《机械工程控制基础》（修订本）．陈康宁（主编）．西安交通大学出版社，1997年11月第1版

习题解答

第1章 绪　论

复习思考题

1. 控制论的中心思想是什么？

解答：它抓住一切通讯和控制系统所共有的特点，站在一个更概括的理论高度揭示了它们的共同本质，即通过信息的传递、加工处理和反馈来进行控制，这就是控制论的中心思想。

2. 机械工程控制论的研究对象及任务是什么?

解答：机械工程控制论实质上是研究机械工程中广义系统的动力学问题。具体地说，它研究的是机械工程技术中的广义系统在一定的外界条件（即输入或激励，包括外加控制与外加干扰）作用下，从系统的一定的初始状态出发，所经历的由其内部的固有特性（即由系统的结构与参数所决定的特性）所决定的整个动态历程：研究这一系统及其输入、输出三者之间的动态关系。

从系统、输入、输出三者之间的关系出发，根据已知条件与求解问题的不同，机械工程控制论的任务可以分为以下五方面

（1）已知系统和输入求系统的输出（响应)，并通过输出来研究系统本身的有关问题，即系统分析问题;

（2）已知系统和系统的理想输出，设计输入，使输出尽可能符合给定的最佳要求，即最优控制问题;

（3）已知输入和理想输出，设计系统，使得输出尽可能符合给定的最佳要求，即最优设计问题;

（4）系统的输入和输出已知，求系统的结构与参数，即建立系统的数学模型，即系统辨识问题;

（5）系统和输出已知，识别输入或输入中的有关信息，此即滤波与预测问题。

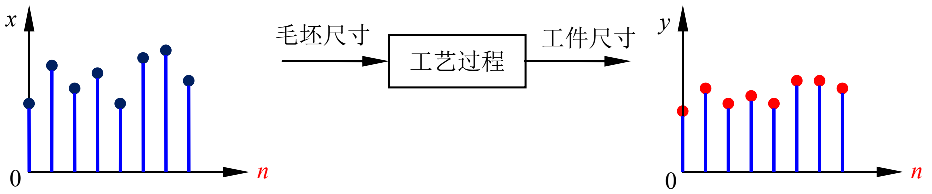
3. 什么是信息及信息的传递？试举例说明。

解答：

信息：一切能表达一定含义的信号、密码、情报和消息。

信息传递：是指信息在系统及过程中以某种关系动态地传递，或称转换。

如图题 1-1 所示机床加工工艺系统，将工件尺寸作为信息，通过工艺过程的转换，加工前后工件尺寸分布有所变化，这样，研究机床加工精度问题，可通过运用信息处理的理论和方法来进行。



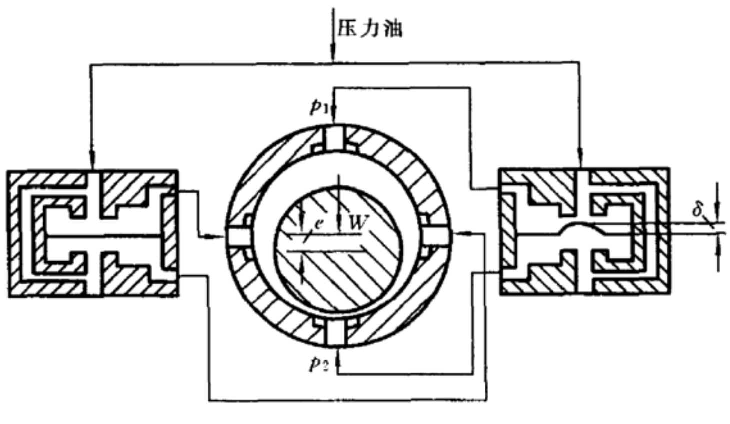
图题 1-1　工艺过程中信息的传递

4.　么是反馈及反馈控制？试举例说明。

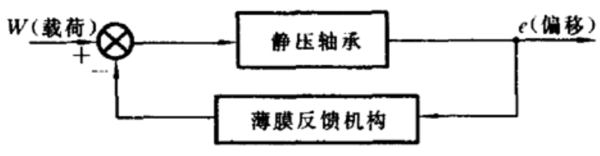
解答：

反馈：所谓信息的反馈，就是把一个系统的输出信号不断直接地或经过中间变换后全部或部分地返回，再输入到系统中去。如果反馈回去的讯号（或作用）与原系统的输入讯号（或作用）的方向相反，则称之为“负反馈”；反馈回去的信号（或作用）与系统的输入信号（或作用）的方向相同，则称之为“正反馈”。

举例 1：图题 1-2 是一个薄膜反馈式径向静压轴承。图题 1-2(a)是其结构示意图，图题 1-2(b)是其方框图。当主轴受到负荷 W 后，产生偏移 e，因而使轴承下油腔压力 p_2 增加，轴承上油腔压力 p_1 减小，这样，与之相通的薄膜反馈机构的下油腔压力亦随之增加，上油腔压力则减小，从而使薄膜向上产生凸起变形 δ，因此薄膜下半部高压油输入轴承的通道扩大，液阻下降，从而使轴承下部压力上升。而基于与此相反的理由，轴承上半部压力减小，于是轴承下半部油腔产生反作用力，与负荷相平衡，以减少偏移量 e，甚至完全消除偏移量 e，即达到“无穷大”的支承刚度。



(a)



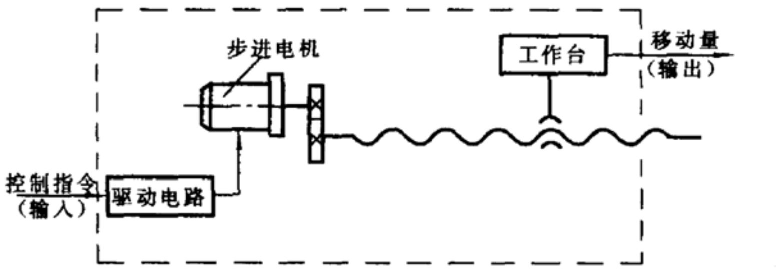
(b)

图题 1-1　静压轴承薄膜反馈控制系统

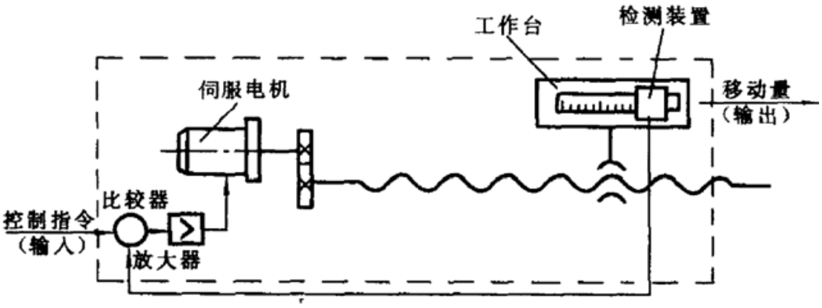
举例 2：以数控机床工作台的驱动系统为例。

开环控制：一种简单的控制方案是根据控制装置发出的一定频率和数量的指令脉冲驱动步进电机，以控制工作台或刀架的移动量，而对工作台或刀架的实际移动量不作检测，其工作原理如图 1-5(a)所示。这种控制方式简单，但问题是从驱动电路到工作台这整个“传递链”中的任一环的误差均会影响工作台的移动精度或定位精度。

闭环控制：为了提高控制精度，采用图 1-1(b)所示的反馈控制，以检测装置随时测定工作台的实际位置(即其输出信息)；然后反馈送回输入端，与控制指令比较，再根据工作台实际位置与目的位置之间的误差，决定控制动作，达到消除误差的目的。



(a)



(b)

图题 1-2　两种控制方式

5.　日常生活中有许多闭环和开环控制系统，试举例说明。

解答：普通电风扇、普通洗衣机、全自动洗衣机在顺序控制模式下、电动搅拌机等均属开环控制。

电冰箱、电饭锅、空调等均属闭环控制。

第2章 拉普拉斯变换的数学方法

复习思考题

1. 拉氏变换的定义是什么？Equation Chapter 2 Section 1

解：有时间函数 $f(t)$，$t\geqslant 0$，则 $f(t)$的拉氏变换记作：$L[f(t)]$或 $F(s)$，并定义为

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\mathrm{d}t \tag{2-1}$$

s 为复数，$s=\sigma + j\omega$。称 $f(t)$为原函数，$F(s)$为象函数。若式(2-1)的积分收敛于一确定的函数值，则 $f(t)$的拉氏变换 $F(S)$存在，这时 $f(t)$必须满足：

①在任一有限区间上，$f(t)$分段连续，只有有限个间断点，如图 2-f1 的 ab 区间。

②当 $t\to\infty$时，$f(t)$的增长速度不超过某一指数函数，即满足

$$[f(t)]\leqslant Me^{at}$$

式中 M、a 均为实常数。这一条件是使拉氏变换的被积函数 $f(t)e^{-st}$绝对收敛，由下式看出

因为 $$\left|f(t)e^{-st}\right| = \left|f(t)\right|\left|e^{-st}\right| = \left|f(t)\right|e^{-\sigma t}$$

所以 $$\left|f(t)e^{-st}\right|\leqslant Me^{at}e^{-\sigma t} = Me^{-(\sigma-a)t}$$

只要是在复平面上对于 $\mathrm{Re}(s)>a$ 的所有复数 s，都能使式(2-1)的积分绝对收敛，则 $\mathrm{Re}(s)>a$ 为拉氏变换的定义域，a 称作收敛坐标，见图 2-f2。

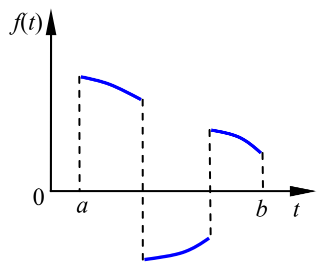


图 2-f1 在[a，b]上分段连续

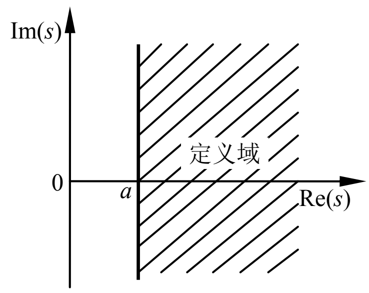


图 2-f2 拉氏变换定义域

2. $\delta(t)$，$1(t)$，t，$\sin\omega t$，$\cos\omega t$，e^{at}，t^n 的拉氏变换是什么？

解： $L[\delta(t)] = \int_0^{\infty}\delta(t)e^{-st}\mathrm{d}t = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1$

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty}1(t)e^{-st}\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$L[\sin\omega t]=\int_0^\infty \sin\omega t\cdot e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$L[\cos\omega t]=\int_0^\infty \cos\omega t\cdot e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$L[e^{at}]=\int_0^\infty e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right|_0^\infty=\frac{1}{s-a}$$

$$L[t^n]=\int_0^\infty t^n e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

3. 拉氏变换的线性性质、微分定理、积分定理、时域的位移定理、复域位移定理、初值定理、终值定理、卷积定理是什么？如何应用？

解答：

（1）线性性质：若有常数 K_1，K_2，函数 $f_1(t)$，$f_2(t)$，且 $L[f_1(t)]=F_1(s)$，$L[f_2(t)]=F_2(s)$，则

$$[K_1f_1(t)+K_2f_2(t)]=K_1L[f_1(t)]+K_2L[f_2(t)]=K_1F_1(s)+K_2F_2(s) \tag{2-2}$$

（2）微分定理：若 $f(t)$的拉氏变换为 $F(s)$，则

$$L[f'(t)]=sF(s)-f(0) \tag{2-3}$$

$f(0)$为 $t=0$ 时的 $f(t)$值。

此定理需考虑在 $t=0$ 处是否有断点。如果在 $t=0$ 处有断点，$f(0^-)\neq f(0^+)$，则该定理需修改成

$$L_+[f'(t)]=sF(s)-f(0^+)$$

$$L_-[f'(t)]=sF(s)-f(0^-)$$

$f(0^+)$为由正向使 $t\to0$ 时的 $f(t)$值；$f(0^-)$为由负向使 $t\to0$ 时的 $f(t)$值；

进而可推出 $f(t)$的各阶导数的拉氏变换：

$$\begin{aligned}L[f''(t)]&=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)\\&\vdots\\L[f^{(n)}(t)]&=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\end{aligned} \tag{2-4}$$

式中 $f^{(i)}(0)$（$0<i<n$）表示 $f(t)$的 i 阶导数在 $t=0$ 时的取值。

如果在 $t=0$ 处有断点，$f(0^-)\neq f(0^+)$，则该定理需修改成

$$\begin{aligned}L_+[f''(t)]&=s^2F(s)-sf(0^+)-f'(0^+)\\&\vdots\\L_+[f^{(n)}(t)]&=s^nF(s)-s^{n-1}f(0^+)-s^{n-2}f'(0^+)-\cdots-f^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+)\\L_-[f''(t)]&=s^2F(s)-sf(0^-)-f'(0^-)\\&\vdots\\L_-[f^{(n)}(t)]&=s^nF(s)-s^{n-1}f(0^-)-s^{n-2}f'(0^-)-\cdots-f^{(n-2)}(0^-)-f^{(n-1)}(0^-)\end{aligned}$$

式中 $f^{(i)}(0^+)$（$0<i<n$）表示 $f(t)$的 i 阶导数在 t 从正向趋近于零时的取值。$f^{(i)}(0^-)$（$0<i<n$）表示 $f(t)$的 i 阶导数在 t 从负向趋近于零时的取值

当初始条件均为零时，即

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$$

则有

$$L\left[f'(t)\right]=sF(s)$$
$$L\left[f''(t)\right]=s^2F(s)$$
$$\vdots$$
$$L\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)$$

（3）积分定理

若 $f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$，则

$$L\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0) \tag{2-5}$$

是对不定积分的拉普拉斯变换。式中 $f^{(-1)}(0)=\int f(t)\mathrm{d}t$，是在 $t=0$ 时的值。

如果 $f(t)$ 在 $t=0$ 处包含一个脉冲函数，则 $f^{(-1)}(0^+)\neq f^{(-1)}(0^-)$，此时，必须将上述定理修正如下：

$$L_+\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0^+)$$

$$L_-\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0^-)$$

式中 $f^{(-1)}(0^+)=\int f(t)\mathrm{d}t$，是在 $t=0^+$ 时的值；$f^{(-1)}(0^-)=\int f(t)\mathrm{d}t$，是在 $t=0^-$ 时的值。

