

## 摘要

首先, 本文基于全相位 DFT 数字滤波器的直接频域实现网络结构, 对输入或输出数据加窗, 导出了一种新型的加窗全相位 DFT 数字滤波器。它的频率特性比不加窗又有很大提高, 幅频响应等于或逼近频率采样值, 通带纹波极小, 阻带衰减极大, 过渡带陡峭, 零相位, 滤波性能和实现的简洁性超过其他传统方法。它除了可以采用通常的卷积结构外, 也可以采用直接频域网络实现, 本文给出了它的直接频域网络组成及其简化算法。这种网络具有实时自设计功能, 可构成时变系统用于滤波器传递函数实时可变的场合, 便于集成为频响和长度均可编程的通用零相位数字滤波器, 是数字滤波器的一种新的设计理念和实现结构。

其次, 本文提出一种新型的半带滤波器—全相位半带滤波器 (APHF), 这种半带滤波器具有频率采样特性, 通带和阻带纹波小, 过渡带陡峭, 频率响应没有过冲, 可以直接进行谱分解用于设计二通道完全重建正交镜像滤波器 (QMF) 组。本文针对这种半带滤波器提出了新的高精度谱分解方法。与传统半带滤波器谱分解设计二通道完全重建 QMF 组相比, QMF 组的重建精度由  $10^{-3}$  dB 提高到  $10^{-6}$  dB, 是半带滤波器和准确重建二通道 QMF 组的一种新的设计方法。

最后, 本文把加窗全相位 DFT 数字滤波器的设计方法用于设计具有上述优点的全相位 M 带滤波器, 从而得到全相位均匀滤波器组。全相位均匀滤波器组可以用于时频分析—加窗傅里叶变换。小波变换是时频分析的有力工具, 但不适合线性 chirp 信号的分析。加窗全相位可以有效减小窗函数的旁瓣, 特别适用于线性 chirp 信号的时频分析。

**关键词:** DFT (discrete fourier transform) /IDFT 滤波; 全相位 DFT 数字滤波器; 加窗全相位 DFT 数字滤波器; 全相位半带滤波器; 二通道完全重建 QMF 组; 全相位均匀 DFT 滤波器组; 时频分析

## ABSTRACT

First, based on the architecture of the APDFT filter, this paper brings out a new type of zero-phase digital filter called the windowed all phase DFT (WAPDFT) digital filter, by windowing the input and/or output data of the DFT/IDFT blocks in the APDFT filter network. The frequency characteristics of the APDFT filter are improved greatly by this way. While the frequency response of the filter still passes or approaches the desired frequency samples, it has much less pass-band and stop-band ripples, and sharp transition. The WAPDFT filter can be implemented with common convolution structure and the frequency domain direct network like the APDFT filter, and realized in a simplified structure also. This paper gives the network of the new structure and the associate algorithm. This network is not sensitive to finite word length effect compared with traditional frequency sampling structures. It has real-time self-design function and may constitute a time-variant system. It can be easily integrated into a universal zero-phase digital filter with frequency response and length programmable.

Second, this paper proposes a new type of half band filter—the all phase half band filter (APHF). It has the property of frequency sampling, i.e. the response curve passes desired frequency samples. Its frequency response has very small pass-band ripple, great stop-band attenuation, sharp transition band and without overshooting whether in stop-band or pass-band. It can be used to design two-channel perfect reconstruction QMF (quadrature mirror filter) banks by factorizing the spectrum for the APHF directly. A new method is given to get the spectral factors of the APHF with high precision. Compared with traditional spectral factorization method of designing two-channel perfect reconstruction QMF banks, the QMF banks designed by factorizing APHF has better reconstruction precision that the error is decreased from  $10^{-3}$  dB to  $10^{-6}$  dB. It's a new method for designing half band filters and two-channel perfect reconstruction QMF banks.

Finally, using the WAPDFT filter design method, this paper proposes an all phase M band filter with all the advantages mentioned above and an all phase uniform DFT filter bank. The uniform DFT filter bank can be used to time-frequency analysis—windowed fourier transform. Although wavelet transform is a useful tool for time-frequency analysis, it is not suitable for analysing linear sharp signals.

Whereas, the all phase uniform DFT filter bank can do it very well duo to the windowed all phase can efficiently reduce the side lobes of the window.

**Key word:** DFT/IDFT filtering; all phase DFT digital filter; windowed all phase DFT digital filter; all phase half band filter; two-channel perfect reconstruction QMF banks; all phase uniform DFT filter bank; time-frequency analysis

## 独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作和取得的研究成果，除了文中特别加以标注和致谢之处外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 天津大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文作者签名: 徐婉婉 签字日期: 2005 年 2 月 22 日

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 天津大学 有关保留、使用学位论文的规定。特授权 天津大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，并采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编以供查阅和借阅。同意学校向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘。

(保密的学位论文在解密后适用本授权说明)

学位论文作者签名: 徐婉婉

导师签名: 侯丽娟

签字日期: 2005 年 2 月 22 日

签字日期: 2005 年 2 月 22 日

# 第一章 多抽样率系统基础

本章是关于多抽样率（下文简称‘多率’）系统和滤波器组的基础知识和应用的介绍，是其它各章的基础。

## 1.1 多率的基本运算

### 1.1.1 抽取和内插

多率系统中最基本的运算就是抽取和内插，这样做的目的是为了满足系统中各处需要不同的抽样率，以利于信号的处理、编码、传输和存储，有时则是为了节省计算工作量。使抽样率降低的抽样率转换称为抽取，这样的抽样率转换器称为抽取器；使抽样率升高的抽样率转换称为内插，这样的抽样率转换器称为内插器。

#### 抽取因子为 $M$ 的抽取器

抽取因子为  $M$  的抽取器如图 1.1-1 (a) 所示， $x(n)$  是输入信号， $y_D(n)$  是输出信号， $M$  是整数。抽取器的输入输出关系为：

$$y_D(n) = x(Mn) \quad (1.1.1)$$

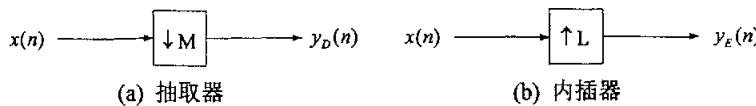


图 1.1-1 抽取器和内插器

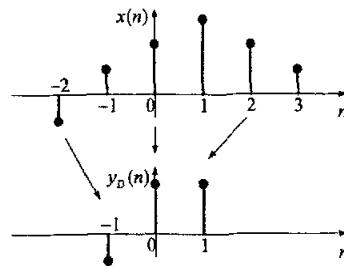


图 1.1-2 抽取因子  $M = 2$  时  $x(n)$  与  $y_D(n)$  的关系

信号  $x(n)$  通过抽取器时，只有  $M$  的整数倍时刻点被保留下，当抽取因子  $M = 2$ ， $x(n)$  与  $y_D(n)$  的关系如图 1.1-2 所示。下文将证明，由于抽取器使信号的抽样率

降低可能导致频谱混叠，致使  $x(n)$  无法用  $y_D(n)$  恢复。

### 内插因子为 $L$ 的内插器

内插因子为  $L$  的内插器如图 1.1-1 (b) 所示， $L$  是整数。抽取器的输入输出关系为：

$$y_E(n) = \begin{cases} x(n/L), & n/L \text{ 是整数} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

当内插因子  $L=2$  时， $x(n)$  与  $y_E(n)$  的关系如图 1.1-3 所示。很显然，内插器没有导致信息的丢失， $x(n)$  可以用  $y_E(n)$  完全恢复。

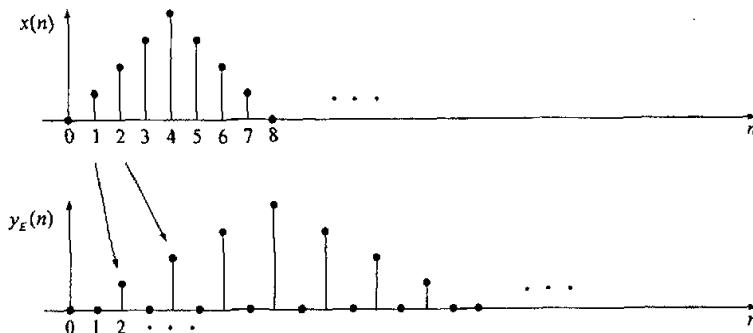


图 1.1-3 内插因子  $L=2$  时  $x(n)$  与  $y_E(n)$  的关系

### 抽取器和内插器的频域分析

内插器的频域输入、输出关系为：

$$\begin{aligned} Y_E(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_E(n)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_E(kL)z^{-kL} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-kL} = X(z^L) \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

因此， $Y_E(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$ 。 $Y_E(e^{j\omega})$  的带宽是  $X(e^{j\omega})$  的带宽的  $1/L$ ，如图 1.1-4 (a)，(b) 所示。图 (b) 中每个周期内除了包含频点  $\omega = 2k\pi$  ( $k$  为整数) 的谱，其他频谱称为镜像谱。

抽取器的频域输入、输出关系为

$$Y_D(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j(\omega-2\pi k)/M}) \quad (1.1.4)$$

证明： $y_D(n)$  的  $z$  变换为

$$Y_D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_D(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(Mn)z^{-n}$$

定义中间变量

$$x_1(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ 为 } M \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.5)$$

因此,  $y_D(n) = x(Mn) = x_1(Mn)$

$$Y_D(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(Mn)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k/M} \quad (1.1.6)$$

即

$$Y_D(z) = X_1(z^{1/M}) \quad (1.1.7)$$

问题的关键是如何用  $X(z)$  表达  $X_1(z)$ 。由 (1.1.5) 式得:

$$x_1(n) = C_M(n)x(n) \quad (1.1.8)$$

式中  $C_M(n)$  为梳状序列, 定义式为:

$$C_M(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 为 } M \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.1.9)$$

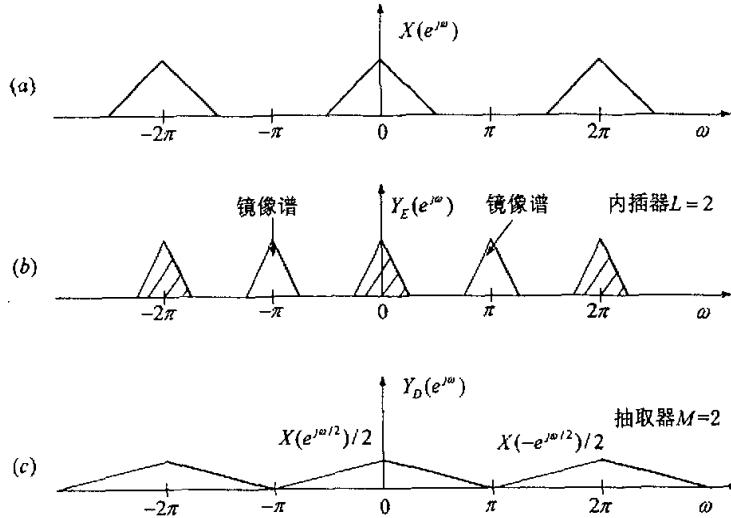


图 1.1-4 内插器和抽取器的频域特性。(a)  $x(n)$  的频域特性,  
(b)  $y_E(n)$  ( $L=2$ ) 的频域特性, (c)  $y_D(n)$  ( $M=2$ ) 的频域特性。

梳状序列  $C_M(n)$  可以表示为:

$$C_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W_M^{-kn} \quad (1.1.10)$$

式中,

$$W_M = e^{-j2\pi f M} \quad (1.1.11)$$

在不致引起混淆时,  $W_M$  的下标一般省略不写。此时  $x_i(n)$  的  $z$  变换为:

$$X_i(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) W^{-kn} z^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (z W^k)^{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z W^k) \quad (1.1.12)$$

把上式代入 (1.1.7) 式得:

$$Y_D(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W^k) \quad (1.1.13)$$

将  $z = e^{j\omega}$  代入, 得 (1.1.4) 式。频谱  $Y_D(e^{j\omega})$  几何上可以理解为: (1) 对  $X(e^{j\omega})$  进行  $M$  倍膨胀得到  $X(e^{j\omega/M})$ , (2) 复制  $M-1$  个  $X(e^{j\omega/M})$ , 然后在  $\omega$  轴上分别右移  $2\pi k$ , (3) 对 (1)(2) 产生的谱相加并乘以  $1/M$ 。当  $M=2$  时, 相应于图 1.1-4(a),  $Y_D(e^{j\omega})$  的频谱如图 1.1-4(c) 所示。

如果  $x(n)$  的频谱如图 1.1-5(a) 所示, 对  $x(n)$  进行抽样, 抽取因子  $M=2$ ,  $y_D(n)$  的频谱发生混叠, 如图 1.1-5(b) 所示。由香农采样定理可知, 当频谱发生混叠时, 信号  $x(n)$  无法完全恢复。为了避免混叠, 要求  $x(n)$  为低通带限信号且  $|\omega_c| < \pi/M$ 。当然, 这不是抽样信号完全恢复的必要条件。如果  $x(n)$  的频谱在区间  $0 \leq \omega < 2\pi$  内, 除了在区间  $\omega_1 < \omega < \omega_1 + 2\pi/M$  上是非零的, 而其他区间上都为零, 也可以由抽样信号完全恢复。抽样信号频谱的无混叠定理见文献[1]。

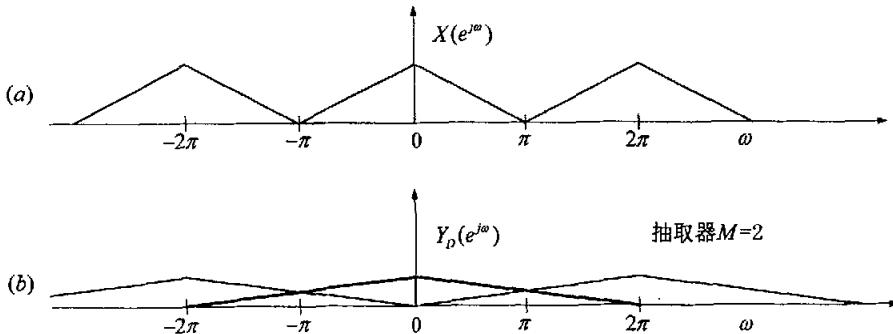


图 1.1-5 抽取器使频谱发生混叠

上述抽取器和内插器是实现整数倍抽取和内插, 分数倍抽取和内插在本文中不涉及, 所以省略。容易证明抽取器和内插器是线性时变系统。

#### 抽取滤波器和内插滤波器

在应用中抽取器前面往往连接一个低通滤波器, 称之为抽取滤波器, 其频

率特性如图 1.1-6 (b) 所示, 此滤波器的作用是保证信号是带限的, 图中  $\omega_p$  表示通带下限频率,  $\omega_s$  表示阻带上限频率。其带宽由混叠的容忍程度决定, 在后面的章节中 (QMF 组) 将看到一定的混叠是允许的, 因为这种混叠可以被完全消除。完整的抽取电路如图 1.1-6 (a) 所示。同样, 在应用中内插器后面常连接一个低通内插滤波器。此滤波器的作用是保留图 1.1-4 (b) 中阴影部分 (非镜像谱), 频率特性如图 1.1-7 (b) 所示。完整的内插电路如图 1.1-7 (a) 所示。

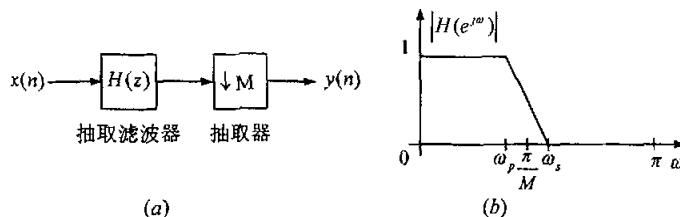


图 1.1-6 (a) 完整的抽取电路, (b) 抽取滤波器频率特性

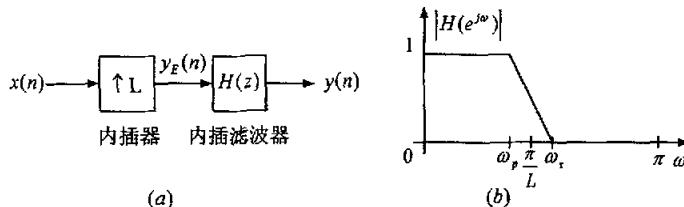


图 1.1-7 (a) 完整的内插电路, (b) 内插滤波器频率特性

完整的抽取和内插电路的时域输入和输出关系为:

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(nM-k), & \text{抽取因子为 } M \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-kL), & \text{内插因子为 } L \end{cases} \quad (1.1.14)$$

图 1.1-8 展示了低通带限信号  $x(n)$  ( $|\omega_c| = \pi/M$ ) 经过抽取器、内插器和低通滤波器恢复  $x(n)$  的全过程。

#### 多抽样率信号的实际采样周期

上文讨论抽取器和内插器时, 简单地把输入和输出信号当成离散序列。实际上输入和输出序列各自有不同的采样周期。例如, 图 1.1-9 (a) 是采样间隔为  $T$  的时域信号  $x_s(t)$ , 图 1.1-9 (b) 中  $x_d(t)$  是对  $x_s(t)$  抽样, 抽取因子  $M=2$ , 图 1.1-9 (c) 中  $x_E(t)$  是对  $x_d(t)$  内插, 内插因子  $L=2$ 。

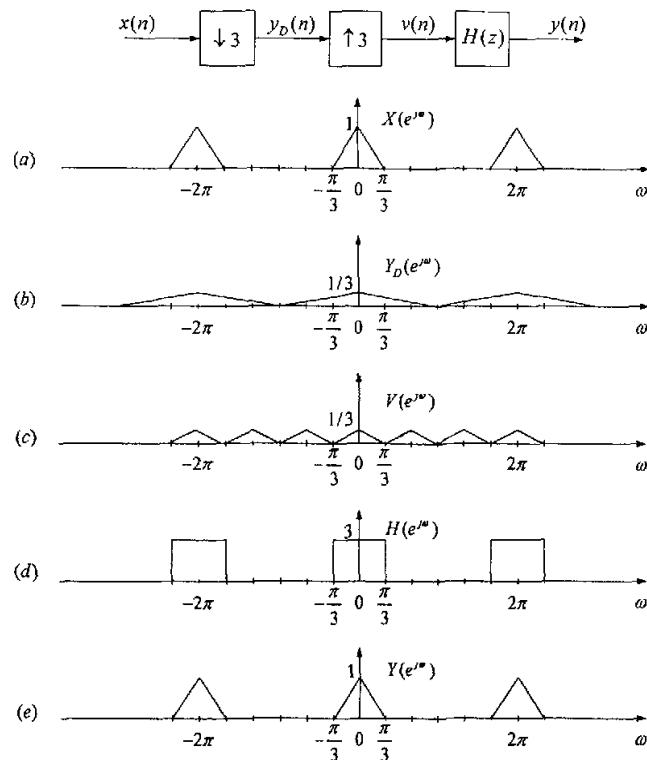


图 1.1-8 带限信号经抽取器后的恢复

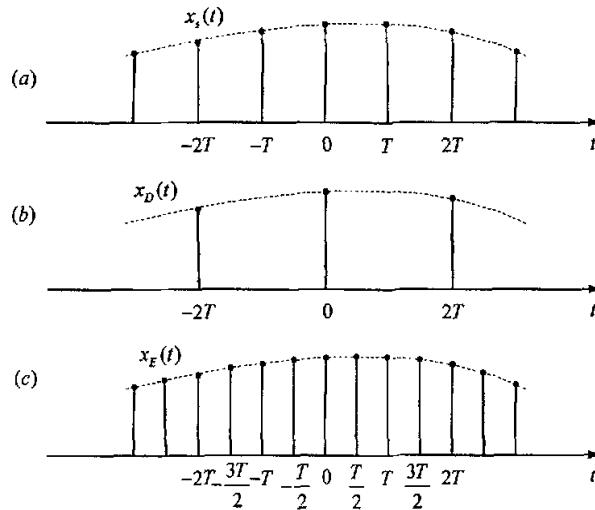


图 1.1-9 多抽样率信号的实际采样周期

### 1.1.2 数字滤波器组

数字滤波器组是多个数字滤波器的组合，这些数字滤波器有一个公共的输

入或输出。图 1.1-10 (a) 为分析滤波器组,  $H_k(z)$  是分析滤波器,  $x_k(n)$  是子带信号, 图中  $x(n)$  被分解为  $M$  个子带信号。图 1.1-10 (b) 为综合滤波器组,  $F_k(z)$  是综合滤波器, 子带信号  $y_k(n)$  被综合为一个输出信号  $\hat{x}(n)$ 。

### 例 1.1.1: DFT 滤波器组

图 1.1-11 (a) 是基于 DFT 的滤波器组。输入信号  $x(n)$  经过延迟链产生  $M$  个子序列  $s_i(n) = x(n-i)$ 。矩阵  $\mathbf{W}^*$  是  $M \times M$  DFT 矩阵  $\mathbf{W}$  ( $[\mathbf{W}]_{km} = W^{km} = e^{-j2\pi km/M}$ ) 的共轭转置。因此,

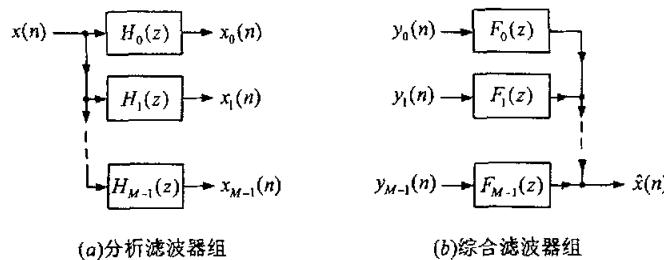


图 1.1-10 数字滤波器组

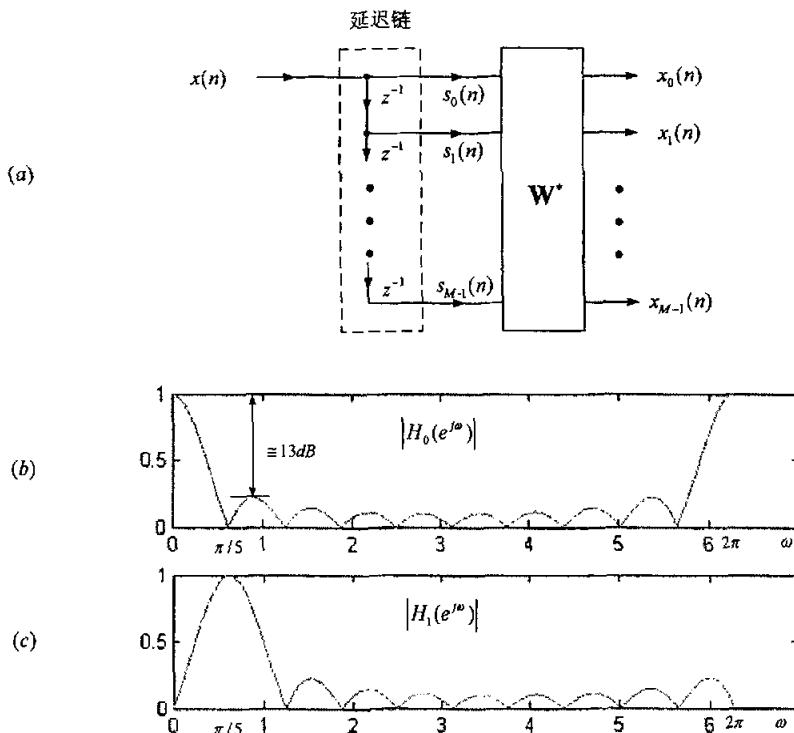


图 1.1-11 DFT 滤波器组, (a) DFT 滤波器组, (b)  $H_0(e^{j\omega})$  的幅频特性,

(c)  $H_1(e^{j\omega})$  的幅频特性, ((b), (c) 二图取  $M = 10$ )

$$x_k(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i(n) W^{-ki} \quad (1.1.15)$$

上式两边取  $Z$  变换得:

$$X_k(z) = \sum_{i=0}^{M-1} S_i(z) W^{-ki} = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} W^{-ki} X(z) = \sum_{i=0}^{M-1} (z W^k)^{-i} X(z) \quad (1.1.16)$$

令  $X_k(z) = H_k(z) X(z)$ , 式中

$$H_k(z) \triangleq H_0(z W^k) \quad (1.1.17)$$

$$H_0(z) = 1 + z^{-1} + \cdots + z^{-(M-1)} \quad (1.1.18)$$

此滤波器组的分析滤波器为  $H_k(z)$ ,  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  的频率特性分别为图 1.1-11 (b), (c) (二者取  $M = 10$ ), 可见两频谱间存在很大的混叠。 $H_k(z)$  是  $H_0(z)$  频率特性的在  $\omega$  轴上的移位, 当  $M$  的值增大时, 相邻两子带间的混叠变小, 但旁瓣衰减不变。满足 (1.1.17) 式的滤波器组称为均匀 DFT 滤波器组, 原型滤波器  $H_0(z)$  满足 (1.1.18) 式时仅是均匀 DFT 滤波器组的一个特例。

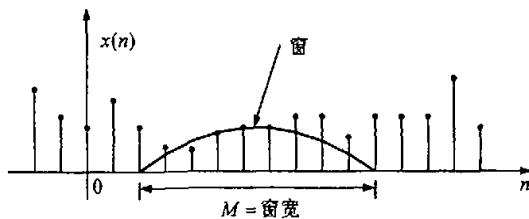
DFT 滤波器组可以用作时频分析。为简单起见, 用  $n+M-1$  代替 (1.1.15) 式中的  $n$ , 得

$$x_k(n+M-1) = \sum_{i=0}^{M-1} x(n+M-1-i) W^{-ki} = W^k \sum_{l=0}^{M-1} x(n+l) W^{kl} \quad (1.1.19)$$

式中,  $l = M-1-i$ 。 $x_k(n+M-1)$  有很明显的物理意义,  $|x_k(n+M-1)|$  是  $M$  点序列

$$x(n), x(n+1), \dots, x(n+M-1) \quad (1.1.20)$$

的 DFT 变换的第  $k$  个值的幅度。对于不同的  $n$  值,  $|x_k(n+M-1)|$  的值随之变化, 因此这个滤波器组可以用作时频分析。在实际应用中, 为了减小旁瓣, 通常对  $s_i(n)$  加窗, 如图 1.1-12 所示。有的文献也称之为加窗傅里叶变换。

图 1.1-12 DFT 滤波器组对  $s_i(n)$  加窗

## 1.2 $G(z)$ 与抽取器和内插器的连接

(c)  $H_1(e^{j\omega})$  的幅频特性, ((b), (c) 二图取  $M=10$ )

$$x_k(n) = \sum_{i=0}^{M-1} s_i(n) W^{-ki} \quad (1.1.15)$$

上式两边取  $Z$  变换得:

$$X_k(z) = \sum_{i=0}^{M-1} S_i(z) W^{-ki} = \sum_{i=0}^{M-1} z^{-i} W^{-ki} X(z) = \sum_{i=0}^{M-1} (z W^k)^i X(z) \quad (1.1.16)$$

令  $X_k(z) = H_k(z) X(z)$ , 式中

$$H_k(z) \triangleq H_0(z W^k) \quad (1.1.17)$$

$$H_0(z) = 1 + z^{-1} + \cdots + z^{-(M-1)} \quad (1.1.18)$$

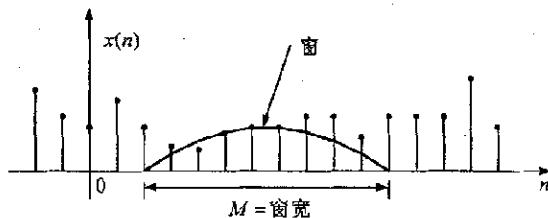
此滤波器组的分析滤波器为  $H_k(z)$ ,  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  的频率特性分别为图 1.1-11 (b), (c) (二者取  $M=10$ ), 可见两频谱间存在很大的混叠。 $H_k(z)$  是  $H_0(z)$  频率特性的在  $\omega$  轴上的移位, 当  $M$  的值增大时, 相邻两子带间的混叠变小, 但旁瓣衰减不变。满足 (1.1.17) 式的滤波器组称为均匀 DFT 滤波器组, 原型滤波器  $H_0(z)$  满足 (1.1.18) 式时仅是均匀 DFT 滤波器组的一个特例。

DFT 滤波器组可以用作时频分析。为简单起见, 用  $n+M-1$  代替 (1.1.15) 式中的  $n$ , 得

$$x_k(n+M-1) = \sum_{i=0}^{M-1} x(n+M-1-i) W^{-ki} = W^{kM} \sum_{l=0}^{M-1} x(n+M-1-l) W^{kl} \quad (1.1.19)$$

式中,  $l = M-1-i$ 。 $x_k(n+M-1)$  有很明显的物理意义,  $|x_k(n+M-1)|$  是  $M$  点序列  $x(n), x(n+1), \dots, x(n+M-1)$  (1.1.20)

的 DFT 变换的第  $k$  个值的幅度。对于不同的  $n$  值,  $|x_k(n+M-1)|$  的值随之变化, 因此这个滤波器组可以用作时频分析。在实际应用中, 为了减小旁瓣, 通常对  $s_i(n)$  加窗, 如图 1.1-12 所示。有的文献也称之为加窗傅里叶变换。

图 1.1-12 DFT 滤波器组对  $s_i(n)$  加窗

## 1.2 $G(z)$ 与抽取器和内插器的连接

### 1.2.2 $G(z)$ 与抽取器和内插器的连接

## 抽取器与内插器的级连

图 1.2-1 (a) 和 图 1.2-1 (b) 一般不等价。例如, 当  $L = M$  时,  $y_1(n) = x(n) \cdot C_M(n)$ , 式中  $C_M(n)$  是 (1.1.9) 式描述的梳状序列; 而  $y_2(n) = x(n)$ 。当且仅当  $L$  与  $M$

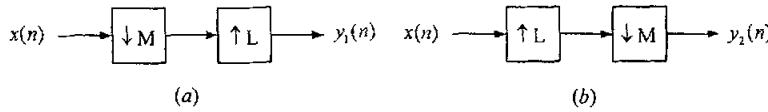


图 1.2-1 抽取器与内插器的级连

$M$  互质时, 图 1.2-1(a) 与图 1.2-1(b) 等价。因为

$$Y_1(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{L/M} W_M^k), \quad Y_2(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{L/M} W_M^{kL}) \quad (1.2.1)$$

令  $S_1 = \{W_M^k, 0 \leq k \leq M-1\}$ ,  $S_2 = \{W_M^{kL}, 0 \leq k \leq M-1\}$ , 当且仅当  $M$  与  $L$  互质时  $S_1 = S_2$ 。

所以, 当且仅当  $L$  与  $M$  互质时, (1.2.1) 式成立。

## 两个著名的等效系统

图 1.2-2 中, 有理式  $G(z)$  与抽取器、内插器的连接在多率系统中经常用到, 其等效电路是多率理论证明的有力工具, 也是多率理论中两个著名的等效系统。必须强调, 只有  $G(z)$  为有理式时这两个等效才成立。

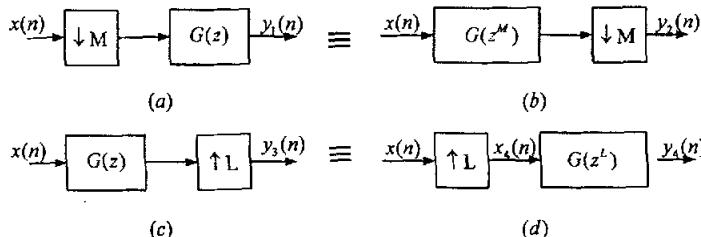


图 1.2-2 两个著名的等效系统

证明: 由于

$$Y_2(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W^k) G((z^{1/M} W^k)^M) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W^k) G(z) = Y_1(z) \quad (1.2.2)$$

$$Y_4(z) = G(z^L) X_4(z) = G(z^L) X(z^L) = Y_3(z) \quad (1.2.3)$$

因此图 1.2-2 中的两个等效系统成立。

## 1.3 多相分解

多相分解<sup>[2]</sup>在多率信号处理中是一种基本方法, 使用它可以使抽取和内插提高计算效率, 在实现滤波器组时也非常有用。多相分解是指将数字滤波器的传递函数  $H(z)$  分解成若干个不同相位的组合。

设数字滤波器的传递函数为:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \quad (1.3.1)$$

$H(z)$  可以分解为:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM)z^{-nM} \\ &+ z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM+1)z^{-nM} \\ &\vdots \\ &+ z^{-(M-1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM+M-1)z^{-nM} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

式中,  $M$  为整数。令  $E_l(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM+l)z^{-n}$ ,  $0 \leq l \leq M-1$ , 则

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_l(z^M) \quad (1.3.3)$$

式 (1.3.3) 即为  $H(z)$  的多相 I 型分解,  $E_l(z)$  为多相分量。 $h(n)$  与  $h(nM+l)$  的关系如图 1.3-1 所示。

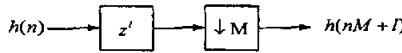


图 1.3-1  $h(n)$  与  $h(nM+l)$  的关系

下面描述多相分解的第二种形式。令  $R_l(z) \stackrel{\text{def}}{=} E_{M-l-1}(z)$ , (1.3.3) 式变成

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)} R_l(z^M) \quad (1.3.4)$$

式 (1.3.4) 即为  $H(z)$  的多相 II 型分解。

### 1.3.1 抽取滤波器和内插滤波器的高效实现结构

为了叙述简单起见, 令图 1.1-7 抽取滤波器电路中抽取因子为  $M=2$ , 如 (1.3.3) 式对  $H(z)$  进行多相 I 型分解, 抽取滤波器电路变形为图 1.3-2 (a), 然后利用图 1.2-2 中的等效, 图 1.3-2 (a) 变为图 1.3-2 (b)。设  $H(z)$  为  $N$  阶 FIR 滤波器, 其传统的直接实现结构如图 1.3-2 (c)。图 1.3-2 (b) 与图 1.3-2

(c) 相比是高效的实现结构。图 1.3-2 (c) 在偶数时刻有输出, 每一个输出需要  $N+1$  次乘法,  $N$  次加法, 并且这些运算要在一个单位时间内完成 (单位时间指输入信号的一个采样周期)。而图 1.3-2 (b) 虽然每一个输出需要的运算量与直接实现电路相同, 但这些运算可以在两个单位时间内完成, 因此  $MPUs=(N+1)/2$ ,  $APUs=N/2$  ( $MPUs$  为 multiplications per unit time 的缩写,  $APUs$  为 additions per unit time 的缩写), 可见高效实现结构单位时间运算量为直接实现单位时间运算量的一半。

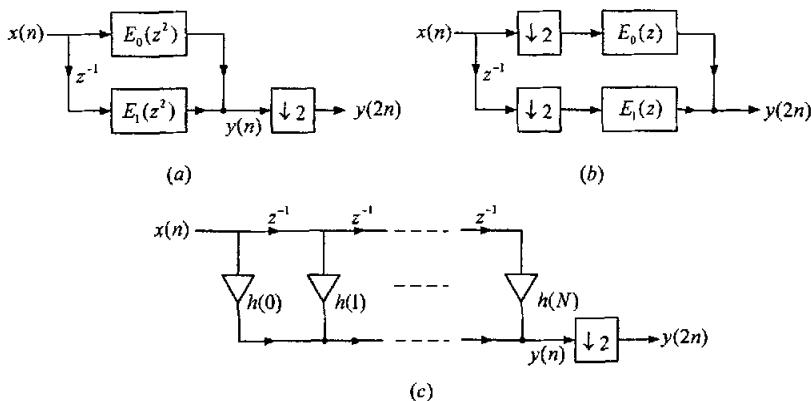


图 1.3-2 抽取滤波器的实现结构 (a) 抽取滤波器多相分解, (b) 高效实现结构, (c) 直接实现结构

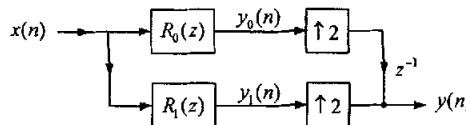


图 1.3-3 内插滤波器的高效实现结构

令图 1.1-8 内插滤波器电路中内插因子为  $L=2$ , 对内插滤波器按(1.3.4)式进行多相II型分解, 然后用(1.2.3)式中的等效, 得到其高效实现结构如图 1.3-3。设  $H(z)$  为  $N$  阶 FIR 滤波器, 其直接实现结构  $MPUs=2(N+1)$ ,  $APUs=2N$ , 而高效实现结构  $MPUs=N+1$ ,  $APUs=N-1$  (注: 图 1.3-3 的输出是时分多路复用, 不是加法)。

抽取滤波器电路和内插滤波器电路的抽取因子和内插因子不局限于 2 时, 前者多相分解高效实现结构运算量为  $MPUs=(N+1)/M$ ,  $APUs=N/M$ ; 后者多相分解高效实现结构运算量为  $MPUs=N+1$ ,  $APUs=N-L+1$ 。

上述数字滤波器  $H(z)$  没有限制其具有线性相位特性，在具有线性相位特性时，运算量还可以进一步减小。

### 1.3.2 均匀 DFT 滤波器组的多相实现

均匀 DFT 滤波器组通过多相分解可以得到高效的实现结构。假设原型滤波器  $H_0(z)$  用多相 I 型分解，则第  $k$  个滤波器可以表示成：

$$H_k(z) = H_0(zW^k) = \sum_{l=0}^{M-1} (z^{-l}W^{-k})^l E_l(z^M) \quad (1.3.5)$$

用  $X_k(z)$  表示  $H_k(z)$  的输出，则

$$X_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} W^{-kl} (z^{-l}E_l(z^M)X(z)) \quad (1.3.6)$$

由 (1.3.6) 式得到图 1.3-4 高效实现结构。若  $H_0(z)$  为  $N$  阶 FIR 滤波器，均匀 DFT 滤波器组的高效实现结构每个时刻仅需要  $N+1$  次乘法， $N-M+1$  次加法，及  $M$  点 DFT 运算。例如  $N=50, M=32$ ，FFT<sup>[3]</sup> 需要大约 136 次实乘法运算，均匀 DFT 滤波器组的总的乘法运算为 187 次；而直接实现需要  $32 \times 51 = 1632$  次乘法，且为复数乘法，因为  $H_k(z), k=1, 2, \dots, M-1$  的单位脉冲响应为复数。可见高效实现结构有很高的效率。

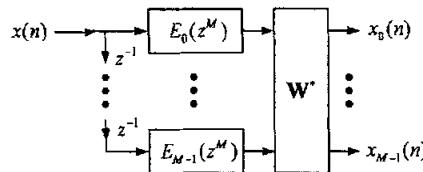


图 1.3-4 均匀 DFT 滤波器组的高效实现结构

若  $E_l(z) = 1, l = 0, \dots, M-1$ ，则图 1.1-11 变成图 1.3-4 的一个特例。 $E_l(z)$  的阶次不为零，可以使原型滤波器  $H_0(z)$  具有较高的阶次，从而具有更好的频率特性。

### 1.4 多率系统的几种应用

#### 1.4.1 数字语音系统

在数字音频处理中经常要改变带限信号的抽样率<sup>[4]</sup>。例如，模拟音频信号  $x_a(t)$  转化为数字音频信号<sup>[5]</sup>。一般认为模拟音频信号的带宽为  $0 \leq \Omega / 2\pi \leq 22$  kHz，

由采样定理知, 最小采样频率为 44kHz, 如图 1.4-1 (a)。在对模拟信号采样前, 首要先进行模拟低通滤波, 滤除高频噪声, 以防止离散信号频谱发生混叠。模拟低通滤波器的频率特性  $H_a(\Omega)$  如图 1.4-1 (b)。为保证有用的音频信号不失真,  $H_a(\Omega)$  要求通带纹波很小, 过渡带十分陡峭, 通带和过渡带近似线性相位, 这样的模拟滤波器现实中很难实现。

通常的方法是对  $x_a(t)$  进行过采样, 采样频率为 88kHz, 此时  $H_a(\Omega)$  就可以具有比较宽的过渡带, 如图 1.4-1 (c), 这种滤波器的频率特性易于实现。过采样的得到的数字信号  $x_i(n)$  经低通数字滤波器  $H(z)$  滤波 (由于  $H(z)$  是数字滤波器, 易于实现过渡带陡峭, 通带和阻带纹波小及线性相位特性), 然后抽取 (抽取因子为  $M=2$ ), 最终得到数字音频信号  $x(n)$ 。

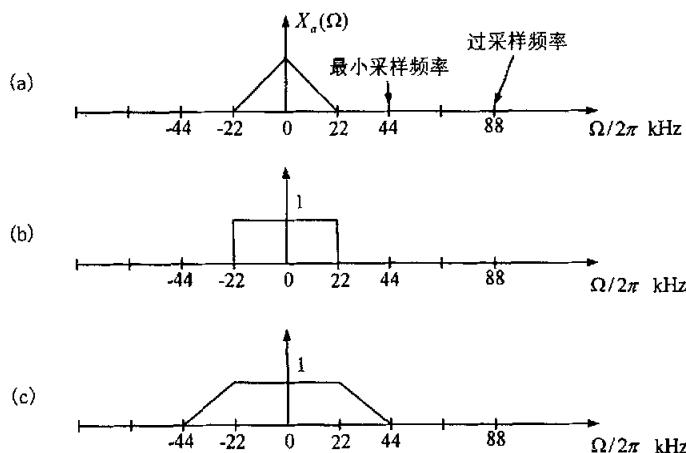


图 1.4-1 (a)  $x_a(t)$  的谱; (b) 采样频率为 44kHz 的防混叠滤波器;  
(c) 采样频率为 88kHz 的防混叠滤波器; (d) 改进的数字音频 A/D 转换

