, 所以 EJ<sub>z</sub>, GF<sub>y</sub>, GJ<sub>d</sub> 并不起作用。

1. 只允许中间三个桥墩底处出现塑性铰, 塑性铰的参数为:

$$K=2.0E12, \alpha=0.02, \gamma=\beta=0.5, A=1.0E-12, n=1.0$$

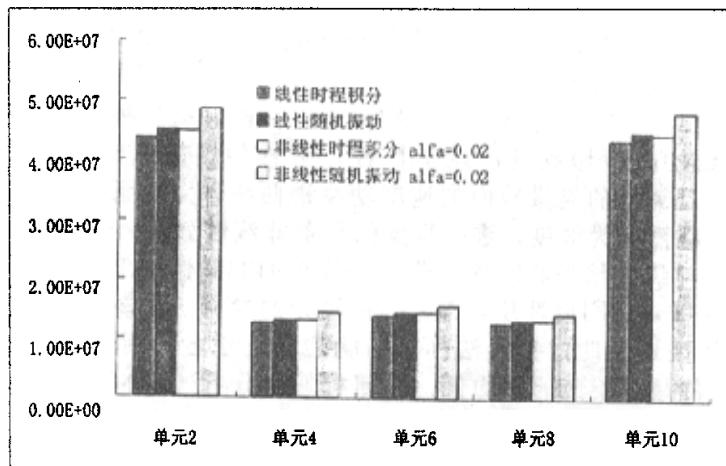


图 6-5 桥墩底部弯矩分布图  
fig 6-5 pier bottom moment distribution

$\alpha=0.02$  接近于理想塑性, 三个桥墩都发生塑性铰, 非线性比较严重, 从图 6-5 和图 6-6 中可以看出, 对于桥墩底部弯矩而言, 非线性计算结果与线性计算结果最大相差达 7.76%。而对于桥面纵向位移而言, 非线性计算结果与线性计算结果最大相差达 9.17%。

图 6-5 和图 6-6 中还将时程积分的非线性计算结果与随机振动的非线性计算结果作了比较, 时程积分计算非线性滞迟恢复力用双线性模型, 随机振动计算非线性滞迟恢复力用双曲线模型, 两个模型的转换用屈服位移相等的准则, 从图中可以看出, 最大相差分别约为 8.48 % 和 8.76 %。

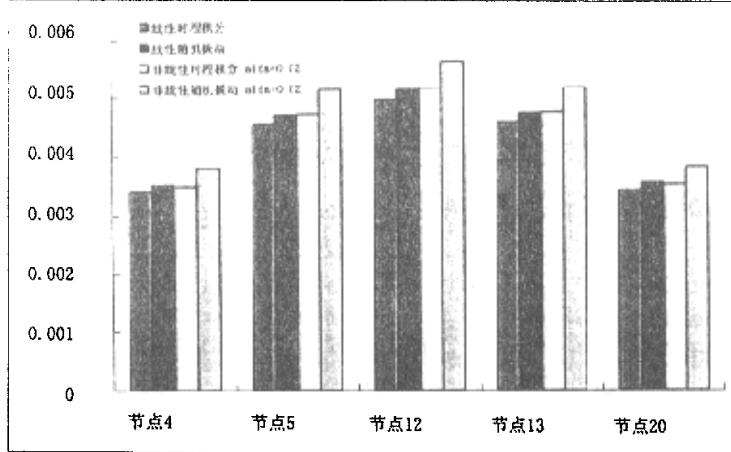


图 6-6 桥面节点纵向位移

fig 6-6 Longitudinal displacement distribution on the deck

2. 只允许中间三个桥墩底处出现塑性铰，塑性铰的参数为：

$K=2.0E12$ ,  $\alpha=0.98$  或  $0.02$ ,  $\gamma=\beta=0.5$ ,  $A=1.0E-12$ ,  $n=1.0$