对于定积分的拉普拉斯变换，如果 $f(t)$ 是指数级的，则上述定理修改如下：

$$L\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{F(s)}{s}$$

如果 $f(t)$ 在 $t=0$ 处包含一个脉冲函数，则 $\int_{0^+}^t f(t)\mathrm{d}t\neq\int_{0^-}^t f(t)\mathrm{d}t$，此时

$$L_+\left[\int_{0^+}^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{L_+\left[f(t)\right]}{s}$$

$$L_-\left[\int_{0^-}^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{L_-\left[f(t)\right]}{s}$$

依此类推

$$L\left[\iint f(t)(\mathrm{d}t)^2\right]=\frac{1}{s^2}F(s)+\frac{1}{s^2}f^{(-1)}(0)+\frac{1}{s}f^{(-2)}(0)$$

$$L\left[\int\int\cdots\int f(t)(\mathrm{d}t)^n\right]=\frac{1}{s^n}F(s)+\frac{1}{s^n}f^{(-1)}(0)+\frac{1}{s^{n-1}}f^{(-2)}(0)+\cdots+\frac{1}{s}f^{(-n)}(0)$$

如果 $\int_{0^+}^t f(t)\mathrm{d}t\neq\int_{0^-}^t f(t)\mathrm{d}t$，该定理也要修正成

$$L_{\pm}\left[\iint\cdots\int f(t)(\mathrm{d}t)^n\right]=\frac{1}{s^n}F(s)+\frac{1}{s^n}f^{(-1)}(0^{\pm})+\frac{1}{s^{n-1}}f^{(-2)}(0^{\pm})+\cdots+\frac{1}{s}f^{(-n)}(0^{\pm})$$
$$=\frac{1}{s^n}F(s)+\frac{1}{s^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int\cdots\int f(t)(\mathrm{d}t)^k\right]_{t=0^{\pm}}$$

（4）时域的位移定理

若$f(t)$的拉氏变换为$F(s)$，对任一正实数a，有

$$L[f(t-a)]=e^{-as}\cdot F(s) \tag{2-6}$$

$f(t-a)$为延迟时间a的函数$f(t)$，当$t<a$时，$f(t)=0$。

（5）复域位移定理

$f(t)$的拉氏变换为$F(s)$。对任一常数a（实数或复数），有

$$L\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a) \tag{2-7}$$

（6）初值定理

若函数$f(t)$及其一阶导数都是可拉氏变换的，则函数$f(t)$的初值为

$$f(0^+)=\lim_{t\to 0+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s) \tag{2-8}$$

即原函数$f(t)$在自变量t趋于零（从正向趋于零）时的极限值，取决于其象函数$F(s)$的自变量s趋于无穷大时$sF(s)$的极限值。

（7）终值定理

若函数$f(t)$及其一阶导数都是可拉氏变换的，并且除在原点处唯一的极点外，$sF(s)$在包含$j\omega$轴的右半s平面内是解析的（这意味着当$t\to\infty$时$f(t)$趋于一个确定的值），则函数$f(t)$的的终值为

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s) \tag{2-9}$$

（8）卷积定理

若$F(s)=L\left[f(t)\right]$，$G(s)=L\left[g(t)\right]$

则有

$$L\left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]=F(s)\cdot G(s) \tag{2-10}$$

式中，积分$\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}\lambda=f(t)*g(t)$，称作$f(t)$和$g(t)$的卷积。

4. 用部分分式法求拉氏反变换的方法。

解答：

（1）$F(s)$无重极点的情况

$F(s)$总是能展开为下面简单的部分分式之和：

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K_1}{s-p_1}+\frac{K_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n} \tag{2-11}$$

式中K_1、K_2、…、K_n为待定系数（系数K_i为常数，称作极点$s=p_i$上的留数）。

$$K_1=\frac{B(s)}{A(s)}(s-p_1)\bigg|_{s=p_1}$$

$$K_2=\frac{B(s)}{A(s)}(s-p_2)\bigg|_{s=p_2}$$

$$K_i=\frac{B(s)}{A(s)}(s-p_i)\bigg|_{s=p_i}=\frac{B(p_i)}{A'(p_i)}\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2-12}$$

式中 p_i 为 $A(s)=0$ 的根，$A'(p_i)=\frac{\mathrm{d}A(s)}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=p_i}$。

求得各系数后，则 $F(s)$可用部分分式表示

$$F(s)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{B(p_i)}{A'(p_i)}\cdot\frac{1}{s-p_i}\right]\tag{2-13}$$

因 $L^{-1}\left[\frac{1}{s-p_i}\right]=e^{p_it}$

从而可求得 $F(s)$的原函数为

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{B(p_i)}{A'(p_i)}e^{p_it}\right]\tag{2-14}$$

当 $F(s)$的某极点等于零，或为共轭复数时，同样可用上述方法。注意，由于 $f(t)$是个实函数。若 p_1 和 p_2 是一对共轭复数极点，那么相应的系数 K_1 和 K_2 也是共轭复数，只要求出 K_1 或 K_2 中的一个值，另一值即可得。

（2）$F(s)$有重极点的情况

假设 $F(s)$有 r 个重极点 p_1，其余极点均不相同，则

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{a_n(s-p_1)^r(s-p_{r+1})\cdots(s-p_n)}$$
$$=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1r}}{s-p_1}+\frac{K_{r+1}}{s-p_{r+1}}+\frac{K_{r+2}}{s-p_{r+2}}+\cdots+\frac{K_n}{s-p_n}$$

式中 K_{11}、K_{12}、…、K_{1r} 的求法如下：

$$\begin{aligned}
K_{11}&=F(s)(s-p_1)^r\big|_{s=p_1}\\
K_{12}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[F(s)(s-p_1)^r\right]\bigg|_{s=p_1}\\
K_{13}&=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[F(s)(s-p_1)^r\right]\bigg|_{s=p_1}\\
&\vdots\\
K_{1r}&=\frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^{r-1}}{\mathrm{d}s^{r-1}}\left[F(s)(s-p_1)^r\right]\bigg|_{s=p_1}
\end{aligned}\tag{2-15}$$

其余系数 K_{r+1}、K_{r+2}、…、K_n 的求法与第一种情况所述的方法相同，即

$$K_j=\left[F(s)(s-p_j)\right]\big|_{s=p_j}=\frac{B(p_j)}{A'(p_j)}\quad(j=r+1,r+2,\cdots,n)$$

求得所有的待定系数后，$F(s)$的反变换为

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\left[\frac{K_{11}}{(r-1)!}t^{r-1}+\frac{K_{12}}{(r-2)!}t^{r-2}+\cdots+K_{1r}\right]e^{p_1t}+K_{r+1}e^{p_{r+1}t}+K_{r+2}e^{p_{r+2}t}+\cdots+K_ne^{p_nt}$$

5. 用拉氏变换求解微分方程的步骤。

解答：用拉氏变换解线性常微分方程，首先通过拉氏变换将常微分方程化为象函数的代数方程，进而解出象函数，最后由拉氏反变换求得常微分方程的解。

习　题

2-1 √试求下列函数的拉氏变换，假设当 $t<0$ 时 $f(t)=0$。

（1）　$f(t)=5(1-\cos 3t)$

（2）　$f(t)=e^{-0.5t}\cos 10t$

（3）　$f(t)=\sin(5t+\dfrac{\pi}{3})$（用和角公式展开）

（4）　$f(t)=t^ne^{at}$

（1）$f(t)=5(1-\cos 3t)$

解：利用拉氏变化的线性叠加特性

$$F(s)=L[f(t)]=5L[1(t)]-5L[\cos 3t]=\frac{5}{s}-\frac{5s}{s^2+3^2}=\frac{45}{s(s^2+9)}$$

（2）$f(t)=e^{-0.5t}\cos 10t$

解法 1：利用 cos10t 的拉氏变换结果和复数域位移定理

$$F(s)=L[f(t)]=L[e^{-0.5t}\cos 10t]=\frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+10^2}=\frac{s+0.5}{s^2+s+100.25}$$

解法 2：直接按定义并与 cosωt 的拉氏变换进行比较

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-0.5t}\cos 10te^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\cos 10te^{-(s+0.5)t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+10^2}=\frac{s+0.5}{s^2+s+100.25}$$

解法 3：直接按定义求解

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^{\infty}e^{-0.5t}\cos 10te^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}(e^{j10t}+e^{-j10t})e^{-(s+0.5)t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty}e^{-(s+0.5-j10)t}\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}e^{-(s+0.5+j10)t}\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(s+0.5-j10)t}}{-(s+0.5-j10)}\bigg|_0^{\infty}+\frac{e^{-(s+0.5+j10)t}}{-(s+0.5+j10)}\bigg|_0^{\infty}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+0.5-j10}+\frac{1}{s+0.5+j10}\right)=\frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+10^2}=\frac{s+0.5}{s^2+s+100.25}$$

解法 4：直接套用教材表 2-1 中第 14 项结果

$$F(s)=L[f(t)]=L[e^{-0.5t}\cos 10t]=\frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+10^2}=\frac{s+0.5}{s^2+s+100.25}$$

（3） $f(t)=\sin(5t+\dfrac{\pi}{3})$（用和角公式展开）

解法 1：利用和角公式展开，然后利用拉氏变换的线性叠加性

$$f(t)=\sin(5t+\frac{\pi}{3})=\sin 5t\cos\frac{\pi}{3}+\cos 5t\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sin 5t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5t$$

所以 $F(s)=L[f(t)]=\dfrac{1}{2}L[\sin 5t]+\dfrac{\sqrt{3}}{2}L[\cos 5t]=\dfrac{1}{2}\dfrac{5}{s^2+5^2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{s}{s^2+5^2}=\dfrac{\sqrt{3}s+5}{2(s^2+25)}$

解法 2：直接利用定义求解

$f(t)=\sin(5t+\dfrac{\pi}{3})=\sin[5(t+\dfrac{\pi}{15})]$，令 $\tau=t+\dfrac{\pi}{15}$，则有

$$\begin{aligned}F(s)=L[f(t)]&=\int_0^\infty \sin[5(t+\frac{\pi}{15})]e^{-st}dt=\int_{\frac{\pi}{15}}^\infty \sin(5\tau)e^{-s(\tau-\frac{\pi}{15})}d\tau\\&=e^{\frac{\pi}{15}s}\int_{\frac{\pi}{15}}^\infty \sin(5\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{\frac{\pi}{15}s}\left[\int_0^\infty \sin(5\tau)e^{-s\tau}d\tau-\int_0^{\frac{\pi}{15}}\sin(5\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]\end{aligned} \qquad （1）$$

而
$$\int_0^\infty \sin(5\tau)e^{-s\tau}d\tau=\frac{5}{s^2+25} \qquad （2）$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{15}}\sin(5\tau)e^{-s\tau}d\tau&=\int_0^{\frac{\pi}{15}}\frac{1}{2j}\left(e^{j5\tau}-e^{-j5\tau}\right)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2j}\int_0^{\frac{\pi}{15}}e^{-(s-j5)\tau}\mathrm{d}\tau-\frac{1}{2j}\int_0^{\frac{\pi}{15}}e^{-(s+j5)\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2j}\left[-\frac{e^{-(s-j5)\tau}}{s-j5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{15}}+\frac{e^{-(s+j5)\tau}}{s+j5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{15}}\right]=\frac{1}{2j}\frac{e^{-s\tau}\left[-s(e^{j5\tau}-e^{-j5\tau})-j5(e^{j5\tau}+e^{-j5\tau})\right]}{s^2+25}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{15}}\\&=\frac{1}{2j}\frac{e^{-s\tau}\left[-s2j\sin 5\tau-j5\times 2\cos 5\tau\right]}{s^2+25}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{15}}=\frac{e^{-s\tau}\left(-s\sin 5\tau-5\cos 5\tau\right)}{s^2+25}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{15}}\\&=\frac{e^{-\frac{\pi}{15}s}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}s-\frac{5}{2}\right)+5}{s^2+25}\end{aligned} \qquad （3）$$

将（3）式和（2）式代入（1）得

$$F(s)=L[f(t)]=\frac{\sqrt{3}s+5}{2(s^2+25)}$$

【注】本题不可直接利用延时定理，因为函数不是延时函数，如果使用了延时定理，则将改变定义域。

（4） $f(t)=t^n e^{at}$

解法 1：$L\left[t^n\right]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}\quad n=1,2,3,\cdots$，利用复域平移特性得

$$F(s)=L\left[t^n\cdot e^{at}\right]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\quad n=1,2,3,\cdots$$

解法 2： $L[e^{at}]=\int_0^{\infty}e^{at}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{s-a}$

利用复域微分特性 $L\left[t^n\cdot f(t)\right]=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^nF(s)}{\mathrm{d}s^n}\quad n=1,2,3,\cdots$ 得

$$F(s)=L\left[t^n\cdot e^{at}\right]=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n\frac{1}{s-a}}{\mathrm{d}s^n}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\quad n=1,2,3,\cdots$$

解法 3： 直接按定义并与 t^n 的拉氏变换进行比较

$$F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_0^{\infty}t^ne^{at}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}t^ne^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\quad n=1,2,3,\cdots$$

解法 4： 直接按定义求解

$$L\left[t^ne^{at}\right]=\int_0^{\infty}t^ne^{at}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}t^ne^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s-a}\int_0^{\infty}t^n\mathrm{d}e^{-(s-a)t}$$

$$=-\frac{1}{s-a}t^ne^{-(s-a)t}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{s-a}\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t^n=\frac{1}{s-a}\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}nt^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{n}{s-a}\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-(s-a)t}\mathrm{d}t=\frac{n}{s-a}L\left[t^{n-1}e^{at}\right]$$

得到递推关系如下：

$$L\left[t^ne^{at}\right]=\frac{n}{s-a}L\left[t^{n-1}e^{at}\right]$$

$$L\left[t^{n-1}e^{at}\right]=\frac{n-1}{s-a}L\left[t^{n-2}e^{at}\right]$$

$\vdots$

$$L\left[t^1e^{at}\right]=\frac{1}{s-a}L\left[t^0e^{at}\right]=\frac{1}{s-a}L\left[e^{at}\right]=\frac{1}{s-a}\frac{1}{s-a}=\frac{1}{(s-a)^2}$$

所以

$$L\left[t^ne^{at}\right]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

解法 5： 直接套用教材表 2-1 中第 9 项结果

$$L\left[t^ne^{at}\right]=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

2-2 √求下列函数的拉氏变换。

（1） $f(t)=2t+3t^3+2e^{-3t}$

（2） $f(t)=t^3e^{-3t}+e^{-t}\cos 2t+e^{-3t}\sin 4t\quad(t\geq 0)$

（3） $f(t)=5\cdot 1(t-2)+(t-1)^2e^{2t}$

（4） $f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\leq t\leq\pi\\ 0 & t<0,t>\pi\end{cases}$