在 D/A 转换阶段会产生类似的问题。数字音频信号  $y(n)$  经过模拟低通滤波转化为模拟信号时为了滤去  $Y(e^{j\omega})$  在  $\pm 22\text{kHz}$  外的镜像谱, 同样要求模拟低通滤波器通带纹波很小, 过渡带非常陡峭, 上文已知这样的滤波器很难实现。通常的方法是采用内插器, 对  $y(n)$  进行零值内插, 内插因子为  $L=2$ , 然后用内插低通线性相位数字滤波器滤波 (这样无相位失真), 最后通过低通模拟滤波器进行 D/A 转换。

在改进的音频信号的 A/D, D/A 转换中, 付出的代价是由于信号的采样率高, 增大了单位时间内的运算量, 但用上文所述的抽取滤波器和内插滤波器的多相

高效实现，能使单位时间内的运算量大大降低。

### 1.4.2 语音信号和图像的子带编码

在现实中，常常遇到信号  $x(n)$  不是带限的，而大部分能量集中在某一频带内，如图 1.4-2 (a)。能量较小的频带  $|\omega| > \pi/2$  中能量还没有小到可以完全丢弃，当对  $x(n)$  抽取，必然导致频谱混叠。为了避免混叠发生，用频率特性图 1.4-2 (b) 所示的分析滤波器组 (图 1.4-3) 对  $x(n)$  进行子带分解，子带信号  $x_1(n)$  比  $x_0(n)$  有更少的能量，所以编码时可以用比较少的比特。例如， $x(n)$  为 10kHz 信号，每个采样需要 16 比特量化，波特率为 160k/sec。假设  $x_1(n)$  和  $x_0(n)$  每个采样分别需要 16 比特和 8 比特，由于子带信号要用抽取器  $M=2$  抽取，所以波特率变为 120k/sec，压缩率为 3/4。用树形滤波器组可以把信号  $x(n)$  分解为多个子带，每

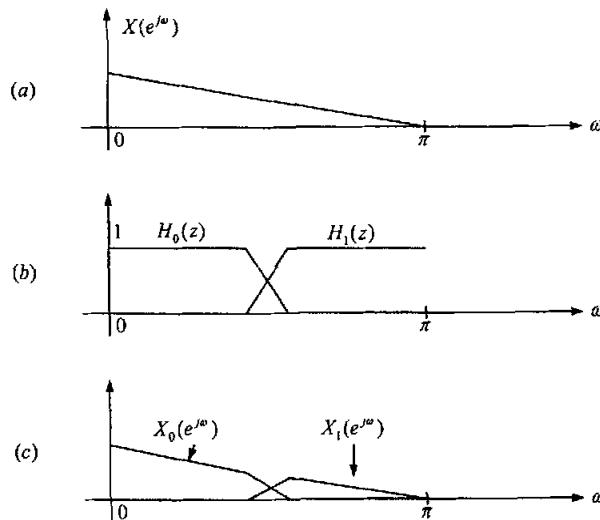


图 1.4-2 信号  $x(n)$  被分解为二个子带信号  $x_0(n)$  和  $x_1(n)$

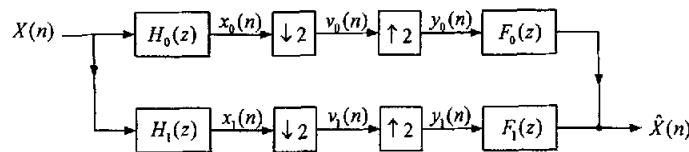


图 1.4-3 用于子带编码的分析、综合滤波器组 (2 通道 QMF 组)

个子带根据其能量特性单独量化。例如语音信号的子带分解和量化是以人耳对重建信号的质量感觉为基础的<sup>[6]</sup>。

图 1.4-2 (c) 中的子带信号用图 1.4-3 中的内插器和综合滤波器组重建原信号。内插器用于恢复采样率, 综合滤波器组  $F_k(z)$  用于消除镜像谱。图 1.4-3 又称为 QMF (quadrature mirror filter) 组, 具有完全重建特性的 FIR QMF 组是本论文主要讨论的问题。

文献 [7], [8], [9], [10] 中有更多关于语音信号子带编码的细节。子带信号不仅仅是量化, 还要进行 DPCM 或 ADPCM 编码<sup>[6]</sup>以得到更高的压缩率。

二维多率滤波器组用于图像处理最早由文献 [11] 提出。子带编码<sup>[12], [13], [14]</sup>在图像压缩中得到广泛应用。上世纪 80 年代发展起来的小波理论, 在图像的子带编码中得到非常成功地应用。

### 1.4.3 模拟语音加密

模拟语音加密<sup>[15]</sup>是为了用现有的模拟电话系统传输语音信号, 并且信号保密。其主要思想是把信号  $x(n)$  分解为  $M$  个子带信号  $x_k(n)$ , 然后把  $x_k(n)$  划分为时间段。不同的时间段和子带按预定的方案形成新的加密信号  $y(n)$ ,  $y(n)$  经 D/A 转换即可传输。这种加密信号在不知密钥时很难解密, 解密信号能保持很好的语音质量。

### 1.4.4 多路复用

通信系统中经常用到时分 (TDM) 和频分 (FDM) 多路复用技术。图 1.4-4 (a) 是 TDM 发送端工作原理图。图中 3 个子带信号  $x_i(n)$  经内插器 ( $L=3$ ) 内插, 然后经延迟链得到发送端信号  $y(n)$ , 它实际上是  $x_i(n)$  在时间上有有序组合, 即

$$y(n) = \cdots \ x_0(0) \ x_1(0) \ x_2(0) \ x_0(1) \ x_1(1) \ x_2(1) \ \cdots$$

$x_i(n)$  可以通过图 1.4-4 (b) 中的接收端电路恢复。 $X_0(z)$ ,  $X_1(z)$  和  $X_2(z)$  实际上是  $Y(z)$  的多相分量。

FDM 发送端原理如图 1.4-5, 为简单起见, 仅讨论 3 个信号的频分复用方法。 $x_0(n)$ ,  $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$  的频谱如图 1.4-5 (a), (b), (c)。为了能在  $0 \leq \omega < 2\pi$  区间内表示这 3 个信号的频谱, 分别对其内插, 内插后的频谱如图 1.4-5 (d), (e), (f), 如果内插滤波器  $F_i(z)$  是理想的滤波器, 可以得到频分复用信号  $y(n)$ , 频谱如图 1.4-5 (g)。

完整的频分多路复用系统如图 1.4-6, 为了减小各子带间的混叠, 图中的综合滤波器组  $F_i(z)$ , 分析滤波器组  $H_i(z)$  要求过渡带十分陡峭, 文献 [16] 指出只有滤波器阶次达到 2000 阶时, 失真才能接受, 实现这样的滤波器代价是高昂的。

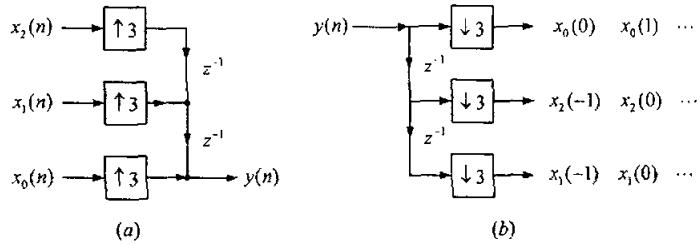


图 1.4-4 TDM 发送端, 接收端原理图

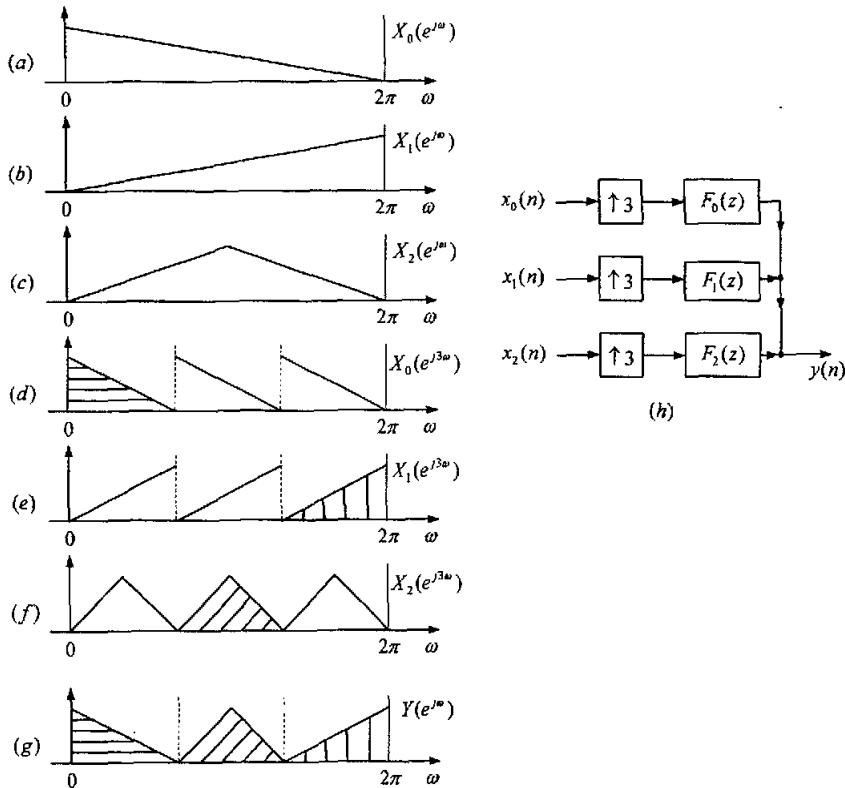


图 1.4-5 FDM 发送端原理

文献[17]提出的 TDM-FDM (图 1.4-6) 系统能很好的解决了上述问题, 虽然各子带间存在混叠, 通过适当地选择分析和综合滤波器组可以使信号完全重建。

### 1.4.5 多率自适应滤波

自适应滤波在很多文献 [18, 19] 中都有详尽的描述。抽取器、内插器和子

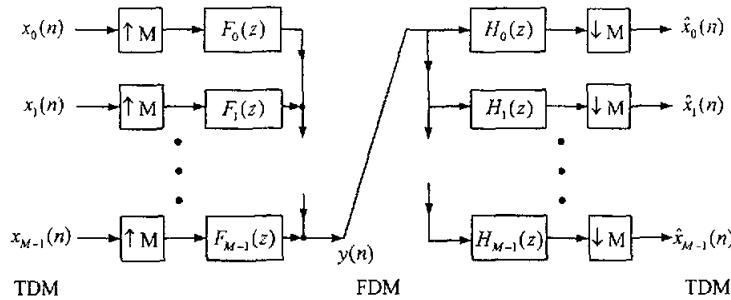


图 1.4-6 完整的频分多路复用系统

带分解用于自适应滤波使滤波效果得到很大的提高。文献[1, 20, 21, 22, 23, 24]对多率自适应滤波都有详细介绍。

## 1.5 几种特殊的滤波器

半带滤波器、M带滤波器和功率互补滤波器是多率系统中经常用到的几种特殊滤波器，下文给出简要介绍。

### 1.5.1 半带滤波器

半带滤波器<sup>[25, 26, 27, 28]</sup>的单位脉冲响应满足

$$h(2n) = \begin{cases} c & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.5.1)$$

式中常数  $c$  常取为 0.5。也就是说，半带滤波器除了  $h(0) \neq 0$ ，其他偶数项都为零。把 (1.5.1) 式用多相表示，得

$$H(z) = c + z^{-1}E_1(z^2) \quad (1.5.2)$$

式中  $E_0(z) = c$ ，由 (1.5.2) 式可得

$$H(z) + H(-z) = 2c \quad (1.5.3)$$

若  $h(n)$  是实数零相位的，则  $H(-z) = H(e^{j(\omega-\pi)}) = H(e^{j(\pi-\omega)})$ ，取  $c = 0.5$ ，上式变为

$$H(e^{j\omega}) + H(e^{j(\pi-\omega)}) = 1 \quad (1.5.4)$$

$H(e^{j\omega})$  和  $H(e^{j(\pi-\omega)})$  的能量相等，关于  $\pi/2$  对称，并且和为 1，这恰好是半带滤波器名字的由来，半带滤波器示意图如图 1.5-1 (a)。在第二章中将给出全相位半带滤波器的设计方法。

如果半带滤波器  $H(z)$  经适当的奇数延迟变为因果半带滤波器，即

$H_c(z) = z^{-k} \cdot H(z)$ , 则(1.5.4)式变为著名的等式<sup>[29]</sup>

$$H_c(z) - H_c(-z) = z^{-k} \quad (1.5.5)$$

$M$ 带滤波器<sup>[25]</sup>是半带滤波器的逻辑扩展。 $M$ 带滤波器的单位脉冲响应满足

$$h(Mn) = \begin{cases} c & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.5.6)$$

式中常数 $c$ 常取为 $1/M$ 。(1.5.6)式的频率特性由于历史原因常被称为奈奎斯特特性<sup>[30]</sup>。 $M$ 带滤波器 $H(z)$ 用多相 I 型表示得

$$H(z) = c + z^{-1}E_1(z^M) + z^{-2}E_2(z^M) + \cdots + z^{-(M-1)}E_{M-1}(z^M) \quad (1.5.7)$$

上式满足如下特性:

$$\sum_{k=0}^{M-1} H(zW^k) = Mc \quad (1.5.8)$$

式中,  $W = e^{-j2\pi/M}$ 。 $M$ 带滤波器及其 $M-1$ 个在 $\omega$ 轴上的等间隔移位 $H(e^{j(\omega-2\pi k)/M})$ 之和是一常数, 如图 1.5-1 (b)。

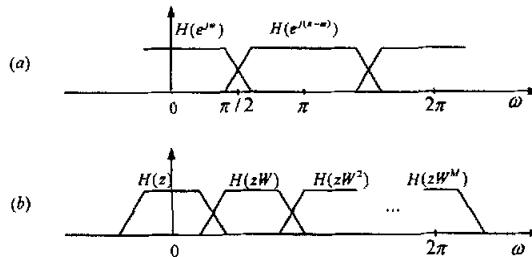


图 1.5-1 (a) 半带滤波器, (b)  $M$ 带滤波器

在实际用中 $M$ 带滤波器要求具有线性相位特性, 最简单的设计方法是窗函数法<sup>[31]</sup>。其单位脉冲响应满足

$$h(n) = \frac{\sin(\pi n/M)}{\pi n} w(n) \quad (1.5.9)$$

式中,  $w(n)$ 是窗函数, 常取为凯塞尔窗。滤波器的阻带衰减, 过渡带宽度由凯塞尔窗的系数 $\beta$ 决定。线性相位 FIR  $M$ 带滤波器的设计方法见文献[25, 28]。第六章中将详细介绍一种新的 $M$ 带滤波器设计方法, 即全相位 $M$ 带滤波器设计法。

## 1.5.2 互补传递函数

**A 严格互补特性**

如果传递函数  $H_0(z), H_1(z), \dots, H_{M-1}(z)$  满足：

$$\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) = cz^{-n_0}, \quad c \text{ 为非零常数} \quad (1.5.10)$$

则称这组传递函数是严格互补的。

**B 功率互补特性**

如果传递函数  $H_0(z), H_1(z), \dots, H_{M-1}(z)$  满足：

$$\sum_{k=0}^{M-1} |H_k(e^{j\omega})|^2 = c, \quad c \text{ 为大于零的常数} \quad (1.5.11)$$

则称这组传递函数是功率互补的。

**C 全通特性**

如果传递函数  $H_0(z), H_1(z), \dots, H_{M-1}(z)$  满足：

$$\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) = A(z), \quad A(z) \text{ 为全通函数} \quad (1.5.12)$$

则称这组传递函数是全通互补的。

## 1.6 加窗全相位 DFT 数字滤波器

### 1.6.1 加窗全相位 DFT 滤波简介

文献[31]提出了一种新型的 FIR 数字滤波器——全相位 DFT 数字滤波器。这种滤波器具有频率采样特性，而在通带、阻带纹波特性和过渡带特性上优于传统的频率采样法<sup>[32]</sup>。它除了具有时域实现结构外，还具有频域实现网络结构。这种结构可构成实时可变频率特性的系统。可以对滤波器的频响和长度实时编程控制。通过对这种滤波器进行深入研究发现，对其频域实现结构的 DFT 输入或 IDFT 输出加窗，导出一种新型的加窗全相位 DFT 数字滤波器。它的频域特性比不加窗时又有很大提高，幅频响应等于或逼近频率采样值，通带纹波极小，阻带衰减极大，过渡带陡峭，零相位，滤波性能和实现的简洁性超过其他传统方法。它除了可以采用通常的卷积结构外，也可以采用直接频域网络实现，下文给出了它的直接频域网络组成及其简化算法。这种网络具有实时自设计功能，可构成时变系统用于滤波器传递函数实时可变的场合，便于集成为频响和长度均可编程的通用零相位数字滤波器。是数字滤波器的一种新的设计理念和实现结构。实际上文献[31]的全相位 DFT 数字滤波器是加窗全相位 DFT 数字滤波器的一个特例。在原有的实现结构基础上提出的简化频域实现结构省掉了一级 FFT 运算，使运算效率大大提高。

## 1.6.2 加窗全相位 DFT 滤波的原理及其性质

### 1.6.2.1 全相位数据空间

对于时间序列中的一点  $x(n)$ ，存在也只存在  $N$  个包含该点的具有不同截取相位的  $N$  维向量：

$$\begin{aligned} X_0 &= [x(n) x(n+1) \cdots x(n+N-2) x(n+N-1)]^T \\ X_1 &= Z^{-1} X_0 = [x(n-1) x(n) \cdots x(n+N-3) x(n+N-2)]^T \\ &\cdots \\ X_{N-1} &= Z^{-N+1} X_0 = [x(n-N+1) x(n-N+2) \cdots x(n-1) x(n)]^T \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

其中， $Z^{-j}$  为延迟算子。显然， $x(n)$  是这些截取向量的交： $x(n) = X_0 \cap X_1 \cdots \cap X_{N-1}$ 。

按照数据矩阵的常规表示法，定义  $x(n)$  的全相位数据矩阵为：

$$X_{-N+1,0}(n) = [X_0 \ X_1 \ \cdots \ X_{N-1}] \quad (1.6.2)$$

其中全部列向量  $\{X_l, l=0, 1, \dots, N-1\}$  张成  $x(n)$  的全相位数据空间。

### 1.6.2.2 加窗全相位 DFT 滤波

全相位 DFT 滤波器的直接频域实现网络结构<sup>[31]</sup>如图 1.6-1。加窗全相位 DFT 滤波器即对全相位 DFT 滤波器的输入加前窗，对其 DFT/IDFT 滤波输出加后窗，如图 1.6-2。设前窗和后窗函数分别为  $B_N^1(n)$ ， $B_N^2(n)$ ， $n=0, 1, \dots, N-1$ 。

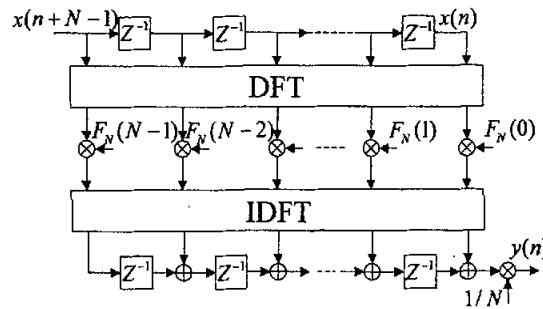


图 1.6-1 全相位 DFT 滤波器的直接频域实现网络结构

对  $x(n)$  的全相位数据矩阵  $X_{-N+1,0}(n)$  的每个列向量加前窗进行相同的 DFT/IDFT 滤波，得：

$$\begin{aligned} Y_i(i) &= \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-1}(i, k) [F_N(k) \sum_{j=0}^{N-1} W_N(k, j) B_N^1(j) X_i(j)] = \sum_{j=0}^{N-1} H_N(i, j) B_N^1(j) X_i(j) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} H_N(i, j) X_i(j) \end{aligned}$$

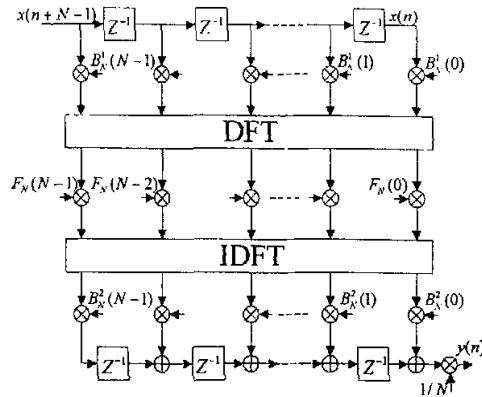


图 1.6-2 加窗全相位 DFT 数字滤波器直接频域实现网络结构

$$i, l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.3)$$

即

$$Y_l = H_N^* X_l, \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.4)$$

式中,

$$H_N(i, j) = \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-1}(i, k) W_N(k, j) F_N(k), \quad i, j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.5)$$

$$H_N^*(i, j) = H_N(i, j) B_N^1(j) \quad (1.6.6)$$

$W_N$  和  $W_N^{-1}$  分别为  $N \times N$  的 DFT 和 IDFT 变换矩阵,  $F_N$  是所期望的  $N$  维 DFT 滤波响应向量。

然后对 DFT/IDFT 滤波后的每个列向量  $Y_l$  加后窗:

$$Y'_l(i) = Y_l(i) \cdot B_N^2(i) = \sum_{j=0}^{N-1} B_N^2(i) H_N(i, j) B_N^1(j) X_l(j) = \sum_{j=0}^{N-1} H_N^*(i, j) X_l(j)$$

$$i, l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.7)$$

即

$$Y'_l = H_N^* X_l, \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.8)$$

式中,

$$H_N^*(i, j) = B_N^2(i) H_N(i, j) B_N^1(j), \quad i, j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.9)$$

显然, 对应点  $x(n)$  将分别得到  $N$  个不同的滤波值:

$$Y'_l(l), \quad l = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.10)$$

为消除因截取相位不同而引起的滤波值的歧义性, 取这  $N$  个滤波值的均值作为  $x(n)$  的滤波输出, 即

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y_l(l) \quad (1.6.11)$$

即:  $x(n)$  的加窗全相位 DFT 滤波输出是全相位数据矩阵所有列向量加前窗的 DFT/IDFT 滤波得到的列向量再加后窗在该点输出的均值。

### 1.6.2.3 加窗全相位 DFT 数字滤波器

由(1.6.7), (1.6.9), (1.6.11)式得:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} H_N^*(l, j) x(n-l+j) = \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} h_N^*(\tau) x(n-\tau) = h_N^*(n) * x(n) \quad (1.6.12)$$

式中:

$$h_N^*(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=n}^{N-1} H_N^*(l, l-n), & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1+n} H_N^*(l, l-n), & n = -1, -2, \dots, -(N-1) \end{cases} \quad (1.6.13)$$

由式(1.6.5)得:

$$H_N(l, l-n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_N(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kl} = f_N(n) \quad (1.6.14)$$

式中  $f_N$  是 DFT 滤波响应向量  $F_N$  的 IDFT 变换。由(1.6.9), (1.6.13), (1.6.14)式得:

$$h_N^*(n) = w_N^*(n) f_N(n), n = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1) \quad (1.6.15)$$

式中

$$w_N^*(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=n}^{N-1} B_N^2(l) B_N^1(l-n), & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1+n} B_N^2(l) B_N^1(l-n), & n = -1, -2, \dots, -N+1 \end{cases} \quad (1.6.16)$$

实际上  $w_N^*(n)$  正比于后窗  $B_N^2(n)$  与前窗  $B_N^1(n)$  的互相关函数

$$w_N^*(n) = \frac{1}{N} B_N^2(n) * B_N^1(-n), n = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1) \quad (1.6.17)$$

定义  $w_N^*(n), n = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1)$  为相关函数窗。称:

$$w_N(n) = w_N^*(n) / w_N^*(0), n = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1) \quad (1.6.18)$$

为归一化相关函数窗。 $w_N^*(0)$  是归一化因子, 归一化原则将在下文讨论。

我们称  $h_N(n) = w_N(n) f_N(n)$  为加窗全相位 DFT 滤波器的单位脉冲响应。

若  $F_N(k)$  为实数, 且对称于  $N/2$ , 即:

$$F_N(k) = F_N(N-k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.6.19)$$

则  $f_N$  也是实对称的:

$$f_N(n) = f_N(N-n) = f_N(-n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.6.20)$$

由 (1.6.15) 式可知, 为了使  $h_N(n)$  具有零相位特性, 即

$$h_N(n) = h_N(-n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.21)$$

要求  $w_N$  为偶函数, 容易证明:

1. 若前窗  $B_N^1(n)$  与后窗  $B_N^2(n)$  都是关于  $(N-1)/2$  实对称的, 则归一化相关函数窗  $w_N$  关于原点对称, 是偶函数。
2. 若前窗与后窗相等, 即  $B_N^1(n) = B_N^2(n)$ , 则不论其是否关于  $(N-1)/2$  实对称, 归一化相关函数窗是偶函数。
3. 若前窗  $B_N^1(n)$  与后窗  $B_N^2(n)$  都是关于  $(N-1)/2$  实对称的, 若二者位置互换, 归一化相关函数窗的值保持不变。

例 1.6.1 前窗  $B_N^1(n)$  与后窗  $B_N^2(n)$  相等都是矩形窗, 即

$$B_N^1(n) = B_N^2(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1.6.22)$$

则

$$w_N(n) = \begin{cases} \frac{N-|n|}{N}, & n = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1) \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1.6.23)$$

$w_N(0) = 1$ ,  $w_N(n) = w_N(n), n = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1)$  是归一化三角窗。此窗恰是全相位 DFT 数字滤波器的三角窗。

至此, 可得到下面的定理:

**定理 1.6.1:** 当 DFT 滤波响应向量  $F_N$  为实对称时, 加窗全相位 DFT 数字滤波器可由一个零相位数字滤波器实现, 其单位脉冲响应  $h_N(n)$  可以用  $F_N$  的 IDFT 关于原点对称延拓, 再用归一化相关函数窗加权产生, 即:

$$\begin{cases} h_N(n) = w_N(n) \text{IDFT}[F_N(k)] & n, k = 0, 1, \dots, N-1 \\ h_N(n) = h_N(-n) & \end{cases} \quad (1.6.24)$$

另一方面, 由零相位数字滤波器的单位脉冲响应  $h_N(n)$  求其对应的 DFT 滤波响应  $F_N$  的反变换公式可由 (1.6.24) 得到:

$$F_N(k) = \text{DFT}\left[\frac{h_N(n)}{w_N(n)}\right], \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.25)$$

例 1.6.2: 取  $F_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , 前窗  $B_4^1(n) = \begin{cases} 1 & n=0,1,\dots,3 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ , 后窗  $B_4^2(n)$  为三角窗

函数  $B_4(n) = 1 - \frac{2|n-3/2|}{5} \quad n=0,1,2,3$ 。则  $w_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ 。由 (1.6.24)

式可得  $h_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & 0 & \frac{5}{24} & \frac{1}{2} & \frac{5}{24} & 0 & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$ 。  $F_4 = \text{DFT}\left[\frac{h_4(n)}{w_4(n)}\right], \quad n=0,1,2,3$  满

足 (1.6.25) 式。

定理 1.6.2: 加窗全相位 DFT 数字滤波器是零相位数字滤波器的一个子集。一个长度为  $(2N-1)$  的零相位滤波器是加窗全相位 DFT 数字滤波器的充要条件是其单位脉冲响应  $h(n) \in \mathbb{R}$  满足:

$$\begin{cases} h(n)/h(N-n) = w_N(n)/w_N(N-n), & h(n) \neq 0, \quad h(N-n) \neq 0, \\ \text{或者} & h(n) = h(N-n) = 0 \end{cases} \quad n=1,2,\dots,N-1 \quad (1.6.26)$$

此定理由 (1.6.19), (1.6.20), (1.6.24) 式可证。

定理 1.6.3: 对于  $M$  个子带 DFT 滤波响应向量  $F_{N,m}, m=1,2,\dots,M$ , 若

$$\sum_{m=1}^M F_{N,m} = [1, 1, \dots, 1] = U_N$$

则它们所对应的加窗全相位 DFT 数字滤波器是严格互补型子带滤波器。

#### 1.6.2.4 加窗全相位 DFT 数字滤波器的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} w_N(n) f_N(n) e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_N(k) \hat{w}_N(\omega - \frac{2\pi}{N} k) \quad (1.6.27)$$

其中,  $\hat{w}_N(\omega)$  是归一化相关函数窗  $w_N(n)$  的傅里叶变换。我们感兴趣的是前窗  $B_N^1(n)$  与后窗  $B_N^2(n)$  是矩形窗或三角窗的情况。其数学表达式分别为:

矩形窗

$$R_N(n) = \begin{cases} 1 & n=0,1,\dots,N-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1.6.28)$$

三角窗函数

$$T_N(n) = 1 - \frac{2|n - (N-1)/2|}{N+1} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.29)$$

定理 1.6.4: 若前(后)窗  $B_N^1(n)$  是矩形窗, 后(前)窗  $B_N^2(n)$  是三角窗, 长度为  $2N-1$  的加窗全相位 DFT 数字滤波器的传递函数在  $2\pi/N$  的整数倍采样点上的值等于其 DFT 滤波响应向量的值。

证明: 设  $B_N^1(n) = R_N(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ,  $B_N^2(n) = T_N(n) = 1 - \frac{2|n - (N-1)/2|}{N+1}$ ,

$n = 0, 1, \dots, N-1$ 。则

$$\hat{w}_N(n) = \frac{1}{N} B_N^2(n) * B_N^1(-n) = \frac{1}{N} T_N(n) * R_N(-n), n = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1) \quad (1.6.30)$$

所以  $\hat{w}_N(\omega) = \frac{1}{N} \hat{T}_N(\omega) \cdot \hat{R}_{N-}(\omega)$ , 式中,  $\hat{T}_N(\omega)$  和  $\hat{R}_{N-}(\omega)$  分别为三角窗和矩形窗的傅里叶变换。

(1) 当  $N$  为偶数时

$$T_N(n) = \frac{2}{N+1} R_{N/2}(n) * R_{N/2+1}(n)$$

$$\text{所以, } \hat{w}_N(\omega) = \frac{1}{N} \cdot \frac{2}{N+1} \frac{(\sin \frac{\omega N}{2}) \cdot (\sin \frac{\omega N}{4}) \cdot (\sin \frac{\omega(N+2)}{4})}{\sin^3 \frac{\omega}{2}}$$

(2) 当  $N$  为奇数时

$$T_N(n) = \frac{2}{N+1} R_{(N+1)/2}(n) * R_{(N+1)/2}(n)$$

$$\text{同理可得: } \hat{w}_N(\omega) = \frac{1}{N} \cdot \frac{2}{N+1} \frac{(\sin \frac{\omega N}{2}) \cdot (\sin^2 \frac{\omega(N+1)}{4})}{\sin^3 \frac{\omega}{2}}$$

因此,

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{2}{N^2(N+1)\hat{w}_N(0)} \sum_{k=0}^{N-1} F_N(k) \cdot A, & N \text{ 为偶数} \\ \frac{2}{N^2(N+1)\hat{w}_N(0)} \sum_{k=0}^{N-1} F_N(k) \cdot B, & N \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$A = \frac{(\sin \frac{\omega N}{2} - k\pi) \cdot (\sin \frac{\omega N}{4} - \frac{k\pi}{2}) \cdot (\sin \frac{\omega(N+2)}{4} - \frac{(N+2)k\pi}{2N})}{\sin^3(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{N})}$$

$$B = \frac{(\sin \frac{\omega N}{2} - k\pi) \cdot \sin^2(\frac{\omega(N+1)}{4} - \frac{N+1}{2N}k\pi)}{\sin^3(\frac{\omega}{2} - \frac{K\pi}{N})}$$

$H(e^{j\omega})$  在  $\omega = \frac{2m}{N}\pi$ ,  $m = 0, 1, \dots, N-1$  的采样值为:

$$H(e^{j\frac{2m}{N}\pi}) = \begin{cases} \frac{2}{N^2(N+1)w_N(0)} \sum_{k=0}^{N-1} F_N(k) \cdot A, & N \text{ 为偶数} \\ \frac{2}{N^2(N+1)w_N(0)} \sum_{k=0}^{N-1} F_N(k) \cdot B, & N \text{ 为奇数} \end{cases}$$

式中,

$$A = \frac{\sin(m-k)\pi \cdot \sin(m-k)\frac{\pi}{2} \cdot \sin(m-k)\frac{N+2}{2N}\pi}{\sin^3 \frac{m-k}{N}\pi}, \quad B = \frac{\sin(m-k)\pi \cdot \sin^2(m-k)\frac{N+1}{2N}\pi}{\sin^3 \frac{m-k}{N}\pi}$$

$$\text{因此, } H(e^{j\frac{2m}{N}\pi}) = \begin{cases} \frac{N+2}{2(N+1)w_N(0)} F_N(m), & N \text{ 为偶数} \\ \frac{N+1}{2Nw_N(0)} F_N(m), & N \text{ 为奇数} \end{cases} \text{ 由 (1.6.30) 式容易得到}$$

$$w_N(0) = \begin{cases} \frac{N+2}{2(N+1)}, & N \text{ 为偶数} \\ \frac{N+1}{2N}, & N \text{ 为奇数} \end{cases}, \quad \text{所以 } H(e^{j\frac{2m}{N}\pi}) = F_N(m), \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

若前窗  $B_N^1(n)$ , 后窗  $B_N^2(n)$  都是三角窗  $T_N(n)$ , 如 (1.6.29) 式

$$\text{则 } w_N(n) = \frac{1}{N} B_N^2(n) * B_N^1(-n) = \frac{1}{N} T_N(n) * T_N(-n), n = 0, \pm 1, \dots, \pm(N-1)$$

相关函数窗  $w_N(n)$  的傅里叶变换为:

$$\hat{w}_N(\omega) = \begin{cases} \frac{4}{N(N+1)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{N}{4}\omega \cdot \sin^2 \frac{N+2}{4}\omega}{\sin^4 \frac{\omega}{2}}, & \text{当 } N \text{ 为偶数时} \\ \frac{4}{N(N+1)^2} \cdot \frac{\sin^4 \frac{N+1}{4}\omega}{\sin^4 \frac{\omega}{2}}, & \text{当 } N \text{ 为奇数时} \end{cases}$$

此时频率响应  $H(e^{j\omega})$  在  $\omega = \frac{2m}{N}\pi$ ,  $m = 0, 1, \dots, N-1$  失去频率采样特性, 但其低通频率

特性通带纹波特别小, 阻带衰减极大, 频谱函数非负。若滤波器长度足够大, 可以使

过渡带很陡峭，幅频特性接近理想滤波器。

### 1.6.2.5 归一化原则

本文归一化原则是当是所期望的  $N$  维 DFT 滤波响应向量  $F_N$  为全通时，即

$$F_N(n) = 1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.6.31)$$

加窗全相位 DFT 数字滤波器的输入与输出相等。由 (1.6.15) 式得  $h_N(n) = w_N(0)\delta(n)$ ,  $y(n) = x(n) * [w_N(0)\delta(n)] = w_N(0)x(n)$ 。为了使加窗全相位 DFT 数字滤波器的输入与输出相等， $w_N(0)$  必为 1，若不为 1，则必须归一化，即

$$w_N(n) = \hat{w}_N(n) / w_N(0), \quad n = 0, \pm 1, \dots, N-1 \quad (1.6.32)$$

$w_N(n)$  为归一化相关函数窗。图 1.6-3 给出了三种典型的归一化相关函数窗。

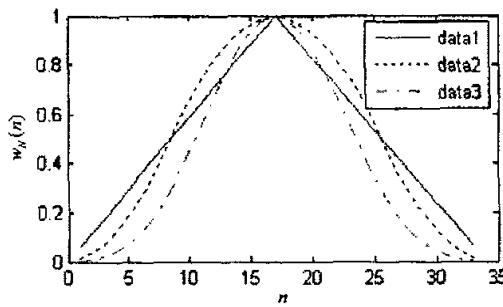


图 1.6-3 三种典型的归一化相关函数窗

data1. 全相位 DFT 滤波器的三角窗函数；data2. 前窗为三角窗，后窗为矩形窗的归一化相关函数窗；data3. 前后窗都为三角窗的归一化相关函数窗。

## 1.6.3 加窗全相位 DFT 数字滤波器的设计方法

### 1.6.3.1 设计步骤

加窗全相位 DFT 数字滤波器可以在时域实现，即求出单位脉冲响应  $h(n)$ ，然后进行卷积运算。加窗全相位 DFT 数字滤波器的设计步骤如下：

- (1) 选择理想的零相位 FIR 滤波器的幅度频率特性  $H_g(\omega)$ 。该幅频特性对于  $\omega = 0, \pi, 2\pi$  皆成偶对称。
- (2) 根据对截止频率精度和实现复杂度的要求，适当选择全相位 DFT 数字滤波器  $h_N(n)$  的长度  $M = 2N - 1$ 。

(3) 在区间  $[0, 2\pi)$  对  $H_g(\omega)$  等间隔采样, 频率采样点为  $\omega = 2\pi k / N, k = 0, 1, \dots, N-1$ , 并令 DFT 滤波响应为

$$F_N(k) = H_g(2\pi k / N) \quad (1.6.33)$$

(4) 适当选择前窗和后窗函数按式 (1.6.17), (1.6.18) 求出归一化相关函数窗  $w_N(n)$ 。当然, 也可以直接选择归一化相关函数窗  $w_N(n)$  为哈明窗、汉宁窗、布莱克曼窗等。

(5) 按式 (1.6.24) 求出零相位滤波器  $h_N(n)$ 。众所周知, 简单的平移  $h_N(n)$  即可得到因果线性相位滤波器:

$$h'_N(n) = h_N(n - N + 1), \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \quad (1.6.34)$$

### 1.6.3.2 设计实例

图 1.6-4 给出了在相同频率采样点数 ( $N=17$ , 截止频率  $\omega_c = \pi/2$ ) 的情况下, 四种零相位低通滤波器的频率特性。容易看出, data3.  $w'_N(n) = R_N(n) * T_N(-n)$  的加窗全相位 DFT 数字滤波器仍保持频率采样特性, 与全相位 DFT 数字滤波器

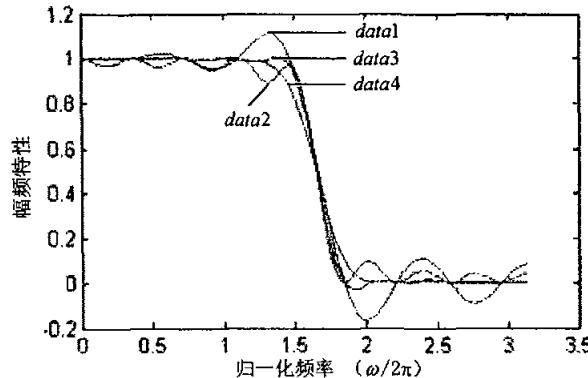


图 1.6-4 低通数字滤波器的频率特性

data1. 传统的频率采样滤波器; data2. 全相位 DFT 数字滤波器;

data3.  $w'_N(n) = R_N(n) * T_N(-n)$  的加窗全相位 DFT 数字滤波器;

data4.  $w'_N(n) = T_N(n) * T_N(-n)$  的加窗全相位 DFT 数字滤波器

比较, 其通带和阻带纹波得到改善, 虽然过渡带稍微加宽。data4.  $w'_N(n) = T_N(n) * T_N(-n)$  的加窗全相位 DFT 数字滤波器虽然过渡带加宽但通带和阻

带纹波极小, 幅频响应没有过冲, 它适合于设计半带滤波器用于设计正交镜像滤波器组。

图 1.6-5 给出了在相同频率采样点数 ( $N=17$ , 截止频率  $\omega_c = \pi/2$ ) 的情况下,  $w_N(n)$  分别为哈明窗、汉宁窗、布莱克曼窗的加窗全相位 DFT 低通数字滤波器, 可以看出, 三种滤波器的特性都比较好, 尤其加哈明窗时, 过渡带最陡峭, 滤波器的频率特性近似于等波纹法设计的滤波器, 但设计方法极为简单。