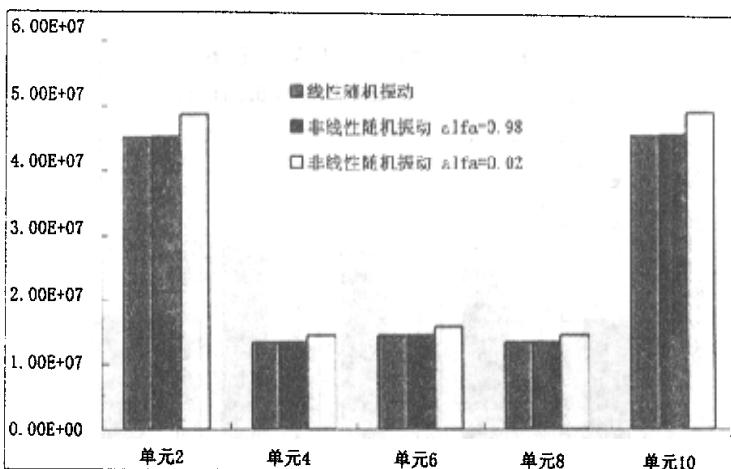


图 6-7 桥墩底部弯矩分布图

fig 6-7 pier bottom moment distribution

采用随机振动法计算了不同  $\alpha$  取值时桥墩底部弯矩极值响应，计算结果如图 6-7 所示。无论是线性情形，还是非线性情形两个边墩的底部弯矩相对于中间三个墩都要大，这主要是因为边墩的抗弯刚性要远大于中间墩。当塑性铰的非线性程度较小 ( $\alpha=0.98$ ) 时，非线性的计算结果与线性计算结果是很接近的，实际上，当  $\alpha=1$  时，非线性随机振动的计算结果是和线性随机振动的计算结果一致的。当塑性铰的非线性程度较大 ( $\alpha=0.02$ ) 时，非线性随机振动的计算结果与线性随机振动的计算结果相比有较大差异，弯矩相差最大达 8%。从图

6-7 还可以看出，当塑性铰的刚度折减增大时，边墩抵抗弯矩增加的效应要比中间墩更加明显，这是因为，两个边墩为制动墩，其刚性很大，一直是处于弹性状态工作。

3. 只允许第二桥墩底处出现塑性铰，塑性铰的参数为：

$$K=2.0E12, \alpha=0.02, \gamma=\beta=0.5, A=1.0E-12, n=1.0$$

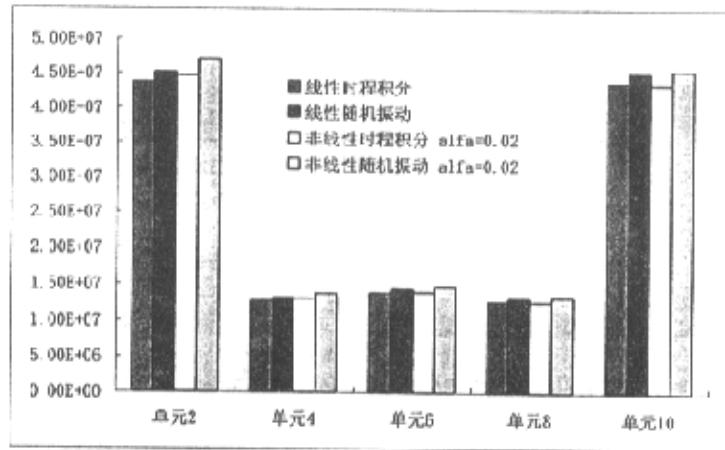


图 6-8 桥墩底部弯矩分布图

fig 6-8 pier bottom moment distribution

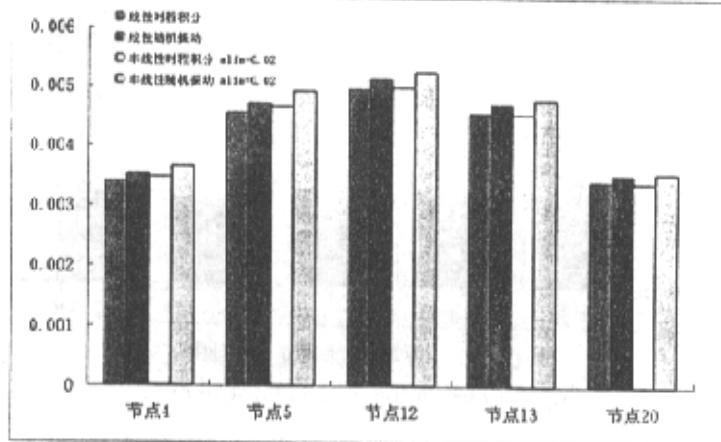


图 6-9 桥面节点纵向位移

fig 6-9 Longitudinal displacement distribution on the deck

当只考虑 4 号单元出现塑性铰的情形，其计算结果如图 6-8 和 6-9 所示。这时弯矩和位移分布失去了对称性。其中，图 6-8 给出了桥墩底部弯矩极值响应，图 6-9 给出了桥面节点的位移极值响应。同样采用了随机振动和时程积分两种方法进行计算。对于线性体系，随着时程积分激励样本的增加，其计算的

结果比较精确地趋近于随机振动的计算结果。但是当体系进入弹塑性工作状态，由于等效线性化方法本身所固有的误差，对于最终计算结果就产生了附加的误差。但从本文的计算结果上来看，采用等效线性化的计算结果和时程积分结果相比相差仍非很远，有一定的参考价值。此外，在等效线性体系的求解过程中采用了虚拟激励法，不但效率很高，而且在计算过程中并不引入附加的误差。