（1） $f(t)=2t+3t^3+2e^{-3t}$

解：设 t<0 时，$f(t)$＝0

利用拉氏变换的线性特性

$$F(s)=L[f(t)]=2L[t]+3L[t^3]+2L[e^{-3t}]=2\times\frac{1}{s^2}+3\times\frac{3!}{s^4}+2\times\frac{1}{s+3}$$

$$=\frac{2s^4+2s^3+6s^2+18s+54}{s^4(s+3)}$$

（2） $f(t)=t^3e^{-3t}+e^{-t}\cos 2t+e^{-3t}\sin 4t \quad (t\ge 0)$

解：利用拉氏变换的性质：线性性质，复域平移特性

$$F(s)=L[f(t)]=L[t^3e^{-3t}]+L[e^{-t}\cos 2t]+L[e^{-3t}\sin 4t]$$

$$=\frac{3!}{(s+3)^4}+\frac{s+1}{(s+1)^2+4}+\frac{4}{(s+3)^2+16}$$

$$=\frac{s^7+23s^6+225s^5+1221s^4+3963s^3+8785s^2+8499s+4395}{s^8+20s^7+192s^6+1124s^5+4298s^4+11004s^3+18792s^2+19980s+10125}$$

（3） $f(t)=5\cdot 1(t-2)+(t-1)^2e^{2t}$

解：设 t<0 时，$f(t)$＝0。利用拉氏变换线性特性、延时特性和复域平移特性

$$F(s)=L[f(t)]=5L[1(t-2)]+L[(t-1)^2e^{2t}]$$

$$=5L[1(t-2)]+L[(t^2-2t+1)e^{2t}]$$

$$=5L[1(t-2)]+L[t^2e^{2t}]-2L[te^{2t}]+L[e^{2t}]$$

$$=5e^{-2s}\frac{1}{s}+\frac{2}{(s-2)^3}-\frac{2}{(s-2)^2}+\frac{1}{s-2}$$

【注】本题不可对第二项$(t-1)^2e^{2t}$采用如下方法：

因为 $L[t^2]=\frac{2}{s^3}$，利用时域位移定理得 $L[(t-1)^2]=e^{-s}\frac{2}{s^3}$，再利用复域平移定理得 $L[(t-1)^2e^{2t}]=e^{-(s-2)}\frac{2}{(s-2)^3}$。这样计算的结果是错误的，原因在于：在利用时域位移定理时，将$(t-1)^2$的定义域变成了 $f(t)=\begin{cases}(t-1)^2 & t\geqslant 1\\ 0 & t<1\end{cases}$，而原题中$(t-1)^2$的定义域为 $f(t)=\begin{cases}(t-1)^2 & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$。换句话说，这里$(t-1)^2$并不是$t^2$的延时函数。

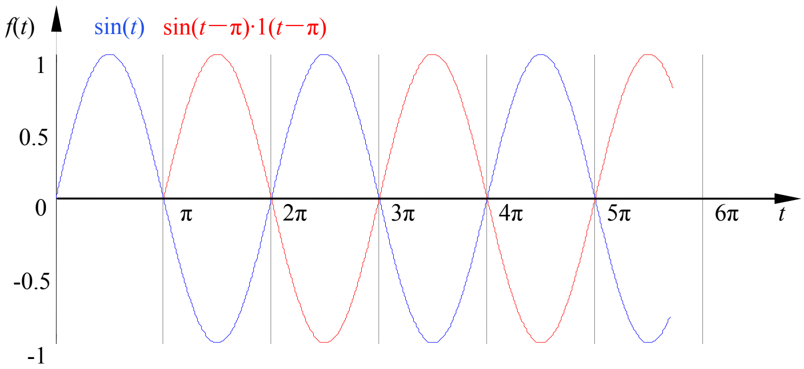
（4） $f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\le t\le \pi\\ 0 & t<0, t>\pi\end{cases}$

解法 1：$f(t)=\sin t+\sin(t-\pi)\square(t-\pi)$，如图 2-2 所示。

$$F(s)=L[f(t)]=L[\sin t]+L[\sin(t-\pi)\square(t-\pi)]$$

所以

$$=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}=\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$$



图题 2-2

解法 2：直接按定义求解。

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\sin te^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{2j}\int_0^{\pi}(e^{jt}-e^{-jt})e^{-st}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2j}\int_0^{\pi}e^{(j-s)t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2j}\int_0^{\pi}e^{(-j-s)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2j(j-s)}e^{(j-s)t}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2j(-j-s)}e^{(-j-s)t}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2j(j-s)}e^{(j-s)\pi}-\frac{1}{2j(j-s)}-\frac{1}{2j(-j-s)}e^{(-j-s)\pi}+\frac{1}{2j(-j-s)}$$

$$=e^{-\pi s}\frac{-(s+j)e^{j\pi}+(s-j)e^{-j\pi}}{2j(s^2-j^2)}+\frac{s+j-(s-j)}{2j(s^2-j^2)}$$

$$=e^{-\pi s}\frac{-s(e^{j\pi}-e^{-j\pi})-j(e^{j\pi}+e^{-j\pi})}{2j(s^2+1)}+\frac{1}{s^2+1}$$

$$=e^{-\pi s}\frac{-2js\sin\pi-2j\cos\pi}{2j(s^2+1)}+\frac{1}{s^2+1}$$

$$=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}=\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

2-3 √已知 $F(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}$

（1） 利用终值定理，$t\to\infty$时的 $f(t)$值。

（2） 通过取 $F(s)$的拉氏反变换，求 $t\to\infty$时的 $f(t)$值。

解：（1） $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\dfrac{10}{s(s+1)}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{10}{s+1}=10$

（2） $F(s)=\dfrac{10}{s(s+1)}=\dfrac{K_1}{s}+\dfrac{K_2}{s+1}$

根据部分分式法得

$$K_1=\frac{10}{s(s+1)}s\Big|_{s=0}=10$$

$$K_2 = \frac{10}{s(s+1)}(s+1)\Big|_{s=-1} = -10$$

所以 $F(s) = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+1}$

所以 $f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[\frac{10}{s} - \frac{10}{s+1}] = 10L^{-1}[\frac{1}{s}] - 10L^{-1}[\frac{1}{s+1}] = 10\cdot 1(t) - 10e^{-t} \quad t \geqslant 0$

所以 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\infty}[10\cdot 1(t) - 10e^{-t}] = 10$，与（1）中计算结果相同。

【注】本题求拉氏反变换时，可以利用教材表 2-1 中的第 10 项。

2-4 √已知 $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$

（1） 利用初值定理，求 $f(0^+)$和 $f'(0^+)$的值。

（2） 通过取 $F(s)$的拉氏反变换，求 $f(t)$，再求 $f'(t)$，然后求 $f(0^+)$和 $f'(0^+)$。

解：（1） $f(0^+) = \lim\limits_{t\to 0+} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = \lim\limits_{s\to\infty} s\frac{1}{(s+2)^2} = 0$

根据拉氏变换的微分特性得知 $f'(t)$的拉氏变换为

$$L_+[f'(t)] = sF(s) - f(0^+) = \frac{s}{(s+2)^2} - 0 = \frac{s}{(s+2)^2}$$

则再次利用初值定理得

$$f'(0^+) = \lim_{t\to 0+} f'(t) = \lim_{s\to\infty} s\frac{s}{(s+2)^2} = 1$$

（2） $$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[\frac{1}{(s+2)^2}] = e^{-2t}t \quad t \geqslant 0$$

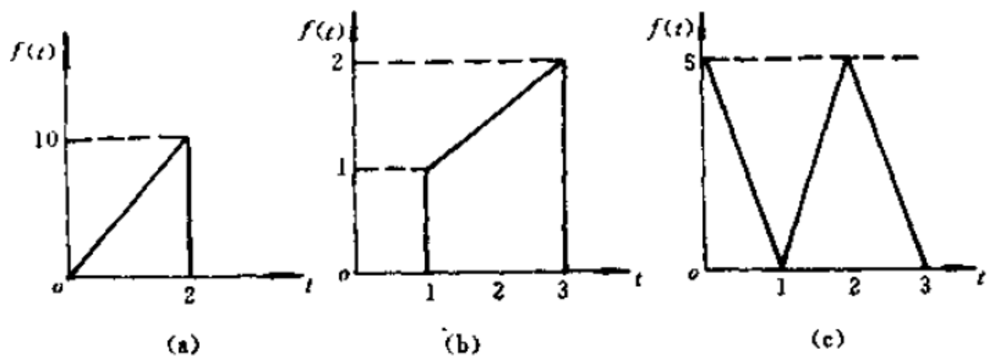
$$f'(t) = e^{-2t} - 2e^{-2t}t$$

则 $$f(0^+) = \lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{t\to 0+} e^{-2t}t = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{t\to 0+} f'(t) = \lim_{t\to 0+}(e^{-2t} - e^{-2t}t) = 1$$

结果与（1）中计算的一致。

2-5 求图题 2－5 所示的各种波形所表示的函数的拉氏变换。



图题 **2－5**

解：(a) 解法 1：设 $f_1(t)=\begin{cases}\dfrac{10}{2}t=5t & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$，则

$$f(t)=f_1(t)-f_1(t-2)-10\cdot 1(t-2)$$ （见图 2-5-1(a)）

由此得

$$F(s)=L[f(t)]=L[f_1(t)]-L[f_1(t-2)]-L[10\cdot 1(t-2)]$$
$$=\frac{5}{s^2}-\frac{5}{s^2}e^{-2s}-\frac{10}{s}e^{-2s}$$

解法 2：令 $g(t)=f'(t)=5\cdot 1(t)-5\cdot 1(t-2)-10\delta(t-2)$

$$G(s)=L[g(t)]=L[f'(t)]=L[5\cdot 1(t)]-L[5\cdot 1(t-2)]-L[10\delta(t-2)]$$
$$=\frac{5}{s}-\frac{5}{s}e^{-2s}-10e^{-2s}$$

根据拉氏变换的积分特性得

$$F(s)=L\left[\int_0^t g(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{G(s)}{s}$$
$$=\frac{5}{s^2}-\frac{5}{s^2}e^{-2s}-\frac{10}{s}e^{-2s}$$

解法 3：直接利用拉氏变换定义

$$f(t)=\begin{cases}5t & 0\leqslant t\leqslant 2\\ 0 & t<0,\ t>2\end{cases}$$

则

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^2 5t\cdot e^{-st}\mathrm{d}t=5\int_0^2 t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)'\mathrm{d}t=-\frac{5}{s}\left(te^{-st}\Big|_0^2-\int_0^2 e^{-st}\mathrm{d}t\right)$$
$$=-\frac{5}{s}\left[2e^{-2s}-\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_0^2\right]=-\frac{5}{s}\left(2e^{-2s}+\frac{1}{s}e^{-2s}-\frac{1}{s}\right)$$
$$=-\frac{10}{s}e^{-2s}-\frac{5}{s^2}e^{-2s}+\frac{5}{s^2}=\frac{5}{s^2}-\frac{5}{s^2}e^{-2s}-\frac{10}{s}e^{-2s}$$

(b) 解法 1：设 $f_1(t)=\dfrac{2-1}{3-1}t=\dfrac{1}{2}t$，则由图 2-5-1(b)可知

$$f(t)=1(t-1)+f_1(t-1)-f_1(t-3)-2\cdot 1(t-3)$$

所以

$$F(s)=L[f(t)]=L[1(t-1)]+L[f_1(t-1)]-L[f_1(t-3)]-L[2\cdot 1(t-3)]$$
$$=\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}e^{-3s}-\frac{2}{s}e^{-3s}$$

解法 2：令 $g(t)=f'(t)=\delta(t-1)+\dfrac{1}{2}\cdot 1(t-1)-\dfrac{1}{2}\cdot 1(t-3)-2\delta(t-3)$

$$G(s)=L[g(t)]=L[f'(t)]=L[\delta(t-1)]+\frac{1}{2}L[1(t-1)]-\frac{1}{2}L[1(t-3)]-2L[\delta(t-3)]$$
$$=e^{-s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s}e^{-3s}-2e^{-3s}$$

根据拉氏变换的积分特性得

$$F(s)=L\left[\int_0^t g(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{G(s)}{s}$$
$$=\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}e^{-3s}-\frac{2}{s}e^{-3s}$$

解法 3：直接利用拉氏变换定义

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2} & 1\leqslant t\leqslant 3\\ 0 & t<0,\ t>3\end{cases}$$

则

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)\cdot e^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_1^3\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\int_1^3 t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)'\mathrm{d}t+\int_1^3\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)'\mathrm{d}t\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{s}\left[\left(te^{-st}\Big|_1^3-\int_1^3 e^{-st}\mathrm{d}t\right)+e^{-st}\Big|_1^3\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{s}\left[3e^{-3s}-e^{-s}-\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_1^3+e^{-3s}-e^{-s}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{s}\left(4e^{-3s}-2e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-3s}-\frac{1}{s}e^{-s}\right)$$
$$=-\frac{2}{s}e^{-3s}+\frac{1}{s}e^{-s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}e^{-3s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}e^{-s}=\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}e^{-3s}-\frac{2}{s}e^{-3s}$$

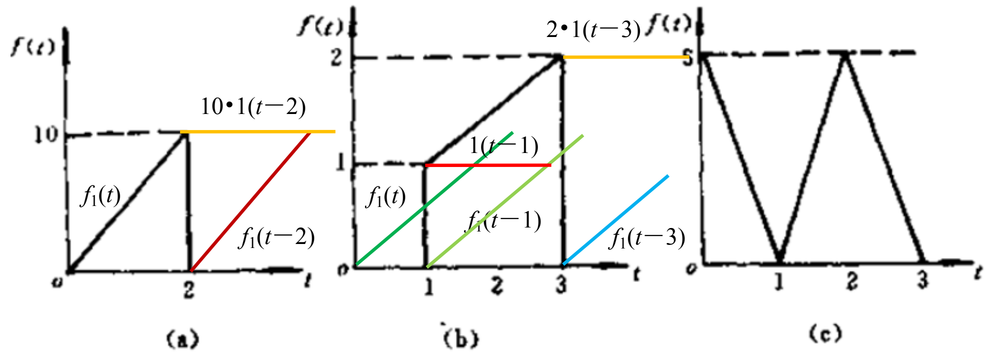
（c）解法 1：利用拉氏变换的积分特性。由图可见

$$g(t)=f'(t)=5\delta(t)+\left[-5\cdot 1(t)+5\cdot 1(t-1)\right]+\left[5\cdot 1(t-1)-5\cdot 1(t-2)\right]+\left[-5\cdot 1(t-2)+5\cdot 1(t-3)\right]$$
$$=5\delta(t)-5\cdot 1(t)+10\cdot 1(t-1)-10\cdot 1(t-2)+5\cdot 1(t-3)$$

$$G(s)=L[g(t)]=L[f'(t)]$$
$$=5L[\delta(t)]-5L[1(t)]+10L[1(t-1)]-10L[1(t-2)]+5L[1(t-3)]$$
$$=5-\frac{5}{s}+\frac{10}{s}e^{-s}-\frac{10}{s}e^{-2s}+\frac{5}{s}e^{-3s}$$