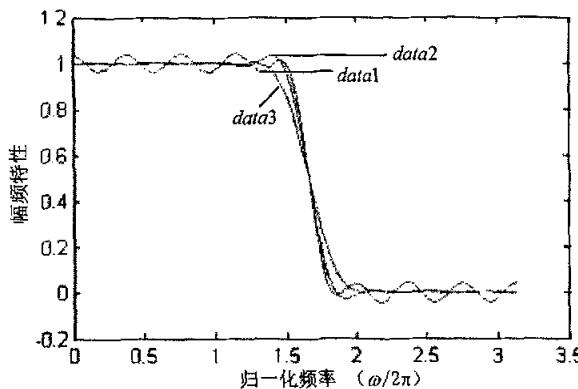


图 1.6-5  $w_N(n)$  分别为哈明窗、汉宁窗、布莱克曼窗的加窗全相位 DFT 低通数字滤波器的频率特性。data1.  $w_N(n)$  为哈明窗的加窗全相位 DFT 数字滤波器; data2.  $w_N(n)$  为汉宁窗的加窗全相位 DFT 数字滤波器; data3.  $w_N(n)$  为布莱克曼窗的加窗全相位 DFT 数字滤波器

## 1.6.4 加窗全相位 DFT 数字滤波器的直接频域实现新结构

### 1.6.4.1 直接频域网络结构

加窗全相位 DFT 数字滤波器除可以在时域实现外, 还可以采用图 1.6-2 所示的直接频域实现结构, 当然输出要乘以归一化因子的倒数, 即  $1/w_N(0)$ 。图 1.6-6 是本文提出的加窗全相位 DFT 数字滤波器直接频域实现新结构, 当图 1.6-2 中的前窗和后窗关于  $(N-1)/2$  对称或相等时, 即相关函数窗  $w_N(n)$  是偶函数, 这个结构等价于图 1.6-2 的结构, 但由于省去 FFT 单元, 使运算量大大减少。

由(1.6.3), (1.6.7), (1.6.11)式可得:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} A(l, j) x(n-l+j) F_N(k) \quad (1.6.35)$$

式中,  $A(l, j) = B_N^2(l) W_N^{-1}(l, k) W_N(k, j) B_N^1(j)$ 。

由式(1.6.35)得:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} g(\tau) x(n-\tau) \right\} F_N(k) \quad (1.6.36)$$

式中,

$$g(m) = \begin{cases} \sum_{l=m}^{N-1} A(l, l-m), & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ \sum_{l=0}^{N-1+m} A(l, l-m), & m = -1, \dots, -N+1 \end{cases} = \begin{cases} e^{j\frac{2\pi}{N}km} w_N^+(m), & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ e^{j\frac{2\pi}{N}km} w_N^-(m), & m = -1, \dots, -N+1 \end{cases} \quad (1.6.37)$$

$w_N^-(m)$ 恰好是(1.6.17)式描述的相关函数窗。把(1.6.37)代入(1.6.36)

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{\tau=-N+1}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k\tau} w_N^-(\tau) x(n-\tau) \right\} F_N(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{\tau=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k\tau} w_N^-(\tau) x(n-\tau) + \sum_{\tau=-N+1}^0 e^{j\frac{2\pi}{N}k\tau} w_N^-(\tau) x(n-\tau) \right\} F_N(k) \quad (1.6.38) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{\tau=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k\tau} w_N^-(\tau) x(n-\tau) + \sum_{\tau=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k\tau} w_N^+(\tau) x(n+\tau) \right\} F_N(k) \end{aligned}$$

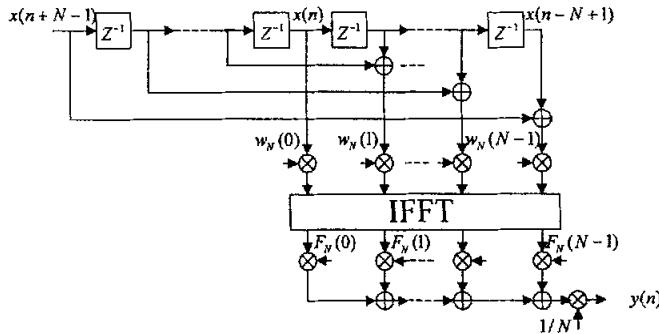


图 1.6-6 加窗全相位 DFT 数字滤波器直接频域实现新结构

$$\text{式中, } x^-(n-\tau) = \begin{cases} 0, & \tau = 0 \\ x(n-\tau), & \tau = -1, \dots, -N+1 \end{cases}$$

由于  $F_N(k)$  是实对称的, 相关函数窗  $w_N^-(n)$  是偶函数, 所以:

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{\tau=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k\tau} w_N^-(\tau) [x(n-\tau) + x^-(n+\tau)] \right\} F_N(k) \quad (1.6.39)$$

根据(1.6.39)把相关函数窗  $w_N^-(n)$  归一化, 即可得到图 1.6-6。

#### 1.6.4.2 新的直接频域网络结构的优点

(1) 在滤波器长度相同的情况下, 图 1.6.6 比图 1.6.2 的直接频域网络结构加法器、乘法器、延迟器数量和基本相等, 但可以完全省掉 DFT 运算。因此, 运算速度大大加快。

(2) 改变图 1.6.6 中的 DFT 滤波响应  $F_N(k)$ , 即频率采样点的幅度, 就能够实时地调节滤波器频率响应, 使加窗全相位 DFT 数字滤波器具有实时自设计功能, 而且还可以直接得到梯度值, 适用于频域自适应滤波、自适应编码等场合。

(3) 图 1.6.6 可方便地调节滤波器的长度。与优点 (2) 相结合, 图 1.6.6 的直接频域网络结构便于实现频响和长度均可编程的通用线性相位数字滤波器。

### 1.6.5 加窗全相位 DFT 数字滤波器小结

(1) 加窗全相位 DFT 数字滤波器是一种新型的零相位滤波器, 上文给出了它与全相位 DFT 数字滤波器之间的关系, 证明了它的若干性质。

(2) 零相位 FIR 滤波器可以作为加窗全相位 DFT 数字滤波器进行设计。本文给出了 DFT 滤波响应向量与等效滤波器单位脉冲响应之间的变换公式。分析了相关函数窗的若干性质。加窗全相位 DFT 数字滤波器是一种新的设计理念, 模拟试验表明, 选用适当的相关函数窗, 可以得到近于理想的频率响应特性, 广泛适用于设计各种带宽以及各种频率特性的数字滤波器。

(3) 这种滤波器便于实现严格子带互补滤波。子带划分清晰, 在信号内插, 数据压缩和模式识别等领域都有良好的应用前景。

(4) 这种滤波器可以用时域卷积实现外, 还具有新的直接频域实现网络结构。这种新结构运算速度快, 具有实时自设计功能, 可直接得到梯度值, 变换域系数相关性小, 尤其适用于频域自适应滤波。同时, 它还便于集成为频响和长度均可编程的通用零相位数字滤波器。

### 本章小结:

本章首先介绍了多率系统的基础知识, 其中包括抽取器和内插器的频域、时域输入输出关系; 多相分解; 滤波器组等一系列重要概念。然后介绍了多率系统的几种应用, 显示了多率在信号处理领域中的重要地位。最后本章介绍了几种特殊的数字滤波器如半带滤波器、 $M$  带滤波器、互补传递函数和加窗全相位 DFT 数字滤波器。其中加窗全相位 DFT 数字滤波器是本文的创新点之一。

## 第二章 最大抽取滤波器组

在第一章语音信号和图像的子带编码中讲到的 QMF 组就是最大抽取滤波器组。最大抽取的含义是，在  $2\pi$  周期内若信号的带宽为  $2\pi/M$ ，抽取因子最大可为  $M$ ，抽取信号的频谱不发生混叠。本论文阐述的滤波器组都是最大抽取滤波器组。QMF 组的研究起源于上世纪 70 年代中期，后来被众多学者所研究。图 1.4-3 中， $H_0(z), H_1(z)$  为分析滤波器组， $F_0(z), F_1(z)$  为综合滤波器组。由于系统存在混叠失真，相位失真，幅度失真及量化导致重建信号  $\hat{x}(n)$  与原信号  $x(n)$  存在差异，适当地选择分析滤波器组和综合滤波器组可以完全消除前三种失真，而由量化导致的失真无法消除。2 通道 QMF 组的理论后来被推广到  $M$  通道 QMF 组。下文简要介绍一下滤波器组的发展历史。

Croisier 首先提出 2 通道 QMF 组<sup>[33]</sup>的概念，指出通过适当的选取综合滤波器组可以完全消除混叠失真。文献[34, 35, 36]研究了减小其他失真的方法，Galand, and Nussbaumer 提出高效实现结构<sup>[37, 38]</sup>。文献[39, 40]指出，通过适当的选取 FIR 分析和综合滤波器组可以完全消除上述 3 种失真，得到完全重建 2 通道 QMF 组，后来 Grenez 进一步发展了量化技术<sup>[41]</sup>。

消除  $M$  通道 QMF 组的混叠失真就复杂得多。Nussbaumer 提出伪 QMF 组<sup>[42]</sup>，实现近似消除混叠失真。Rothweiler, Chu, Masson and Picel, Cox 分别对  $M$  通道 QMF 组<sup>[43, 44, 45, 46]</sup>进行了进一步的研究，后来众多学者<sup>[47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55]</sup>都得到完全重建的结论。Vetterli 和 Vaidyanathan 独立用多相分解方法推出这一结论的简单表达形式。Vaidyanathan 提出用具有仿酉特性的多相矩阵设计  $M$  通道完全重建 QMF 组<sup>[52, 53]</sup>。研究发现文献[39, 40]中的 2 通道完全重建 QMF 组也具有仿酉特性，甚至正交小波也具有仿酉特性！

后来，文献[56, 57, 58, 59] 各自独立提出一种特殊的  $M$  通道 QMF 组。这种滤波器组由一个原型滤波器调制生成，这使设计和实现成本大大降低。这种滤波器被证明是由 Cassreau 独立提出的 lapped orthogonal transforms<sup>[60]</sup> 的一种特例。Staelin, Malver 对 lapped orthogonal transforms 进行了进一步的研究<sup>[61, 62]</sup>。

Nayebi 研究了滤波器组的时域设计方法<sup>[63]</sup>。Hoang, Vaidyanathan, Kovačević<sup>'</sup>，Vetterli, Nayebi 研究了非均匀和分数倍抽取滤波器组<sup>[64, 65, 66]</sup>。文献[67, 68, 69, 70]研究了滤波器组的最小延迟问题。此外，众多学者还研究了 IIR 滤波器组，由于本文只讨论 FIR 完全重建滤波器组，此处就不赘述了。上世纪 80 年代中期发展起来的离散小波变换也导出了一系列的 FIR 完全重建滤波器组。

## 2.1 混叠失真、幅度失真、相位失真

图 2.1-1 中的 2 通道 QMF 组的子带信号  $v_k(n)$  由不同的编码方式编码<sup>[6]</sup>，传输，在接受端只能解码得到一个近似的恢复信号  $\hat{x}(n)$ ，量化误差  $v_k(n) - \hat{v}_k(n)$  是无法消除的。本文中提到的完全重建特性不包含这种误差，即认为  $v_k(n) = \hat{v}_k(n)$ 。下面以 2 通道 QMF 组为例介绍滤波器组中存在的混叠失真、幅度失真和相位失真。

### 2.1.1 混叠失真

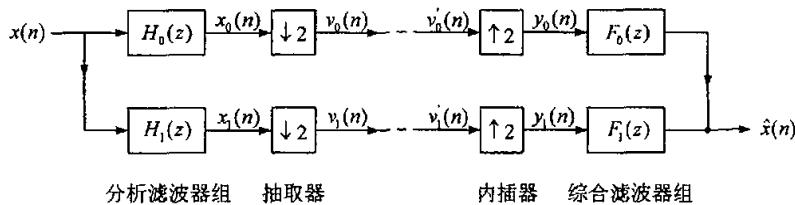


图 2.1-1 2 通道 QMF 组

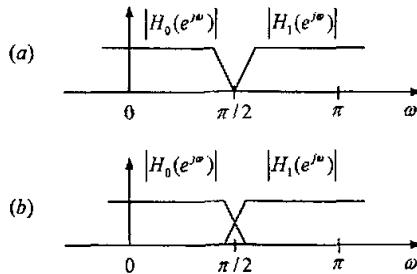


图 2.1-2 分析滤波器的两种可能的幅频特性 (a) 无重叠, (b) 重叠

实际上，分析滤波器的过渡带和阻带幅度值不为零，因此  $x_k(n)$  不是带限信号，对其进行抽取将导致混叠发生。分析滤波器组的一种可能的幅频特性如图 2.1-2 (a)，图中  $|H_0(e^{j\omega})|$  和  $|H_1(e^{j\omega})|$  无重叠，如果阻带衰减很大，抽取后混叠将不明显。此时，输入信号在  $\omega = \pi/2$  附近存在很大的衰减，如果通过减小过渡带的方法来实现，将会加大滤波器的实现成本；若通过选取  $F_0(z)$  和  $F_1(z)$  来弥补  $\omega = \pi/2$  处的衰减，将会使编码噪声、通道噪声和滤波器系数的舍入噪声严重放大，所以图 2.1-2 (a) 的幅频特性不可取。分析滤波器组的另一种可能的幅频特性如图 2.1-2 (b)， $|H_0(e^{j\omega})|$  和  $|H_1(e^{j\omega})|$  存在重叠，即使阻带衰减很大，抽取

后也必然导致混叠，实际中可以通过适当选取综合滤波器组消除混叠，因此图 2.1-2 (b) 的幅频特性可取。

图 2.1-1 中子带信号  $x_k(n)$  的  $z$  变换为：

$$X_k(z) = H_k(z)X(z), \quad k = 0, 1 \quad (2.1.1)$$

被抽取的子带信号  $v_k(n)$  的  $z$  变换为：

$$V_k(z) = \frac{1}{2}[X_k(z^{1/2}) + X_k(-z^{1/2})], \quad k = 0, 1 \quad (2.1.2)$$

式中第二项是混叠项。

$$\begin{aligned} Y_k(z) &= V_k(z^2) = \frac{1}{2}[X_k(z) + X_k(-z)] \\ &= \frac{1}{2}[H_k(z)X(z) + H_k(-z)X(-z)], \quad k = 0, 1 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

重建信号为：

$$\hat{X}(z) = F_0(z)Y_0(z) + F_1(z)Y_1(z) \quad (2.1.4)$$

把式 (2.1.3) 代入式 (2.1.4) 得：

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]X(z) + \frac{1}{2}[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]X(-z) \quad (2.1.5)$$

其矩阵形式为：

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X(z) & X(-z) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}(z)} \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \end{bmatrix} \quad (2.1.6)$$

式中， $\mathbf{H}(z)$  为混叠分量矩阵。 $X(-z)$  项是由于抽取和内插而产生的，本文统称为混叠项或混叠分量。

若综合滤波器组如下选取，即：

$$F_0(z) = H_1(-z), \quad F_1(z) = -H_0(-z) \quad (2.1.7)$$

则  $H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0$ ，2 通道 QMF 组的混叠分量完全消除。

## 2.1.2 幅度失真和相位失真

若分析滤波器组满足 (2.1.7) 式，则 QMF 组是无混叠的，即

$$\hat{X}(z) = T(z)X(z) \quad (2.1.8)$$

式中， $T(z)$  为无混叠系统的传递函数

$$T(z) = \frac{1}{2}[H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z)] \quad (2.1.9)$$

若令  $T(e^{j\omega}) = |T(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}$ ，则得：

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = |T(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}X(e^{j\omega}) \quad (2.1.10)$$

若  $T(z)$  是全通函数，即  $|T(e^{j\omega})| = c \neq 0$  ( $\omega$  为任意值)，则  $\hat{X}(e^{j\omega})$  不存在幅度失真。同理，若  $T(z)$  具有线性相位特性，即  $\phi(\omega) = -n_0\omega$ ， $n_0$  为正数，则  $\hat{X}(e^{j\omega})$  不存在相位失真。

如果上述 3 种失真完全消除，则系统成为完全重建 (PR 是 Perfect reconstruction 的缩写) QMF 组， $T(z) = cz^{-n_0}$ ， $c, n_0$  为常数。PR QMF 组的输入输出关系为：

$$\hat{X}(z) = cz^{-n_0}X(z), \text{ 或 } \hat{x}(n) = cx(n - n_0) \quad (2.1.11)$$

## 2.2 一个简单的无混叠系统

最早的 QMF 组的分析滤波器组关系为：

$$H_1(z) = H_0(-z) \quad (2.2.1)$$

当滤波器为实系数时，上式意味着  $|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(e^{j(\pi-\omega)})|$ 。如果  $H_0(z)$  有较好的低通频率特性，那么可以使  $H_1(z)$  具有较好的高通频率特性。实际上， $H_1(z)$  是  $H_0(z)$  的镜像，这是‘QMF’的由来。下文的 PR 滤波器组可能不满足这个关系，但由于历史原因，不论二通道还是  $M$  通道滤波器组‘QMF’仍被采用。

分析滤波器关系如 (2.2.1) 式，那么 (2.1.7) 式消除混叠分量的综合滤波器变为：

$$F_0(z) = H_0(z), \quad F_1(z) = -H_1(z) \quad (2.2.2)$$

可见，此时 QMF 组的所有滤波器由一个滤波器的系数决定，系统传递函数为：

$$T(z) = \frac{1}{2} \left( H_0^2(z) - H_1^2(z) \right) = \frac{1}{2} \left( H_0^2(z) - H_0^2(-z) \right) \quad (2.2.3)$$

为了得到 QMF 组的高效实现结构，对低通分析滤波器进行多相 I 型分解，得：

$$H_0(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2) \quad (2.2.4)$$

因为  $H_1(z) = H_0(-z)$ ，所以  $H_1(z) = E_0(z^2) - z^{-1}E_1(z^2)$ ，分析滤波器组的多相分解用矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0(z^2) \\ z^{-1}E_1(z^2) \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

满足 (2.2.2) 式的综合滤波器组，也可以用多相分量  $E_0(z)$  和  $E_1(z)$  表示，即：

$$\begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1}E_1(z^2) & E_0(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

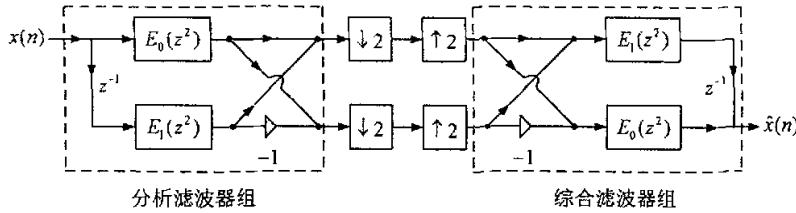


图 2.2-1 QMF 组的多相分解形式

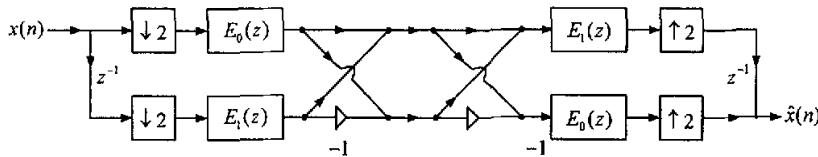


图 2.2-2 应用著名等价结构等效后得到的 QMF 组的高效实现结构

由 (2.2.5) 和 (2.2.6) 式得到分析滤波器组和综合滤波器组的多相实现结构如图 2.2-1 虚线框内的部分, 图 2.2-1 即是 QMF 组的多相分解形式。对图 2.2-1 应用两个著名的等价则得到其高效实现结构如图 2.2-2。

如果滤波器组按 (2.2.1), (2.2.2) 式选取, 系统传递函数用多相分量表示为:

$$T(z) = 2z^{-1}E_0(z^2)E_1(z^2) \quad (2.2.7)$$

假设  $H_0(z)$  是 FIR 滤波器, 那么  $E_0(z)$ ,  $E_1(z)$  和  $T(z)$  都是 FIR 滤波器, 只有当  $E_0(z)$  和  $E_1(z)$  为延迟因子, 即  $E_0(z) = c_0 z^{-n_0}$ ,  $E_1(z) = c_1 z^{-n_1}$  时, 系统才能完全消除幅度失真。这意味着:

$$H_0(z) = c_0 z^{-2n_0} + c_1 z^{-(2n_1+1)}, \quad H_1(z) = c_0 z^{-2n_0} - c_1 z^{-(2n_1+1)} \quad (2.2.8)$$

可见, 分析滤波器组不可能具有陡峭的过渡带和大的阻带衰减。也就是说, 如果  $H_1(z) = H_0(-z)$ , 将不可能得到实用的 FIR PR 系统, 因此只能另辟蹊径。

如果令  $E_1(z) = 1/E_2(z)$ , (2.2.7) 式变成一个延迟因子, 系统是完全重建的, 但是分析和综合滤波器成为 IIR 滤波器。

## 2.3 功率对称 FIR 完全重建 QMF 组

二通道 FIR 完全重建 QMF 组由 Smith and Barnwell 和 Mintzer 分别单独提出<sup>[39, 40]</sup>。为了对其进行详细介绍，首先介绍一下滤波器的功率对称特性。

如果 FIR 滤波器  $H(z) = \sum_{n=0}^N h(n)z^{-n}$  满足下式，即：

$$\tilde{H}(z)H(z) + \tilde{H}(-z)H(-z) = c, \quad c > 0 \quad \text{功率对称条件} \quad (2.3.1)$$

则称  $H(z)$  是功率对称滤波器。式中  $\tilde{H}(z) = \sum_{n=0}^N h^*(n)z^n$ ，上标 '\*' 表示取共轭。当  $H(z)$  是实系数时， $|H(-e^{j\omega})| = |H(e^{j(\omega-\pi)})| = |H(e^{j(\pi-\omega)})|$ ， $|H(e^{j\omega})|$  和  $|H(e^{j(\pi-\omega)})|$  关于  $\pi/2$  对称，这是‘功率对称’名字的由来。虽然仅当  $H(z)$  是实系数时上述对称关系才存在，实际上仍把 (2.3.1) 式作为功率对称条件。

上文已说明综合滤波器组满足 (2.1.7) 式，图 2.1-1 所示的 QMF 组无混叠存在，即：

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} [H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z)]X(z) \quad (2.3.2)$$

对于 PR 系统，要求系统传递函数是一个延迟因子。上文已分析了分析滤波器组  $H_1(z) = H_0(-z)$  的局限性。假设  $H_0(z)$  是功率对称 FIR 滤波器，根据 (2.3.2) 式，若  $H_1(z)$  如下选取：

$$H_1(z) = -z^{-N} \tilde{H}_0(-z) \quad (2.3.3)$$

式中  $N$  为奇数，则 (2.3.2) 式变成  $\hat{X}(z) = \frac{c}{2} z^{-N} X(z)$ ，此时系统是完全重建的！

把 (2.3.3) 式代入 (2.1.7) 式得：

$$F_0(z) = z^{-N} \tilde{H}_0(z), \quad F_1(z) = z^{-N} \tilde{H}_1(z) \quad (2.3.4)$$

(2.3.3) 和 (2.3.4) 式使得 PR QMF 组的所有滤波器都是 FIR 滤波器，适当选择  $N$ ，可以使它们都是因果滤波器。

如果  $H_0(z)$  是功率对称 FIR 滤波器，其他滤波器满足 (2.3.3) 和 (2.3.4) 式，则称这种滤波器组为功率对称 FIR 完全重建 QMF 组。

上述滤波器的时域表示为：

$$h_1(n) = (-1)^n h_0^*(N-n), \quad f_0(n) = h_0^*(N-n), \quad f_1(n) = h_1^*(N-n) \quad (2.3.5)$$

容易证明，如果滤波器组满足上述特性，那么

- (a)  $|F_k(e^{j\omega})| = |H_k(e^{j\omega})|$ ，即分析滤波器组和综合滤波器组有相同的幅频特性。
- (b)  $|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(-e^{j\omega})|$ ，如果  $h_0(n)$  是实系数的，若  $H_0(e^{j\omega})$  是低通滤波器，则  $H_1(e^{j\omega})$  是高通滤波器。

(c)  $\sum_{i=0}^1 |H_i(z)|^2 = c$ , 即分析滤波器组满足功率互补特性。

(d)  $\tilde{H}(z)H(z)$  是半带滤波器。

设计步骤:

由上文可知, 设计功率对称 FIR 完全重建 QMF 组的关键是设计低通分析滤波器  $H_0(z)$ , 由  $H_0(z)$  的功率对称性可知零相位滤波器  $H(z) = \tilde{H}_0(z)H_0(z)$  是半带滤波器, 且  $H(e^{j\omega}) \geq 0$ 。当  $h_0(n)$  为实系数时, 具体设计步骤如下:

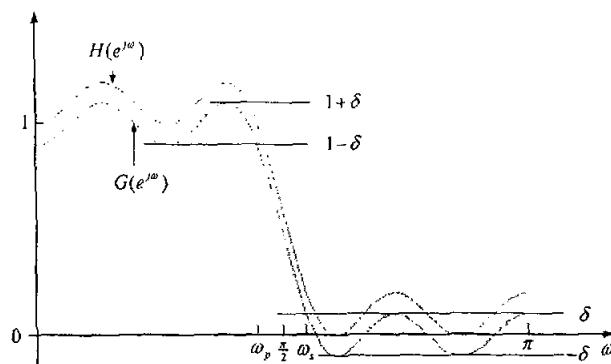
1. 首先设计  $2N$  阶零相位 FIR 半带滤波器  $G(z) = \sum_{n=-N}^N g(n)z^{-n}$ 。例如, 用 McClellan-Parks 算法 (等波纹法), 通过限制  $\omega_p + \omega_s = \pi$  ( $\omega_p$  为通带边缘,  $\omega_s$  为阻带边缘), 通带和阻带纹波相同, 得到半带滤波器幅频特性  $G(e^{j\omega})$  如图 2.3-1。
2. 定义  $H(z) = G(z) + \delta$  ( $\delta$  是  $G(e^{j\omega})$  的阻带波纹峰值, 也称为抬高因子), 则  $H(e^{j\omega}) \geq 0$ , 如图 2.3-1。
3. 对  $H(z)$  进行谱分解得  $H_0(z)$ , 由 (2.3.5) 式可以得到其它滤波器的系数。

设计过程中的几点注意事项:

1. 由于半带滤波器  $G(z)$  的阶次为  $2N$  ( $N$  为奇数), 因此  $H_0(z)$  的阶次是  $N$ 。按 (2.3.3) 式选取  $H_1(z)$ , 可以使滤波器组中的所有滤波器都是因果的。
2. 如果  $\omega_s$  和  $\delta_x$  分别为  $H_0(z)$  的阻带边缘和阻带纹波峰值, 那么  $G(z)$  的阻带边缘和阻带纹波峰值分别为  $\omega_s$  和  $\delta = \delta_x^2/2$ 。根据半带滤波器的特性, 通带和阻带峰值纹波相同,  $\omega_p + \omega_s = \pi$ , 则可以得到  $G(z)$  的通带特性指标。
3.  $G(z)$  有很多设计方法如等波纹设计法, 窗函数法, 全相位半带滤波器设计法等, 不同的设计方法得到的  $G(z)$  有不同的特性,  $H(z) = G(z) + \delta$  谱分解精度也各不相同, 致使 2 通道 QMF 组的重建精度不同。
4.  $H_0(z)$  由  $H(z) = G(z) + \delta$  谱分解得到, 使得  $H_0(z)$  有很多相位选择的可能。通常选取  $H_0(z)$  具有最小相位<sup>[71]</sup>, 或接近线性相位<sup>[39]</sup>。实际上这种设计方法  $H_0(z)$  不可能真正具有线性相位, 除非  $H_0(z) = az^{-K} + bz^{-L}$ , 如 (2.2.8) 式。

### 例2.3.1 设计功率对称 FIR 完全重建 QMF 组

设  $H_0(z)$  是实系数、等波纹、功率对称 FIR 低通滤波器,  $\omega_s = 0.6\pi$ ,  $-20\log_{10}(\delta_x) = 31\text{dB}$ , 可得  $G(z)$  的阻带边缘和阻带纹波峰值分别为  $\omega_s = 0.6\pi$ ,  $-20\log_{10}(\delta) = 68.0206\text{dB}$ 。 $G(z)$  的阶次为 38 可以满足上述指标, 因此

图 2.3-1 半带滤波器  $G(e^{j\omega})$  和  $H(e^{j\omega})$  的关系表 2.3.1  $h_0(n)$  的系数(Vaidyanathan)

| $n$ | $h_0(n)$         | $n$ | $h_0(n)$         |
|-----|------------------|-----|------------------|
| 0   | $0.1605476e+00$  | 10  | $0.3518087e-01$  |
| 1   | $0.4156381e+00$  | 11  | $0.3989182e-01$  |
| 2   | $0.4591917e+00$  | 12  | $-0.2561513e-01$ |
| 3   | $0.1487153e+00$  | 13  | $-0.2440664e-01$ |
| 4   | $-0.1642893e+00$ | 14  | $0.1860065e-01$  |
| 5   | $-0.1245206e+00$ | 15  | $0.1354778e-01$  |
| 6   | $0.8252419e-01$  | 16  | $-0.1308061e-01$ |
| 7   | $0.8875733e-01$  | 17  | $-0.7449561e-02$ |
| 8   | $-0.5080163e-01$ | 18  | $0.1293440e-01$  |
| 9   | $-0.6084593e-01$ | 19  | $-0.4995356e-02$ |

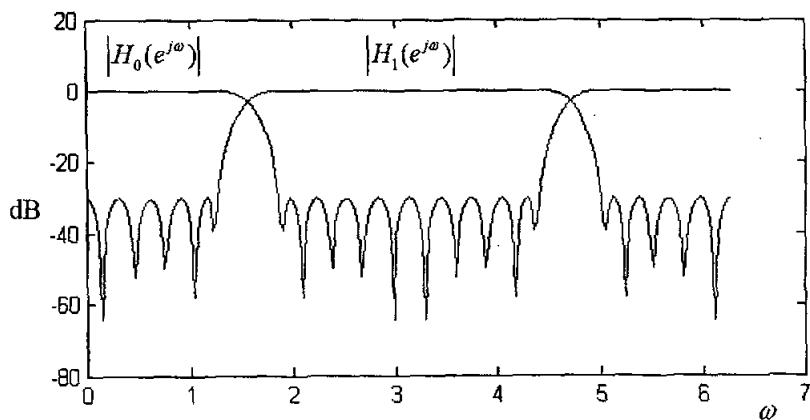


图 2.3-2 例 2.3.1 中分析滤波器的幅频特性

功率对称滤波器  $H_0(z)$  的阶次为  $N = 19$ 。本例  $H_0(z)$  由文献[71]中的方法得到。 $h_0(n)$  的系数如表 2.3.1, 对数幅频特性如图 2.3-2。若本例滤波器组用多相实现, 整个分析滤波器组的运算量为  $(N+1)\text{MPUs}$  和  $N \text{APUs}$ , 综合滤波器组有相同的运算量。

图 2.1-1 中的分析滤波器组  $H_k(z)$  和综合滤波器组  $F_k(z)$  在实现时都将被量化 (即单位脉冲响应将被量化)。虽然量化后(2.3.3), (2.3.4)式仍然成立, 但  $H_0(z)$  不再是半带滤波器的谱分解, 这样  $T(z)$  就不能成为一个延迟因子, 混叠仍然存在, 从这种意义上说, 此时 QMF 组已不是完全重建 QMF 组。导致这种现象的原因是传统方法设计的半带滤波器抬高因子  $\delta$  不为零, 影响了谱分解的精度, 使 QMF 组的完全重建特性不够理想。下文设计的全相位半带滤波器可以成功克服这一现象。这种半带滤波器谱分解精度高, QMF 组的完全重建特性比传统方法有很大改善。

## 2.4 全相位功率对称 FIR 完全重建 QMF 组

文献[31]提出了一种新型的 FIR 数字滤波器—全相位 DFT 数字滤波器。这种滤波器具有频率采样特性, 通带、阻带纹波特性和过渡带特性优于传统的频率采样法。全相位 DFT 数字滤波器的一个更重要的特点是它的频率响应无过冲 (即幅频特性小于等于 1 且大于等于 0)。本文将这一特点用于全相位半带滤波器的设计, 这种半带滤波器可以直接进行谱分解用于设计功率对称滤波器  $H_0(z)$ , 通过适当地选择高通分析滤波器和综合滤波器使图 2.1-1 中的 QMF 组成为完全重建的。传统的半带滤波器频率响应有过冲, 而谱分解要求频谱在阻带不出现负值, 为此必须加抬高因子  $\delta^{[39]}$ 。由于  $\delta$  的误差, 致使谱分解的精度下降, 直接影响了 QMF 组的完全重建质量。本文提出的全相位半带滤波器不需要加抬高因子  $\delta$  就可得到高精度的谱分解, 使 QMF 组完全重建的精度由  $10^{-3} \text{ dB}$  提高到  $10^{-6} \text{ dB}$ 。

### 2.4.1 全相位半带滤波器的设计方法

全相位半带滤波器既是全相位 DFT 数字滤波器的一个子集, 又要满足半带滤波器的特性, 即:

$$H(e^{j\omega}) + H(e^{j(\pi-\omega)}) = 1 \quad (2.4.1)$$

$$\omega_s = \pi - \omega_p \quad (2.4.2)$$

其中,  $\omega_s$  及  $\omega_p$  分别为半带滤波器频率特性  $H(e^{j\omega})$  的通带边缘和阻带边缘。由式

(2.4.1) 可知,  $H(e^{j\omega})$  和  $H(e^{j(\pi-\omega)})$  是能量相等的子带互补对,  $H(e^{j(\pi-\omega)})$  可以由  $H(e^{j\omega})$  翻转移位得到。

全相位半带滤波器的设计步骤:

- (1) 根据设计要求, 选择理想的零相位 FIR 滤波器的幅度频率特性  $H_g(\omega)$ , 使之满足 (2.4.1), (2.4.2) 式。
- (2) 在  $[0, 2\pi]$  区间对  $H_g(\omega)$  等间隔采样, 频率采样点为  $\omega = 2\pi k / N, k = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $N$  为偶数, 并令全相位半带滤波器的 DFT 滤波响应为:

$$F_N^0(k) = H_g(2\pi k / N)$$

- (3) 把  $F_N^0(k)$  代入 (1.6.24) 式 (前窗后窗都为矩形窗), 即得到全相位半带滤波器的时域脉冲响应。

例 2.4.1: 设计频率采样点数  $N = 20$  的全相位半带滤波器。

选取全相位半带滤波器幅频特性  $H_g(e^{j\omega})$  如图 2.4-2 实线所示, 低通和高通半带滤波器的 DFT 滤波响应分别为:

$$F_{20}^0(k) = [1, 1, 1, 1, 1, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1] \quad (2.4.3)$$

$$F_{20}^1(k) = [0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0.5, 0, 0, 0, 0] \quad (2.4.4)$$

$F_{20}^0(k)$  即为图 2.4-2 中的点。把 (2.4.3) 式代入 (1.6.24) 式 (前窗后窗都为矩形窗), 即得到全相位半带滤波器的单位脉冲响应如表 1。由于  $h_{20}^0(n)$  关于  $n=0$  偶对称, 表 2.4-1 仅列出  $n$  为非负时  $h_{20}^0(n)$  的值。

表 2.4-1 全相位半带滤波器  $h_{20}^0(n)$  ( $n \geq 0$ ) 的值

| $n$ | $h_{20}^0(n)$     | $n$ | $h_{20}^0(n)$     |
|-----|-------------------|-----|-------------------|
| 0   | 0.500000000000000 | 10  | 0                 |
| 1   | 0.29990319694706  | 11  | 0.00356364990730  |
| 2   | 0                 | 12  | 0                 |
| 3   | -0.08341094648397 | 13  | -0.00891669536615 |
| 4   | 0                 | 14  | 0                 |
| 5   | 0.037500000000000 | 15  | 0.012500000000000 |
| 6   | 0                 | 16  | 0                 |
| 7   | -0.01655957710857 | 17  | -0.01471957879129 |
| 8   | 0                 | 18  | 0                 |
| 9   | 0.00435557210892  | 19  | 0.01578437878669  |

全相位半带滤波器频率响应  $H_{20}^0(e^{j\omega})$  如图 2.4-1(a) 实线所示,  $H_{20}^1(e^{j(\pi-\omega)})$  如图 2.4-1(a) 虚线所示。

同理, 当频率采样点数  $N = 22$  时, 为了使过渡带陡峭, 取全相位低通半带滤波器的 DFT 滤波响应为:  $F_N^0(k) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]$ ,  $H_{22}^0(e^{j\omega})$

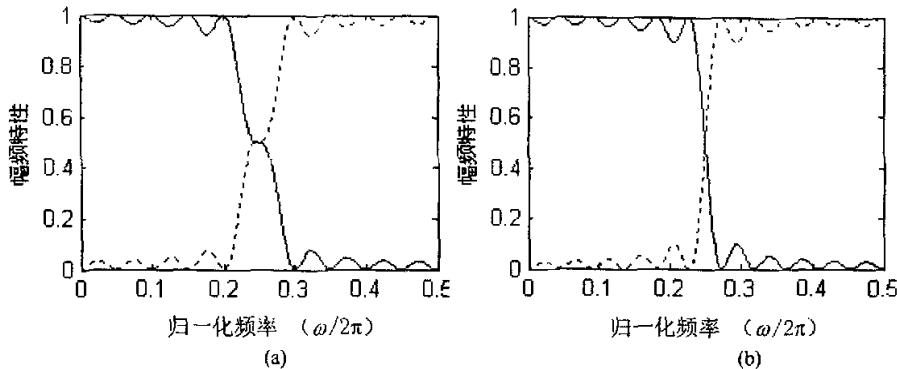


图 2.4-1 (a) 频率特性  $H_{20}^0(e^{j\omega})$  (实线) 和  $H_{20}^1(e^{j(\pi-\omega)})$  (虚线), (b) 频率特性  $H_{22}^0(e^{j\omega})$  (实线) 和  $H_{22}^1(e^{j(\pi-\omega)})$  (虚线)

和  $H_{22}^1(e^{j(\pi-\omega)})$  的频率特性分别如图 2.4-1 (b) 中实线和虚线所示。图 2.4-1 (b) 中  $H_{22}^0(e^{j\omega})$  的过渡带陡峭, 但其纹波幅度比图 2.4-1 (a) 中  $H_{20}^0(e^{j\omega})$  的大。由图 2.4-1 可以看出全相位半带滤波器无过冲现象, 可以直接进行谱分解。

## 2.4.2 全相位半带滤波器 $H_N^0(e^{j\omega})$ 的谱分解方法

全相位半带滤波器  $H_N^0(e^{j\omega})$  的谱分解为:

$$H_N^0(z) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} h_N^0(n)z^{-n} = \sigma^2 H_0^-(z)H_0^+(z^{-1}) = H_0(z)H_0(z^{-1}) \quad (2.4.5)$$

式中  $H_0(z) = \sigma H_0^-(z)$ , 是  $H_N^0(z)$  谱分解得到的归一化最小相位低通滤波器, 由单位圆内的零点和单位圆上的单重零点  $z_i$  组成, 即:

$$H_0(z) = \sigma \prod_{i=1}^{N-1} (1 - z_i z^{-1}) \quad (2.4.6)$$

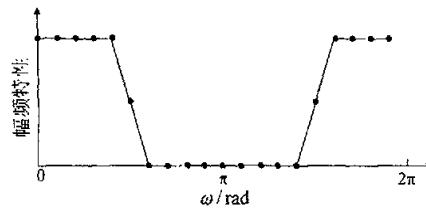
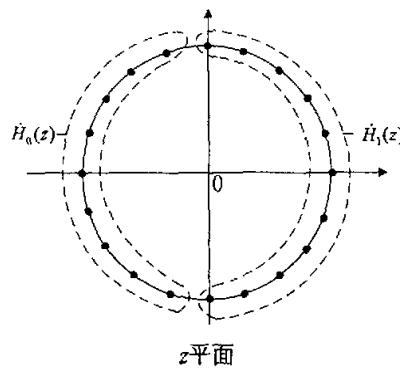
它即是完全重建二通道 QMF 组中的低通分析滤波器。 $\sigma$  可由下述方法求得, 当  $z=1$  时, 有

$$\sigma = \sqrt{\frac{H_N^0(1)}{[H_0^-(1)]^2}} \quad (2.4.7)$$

由于全相位半带滤波器  $H_N^0(1)=1$ , 因此  $\sigma=1/H_0^-(1)$ 。

(i)  $H_N^0(z)$  单位圆上的零点

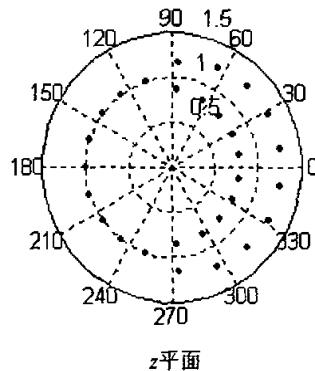
由于全相位低通半带滤波器具有频率采样特性, 我们可以精确知道其频谱  $H_N^0(e^{j\omega})$  的零点的位置。频谱  $H_N^0(e^{j\omega})$  的零点也是  $H_N^0(z)$  在单位圆上的零点。例如, 例 2.4.1 中  $H_{20}^0(e^{j\omega})$  的 DFT 滤波响应为图 2.4-2 中频率响应 (实线) 的等间隔采样, 采样频率为  $\omega_k = 2\pi k/N$ ,  $k = 0, 1, \dots, (N-1)$ ,  $N = 20$ 。全相位半带滤波器频谱  $H_{20}^0(e^{j\omega})$  的零点为  $\omega_k = 2\pi k/N$ ,  $k = 6, 8, \dots, 14$ , 这些零点都为双重零点。