算例二：图 6-10 为美国 CALT 桥计算模型。桥长 95.38 米，其有限元模型共有 78 个节点，415 个自由度。桥梁在地震作用下，桥墩处两端发生弯曲破坏。应用本文叙述的模型，假定只允许结构在两边门字型桥墩底部出现塑性铰。因资料所限，暂按中国建筑结构抗震设计规范（GBJ11-89）反算出的当量地面加速度功率谱曲线作为地面输入，按二类场地土，8 度远震，地震方向为 X 方向，进行桥梁的局部非线性分析，计算桥面上各截面处的竖向弯矩。塑性铰的参数选取为：

$$K=1.0E12, \alpha=0.8 \text{ 或 } 0.02, \gamma=\beta=0.5, A=1.0, n=1.$$



图 6-10 CALT 桥动力计算模型  
fig 6-10 FEM model of CALT bridge

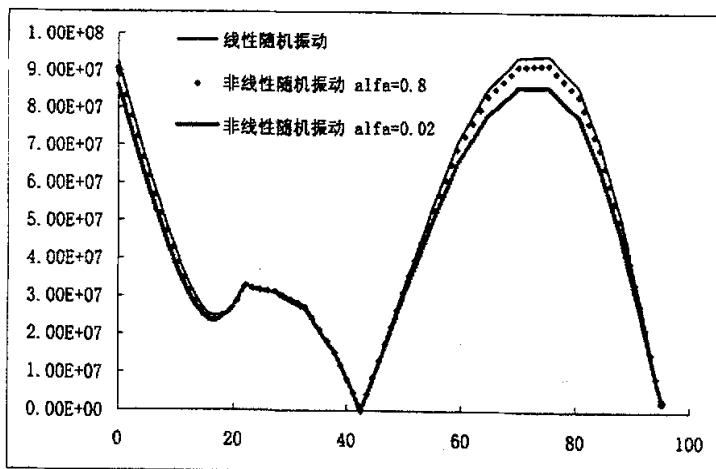


图 6-11 主甲板竖向弯矩分布图  
fig 6-11 Vertical moment distribution along the deck

从图 6-11 中可以看出，非线性计算结果与线性计算结果在极大值处明显

不同，当非线性程度较小 ( $\alpha=0.8$ ) 时，计算所得的结果与线性分析相近。但当接近理想塑性 ( $\alpha=0.02$ ) 时，主梁最大弯矩相差达 10%。算例二是一座实际的桥，用本文的方法计算得到了比较合理的结果，进行非线性分析用时 1745s。图 6-12 是主甲板竖向位移分布图。图 6-13 是两边门字型桥墩底部弯矩分布图。对于两边门字型桥墩，分析结果相差最大达 15%。