根据拉氏变换的积分特性得

$$F(s)=L\left[\int_0^t g(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{G(s)}{s}$$
$$=\frac{5}{s}-\frac{5}{s^2}+\frac{10}{s^2}e^{-s}-\frac{10}{s^2}e^{-2s}+\frac{5}{s^2}e^{-3s}$$



图题 5-2-1

2-6 √试求下列象函数的拉氏反变换

（1） $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4}$

解法 1：利用部分分式法。先将 $F(s)$展开成部分分式

$$F(s)=\frac{1}{s^2+4}=\frac{1}{(s+j2)(s-j2)}=\frac{K_1}{s+j2}+\frac{K_2}{s-j2}$$

$$K_1=\frac{1}{(s+j2)(s-j2)}(s+j2)\bigg|_{s=-j2}=j\frac{1}{4}$$

因为两个极点共轭，所以 K_2 与 K_1 共轭，即

$$K_2=-j\frac{1}{4}$$

即

$$F(s)=\frac{j\frac{1}{4}}{s+j2}+\frac{-j\frac{1}{4}}{s-j2}=j\frac{1}{4}\left[\frac{1}{s+j2}-\frac{1}{s-j2}\right]$$

所以

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=j\frac{1}{4}\left\{L^{-1}[\frac{1}{s+j2}]-L^{-1}[\frac{1}{s-j2}]\right\}$$

$$=j\frac{1}{4}\left(e^{-j2t}-e^{j2t}\right)\overset{\text{欧拉公式}}{=}j\frac{1}{4}\times(-j2\sin 2t)=\frac{1}{2}\sin 2t \quad t\geqslant 0$$

解法 2：查表法

$$F(s)=\frac{1}{s^2+4}=\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}$$

利用拉氏变换对照表查得

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{2}{s^2+2^2}]=\frac{1}{2}\sin 2t \quad t\geqslant 0$$

（2） $F(s)=\dfrac{s}{s^2-2s+5}+\dfrac{s+1}{s^2+9}$

解法 1：利用部分分式法。先将 $F(s)$展开成部分分式

$$F(s)=\frac{s}{s^2-2s+5}+\frac{s+1}{s^2+9}=\frac{s}{[s-(1+j2)][s-(1-j2)]}+\frac{s+1}{(s-j3)(s+j3)}$$

令 $$F_1(s)=\frac{s}{s^2-2s+5}=\frac{s}{[s-(1+j2)][s-(1-j2)]}=\frac{K_1}{s-(1+j2)}+\frac{K_2}{s-(1-j2)}$$

$$F_2(s)=\frac{s+1}{s^2+9}=\frac{s+1}{(s-j3)(s+j3)}=\frac{K_3}{s-j3}+\frac{K_4}{s+j3}$$

$$K_1=\frac{s}{[s-(1+j2)][s-(1-j2)]}[s-(1+j2)]\bigg|_{s=1+j2}=\frac{1}{2}-j\frac{1}{4}$$

$$K_2=K_1^*=\frac{1}{2}+j\frac{1}{4}$$

$$K_3=\frac{s+1}{(s-j3)(s+j3)}(s-j3)\bigg|_{s=j3}=\frac{1}{2}-j\frac{1}{6}$$

$$K_4=K_3^*=\frac{1}{2}+j\frac{1}{6}$$

即 $$F_1(s)=\frac{\frac{1}{2}-j\frac{1}{4}}{s-1-j2}+\frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{4}}{s-1+j2}$$

$$F_2(s)=\frac{\frac{1}{2}-j\frac{1}{6}}{s-j3}+\frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{6}}{s+j3}$$

所以

$$\begin{aligned}f_1(t)&=L^{-1}[F_1(s)]=L^{-1}[\frac{\frac{1}{2}-j\frac{1}{4}}{s-1-j2}]+L^{-1}[\frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{4}}{s-1+j2}]\\&=\left(\frac{1}{2}-j\frac{1}{4}\right)e^{(1+j2)t}+\left(\frac{1}{2}+j\frac{1}{4}\right)e^{(1-j2)t}\\&=\frac{1}{2}e^t(e^{j2t}+e^{-j2t})-j\frac{1}{4}e^t(e^{j2t}-e^{-j2t})\\&=\frac{1}{2}e^t2\cos 2t-j\frac{1}{4}e^t2j\sin 2t\\&=e^t(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)\end{aligned}$$

$$f_2(t)=L^{-1}[F_2(s)]=L^{-1}[\frac{\frac{1}{2}-j\frac{1}{6}}{s-j3}]+L^{-1}[\frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{6}}{s+j3}]$$

$$=\left(\frac{1}{2}-j\frac{1}{6}\right)e^{j3t}+\left(\frac{1}{2}+j\frac{1}{6}\right)e^{-j3t}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{j3t}+e^{-j3t})-j\frac{1}{6}(e^{j3t}-e^{-j3t})$$

$$=\frac{1}{2}2\cos 3t-j\frac{1}{6}2j\sin 3t$$

$$=\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t$$

根据拉氏变换线性特性得

$$f(t)=f_1(t)+f(t)_2$$

$$=e^t(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)+\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t \quad t\geqslant 0$$

解法 2：$F(s)=\dfrac{s}{s^2-2s+5}+\dfrac{s+1}{s^2+9}=\dfrac{s-1}{(s-1)^2+2^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{(s-1)^2+2^2}+\dfrac{s}{s^2+3^2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{s^2+3^2}$

利用拉氏变换复域平移定理及线性性质得

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=e^t\cos 2t+\frac{1}{2}e^t\sin 2t+\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t$$

$$=e^t[\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t]+\cos 3t+\frac{1}{3}\sin 3t$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}e^t\sin(2t+\arctan 2)+\frac{\sqrt{10}}{3}\sin(3t+\arctan 3) \quad t\geqslant 0$$

（3） $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$

解：利用部分分式法。先将 $F(s)$展开成部分分式

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}$$

$$K_1=\frac{1}{s(s+1)}s\bigg|_{s=0}=1$$

$$K_2=\frac{1}{s(s+1)}(s+1)\bigg|_{s=-1}=-1$$

即

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$$

所以

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s}]-L^{-1}[\frac{1}{s+1}]=1(t)-e^{-t}=1-e^{-t} \quad t\geqslant 0$$

（4） $F(s)=\dfrac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

解：利用部分分式法。先将 $F(s)$展开成部分分式

$$F(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+3}$$

$$K_1=\left.\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}(s+2)\right|_{s=-2}=-1$$

$$K_2=\left.\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}(s+3)\right|_{s=-3}=2$$

即
$$F(s)=\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+3}$$

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{-1}{s+2}]+L^{-1}[\frac{2}{s+3}]=-e^{-2t}+2e^{-3t}\quad t\geqslant 0$$

（5） $F(s)=\dfrac{4(s+3)}{(s+2)^2(s+1)}$

解：利用部分分式法。先将 $F(s)$展开成部分分式

$$F(s)=\frac{4(s+3)}{(s+2)^2(s+1)}=\frac{K_{11}}{(s+2)^2}+\frac{K_{12}}{s+2}+\frac{K_3}{s+1}$$

$$K_{11}=\left.\frac{4(s+3)}{(s+2)^2(s+1)}(s+2)^2\right|_{s=-2}=\left.\frac{4(s+3)}{(s+1)}\right|_{s=-2}=-4$$

$$K_{12}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{4(s+3)}{(s+2)^2(s+1)}(s+2)^2\right]\right|_{s=-2}=\left.\frac{-8}{(s+1)^2}\right|_{s=-2}=-8$$

$$K_3=\left.\frac{4(s+3)}{(s+2)^2(s+1)}(s+1)\right|_{s=-1}=\left.\frac{4(s+3)}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=8$$

即
$$F(s)=\frac{-4}{(s+2)^2}+\frac{-8}{s+2}+\frac{8}{s+1}$$

则

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{-4}{(s+2)^2}]+L^{-1}[\frac{-8}{s+2}]+L^{-1}[\frac{8}{s+1}]$$
$$=-4te^{-2t}-8e^{-2t}+8e^{-t}=-4e^{-2t}(t+2)+8e^{-t}\quad t\geqslant 0$$

（6） $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s-1}$

解：$L^{-1}[\dfrac{1}{s-1}]=e^{t}$

利用拉氏变换的实数域位移定理（延时定理）得

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{e^{-s}}{s-1}]=e^{t-1}\cdot 1(t-1)$$

（7） $F(s)=\dfrac{s^2+5s+2}{(s+2)(s^2+2s+2)}$

解：将 $F(s)$展开成部分分式

$$F(s)=\frac{s^2+5s+2}{(s+2)(s^2+2s+2)}=\frac{s^2+5s+2}{(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}=\frac{K_1}{(s+2)}+\frac{K_2}{(s+1+j)}+\frac{K_3}{(s+1-j)}$$

$$K_1=\frac{s^2+5s+2}{(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}(s+2)\bigg|_{s=-2}=-2$$

$$K_2=\frac{s^2+5s+2}{(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}(s+1+j)\bigg|_{s=-1-j}=\frac{3}{2}$$

$$K_3=K_2^*=\frac{3}{2}$$

即
$$F(s)=-\frac{2}{5}\frac{1}{(s+2)}+\frac{3}{2}\frac{1}{(s+1+j)}+\frac{3}{2}\frac{1}{(s+1-j)}$$

所以

$$\begin{aligned}f(t)=L^{-1}[F(s)]&=-2L^{-1}[\frac{1}{(s+2)}]+\frac{3}{2}L^{-1}[\frac{1}{(s+1+j)}]+\frac{3}{2}L^{-1}[\frac{1}{(s+1-j)}]\\&=-2e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{(-1-j)t}+\frac{3}{2}e^{(-1+j)t}=-2e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-t}(e^{-jt}+e^{jt})\\&=-2e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-t}2\cos t=-2e^{-2t}+3e^{-t}\cos t\quad t\geqslant 0\end{aligned}$$

2-7 √求下列卷积

（1） 1*1

解：因为 $L[1]=\dfrac{1}{s}$，利用拉氏变换的卷积定理得

$$L[1*1]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}$$

对上式进行拉普拉斯逆变换得

$$1*1=L^{-1}[\frac{1}{s^2}]=t\quad t\geqslant 0$$

（2） $t*t$

解：因为 $L[t]=\dfrac{1}{s^2}$，利用拉氏变换的卷积定理得

$$L[t*t]=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s^4}$$

对上式进行拉普拉斯逆变换得

$$t*t=L^{-1}[\frac{1}{s^4}]=\frac{1}{3!}L^{-1}[\frac{3!}{s^{3+1}}]=\frac{1}{6}t^3\quad t\geqslant 0$$

（3） $t*e^t$

解：因为 $L[t]=\dfrac{1}{s^2}$， $L[e^t]=\dfrac{1}{s-1}$，利用拉氏变换的卷积定理得

$$L[t*e^t]=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s-1}=\frac{1}{s^2(s-1)}$$

对上式进行拉普拉斯逆变换（可查表）得

$$t*e^t=L^{-1}[\frac{1}{s^2(s-1)}]=e^t-t-1 \quad t\geqslant 0$$

（4） $t*\sin t$

解：因为 $L[t]=\dfrac{1}{s^2}$， $L[\sin t]=\dfrac{1}{s^2+1}$，利用拉氏变换的卷积定理得

$$L[t*\sin t]=\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

对上式进行拉普拉斯逆变换得

$$t*\sin t=L^{-1}[\frac{1}{s^2(s^2+1)}]=L^{-1}[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}]=t-\sin t \quad t\geqslant 0$$

2-8 √用拉氏变换的方法解下列微分方程

（1） $\ddot{x}+2\dot{x}+2x=0, x(0)=0, \dot{x}(0)=1$

解：对微分方程等号两边同时求拉氏变换得

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+2sX(s)-2x(0)+2X(s)=0$$

将初始条件代入上式并整理得

$$(s^2+2s+2)X(s)-1=0$$

解得

$$X(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}=\frac{1}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

对 $X(s)$ 求拉普拉斯逆变换得到

$$x(t)=e^{-t}\sin t \quad t\geqslant 0$$

（2） $2\ddot{x}+7\dot{x}+3x=0, x(0)=x_0, \dot{x}(0)=0$

解：对微分方程等号两边同时求拉氏变换得

$$2s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+7sX(s)-x(0)+3X(s)=0$$

将初始条件代入上式并整理得

$$(2s^2+7s+3)X(s)-2sx_0-7x_0=0$$

解得

$$X(s)=\frac{2x_0s+7x_0}{2s^2+7s+3}=\frac{2x_0s+7x_0}{(2s+1)(s+3)}=x_0\left[\frac{s}{(s+\frac{1}{2})(s+3)}+\frac{7}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})(s+3)}\right]$$

对 $X(s)$求拉普拉斯逆变换（查表）得到

$$x(t) = x_0 \left[\frac{1}{3-\frac{1}{2}} \left(3e^{-3t} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \right) + \frac{7}{2} \frac{1}{3-\frac{1}{2}} \left(e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-3t} \right) \right]$$

$$= \frac{x_0}{5} (-e^{-3t} + 6e^{-\frac{1}{2}t}) \quad t \geqslant 0$$

第3章　系统的数学模型

复习思考题

1.　什么是数学模型？

解答：数学模型是系统动态特性的数学表达式。数学模型有多种形式，如微分方程、传递函数、单位脉冲响应函数、频率响应函数及状态空间表达式等等。

2.　线性系统的特点是什么？

解答：凡是能用线性微分方程描述的系统就是线性系统。线性系统有很多特点，其中最重要的特点就是它满足叠加原理。所谓叠加原理是，系统在几个外加作用下所产生的响应，等于各个外加作用单独作用的响应之和。