图 2.4-2  $H_{20}^0(e^{j\omega})$  的 DFT 滤波响应 (点)图 2.4-3  $H(z) = 1 - z^{-N}$  ( $N = 20$ ) 在  $z$  平面上的零点(ii)  $H_N^0(z)$  非单位圆上的零点

全相位半带滤波器的传递函数  $H_N^0(z)$  可以表示为:

$$H_N^0(z) = B_0(z)B_1(z) \quad (2.4.19)$$

$B_0(z)$  包含  $H_N^0(z)$  所有单位圆上的零点,  $B_1(z)$  包含  $H_N^0(z)$  所有非单位圆上的零点。使  $H_N^0(z)$  除以  $B_0(z)$  可以降低  $H_N^0(z)$  的阶次, 然后用求解多项式根的方法求解  $B_1(z)$  得到  $H_N^0(z)$  的非单位圆上的零点。遗憾的是当  $H_N^0(z)$  阶次很大时, 这种方法

图 2.4-4 例 2.4.1 中全相位半带滤波器  $H_{20}^0(z)$  的根在  $z$  平面上的分布

求出的非单位圆上的根的精度不高。我们可以采用下述方法求解  $H_N^0(z)$  所有非单位圆上的零点。

多项式

$$\dot{H}(z) = 1 - z^{-N} \quad (2.4.9)$$

的零点均匀分布于单位圆上, 其零点为  $f_k = 2\pi k / N$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ 。例如当  $N = 20$  时, (2.4.9) 式的零点分布如图 2.4.3 所示。 $\dot{H}(z)$  的零点可以分为两部分, 它们形成的多项式分别为  $\dot{H}_0(z)$  和  $\dot{H}_1(z)$ , 关系为:

$$\dot{H}(z) = \dot{H}_0(z)\dot{H}_1(z) \quad (2.4.10)$$

显然, 图 2.4.3 中  $\dot{H}_0(z)$  零点的位置与例 2.4.1 中全相位半带滤波器单位圆上的零点的位置完全相同。但  $B_0(z)$  的零点都为双重零点, 所以  $B_0(z) = \dot{H}_0^2(z)$ , 因此  $B_1(z)$  可以从下式得到:

$$B_1(z) = \frac{H_N^0(z)\dot{H}_1^2(z)}{\dot{H}^2(z)} \quad (2.4.11)$$

若  $H_N^0(z)\dot{H}_1^2(z) = a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_{N_1-1}z^{-(N_1-1)}$

则

$$B_1(z) = \frac{H_N^0(z)\dot{H}_1^2(z)}{\dot{H}^2(z)} = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_{N_1-2N-1}z^{-(N_1-2N-1)} \quad (2.4.12)$$

式中  $B_1(z)$  包含全相位半带滤波器所有非单位圆上的零点。求解  $B_1(z)$  的零点的数值方法很多, 本文用牛顿-拉弗逊法求解。

(iii) 通过步骤(i), (ii) 求得全相位半带滤波器  $H_N^0(z)$  的所有根。把  $H_N^0(z)$  单位圆上的单重零点及单位圆内的零点代入 (2.4.6) 式可以得到低通分析滤波器  $H_0(z)$ 。

按上述方法, 例 2.4.1 中全相位半带滤波器  $H_{20}^0(z)$  的零点在  $z$  平面上的分布如图 2.4-4 所示, 可见单位圆上的零点为双重零点且满足上文所述的频率采样特性, 表 2.4-2 列出了非单位圆上各零点的值。表 2.4-3 列出了由  $H_{20}^0(z)$  谱分解得到的低通分析滤波器  $H_0(z)$  的系数  $h_0(n)$ 。

全相位半带滤波器  $H_{48}^0(z)$  的非单位圆上的零点如表 2.4-4 所示, 图 2.4-5 为其幅频特性。对它进行谱分解得到的二通道完全重建 QMF 组的低通分析滤波器  $H_0(z)$  的系数  $h_0(n)$  如表 2.4-5 所示, 幅频特性如图 2.4-6。按 (2.3.3)、(2.3.4) 式选取另一个分析滤波器和综合滤波器, 可以使图 2.1-1 中的 QMF 组成为完全重建滤波器组。本文称由全相位半带滤波器的谱分解得到的 QMF 组为全相位功率对称 FIR 完全重建 QMF 组。 $|H_0(z)|^2 + |H_0(-z)|^2$  的对数幅频特性如图 2.4-7, 它的精度为  $1 \times 10^{-6}$  dB, 在阶次相同的条件下, 传统的半带滤波器谱分解方法

$|H_0(z)|^2 + |H_0(-z)|^2$  的精度为  $1 \times 10^{-3}$  dB。这说明全相位半带滤波器谱分解法设计的二通道完全重建 QMF 组的重建精度得到很大提高。

### 2.4.3 全相位功率对称 FIR 完全重建 QMF 组小结

本节提出了一种新型的半带滤波器—全相位半带滤器的设计方法。全相位半带滤波器具有频率采样特性，频率响应无过冲。利用全相位半带滤波器的这个优点文中给出了它的高精度谱分解方法并应用于二通道完全重建 QMF 组的设计。仿真结果显示全相位半带滤波器谱分解法设计的二通道完全重建 QMF 组的重建精度比传统半带滤波器谱分解法设计的二通道完全重建 QMF 组的重建精度有很大的改善。

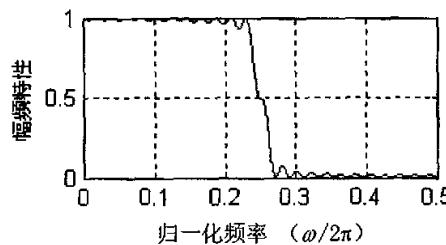


图 2.4-5 全相位半带滤波器  $H_{48}^0(z)$  的幅频特性

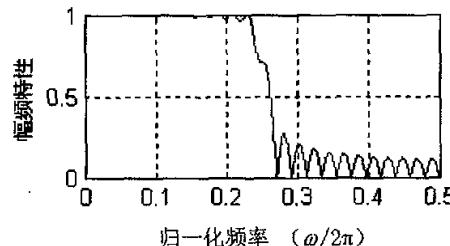


图 2.4-6 由  $H_{48}^0(z)$  谱分解得到的二通道完全重建 QMF 组的低通分析滤波器  $H_0(z)$  的幅频特性

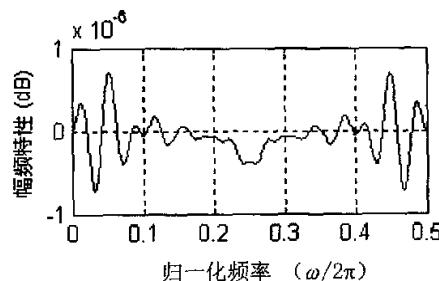


图 2.4-7  $|H_0(z)|^2 + |H_0(-z)|^2$  的对数幅频特性， $H_0(z)$  的幅频特性如图 2.4-6表 2.4-2  $H_{20}^0(z)$  的非单位圆上的零点

| $i$ | $z_i$                                |
|-----|--------------------------------------|
| 1   | 0.07931967450768 + 1.16417412880645i |
| 2   | 0.07931967450767 - 1.16417412880645i |
| 3   | 0.53044421360454 - 1.10170743162232i |
| 4   | 0.87414569250787 - 0.89535714568421i |
| 5   | 0.05825505400916 - 0.85500888866003i |
| 6   | 1.12461568975716 - 0.58197548433769i |
| 7   | 0.53044421360454 + 1.10170743162232i |
| 8   | 1.25689396410056 - 0.20163526953007i |
| 9   | 0.87414569250787 + 0.89535714568421i |
| 10  | 1.25689396410056 + 0.20163526953007i |
| 11  | 1.12461568975715 + 0.58197548433769i |
| 12  | 0.05825505400916 + 0.85500888866003i |
| 13  | 0.35478125447941 - 0.73686381081283i |
| 14  | 0.55827591163928 - 0.57182267330694i |
| 15  | 0.35478125447941 + 0.73686381081283i |
| 16  | 0.70136988483769 - 0.36295072365247i |
| 17  | 0.77565017523171 - 0.12443247927904i |
| 18  | 0.55827591163928 + 0.57182267330694i |
| 19  | 0.77565017523171 + 0.12443247927904i |
| 20  | 0.70136988483769 + 0.36295072365247i |

表 2.4-3 分析滤波器  $h_0(n)$  ( $0 \leq n \leq 19$ ) 的值

| $n$ | $h_0(n)$          | $n$ | $h_0(n)$           |
|-----|-------------------|-----|--------------------|
| 0   | 0.36156741522331  | 10  | 0.0171977067103    |
| 1   | 0.51237246801309  | 11  | -0.02047071371574i |
| 2   | 0.2595279232988   | 12  | -0.00072291711551  |
| 3   | -0.08253957820560 | 13  | 0.02146388318013   |
| 4   | -0.1245479172990  | 14  | -0.01454045686961  |
| 5   | 0.03360283294655  | 15  | -0.02142828656334  |
| 6   | 0.06908563131403  | 16  | 0.03223522059026   |
| 7   | -0.02230075911709 | 17  | 0.01562029332323   |
| 8   | -0.03813218954511 | 18  | -0.06186353016655  |
| 9   | 0.01996086661308  | 19  | 0.04365542354553   |

表 2.4-4  $H_{48}^0(z)$  的非单位圆上的零点

| $i$ | $z_i$                                |
|-----|--------------------------------------|
| 1   | 0.03013775396698 - 1.06584944679315i |
| 2   | 0.03013775396698 + 1.06584944679315i |
| 3   | 0.20155607227108 + 1.06901204175086i |
| 4   | 0.20155607227108 - 1.06901204175085i |
| 5   | 0.02650770116638 + 0.93746928370638i |
| 6   | 0.02650770116638 - 0.93746928370638i |
| 7   | 0.34702888152255 - 1.04343682533164i |
| 8   | 0.34702888152255 + 1.04343682533164i |
| 9   | 0.17031781081684 - 0.90333071406039i |
| 10  | 0.17031781081684 + 0.90333071406039i |
| 11  | 0.48524140915044 - 0.99511342289529i |
| 12  | 0.48524140915044 + 0.99511342289529i |
| 13  | 0.61489839621847 - 0.92707769732206i |
| 14  | 0.61489839621847 + 0.92707769732206i |
| 15  | 0.28699297752042 + 0.86292233267952i |
| 16  | 0.28699297752042 - 0.86292233267952i |
| 17  | 0.73390534511934 + 0.84137406017959i |
| 18  | 0.73390534511934 - 0.84137406017959i |
| 19  | 0.84018376187284 + 0.73994123427793i |
| 20  | 0.84018376187284 - 0.73994123427793i |
| 21  | 0.93183858650866 + 0.62482420764340i |
| 22  | 0.93183858650866 - 0.62482420764340i |
| 23  | 1.00722446774212 + 0.49822727874051i |
| 24  | 1.00722446774212 - 0.49822727874051i |
| 25  | 0.49685824532654 + 0.74910944768368i |
| 26  | 0.49685824532654 - 0.74910944768368i |
| 27  | 1.06498492530188 + 0.36251399406066i |
| 28  | 1.06498492530188 - 0.36251399406066i |
| 29  | 1.10407979707277 - 0.22018471056779i |
| 30  | 1.10407979707277 + 0.22018471056779i |
| 31  | 1.12380488955286 + 0.07384311889542i |
| 32  | 1.12380488955286 - 0.07384311889542i |
| 33  | 0.58875991484847 - 0.67497440006586i |
| 34  | 0.58875991484847 + 0.67497440006586i |
| 35  | 0.67031207903522 + 0.59033698295539i |

|    |                                      |
|----|--------------------------------------|
| 35 | 0.67031207903522 - 0.59033698295539i |
| 37 | 0.79765526408343 + 0.39456310318614i |
| 38 | 0.79765526408345 - 0.39456310318614i |
| 39 | 0.84148001775323 + 0.28643436626250i |
| 40 | 0.84148001775323 - 0.28643436626250i |
| 41 | 0.88600878315239 + 0.05821798118599i |
| 42 | 0.88600878315239 - 0.05821798118599i |
| 43 | 0.74030152619975 + 0.49639317497897i |
| 44 | 0.74030152619975 - 0.49639317497897i |
| 45 | 0.87108708202148 - 0.17371937929012i |
| 46 | 0.87108708202148 + 0.17371937929012i |
| 47 | 0.39588600004140 - 0.81186697002478i |
| 48 | 0.39588600004140 + 0.81186697002478i |

表 2.4-5 分析滤波器  $h_0(n)$  ( $0 \leq n \leq 47$ ) 的值

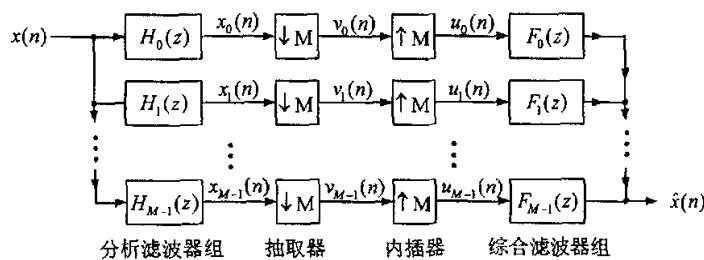
| $n$ | $h_0(n)$          | $n$ | $h_0(n)$           |
|-----|-------------------|-----|--------------------|
| 0   | 0.28735889094300  | 24  | -0.01136652792696  |
| 1   | 0.4921641749013   | 25  | 0.00113157512546   |
| 2   | 0.34496007256737  | 26  | 0.00939643243760   |
| 3   | -0.01117045611555 | 27  | -0.00337810962570  |
| 4   | -0.16546263866029 | 28  | -0.00762349148151  |
| 5   | -0.02673333733225 | 29  | 0.00551649990169   |
| 6   | 0.0998862094300   | 30  | 0.00595381001552   |
| 7   | 0.02924922380302  | 31  | -0.00757956980869  |
| 8   | -0.06781113270679 | 32  | -0.00429656181020  |
| 9   | -0.02577036465580 | 33  | 0.00959879643694   |
| 10  | 0.04942263659624  | 34  | 0.00254699708902   |
| 11  | 0.02134191763627  | 35  | -0.01160261248073  |
| 12  | -0.03775007665458 | 36  | -0.00056495010748  |
| 13  | -0.01708029405821 | 37  | 0.01361338760800   |
| 14  | 0.02978802488485  | 38  | -0.00186845933588  |
| 15  | 0.01321798014635  | 39  | -0.01561114464103  |
| 16  | -0.02405300262480 | 40  | 0.00514760823419   |
| 17  | -0.00976002574856 | 41  | 0.01757030344124   |
| 18  | 0.01973722912057  | 42  | -0.010103655660905 |
| 19  | 0.00665389525451  | 43  | -0.01897200320168  |
| 20  | -0.01636689711728 | 44  | 0.01889452687973   |
| 21  | -0.00383941876344 | 45  | 0.01715466229958   |
| 22  | 0.01364298031002  | 46  | -0.05946836113937  |
| 23  | 0.00126021545944  | 47  | 0.02304429949429   |

## 2.5 $M$ 通道 QMF 组

$M$  通道 QMF 组也称作  $M$  通道最大抽取滤波器组, 如图 2.5-1, 它是 2 通道 QMF 组理论的一般推广, 作为 QMF 组的一般理论, 下文将详细阐述  $M$  通道 QMF 组的无混叠条件和完全重建条件, 注意此处完全重建不考虑量化失真。

### 2.5.1 $M$ 通道 QMF 组的无混叠条件和完全重建条件

子带信号  $x_k(n)$  的  $z$  变换为:

图 2.5-1  $M$  通道 QMF 组

$$X_k(z) = H_k(z)X(z) \quad (2.5.1)$$

经抽取器后得：

$$V_k(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H_k(z^{l/M} W^l) X(z^{l/M} W^l) \quad (2.5.2)$$

式中， $W = W_M = e^{-j2\pi l/M}$ 。内插器的输出为：

$$U_k(z) = V_k(z^M) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H_k(z W^l) X(z W^l) \quad (2.5.3)$$

因此重建信号为：

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z) U_k(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(z W^l) \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z W^l) F_k(z) \quad (2.5.4)$$

(2.5.4) 式可以改写为：

$$\hat{X}(z) = \sum_{l=0}^{M-1} A_l(z) X(z W^l) \quad (2.5.5)$$

式中，

$$A_l(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z W^l) F_k(z), \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (2.5.6)$$

令  $z = e^{j\omega}$ ， $X(z W^l)$  可以改写为：

$$X(e^{j\omega} W^l) = X(e^{j(\omega - \frac{2\pi l}{M})}) \quad (2.5.7)$$

若  $l \neq 0$ ， $X(e^{j(\omega - \frac{2\pi l}{M})})$  是  $X(e^{j\omega})$  的移位。因此  $\hat{X}(e^{j\omega})$  可以看成是  $X(e^{j\omega})$  和  $X(e^{j\omega})$  移位的线性组合。

$X(e^{j(\omega - \frac{2\pi l}{M})})$ ， $l \neq 0$  称为  $M$  通道 QMF 组的混叠谱，它是由于抽取和内插而产生的。 $A_l(z)$  是第  $l$  个混叠谱的增益。很显然，消除混叠的充分必要条件为：

$$A_l(z) = 0, \quad 1 \leq l \leq M-1 \quad (2.5.8)$$

混叠失真消除后，(2.5.5) 式变为：

$$\hat{X}(z) = T(z) X(z) \quad (2.5.9)$$

式中， $T(z)$  是系统传递函数，定义如下：

$$T(z) \doteq A_0(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) F_k(z) \quad (2.5.10)$$

如果， $|T(z)| \neq c$ ， $c$  为非零常数，那么  $M$  通道 QMF 组存在幅度失真；如果  $T(z)$  不具有线性相位，那么  $M$  通道 QMF 组存在相位失真；如果  $T(z) = cz^{-n_0}$ ， $c$  为非零常数，上述 3 种失真完全消除， $M$  通道 QMF 组成为 PR 系统， $\hat{x}(n) = cx(n - n_0)$ 。

为了叙述方便，定义下述矩阵和向量：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(z) &= \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) & \cdots & H_{M-1}(z) \\ H_0(zW) & H_1(zW) & \cdots & H_{M-1}(zW) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0(zW^{M-1}) & H_1(zW^{M-1}) & \cdots & H_{M-1}(zW^{M-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{f}(z) &= \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(z) = \begin{bmatrix} X(z) \\ X(zW) \\ \vdots \\ X(zW^{M-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}(z) = \begin{bmatrix} MA_0(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.11)
 \end{aligned}$$

式中  $\mathbf{H}(z)$  为混叠分量矩阵。若  $\mathbf{H}(z)\mathbf{f}(z)=\mathbf{t}(z)$ ，(2.5.9) 式用上述矩阵表达为：

$$\hat{\mathbf{X}}(z) = \frac{1}{M} \mathbf{f}^T(z) \mathbf{H}^T(z) \mathbf{x}(z), \quad \text{上标}'T'\text{表示转置} \quad (2.5.12)$$

很显然，对于给定的分析滤波器组  $H_k(z)$ ，只要令

$$\mathbf{f}(z) = \mathbf{H}^{-1}(z) \mathbf{t}(z) \quad (2.5.13)$$

则系统的混叠失真完全消除。若  $\mathbf{t}(z) = [cz^{-n_0} \ 0 \ \cdots \ 0]^T$ ，式中  $c \neq 0, n_0$  是整数，则  $M$

通道 QMF 组成为 PR 系统。注意到为了得到无混叠系统或 PR 系统的综合滤波器组的表达式必须求得

$$\mathbf{H}^{-1}(z) = \frac{\text{Adj}\mathbf{H}(z)}{\det \mathbf{H}(z)} \quad (2.5.14)$$

理论上只要  $\det \mathbf{H}(z) \neq 0$ ， $\mathbf{H}^{-1}(z)$  存在，但是即使分析滤波器是 FIR 滤波器，综合滤波器也可能是 IIR 滤波器，另一个严重的问题是很难保证  $\mathbf{f}(z)$  的稳定性。下文的多相分解法可以避开这些棘手的问题。

## 2.5.2 多相分解法分析 $M$ 通道 QMF 组的无混叠条件和完全重建条件

第一章中已阐述了多相分解的理论和实用价值。文献 [52, 53, 72, 73] 把多相理论成功地应用于滤波器组的分析中，使问题进一步简化。

分析滤波器组  $H_k(z)$  用多相 I 型分解，即：

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_k(z^M), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (2.5.15)$$

用矩阵表达为：

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{E}(z^M) \mathbf{e}(z) \quad (2.5.16)$$

式中，多相矩阵

$$\mathbf{E}(z) = \begin{bmatrix} E_{00}(z) & E_{01}(z) & \cdots & E_{0,M-1}(z) \\ E_{10}(z) & E_{11}(z) & \cdots & E_{1,M-1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z) & E_{M-1,1}(z) & \cdots & E_{M-1,M-1}(z) \end{bmatrix} \quad (2.5.17)$$

$\mathbf{b}(z), \mathbf{e}(z)$  如 (2.5.11) 式。分析滤波器组  $H_k(z)$  的多相 I 型分解如图 2.5.2 (a)。

综合滤波器组  $F_k(z)$  用多相 II 型分解, 即:

$$F_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-(M-1-l)} R_{lk}(z^M), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2.5.18)$$

用矩阵表达为:

$$\mathbf{f}^T(z) = z^{-(M-1)} \tilde{\mathbf{e}}(z) \mathbf{R}(z^M) \quad (2.5.19)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{e}}(z)$  表示对  $\mathbf{e}(z)$  的系数取共轭, 用  $z^{-1}$  代替  $z$ , 然后再转置。多相矩阵

$$\mathbf{R}(z) = \begin{bmatrix} R_{00}(z) & R_{01}(z) & \cdots & R_{0,M-1}(z) \\ R_{10}(z) & R_{11}(z) & \cdots & R_{1,M-1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-1,0}(z) & R_{M-1,1}(z) & \cdots & R_{M-1,M-1}(z) \end{bmatrix} \quad (2.5.20)$$

$\mathbf{f}(z), \mathbf{e}(z)$  如 (2.5.11) 式。综合滤波器组  $F_k(z)$  的多相 II 型分解如图 2.5.2 (b)。

图 2.5-1  $M$  通道 QMF 组的多相表达如图 2.5-3 (a); 应用图 1.2-2 著名的等效得到的等价结构如图 2.5-3 (b); 令  $\mathbf{P}(z) = \mathbf{R}(z)\mathbf{E}(z)$  得到的等价结构如图 2.5-3 (c)。这些等价结构对研究、设计和实现  $M$  通道 QMF 组非常方便。

为了导出多相矩阵  $\mathbf{R}(z)$  和  $\mathbf{E}(z)$  表示的无混叠的充分必要条件, 先介绍一下伪循环矩阵。

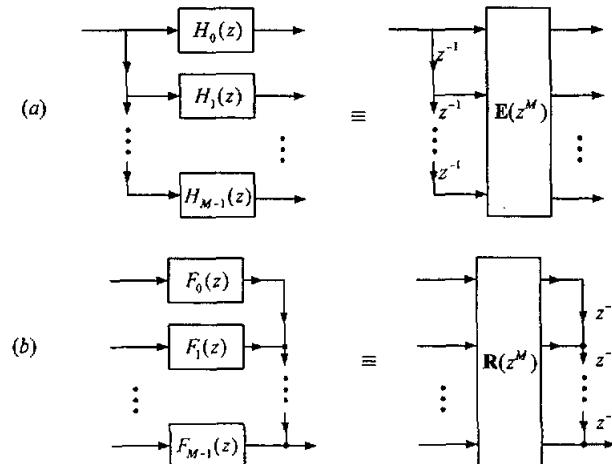


图 2.5-2 (a) 分析滤波器组  $H_k(z)$  的多相 I 型分解

(b) 综合滤波器组  $F_k(z)$  的多相 II 型分解

伪循环矩阵：

如果矩阵的第  $k+1$  行由第  $k$  行右移一位，溢出的位循环到最左边空出的位生成，这样的矩阵称为循环矩阵。 $(2.5.21)$  式是一个循环矩阵的例子。

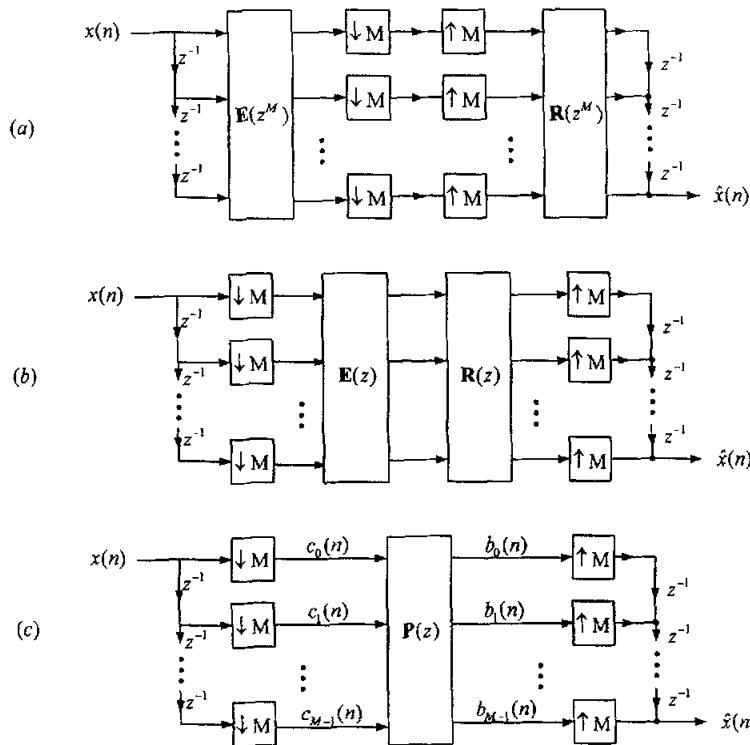


图 2.5-3 (a)  $M$  通道 QMF 组的多相表达；(b) 应用图 1.2-2 著名的等效得到的等价结构；  
 (c) 令  $P(z)=R(z)E(z)$  得到的等价结构。

$$\begin{bmatrix} P_0(z) & P_1(z) & P_2(z) \\ P_2(z) & P_0(z) & P_1(z) \\ P_1(z) & P_2(z) & P_0(z) \end{bmatrix} \quad (2.5.21)$$

可见循环矩阵的所有行由其第零行的元素决定。本文中提到的循环矩阵都是指右循环矩阵。

伪循环矩阵是对循环矩阵的主对角线以下的所有元素乘以  $z^{-1}$ 。例如：

$$\begin{bmatrix} P_0(z) & P_1(z) & P_2(z) \\ z^{-1}P_2(z) & P_0(z) & P_1(z) \\ z^{-1}P_1(z) & z^{-1}P_2(z) & P_0(z) \end{bmatrix} \quad (2.5.22)$$

上述伪循环矩阵的时域表达为：

$$\begin{bmatrix} p_0(n) & p_1(n) & p_2(n) \\ p_2(n-1) & p_0(n) & p_1(n) \\ p_1(n-1) & p_2(n-1) & p_0(n) \end{bmatrix} \quad (2.5.23)$$

伪循环矩阵的第  $k$  列也可以看成由矩阵的第  $k+1$  列上移一位，溢出的位循环到最下边空出的位，然后乘以  $z^{-1}$  生成。

Marshall 首先将伪循环矩阵的概念用于滤波器组<sup>[74]</sup>，文献[75]对其进行了更详尽的研究，并证明了下述无混叠的充分必要条件。

**定理 2.1 [Vaidyanathan]**：当且仅当  $M \times M$  矩阵  $\mathbf{P}(z) = \mathbf{R}(z) \times \mathbf{E}(z)$  是伪循环矩阵， $M$  通道最大抽取滤波器组（图 2.5-1）是无混叠失真的系统。重建信号为  $\hat{X}(z) = T(z)X(z)$ ，系统传递函数为：

$$T(z) = z^{-(M-1)} \left( P_{0,0}(z^M) + z^{-1} P_{0,1}(z^M) + \cdots + z^{-(M-1)} P_{0,M-1}(z^M) \right) \quad (2.5.24)$$

式中， $P_{0,m}(z)$  是  $\mathbf{P}(z)$  的第零行元素。

**证明：**如图 2.5-3 (c)，抽取器输出的  $z$  变换为：

$$C_l(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} (z^{lM} W^k)^{-1} X(z^{lM} W^k), \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (2.5.25)$$

式中， $W = e^{-j2\pi/M}$ ， $\mathbf{P}(z)$  的输出为：

$$B_s(z) = \sum_{l=0}^{M-1} P_{s,l}(z) C_l(z) \quad (2.5.26)$$

重建信号为：

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) &= \sum_{s=0}^{M-1} z^{-(M-1-s)} B_s(z^M) \\ &= \sum_{s=0}^{M-1} z^{-(M-1-s)} \sum_{l=0}^{M-1} P_{s,l}(z^M) C_l(z^M) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{s=0}^{M-1} z^{-(M-1-s)} \sum_{l=0}^{M-1} P_{s,l}(z^M) \sum_{k=0}^{M-1} (z W^k)^{-1} X(z W^k) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z W^k) \sum_{l=0}^{M-1} W^{-kl} \sum_{s=0}^{M-1} z^{-l} z^{-(M-1-s)} P_{s,l}(z^M) \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

式中， $X(z W^k), k \neq 0$  是混叠分量，当且仅当

$$\sum_{l=0}^{M-1} W^{-kl} \underbrace{\sum_{s=0}^{M-1} z^{-l} z^{-(M-1-s)} P_{s,l}(z^M)}_{V_l(z)} = 0, \quad k \neq 0 \quad (2.5.28)$$

时，系统的混叠分量完全消除。此式用矩阵表示为：

$$\mathbf{W}^* \begin{bmatrix} V_0(z) \\ V_1(z) \\ \vdots \\ V_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.29)$$

式中,  $\times$ 代表非零项,  $\mathbf{W}$ 是 $M \times M$  DFT 矩阵, 由于  $\mathbf{W}\mathbf{W}^* = M\mathbf{I}$ , 此式可以改写为:

$$M \begin{bmatrix} V_0(z) \\ V_1(z) \\ \vdots \\ V_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.30)$$

由此式得:

$$V_l(z) = V(z), \quad 0 \leq l \leq M-1 \quad (2.5.31)$$

也就是说, 当且仅当  $V_l(z)$  满足 (2.5.31) 式时,  $M$  通道 QMF 组是无混叠的。

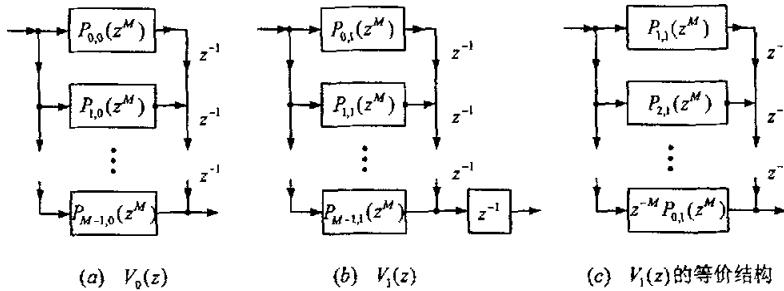


图 2.5-4  $V_0(z)$  和  $V_1(z)$  的多相 II 型实现

图 2.5-4 (a), (b) 是  $V_0(z)$  和  $V_1(z)$  的多相 II 型实现, 图 2.5-4 (b) 可以等价为图 2.5-4 (c)。由于无混叠条件要求  $V_0(z) = V_1(z)$ , 那么图 2.5-4 (a), (c) 应是相同的, 则  $\mathbf{P}(z)$  的第 0 列可以看成是第 1 列元素向上循环一位, 然后乘以  $z^{-1}$ 。同样可以证明  $\mathbf{P}(z)$  的第  $l$  列是第  $l+1$  列元素向上循环一位, 然后乘以  $z^{-1}$  生成。这就证明了  $\mathbf{P}(z)$  是伪循环矩阵。

混叠消除后, 应用  $\mathbf{P}(z)$  是伪循环矩阵这个条件, 可由 (2.5.27) 式推出 (2.5.24) 式。

无混叠系统的一个特例:

如果  $\mathbf{P}(z)$  是对角阵, 伪循环矩阵要求其对角线元素都相等, 即

$$\mathbf{P}(z) = S(z)\mathbf{I} \quad (2.5.32)$$

系统传递函数为：

$$T(z) = z^{-(M-1)} S(z^M) \quad (2.5.33)$$

无混叠系统更一般的情况是， $\mathbf{P}(z)$  的每行只有一个非零元素，伪循环矩阵要求其满足：

$$\mathbf{P}(z) = S(z) \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{M-r} \\ z^{-1} \mathbf{I}_r & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.34)$$

式中， $0 \leq r \leq M-1$ 。此时，系统传递函数为：

$$T(z) = z^{-(M-1)} z^{-r} S(z^M) \quad (2.5.35)$$

$r$  的引入只是增加了更多的延时，此时综合滤波器组可以由系统满足 (2.5.32) 式时的综合滤波器组乘以一个延时因子得到，即  $z^{-r} F_k(z)$ 。

如果 (2.5.34) 式中， $S(z) = cz^{-m_0}$ ,  $c \neq 0$ ,  $m_0$  为整数，则系统成为 PR 系统。

$$\mathbf{P}(z) = cz^{-m_0} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{M-r} \\ z^{-1} \mathbf{I}_r & 0 \end{bmatrix} \quad c \neq 0, m_0 \text{ 为整数} \quad (2.5.36)$$

这是  $M$  通道 QMF 组完全重建的充要条件。在此条件下，重建信号为：  
 $\hat{x}(n) = cx(n - n_0)$ ,  $n_0 = Mm_0 + r + M - 1$ 。实际应用时， $\mathbf{P}(z)$  通常取其简单形式，即  
 $\mathbf{P}(z) = cz^{-m_0} \mathbf{I}$ ,  $c \neq 0, m_0$  为整数。

可以证明 (2.5.36) 式满足：

$$|\mathbf{P}(z)| = |\mathbf{R}(z)| * |\mathbf{E}(z)| = c_0 z^{-k_0}, c_0 \neq 0, k_0 \text{ 为整数} \quad (2.5.37)$$

此式是 FIR 或 IIR PR 滤波器组必须满足的条件。

如果分析，综合滤波器都是 FIR 滤波器，QMF 组是 PR 系统，容易证明：

$$|\mathbf{E}(z)| = \alpha z^{-k}, \alpha \neq 0, k \text{ 为整数} \quad (2.5.38)$$

这是 FIR PR 系统必须满足的条件。同样  $\mathbf{R}(z)$  有类似的性质。

### 例 2.5.1 均匀 DFT 完全重建滤波器组

例 1.1.1 中分析滤波器组的多相矩阵为  $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{W}^*$ ，若令  $\mathbf{R}(z) = \mathbf{W}$ ，则  $\mathbf{P}(z) = \mathbf{E}(Z)\mathbf{R}(Z) = \mathbf{W}\mathbf{W}^* = M\mathbf{I}$ 。因此系统是完全重建的，重建信号为  $\hat{x}(n) = Mx(n - M + 1)$ 。综合滤波器组为：

$$F_k(z) = W^{-k} F_0(z W^k) \quad (2.5.39)$$

式中， $F_0(z) = H_0(z)$ 。均匀 DFT 完全重建滤波器组的完整结构如图 2.5-5。

### 例 2.5.2 完全重建树形滤波器组

树形滤波器组如图 2.5-6 (a)。信号被分析滤波器劈为 2 个子带，抽取后

每个子带又被劈成 2 个子带, 信号共被劈成 4 个子带, 然后经综合滤波器两两合成得到重建信号。各级分析、综合滤波器组是 PR 系统, 因此整个系统是 PR 系统。图 (a) 的等价结构如图 (b), 分析滤波器各子带幅频率特性如图 2.5-6 (c) ( $H_0(z)$  的系数如表 2.3.1), 可见各子带划分比较清晰, 这与正交小波包滤波器组的子带划分不同。正交小波包分子带不追求各子带过渡带的陡峭性, 而强调小波的消失距。图 2.5-7 是 Daubechies 正交 (消失距为 3) 小波包的 4 个子带的幅频特性, 以供与图 2.5-6 (c) 做对比。

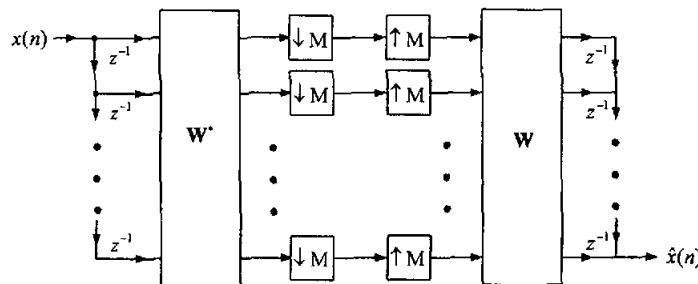
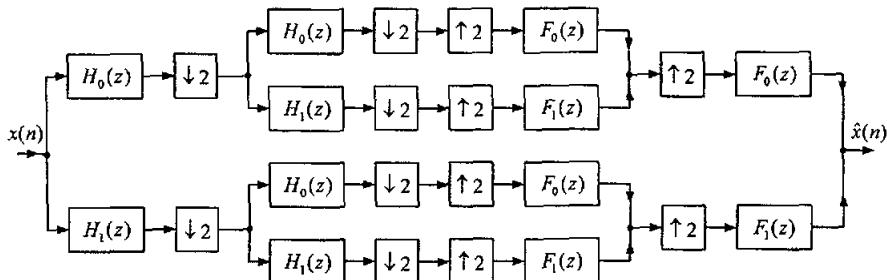
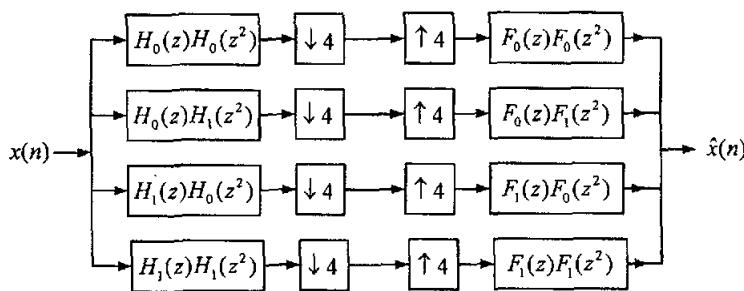


图 2.5-5 均匀 DFT 完全重建滤波器组



(a)



(b)

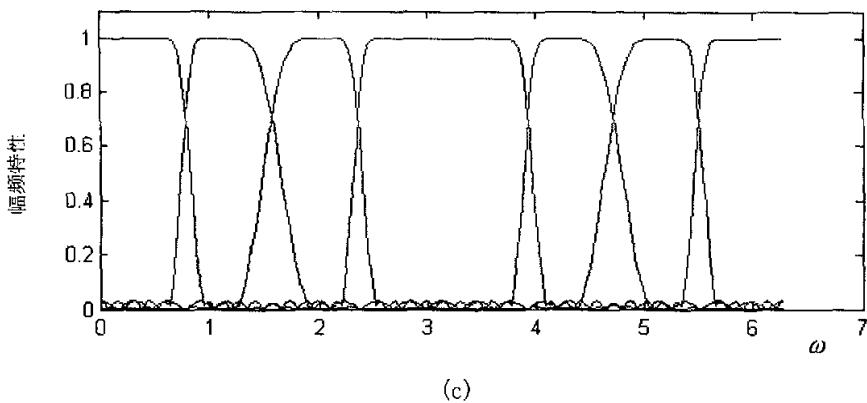


图 2.5-6 (a) 树形滤波器组, (b) 树形滤波器组等价结构

(c) 树形分析滤波器组 4 个子带的幅频特性

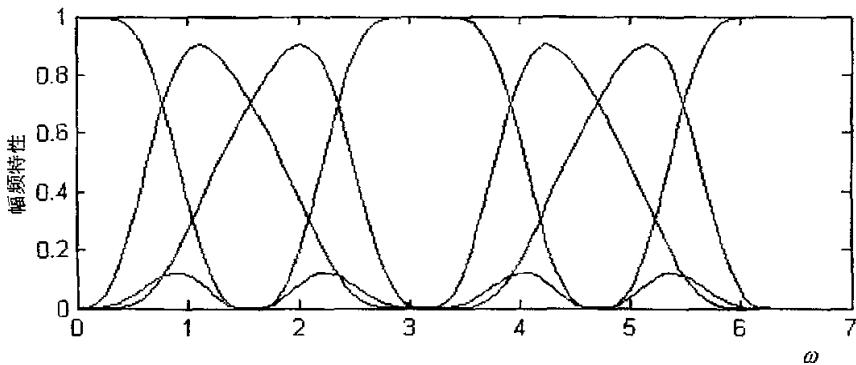


图 2.5-7 db3 小波包 4 个子带的幅频特性

### 例 2.5.3 完全重建频分多路复用系统

对图 1.4-6 完整的频分多路复用系统的分析滤波器组进行多相分解<sup>[76]</sup>, 等价电路如图 2.5-8 (a), 然后用两个著名的等效得图 2.5-8 (b) 的等价结构, 图 2.5-8 (b) 还可以进一步简化为图 2.5-8 (c)。系统的传递函数矩阵  $\mathbf{S}(z)$  为:

$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{E}(z)\Gamma(z)\mathbf{R}(z) \quad (2.5.40)$$

式中,  $\Gamma(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ z^{-1}\mathbf{I}_{M-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ 。

如果  $\mathbf{S}(z) = cz^{-n_0}\mathbf{I}$ ,  $c \neq 0$ ,  $n_0$  为整数, 则系统是完全重建的。由于

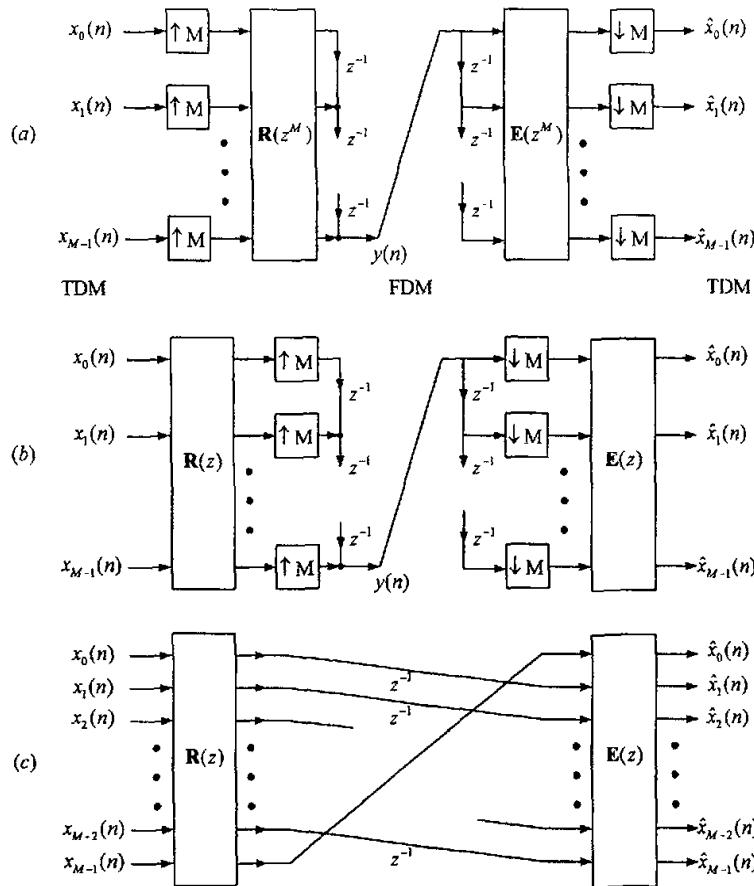


图 2.5-8 (a) 频分多路复用系统多相分解等价结构, (b) 应用两个著名的等效得到的等价结构, (c) 图(b)的等价结构

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(z) &= cz^{-n_0} \mathbf{I} \\
 \Leftrightarrow \mathbf{E}(z) \Gamma(z) \mathbf{R}(z) &= cz^{-n_0} \mathbf{I} \\
 \Leftrightarrow c \mathbf{E}^{-1}(z) \mathbf{R}^{-1}(z) &= z^{n_0} \Gamma(z) \\
 \Leftrightarrow \mathbf{R}(z) \mathbf{E}(z) &= cz^{-n_0} \Gamma^{-1}(z)
 \end{aligned} \tag{2.5.41}$$

把 \$\Gamma^{-1}(z)\$ 代入上式得:

$$\mathbf{R}(z) \mathbf{E}(z) = cz^{1-n_0} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{M-1} \\ z^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.5.42}$$

上式是 (2.5.36) 式的一个特例, 因此可以通过设计 PR QMF 组来设计完全重建频分多路复用系统。有文献把正交小波包滤波器组经适当的调序用于 PR 频分多路复用系统得到良好的效果!