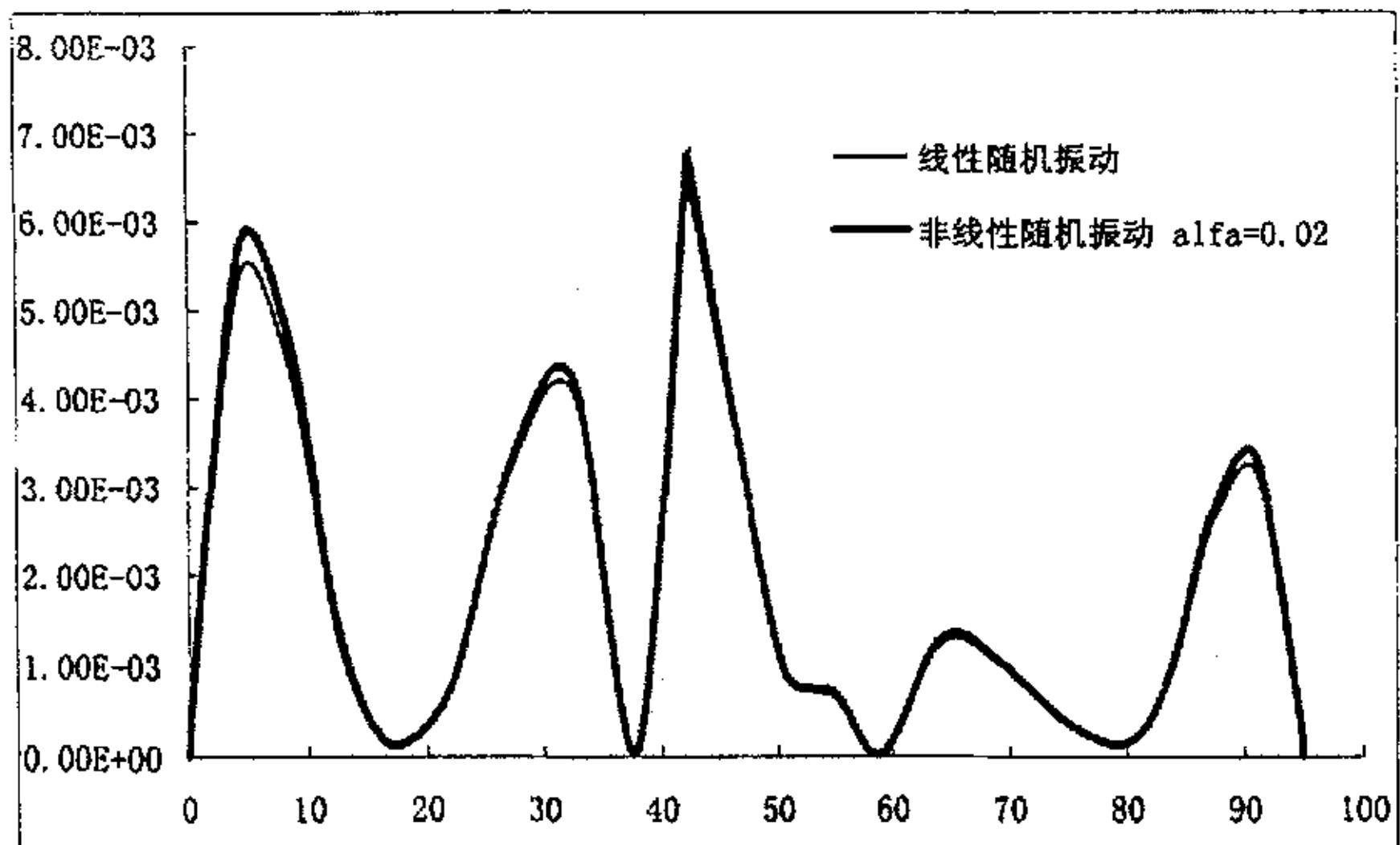


图 6-12 主甲板竖向位移分布图

fig 6-12 Vertical displacement distribution along the deck

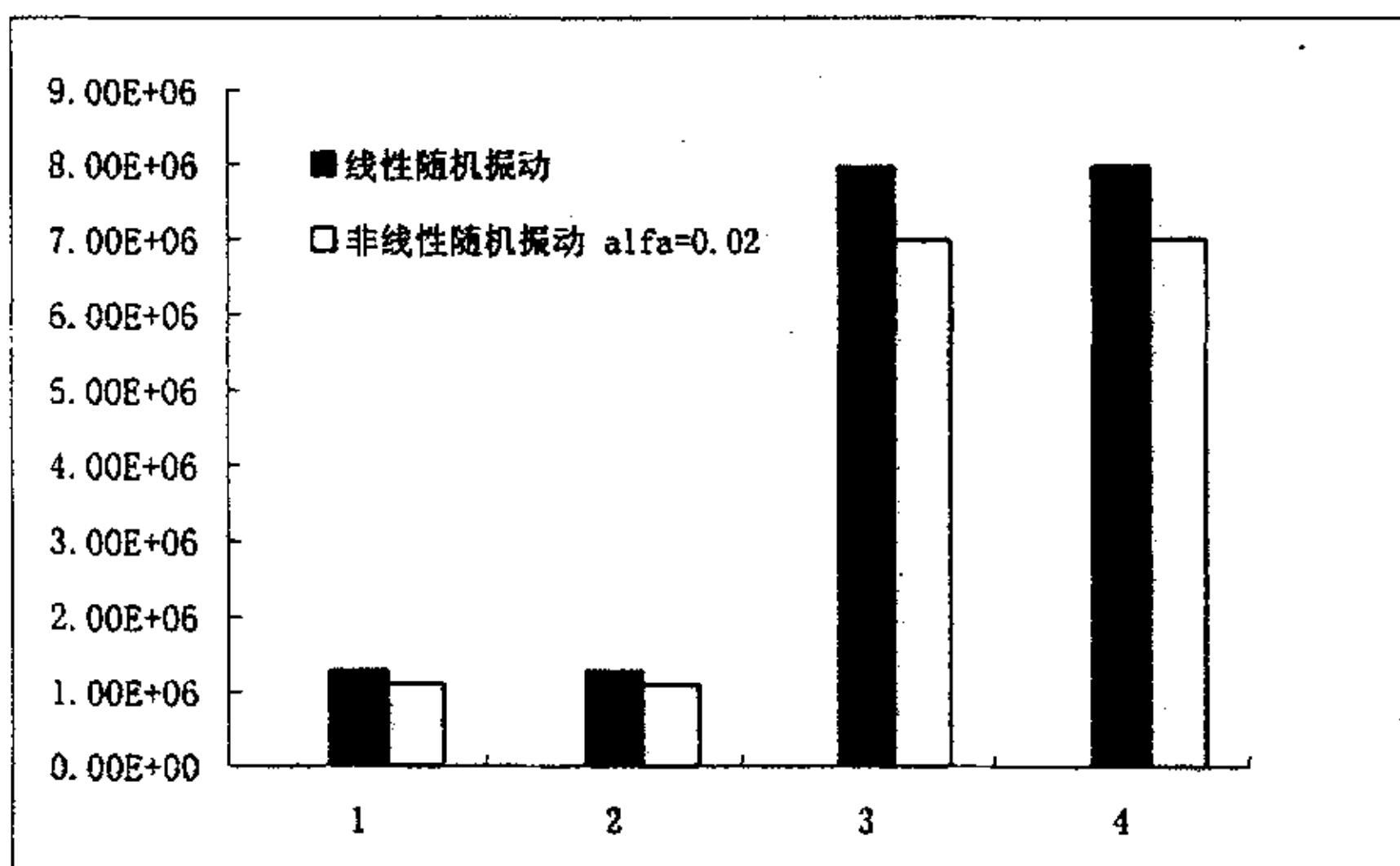


图 6-13 桥墩底部弯矩分布图

fig 6-13 pier bottom moment distribution

## 6. 6 小结

在强烈地震作用下，结构会进入局部弹塑性状态。本文的初步研究表明，采用虚拟激励法结合等价线性化法进行随机振动分析是可行的途径。该方法充

分利用了虚拟激励法求解复杂线性结构高效、精确的优点，以一系列线性问题的迭代分析，迅速地求得原非线性问题合理的近似解，可以为大型复杂结构的非线性分析方便地提供较为可靠的分析结果，是一个有实用价值的非线性抗震分析方法。