3.　传递函数的定义和特点是什么？

解答：定义：在零初始条件下，系统输出的 Laplace 变换与引起该输出的输入量的 Laplace 变换之比。

传递函数具有以下特点

（1）传递函数的分母反映了由系统的结构与参数所决定的系统的固有特性，而其分子则反映了系统与外界之间的联系。

（2）当系统在初始状态为零时，对于给定的输入，系统输出的 Laplace 变换完全取决于其传递函数。但是，一旦系统的初始状态不为零，则传递函数不能完全反映系统的动态历程。

（3）传递函数分子中 s 的阶次不会大于分母中 s 的阶次。

（4）传递函数有无量纲和取何种量纲，取决于系统输出的量纲与输入的量纲。

（5）不同用途、不同物理元件组成的不同类型系统、环节或元件，可以具有相同形式的传递函数。

（6）传递函数非常适用于对单输入、单输出线性定常系统的动态特性进行描述。但对于多输入、多输出系统，需要对不同的输入量和输出量分别求传递函数。另外，系统传递函数只表示系统输入量和输出量的数学关系（描述系统的外部特性），而未表示系统中间变量之间的关系（描述系统的内部特性）。

4.　传递函数的典型环节有哪些？它们的表达式是什么？

5.　如何计算串联、并联及反馈联结所构成系统的传递函数？

6.　方块图的简化法则主要有哪些？如何应用这些法则进行简化并计算系统的传递函数？

7.　如何推导一些简单机电系统的传递函数？

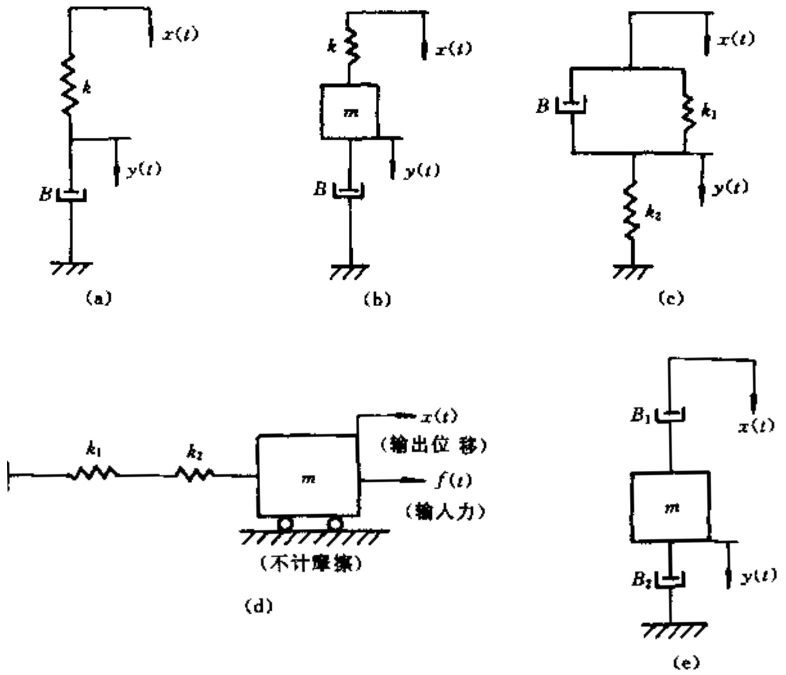
8. 信号流图的概念及梅逊公式的应用。

9. 状态空间基本概念。

10. 如何从高阶微分方程推出状态方程？如何由传递函数推出状态方程？

习　题

3-1　列出图题 3－1 所示各种机械系统的运动微分方程式(图中未注明 $x(t)$均为输入位移，$y(t)$为输出位移)。



图题 3－1

解：（a）对 $y(t)$点利用牛顿第二定律得

$$-B\dot{y}(t)-k[y(t)-x(t)]=0$$

即

$$B\dot{y}(t)+ky(t)=kx(t)$$

（b）对 m 利用牛顿第二定律得

$$-B\dot{y}(t)-k[y(t)-x(t)]=m\ddot{y}(t)$$

整理得

$$m\ddot{y}(t)+B\dot{y}(t)+ky(t)=kx(t)$$

（c）对 $y(t)$点利用牛顿第二定律得

$$-k_2y(t)-B[\dot{y}(t)-\dot{x}(t)]-k_1[y(t)-x(t)]=0$$

整理得

$$B\dot{y}(t)+(k_2+k_1)y(t)=B\dot{x}(t)+k_1x(t)$$

（d）对图(d)所示系统，由牛顿定律有

$$f(t)-k'x(t)=m\ddot{x}(t)$$

其中

$$k'=\frac{1}{\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}}=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

∴

$$m\ddot{x}(t)+\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x(t)=f(t)$$

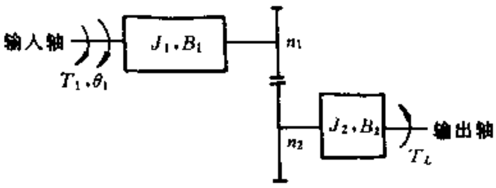
（e）对 m 利用牛顿第二定律得

$$-B_2\dot{y}(t)-B_1[\dot{y}(t)-\dot{x}(t)]=m\ddot{y}(t)$$

整理得

$$m\ddot{y}(t)+(B_2+B_1)\dot{y}(t)=B_1\dot{x}(t)$$

3-2 列出图题 3－2 所示系统的运动微分方程式，并求输入轴上的等效转动惯量 J 和等效阻尼系数 B。图中 T_1、θ_1 为输入转矩及转角，T_L 为输出转矩。



图题 3－2

解：对 J_1 列写平衡方程得

$$J_1\ddot{\theta}_1+B_1\dot{\theta}_1+T_2=T_1 \tag{1}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2+B_2\dot{\theta}_2+T_L=T_3 \tag{2}$$

$$T_3=\frac{n_1}{n_2}T_2 \tag{3}$$

$$\theta_2=\frac{n_2}{n_1}\theta_1 \tag{4}$$

式中 T_2 为 J_1 的输出转矩，T_3 为 J_2 的输入转矩，θ_2 为 J_2 的转角。

将（3）、（4）式代入（2）式，求得 T_2，再将求得的 T_2 代入（1）式得

$$\left[J_1+J_2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]\ddot{\theta}_1+\left[B_1+B_2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]\dot{\theta}_1+\frac{n_2}{n_1}T_L=T_1$$

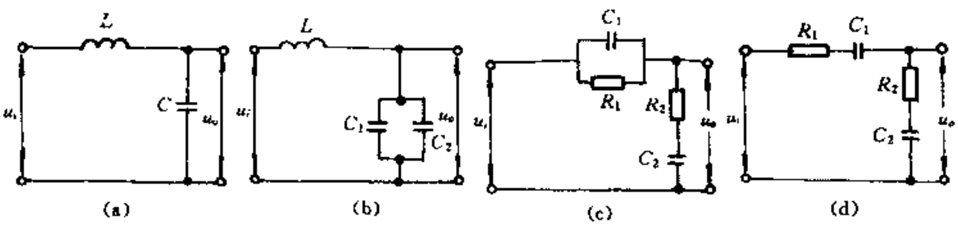
输入轴上的等效转动惯量 J 为

$$J=J_1+J_2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

输入轴上的等效阻尼系数 B 为

$$B = B_1 + B_2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

3-3　求图题 3－3 所示各电气网络输入和输出量间关系的微分方程式，图中 u_i 为输入电压，u_o 为输出电压。Equation Section (Next)



图题 3－3

解：（a）方法 1：设流过 LC 回路的电流为 i，利用基尔霍夫电压定律得

$$u_{\rm i} = L\frac{{\rm d}i}{{\rm d}t} + u_{\rm o} \tag{1}$$

$$u_{\rm o} = \frac{1}{C}\int i{\rm d}t \tag{2}$$

对（2）式求导得

$$i = C\frac{{\rm d}u_{\rm o}}{{\rm d}t} \tag{3}$$

（3）式代入（1）得

$$LC\frac{{\rm d}^2u_{\rm o}}{{\rm d}t^2} + u_{\rm o} = u_{\rm i}$$

方法 2：设流过 LC 回路的电流为 i_L，利用基尔霍夫电流定律得

$$i_L = i_C$$

即

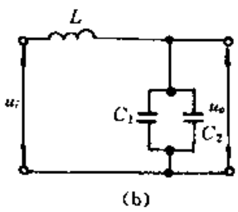
$$\frac{1}{L}\int(u_{\rm i} - u_{\rm o}){\rm d}t = C\frac{{\rm d}u_{\rm o}}{{\rm d}t}$$

对上式求导，并整理得

$$LC\frac{{\rm d}^2u_{\rm o}}{{\rm d}t^2} + u_{\rm o} = u_{\rm i}$$

（b）方法 1：设流过 L 的电流为 i，利用基尔霍夫电压定律得

$$\left.\begin{aligned} u_{\rm i} &= L\frac{{\rm d}i}{{\rm d}t} + u_{\rm o} \\ u_{\rm o} &= \frac{1}{C_1 + C_2}\int i{\rm d}t \end{aligned}\right\}$$



消除中间变量 i（过程同(a)）得

$$L(C_1 + C_2)\frac{{\rm d}^2u_{\rm o}}{{\rm d}t^2} + u_{\rm o} = u_{\rm i}$$

方法 2：设流过 L 的电流为 i，流过 C_1、C_2 的电流分别为 i_1 和 i_2，利用基尔霍夫电流定律得

$$i = i_1 + i_2$$

即
$$\frac{1}{L}\int(u_i - u_o)\mathrm{d}t = C_1\frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t}$$

对上式求导，并整理得

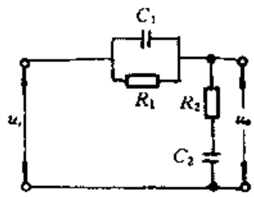
$$L(C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}^2u_o}{\mathrm{d}t^2} + u_o = u_i$$

（c）方法 1：设流过 R_1 的电流为 i_1，流过 C_1 的电流为 i_2，利用基尔霍夫电压定律得

$$u_i = R_1 i_1 + u_o \tag{1}$$

$$R_1 i_1 = \frac{1}{C_1}\int i_2\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$u_o = R_2(i_1 + i_2) + \frac{1}{C_2}\int(i_1 + i_2)\mathrm{d}t \tag{3}$$



(c)

由（1）得

$$i_1 = \frac{u_i - u_o}{R_1} \tag{4}$$

（4）代入（2）并后求导得

$$i_2 = C_1\left(\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t}\right) \tag{5}$$

（5）、（4）代入（3）后，求导，再整理得

$$R_2C_1\frac{\mathrm{d}^2u_o}{\mathrm{d}t^2} + (\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + 1)\frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R_1C_2}u_o = R_2C_1\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2} + (\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2})\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R_1C_2}u_i$$

方法 2：设流过 R_1 的电流为 i_1，流过 C_1 的电流为 i_2，流过 R_2、C_2 的电流为 i，电阻 C_2 上的电压为 u_{C2}，利用基尔霍夫电流定律得

$$i = i_1 + i_2$$

即
$$\frac{u_i - u_o}{R_1} + C_1\frac{\mathrm{d}(u_i - u_o)}{\mathrm{d}t} = \frac{u_o - u_{C_2}}{R_2} \tag{1}$$

$$\frac{u_o - u_{C_2}}{R_2} = C_2\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

由式（2）得

$$u_{C_2} = R_2C_1\frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t} + (\frac{R_2}{R_1} + 1)u_o - R_2C_1\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} - \frac{R_2u_i}{R_1} \tag{3}$$

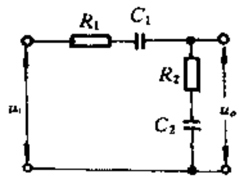
将式（3）及其一阶导数代入（2），并整理得

$$R_2C_1\frac{\mathrm{d}^2u_o}{\mathrm{d}t^2} + (\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + 1)\frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R_1C_2}u_o = R_2C_1\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2} + (\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2})\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R_1C_2}u_i$$

（d）解法 1：设流过回路的电流为 i，利用基尔霍夫电压定律得

$$u_{\rm i}=R_1 i+\frac{1}{C_1}\int i{\rm d}t+u_{\rm o} \qquad (1)$$

$$u_{\rm o}=R_2 i+\frac{1}{C_2}\int i{\rm d}t \qquad (2)$$



(d)

（1）×C_1–（2）×C_2 得

$$i=\frac{C_1 u_{\rm i}-(C_1+C_2)u_{\rm o}}{R_1C_1-R_2C_2} \qquad (3)$$

对（2）求导得

$$\frac{{\rm d}u_{\rm o}}{{\rm d}t}=R_2\frac{{\rm d}i}{{\rm d}t}+\frac{1}{C^2}i \qquad (4)$$

（3）代入（4）并整理得

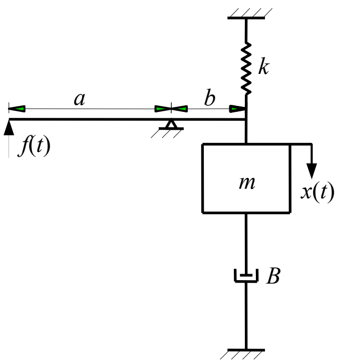
$$(R_1+R_2)\frac{{\rm d}u_{\rm o}}{{\rm d}t}+(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2})u_{\rm o}=R_2\frac{{\rm d}u_{\rm i}}{{\rm d}t}+\frac{1}{C_2}u_{\rm i}$$

或

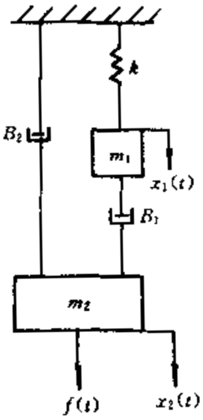
$$(R_1+R_2)C_1C_2\frac{{\rm d}u_{\rm o}}{{\rm d}t}+(C_1+C_2)u_{\rm o}=R_2C_1C_2\frac{{\rm d}u_{\rm i}}{{\rm d}t}+C_1u_{\rm i}$$

解法 2：利用基尔霍夫电流定律，过程略。

3-4　列出图题 3－4 所示机械系统的作用力 $f(t)$与位移 $x(t)$之间关系的微分方程。



图题 3－4



图题 3－5

解：设杠杆转角为 θ，对 m 使用牛顿第二定律得

$$\frac{af(t)\cos\theta}{b\cos\theta}-B\dot{x}(t)-kx(t)=m\ddot{x}(t)$$

整理得

$$m\ddot{x}(t)+B\dot{x}(t)+kx(t)=\frac{af(t)}{b}$$

3-5　如图题 3－5 所示的系统，当外力 $f(t)$作用于系统时，m_1 和 m_2 有不同的位移输出 $x_1(t)$和 $x_2(t)$，试求 $f(t)$与 $x_2(t)$的关系，列出微分方程式。