### 本章小结：

本章首先简要介绍了最大抽取滤波器组的发展历史。然后以二通道 FIR QMF 组为例介绍了滤波器组中存在的三种失真及其消除方法。FIR 功率对称滤波器组恰好可以同时完全消除这三种失真得到完全重建滤波器组，但传统方法设计的功率对称滤波器组完全重建精度不高，本章提出的全相位功率对称 FIR 完全重建 QMF 组可以大大提高重建精度，这是本文的另一个创新点。最后本章介绍了  $M$  通道 QMF 组的完全重建的充分必要条件及其应用，并给出树形滤波器组和小波包滤波器组之间的区别和联系。

### 第三章 仿酉完全重建滤波器组

由第二章可知,  $M$  通道最大抽取滤波器组可以用多相矩阵  $\mathbf{E}(z)$  和  $\mathbf{R}(z)$  表示, 如果分析滤波器和综合滤波器都是 FIR 滤波器, 且满足完全重建特性, 那么  $\mathbf{E}(z)$  必须满足 (2.5.38) 式。

本章研究多相矩阵  $\mathbf{E}(z)$  具有仿酉特性的 PR 滤波器组, 尽管仿酉特性不是完全重建的必要条件, 但仿酉  $\mathbf{E}(z)$  可以使 (2.5.38) 式自动得到满足。‘仿酉’源于经典的电子网络理论<sup>[77, 78]</sup>曾用于鲁棒结构的滤波器设计<sup>[79, 80, 81, 82, 83]</sup>。本章阐述把仿酉矩阵用于设计完全重建滤波器组<sup>[28, 84]</sup>。尽管第二章 2.3 节的功率对称 PR QMF 组<sup>[39, 40]</sup>是通过不同的方法得到的, 可以证明其多相矩阵  $\mathbf{E}(z)$  具有仿酉特性。仿酉特性在多维多率<sup>[85]</sup>, 余弦调制滤波器组<sup>[56, 57, 59]</sup>中也有应用。

#### 3.1 仿酉矩阵

如果  $p \times r$  因果传递函数矩阵  $\mathbf{H}(z)$  满足: (1)  $H_{km}(z)$  是稳定的; (2)  $\mathbf{H}(e^{j\omega})$  具有酉特性, 即

$$\mathbf{H}^\dagger(e^{j\omega})\mathbf{H}(e^{j\omega}) = d\mathbf{I}_r, d > 0 \quad (3.1.1)$$

则称  $\mathbf{H}(z)$  具有无损特性。式中 ‘ $\dagger$ ’ 表示共轭转置,  $p \geq r$ 。

如果  $\mathbf{H}(z)$  是有理传递函数矩阵, 由 (3.1.1) 式可以推出下式:

$$\tilde{\mathbf{H}}(z)\mathbf{H}(z) = d\mathbf{I}_r, d > 0, \quad z \text{ 为任意值} \quad (3.1.2)$$

式中 ‘ $\sim$ ’ 表示对  $\mathbf{H}(z)$  的系数取共轭, 用  $z^{-1}$  代替  $z$ , 然后再转置。若  $\mathbf{H}(z)$  满足此式, 则称  $\mathbf{H}(z)$  具有仿酉特性。

同样也可以由 (3.1.2) 式推出 (3.1.1) 式。因此要证明一个因果传递函数  $\mathbf{H}(z)$  的无损性, 只要证明它的稳定性和仿酉性即可。注意若  $\mathbf{H}(z)$  是无损的,  $\tilde{\mathbf{H}}(z)$  是仿酉的但不一定是无损的(除非  $\mathbf{H}(z)$  是常数矩阵)。

$\mathbf{H}_k(z)$  和  $\mathbf{H}_m(z)$  分别表示  $\mathbf{H}(z)$  的第  $k$  和第  $m$  列, 仿酉特性使得  $\mathbf{H}(z)$  的列满足正交特性, 即  $\tilde{\mathbf{H}}_k(z)\mathbf{H}_m(z) = 0, k \neq m$ ;  $\tilde{\mathbf{H}}_k(z)\mathbf{H}_m(z) = d > 0, k = m$ 。也就是说  $\mathbf{H}(z)$  的每一列都满足功率互补特性。

若  $\mathbf{H}(z)$  是方阵, 由 (3.1.2) 式可知:

$$\mathbf{H}^{-1}(z) = \tilde{\mathbf{H}}(z)/d \quad (3.1.3)$$

因此,  $\tilde{\mathbf{H}}(z)\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}(z)\tilde{\mathbf{H}}(z) = d\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{H}(z)$  的每一行也满足功率互补特性。

$p \times r$  仿酉系统  $\mathbf{H}(z)$  的几个特性:

(1)  $\mathbf{H}(z)$  (设  $p=r$ ) 的行列式是全通函数。用  $A(z)$  表示  $\mathbf{H}(z)$  的行列式, 由 (3.1.2) 式可得  $\tilde{A}(z)A(z)=d^r$ , 因此  $A(z)$  是全通函数。尤其是当  $\mathbf{H}(z)$  的元素是因果 FIR 函数时,  $A(z)=az^{-l}, l \geq 0, a \neq 0$ 。

(2)  $\mathbf{H}(z)$  的列满足功率互补特性, 即  $\sum_{k=0}^{M-1} |H_{m,k}(e^{j\omega})|^2 = c$ 。

(3)  $\mathbf{H}(z)$  的任何  $p \times l$  子矩阵都是仿酉矩阵。

(4)  $\mathbf{H}(z^M)$  ( $M$  为任意整数);  $\mathbf{H}^T(z)$ ;  $\tilde{\mathbf{H}}(z)$  都是仿酉矩阵。

仿酉系统的级连仍是仿酉系统。如图 3.1-1,  $\mathbf{H}_0(z)$  和  $\mathbf{H}_1(z)$  都是仿酉系统, 它们的级连仍是仿酉系统。(证明:  $\tilde{\mathbf{H}}(z)\mathbf{H}(z)=\tilde{\mathbf{H}}_0(z)\tilde{\mathbf{H}}_1(z)\mathbf{H}_1(z)\mathbf{H}_0(z)=d\mathbf{I}$ 。)

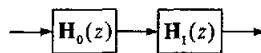


图 3.1-1 仿酉系统的级连

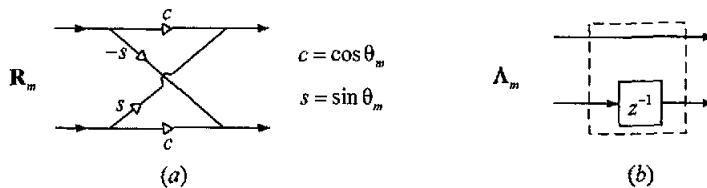


图 3.1-2 两个基本的  $2 \times 2$  仿酉系统

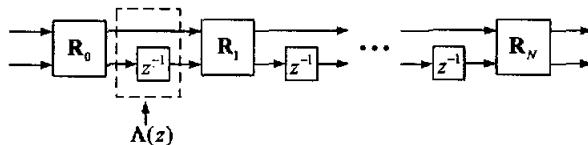


图 3.1-3 两个基本的  $2 \times 2$  仿酉系统的级连

图 3.1-2 是两个基本的仿酉系统, 其中图 (a) 就是常用的旋转矩阵<sup>[86]</sup>的流程图, 图中

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{bmatrix}, \quad \theta_m \text{ 是实数} \quad (3.1.4)$$

$\mathbf{R}_m$  也是酉矩阵, 因为  $\mathbf{R}_m^T \mathbf{R}_m = \mathbf{I}$ 。 $\mathbf{y} = \mathbf{R}_m \mathbf{x}$ , 相当于把向量  $\mathbf{x}$  顺时针旋转  $\theta_m$ 。

图 3.1-2 (b) 的传递函数矩阵为:

$$\Lambda(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.5)$$

由于  $\tilde{\Lambda}(z)\Lambda(z)=\mathbf{I}$ ，因此  $\Lambda(z)$  是仿酉的。

图 3.1-3 是两个基本的仿酉系统的级连，系统的传递函数矩阵为：

$$\mathbf{H}_N(z) = \mathbf{R}_N \Lambda(z) \mathbf{R}_{N-1} \Lambda(z) \cdots \mathbf{R}_1 \Lambda(z) \mathbf{R}_0 \quad (3.1.6)$$

式中， $\mathbf{R}_m$  如 (3.1.4) 式， $\Lambda(z)$  如 (3.1.5) 式。可见  $\mathbf{H}_N(z)$  仍是仿酉系统。



图 3.1-4 两个基本的  $2 \times 1$  仿酉系统

图 3.1-4 (a) 的传递函数为：

$$\mathbf{e}(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

由于  $\tilde{\mathbf{e}}(z)\mathbf{e}(z)=2$ ，因此  $\mathbf{e}(z)$  是仿酉向量。

图 3.1-4 (b) 的传递函数为：

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

$\mathbf{P}_0^T \mathbf{P}_0 = 1$ ，因此  $\mathbf{P}_0$  是仿酉向量。

例 1.1.1 中 DFT 滤波器组的多相分解为：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}(z)} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{M-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.9)$$

容易证明  $\mathbf{h}(z)$  是仿酉系统。

### 3.2 仿酉完全重建滤波器组

仿酉滤波器组是指分析滤波器组的多相矩阵  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉矩阵。仿酉滤波器组不强调综合滤波器组的多相矩阵  $\mathbf{R}(z)$  是否为仿酉矩阵。

如果滤波器组的多相矩阵  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉矩阵, 当  $\mathbf{R}(z)$  满足:

$$\mathbf{R}(z) = cz^{-K} \tilde{\mathbf{E}}(z), \quad c \neq 0, K \text{ 为常数} \quad (3.2.1)$$

根据 (2.5.36) 式滤波器组是完全重建的。适当的选取  $K$  值, 可以使综合滤波器是因果的。

如果  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉矩阵的级连, 如图 3.1-3, 若  $\mathbf{R}(z)$  如下式

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{R}_0^T \Gamma(Z) \mathbf{R}_1^T \cdots \Gamma(Z) \mathbf{R}_N^T \quad (3.2.2)$$

式中,

$$\Gamma(Z) = z^{-1} \tilde{\mathbf{A}}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

则  $\mathbf{R}(z)$  满足 (3.2.1) 式, 此时  $c=1, K=N$ 。若  $\mathbf{E}(z)$  和  $\mathbf{R}(z)$  如上选取, 可以保证滤波器组是 FIR 的, 因此是稳定的。当  $\mathbf{E}(z)$  是 IIR 系统时, 仍按 (3.2.1) 式选取  $\mathbf{R}(z)$  则可能导致综合滤波器组是不稳定的。

由 (3.2.1) 式, 可以得到  $M$  通道分析滤波器组和综合滤波器组之间的重要关系。把 (3.2.1) 式代入 (2.5.19) 式得:

$$\mathbf{f}^T(z) = cz^{-(M-1+MK)} \tilde{\mathbf{e}}(z) \tilde{\mathbf{E}}(z^M) = cz^{-(M-1+MK)} \tilde{\mathbf{h}}(z) \quad (3.2.4)$$

即:

$$F_k(z) = cz^{-(M-1+MK)} \tilde{H}_k(z), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (3.2.5)$$

其时域表示为:

$$f_k(n) = ch_k^*(M-1+MK-n), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (3.2.6)$$

可见分析滤波器和综合滤波器具有相同的长度!

若  $|c|=1$ , 由式 (3.2.5) 得:

$$|F_k(e^{j\omega})| = |H_k(e^{j\omega})|, \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (3.2.7)$$

此式意味着分析滤波器和综合滤波器具有相同的幅频特性。

上文由 (3.2.1) 式推出 (3.2.6) 式, 同样可由 (3.2.6) 式推出 (3.2.1) 式, 注意这里并不涉及仿酉性。(3.2.6) 式等价于

$$\mathbf{f}^T(z) = cz^{-(M-1+MK)} \tilde{\mathbf{h}}(z) \quad (3.2.8)$$

其多相表示为:

$$\tilde{\mathbf{e}}(z) \mathbf{R}(z^M) = cz^{-MK} \tilde{\mathbf{e}}(z) \tilde{\mathbf{E}}(z^M) \quad (3.2.9)$$

由此式可得到 (3.2.1) 式。

定理 3.2.1 总结了仿酉性, 完全重建特性和 (3.2.6) 式之间的关系。

**定理 3.2.1** [Vaidyanathan] 如果  $M$  通道最大抽取 QMF 组的分析滤波器  $H_k(z)$  是 FIR 滤波器,  $\mathbf{E}(z)$  是分析滤波器组的多相表示。若下述任何两条成立, 那么另一条也成立。

1.  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉的
2. 综合滤波器为  $f_k(n) = ch_k^*(M-1+MK-n)$ ,  $c \neq 0, 0 \leq k \leq M-1$ 。
3. QMF 组是完全重建的。

分析滤波器组向量  $\mathbf{h}(z) = \mathbf{E}(z^M)\mathbf{e}(z)$ , 若  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉的, 那么  $\mathbf{E}(z^M)$  也是仿酉的, 由于延迟连  $\mathbf{e}(z)$  也是仿酉的, 因此分析滤波器组是功率互补的, 即

$$\sum_{k=0}^{M-1} |H_k(e^{j\omega})|^2 = c, \quad c \text{ 为正常数} \quad (3.2.10)$$

如果  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉的, 且分析滤波器组和综合滤波器组满足 (3.2.6) 式, 那么综合滤波器组也满足功率互补特性。

如果  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉的, 那么分析滤波器组是  $M$  带滤波器的谱分解, 即

$$G_k(z) = \tilde{H}_k(z)H_k(z) \quad (3.2.11)$$

式中,  $G_k(z) = G_0(zW^k), k = 0, \dots, M-1$ ,  $W = e^{-j2\pi/M}$ 。遗憾的是  $M$  带滤波器的谱分解不可能设计出过渡带陡峭阻带衰减大的完全重建 FIR 分析滤波器组和综合滤波器组<sup>[73]</sup>。

### 3.3 二通道仿酉 PR QMF 组

这一部分仅考虑两通道 QMF 组的分析滤波器是因果的 FIR 滤波器, 即

$$H_0(z) = \sum_{n=0}^N h_0(n)z^{-n}, \quad H_1(z) = \sum_{n=0}^N h_1(n)z^{-n} \quad (3.3.1)$$

如果多相距阵  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉的, 3.2 中的所有特性都成立, 下文将讨论二通道 QMF 组的一些特殊的性质。

#### 功率对称特性

二通道 QMF 组的混叠分量矩阵为:

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^* \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{E}^T(z^2) \quad (3.3.2)$$

式中  $\mathbf{W}$  为  $2 \times 2$  DFT 矩阵, 如果  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉的, 那么  $\mathbf{H}(z)$  是仿酉的, 即

$\tilde{\mathbf{H}}(z)\mathbf{H}(z) = \beta\mathbf{I}$ ,  $\beta > 0$  为常数。由此式可得：

$$\begin{aligned}\tilde{H}_0(z)H_0(z) + \tilde{H}_0(-z)H_0(-z) &= \beta \\ \tilde{H}_1(z)H_1(z) + \tilde{H}_1(-z)H_1(-z) &= \beta \\ \tilde{H}_0(z)H_1(z) + \tilde{H}_0(-z)H_1(-z) &= 0\end{aligned}\quad (3.3.3)$$

由第一章 (1.5.3) 式可知  $\tilde{H}_0(z)H_0(z)$  是零相位半带滤波器, 若  $N = 2J+1$ , 那么半带滤波器的阶次为  $4J+2$ , 或者由第二章 (2.3.1) 式可知  $H_0(z)$  是功率对称滤波器。

### 分析滤波器之间的关系

如果  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉的, 那么  $\mathbf{H}(z)$  是仿酉的, 则  $\mathbf{H}(z)\tilde{\mathbf{H}}(z) = \beta\mathbf{I}$  成立, 因此:

$$H_0(z)\tilde{H}_0(z) + H_1(z)\tilde{H}_1(z) = \beta \quad (3.3.4)$$

$$H_0(z)\tilde{H}_0(-z) + H_1(z)\tilde{H}_1(-z) = 0 \quad (3.3.5)$$

由 (3.3.4) 式可知  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  无公因子, 因此  $\tilde{H}_0(-z)$  和  $\tilde{H}_1(-z)$  无公因子。由 (3.3.5) 得:

$$\frac{H_1(z)}{H_0(z)} = \frac{-\tilde{H}_0(-z)}{\tilde{H}_1(-z)} \quad (3.3.6)$$

由此式可以推得分析滤波器的关系:

$$H_1(z) = cz^{-L}\tilde{H}_0(-z), \text{ 式中 } |c|=1, L \text{ 为奇数} \quad (3.3.7)$$

因此

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(-e^{j\omega})| = |H_0(e^{j(\omega-\pi)})| \quad (3.3.8)$$

$H_1(z)$  的幅频特性可以看成是  $H_0(z)$  幅频特性的移位。考虑分析滤波器的脉冲响应是实系数的, 若  $H_0(z)$  是低通滤波器, 那么  $H_1(z)$  就是高通的, 二者的过渡带宽度相同, 通带和阻带纹波大小相同。

由 (3.3.7) 式可得分析滤波器的是时域关系为:

$$h_1(n) = -c(-1)^n h_0^*(L-n) \quad \text{式中 } |c|=1, L \text{ 为奇数} \quad (3.3.9)$$

若  $H_0(z)$  是功率对称滤波器, 那么  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉的

上文由  $\mathbf{E}(z)$  的仿酉特性推出  $H_0(z)$  是功率对称滤波器; 若  $H_0(z)$  是功率对称滤波器, 分析滤波器的关系满足 (3.3.7) 式, 同样可以推出  $\mathbf{E}(z)$  的仿酉性。因为, 若  $H_0(z)$  是功率对称滤波器, 混叠分量矩阵  $\mathbf{H}(z)$  的第零列是仿酉的, 由 (3.3.7) 式可得  $\mathbf{H}(z)$  的第一列也是仿酉的,  $\mathbf{H}(z)$  的两列是相互正交的, 即

$$\tilde{H}_0(z)H_1(z) + \tilde{H}_0(-z)H_1(-z) = 0 \quad (3.3.10)$$

因此得到  $\mathbf{H}(z)$  是仿酉矩阵，由 (3.3.2) 式容易得到  $\mathbf{E}(z)$  也是仿酉矩阵。

二通道仿酉 PR QMF 组特性小结：

二通道仿酉 QMF 组的多相距阵  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉矩阵时，QMF 组具有如下特性：

1. 分析滤波器  $H_0(z)$  是功率对称滤波器，阶次  $N$  为奇数，或者说  $H_0(z)$  是半带滤波器的谱因子。
2. 分析滤波器的频域关系为  $H_1(z) = cz^{-L}\tilde{H}_0(-z)$ ，式中  $|c|=1$ ,  $L$  为奇数。
3.  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  构成功率互补对。
4.  $H_1(z)$  具有  $H_0(z)$  的所有特性。二者构成的混叠分量矩阵  $\mathbf{H}(z)$  是仿酉矩阵。

二通道仿酉完全重建 QMF 组的设计步骤：

1. 设计零相位半带滤波器  $G(z)$ ,  $G(e^{j\omega}) \geq 0$ 。
2. 对  $G(z)$  进行谱分解，得到分析滤波器  $H_0(z) = \sum_{n=0}^N h_0(n)z^{-n}$ ,  $N$  为奇数。
3. 另一个分析滤波器和综合滤波器满足如下关系：

$$H_1(z) = -z^{-N}\tilde{H}_0(-z), \quad F_0(z) = z^{-N}\tilde{H}_0(z), \quad F_1(z) = z^{-N}\tilde{H}_1(z) \quad (3.3.11)$$

或者时域关系为：

$$h_1(n) = (-1)^n h_0^*(N-n), \quad f_0(n) = h_0^*(N-n), \quad f_1(n) = h_1^*(N-n) \quad (3.3.12)$$

二通道仿酉完全重建 QMF 组的分析滤波器，综合滤波器与第二章中的二通道完全重建 QMF 组的设计方法相同。虽然二者的设计出发点不同，但殊途同归！二通道仿酉完全重建 QMF 组的设计思路可以推广到  $M$  通道仿酉完全重建 QMF 组的设计中。仿酉特性导致了完全重建 QMF 组格形结构的产生，为设计完全重建 QMF 组提供了新的思路。

### 3.4 二通道仿酉完全重建 QMF 组的格形结构

二通道仿酉完全重建 QMF 组当分析滤波器组和综合滤波器组都为因果 FIR 滤波器且单位脉冲响应为实系数时可以用格形结构实现<sup>[97]</sup>。分析滤波器组的多相距阵  $\mathbf{E}(z)$  可以表示为：

$$\mathbf{E}(z) = \alpha \mathbf{R}_J \mathbf{A}(z) \mathbf{R}_{J-1} \cdots \mathbf{A}(z) \mathbf{R}_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.1)$$

式中  $\alpha$  为正常数， $\mathbf{R}_m$  如式 (3.1.4)， $\mathbf{A}(z)$  如式 (3.1.5)。 $\mathbf{E}(z)$  如此选取表示分

析滤波器的关系满足  $H_1(z) = \pm 1 \cdot z^{-L} \bar{H}_0(-z)$ ,  $L = 2J + 1$ , 符合 (3.3.7) 式。为了得到完全重建 QMF 组, 综合滤波器组的多相距阵  $\mathbf{R}(z)$  如式 (3.2.2) 选取, 即

$$\mathbf{R}(z) = z^{-J} \tilde{\mathbf{E}}(z) = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \mathbf{R}_0^T \Gamma(z) \cdots \mathbf{R}_{J-1}^T \Gamma(z) \mathbf{R}_J^T \quad (3.4.2)$$

式中  $\Gamma(z)$  如 (3.2.3) 式。分析滤波器和综合滤波器的关系为  $F_k(z) = z^{-(2J+1)} \bar{H}_k(z)$ , 满足 (3.2.5) 式。二通道仿酉完全重建 QMF 组完整的格形结构图 3.4-1, 分析滤波器和综合滤波器的阶次都为  $N = 2J + 1$ 。在实际应用中图 3.4-1 (c)  $\mathbf{R}_m$  常化为:

$$\mathbf{R}_m = \cos \theta_m \begin{bmatrix} 1 & \alpha_m \\ -\alpha_m & 1 \end{bmatrix}, \quad m = 0, 1, \dots, J \quad (3.4.3)$$

为了讨论简单其见, 假设任何  $\cos \theta_m \neq 0$ , 图 3.4-1 (a), (b) 简化为 图 3.4-2 (a), (b), 图中  $S = \alpha \left( \prod_m \cos \theta_m \right)$ ,  $S$  直接用  $\alpha_m$  表示为:

$$S = \alpha / \gamma, \quad \gamma = \prod_m (1 + \alpha_m^2)^{0.5} \quad (3.4.4)$$

注意此式相当于限制  $\theta_m$  取值仅在第一、第四象限, 而图 3.4-1 中  $\theta_m$  可以在四个象限取值。

二通道仿酉完全重建 QMF 组的格形结构 (图 3.4-2) 特性:

1.  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉矩阵,  $\mathbf{R}(z) = z^{-J} \tilde{\mathbf{E}}(z)$ 。
2.  $|H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_1(e^{j\omega})|^2 = 2\alpha^2$ 。
3.  $H_1(z) = \pm 1 \cdot z^{-N} H_0(-z^{-1})$ , 时域关系为  $h_1(n) = -(\pm 1) \cdot (-1)^n h_0(N-n)$ ,  $N = 2J + 1$ 。
4.  $F_k(z) = z^{-N} H_k(z^{-1})$ , 时域关系为,  $f_k(n) = h_k(N-n)$ ,  $k = 0, 1$ 。分析滤波器和综合滤波器有相同的阶次和长度。
5.  $|H_1(e^{j\omega})| = |H_0(-e^{j\omega})|$ , 且  $|F_k(e^{j\omega})| = |H_k(e^{j\omega})|$ ,  $k = 0, 1$ 。
6.  $H_0(z)$  是功率对称滤波器, 或者说  $\bar{H}_0(z) H_0(z)$  是半带滤波器。
7. 系统的输入输出关系为  $\hat{x}(n) = \alpha^2 x(n-N)$ 。

值得注意的是第二章中设计的二通道实系数完全重建 FIR 滤波器组都可以用上述格形结构实现。

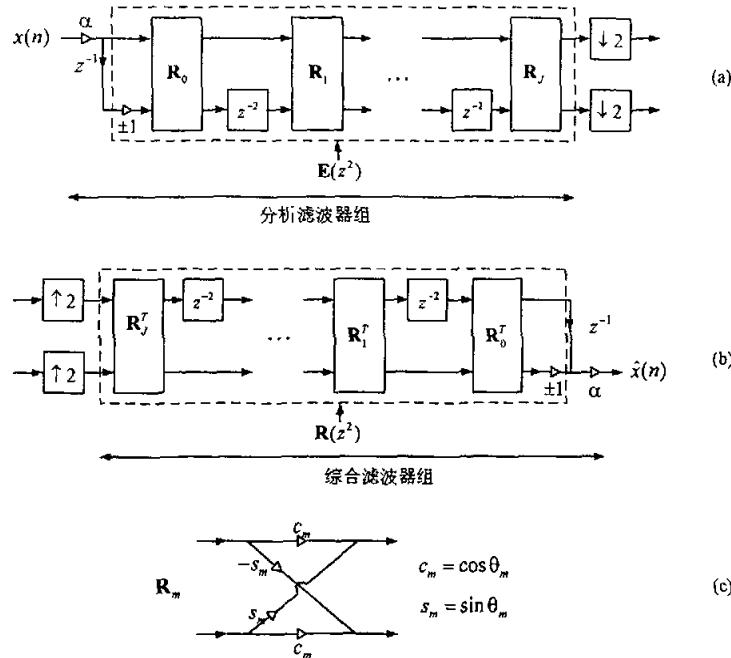


图 3.4-1 二通道仿酉完全重建 QMF 组完整的格形结构 (a) 分析滤波器组,

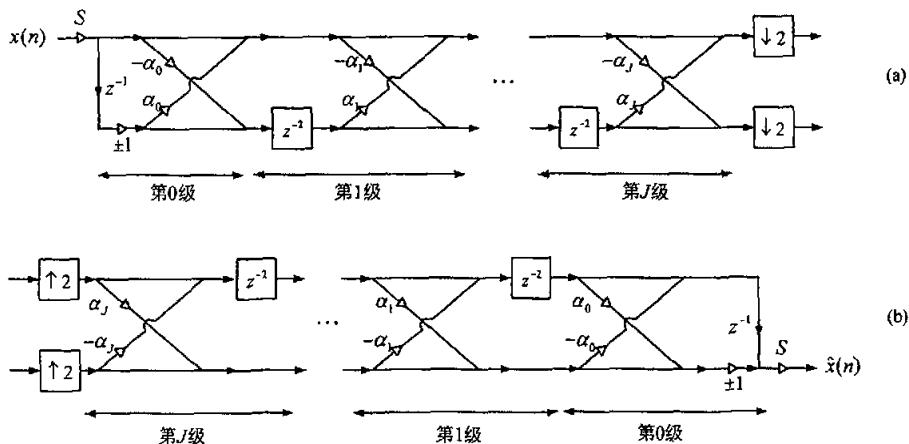
 (b) 综合滤波器组, (c)  $R_m$ 


图 3.4-2 图 3.4-1 的简化形式 (a) 分析滤波器组,

(b) 综合滤波器组

格形结构的多级特性:

假设把图 3.4-2 (a), (b) 中的第  $J$  级去掉, 即去掉格形结构中含  $\alpha_j$  的部分

和它对应的延迟链。此时系统的分析滤波器和综合滤波器的阶次变为  $N-2$ ，分析滤波器和综合滤波器的多相距阵仍是仿酉的。系统仍然是完全重建的，仍满足上述 7 条性质，只是  $N$  变为  $N-2$ 。

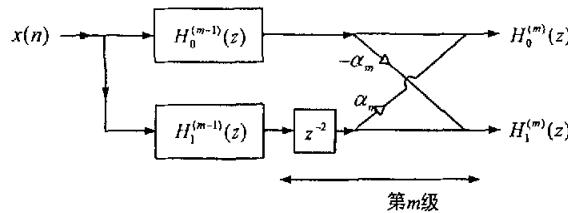


图 3.4-3  $m$  级二通道仿酉完全重建 QMF 组格形结构

假设系统的格形结构有  $m$  级，由  $m-1$  级格形结构得到的分析低通和高通滤波器分别表示为  $H_0^{(m-1)}(z)$  和  $H_1^{(m-1)}(z)$ ，如图 3.4-3 所示。随着  $m$  的增大，滤波器  $H_0^{(m)}(z)$  和  $H_1^{(m)}(z)$  可以得到更好的频率特性，即阻带衰减大。由  $m$  级格形结构得到的分析滤波器可以表示为：

$$\begin{aligned} H_0^{(m)}(z) &= H_0^{(m-1)}(z) + \alpha_m z^{-2} H_1^{(m-1)}(z) \\ H_1^{(m)}(z) &= -\alpha_m H_0^{(m-1)}(z) + z^{-2} H_1^{(m-1)}(z) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

可见由  $m$  级格形结构得到的分析滤波器组可以由  $m-1$  级格形结构得到的分析滤波器组表示，这就是格形结构的多级特性。随着  $m$  的增大可以改善分析滤波器的特性，但是对于滤波器组频率特性好的格形结构，去掉最后一级格形结构，滤波器组频率特性不一定还好，虽然此时系统仍是完全重建的。

格形结构的多级特性是第二章中半带滤波器谱分解方法设计二通道完全重建 QMF 组所不具有的。例如令谱分解法得到的低通分析滤波器的脉冲响应系数  $h_0(N)=0$ ， $h_0(N-1)=0$  此时系统再也不具有完全重建特性。

格形系数量化的鲁棒性：

在实际应用中二通道仿酉完全重建 QMF 组的格形系数将被量化，即  $\alpha_m$  将被量化为  $Q[\alpha_m]$ ，矩阵

$$\mathbf{Q}_m = \begin{bmatrix} 1 & Q[\alpha_m] \\ -Q[\alpha_m] & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.6)$$

仍是仿酉矩阵，即  $\mathbf{Q}_m^T \mathbf{Q}_m = c_1 \mathbf{I}$ ， $c_1 > 0$ 。因此多相距阵  $\mathbf{E}(z), \mathbf{R}(z)$  仍是仿酉的，上述 7 条特性仍然满足。

格形系数量化的鲁棒性也是第二章中半带滤波器谱分解方法设计二通道完

全重建 QMF 组所不具有的。实际上半带滤波器谱分解方法设计的分析滤波器和综合滤波器的单位脉冲响应量化后系统不再是完全重建的，因此设计频率响应特性优良且能够得到高精度的谱分解因子的半带滤波器是问题的关键，例如第二章中的全相位半带滤波器就是一种解决方案，虽然系统不是完全重建的，但系统传递函数扭曲幅度非常小。谱分解法设计的二通道完全重建 QMF 组满足上述特性 3-5。

二通道仿酉完全重建 QMF 组基于格形结构的优化设计方法：

无论格形参数  $\alpha_m$  取何值，都不影响系统的完全重建特性，因此可以用优化方法设计低通分析滤波器  $H_0(z)$ ，优化目标函数为：

$$\phi = \int_{\omega_0}^{\pi} \left| H_0(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega \quad (3.4.7)$$

目标函数的值正比于  $H_0(z)$  在阻带的能量，优化的目的是使其减小，通过优化方法使目标函数的值达到预期目标。由于格形结构保证  $H_0(z)$  是功率对称滤波器，使得通带特性好，因此目标函数仅考虑  $H_0(z)$  在阻带的能量。其他三个滤波器完全由  $H_0(z)$  决定。

Table 3.4-1 仿酉完全重建 QMF 组的格形系数

| $m$ | $\alpha_m$     |
|-----|----------------|
| 0   | -0.3836487e+01 |
| 1   | 0.1247866e+01  |
| 2   | -0.7220668e+00 |
| 3   | 0.4951553e+00  |
| 4   | -0.3688423e+00 |
| 5   | 0.2885146e+00  |
| 6   | -0.2327588e+00 |
| 7   | 0.1913137e+00  |
| 8   | -0.1598938e+00 |
| 9   | 0.1348106e+00  |
| 10  | -0.1140321e+00 |
| 11  | 0.9681786e-01  |
| 12  | -0.8223478e-01 |
| 13  | 0.6963367e-01  |
| 14  | -0.5867790e-01 |
| 15  | 0.4913793e-01  |
| 16  | -0.4081778e-01 |
| 17  | 0.3353566e-01  |
| 18  | -0.2713113e-01 |
| 19  | 0.2149517e-01  |
| 20  | -0.1658255e-01 |
| 21  | 0.1238607e-01  |
| 22  | -0.8895189e-02 |
| 23  | 0.6072120e-02  |

现在有很多种关于多变量非负函数的优化算法<sup>[88]</sup>。在优化时首先要根据递归公式 (3.4.5) 求得  $H_0(z)$  的表达式，初始化递归公式为：

$$H_0^{(0)}(z) = (1 - \alpha_0 z^{-1})S, \quad H_1^{(0)}(z) = (-\alpha_0 - z^{-1})S \quad (3.4.8)$$

值得注意的是，图 (3.4-2) 中的  $\pm 1$  用  $-1$  代替，这样并不丧失一般性。经过  $J$  次

递归运算得到  $H_0^{(j)}(z)$ ,  $H_0^{(j)}(z)$  即为  $H_0(z)$ 。目标函数可以改写为:

$$\phi = (\pi - \omega_s) r(0) + 2 \sum_{k=1}^N r(k) \cos(k\omega_s) d\omega \quad (3.4.9)$$

式中  $r(k)$  是  $H_0(z)$  的单位脉冲响应  $h_0(n)$  的自相关函数, 即

$$r(k) = \sum_{n=k}^N h_0(n) h_0(n-k) \quad (3.4.10)$$

交换 (3.4.9) 式中求和符号和积分符号的运算次序可得:

$$\phi = (\pi - \omega_s) r(0) - 2 \sum_{k=1}^N r(k) \frac{\sin(k\omega_s)}{k} \quad (3.4.11)$$

此式是关于  $\alpha_0 \cdots \alpha_J$  的目标函数, 不含积分运算, 可以用标准的优化算法使得  $\phi$  尽可能的小。最后得到的  $H_0(z)$  是阻带能量小的功率对称 FIR 滤波器。可见格形结构优化设计二通道仿酉完全重建 QMF 组并不涉及谱分解, 这与第二章中半带滤波器谱分解法不同。

## 二通道仿酉完全重建 QMF 组格形结构的运算量

应用两个著名的等价图 3.4-2 化为图 3.4-4, 滤波在抽样率低的一侧进行, 可以证明分析滤波器组的运算量为  $(J+2)$  MPUs, (或者  $0.5(N+3)$  MPUs) 和  $0.5(N+1)$  APUs, 综合滤波器组需要相同的运算量。半带滤波器谱分解法设计的阶次相同的分析滤波器组的运算量为  $(N+1)$  MPUs 和  $N$  APUs, 可见格形结构的运算效率高。

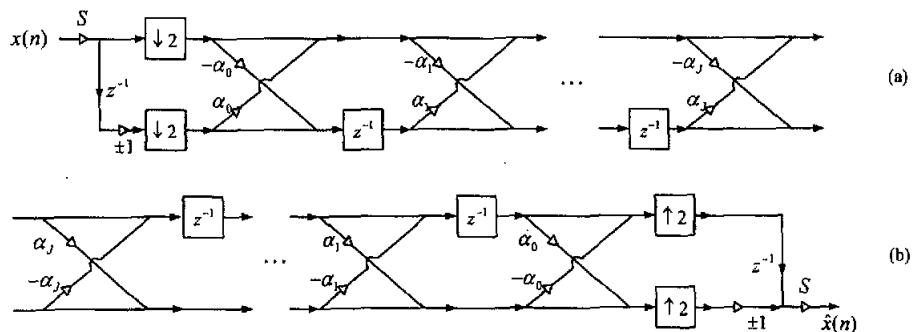


图 3.4-4 图 3.4-2 的高效等价结构

### 例 3.4.1 二通道仿酉 PR QMF 组优化设计法

在图 3.4-2 中令  $J=23$ , 则分析滤波器和综合滤波器的阶次都为  $N=2J+1=47$ 。规定  $H_0(z)$  的阻带截至频率为  $\omega_s=0.54\pi$ 。表 3.4-1 是用上述优化方法得到的格形系数 (Vaidyanathan), 格形系数的正负号交错出现, 随着  $m$  的增大, 格形系数的绝对值逐渐变小。单位脉冲响应  $h_0(n)$  可以用 (3.4.5) 式计算

得到。 $H_0(e^{j\omega})$  的最小阻带衰减为 32dB。

二通道仿酉完全重建 QMF 组格形结构的优点：

1. 二通道实系数 FIR 仿酉完全重建 QMF 组的格形结构运算量最小。
2. 无论格形系数  $\alpha_m$  取何值，都保持格形结构的 7 个特性。
3. 格形系数  $\alpha_m$  量化后不影响滤波器组的完全重建特性。
4. 可以用优化方法基于格形结构直接设计二通道仿酉完全重建 QMF 组，不需要半带滤波器的谱分解。无论优化是否收敛，滤波器组仍是完全重建的。
5. 格形结构的多级特性使得格形结构去掉  $1 \dots J$  中的任何一级都不影响滤波器组的完全重建性。增加格形结构的级数，可以改善分析和综合滤波器的阻带衰减特性。