## 7 总结与展望

从六十年代起，随机振动作为一门新兴的技术学科出现以来，已有了巨大的发展，越来越成为许多工程领域重要的分析和设计手段。

线性随机振动的基本理论框架已经建立，已有了大量的专著问世，对各类工程问题进行了详尽的论述，提出了多种完善的解决方法。但在实际工程领域中，这些已经建立的比较完善的理论成果却并未得到充分的应用。究其原因，现有方法的计算复杂性是造成这一现象的主要原因。例如，地震工程界普遍认为按概率性的随机振动理论进行结构抗震分析是较为合理的，分析理论也早已建立，但由于计算量太大，在设计中还是普遍采用比较简化的反应谱理论。在不得不采用随机分析的场合，也是将计算模型取得十分简单；或是借助于精度颇成问题地近似，以减少计算量。这种现象在土建工程、航空航天、机械制造、海洋平台等设计领域屡见不鲜。近十几年来，虚拟激励法的出现和发展，从计算力学的角度突破了传统方法的计算复杂性，为随机振动理论广泛地应用于工程领域开创了一条新路。

由于工程领域中非线性现象的大量存在，同时也由于线性随机振动理论已发展得比较成熟，非线性随机振动问题现已成为随机振动理论研究的中心。但由于问题的复杂性，虽然已发展了较多的分析方法，离工程应用还是有很大的距离。主要原因仍然是计算的复杂性，求解非线性问题比求解线性问题计算量远大得多。

本文探讨了将虚拟激励法应用于非线性随机响应分析。通过与等效线性化法的结合，首先研究了一类较简单的结构型式—剪切型结构在平稳激励下的非线性响应。对单自由度滞迟系统，计算结果同用精细时程积分求解等效线性化后的李亚普诺夫方程法的结果和 Monte—Carlo 法结果相比较；对多自由度滞迟系统，计算结果与时程积分方法的结果相比较，结果均令人满意。本文对工程结构地震作用下的局部非线性随机振动作了探索性的研究，将离散塑性铰模型与虚拟激励法和等效线性化法相结合来求解这类非线性问题，对本文的算法应用到工程实际中的可行性进行了探讨。以上的算法已在大型动力程序 DDJ—W 中实现，并试算了实际的桥梁，得到了较合理的结果。

无论是单自由度系统还是多自由度系统，平稳响应问题还是非平稳响应问题，虚拟激励法都有简单而统一的计算公式，因而编程方便，很适合应用于大型结构多自由度系统的计算。对于平稳响应分析，可用振型分解法降阶求解；对于非平稳响应分析，可用逐步积分法求解。对于非线性问题，在以上方法的基础上要迭代求解，因而其精确、高效的优点比之传统方法有着更充分的体现。等效线性化法是在工程实际中最有应用潜力的方法。只要等效线性化法适用，虚拟激励法就可用来高效地求解非线性随机振动问题。因此，虚拟激励法是解决一大类非线性随机振动问题的很有希望的途径。而与离散塑性铰模型方法相

结合，则可以解决工程中一大类产生塑性铰的局部非线性问题。

非线性随机振动问题是随机振动领域内的一个难点，研究起来有相当大的难度。本文工作是基于工程分析的角度对此问题应用虚拟激励法进行的初步探索。今后应从以下几个方面进行进一步研究和发展：

1. 用虚拟激励法研究存在非线性的更复杂的结构型式。在实际的工程领域中，非线性结构是多种多样的，如在地震工程中，由于各种结构形式不同，材料各异，就存在着模型化为弯剪型、空间剪扭型、杆系型、层间剪弯型等较复杂的结构。对于各种具体结构以及具体的非线性问题，虚拟激励法如何应用，尚需进一步研究。
2. 用虚拟激励法研究非线性结构在更复杂的激励形式下的响应。本文主要研究了结构在平稳随机激励下的响应，并且没有考虑行波效应和激励间的部分相干性等复杂情况。这些都需要进一步研究。
3. 用虚拟激励法研究非线性结构在二维随机激励下的响应。许多工程结构在二维随机激励作用下，存在着强度相互影响和刚度相互影响的效应，而且，其非线性性态有着更复杂的表现。研究这一类问题，是非常有工程实际意义的。
4. 运用离散铰模型进行工程结构局部非线性分析时，离散铰刚度的选取还有待进一步研究。