解：对 m_1 使用牛顿第二定律得

$$-B_1[\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)]-kx_1(t)=m_1\ddot{x}_1(t) \tag{1}$$

对 m_2 使用牛顿第二定律得

$$f(t)-B_2\dot{x}_2(t)-B_1[\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)]=m_2\ddot{x}_2(t) \tag{2}$$

由公式（2）得

$$\dot{x}_1(t)=\frac{m_2\ddot{x}_2(t)+(B_2+B_1)\dot{x}_2(t)-f(t)}{B_1} \tag{3}$$

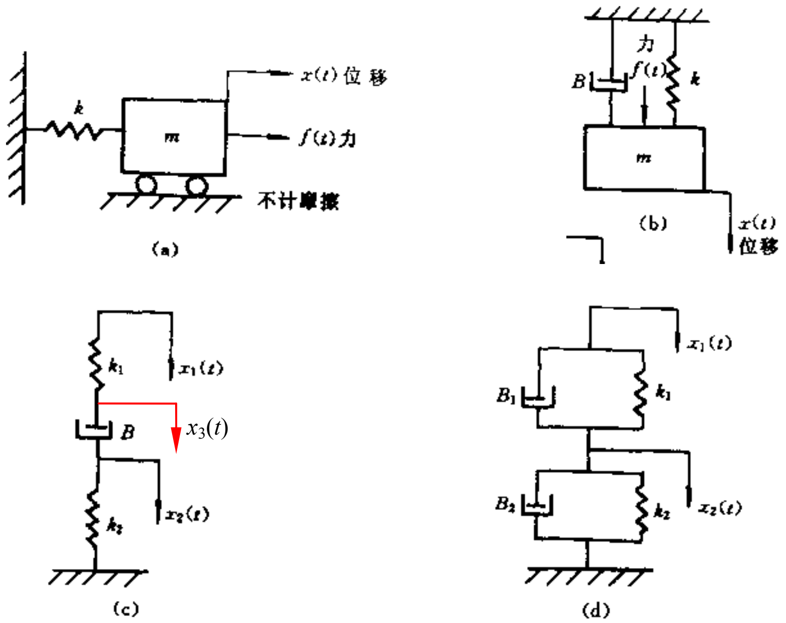
对（1）式等号两边同时求微分一次得

$$-B_1[\ddot{x}_1(t)-\ddot{x}_2(t)]-k\dot{x}_1(t)=m_1\dddot{x}_1(t) \tag{4}$$

将（3）式表示的 $\dot{x}_1(t)$ 及其二、三阶导数代入（4）并整理得到

$$m_1m_2\frac{\mathrm{d}^4x_2(t)}{\mathrm{d}t^4}+[m_2B_1+m_1(B_1+B_2)]\frac{\mathrm{d}^3x_2(t)}{\mathrm{d}t^3}+(m_2k+B_1B_2)\frac{\mathrm{d}^2x_2(t)}{\mathrm{d}t^2}+k(B_1+B_2)\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$=m_1\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}+B_1\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+kf(t)$$

3-6　求图题 3－6 所示的各机械系统的传递函数。

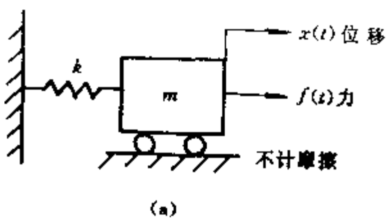


图题 3－6(a)、(b)中：$f(t)$——输入，$x(t)$——输出

(c)、(d)中：$x_1(t)$——输入，$x_2(t)$——输出

解：（a）对 m 利用牛顿第二定律得

$$f(t)-kx(t)=m\ddot{x}(t)$$



即 $$m\ddot{x}(t)+kx(t)=f(t)$$

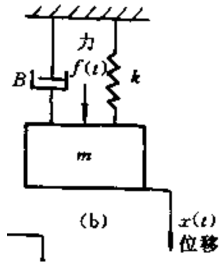
令 $X(s)=L[x(t)]$，$F(s)=L[f(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，等号两边同时做拉普拉斯变换得

$$(ms^2+k)X(s)=F(s)$$

由此得该系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+k}$$

（b）对 m 利用牛顿第二定律得



$$f(t)-B\dot{x}(t)-kx(t)=m\ddot{x}(t)$$

即 $$m\ddot{x}(t)+B\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)$$

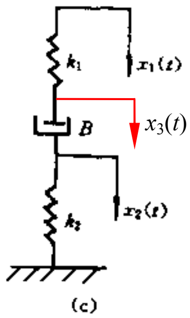
令 $X(s)=L[x(t)]$，$F(s)=L[f(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，等号两边同时做拉普拉斯变换得

$$(ms^2+Bs+k)X(s)=F(s)$$

由此得该系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+Bs+k}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

式中：$K=\dfrac{1}{k}$，$\omega_n=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ rad·s^{-1}，$\zeta=\dfrac{B}{2\sqrt{km}}$



（c）引入中间变量 $x_3(t)$，分别对 $x_2(t)$点和 $x_3(t)$点利用牛顿第二定律得

$$-B[\dot{x}_2(t)-\dot{x}_3(t)]-k_2x_2(t)=0$$
$$-B[\dot{x}_3(t)-\dot{x}_2(t)]-k_1[x_3(t)-x_1(t)]=0$$

令 $X_1(s)=L[x_1(t)]$，$X_2(s)=L[x_2(t)]$，$X_3(s)=L[x_3(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，对上两式等号两边同时做拉普拉斯变换得

$$-(Bs+k_2)X_2(s)+BsX_3(s)=0 \qquad (1)$$
$$-(Bs+k_1)X_3(s)+BsX_2(s)]+k_1X_1(s)=0 \qquad (2)$$

由（1）式得

$$X_3(s)=\frac{(Bs+k_2)X_2(s)}{Bs}$$

代入（2）式并整理得此系统的传递函数为

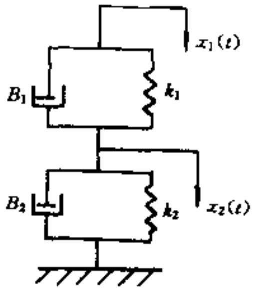
$$G(s)=\frac{X_2(s)}{X_1(s)}=\frac{Bk_1s}{B(k_1+k_2)s+k_1k_2}=\frac{\dfrac{B}{k_2}s}{B\left(\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}\right)s+1}=\frac{T_1s}{T_2s+1}$$

式中：$T_1=\dfrac{B}{k_2}$，$T_2=\dfrac{B}{k_1}+\dfrac{B}{k_2}$

（d）对 $x_2(t)$点利用牛顿第二定律得

$$-B_2\dot{x}_2(t)-B_1[\dot{x}_2(t)-\dot{x}_1(t)]-k_2x_2(t)-k_1[x_2(t)-x_1(t)]=0$$

即
$$(B_1+B_2)\dot{x}_2(t)+(k_1+k_2)x_2(t)=B_1\dot{x}_1(t)+k_1x_1(t)$$



(d)

令 $X_1(s)=L[x_1(t)]$，$X_2(s)=L[x_2(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，等号两边同时做拉普拉斯变换得

$$[(B_1+B_2)s+(k_1+k_2)]X_2(s)=(B_1s+k_1)X_1(s)$$

由此得该系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{X_2(s)}{X_1(s)}=\frac{B_1s+k_1}{(B_1+B_2)s+(k_1+k_2)}=\frac{k_1}{k_1+k_2}\frac{\frac{B_1}{k_1}s+1}{\frac{B_1+B_2}{k_1+k_2}s+1}=\frac{k_1}{k_1+k_2}\frac{T_1s+1}{T_2s+1}$$

式中：$T_1=\dfrac{B_1}{k_1}$，$T_2=\dfrac{B_1+B_2}{k_1+k_2}$

3-7　图题 3－7 所示 $f(t)$为输入力，系统的弹簧刚度为 k，轴的转动惯量为 J，阻尼系数为 B，系统的输出为轴的转角 $\theta(t)$，轴的半径为 r。求系统的传递函数。

解：利用相应力学定律得

$$rf(t)-B\dot{\theta}(t)-k\theta(t)=J\ddot{\theta}(t)$$

即
$$J\ddot{\theta}(t)+B\dot{\theta}(t)+k\theta(t)=rf(t)$$

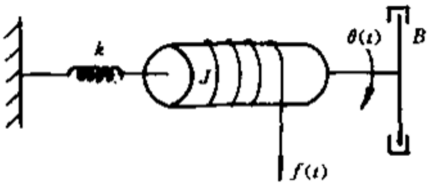
令 $F(s)=L[f(t)]$，$\Theta(s)=L[\theta(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，等号两边同时做拉普拉斯变换得

$$Js^2\Theta(s)+Bs\Theta(s)+k\Theta(s)=rF(s)$$

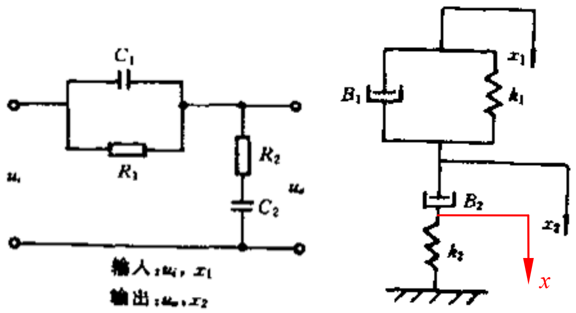
所以传递函数为

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{F(s)}=\frac{r}{Js^2+Bs+k}$$

3-8　证明图题 3－8(a)和(b)所示的系统是相似系统。



图题 3－7



(a)　(b)

图题 3－8

证明：（a）在 3-3 题中已经得到图题 3-8（a）所示电路的微分方程为

$$R_2C_1\frac{\mathrm{d}^2u_o}{\mathrm{d}t^2}+(\frac{R_2}{R_1}+\frac{C_1}{C_2}+1)\frac{\mathrm{d}u_o}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R_1C_2}u_o=R_2C_1\frac{\mathrm{d}^2u_i}{\mathrm{d}t^2}+(\frac{R_2}{R_1}+\frac{C_1}{C_2})\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R_1C_2}u_i$$

令 $U_i(s)=L[u_i(t)]$，$U_o(s)=L[u_o(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，等号两边同时做拉普拉斯变换得

$$R_2C_1s^2U_o(s)+(\frac{R_2}{R_1}+\frac{C_1}{C_2}+1)sU_o(s)+\frac{1}{R_1C_2}U_o(s)=R_2C_1s^2U_i(s)+(\frac{R_2}{R_1}+\frac{C_1}{C_2})sU_i(s)+\frac{1}{R_1C_2}U_i(s)$$

由此得其传递函数为

$$G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{R_2C_1s^2+(\frac{R_2}{R_1}+\frac{C_1}{C_2})s+\frac{1}{R_1C_2}}{R_2C_1s^2+(\frac{R_2}{R_1}+\frac{C_1}{C_2}+1)s+\frac{1}{R_1C_2}}$$

$$\underset{\text{分解因式}}{\overset{\text{通分、约分}}{=}}\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_1C_2s}$$

$$\overset{\text{分子分母同除}R_1R_2}{=}\frac{(C_1s+\frac{1}{R_1})(C_2s+\frac{1}{R_2})}{(C_1s+\frac{1}{R_1})(C_2s+\frac{1}{R_2})+\frac{C_2}{R_2}s}$$

$$\overset{\text{或分子分母同除}C_1C_2}{=}\frac{(R_1s+\frac{1}{C_1})(R_2s+\frac{1}{C_2})}{(R_1s+\frac{1}{C_1})(R_2s+\frac{1}{C_2})+\frac{R_1}{C_1}s}$$

（b）引入中间变量 x，分别对 x 和 x_2 利用牛顿第二定律得

$$\begin{cases}-B_2(\dot{x}_2-\dot{x})-B_1(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-k_1(x_2-x_1)=0\\-B_2(\dot{x}-\dot{x}_2)-k_2x=0\end{cases}$$

令 $X_1(s)=L[x_1(t)]$，$X_2(s)=L[x_2(t)]$，$X(s)=L[x(t)]$，在初始条件为 0 的条件下，等号两边同时做拉普拉斯变换得

$$\begin{cases}-B_2[sX_2(s)-sX(s)]-B_1[sX_2(s)-sX_1(s)]-k_1[X_2(s)-X_1(s)]=0\\-B_2[sX(s)-sX_2(s)]-k_2X(s)=0\end{cases}$$

消去 $X(s)$得

$$G(s)=\frac{X_2(s)}{X_1(s)}=\frac{(B_1s+k_1)(B_2s+k_2)}{(B_1s+k_1)(B_2s+k_2)+B_2k_2s}$$

（a）和（b）具有相似的传递函数，故这两个系统为相似系统。比较两式可知，两者参数相似关系为

$$B_1\propto R_2 \qquad B_2\propto R_1$$

$$k_1\propto\frac{1}{C_2} \qquad k_2\propto\frac{1}{C_1}$$

或

$$B_1 \propto C_1 \qquad B_2 \propto C_2$$
$$k_1 \propto \frac{1}{R_1} \qquad k_2 \propto \frac{1}{R_2}$$

【注】若两个系统的数学模型（如微分方程、传递函数等）具有相同的形式，则称为相似系统。在相似系统数学模型中占据相同位置的物理量，称为相似量。

3-9　若某系统在阶跃输入 $x(t)=1(t)$作用时，系统的输出响应为 $y(t)=1-e^{-2t}+e^{-t}$，试求系统的传递函数和脉冲响应函数。

解：(1)求传递函数

传递函数是在初始条件为零的情况下，系统输出的拉普拉斯变换与输入的拉普拉斯变换之比。

因为 $y(0)$=1-1+1≠0，所以，题中所给的单位阶跃响应为非 0 初始条件下的响应，因此，不能直接利用 $y(t)$的拉氏变换求系统的传递函数。

方法 1：由响应可知，系统的稳态响应为 1，所以系统的静态增益为 1；系统的瞬态响应有 2 项指数衰减项，所以，系统的传递函数有两个极点，分别为−2 和−1，即系统为二阶系统，而且因为稳态响应为 1，故可知系统微分方程的特解为 1，由此可知，系统微分方程中不存在输入的微分项，所以，系统的微分方程形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta\omega_n\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_n^2 y(t)=\omega_n^2 x(t)$$