格形结构也有缺点，基于格形结构的优化方法设计滤波器组，涉及到非线性优化，优化不容易收敛，文献[88]提到的优化方法很复杂，因为优化结果可能有多个，需要反复试凑初始值，原文作者设计出一组结果，建议读者直接查表利用而不必重新优化设计。优化并不能使目标函数值无限小，一般  $H_0(z)$  的过渡带越宽， $\phi$  就相对越小一些。

### 3.5 $M$ 通道仿酉完全重建 QMF 组的格形结构

$M$  通道仿酉完全重建 QMF 组的格形结构<sup>[52]</sup>是二通道仿酉完全重建 QMF 组格形结构的直接推广。 $M$  通道仿酉完全重建 QMF 组的多相距阵  $\mathbf{E}(z)$  可以表示为  $M \times M$  维仿酉矩阵的级联，即：

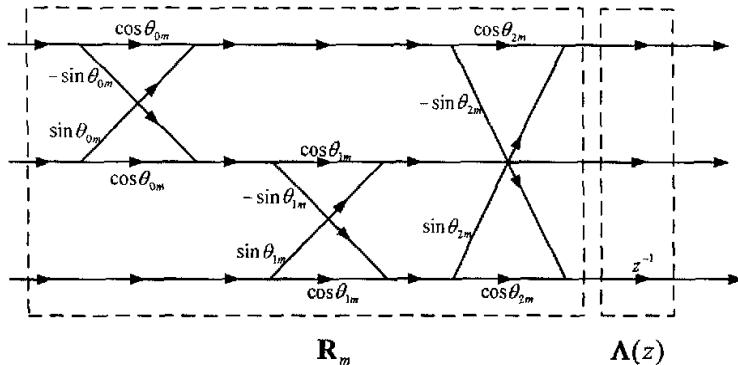
$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{R}_J \mathbf{A}(z) \mathbf{R}_{J-1} \cdots \mathbf{A}(z) \mathbf{R}_0 \quad (3.5.1)$$

以  $M=3$  为例，式中  $\mathbf{R}_m$ ， $\mathbf{A}(z)$  的表达式如下：

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} \cos \theta_{2m} & 0 & \sin \theta_{2m} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{2m} & 0 & \cos \theta_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{1m} & \sin \theta_{1m} \\ 0 & -\sin \theta_{1m} & \cos \theta_{1m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{0m} & \sin \theta_{0m} & 0 \\ -\sin \theta_{0m} & \cos \theta_{0m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.5.3)$$

$\mathbf{E}(z)$  矩阵级联中的一级是  $\mathbf{A}(z) \mathbf{R}_m$ ，其格形结构如图 3.5-1。

图 3.5-1  $\mathbf{E}(z)$  矩阵级联中的一级  $\mathbf{A}(z)\mathbf{R}_m$  的格形结构

把上述两式推广到  $\mathbf{R}_m$ ,  $\mathbf{A}(z)$  为  $M \times M$  维仿酉矩阵, 其表达式为:

$$\mathbf{E}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M-2} & & \mathbf{O} & & \\ & \cos\theta_{M-2,m} & \sin\theta_{M-2,m} & & \\ \mathbf{O} & -\sin\theta_{M-2,m} & \cos\theta_{M-2,m} & & \\ & & & \mathbf{O} & \\ & & & & \mathbf{I}_{M-4} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & & \mathbf{O} & & \\ & \cos\theta_{2,m} & \sin\theta_{2,m} & & \\ \mathbf{O} & -\sin\theta_{2,m} & \cos\theta_{2,m} & & \\ & & \mathbf{O} & & \\ & & & & \mathbf{I}_{M-4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & \mathbf{O} \\ 0 & \cos\theta_{1,m} & \sin\theta_{1,m} & \mathbf{O} & \\ 0 & -\sin\theta_{1,m} & \cos\theta_{1,m} & & \\ \mathbf{O} & & & & \mathbf{I}_{M-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_{0,m} & \sin\theta_{0,m} & \mathbf{O} \\ -\sin\theta_{0,m} & \cos\theta_{0,m} & \\ \mathbf{O} & & \mathbf{I}_{M-2} \end{bmatrix} \quad (3.3.4)$$

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & z^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

式中  $\mathbf{I}_m$ ,  $0 \leq m \leq M-2$  为单位矩阵。

综合滤波器组的多相距阵为:

$$\mathbf{R}(z) = z^{-L} \tilde{\mathbf{E}}(z), L \text{ 为正常数} \quad (3.3.6)$$

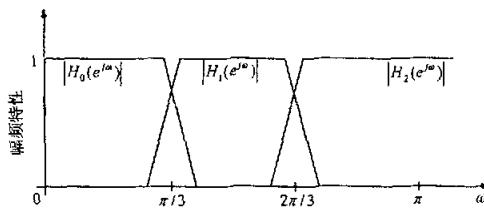
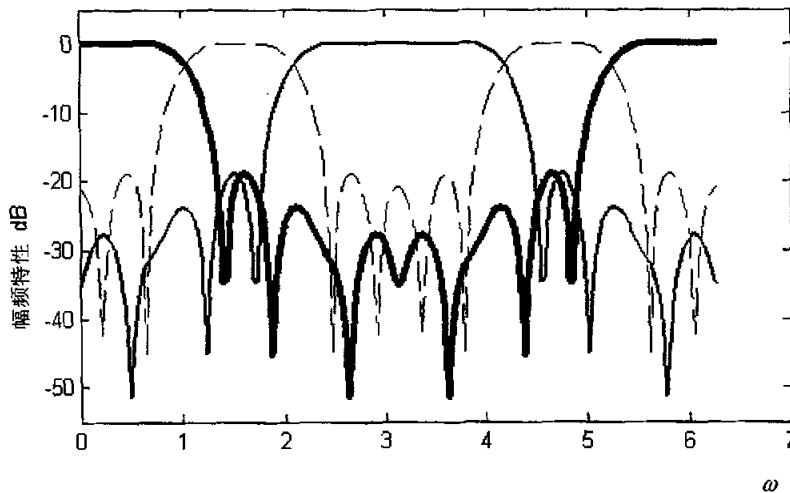
因此  $M$  通道仿酉 QMF 组是完全重建的。

通过格形结构优化法设计  $M$  通道完全重建 QMF 组, 目标函数定义为:

$$\phi = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{\text{组带}} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.3.7)$$

图 3.5-2 是 3 通道仿酉完全重建 QMF 组分析滤波器组的期望幅频特性, 根据 (3.3.7) 式其目标函数为:

$$\phi = \int_{\frac{\pi}{3}+\epsilon}^{\pi} |H_0(e^{j\omega})|^2 d\omega + \int_0^{\frac{2\pi}{3}-\epsilon} |H_2(e^{j\omega})|^2 d\omega + \int_0^{\frac{\pi}{3}-\epsilon} |H_1(e^{j\omega})|^2 d\omega + \int_{\frac{2\pi}{3}+\epsilon}^{\pi} |H_1(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (3.3.8)$$

图 3.5-2 分析滤波器 ( $M=3$ ) 组期望幅频特性图 3.5-3 3 通道酉完全重建 QMF 组分析滤波器组的幅频特性, 滤波器的阶次为  $N=14$ 

式中  $\varepsilon > 0$ , 其值大小决定了分析滤波器和综合滤波器过渡带的宽度。

图 3.5-3 是 3 通道酉完全重建 QMF 组格形结构优化法设计的分析滤波器组的幅频特性, 滤波器的阶次为  $N=3J+2=14$ 。

$M$  通道酉完全重建 QMF 组的格形结构还有其他一些具体形式, 这里就不赘述了。

### 本章小结:

本章介绍的酉完全重建滤波器组是最大抽取完全重建滤波器组的一种特例。文中首先介绍酉矩阵的概念及其几个基本的酉系统, 然后着重介绍了二通道酉 PR QMF 组的特性及其格形实现。酉特性是格形结构存在的基础, 也保证了滤波器组的完全重建性。格形实现为完全重建 QMF 组提供了新的设计

思路,即基于格形结构的优化设计法。基于格形结构的优化设计法尤其适用于  $M$  通道完全重建 QMF 组的设计,文中给出了二通道和三通道仿酉完全滤波器组的设计方法和设计实例。值得指出的是第二章中的功率对称 FIR 完全重建 QMF 组虽然是从不同的角度推导出的,但它也具有仿酉特性及其相应的格形实现结构。

## 第四章 线性相位完全重建 QMF 组

在图像处理中希望滤波器组的分析滤波器  $H_k(z)$  具有线性相位特性，这样的滤波器组称之为线性相位滤波器组。第二章和第三章中设计的二通道完全重建 QMF 组都不具有线性相位特性，本章介绍的二通道 QMF 滤波器组同时具有线性相位特性和完全重建特性。文献[89, 90, 91, 92]对二通道 FIR 线性相位完全重建 QMF 组都有独立的报道。

### 4.1 两个必须放弃的条件

第二章和第三章中设计的二通道完全重建 QMF 组的分析滤波器满足功率互补条件，低通分析滤波器  $H_0(z)$  是功率对称滤波器，为了得到 FIR 线性相位完全重建 QMF 组必须放弃这个条件。

假设  $H_0(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_0(n) z^{-n}$  具有线性相位特性，即滤波器的系数满足：

$$h_0(n) = \pm h_0(N-1-n)$$

若  $H_0(z)$  满足功率对称条件，则  $H_0(z)\bar{H}_0(z) + H_0(-z)\bar{H}_0(-z) = c^2$  应成立。把  $H_0(z)$  的系数代入可以验证此式不成立。

此外二通道线性相位完全重建 QMF 组还必须放弃分析滤波器之间的关系  $H_1(z) = H_0(-z)$ 。从第二章 2.2 节中的结论可知如果  $H_1(z) = H_0(-z)$ ，只能得到不实用的 FIR 线性相位完全重建系统。

### 4.2 二通道线性相位完全重建 QMF 组的格形结构

在介绍格形结构前先介绍一下厄密特 (Hermitian) 像。

设  $A(z)$  和  $B(z)$  是关于  $z^{-1}$  的  $N$  阶多项式，如果  $B(z) = z^{-N} \bar{A}(z)$ （上标 ' $\sim$ ' 表示对  $A(z)$  的系数取共轭，然后用  $z^{-1}$  代替  $z$ ），则称  $B(z)$  是  $A(z)$  的厄密特像。同样  $A(z)$  也是  $B(z)$  的厄密特像。

在图 4.2-1 (a) 中，

$$P_{m-1}(z) = \sum_{n=0}^{2m-1} p_{m-1}(n) z^{-n}, \quad Q_{m-1}(z) = \sum_{n=0}^{2m-1} q_{m-1}(n) z^{-n}, \quad m \geq 1 \quad (4.2.1)$$

是实系数多项式， $k_m$  是实数。令  $Q_{m-1}(z)$  是  $P_{m-1}(z)$  的厄米特像，即  $Q_{m-1}(z) = z^{-(2m-1)}$ 。

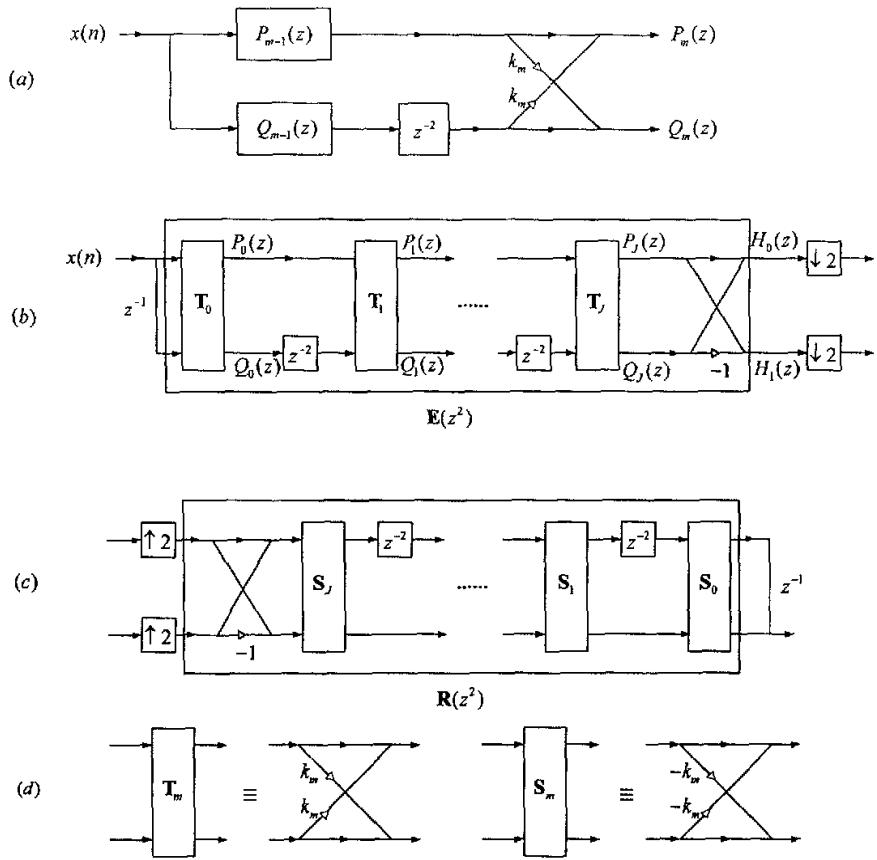


图 4.2-1 FIR 线性相位完全重建 QMF 组格形结构。(a) 分析滤波器的产生方法, (b) 完整的分析滤波器组, (c) 完整的综合滤波器组, (d) 方框图的细节。

$P_{m-1}(z^{-1})$ , 因此传递函数

$$\begin{aligned} P_m(z) &= P_{m-1}(z) + k_m z^{-2} Q_{m-1}(z) \\ Q_m(z) &= k_m P_{m-1}(z) + z^{-2} Q_{m-1}(z) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

仍然是厄米特像, 即满足  $Q_m(z) = z^{-(2m+1)} P_m(z^{-1})$  (可以用递归法加以证明)。在图 4.2-1 (b) 中通过反复迭代得到  $Q_j(z)$  与  $P_j(z)$ , 二者满足厄米特关系:

$$Q_j(z) = z^{-N} P_j(z^{-1}), \quad N = 2J + 1 \quad (4.2.3)$$

在此图中分析滤波器为:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_j(z) \\ Q_j(z) \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

由此式容易证明:

$$H_0(z) = z^{-N} H_0(z^{-1}), \quad H_1(z) = -z^{-N} H_1(z^{-1}) \quad (4.2.5)$$

或者说分析滤波器的系数为：

$$h_0(n) = h_0(N-n), \quad h_1(n) = -h_1(N-n) \quad (4.2.6)$$

因此分析滤波器具有线性相位特性。

图 4.2-1 (d) 中  $S_m = (1 - k_m^2) T_m^{-1}$ , 如此选择  $S_m$  和  $T_m$  可以使图 4.2-1 (b), (c) 成为完全重建系统。分析滤波器组和综合滤波器组的多相距阵满足

$$R(z) = 2 \prod_{m=0}^J (1 - k_m^2) z^{-J} E^{-1}(z).$$

设计线性相位完全重建滤波器组要用优化法, 类似于第三章中的仿酉滤波器组格形系数优化法, 首先要确定优化目标函数。由于线性相位完全重建滤波器组的分析滤波器不满足功率互补特性, 目标函数应同时考虑低通, 高通分析滤波器通带和阻带的能量特性, 因此目标函数如下选取:

$$\begin{aligned} \phi = & \int_0^{\omega_p} \left[ 1 - |H_0(e^{j\omega})|^2 \right]^2 d\omega + \int_{\omega_s}^{\pi} |H_0(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ & + \int_{\omega_s}^{\pi} \left[ 1 - |H_1(e^{j\omega})|^2 \right]^2 d\omega + \int_0^{\omega_p} |H_1(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

式中  $\omega_p$  和  $\omega_s$  分别为  $H_0(e^{j\omega})$  通带边缘和阻带边缘, 因此过渡带宽度为  $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ 。

具有线性相位特性(满足 (4.2.6) 式)的 PR 滤波器组是否都可以用图 4.2-1 中的格形结构实现? 或者说, 图 4.2-1 中的格形结构是否包含了上述所有分析滤波器组具有线性相位特性(即满足 (4.2.6) 式)且系统是完全重建的 QMF 组? 除了极少数例外, 答案是肯定的。下文将详细阐述这个问题。

假设分析滤波器  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  满足 (4.2.6) 式。定义  $P_j(z)$  和  $Q_j(z)$  为:

$$\begin{bmatrix} P_j(z) \\ Q_j(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

把上述分析滤波器用多相 I 型表示, 得:

$$\begin{bmatrix} P_j(z) \\ Q_j(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} E(z^2)}_{E_j(z^2)} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

根据 (2.5.38) 式, 完全重建性即意味着:

$$\det \mathbf{F}_j(z) = c_0 z^{-m_0} \quad (4.2.10)$$

由  $H_0(z)$  和  $H_1(z)$  的线性相位特性 (即满足 (4.2.6) 式) 可以推出 (4.2.3) 式。

因此设计 FIR 线性相位完全重建滤波器组的问题转化为寻找  $[P_j(z) \ Q_j(z)]^T$  的格形结构使之满足 (4.2.3) 和 (4.2.10) 式。

为了方便叙述, 令

$$P_j(z) = \sum_{n=0}^N p_j(n)z^{-n}, \quad Q_j(z) = \sum_{n=0}^N q_j(n)z^{-n} \quad (4.2.11)$$

因此 (4.2.3) 式等价于:

$$p_j(n) = q_j(N-n) \quad (4.2.12)$$

下述引理在讨论中起关键性的作用。

**引理 4.2.1** [Vaidyanathan]  $P_j(z)$  和  $Q_j(z)$  如 (4.2.11) 所述, 且满足 (4.2.10) 和 (4.2.12) 式,  $\mathbf{F}_j(z)$  如 (4.2.9) 式所述。令  $N$  为奇数, 即  $N = 2J+1$ 。假设  $p_j(n)$  和  $q_j(n)$  是实数,  $p_j(0) \neq 0$ ,  $p_j(0) \neq \pm p_j(N)$ 。则存在实系数  $k_j \neq \pm 1$  和

FIR 滤波器  $P_{j-1}(z) = \sum_{n=0}^{N-2} p_{j-1}(n)z^{-n}$ ,  $Q_{j-1}(z) = \sum_{n=0}^{N-2} q_{j-1}(n)z^{-n}$  满足:

$$\begin{bmatrix} P_{j-1}(z) \\ z^{-2}Q_{j-1}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{1-k_j^2} \begin{bmatrix} 1 & -k_j \\ -k_j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_j(z) \\ Q_j(z) \end{bmatrix} \quad (4.2.13)$$

式中  $Q_{j-1}(z) = z^{-(N-2)}P_{j-1}(z^{-1})$ ,  $p_{j-1}(0) \neq 0$ 。

若  $k_j \neq \pm 1$ , 则 (4.2.13) 式中的  $2 \times 2$  矩阵可逆, 由 (4.2.13) 式可以得到图 4.2-1 (a)。由于  $[P_{j-1}(z) \ Q_{j-1}(z)]^T$  具有  $[P_j(z) \ Q_j(z)]^T$  的所有特性, 如果  $p_{j-1}(0) \neq \pm p_{j-1}(N-2)$ , 则可以重复 (4.2.13) 式中的运算。如果  $[P_m(z) \ Q_m(z)]^T$ ,  $m=1, \dots, J-1$ , 满足  $p_m(0) \neq \pm p_m(2m+1)$ , 则 FIR 线性相位滤波器组  $[H_0(z) \ H_1(z)]^T$  (满足 (4.2.5) 式) 可以用图 4.2-1 (b) 所示的格形结构实现。

为了更好地理解上述结论, 下面对引理 4.2.1 加以证明。

**证明** (引理 4.2.1): 由 (4.2.13) 式可知  $k_j$  必须满足  $p_j(N) - k_j q_j(N) = 0$ , 因此

$$k_j = \frac{p_j(N)}{q_j(N)} = \frac{p_j(N)}{p_j(0)} \neq \pm 1 \quad (4.2.14)$$

如此选择  $k_j$  可以消除  $P_j(z) - k_j Q_j(z)$  中的  $z^{-N}$  的项。下面证明  $P_j(z) - k_j Q_j(z)$  中

$z^{-(N-1)}$  的系数也为零。

把 (4.2.14) 式代入  $p_j(N-1) - k_j q_j(N-1)$  得：

$$p_j(N-1) - k_j q_j(N-1) = [p_j(N-1)q_j(N) - q_j(N-1)p_j(N)]/q_j(N) \quad (4.2.15)$$

定义

$$\mathbf{F}_j(z) = \begin{bmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{bmatrix} \quad (4.2.16)$$

式中

$$\begin{aligned} A(z) &= p_j(0) + p_j(2)z^{-1} + \cdots + p_j(N-1)z^{-M}, \\ B(z) &= p_j(1) + p_j(3)z^{-1} + \cdots + p_j(N)z^{-M}, \\ C(z) &= q_j(0) + q_j(2)z^{-1} + \cdots + q_j(N-1)z^{-M}, \\ D(z) &= q_j(1) + q_j(3)z^{-1} + \cdots + q_j(N)z^{-M} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

式中  $M = (N-1)/2$ 。由 (4.2.10) 式得：

$$A(z)D(z) - B(z)C(z) = c_0 z^{-m_0} \quad (4.2.18)$$

此式中  $z^0$  的系数为  $p_j(0)q_j(1) - q_j(0)p_j(1)$ ， $z^{-2M}$  的系数为  $p_j(N-1)q_j(N) - p_j(N)q_j(N-1)$ 。由于  $N \geq 3$ ，这两个系数中必定有一个为零。由 (4.2.12) 式可知这两个系数相等，因此都等于零。这个结论说明  $P_{j-1}(z)$  的阶次为  $N-2$ 。

由 (4.2.13) 式可以证明  $Q_{j-1}(z) = z^{-(N-2)}P_{j-1}(z^{-1})$ ，因此  $Q_{j-1}(z)$  的阶次也为  $N-2$ 。对 (4.2.13) 式中的常数矩阵求逆可得：

$$\begin{bmatrix} P_j(z) \\ Q_j(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_j \\ k_j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{j-1}(z) \\ z^{-2}Q_{j-1}(z) \end{bmatrix} \quad (4.2.19)$$

由此式可得  $p_j(0) = p_{j-1}(0)$ ，因此  $p_{j-1}(0) \neq 0$ 。

值得注意的是图 4.2-1 中的格形结构并不能包含所有的 FIR 线性相位完全重建 QMF 组。FIR 线性相位完全重建 QMF 组更一般的结论见文献[89]，文中指出可以使分析滤波器的单位脉冲响应  $h_b(n)$  和  $h_t(n)$  是对称的，长度为偶数，且二者长度不同，这种 FIR 线性相位完全重建 QMF 组有不同的格形实现结构。 $M$  通道 FIR 线性相位完全重建滤波器组见文献[91, 92, 93]。

## 本章小结：

本章介绍了一种具有线性相位特性的二通道完全重建 QMF 组及其格形实现

结构。格形结构中每一级的低通和高通传递函数互为厄密特像，这是这种线性相位完全重建 QMF 组最为显著的特点。这种滤波器组同样要用基于格形系数的优化法设计，只是目标函数的选取与第三章中的目标函数有所不同。本章的格形结构不能包含所有的 FIR 线性相位完全重建 QMF 组，更一般的 FIR 线性相位完全重建 QMF 组的结论见文献[89, 91, 92, 93]。

## 第五章 余弦调制完全重建滤波器组

本章介绍基于余弦调制的 FIR 完全重建滤波器组<sup>[56, 57, 58, 94]</sup>。余弦调制完全重建滤波器组的特点是： $M$  个分析滤波器由一个原型滤波器  $P_0(z)$  经余弦调制产生。在优化设计时，需要优化的系数少，因为只有  $P_0(z)$  的系数需要优化。分析滤波器组的运算量仅是  $P_0(z)$  的多相实现和余弦调制所需的运算量，综合滤波器组具有和分析滤波器组相同的运算量。

### 5.1 $M$ 通道实系数余弦调制分析滤波器

$M$  个滤波器可以由一个原型滤波器得到，如图 1.3-4。图中  $E_i(z)$  是原型滤波器  $H_0(z)$  的多相 I 型分量， $H_k(z) = H_0(zW^k)$ ， $W^k = e^{-j2\pi k/M}$ ，此式意味着频率响应  $H_k(e^{j\omega})$  是原型滤波器频率响应的均匀移位。令  $h_k(n)$  是  $H_k(z)$  的单位脉冲响应。由于  $h_k(n)$  是  $h_0(n)$  的指数调制，即  $h_k(n) = h_0(n)e^{j2\pi kn/M}$ ，即使  $h_0(n)$  是实系数的， $h_k(n)$  一般是复数，因此对于实输入信号  $x(n)$ ， $H_k(z)$  的输出一般为复数。

如果用余弦调制而不用指数调制则可得到一组实系数滤波器。这组实系数滤波器可以通过首先设计  $2M$  个指数调制滤波器，然后把不同的子带经适当的组合得到。图 5.1-1 是图 1.3-4 的简单修改，以  $2M$  代替  $M$ 。这是一个均匀 DFT 滤波器组，这  $2M$  个分析滤波器的关系为：

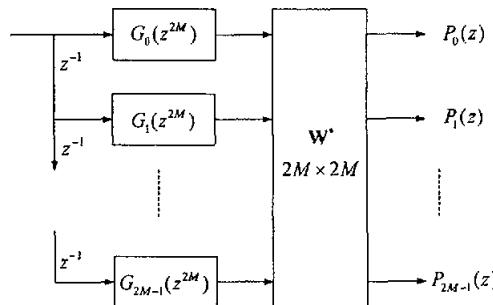
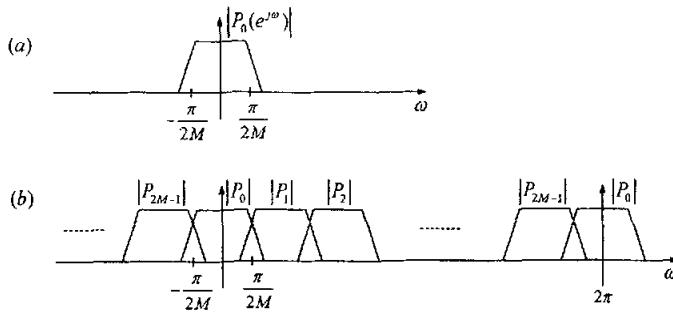
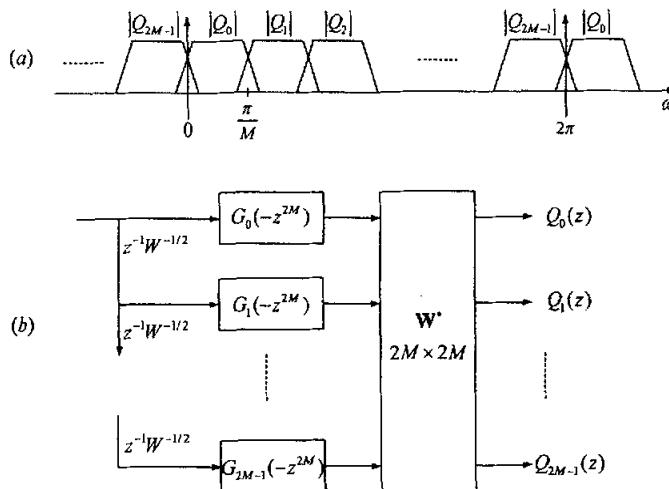


图 5.1-1 由原型滤波器  $P_0(z)$  均匀移位得到的  $2M$  带均匀 DFT 滤波器组

$$P_k(z) = P_0(zW^k), \text{ 即 } p_k(n) = p_0(n)W^{-kn} \quad (5.1.1)$$

式中  $W = e^{-j2\pi/2M} = e^{-j\pi/M}$ 。图中  $\mathbf{W}^*$  是  $2M \times 2M$  DFT 矩阵  $\mathbf{W}$  的共轭。 $P_0(z)$  是原型滤波器，本章限定单位脉冲响应  $p_0(n)$  是实系数的，因此  $|P_0(e^{j\omega})|$  关于  $\omega = 0$  对称。

图 5.1-2 (a) 原型滤波器  $P_0(z)$  的幅频特性, (b)  $P_k(z)$  的幅频特性图 5.1-3 (a)  $P_k(z)$  的幅频特性沿  $\omega$  轴右移  $\pi/2M$ , (b)  $Q_k(z)$  的多相实现结构

$P_0(z)$  是低通滤波器, 截止频率为  $\pi/2M$ , 幅频特性如图 5.1-2 (a)。 $P_0(z)$  的多相分量为  $G_k(z)$ ,  $0 \leq k \leq 2M-1$ 。由 (5.1.1) 式可知  $P_k(e^{j\omega}) = P_0(e^{j(\omega-k\pi/M)})$ , 即  $|P_k(e^{j\omega})|$  是  $|P_0(e^{j\omega})|$  沿  $\omega$  轴右移  $k\pi/M$ , 如图 5.1-2 (b)。

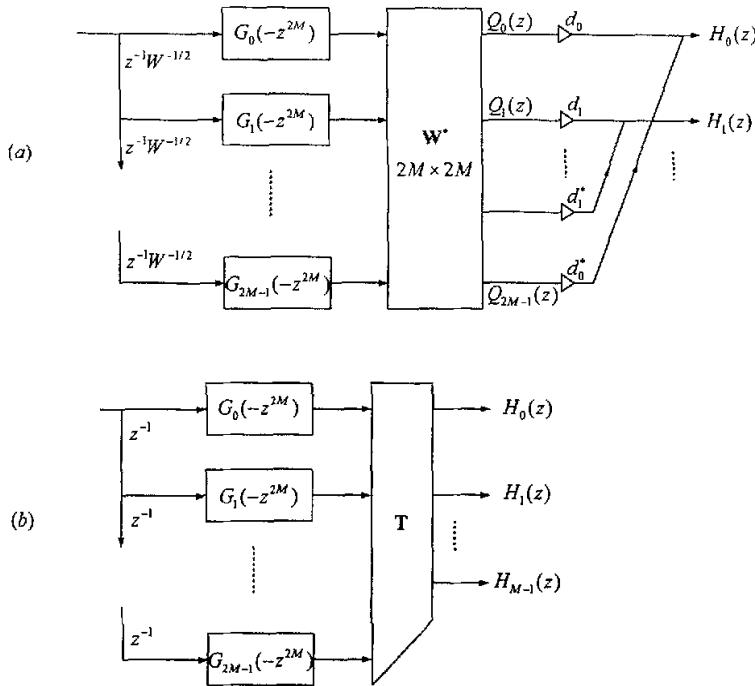
为了使  $P_k(z)$  适当的组合得到一组实系数滤波器, 把图 5.1-2 (b) 中的幅频特性沿  $\omega$  轴右移  $\pi/2M$ , 移动结果如图 5.1-3 (a)。图中

$$Q_k(z) = P_0(zW^{k+0.5}), \quad 0 \leq k \leq 2M-1 \quad (5.1.2)$$

可以推出,  $Q_k(z)$  与  $Q_{2M-1-k}(z)$  的单位脉冲响应互为共轭。新的  $2M$  通道滤波器组  $Q_k(z)$  的多相实现结构如图 5.1-3 (b)。

假设原型滤波器  $P_0(z)$  是  $N$  阶实系数 FIR 滤波器, 即:

$$P_0(z) = \sum_{n=0}^N p_0(n)z^{-n} \quad (5.1.3)$$

图 5.1-4 (a)  $M$  通道余弦调制分析滤波器组的多相实现结构, (b) 图 (a) 的简化实现

定义  $M$  通道实系数分析滤波器组为:

$$H_k(z) = d_k Q_k(z) + d_k^* Q_{2M-1-k}(z), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (5.1.4a)$$

式中  $d_k = e^{j\theta_k} W^{(k+0.5)N/2}$ ,  $\theta_k = (-1)^k \pi/4$ ,  $0 \leq k \leq M-1$ 。  $H_k(z)$  的单位脉冲响应为:

$$h_k(n) = 2p_0(n) \cos\left(\frac{\pi}{M}(k+0.5)(n-N/2) + \theta_k\right) \quad (5.1.4b)$$

由于滤波器组  $Q_k(z)$  可以用 5.1-3 (b) 所示的多相结构实现, 则滤波器组  $H_k(z)$  可以用图 5.1-4 (a) 实现。由此图可得:

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{2M-1} t_{kn} z^{-n} G_n(-z^{2M}), \quad 0 \leq k \leq M-1 \quad (5.1.5)$$

式中

$$t_{kn} = W^{-(k+0.5)(n-N/2)} e^{j\theta_k} + W^{(k+0.5)(n-N/2)} e^{-j\theta_k} \quad (5.1.6)$$

$t_{kn}$  可以简化为:

$$t_{kn} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{M}(k+0.5)(n-N/2) + \theta_k\right) \quad (5.1.7)$$

由 (5.1.5) 式可以得到滤波器组  $H_k(z)$  的新的实现结构如图 5.1-4 (b)，图中  $M \times 2M$  余弦调制矩阵  $\mathbf{T}$  的元素为  $t_{k,n}$ 。可见  $M$  通道实系数余弦调制分析滤波器组是由实系数原型滤波器  $P_0(z)$  的多相分量和余弦调制矩阵  $\mathbf{T}$  而得。

根据 (2.5.11) 式分析滤波器组向量  $\mathbf{h}(z)$  可以表示为：

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{T} \mathbf{g}(z) \quad (5.1.8)$$

式中

$$\mathbf{g}(z) = \begin{bmatrix} G_0(-z^{2M}) & z^{-1}G_1(-z^{2M}) & \cdots & z^{-(2M-1)}G_{2M-1}(-z^{2M}) \end{bmatrix}^T \quad (5.1.9)$$

## 5.2 余弦调制完全重建滤波器组

根据 5.1 节中的结果，很容易得到 FIR 余弦调制完全重建滤波器组。要得到完全重建系统，首先要求得余弦调制分析滤波器组的多相分量矩阵  $\mathbf{E}(z)$ 。

(5.1.8) 式可以改写为：

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0(z^{2M}) & 0 \\ 0 & \mathbf{g}_1(z^{2M}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(z) \\ z^{-M} \mathbf{e}(z) \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0(z^{2M}) \\ z^{-M} \mathbf{g}_1(z^{2M}) \end{bmatrix} \mathbf{e}(z) \quad (5.2.1)$$

式中  $\mathbf{e}(z) = [1 \ z^{-1} \ \cdots \ z^{-(M-1)}]$ ， $\mathbf{g}_i(z)$  是对角矩阵，即

$$[\mathbf{g}_0(z)]_{kk} = G_k(-z), \quad [\mathbf{g}_1(z)]_{kk} = G_{M+k}(-z) \quad (5.2.2)$$

由于余弦调制分析滤波器组的多相 I 型表示为  $\mathbf{h}(z) = \mathbf{E}(z^M) \mathbf{e}(z)$ ，比较 (5.2.1) 式可得：

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0(z^2) \\ z^{-1} \mathbf{g}_1(z^2) \end{bmatrix} \quad (5.2.3)$$

把  $\mathbf{T}$  分块为  $\mathbf{T} = [\mathbf{A}_0 \ \mathbf{A}_1]$ ，式中  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$  为  $M \times M$  维矩阵。代入上式可得：

$$\mathbf{E}(z) = [\mathbf{A}_0 \ \mathbf{A}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0(z^2) \\ z^{-1} \mathbf{g}_1(z^2) \end{bmatrix} \quad (5.2.4)$$

由定理 3.2.1 可知，如果  $\mathbf{E}(z)$  仿酉的，按定理中第二条选取综合滤波器组可以使系统是完全重建的。定理 5.2.1 阐述了 FIR 余弦调制分析滤波器组的多相距阵  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉矩阵的充分必要条件。

定理 5.2.1 [Vaidyanathan] 令实系数 FIR 原型滤波器  $P_0(z)$  的单位脉冲响应的长度为  $N+1 = 2mM$ ， $m$  为正整数。 $G_k(z), 0 \leq k \leq 2M-1$  是  $P_0(z)$  的多相分量。假设

$p_0(n) = p_0(N-n)$ , 分析滤波器  $H_k(z)$  满足 (5.1.5) 式。当且仅当  $G_k(z)$  和  $G_{M+k}(z)$  满足功率互补条件:

$$\tilde{G}_k(z)G_k(z) + \tilde{G}_{M+k}(z)G_{M+k}(z) = \alpha, \quad 0 \leq k \leq M-1, \alpha > 0 \quad (5.2.6)$$

时,  $H_k(z)$  的多相分量矩阵  $\mathbf{E}(z)$  仿酉的。

为了使  $\mathbf{E}(z)$  是仿酉矩阵,  $G_k(z)$  和  $G_{M+k}(z)$  必须是功率互补对, 功率互补特性可以用类似于第三章中的仿酉格形结构来实现。 $G_k(z)$  和  $G_{M+k}(z)$  的格形实现结构如图 5.1-5, 此格形结构满足 (5.2.6) 式 ( $\alpha=1$ )。

实际应用中图 5.1-4 (a), (b) 的输出还要加抽取因子  $\downarrow M$ , 应用著名的等效和上述格形结构则可得 FIR 余弦调制完全重建分析滤波器组的实现结构如图 5.1-6。

余弦调制完全重建滤波器组同样要用优化法来设计。由于原型滤波器  $P_0(z)$  的过渡带和阻带衰减特性决定了余弦调制完全重建分析滤波器和综合滤波器的

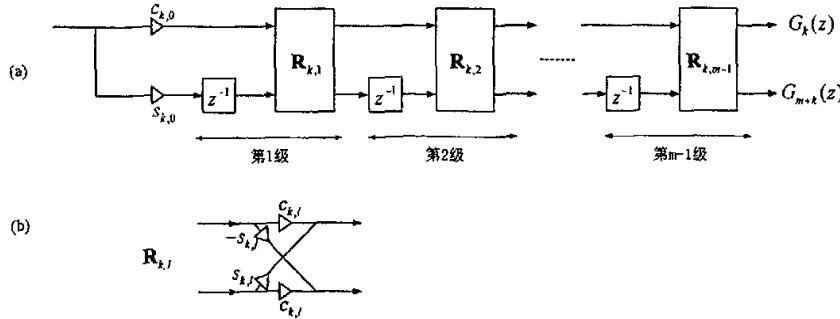


图 5.1.5 (a) 功率互补对  $G_k(z)$  和  $G_{M+k}(z)$  的格形实现结构, (b)  $\mathbf{R}_{k,l}$

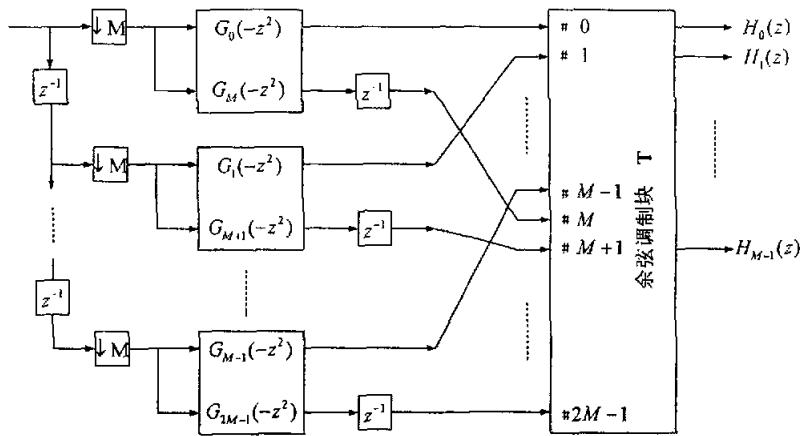
$$\text{图中 } c_{k,l} = \cos \theta_{k,l}, \quad s_{k,l} = \sin \theta_{k,l}$$

特性, 因此指标函数取为:

$$\phi = \int_{\frac{\pi}{2M} + \varepsilon}^{\pi} |P_0(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (5.2.7)$$

式中  $\varepsilon > 0$ 。 $\varepsilon$  的大小决定了  $P_0(e^{j\omega})$  过渡带的大小。

图 5.1-6 还可以对  $\mathbf{T}$  进一步简化, 详细结果见文献 [57, 58]。 $M$  通道余弦调制完全重建滤波器组比第三章中的仿酉  $M$  通道完全重建滤波器组的设计大为简化, 它只要优化设计原型滤波器即可。尽管原型滤波器具有线性相位特性,