总之，用虚拟激励法来求解非线性随机振动问题，有着很广阔的应用前景，也有很多进一步的工作有待去做。

## 参考文献

- [1] 朱位秋. 随机振动. 北京: 科学出版社, 1992
- [2] Thomas K, Caughey. Equivalent linearization Techniques. *Journal of The Acoustical Society of America*, 1963, 35(11):1706-1711
- [3] T.S Atalik, S Utku. Stochastic Linearization of Multi-Degree-of Freedom Non-linear Systems. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 1976, 4:411-420
- [4] Y.K Lin. Probabilistic Structural Dynamics. *Mc Graw-Hill*, 1967
- [5] 庄表中, 陈乃立, 高瞻. 非线性随机振动理论及应用, 杭州: 浙江大学出版社, 1986
- [6] 林家浩. 随机地震响应的确定性算法. 地震工程与工程振动, 1985, 5(1):89-94
- [7] 林家浩. 随机地震响应功率谱快速算法. 地震工程与工程振动, 1990, 10(4):38~46
- [8] 林家浩. 多相位输入结构随机响应分析. 振动工程学报, 1992, 1:73-77
- [9] 林家浩. 非平稳随机地震响应的精确高效算法. 地震工程与工程振动, 1993, 13(1):24-29
- [10] Lin Jiahao. A Fast CQC Algorithm of PSD Matrices for Random Seismic Response. *Computers & Structure*, 1992, 44(3):683-687
- [11] Lin J.H., Zhang W.S and Li J.J. Structural Responses to Arbitrarily Coherent Stationary Random Excitations. *Computers & Structures*, 1994, 50(5):629-633
- [12] J.H. Lin, W.S. Zhang, F.W. Willians. Pseudo Excitation Algorithm for Non-stationary Random Seismic Response. *Engineering Structures*, 1994, 16(4):241-247
- [13] 钟万勰. 一个高效结构随机响应算法系列—虚拟激励法. 自然科学进展—国家重点实验室通讯, 1996, 6(4):395-401
- [14] 李建俊. 随机地震响应的虚拟激励法. 大连理工大学博士论文, 1994
- [15] Kiureghian A D, Neuenhofe A. Response Spectrum Method for Multi-support Seismic Excitations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1992, 21:713-740
- [16] Emesto H Z, Vanmarcke E H. Seismic Random Vibration Analysis of Multi-support Structural Systems. ASCE, *Journal of Engineering Mechanics*, 1994, 120:1107-1128
- [17] Kiureghian A D, Neuenhofer A. A Discussion on 'Seismic Random Vibration analysis of Multi-support Structural Systems'. ASCE, *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, 121:1037
- [18] Emesto H Z, Vanmarcke E H. Closure on The Discussion. ASCE, *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, 121:1038
- [19] Carassale L, Tubino F, Solari G. Seismic Response of Multi-supported Structures by Proper Orthogonal Decomposition. *Proc. Int. Conf. On Advances in Structural Dynamics (ASD2000)*, Hong Kong, Elsevier Science Ltd, 2000, 827-834
- [20] Lin Y K, Zhang R, Yong Y. Multiply Supported Pipeine Under Seismic Wave Excitation, *Journal of Engineering Mechanics*, 1990, 116:1094-1108

- [21] 苗家武, 胡世德, 范立础. 大型桥梁多点激励效应的研究现状与发展. 同济大学学报, 1999, 27(2):189-193
- [22] Kiureghian A D. A Coherency Model for Spatially Varying Ground Motions, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1996, 25:99-111
- [23] Perotti F. Structural Response to Non-stationary Multi-support Random Excitation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1990, 19:513-527
- [24] Berrah M, Kausel E. Response Spectrum analysis of Structures Subjected to Spatially Varying Motions. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 1992, 21:461-479
- [25] Dumanoglu A A, Severn R T. Stochastic Response of Suspension Bridges to Earthquake Forces. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1990, 19:133-152
- [26] Harichandran R S, Hawwari A, Sweidan B N. Response of Long-span Bridges to Spatially Varying Ground Motion. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 1996, 122:476-484
- [27] T.K Caughey. Random Excitation of A System with Bilinear Hysteresis. *J. Appl. Mech. Trans, ASME*, 1960, 27(10):649-652
- [28] W.D Iwan, L.D Lutes. Response of The Bilinear Hysteretic System to Stationary Random Excitation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, 43(3):545-552
- [29] W.D Iwan. A Distributed Element Model for Hysteresis and Its Steady-state Dynamic Responses. *J. Appl. Mech.*, 1966, 33:893-900
- [30] P.C Jennings. Earthquake Responses of A Yielding Structure. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 1965, 91:41-68
- [31] Y.K Wen . Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitation. *J. Appl.. Mech, ASME*, 1980, 47(1):150-154
- [32] Y.K Wen, M.ASCE. Method for Random Vibration of Hysteretic Systems, *J. Eng. Mech. Div.*, 1976, 4:249-263
- [33] Y.K Wen, Methods of Random Vibration for Inelastic Structures. *Appl. Mech. Rev*, 1989, 42(2):39-52
- [34] 欧进萍, 王光远. 结构随机振动. 北京: 高等教育出版社, 1998
- [35] 张亚辉. 复杂结构在多种荷载工况下的屈曲及动力分析. 大连理工大学博士论文, 1999
- [36] Davernport A G. Note on the distribution of the largest value of a random function with application to gust loading. *Proc.Inst.Civil Eng.*, 1961, 28:187-196
- [37] Vanmarcke E H. Properties of spectral moments with application to random vibration, *J.Eng.Mech.Div.Proc.ASCE*, 1972, 98(EM2)
- [38] 钟万勰. 计算结构力学与最优控制. 大连理工大学出版社, 1993
- [39] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法. 大连理工大学学报, 1994, 34(2):131~136
- [40] Jiahao Lin, Weiping Shen, F W Williams. Accurate high-speed computation of non-stationary random structural response . *Engineering Structures* , 1997 ,