在考虑初始条件的情况下，对上式做拉氏变换得

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2\zeta\omega_n sY(s)-2\zeta\omega_n y(0)+\omega_n^2Y(s)=\omega_n^2X(s)$$

即

$$(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)Y(s)=\omega_n^2X(s)+sy(0)+y'(0)+2\zeta\omega_n y(0)$$

亦即

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}X(s)+\frac{sy(0)+y'(0)+2\zeta\omega_n y(0)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{1}$$

（1）式中第一项即为系统 0 初始条件下的响应的拉氏变换。

由单位阶跃响应得

$$y(0)=1$$
$$y'(0)=1$$

将上述结果及 $X(s)=1/s$ 代入(1)式得单位阶跃响应的拉氏变换

$$Y(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s}+\frac{s+1+2\zeta\omega_n}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{2}$$

对题中给定的单位阶跃响应求拉氏变换得

$$Y(s)=L[y(t)]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}=\frac{s^2+4s+2}{s(s^2+3s+2)} \tag{3}$$

因为（2）和（3）式相等，所以（3）式分母与（2）式公分母比较得

$$2\zeta\omega_n = 3$$
$$\omega_n^2 = 2$$

代入（2）式得

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}\frac{1}{s} + \frac{s+4}{s^2+3s+4} \tag{4}$$

因为（1）式中第一项即为系统 0 初始条件下的响应的拉氏变换，所以（4）式中的第一项即为系统 0 初始条件下的响应的拉氏变换，即：

$$Y_{zs}(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}\frac{1}{s}$$

所以系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\dfrac{2}{s^2+3s+2}\dfrac{1}{s}}{\dfrac{1}{s}} = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

方法 2：由题中单位阶跃响应可知，系统的稳态响应为 1，所以系统的静态增益为 1；系统的瞬态响应有 2 项，所以，系统的传递函数有两个极点，分别为−2 和−1，故系统在 0 初始条件下的单位阶跃响应（对线性因果系统就是零状态响应）应该具有如下形式：

$$y_{zs}(t) = 1 + Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

因为初始条件为 0，所以有

$$y_{zs}(0) = 1 + A + B = 0$$
$$y'_{zs}(0) = 1 - 2A - B = 0$$

联立上两式解得

$$A = 1，B = -2$$

所以，系统在 0 初始条件下的单位阶跃响应为

$$y_{zs}(t) = 1 + e^{-2t} - 2e^{-t}$$

其拉氏变换为

$$Y_{zs}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \frac{2}{(s+2)(s+1)}\frac{1}{s}$$

已知输入信号为单位阶跃信号，其拉氏变换为

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

所以，系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\dfrac{2}{(s+2)(s+1)}\dfrac{1}{s}}{\dfrac{1}{s}} = \frac{2}{(s+2)(s+1)} = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

（2）求单位脉冲响应

由传递函数的定义可知

$$Y_\delta(s) = G(s)X_\delta(s)$$

而

$$X_\delta(s) = L[\delta(t)] = 1$$

所以

$$Y_\delta(s) = G(s)$$

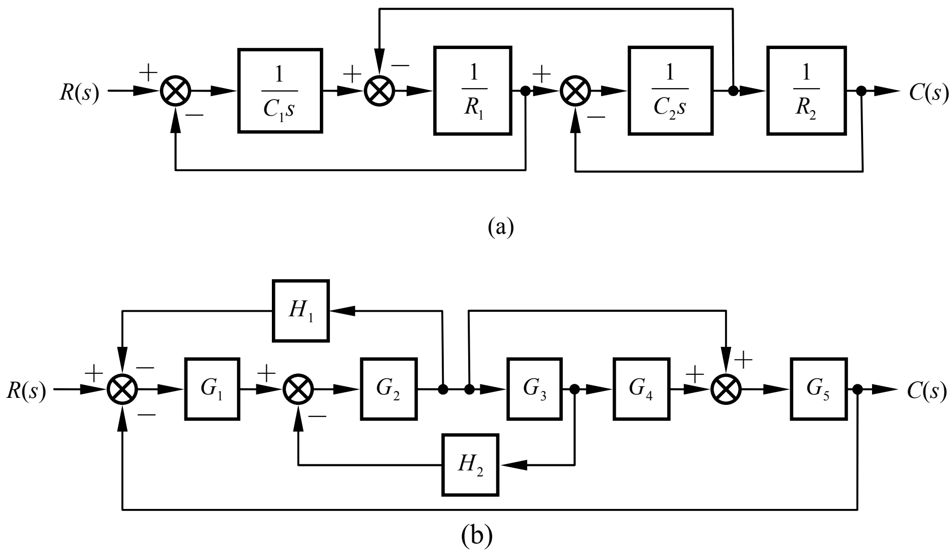
所以

$$y_\delta(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+3s+2}\right] = L^{-1}\left[-\frac{2}{s+2}+\frac{2}{s+1}\right]$$

$$= -2e^{-2t} + 2e^{-t} \quad t \geqslant 0$$

这样求得响应为零初始条件下的响应（零状态响应）。

3-10　运用方块图简化法则，求图题 3－10 各系统的传递函数。



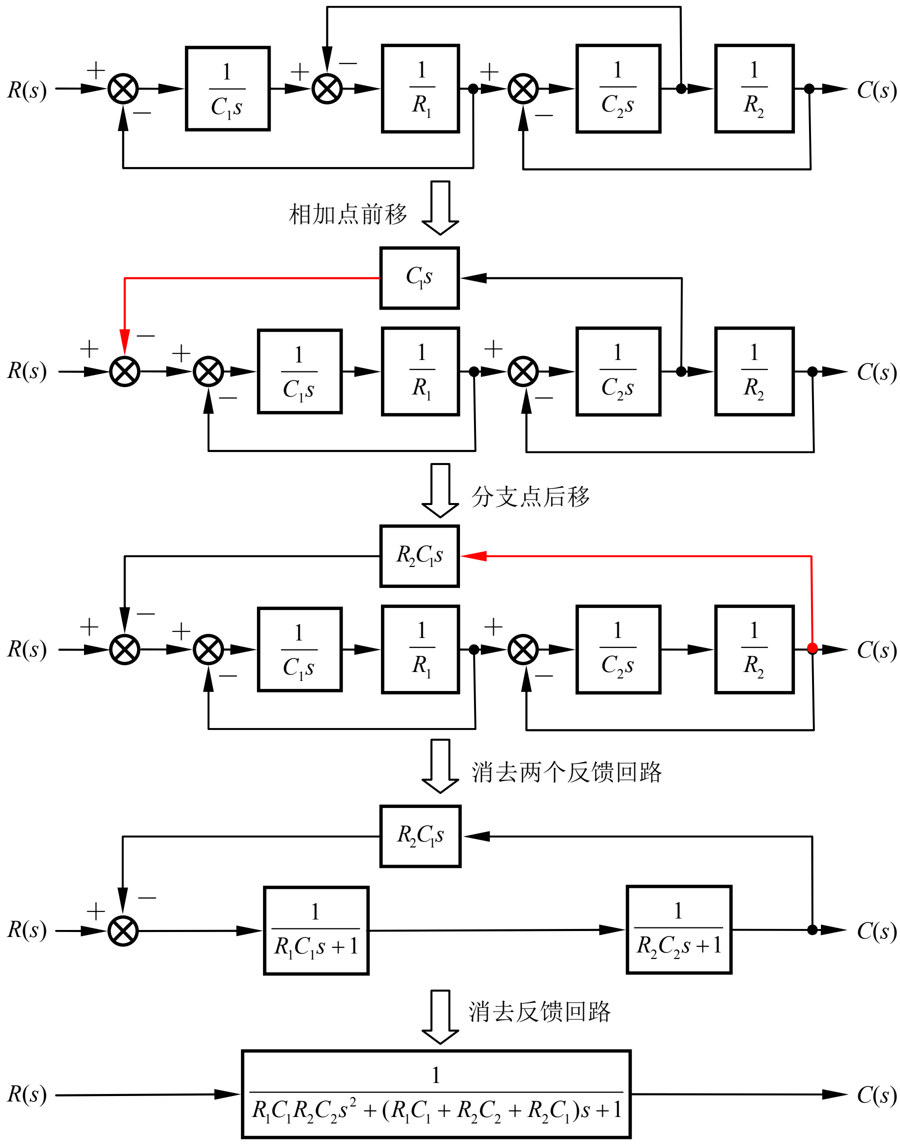
图题 3－10

解：（a）简化过程如图题解 3-10（a）所示，传递函数为

$$\frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1)s + 1}$$

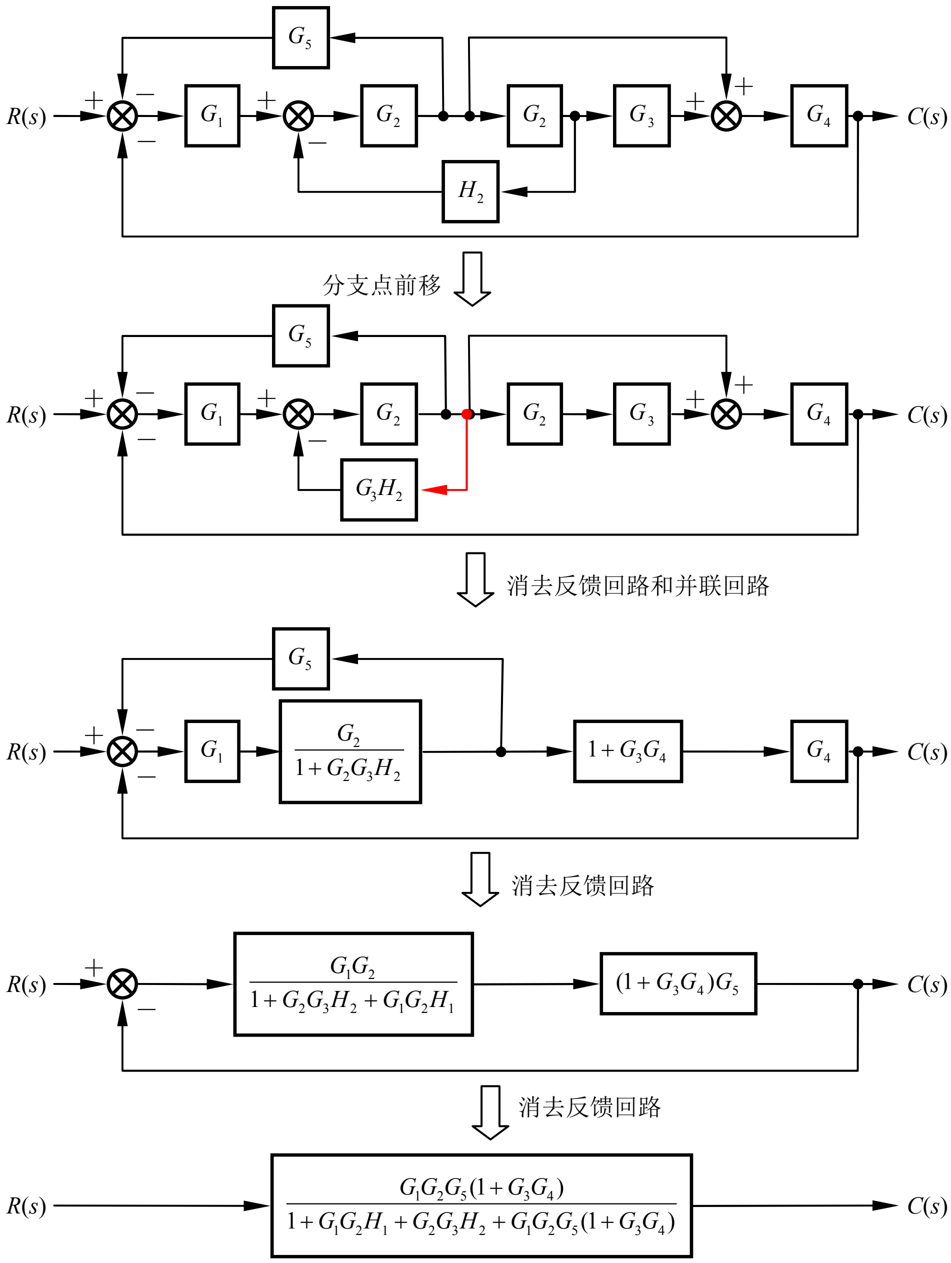
（b）简化过程如图题解 3-10（b）所示，传递函数为

$$\frac{G_1G_2G_5(1+G_3G_4)}{1+G_2G_3H_2+G_1G_2H_1+G_1G_2G_5(1+G_3G_4)}$$



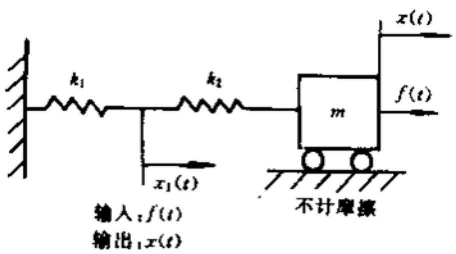
图题解 3-10（a） 图题 3-10（a）的简化过程

（b）



图题解 3-10（b） 图题 3-10（b）的简化过程

3-11 画出图题 3－11 所示系统的方块图，并写出其传递函数。



图题 3－11

解： 分别对质量 m 和 $x_1(t)$ 利用牛顿第二定律得

$$f(t)-k_2[x(t)-x_1(t)]=m\ddot{x}(t)$$

$$-k_1x_1(t)-k_2[x_1(t)-x(t)]=0$$

整理得

$$m\ddot{x}(t)+k_2x(t)=f(t)+k_2x_1(t)$$

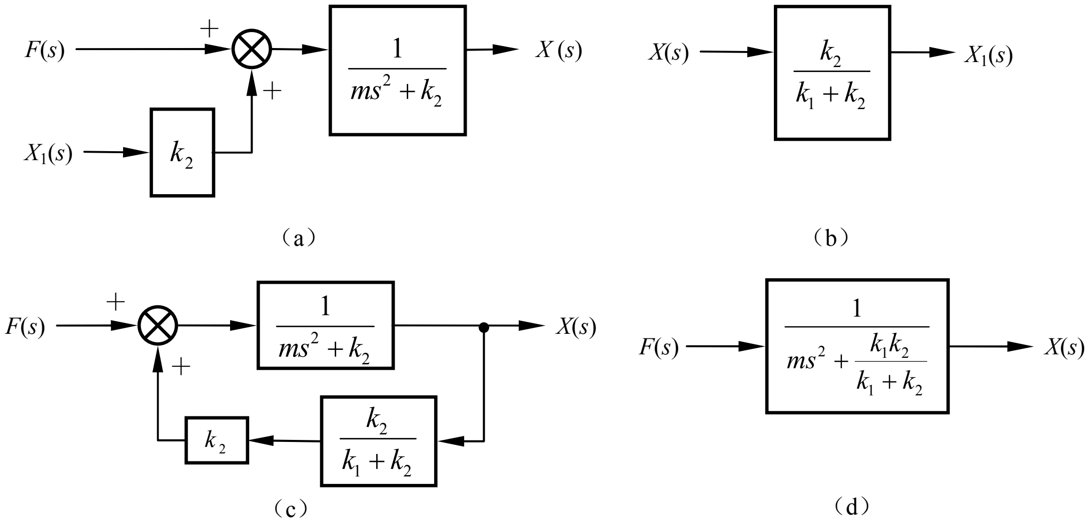
$$x_1(t)=\frac{k_2}{k_1+k_2}x(t)$$

在初始条件为 0 的情况下，对上两式等号两边同时做拉普拉斯变换得

$$(ms^2+k_2)X(s)=F(s)+k_2X_1(s)$$

$$X_1(s)=\frac{k_2}{k_1+k_2}X(s)$$

上两式的方块图分别如图题解 3-11（a）、（b）所示。



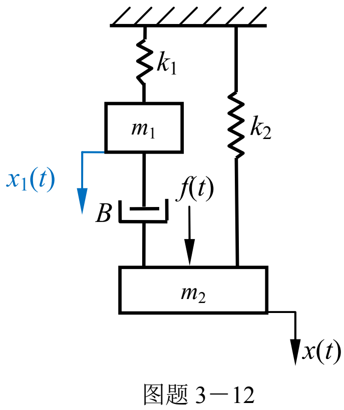
图题解 3-11

将方块图（a）、（b）合并得系统的方块图，如图解 3-11（c）所示，化简得方块图（d）。系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{\dfrac{1}{ms^2+k_2}}{1-\dfrac{1}{ms^2+k_2}\dfrac{k_2^2}{k_1+k_2}}=\frac{1}{ms^2+\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}}$$