图 5.1-6  $M$  通道余弦调制分析滤波器组的实现结构, 功率互补对

$G_k(z)$  和  $G_{M+k}(z)$  用仿酉格形结构实现

一般来说余弦调制分析滤波器不具有线性相位特性。实际上如果放弃原型滤波器的线性相位特性, 余弦调制滤波器组还会有其他优越性, 具体分析见文献[95, 96]。

### 本章小结:

本章介绍基于余弦调制的 FIR 完全重建滤波器组。余弦调制 FIR 完全重建滤波器组是  $M$  通道完全重建 QMF 组的最为简单的一种设计方法, 它的  $M$  个分析滤波器由一个原型滤波器  $P_0(z)$  经余弦调制产生, 在优化设计时只有  $P_0(z)$  的系数需要优化。即使  $P_0(z)$  具有线性相位特性, 一般来说余弦调制分析滤波器组不具有线性相位特性。

## 第六章 时频分析与滤波器组的关系

连续信号和离散信号的傅里叶变换是分析信号频域特性和平稳信号处理的有力工具，它的缺点是这种变换没有时间分辨率，不适合分析某一段时间信号的频率成分，加窗傅里叶变换和小波变换都是时频分析，可以有效克服上述问题。时频分析还有很多其他方法<sup>[97, 98]</sup>，加窗傅里叶变换和小波变换更适用于分析频率随时间变化的关系。本章仅讨论加窗傅里叶变换和小波变换及其与 FIR PR 滤波器组的关系。

### 6.1 加窗傅里叶变换

#### 6.1.1 加窗傅里叶变换的背景

序列  $x(n)$  的傅里叶变换和反变换为：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (6.1.1)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (6.1.2)$$

如果  $x(n)$  为单一频率信号，即  $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ ，则

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0), \quad 0 \leq \omega < 2\pi \quad (6.1.3)$$

可见， $x(n)$  的傅里叶变换完全集中在  $\omega_0$  点，频域分辨率很高，然而时间分辨率也为零，与不确定性原理一致。不确定性原理可用图 6.1-1 更直观的表示。当序列长度越大时，谱越接近脉冲函数  $\delta(\omega)$ ，这反映了频率分辨率与时间分辨率的变化关系。

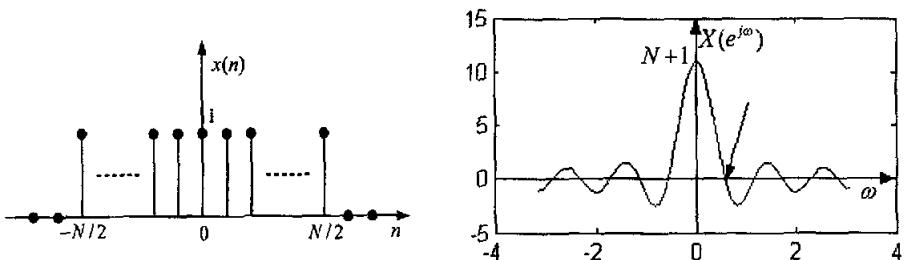


图 6.1-1 傅里叶变换对，直观演示不确定性原理（右图  $N=10$  的示意图）

如图 6.1-2, 信号频率突然发生变化, 此信号的傅里叶变换根本不能反映信号频率随时间变化的关系, 而加窗傅里叶变换<sup>[99, 100, 101, 102]</sup>可以解决这一问题。加窗傅里叶变换即信号  $x(n)$  乘以一个窗函数 (通常窗长度有限长), 然后进行傅里叶变换, 窗函数沿时间轴移动固定距离, 然后重复上述运算。而加窗傅里叶变换恰好可以用  $M$  通道滤波器组实现, 每一个分析滤波器有相同的带宽。窗的长度决定了时间分辨率, 分析滤波器的带宽决定了频率分辨率。抽取因子决定了窗的移动步长。加窗傅里叶变换在语音信号处理和识别中都有广泛的应用。

### 6.1.2 加窗傅里叶变换

在第一章中介绍了 DFT 滤波器组 (图 1.1-11), 这个系统相当于计算  $M$  个输入数据  $x(n) \cdots x(n-M+1)$  的 DFT 变换, 随着  $n$  的增大重复上述运算。此系统也

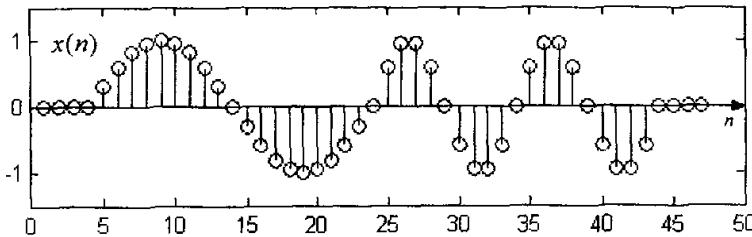


图 6.1-2 频率突变信号

可理解为信号  $x(n)$  通过一组旁瓣最大衰减为 13dB 的带通滤波器组。这组带通滤波器的频率特性不好, 因为原型滤波器过于简单。在 1.3.2 节中介绍的均匀 DFT 滤波器组可以使原型滤波器的阶次更高, 从而改善带通滤波器的频率特性。均匀 DFT 滤波器组是下文将要阐述的加窗傅里叶变换的基本实现结构。

加窗傅里叶变换窗函数沿时间轴的移动如图 6.1-3, 将信号  $x(n)$  与窗函数  $w(n)$  (窗函数通常为长度有限) 相乘, 然后计算乘积  $x(n)w(n)$  的傅里叶变换。窗函数沿时间轴移动固定的距离, 重复上述运算。这样就得到一个关于  $\omega$  和  $m$  ( $m$  为窗函数的中心位置) 的二维函数,  $\omega$  是连续的,  $m$  是离散的, 即

$$X_{WFT}(e^{j\omega}, m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n-m)e^{-j\omega n} \quad (6.1.4)$$

如图 6.1-4 所示。对于固定的  $m$ , (6.1.4) 式相当于计算  $m$  周围  $x(n)$  的频谱, 因此窗函数  $w(n)$  有时间定位特性。由于窗函数  $w(n)$  总是取有限长度, 加窗后的序列绝对可和, 所以加窗傅里叶变换总是存在。

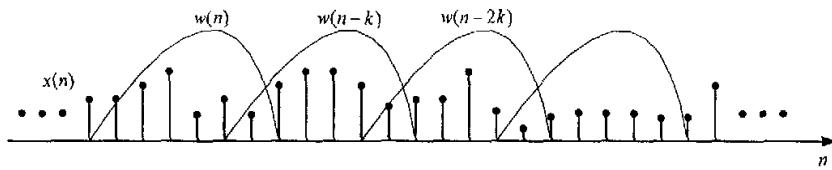
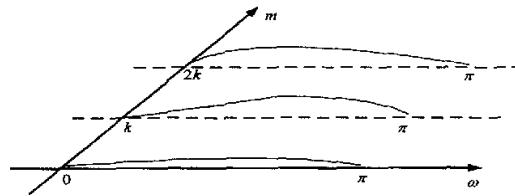


图 6.1-3 窗函数沿时间轴移动

图 6.1-4  $X_{WFT}(e^{j\omega}, m)$  ( $m = 0, k, 2k, \dots$ ) 的示意图

### 6.1.3 加窗傅里叶变换的滤波器组实现

(6.1.4) 式定义的加窗傅里叶变换在实际计算时有很大的局限性, 而用滤波器组的概念可以给出加窗傅里叶变换的具体的实现方法, 这种实现方法易于计算, 用完全重建滤波器组的理论又可以得到加窗傅里叶变换的逆运算。(6.1.4) 式可以用图 6.1-5 (a) 所示的系统表示, 图中  $\omega_0$  和  $m$  为常数, 因此输出  $y(n) = X_{WFT}(e^{j\omega_0}, m)$  为常数。 $y(n)$  表示在时刻  $m$  周围的输入信号的频谱在谱点  $\omega_0$  处的值。为了得到加窗傅里叶变换的滤波器组实现, 把 (6.1.4) 式改写为:

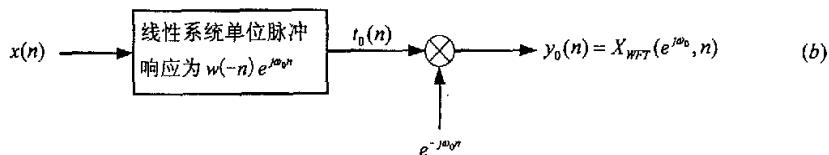
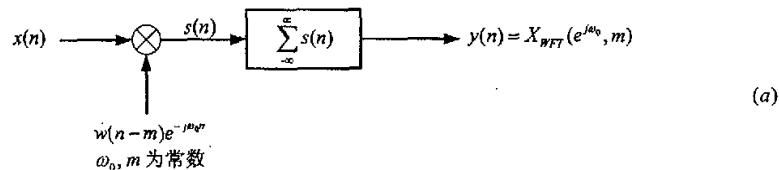


图 6.1-5 (a) 加窗傅里叶变换用线性系统表示, (b) 图 (a) 的变形

$$X_{WFT}(e^{j\omega}, m) = e^{-j\omega m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) w(n-m) e^{j\omega(m-n)} \quad (6.1.5)$$

此式, 用  $n$  代替  $m$ , 用  $m$  代替  $n$ , 令  $\omega = \omega_0$ , 得:

$$X_{WFT}(e^{j\omega_0}, n) = e^{-j\omega_0 n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) w(m-n) e^{j\omega_0(n-m)} \quad (6.1.6)$$

此式可以用图 6.1-5 (b) 所示的系统实现。作上述替换是为了适应  $n$  做序列变量的习惯。图 6.1-5 中两个系统的输出含义相同, 只是时间变量表达不同。窗函数  $w(n)$  的傅里叶变换为  $W(e^{j\omega})$ , 因此  $w(-n)$  的傅里叶变换为  $W(e^{-j\omega})$ , 调制序列  $w(-n)e^{j\omega_0 n}$  的傅里叶变换为  $W(e^{-j(\omega-\omega_0)})$ , 如图 6.1-6 (b) 所示。图 6.1-5 (b) 中的输出信号  $t_0(n)$  具有带通特性, 通带中心为  $\omega_0$ , 如图 6.1-6 (c)。 $t_0(n)$  经过调制得到输出  $y_0(n)$ ,  $y_0(n)$  呈现低通特性, 通带中心为  $\omega=0$ , 如图 6.1-6 (d)。

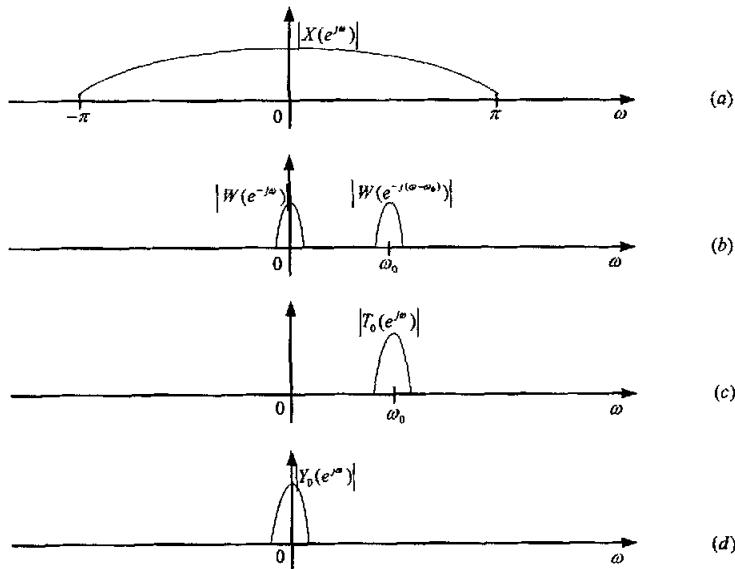


图 6.1-6 加窗傅里叶变换图 6.1-5 (b) 各处信号的幅度谱 (a)  $|X(e^{j\omega})|$ ,  
 (b)  $|W(e^{-j\omega})|$ ,  $|W(e^{-j(\omega-\omega_0)})|$ , (c)  $|T_0(e^{j\omega})|$ , (d)  $|Y_0(e^{j\omega})|$

当  $\omega = \omega_0$  时, 加窗傅里叶变换如图 6.1-5 (b) 对输入信号进行滤波运算得到输出序列  $X_{WFT}(e^{j\omega_0}, n)$ , 当  $\omega$  取不同值时, 可得到不同的输出。理论上  $\omega$  可以取无穷多个值, 实际中一般取有限多个值, 即

$$0 \leq \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_{M-1} < 2\pi \quad (6.1.7)$$

因此加窗傅里叶变换可以用图 6.1-7 所示的  $M$  通道滤波器组来实现。图中分析滤波器  $H_k(z) = H_k(e^{j\omega}) = W(e^{-j(\omega-\omega_k)})$ , 通带中心频率为  $\omega_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, M-1$ ; 输出

信号  $y_k(n)$  为加窗傅里叶变换系数。

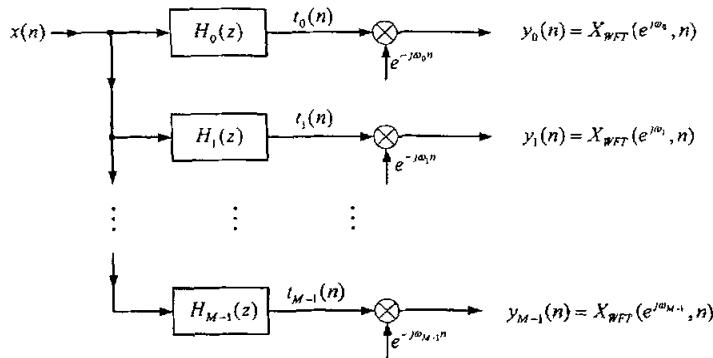


图 6.1-7 加窗傅里叶变换的滤波器组实现

如果  $\omega_k$  为  $0 \sim 2\pi$  间的均匀取样, 即  $\omega_k = 2\pi k/M, k = 0, 1, \dots, M-1$ , 图 6.1-7 所示的滤波器组就成为  $M$  通道均匀 DFT 滤波器组, 分析滤波器的频域关系为:

$$H_k(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega - \frac{2\pi k}{M})}), \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (6.1.8)$$

式中  $H_0(e^{j\omega}) = W(e^{-j\omega})$ 。可见其他滤波器是原型滤波器  $H_0(e^{j\omega})$  沿  $\omega$  周的均匀移位。这种滤波器组的高效实现结构如图 1.3-4。

根据 1.3 节的多相 I 型分解得:

$$W(z^{-1}) = H_0(z) = E_0(z^M) + z^{-1}E_1(z^M) + \dots + z^{-(M-1)}E_{M-1}(z^M) \quad (6.1.9)$$

可见窗函数完全由多相分量  $E_i(z)$  决定, 只要改变  $E_i(z)$  就可以改变窗函数的频率特性。可见均匀 DFT 滤波器组是加窗傅里叶变换的有效实现结构, 它的设计复杂度小, 只要设计  $H_0(z)$  即可。当  $E_i(z) \equiv 1$  时, 相当于  $w(n)$  为矩形窗, 图 6.1-7 的输出为  $M$  个输入数据的 DFT 变换。

由上文可知加窗傅里叶变换主要决定于窗函数的选取, 在选取窗函数时要兼顾到时间分辨率和频率分辨率, 根据不确定性原理<sup>[103]</sup>, 时间分辨率和频率分辨率不可能无穷小, 当且仅当窗函数为高斯窗时, Heisenberg 时频窗的面积最小, 等于  $1/2$ , 即

$$\delta_t^2 \delta_\omega^2 \geq 1/4 \quad (6.1.10)$$

式中,  $\delta_t$  为时域窗宽度,  $\delta_\omega$  为频域窗宽度。窗函数一旦确定, Heisenberg 时频窗的面积就确定了, 时间分辨率和频率分辨率只能根据需要做出折中。如果强

调时间分辨率, 那么  $\delta_t$  的值就小些,  $\delta_\omega$  就变大, 频率分辨率变小, 反之亦然。加窗傅里叶变换的 Heisenberg 时频窗如图 6.1-8, 图中可以清楚地看出时间分辨率与频率分辨率的关系。若窗函数确定了, 在整个时频平面上 Heisenberg 时频窗的形状相同。

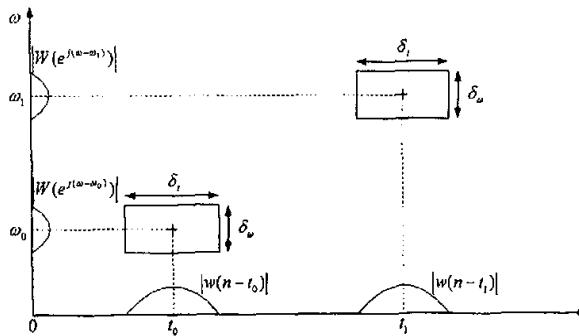


图 6.1-8 加窗傅里叶变换的 Heisenberg 时频窗

## 6.1.4 全相位 $M$ 带滤波器用于时频分析

### 6.1.4.1 全相位 $M$ 带滤波器的设计

1.5.1 节中的  $M$  带滤波器  $H(e^{j\omega})$  及其  $M-1$  个在  $\omega$  轴上的等间隔移位  $H(e^{j(\omega-2\pi k)/M})$  恰好是  $M$  通道均匀 DFT 滤波器组, 因此全相位  $M$  带滤波器也可以用于时频分析。要把全相位  $M$  带滤波器用于时频分析, 首先要设计全相位  $M$  带滤波器, 具体设计步骤如下:

- (1) 根据设计要求, 选择理想的零相位 FIR 滤波器的幅度频率特性  $H_g(\omega)$ 。该幅频特性对于  $\omega=0, \pi, 2\pi$  皆成偶对称, 且满足  $M$  带滤波器的频率特性, 即  $\sum_{k=0}^{M-1} H_g(zW^k) = Mc$ ,  $W = e^{-j2\pi k/M}$ 。
- (2) 根据对截止频率精度和实现复杂度的要求, 适当选择全相位 DFT 数字滤波器  $h_N(n)$  的长度  $M = 2N - 1$ 。
- (3) 在  $[0, 2\pi]$  区间对  $H_g(\omega)$  等间隔采样, 频率采样点为  $\omega = 2\pi k/N, k = 0, 1, \dots, N-1$ , 并令 DFT 滤波响应为:  $F_N(k) = H_g(2\pi k/N)$
- (4) 适当选择前窗和后窗函数按式 (1.6.17), (1.6.18) 求出归一化相关函数窗  $w_N(n)$ 。当然, 也可以直接选择归一化相关函数窗  $w_N(n)$  为哈明窗、汉宁窗、布莱克曼窗等。

例如按上述步骤设计长度为 5 的全相位 3 带滤波器 (前窗后窗都为矩形窗)

的单位脉冲响应为:

$$H_0(z) = \frac{1}{9}z^{-2} + \frac{2}{9}z^{-1} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9}z^1 + \frac{1}{9}z^2 \quad (6.1.11)$$

根据式 (6.1.5)、(6.1.6) 和图 6.1-7 得到全相位 3 带滤波器用于时频分析的网络实现结构, 如图 6.1-9。

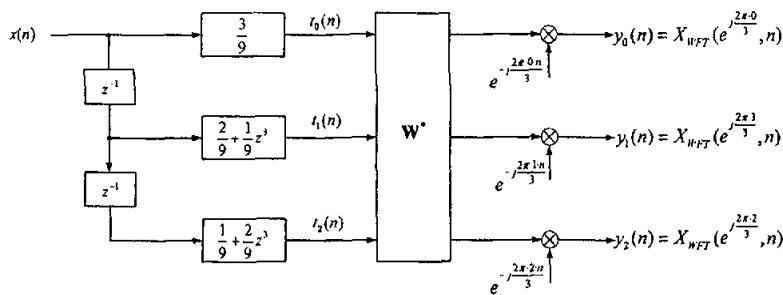


图 6.1-9 全相位 3 带滤波器用于时频分析的网络实现结构图

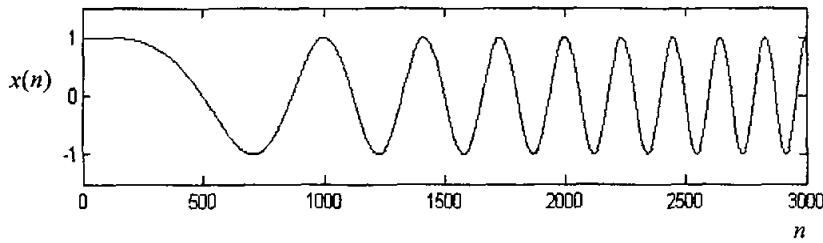


图 6.1-10 信号  $x(n) = \cos(\omega_0 n^2)$ ,  $\omega_0 = 2\pi \times 7.5 \times 10^{-6}$ ,  $n = 0, \dots, 3000$ 。

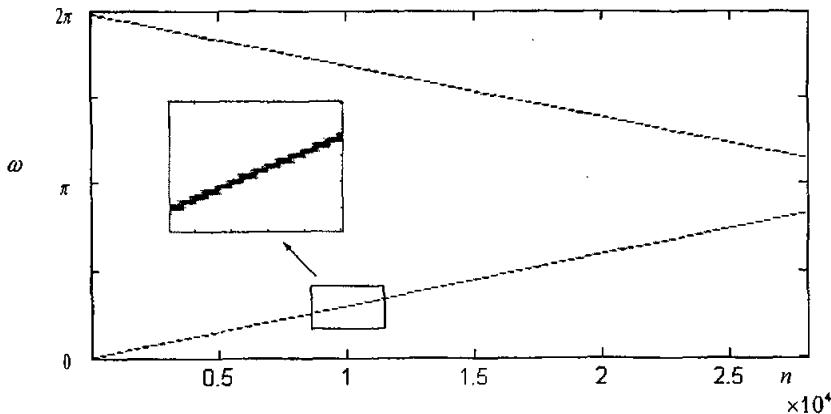


图 6.1-11 信号  $x(n) = \cos(\omega_0 n^2)$  用全相位  $M = 200$  带滤波器组做时频分析的结果。

例 6.1 用全相位  $M = 200$  带滤波器（前窗后窗都为矩形窗）对信号  $x(n) = \cos(\omega_0 n^2)$ ,  $\omega_0 = 2\pi \times 7.5 \times 10^{-6}$  进行时频分析，窗函数长度为 399。 $x(n)$  的瞬时频率为  $2\omega_0 n$ 。信号  $x(0) \sim x(3000)$  如图 6.1-10。时频分析结果如图 6.1-11，图中用灰度值表示时频分析输出幅值的大小，越黑表示幅值大。图中可以清楚地看出频率随时间变化的线性规律，这种信号有的文献也称作 chirp 信号。

例 6.2 用全相位  $M = 200$  带滤波器（前窗后窗都为三角窗）对鸟鸣信号 bird.wav<sup>[104]</sup> 进行时频分析，窗函数长度为 399。信号  $x(1) \sim x(90000)$  的波形如图 6.1-12 (a)。时频分析结果如图 6.1-12 (b)。（注语音信号采样频率为 8K, 30ms-40ms 为一个发音字母的时间，40ms 时间段为 320 个采样点。这是本例取窗长度的依据。）

鸟鸣声也是一种 chirp 信号，局部具有线性频率特性，从时频分析的结果可以清楚的看到这一特性。可见全相位  $M$  带滤波器用于时频分析可以得到比较满意的效果。

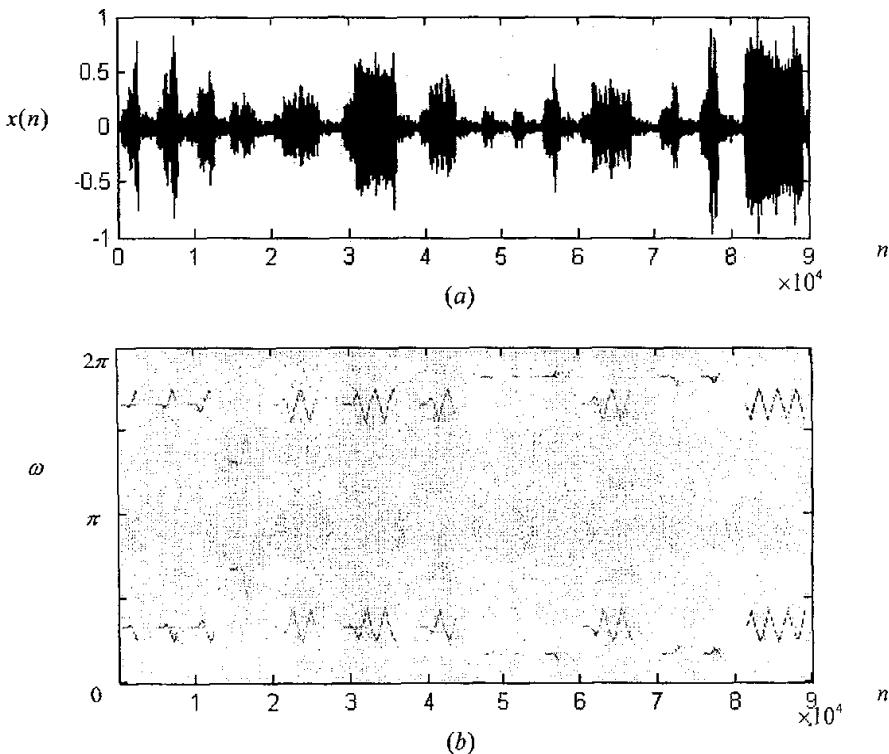
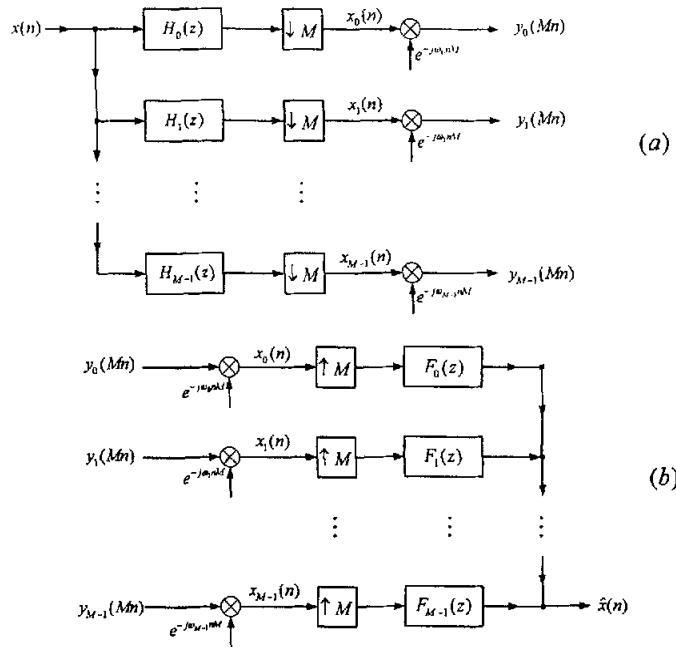


图 6.1-12 (a) 鸟鸣信号 bird.wav, (b) 用全相位  $M = 200$  带滤波器组做时频分析的结果

图 6.1-13 全相位  $M$  带完全重建滤波器组

由于全相位  $M$  带滤波器满足  $\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) = 1$ ，此式意味着滤波器组的输出信号

经调制、求和可以完全重建输入信号  $x(n)$ ，即

$$x(n) = \sum_{k=0}^{M-1} y_k(n) e^{\frac{j2\pi k}{M} n} \quad (6.1.12)$$

图 6.1-7 中滤波器组各子带输出都是窄带信号，带宽为  $2\pi/M$ ，因此抽样率可以降低，抽取因子最大可以取为  $M$ 。当抽取因子为  $M$  时，相当于加窗傅里叶变换的窗函数每次移动  $M$  个采样点。图 6.1-13 (a) 是加窗傅里叶变换加最大抽取因子的实现结构，图中抽取因子已经移动到调制信号的前面，此时滤波器组的输出无冗余，是一种更经济的时频表达。我们希望用图 6.1-13 (b) 所示的综合滤波器组来完全重建信号，遗憾的是，只有当 (6.1.9) 式中的多相分量都为同一非零常数时（例如  $E_l(z) = 1$ ， $l = 0, \dots, M-1$ ），图 6.1-13 才能成为稳定的完全重建滤波器组。

## 6.2 小波变换

二十世纪八十年代中期小波分析开始得到广泛的研究。Grossmann 和

Morlet 首先在数学领域对小波变换给出了解释<sup>[105]</sup>。随后 Meyer, Daubechies, Mallat, Strang 在数学领域对小波变换进行了详尽的研究<sup>[106, 107, 108, 109, 110, 111]</sup>，也有很多有关小波的书籍出版<sup>[112, 113, 114]</sup>。Daubechies 和 Mallat 前无古人的研究把小波变换推向实用化阶段。Daubechies 详细地论述了紧支撑正交小波和紧支撑双正交小波的设计，给出小波的一系列重要概念，如小波的稳定性、正则性、消失距等，并建立了连续时间正交小波变换和 FIR 功率对称滤波器组之间的关系。Daubechies 的紧支撑小波激发了众多学者在数学领域和数字信号处理领域对小波的理论研究和应用的兴趣。如侯正信教授基于中心 B 样条设计的二维各向同性二进小波在图像的边缘提取中得到较好的效果。侯教授提出的全相位正交小波和全相位二维双正交小波变换目前正在应用研发中。小波变换在数字信号处理领域最成功的应用是数据压缩和信号去噪。小波变换被称为二十世纪最辉煌的成果之一！

Mallat 提出的多分辨分析使得小波变换与完全重建树形滤波器组密不可分。树形滤波器组各子带的带宽是非均匀的，因此抽样因子也各不相同，依带宽而定。在小波之前，树形滤波器组如图 2.5-6 (a) 已经在语音处理中得到广泛的应用<sup>[100, 115, 116, 117]</sup>。非均匀带宽适合于人耳对高频信号的分辨率逐渐降低的特性<sup>[118]</sup>，乐器的音阶就可以很好的解释人耳的这一特性。目前也发现应用小波树形滤波器组处理语音信号的文献。

在数字信号处理领域有大量的关于滤波器组和小波变换关系的文献，下文将介绍小波作为时频分析的特点及其与滤波器组的关系。

### 6.2.1 连续时间小波变换

小波的时频窗是变化的，作为时频分析有一定的优越性。但是任何一种工具都不是万能的，尤其在分析某些线性 sharp 信号的时频特性时。

小波函数  $\psi(t)$  属于实数域  $\mathbb{R}$  上的平方可积函数空间，即  $\psi(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ ，小波的范数为 1，即  $\|\psi\|=1$ ， $\psi(t)$  的支撑区在  $t=0$  附近，且满足：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (6.2.1)$$

对小波  $\psi(t)$  进行伸缩和平移，得到一组时频元素  $\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$ ，式中尺度因子  $s > 0$ ，位移  $u \in \mathbb{R}$ ，这组时频元素保持范数，即  $\|\psi_{u,s}(t)\|=1$ 。

信号  $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$  的连续时间小波变换定义为<sup>[103]</sup>：

$$Wf(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left( \frac{t-u}{s} \right) dt \quad (6.2.2)$$

式中上标“\*”表示共轭。由于  $\hat{\psi}(0) = \int \psi(t) dt = 0$  (上标“^”表示傅里叶变换)，因此信号的小波变换相当于带通滤波。小波变换和加窗傅里叶变换一样，也可以做时频分析，但是小波的 Heisenberg 时频窗与加窗傅里叶变换的 Heisenberg 时频窗不同。根据 Parseval 定理，(6.2.2) 式可以改写为：

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{u,s}^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}_{u,s}^*(\omega) d\omega \quad (6.2.3)$$

$\hat{\psi}_{u,s}(\omega) = e^{-i\omega u} \sqrt{s} \hat{\psi}(s\omega)$ 。变换域系数  $Wf(u, s)$  依赖于  $f(t)$  和  $\hat{f}(\omega)$  分别在时域和频域内  $\psi_{u,s}$  和  $\hat{\psi}_{u,s}$  能量集中的区域。 $\psi_{u,s}$  和  $\hat{\psi}_{u,s}$  相当于时域窗和频域窗，时域窗宽和频域窗宽决定了小波变换的时域分辨率和频域分辨率，窗越宽分辨率越低。假设小波  $\psi(t)$  以  $t=0$  为中心，那么  $\psi_{u,s}(t)$  的中心

为  $t=u$ 。定义小波的时域窗宽为  $\delta_t$ ， $\delta_t^2 = \frac{1}{\|\psi(t)\|^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt$ ，可以证明  $\psi_{u,s}(t)$  的

时域窗宽为  $s\delta_t$ 。同样可以证明若  $\hat{\psi}(\omega)$  在  $\omega > 0$  的区域内中心频率为  $\eta$ ，频域窗宽为  $\delta_\omega$ ，则  $\hat{\psi}_{u,s}(\omega)$  的中心频率为  $\eta/s$ ，窗宽为  $\delta_\omega/s$ 。因此在时频平面中小波  $\psi_{u,s}(t)$  的 Heisenberg 时频窗的中心为  $(u, \eta/s)$ ，时域窗宽为  $s\delta_t$ ，频域窗宽为  $\delta_\omega/s$ ，Heisenberg 时频窗的面积为一常数，即  $s\delta_t \times (\delta_\omega/s) = \delta_t \delta_\omega$ 。图 6.2-1 为小波  $\psi_{u_0, s_0}(t)$ ， $\psi_{u_1, s_1}(t)$  的 Heisenberg 时频窗，图中可以看出尺度因子越小，时域分辨率越高，然而频域分辨率越差。小波做时频分析的优越性就在于它在低频区时间窗宽，频域窗窄；而在高频区时间窗窄，频域窗宽。如果对信号的低频成分感兴趣，则增大尺度因子，减小时间分辨率；否则减小尺度因子，增大时间分辨率。任何一种工具都不是万能的，小波做时频分析虽然有优越性，但分析线性 chirp 信号的时频特性时不如加窗傅里叶变换，当分析双曲 (hyperbolic) chirp 信号的时频特性时优于加窗傅里叶变换，文献 [103] 中有关这方面的例子。

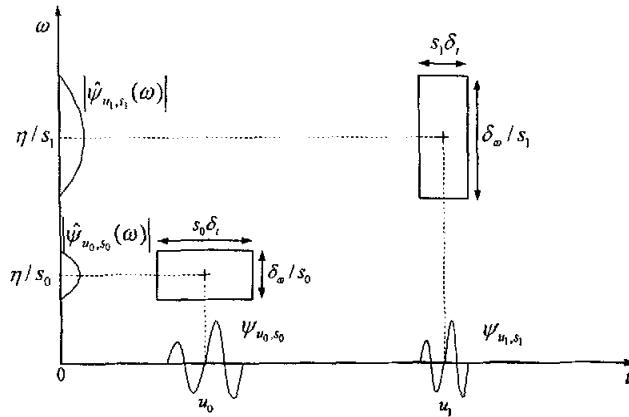
小波的逆变换，即根据小波变换域系数完全重建原信号。重建条件如下：

定理 6.2.1 如果小波  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  满足：

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (6.2.4)$$

则对于函数  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ，小波变换的逆变换为：

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Wf(u, s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left( \frac{t-u}{s} \right) du \frac{ds}{s^2} \quad (6.2.5)$$

图 6.2-1 小波  $\psi_{u_0, s_0}(t)$ ,  $\psi_{u_1, s_1}(t)$  的 Heisenberg 时频窗

连续小波变换和逆变换都涉及到积分运算, 文献[119]介绍了其数值算法。连续小波变换还不能和多率滤波器组建立联系, 事实上连续小波变换域系数存在大量冗余, 小波反演只需部分变换域系数即可。把小波  $\psi(t)$  的尺度因子和位移分别离散化, 形成空间  $L^2(\mathbb{R})$  上的正交基, 即

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2} \quad (6.2.6)$$

这组小波称为正交小波。这种离散化和多分辨分析<sup>[121, 120]</sup>可以把正交小波变换与多率信号处理中的功率对称波器组联系起来。 $\psi_{j,n}(t)$  的尺度因子为  $2^j$ , 尺度因子的倒数  $2^{-j}$  为  $\psi_{j,n}(t)$  分辨率。

## 6.2.2 正交小波

讨论正交小波要从多分辨分析入手。对于  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , 定义  $f(t)$  在闭子空间  $\mathbf{V}_j \subset L^2(\mathbb{R})$  上的投影, 即  $f_j(t) = P_{\mathbf{V}_j} f$  是在分辨率  $2^{-j}$  时对  $f(t)$  的逼近。 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \cdot \psi_{j,n}$  可以看成  $f_j(t)$  与  $f_{j-1}(t)$  之间的差。

定义: [Mallat 多分辨分析] 如果空间  $L^2(\mathbb{R})$  上的闭子空间序列  $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  满足下述 6 个特性, 则称  $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  是多分辨分析。

$$\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, \quad f(t) \in \mathbf{V}_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in \mathbf{V}_j \quad (6.2.7)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{V}_{j+1} \subset \mathbf{V}_j \quad (6.2.8)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(t) \in \mathbf{V}_j \Leftrightarrow f(t/2) \in \mathbf{V}_{j+1} \quad (6.2.9)$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{V}_j = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{V}_j = \{0\} \quad (6.2.10)$$

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \mathbf{V}_j = closure \left( \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{V}_j \right) = L^2(\mathbb{R}) \quad (6.2.11)$$

$$\{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (6.2.12)$$

是  $\mathbf{V}_0$  上的 Riesz 基。

可以证明  $\{2^{-j/2} \theta(2^{-j}t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  是  $\mathbf{V}_j$  上的 Riesz 基。如果  $f(t) \in \mathbf{V}_j$ ，则  $f(t)$  可以表示为：

$$f(t) = \sum_{j,n=-\infty}^{\infty} c_{j,n} 2^{-j/2} \theta(2^{-j}t-n) \quad (6.2.13)$$

式中  $c_{j,n}$  表示离散序列。

要计算在分辨率  $2^{-j}$  时对  $f(t)$  的逼近  $f_j(t) = P_{\mathbf{V}_j} f$ ，必须求得  $\mathbf{V}_j$  的正交基，定理 6.2.2 描述了怎样由 Riesz  $\{\theta(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  构造  $\mathbf{V}_j$  的正交基。

定理 6.2.2 [Mallat] 令  $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  是多分辨分析，尺度函数  $\phi(t)$  的傅里叶变换为：

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{\hat{\theta}(\omega)}{\left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{1/2}} \quad (6.2.14)$$

令  $\phi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right)$ ，则  $\{\phi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  是  $\mathbf{V}_j$  的正交基。

在分辨率  $2^{-j}$  时对  $f(t)$  的逼近  $P_{\mathbf{V}_j} f$  用正交尺度函数可以表达为：

$$P_{\mathbf{V}_j} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_{j,n} \rangle \phi_{j,n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j,n} \phi_{j,n} \quad (6.2.15)$$

式中内积表示为  $c_{j,n} = \langle f, \phi_{j,n} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) dt$ 。可见  $f(t)$  的多分辨逼近完全由尺度函数  $\phi(t)$  的伸缩和平移形成的正交基决定。由尺度函数得到的闭子空间序列  $\{\mathbf{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  满足多分辨分析的 6 个特性。可以证明任何尺度函数可以由功率

对称滤波器得到, 定理 6.2.3<sup>[120, 121]</sup>阐述了尺度函数和功率对称滤波器 (Mallat 称之为共轭镜像滤波器) 之间的充分必要条件。

### 两尺度函数

由于  $2^{-1/2}\phi(t/2) \in \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_0$ ,  $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  是  $\mathbf{V}_0$  的正交基,  $\phi(t/2)$  可以表示为:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\phi(t-n) \quad (6.2.16)$$

式中

$$h(n) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle \quad (6.2.17)$$

对 (6.2.16) 式两边进行傅里叶变换, 得:

$$\hat{\phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(\omega)\hat{\phi}(\omega) \quad (6.2.18)$$

式中  $\hat{h}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-in\omega}$ 。当  $p \geq 0$  时, 由 (6.2.18) 式可得:

$$\hat{\phi}(2^{-p+1}\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}(2^{-p}\omega)\hat{\phi}(2^{-p}\omega) \quad (6.2.19)$$

通过迭代可以得到:

$$\hat{\phi}(\omega) = \left( \prod_{p=1}^P \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\phi}(2^{-P}\omega) \quad (6.2.20)$$

如果  $\hat{\phi}(\omega)$  在  $\omega=0$  点是连续的, 则  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \hat{\phi}(2^{-p}\omega) = \hat{\phi}(0)$ , 因此

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{h(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \hat{\phi}(0) \quad (6.2.21)$$

**定理 6.2.3** [Mallat, Meyer]: 如果  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  是尺度函数, 离散序列

$h(n) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-n) \right\rangle$  的傅里叶变换满足:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (6.2.22)$$

和

$$\hat{h}(0) = \sqrt{2} \quad (6.2.23)$$

相反, 如果  $\hat{h}(\omega)$  是以  $2\pi$  为周期的, 在离域  $\omega=0$  内是连续可微的, 且满足 (6.2.22)、(6.2.23) 和下式

$$\inf_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} |\hat{h}(\omega)| > 0 \quad (6.2.24)$$

那么

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{\infty} \frac{h(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}}$$

是尺度函数  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  的傅里叶变换。

这个定理是离散小波变换中的一个核心定理，此定理的证明很长且含有大量的技巧，此处省略。在定理的证明过程中用多分辨分析推导得  $|\hat{\phi}(0)| = 1$ ，其时域表示为  $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$ 。