- [41] 余锟, 沈德安. 滞回系统随机振动的累积量截断法. 振动与冲击, 1989, 2:1-11
- [42] R.N. Iyengar, P.K Dash. Study of the Random Vibration of Nonlinear Systems by the Gaussian Closure Technique. *J. Appl. Mech.*, 1978, 45(6):393-399
- [43] 朱位秋, 雷鹰. 能量包线随机平均法在双线性迟滞系统随机响应分析中的应用. 航空学报, 1989, 10(1):28-34
- [44] J.B Roberts. The Response of A Oscillator with Bilinear Hysteresis to Stationary Random Excitation. *J. Appl. Mech.*, 1978, 45:923-928
- [45] T.T Baber, Y.K Wen. Stochastic Response of Multistory Yielding Systems. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 1982, 10:403-416
- [46] T.T Baber, Y.K Wen. Random Vibration of Hysteretic Degrading Systems. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 1981, 107:1069-1087
- [47] T.T Baber, M.N Noori. Random Vibration of Degrading, Pinching Systems. *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 1985, 111:1010-1026
- [48] Y.J Park, Y.K Wen, A.H Ang. Random Vibration Under Bidirectional Ground Motion. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 1986, 14:543-557
- [49] 王军. 非线性结构受多相位随机激励的虚拟激励分析. 大连理工大学硕士论文, 1999
- [50] 王亚勇, 郭子雄, 吕西林. 建筑抗震设计中地震作用取值——主要国家抗震规范比较. 建筑科学, 1999, 15(5):36~39
- [51] 肖明葵, 严涛, 王耀伟, 赖明. 弹塑性反应谱研究综述. 重庆建筑大学学报, 1999, 21(5):117~121
- [52] 林家浩, 丁殿明, 田玉山. 串联多自由度体系弹塑性地震反应分析. 大连理工大学学报, 1979, 18(4):41~53
- [53] 林家浩, 孙焕存. 斜交平面杆系非线性抗震分析. 大连理工大学学报, 1983, 22(4):1~7
- [54] 李国豪. 工程结构抗震动力学. 背景: 上海科学技术出版社, 1980
- [55] Fabio Casciati, Lucia Faravelli. Methods of Non-linear Stochastic Dynamics for the Assessment of Structural Fragility. *Nuclear Engineering and Design*, 1985, 90:341~356
- [56] 钟万勰. 计算结构力学微机程序设计. 北京: 水利电力出版社, 1986
- [57] R. Yilmaz, M. M. Hanna. Efficient Mode Superposition Algorithm for Seismic Analysis of Non-linear Structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1992, 21:849~858
- [58] 林家浩, 张亚辉, 赵岩. 大跨度结构抗震分析方法及近期进展. 力学进展, 2001, 31(3):350~360

## 附录一：滞迟等效线性系统的建立

如图 1 所示之地震作用下的剪切型弹塑性滞迟系统，其第  $i$  层的动力平衡方程为

$$m_i \ddot{x}_i + c_i \dot{u}_i - c_{i+1} \dot{u}_{i+1} + V_i(u_i, z_i) - V_{i+1}(u_{i+1}, z_{i+1}) = -m_i \ddot{x}_g \quad (1)$$

$$\dot{z}_i = -\gamma_i |\dot{u}_i| z_i^{n-1} - \beta_i u_i |z_i|^n + A_i u_i \quad (2)$$

式中  $u_i$  为层间相对位移， $u_i = x_i - x_{i-1}$ ； $V_i$  为恢复力，是线性刚度项  $\alpha_i k_i u_i$  与滞迟刚度项  $(1 - \alpha_i) k_i z_i$  的函数。

在式 (2) 中  $n$  取 1。参照 (5-4) 式等效线性化后为

$$\dot{z}_i + p_i \dot{u}_i + h_i z_i = 0 \quad (3)$$

这里

$$p_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \gamma_i \frac{E[\dot{u}_i z_i]}{\sigma_{u_i}} + \beta_i \sigma_{z_i} \right) - A_i \quad (4)$$

$$h_i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \gamma_i \sigma_{u_i} + \beta_i \frac{E[\dot{u}_i z_i]}{\sigma_{z_i}} \right) \quad (5)$$

由此，可写出图 1 所示滞迟系统的动力方程为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K^e]\{x\} + [K^h]\{z\} = -[M]\{E\}\ddot{x}_g \quad (6)$$

$$\{\dot{z}\} + [P]\{\dot{x}\} + [H]\{z\} = 0 \quad (7)$$

其中各矩阵的具体形式为

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & & \\ c_2 + c_3 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -c_n \\ Sym & & c_n & \end{bmatrix}$$

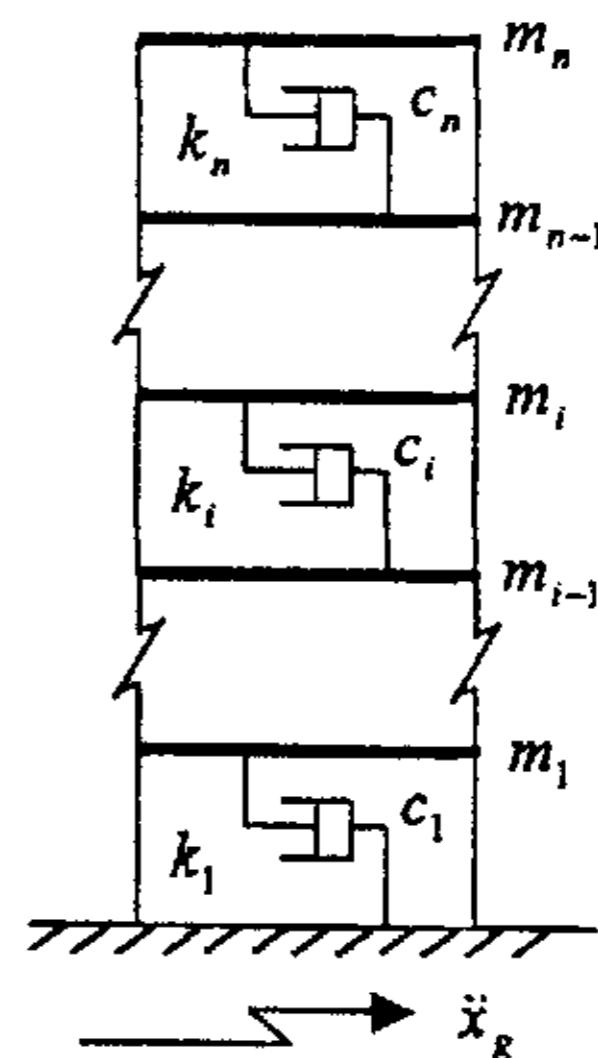


图 1 地震作用下的剪切型结构  
fig 1 shear-type structure under earthquake excitation

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 & -\alpha_2 k_2 & & \\ & \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 & \ddots & \\ Sym & & \ddots & -\alpha_n k_n \\ & & & \alpha_n k_n \end{bmatrix}$$

$$[K^h] = \begin{bmatrix} (1-\alpha_1)k_1 + (1-\alpha_2)k_2 & -(1-\alpha_2)k_2 & & \\ & (1-\alpha_2)k_2 + (1-\alpha_3)k_3 & \ddots & \\ Sym & & \ddots & -(1-\alpha_n)k_n \\ & & & (1-\alpha_n)k_n \end{bmatrix}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ -p_2 & p_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -p_n & p_n \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_n \end{bmatrix}$$

$$\{E\} = \{1, 1, \dots, 1\}^T, \quad \{x\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T, \quad \{z\} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}^T$$

为方便地编写程序，不改变结构的线性刚度阵，将方程（6）改写为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} + [K^h]\{z\} - \{x\} = -[M]\{E\}\ddot{x}_g \quad (8)$$

其中

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ & k_2 + k_3 & \ddots & \\ Sym & & \ddots & -k_n \\ & & & k_n \end{bmatrix}$$

## 致谢

本文的工作是在导师林家浩教授的悉心指导下顺利完成的。这里首先要感谢我的导师林家浩教授。三年的研究生学习期间，林老师在学术上对我悉心指导，严格要求，在思想和生活方面也给予周到细致的关怀。林老师严谨求实的治学态度、勤奋工作的敬业精神、锐意开拓的创新精神以及宽厚的待人处事风格都使我难以忘怀，让我受益非浅，也是我今后学习的榜样。衷心感谢林老师几年来的谆谆教诲和多次提供给我的学习和锻炼机会。

衷心感谢多年朝夕相处的张亚辉，赵岩，易平，曹建华，夏杰，戴先进等众师兄弟（姐妹）对我的帮助，特别感谢师兄张亚辉和赵岩在学习期间和论文形成过程中给予我的帮助。感谢许林，阮诗伦，刘伟，王博，刘永。

衷心感谢张伟，张希，楚锡华，曹宁源，张崎及所有力学系 99 研的同学和所有帮助过我的朋友们。

感谢辅导室赵广玲老师、党总支周桂英老师以及在各方面曾经帮助和关心我的师长们。

感谢我的父母、姐姐、姐夫和亲戚朋友们对我的求学生涯中始终如一的支持。

衷心感谢所有在学业和生活上关心帮助过我的人！