由定理 6.2.3 可知，要设计尺度函数，可以直接从设计功率对称滤波器 (6.2.22) 式入手，这使设计过程大为简化。

由多分辨分析可知  $\mathbf{V}_j \subset \mathbf{V}_{j-1}$ ，令  $\mathbf{W}_j$  是  $\mathbf{V}_j$  在空间  $\mathbf{V}_{j-1}$  中的补空间，即

$$\mathbf{V}_{j-1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j \quad (6.2.25)$$

$f(t)$  在空间  $\mathbf{V}_{j-1}$  上的正交投影可以看成在空间  $\mathbf{V}_j$  和  $\mathbf{W}_j$  上正交投影的和，即：

$$P_{\mathbf{V}_{j-1}} f = P_{\mathbf{V}_j} f + P_{\mathbf{W}_j} f \quad (6.2.26)$$

$P_{\mathbf{W}_j} f$  提供了  $f(t)$  在分辨率为  $2^{j-1}$  时具有，但在分辨率为  $2^j$  时不具有的细节。定理 6.2.4<sup>[120, 121]</sup> 指出可以由小波  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  的伸缩平移构造空间  $\mathbf{W}_j$  上的正交基。

定理 6.2.4 [Mallat, Meyer]：如果  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  是尺度函数， $h(n)$  是其相应的功率对称滤波器，则小波函数  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  的傅里叶变换为：

$$\hat{\psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad (6.2.27)$$

式中

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi) \quad (6.2.28)$$

令  $\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right)$ ， $\{\psi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  构成空间  $\mathbf{W}_j$  上的正交基。对于所有尺度，

$\{\psi_{j,n}(t)\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$  构成空间  $L^2(\mathbb{R})$  上的正交基。

定理 6.2.4 只讲了  $\hat{g}(\omega)$  的一种取值，实际上取  $\hat{g}(\omega) = e^{-i(2n+1)\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi)$ ， $n \in \mathbb{Z}$  也可以，下述推论给出由  $\hat{g}(\omega)$  得出正交小波基的充分必要条件。

推论 6.2.1 [Mallat]：当且仅当  $\hat{g}(\omega)$  满足：

$$|\hat{g}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (6.2.29)$$

和

$$\hat{g}(\omega)\hat{h}^*(\omega) + \hat{g}(\omega + \pi)\hat{h}^*(\omega + \pi) = 0 \quad (6.2.30)$$

时,  $\{\psi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  构成空间  $\mathbf{W}_j$  上的正交基。

定理 6.2.4 的证明过程中可得:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi(t/2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\phi(t-n) \quad (6.2.31)$$

式中, 序列

$$g(n) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(t/2), \phi(t-n) \right\rangle \quad (6.2.32)$$

是  $\hat{g}(\omega)$  的傅里叶反变换。

(6.2.16) 式和 (6.2.31) 式合称为两尺度函数, 序列  $h(n)$  和  $g(n)$  称为两尺度序列。

由 (6.2.28) 式的傅里叶反变换可知两尺度序列  $h(n)$  和  $g(n)$  之间满足:

$$g(n) = (-1)^{1-n} h(1-n) \quad (6.2.33)$$

两尺度序列在快速离散小波变换中起决定性的作用。

$f(t)$  在空间  $\mathbf{W}_j$  上的正交投影  $P_{\mathbf{W}_j} f$  可以表示为:

$$P_{\mathbf{W}_j} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{j,n} \psi_{j,n} \quad (6.2.34)$$

式中,  $d_{j,n} = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$  为离散小波变换系数。由于  $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{W}_j$ , 因此  $f(t)$  可以由离散小波变换系数得到重建, 重建表达式为:

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{\mathbf{W}_j} f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} \quad (6.2.35)$$

### 6.2.3 正交小波和滤波器组

离散正交小波变换的快速算法可以通过滤波器组来实现。通过信号与双尺度序列的离散卷积实现对多分辨逼近  $P_{\mathbf{V}_j} f$  的高频细节  $P_{\mathbf{W}_{j+1}} f$  的剖分, 在重建信号时, 由  $P_{\mathbf{W}_{j+1}} f$  和  $P_{\mathbf{V}_j} f$  的和求得  $P_{\mathbf{V}_j} f$ 。

由于  $\{\phi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  和  $\{\psi_{j,n}(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  是空间  $\mathbf{V}_j$  和  $\mathbf{W}_j$  上的正交基, 因此  $f(t)$  在空间

$\mathbf{V}_j$  和  $\mathbf{W}_j$  上投影完全由系数  $c_{j,n} = \langle f, \phi_{j,n} \rangle$ ,  $d_{j,n} = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$  决定。由定理 6.2.4<sup>122</sup>,  
<sup>123</sup> 可知, 这些系数可以通过滤波器组得到分解和重构, 对于正交小波, 分析滤波器组和综合滤波器组完全由两尺度序列决定。

定理 6.2.4 [Mallat] : 离散正交小波变换的分解关系为:

$$c_{j+1}(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(p-2n)c_j(p) \quad (6.2.36)$$

$$d_{j+1}(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(p-2n)c_j(p) \quad (6.2.37)$$

重建关系为:

$$c_j(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(n-2p)c_{j+1}(p) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(n-2p)d_{j+1}(p) \quad (6.2.38)$$

定理 6.2.4 描述的分解和重构关系可以用图 6.2-2 所示的完全重建滤波器组实现。 $h(-n)$ ,  $g(-n)$  是分析滤波器组,  $h(n)$ ,  $g(n)$  是综合滤波器组。

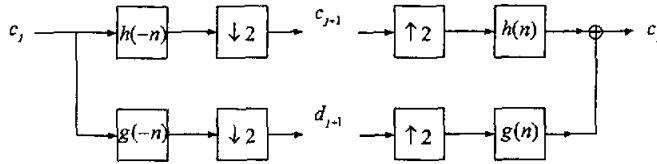


图 6.2-2 离散正交小波变换的分解与重构 (正交小波滤波器组)

设  $H(z) = H(e^{j\omega}) = \hat{h}(\omega)$ ,  $h(-n), g(-n), h(n), g(n)$  的  $z$  变换分别为  $H_0(z), H_1(z), F_0(z)$ ,  $F_1(z)$ 。由图 6.2-2 可得分析滤波器的  $z$  变换满足:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \tilde{H}(z) \\ H_1(z) &= zH(-z) \end{aligned} \quad (6.2.39)$$

综合滤波器的  $z$  变换满足:

$$\begin{aligned} F_0(z) &= H(z) \\ F_1(z) &= z^{-1}\tilde{H}(-z) \end{aligned} \quad (6.2.40)$$

上述四个滤波器仅由一个原型滤波器决定,  $H_0(z)$  满足功率对称条件 (2.3.1), 可见由离散正交小波变换得到的滤波器组是功率对称 QMF 组。但是由功率对称 QMF 组不一定能得到正交尺度函数和小波。因为第二章中的功率对称 QMF 组虽然能够满足  $|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2$  (此式是滤波器组完全重建的充分必要条件), 但是  $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$  不一定成立, 此式是产生正交小波尺度函数的必要条件。可以证明

全相位功率对称 QMF 组是一种正交小波滤波器组。在设计正交小波时，两尺度序列  $h(n)$  除了要满足定理 6.2.3 中的必要条件，还要求  $\hat{h}(\omega)$  在  $\omega=0$  处有多重零点，也就是小波要有一定阶次的消失距，这样可以使离散小波变换系数  $d_{j,n} = \langle f, \psi_{j,n} \rangle$  在  $f(t)$  的正则区幅度值小。功率对称滤波器组的设计中并不要求  $\hat{h}(\omega)$  在  $\omega=0$  处有多重零点<sup>[39, 124]</sup>，而要求阻带能量尽可能的小，由图 2.5-6 (c)，图 2.5-7 可以看出不同指标要求得到的各子带滤波器频率特性的差异。Daubechies 十讲<sup>[112]</sup>给出紧支撑正交小波的具体设计方法，这里就不赘述了。

当对数字图像进行小波变换时希望两尺度序列具有线性相位特性，遗憾的是 Daubechies 证明了实的紧支撑小波只有 Harr 小波具有线性相位特性<sup>[125]</sup>，但是 Harr 小波的消失距和正则性都不够理想。如果放弃小波的正交性，可以设计一种新的完全重建 FIR 滤波器组一双正交小波滤波器组如图 6.2-3。

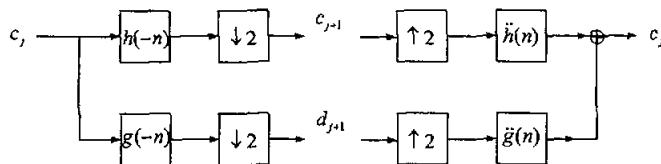


图 6.2-3 双正交小波滤波器组

完全重建滤波器  $h(n), g(n), \ddot{h}(n), \ddot{g}(n)$  可以生成两个尺度函数和两个小波函数，称之为对偶尺度和对偶小波，其傅里叶变换满足：

$$\hat{\phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \hat{\phi}(\omega), \quad \hat{\phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\ddot{h}}(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad (6.2.41)$$

$$\hat{\psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega) \hat{\phi}(\omega), \quad \hat{\psi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\ddot{g}}(\omega) \hat{\phi}(\omega) \quad (6.2.42)$$

时域关系为：

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \phi(2t-n), \quad \ddot{\phi}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ddot{h}(n) \phi(2t-n) \quad (6.2.43)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) \phi(2t-n), \quad \ddot{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ddot{g}(n) \phi(2t-n) \quad (6.2.44)$$

滤波器  $h(n), g(n), \ddot{h}(n), \ddot{g}(n)$  必须满足下述完全重建条件<sup>[103]</sup>：

$$\hat{h}^*(\omega) \hat{h}(\omega) + \hat{\ddot{h}}^*(\omega + \pi) \hat{\ddot{h}}(\omega + \pi) = 2 \quad (6.2.45)$$

和

$$\hat{g}(\omega) = a e^{-i(2l+1)\omega} \hat{\ddot{h}}^*(\omega + \pi), \quad \hat{\ddot{g}}(\omega) = a^{-1} e^{-i(2l+1)\omega} \hat{h}^*(\omega + \pi) \quad (6.2.46)$$

式中通常取  $a=1$ ,  $l=0$ 。

由于小波  $\psi(t)$  和  $\tilde{\psi}(t)$  是零均值的, 则  $\psi(0)=\tilde{\psi}(0)=0$ , 此式可以通过令  $\hat{g}(0)=\hat{\tilde{g}}(0)=0$  得到。因此  $\hat{h}(\pi)=\hat{\tilde{h}}(\pi)=0$ 。由 (6.2.45) 式可得  $\hat{h}'(0)\hat{h}(0)=2$ , 为了使  $h(n), \tilde{h}(n)$  得到的尺度函数  $\phi(t)$  和  $\tilde{\phi}(t)$  形成多分辨率分析, 令  $\hat{h}(0)=\hat{\tilde{h}}(0)=\sqrt{2}$ 。文献[112]证明了尺度函数  $\phi(t)$  和  $\tilde{\phi}(t)$  的傅里叶变换满足:

$$\hat{\phi}(\omega)=\prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}}, \quad \hat{\tilde{\phi}}(\omega)=\prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{\tilde{h}}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \quad (6.2.47)$$

$\hat{\phi}(\omega)$  和  $\hat{\tilde{\phi}}(\omega)$  可能是无限能量的, 因此必须对  $h(n), \tilde{h}(n)$  做进一步的限制, 保证  $\hat{\phi}(\omega)$  和  $\hat{\tilde{\phi}}(\omega)$  是有限能量函数的傅里叶变换。定理 6.2.5<sup>[126]</sup>给出完全重建 FIR 滤波器  $h(n), g(n), \tilde{h}(n), \tilde{g}(n)$  生成空间  $L^2(\mathbb{R})$  上双正交小波基的充分条件。

**定理 6.2.5** [Cohen, Daubechies, Feauveau]: 假设存在唯一的归一化的严格正三角多项式  $P(e^{j\omega})$  和  $\tilde{P}(e^{j\omega})$  满足:

$$\left| \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 P\left(e^{j\omega/2}\right) + \left| \hat{h}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 P\left(e^{j(\omega/2+\pi)}\right) = 2P(e^{j\omega}) \quad (6.2.48)$$

$$\left| \hat{\tilde{h}}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \tilde{P}\left(e^{j\omega/2}\right) + \left| \hat{\tilde{h}}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \tilde{P}\left(e^{j(\omega/2+\pi)}\right) = 2\tilde{P}(e^{j\omega}) \quad (6.2.49)$$

假设

$$\inf_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} |\hat{h}(\omega)| > 0, \quad \inf_{\omega \in [-\pi/2, \pi/2]} |\hat{\tilde{h}}(\omega)| > 0 \quad (6.2.50)$$

则 (6.2.47) 式定义的尺度函数  $\phi(t)$  和  $\tilde{\phi}(t)$  属于空间  $L^2(\mathbb{R})$ , 且满足双正交关系式

$$\langle \phi(t), \tilde{\phi}(t-n) \rangle = \delta(n) \quad (6.2.51)$$

小波集  $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$  和  $\{\tilde{\psi}_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$  形成空间  $L^2(\mathbb{R})$  上的 Riesz 基。

文献[126] 详细阐述了双正交小波滤波器组的设计方法。Daubechies 双正交小波具有最小支撑区最大消失距的特性。9/7 小波, 5/3 小波是 Daubechies 双正交小波中最著名的例子, 已成功应用于有损和无损静止图像压缩中。

### 本章小结:

本章介绍了加窗傅里叶变换和小波变换作时频分析的区别和联系。文中分析了加窗傅里叶变换如何用滤波器组实现。本章提出的全相位  $M$  带滤波器用于

线性 charr 信号的时频分析取得良好的效果，这是本文的第三个创新点。最后本章阐述了离散小波变换与 FIR 完全重建滤波器组之间的联系。正交小波滤波器组也是一种功率对称 FIR 完全重建 QMF 组，其中仅有 Harr 小波产生的正交小波滤波器组具有线性相位特性，双正交小波滤波器组是具有线性相位特性的完全重建滤波器组，小波滤波器组只是完全重建滤波器组的一个子集。

## 第七章 全文总结

本文研究内容是围绕 FIR 完全重建滤波器组展开的，文中各章既有区别又有联系，紧紧围绕滤波器组这条主线形成一个有机整体。

第一章主要介绍了多抽样率系统和滤波器组的基础知识及其在数字信号处理中的应用。阐述了抽取、内插、多相分解和数字滤波器组等一系列重要概念，详细分析了它们在时域和频域中的输入和输出关系。举例说明多率滤波器组在数字语音系统、语音信号和图像的子带编码、模拟语音加密、多路复用和多率自适应滤波中的应用。然后介绍了几种特殊的滤波器，如半带滤波器、 $M$  带滤波器、互补传递函数和加窗全相位 DFT 数字滤波器。这几种特殊的滤波器在后续章节中都有重要的应用。加窗全相位 DFT 数字滤波器的设计是本文的第一个创新点。加窗全相位 DFT 数字滤波器的频域特性比全相位 DFT 数字滤波器的频率特性又有很大提高，幅频响应等于或逼近频率采样值，通带纹波极小，阻带衰减极大，过渡带陡峭，零相位，滤波性能和实现的简洁性超过其他传统方法。它除了可以采用通常的卷积结构外，也可以采用直接频域网络实现，文中给出它的直接频域网络组成及其简化算法。这种网络具有实时自设计功能，可构成时变系统用于滤波器传递函数实时可变的场合，便于集成为频响和长度均可编程的通用零相位数字滤波器，是数字滤波器的一种新的设计理念和实现结构。实际上全相位 DFT 数字滤波器是加窗全相位 DFT 数字滤波器的一个特例。

第二章首先简要介绍了最大抽取滤波器组的发展历史。然后以二通道 FIR QMF 组为例介绍了滤波器组中存在的三种失真及其消除方法。FIR 功率对称滤波器组恰好可以同时完全消除这三种失真成为完全重建系统，但传统方法设计的功率对称滤波器组完全重建的精度不高，本章提出的全相位功率对称 FIR 完全重建 QMF 组可以大大提高重建精度，重建精度提高的根本原因是全相位半带滤波器的频率响应无过冲，可以得到高精度的谱分解，这是本文的另一个创新点。全相位功率对称 FIR 完全重建 QMF 组也是一种正交小波滤波器组。最后本章介绍了  $M$  通道 QMF 组的完全重建的充分必要条件及其应用，并以实例形式给出树形滤波器组和小波包滤波器组之间的区别和联系。传统的树形滤波器组强调各子带的过渡带陡峭，通带和阻带纹波小，而小波包滤波器组强调小波的消失距。虽然二者的设计思路不同，但都属于完全重建 FIR 滤波器组这个范畴。

第三章介绍了仿酉完全重建滤波器组，它是最大抽取完全重建滤波器组的一种特例。文中首先介绍仿酉矩阵的概念及其几个基本的仿酉系统，然后着重介绍了二通道仿酉 PR QMF 组的特性及其格形实现。仿酉特性是格形结构存在的

基础,也保证了滤波器组的完全重建性。格形实现为完全重建 QMF 组提供了新的设计思路,即基于格形结构的优化设计法。基于格形结构的优化设计法尤其适用于  $M$  通道完全重建 QMF 组的设计,文中给出了二通道和三通道仿酉完全滤波器组的设计方法和设计实例。值得指出的是第二章中的功率对称 FIR 完全重建 QMF 组虽然是从不同的角度推导出的,但它也具有仿酉特性及其相应的格形实现结构。格形结构优化法设计的仿酉完全重建滤波器组的最大优点是格形系数量化不影响系统的完全重建特性,但这种方法也有不好的一面,即优化为高度非线性优化,实现极为复杂,不易得到收敛解,原作者设计出一些格形系数,建议查表使用。

第四章介绍了一种具有线性相位特性的二通道完全重建 QMF 组及其格形实现结构。格形结构中每一级的低通和高通传递函数互为厄密特像,这是这种线性相位完全重建 QMF 组最为显著的特点。这种滤波器组同样要用基于格形系数的优化法设计,只是目标函数的选取与第三章中的目标函数有所不同。FIR 线性相位完全重建 QMF 组还有其他格形实现结构,更一般的结论见文献 [89, 91, 92, 93]。

第五章介绍了基于余弦调制的 FIR 完全重建滤波器组。余弦调制 FIR 完全重建滤波器组是  $M$  通道完全重建 QMF 组的最为简单的一种设计方法,它的  $M$  个分析滤波器由一个原型滤波器  $P_0(z)$  经余弦调制产生,在优化设计时只有  $P_0(z)$  的系数需要优化。即使  $P_0(z)$  具有线性相位特性,一般来说余弦调制分析滤波器不具有线性相位特性。如果放弃  $P_0(z)$  的线性相位特性,余弦调制滤波器组还会有其他优越性。余弦余弦调制 FIR 完全重建滤波器组和第三、四章中的完全重建滤波器组都需要用优化法设计,虽然他们都各有优点,但共同的缺点是设计过程极为复杂。值得注意的是  $M$  通道 ( $M \geq 3$ ) 完全重建 QMF 组可以用仿酉格形系数优化法和余弦调制滤波器组实现,这两种方法得到的滤波器组各子带的通带区域不同。

第六章介绍了加窗傅里叶变换和小波变换作时频分析的区别和联系。文中分析了加窗傅里叶变换如何用滤波器组实现。小波变换是时频分析的有力工具,但它不适合分析线性 charrp 信号。本章提出的全相位  $M$  带滤波器用于线性 charrp 信号的时频分析取得良好的效果,这是本文的第三个创新点。最后本章阐述了离散小波变换和 FIR 完全重建滤波器组之间的联系。文中指出正交小波滤波器组也是一种功率对称 FIR 完全重建 QMF 组,其中仅有 Harr 小波产生的正交小波滤波器组具有线性相位特性,所有双正交小波滤波器组都是具有线性相位的完全重建滤波器组。小波滤波器组只是完全重建滤波器组的一个子集,其设计方法和设计指标与前几章中的滤波器组不同。

## 参考文献

- [1] Sathe, V. , and Vaidyanathan, P.P. Effects of multirate systems on the statistical properties of random signals. *IEEE Trans. on Signal Processing*. 1993, 41(1): 131-146
- [2] Bellanger, M., Bonnerot, G., and Coudreuse, M. Digital filtering by polyphase network: application to sample rate alteration and filter bank. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.* 1976, 24(4):109-114
- [3] Rabiner, L.R., and Gold, B. *Theory and application of digital processing*. Englewood Cliffs: Prince Hall, 1975.
- [4] Digital Audio, *IEEE ASSP magazine*, Special issue, 1985, 2 (10)
- [5] Bloom, P.J. High-quality digital audio in the entertainment industry: an overview of achievements and challenges. *IEEE ASSP magazine*, 1985, 2(10): 2-25
- [6] Jayant, N.S. and Noll, P., *Digital coding of waveforms*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1984.
- [7] Crochiere, R.E., Webber, S.A. and Flanagan, J.L. Digital coding of speech in subbands. *Bell Syst. Tech. J.*, 1976, 55(10): 1069-1085
- [8] Crochiere, R.E., On the design of subband coders for low bit rate speech communication. *Bell System. Tech. J.*, 1977, 56(5-6): 747-771
- [9] Crochiere, R.E., Subband coding., *Bell System. Tech. J.*, 1981, 60(9): 1633-1654
- [10] Woods, J.W., *Subband image coding*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [11] Vetterli, M., Multidimensional sub-band coding : some theory and algorithms. *Signal Processing*, 1984, 6(4): 9-112
- [12] Safranek, R.J. MacKay, K., Jayant, N.S., Image coding based on selective quantization of the reconstruction noise in the dominant subband . *Proc. of the IEEE Int. Conf. on ASSP*,1988,4: 765-768
- [13] Woods, J. W., and O'Neil, S. D. Subband coding of images. *IEEE Tans. on Acoust. Speech and Signal Proc.* 1986, 34(10): 1278-1288
- [14] Smith, M.J.T., and Eddins, S.L., Analysis/synthesis techniques for subband image coding. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*, 1990, 38(8): 1446-1456
- [15] Cox, R.V., Bock, D.E., and Bauer, K.B., The analog voice privacy system. *AT&T Tech. J.*, 1987, 66(1-2);, 119-131
- [16] Bellanger, M. On computational complexity in digital transmultiplexer filters. *IEEE Trans. on Comm.*, 1982, 30(7): 1461-1465
- [17] Vetterli, M. Perfect transmultiplexers. In: Tokyo, Japan. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc.* 1986, 2567-2570

[18] Widrow, B., and Stearns, S.D. Adaptive signal processing . Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1985.

[19] Haykin, S. Adaptive filter theory. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1991.

[20] Gilloire, A. Experiments with subband acoustic echo cancellers for teleconferencing. In: Dallas. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc. 1987.4, 2141-2144.

[21] Gilloire, A., and Vetterli, M. Adaptive filtering in subband with critical sampling: analysis, experiments, and applications to acoustic echo cancellation. IEEE Trans. on Signal Processing , 1992, 40(8): 1862 - 1875

[22] Sathe, V. and Vaidyanathan, P.P. Efficient adaptive identification and equalization of band-limited channels using multirate/ multistage FIR filters. Proc. of the Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. 1990.11

[23] Sathe, V. and Vaidyanathan, P.P. Analysis of the effects of multirate filters on stationary random inputs, with application in adaptive filtering. In: Toronto, Canada. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc. 1991(5): 1681-1684

[24] Shynk, J.J. Frequency-domain and multirate adaptive filtering. IEEE Signal Processing Magazine. 1992, 9(1): 14-37

[25] Mintzer, F. On half-band, third-band and Nth band FIR filters and their design. IEEE Tans. on Acoust. Speech and Signal Proc. 1982, 30(10): 734-738

[26] Crochiere,R.E. and Rabiner, L.R. Multirate Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, Prentice Hall,1983.

[27] Vaidyanathan,P.P. Design and implementation of digital FIR filters. in handbook on Digital Signal Processing. New York, Academic,Press. 1987,55-172

[28] Vaidyanathan P.P. and Nguyen, T.Q. A trick for the design of FIR half-band filters. IEEE Trans. Circuits Syst.,1987,34(5): 297-300

[29] Ansari, R., and Liu, Bede. Interploators and decimators as periodically time varying filters. Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems.1981,447-450

[30] Mueller, K.H. A new approach to optimum pulse shaping in sampled systems using time-domain filtering. Bell Syst. Tech. J., 1973, 52(5-6): 723-729

[31] 侯正信, 全相位 DFT 数字滤波器, 电子学报, 2003. 4: 539-543

[32] Oppenheim, A.V. and Schafer, R.W. Discrete-Time Signal Processing. New Jersey, Prentice-Hall, 1989, 313-317, 444-488

[33] Croisier, A., Esteban, D., and Galand, C. Perfect channel splitting by use of interpolation /decimation/tree decomposition techniques. In: Patras, Greece. Int. Symp. on Info., Circuit and Systems, 1976.

[34] Johnston, J.D. A filter family designed for use in quadrature mirror filter banks.

Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc., 1988.4, 291-294

[35] Jain, V.K., and Crochiere, R.E. Quadrature mirror filter design in the time domain. IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.. 1984, 32(4):353-361

[36] Fettweis, A., Nossek, J.A., and Meerkotter, K. Reconstruction of signals after filtering and sampling rate reduction. IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.. 1985, 33(8):893-902

[37] Galand, C.R., and Nussbaumer, H.J. New quadrature mirror filter structures. IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.. 1984, 32(6): 522-531

[38] Galand, C.R., and Nussbaumer, H.J. Quadrature mirror filters with perfect reconstruction and reduced computational complexity. Proc. of the IEEE Int. Conf. on Acous. Speech and Signal Proc., 1985.4, 525-528

[39] Smith, M.J.T., and Barnwell III, T.P. A procedure for designing exact reconstruction filter banks for tree structured subband coders. In: San Diego. Proc. of the IEEE Int. Conf. on Acous. Speech and Signal Proc., 1984.5, 27.1.1-27.1.4

[40] Mintzer, F. Filters for distortion-free two-band multirate filter banks. IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.. 1985, 33(6): 626-630

[41] Gmez, F. Chebyshev design of filters for subband coders. IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.. 1988, 36(2): 182-185

[42] Nussbaumer, H.J. Pseudo QMF filter bank. IBM Tech. disclosure Bulletin. 1981, 24(11): 3081-3087

[43] Rothweiler, J.H. polyphase quadrature filters, a new subband coding technique. In: Boston. Proc. of the IEEE Int. Conf. on ASSP. 1983.4, 1980-1983

[44] Chu, P.L. quadrature mirror filter design for an arbitrary number of equal bandwidth channels. IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.. 1985, 33(2): 203-218

[45] Masson, J. and Picel, Z. Flexible design of computationally efficient nearly perfect QMF filtr bnks. In: Tampa, FL. Proc. of the IEEE Int. Conf. on ASSP. 1985.5, 14.7.1-14.7.4

[46] Cox, R.V. The design of uniformly and nonuniformly spaced pseudo QMF. IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.. 1986, 34(10): 1090-1096

[47] Ramstad, T.A. Analysis/ synthesis filter banks with critical sampling. In: Florence. International conf. on Digital Signal Processing. 1984.9

[48] Smith, M.J.T. and Barnwell III, T.P. A unifying framework for analysis/synthesis systems based on maximally decimated filter banks. In: FL. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc.. 1985.5, 521-524

[49] Vetterli, M. Splitting a signal into subsampled channels allowing perfect reconstruction. In: Paris, France. IASTED Conf. Appl. Signal Proc. and digital

filtering. 1985.6

[50]Princen, J.P. and Bradley, A.P. Analysis/synthesis filter bank design based on time domain aliasing cancellation. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*. 1986, 34(10): 1152-1161

[51]Wackersreuther, G. Some new aspects of filters for filter banks. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*. 1986, 34(12): 1182-1200

[52]Vaidyanathan, P.P. Theory and design of  $M$ -channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary  $M$ , having perfect reconstruction property. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*. 1987, 35(4): 476-492

[53]Vaidyanathan, P.P. Quadrature mirror filter banks,  $M$ -band extensions and perfect-reconstruction technique. *IEEE ASSP magazine*, 1987, 4(6): 4-20

[54]Nguyen, T.Q. and Vaidyanathan, P.P. Maximally decimated perfect-reconstruction FIR filter banks with pairwise mirror-image analysis (and synthesis) frequency response. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*. 1988, 36(5): 693-706

[55]Viscito, E., and Allebach, J. The design of tree-structured  $M$ -channel filter banks using perfect reconstruction filter blocks. In: New York. Proc. of the IEEE Int. Conf. on ASSP. 1988.4, 1475-1478

[56]Malvar, H.S. Modulated QMF filter banks with perfect reconstruction. *Electronics letters*. 1990, 26(6): 906-907

[57]Koilpillai, R.D. and Vaidyanathan, P.P. New results on cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction. In: Toronto, Canada. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc.. 1991.5, 1793-1796

[58]Koilpillai, R.D. and Vaidyanathan, P.P. Cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction. *IEEE Trans. on Signal Processing*. 1992, 40(4): 770-783

[59]Ramstad, T.A. Cosine modulated analysis-synthesis filter bank with critical sampling and perfect reconstruction. In: Canada. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc.. 1991.5, 1789-1792

[60]Cassereau, P. A new class of orthogonal transforms for image processing. In: Cambridge. S.M. thesis, Dept. EECS, Mass. Inst. Technol. 1985.5

[61]Malvar, H.S. Lapped transforms for efficient transform/subband coding. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*. 1990, 38(4): 969-978

[62]Malvar, H.S., and Staelin, D.H. The LOT: Transform coding without blocking effects. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*. 1989, 37(4): 553-559

[63]Nayebi, K., Barnwell, III, T.P. and Smith, M.J.T. A general time domain analysis and design framework for exact reconstruction FIR analysis/synthesis filter banks. In: New Orleans. Proc. IEEE Int. Sym. Circuits and Sys.. 1990.5, 2022-2025

[64] Hoang, P.H. and Vaidyanathan, P.P. Nonuniform multirate filter banks: theory and design. In: Portland, Oregon. Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems. 1989.5, 371-374

[65] Kovačević, J., and Vetterli, M. Perfect reconstruction filter banks with rational sampling rate changes. In: Toronto, Canada. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc.. 1991.5, 1785-1788

[66] Nayebi, K., Barnwell, III, T.P. and Smith, M.J.T. The design of perfect reconstruction nonuniform band filter banks. In: Toronto, Canada. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc.. 1991.5, 1781-1784

[67] Nayebi, K., Barnwell, III, T.P. and Smith, M.J.T. Design of low delay FIR analysis-synthesis filter bank systems. In: The Johns Hopkins Univ. Proc. 25<sup>th</sup> Annual Conf. on Information Sciences and systems. 1991, 233-238

[68] Padmanabhan, M. and Martin, K. Some further results on modulated/extended lapped transforms. In: San Francisco, CA. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc.. 1992.5, 265-268

[69] Horng, B.R., Samueli, H. and Willson, A.N., The design of low-complexity linear phase FIR filter banks using powers-of-two coefficients with an application to subband image coding. IEEE Trans. Circuits and Syst. For Video Technology. 1991, 1(12): 318-324

[70] Horng, B.R. and Willson, A.N. Lagrange multiplier approaches to the design of two-channel perfect reconstruction linear phase FIR filter banks. IEEE Trans. Signal Processing. 1992, 40(2): 364-374

[71] Mian, G.A. and Nainer, A.P. A fast procedure to design equiripple minimum-phase FIR filters. IEEE Trans. on Circuits and Sys. 1982, 29(5): 327-331

[72] Vetterli, M. Filter banks allowing for perfect reconstruction. Signal processing. 1986, 10(4): 219:244

[73] Swaminathan, K. and Vaidyanathan, P.P. Theory and design of uniform DFT, parallel, quadrature mirror filter banks. IEEE Trans. on Circuits and Systems. 1986, 33(12): 1170-1191

[74] Marshall, Jr., T.G. Structures for digital filter banks. In: Pairs. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Proc.. 1982.4, 315-318

[75] Vaidyanathan, P.P. and Mitra, S.K. Polyphase networks, block digital filtering, LPTV systems, and alias-free QMF banks: a unified approach based on pseudocirculants. IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.. 1988, 36(5): 381-391

[76] Koilpillai, R.D., Nguyen, T.Q., and Vaidyanathan, P.P. Some results in the theory of cross-talk free transmultiplexers. IEEE Trans. on Signal Processing. 1991,

39(10): 2174-2183

[77] Brune, O. Synthesis of a finite two terminal network whose driving point impedance is a prescribed function of frequency. *J. Math. and Phys.*, 1931, 10: 191-235

[78] Darlington, S. Synthesis of reactance four-poles. *J. Math. and Phys.*, 1939, 18(9): 275-353

[79] Antoniou, A. *Digital filter: analysis and design*. McGraw Hill Book Co. 1979

[80] Deprettere, E., Dewilde, P. Orthogonal cascade realization of real multiport digital filters. *Int. J. Circuit Theory and Appl.*, 1980, 8: 245-277

[81] Vaidyanathan, P.P. and Mitra, S.K. Low passband sensitivity digital filters: A generalized viewpoint and synthesis procedures. *Proc. of the IEEE*. 1984, 72(4): 404-423

[82] Vaidyanathan, P.P. A unified approach to orthogonal digital filters and wave digital filters, based on LBR two-pair extraction. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. 1985, 32(7): 673-686

[83] Vaidyanathan, P.P. The discrete-time bounded-real lemma in digital filtering. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. 1985, 32(9): 918-924

[84] Vaidyanathan, P.P. and Nguyen, T.Q. Eigenfilters: a new approach to least-squares FIR filter design and applications including Nyquist filters. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. 1987, 32(1): 11-23

[85] Karlsson, G., and Vetterli, M. theory of two-dimensional multirate filter banks. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*, 1990, 38(6): 925-937

[86] Golub, G.H. and Van Loan, C.F. *Matrix computations*. Johns Hopkins Univ. Press, 1989

[87] Vaidyanathan, P.P. and Hong, P.Q. Lattice structures for optimal design and robust implementation of two-channel perfect reconstruction QMF banks. *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*, 1988, 36(1): 81-94

[88] Press, W.H. Flannery, B.P. and Teukolsky, S.A. *Numerical recipes*. Cambridge, Univ. Press, 1989

[89] Nguyen, T.Q., and Vaidyanathan, P.P. Two-channel perfect reconstruction FIR QMF structures which yield linear phase FIR analysis and synthesis filters. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1989, 37 (5): 676-690

[90] Vetterli, M., and Le Gall, D. Perfect reconstruction filter banks satisfying symmetry constraints. *Proc. Princeton Conf. Inform. Sci. Syst.*, 1988.5. 670-675

[91] Vetterli, M., and Le Gall, D. Perfect reconstruction FIR filter banks: some properties and factorizations. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1989, 37(6): 1057-1071

[92] Nguyen, T.Q., and Vaidyanathan, P.P. Structures for M-channel perfect reconstruction FIR QMF banks which yield linear-phase analysis filters. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1990, 38 (5): 433-446

[93] Soman, A.K., and Vaidyanathan, P.P. Linear phase paraunitary filter banks: theory, factorizations and applications. Tech. report, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1992.5

[94] Malvar, H.S. Extended lapped transform: fast algorithms and applications. In: Toronto, Canada. *Proc. IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1991, 1797-1800

[95] Nguyen, T.Q. A class of generalized cosine-modulated filter bank,. In: San Diego. *Proc. IEEE Int. Symp., Circuits and Sys.*, 1992.5, 943-946

[96] Mau, J. Perfect reconstruction modulated filter banks. *Proc. Of the IEEE Int. Conf. on ASSP*, 1992, 4(6):273-276

[97] Malvar, H.S. The LOT: A link between block transform coding and multirate filter banks. In: Espoo, Finland. *Proc. IEEE Int. Symp. Circ. And Syst.*, 1988.6. 835-838

[98] Wilson, K.G. Generalized Wannier functions. Technical report, Cornell University, 1987

[99] Gabor, D. Theory of communication. *J. Inst. Elec. Eng.*, 1946, 93:429-457

[100] Rabiner, L.R. and Schafer, R.W. Digital processing of speech signals. Englewood Cliffs: Prentice Hall, Inc. 1978

[101] Portnoy, M.R. Time-frequency representation of digital signals and systems based on short-time Fourier Analysis. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1980, 28 (2): 55-69

[102] Oppenheim, A.V. and Schafer, R.W. Discrete-time signal processing. Englewood Cliffs: Prentice Hall, Inc. 1989

[103] 马拉特, 信号处理的小波导引, 北京: 机械工业出版社, 2003, 30 (英文版)

[104] Joyce Van de Vegte, *Fundamentals of Digital Signal processing*. Beijing, Publishing House of Electronics Industry. 2003

[105] Grossman, A. and Morlet, J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math.* 1984, 15: 723-736

[106] Meyer, Y. Ondelettes et functions splines Seminaire EDP, Ecole Polytechnique, Paris, 1986

[107] Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. on Pure and Appl. Math.*, 1988, 4(11): 909-996

[108] Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet

representation. *IEEE Trans. on Pattern Anal. And Machine Intell.* 1989, 11(7): 674-693

[109] Mallat, S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ . *Trans. of Amer. Math. Soc.*, 1989, 315(9): 69-87

[110] Strang, G. Wavelets and dilation equations: a brief introduction. *SIAM review*. 1989, 31(12): 614-627

[111] Daubechies, I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Trans. on Info. Theory*. 1990, 36(12): 961-1005

[112] Daubechies, I. *Ten lectures on wavelets*, SIAM, CBMS series, 1992.4

[113] Coifmann, R., Meyer, Y. and Quake, S. Signal processing with wavelet packets. *Numerical Algorithm Research Group*, Yale Univ., 1990

[114] Chui, C.K. *An introduction to wavelets*. Academic Press, 1992

[115] Nelson, G.A. Pfeifer, L.L., and Wood, R.C. High speed octave band digital filtering. *IEEE Trans. on Audio and Electroacoust.* 1972, 20(5): 8-65

[116] Schafer, R.W., Rabiner, L.R. and Herrmann, O. FIR digital filter banks for speech analysis. *Bell Syst. Tech. J.* 1975, 54(5): 531-544

[117] McGee, W.F. and Zhang, G. Logarithmic filter banks. In: *New Orleans. Proc. IEE Int. Symp. Circuits and Sys.* 1990.5, 661-664

[118] Flanagan, J.L. *Speech analysis, synthesis and perception*. Springer-Verlag, New York, 1972

[119] 杨福生, 小波变换的工程分析与应用, 北京, 科学出版社, 1999

[120] Meyer, Y. *Wavelets and Operators. Advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1992

[121] Mallat., S. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989, 315(9): 69-87

[122] Mallat, S. An efficient image representation for multiscale analysis. In: *Lake Taho. Proc. of Machine Vision Conference*. 1987.2

[123] Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Trans. Patt. Anal. And Mach. Intell.* 1987, 1(7): 674-693

[124] Vaidyanathan, P.P. and Hoang, P.Q. Lattice structures for optimal design and robust implementation of two-channel perfect reconstruction filter banks. *IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Proc.* 1988, 36(1): 81-94

[125] Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. on Pure and Appl. Math.*, 1988, 41(12): 909-996

[126] Cohen, A. Daubechies, I. and Feauveau, J.C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Commun. on Pure and Appl. Math.*, 1992, 45: 485-560

## 发表论文和科研情况

### 发表论文情况：

- [1] 侯正信, 徐妮妮, 加窗全相位 DFT 数字滤波器, 已被《天津大学报》录用。
- [2] 侯正信, 徐妮妮, 陈宏, 李雪蕾。任意 2<sup>n</sup> 阶列率递增顺序斜变换及其快速算法与应用, 已被《信号处理》录用, 2005. 3 见刊。
- [3] 徐妮妮, 侯正信, 全相位半带滤波器及其在二通道完全重建正交镜像滤波器组设计中的应用, 已被《天津大学报》录用, 2005. 3 见刊。
- [4] Hou, zhengxin; Xu, Nini; Chen, Hong; Li, Xuelei. Fast Slant Transform with Sequency Increment and Its Application in Image Compression. ICSP'04, 2004, 65-68. Ei: 04478468933.
- [5] 徐妮妮, 侯正信, 全相位 DFT 数字滤波器, 中国, 200320112449.4。

### 科研情况

- ◆ 参与国家自然科学基金“二维提升小波变换和可变块运动补偿视频压缩编码技术(60302018)”的科研工作。

## 致谢

衷心感谢我的导师侯正信教授！在侯老师的指导下完成了论文的撰写。侯老师严谨的治学态度，渊博的学识、崇高的敬业精神是我今后生活的榜样。侯老师把我带入新的知识领域，使我感受到学习新知识的趣味性，我未来的工作和生活也会因此而丰富多彩。千言万语难以道尽导师对我的教导之恩！

我还要感谢王兆华教授和王安国副教授，二位老师都曾很热心地帮我解惑。在天大五年多的时间中遇到过很多良师益友，在此向他们表示衷心的感谢！

最后要感谢我的爱人，他的辛勤工作为我创造了安心读书的条件。