[说明] 本题也可以先求出两个串联弹簧的等效刚度 $k=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$，然后用一个方程即可求出传递函数。

3-12　画出图题 3－12 所示系统的方块图，该系统在开始时处于静止状态，系统的输入为外力 $f(t)$，输出为位移 $x(t)$，并写出系统的传递函数。



图题 3－12

解：设 m_1 的位移为 $x_1(t)$，如图题 3-12 所示。分别对质量 m_1 和 m_2 利用牛顿第二定律得

$$-B[\dot{x}_1(t)-\dot{x}(t)]-k_1x_1(t)=m_1\ddot{x}_1(t)$$
$$f(t)-B[\dot{x}(t)-\dot{x}_1(t)]-k_2x(t)=m_2\ddot{x}(t)$$

整理得

$$m_1\ddot{x}_1(t)+B\dot{x}_1(t)+k_1x_1(t)=B\dot{x}(t)$$
$$m_2\ddot{x}(t)+B\dot{x}(t)+k_2x(t)=f(t)+B\dot{x}_1(t)$$

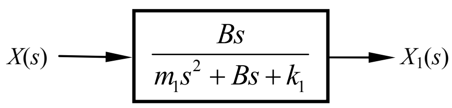
在初始条件为 0 的条件下，对上两式等号两边同时做拉普拉斯变换得

$$(m_1s^2+Bs+k_1)X_1(s)=BsX(s)$$
$$(m_2s^2+Bs+k_2)X(s)=F(s)+BsX_1(s)$$

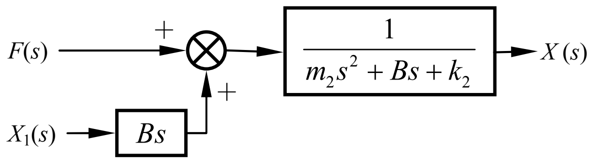
即

$$X_1(s)=\frac{Bs}{m_1s^2+Bs+k_1}X(s)$$
$$X(s)=\frac{1}{m_2s^2+Bs+k_2}[F(s)+BsX_1(s)]$$

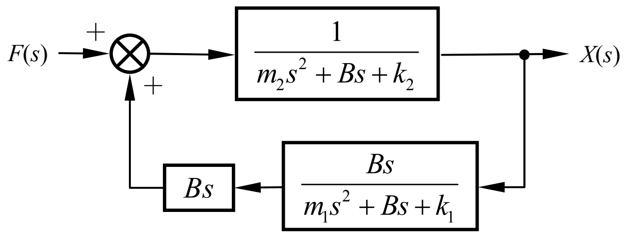
上两式的方块图分别如图题解 3-12（a）、（b）所示。



（a）



（b）



（c）

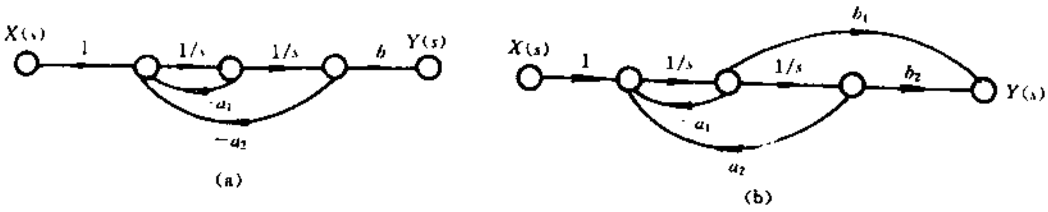
图题解 3-12

将方块图（a）、（b）合并得系统的方块图，如图解 3-12（c）所示，化简一次得方块图（d）。

系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{\dfrac{1}{m_2s^2+Bs+k_2}}{1-\dfrac{B^2s^2}{m_1s^2+Bs+k_1}\dfrac{1}{m_2s^2+Bs+k_2}}$$
$$=\frac{m_1s^2+Bs+k_1}{m_1m_2s^4+(m_1+m_2)Bs^3+(m_1k_2+m_2k_1)s^2+(k_1+k_2)Bs+k_1k_2}$$

3-13　求图题 3－13 所示系统的传递函数。



图题 3－13

解：利用梅逊公式

（ a ）前向通路只有一条，该前向通路的传递函数为

$$t_1 = 1\times\frac{1}{s}\times\frac{1}{s}\times b = \frac{b}{s^2}$$

有两条回路，传递函数分别为

$$L_{11} = \frac{1}{s}\times(-a_1) = -\frac{a_1}{s}$$

$$L_{12} = \frac{1}{s}\times\frac{1}{s}\times(-a_2) = -\frac{a_2}{s^2}$$

因为所有两个回路具有一条公共支路，所以没有不接触回路，因此特征式 Δ 为

$$\Delta = 1-(L_{11}+L_{12}) = 1-(-\frac{a_1}{s}-\frac{a_2}{s^2}) = 1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}$$

因为两个回路都与唯一的前向通路相接触，故从 Δ 中去掉两个回路的传递函数即可得到前向通路的特征式的余因子 Δ_1

$$\Delta_1=1$$

将上述结果代入梅逊公式得到系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_n t_n\Delta_n}{\Delta} = \frac{t_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{1\times\frac{b}{s^2}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}} == \frac{b}{s^2+a_1s+a_2}$$

（b）前向通路有两条，这两条前向通路的传递函数分别为

$$t_1 = 1\times\frac{1}{s}\times b_1 = \frac{b_1}{s}$$

$$t_2 = 1\times\frac{1}{s}\times\frac{1}{s}\times b_2 = \frac{b_2}{s^2}$$

有两条回路，传递函数分别为

$$L_{11} = \frac{1}{s}\times(-a_1) = -\frac{a_1}{s}$$

$$L_{12} = \frac{1}{s}\times\frac{1}{s}\times(-a_2) = -\frac{a_2}{s^2}$$

因为所有两个回路具有一条公共支路，所以没有不接触回路，因此特征式 Δ 为

$$\Delta = 1-(L_{11}+L_{12}) = 1-(-\frac{a_1}{s}-\frac{a_2}{s^2}) = 1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}$$

因为两个回路都与两个前向通路相接触，故从 Δ 中去掉两个回路的传递函数即可得到两个前向通路的特征式的余因子

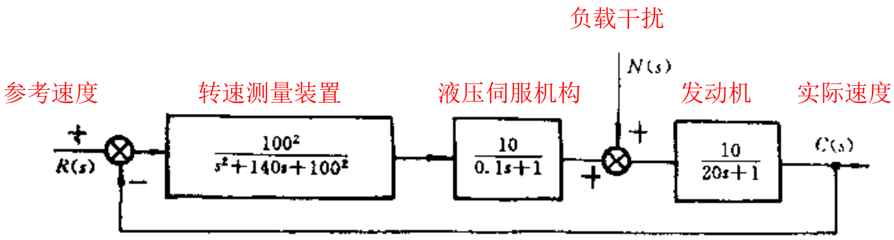
$$\Delta_1=1$$

$$\Delta_2=1$$

将上述结果代入梅逊公式得到系统的传递函数为

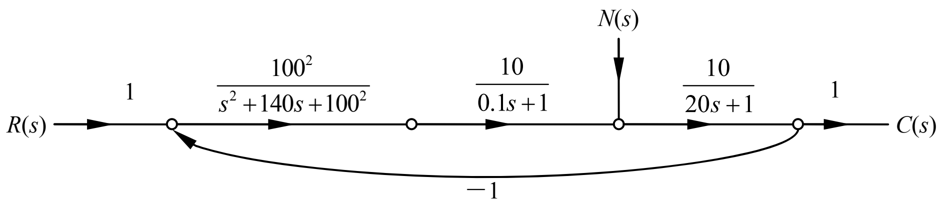
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_n t_n\Delta_n}{\Delta} = \frac{t_1\Delta_1+t_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{1\times\frac{b_1}{s}+1\times\frac{b_2}{s^2}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}} == \frac{sb_1+b_2}{s^2+a_1s+a_2}$$

3-14　图题 3－14 所示为发动机速度控制系统的方块图。发动机速度由转速测量装置进行测量。试画出该系统的信号流图。



图题 3－14

解：其信号流图如图题解 3-14 所示。



图题解 3-14

3-15　对传递函数

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}$$

试推导对应的状态方程表达式。

解法 1：（套公式—笨办法）。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3} = \frac{2s+5}{s^2+4s+3}+1$$

与教材式（3-121）比较得到

$$n=2，a_0=3，a_1=4$$
$$b_0'=5，b_1'=2，b_2=1$$

代入教材式（3-130）得状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+u$$

式中，u 为输入变量。

解法 2：（参考现代控制工程—Modern Control Engineering．［美］Katsuhiko Ogata—绪方胜彦著．卢伯英，于海勋等译．北京：电子工业出版社，2000 年 5 月第 3 版）

令
$$x_1=y-\beta_0 u$$
$$x_2=\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1 u=\dot{x}_1-\beta_1 u$$

式中，β_0，β_1 由下式确定

$$\beta_0=b_2=1$$
$$\beta_1=b_1-a_1\beta_0=6-4\times 1=2$$
$$\beta_2=b_0-a_1\beta_1-a_0\beta_0=8-4\times 2-3\times 1=-3$$

代入上式得

$$\dot{x}_1=x_2+\beta_1 u=x_2+2u$$

而

$$\dot{x}_2=-a_0x_1-a_1x_2+\beta_2 u=-3x_1-4x_2-3u$$

所以状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\beta_0 u=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+u$$

【注】结果与解法 1 不同，这是因为状态空间表达式不是唯一的（取决于所选取的状态变量，可能有无穷多个）。

解法 3：利用拉氏反变换

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}=\frac{2s+5}{(s+1)(s+3)}+1=\frac{3}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+3}+1$$

即

$$Y(s)=\frac{3}{2}\frac{1}{s+1}U(s)+\frac{1}{2}\frac{1}{s+3}U(s)+U(s)$$

令

$$X_1(s)=\frac{3}{2}\frac{1}{s+1}U(s)$$

$$X_2(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s+3}U(s)$$

则

$$sX_1(s)=-X_1(s)+\frac{3}{2}U(s)$$

$$sX_2(s)=-3X_2(s)+\frac{1}{2}U(s)$$

$$Y(s)=X_1(s)+X_2(s)+U(s)$$

对上面三式做拉氏反变换得

$$\dot{x}_1=-x_1+\frac{3}{2}u$$

$$\dot{x}_2=-3x_2+\frac{1}{2}u$$

$$y=x_1+x_2+u$$

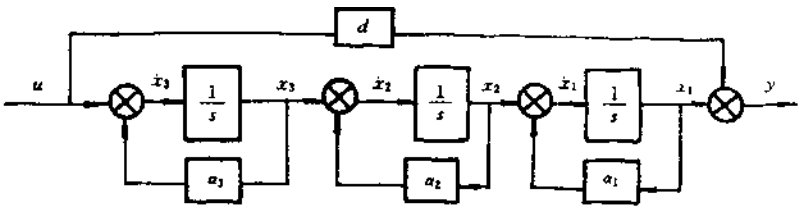
所以状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}u$$

输出方程为

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+u$$

3-16 图题 3－16 所示系统，以图中所标记的 x_1、x_2、x_3 为状态变量，推导其状态空间表达式。u、y 分别为输入、输出，α_1、α_2、α_3 是标量。



图题 3－16

解：由图可知

$$y=x_1+du$$

$$\dot{x}_3=\alpha_3x_3+u$$

$$\dot{x}_2=\alpha_2x_2+x_3$$

$$\dot{x}_1=\alpha_1x_1+x_2$$

所以系统的状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 1 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 1\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+du$$

3-17　设系统的微分方程为

$$\dddot{y}+7\ddot{y}+14\dot{y}+8y=3u$$

试求系统的状态空间表达式。

解：这是一个三阶系统，输入变量为 u，输出变量为 y。选取 3 个状态变量 x_1，x_2，x_3，它们分别为

$$x_1=y$$
$$x_2=\dot{x}_1=\dot{y}$$
$$x_3=\dot{x}_2=\ddot{y}$$

代入原微分方程中得

$$\dot{x}_3=\dddot{y}=-7\ddot{y}-14\dot{y}-8y+3u=-8x_1-14x_2-7x_3+3u$$

故系统的状态方程和输出方程为（合称状态空间表达式）

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -14 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 3\end{bmatrix}u$$

输出方程为

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

3-18　给定系统传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=G(s)=\frac{s^2+2s+3}{2s^3+4s^2+6s+10}$$

试写出它的状态空间表达式。

解：（套公式）。

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+2s+3}{2s^3+4s^2+6s+10}=\frac{\frac{1}{2}s^2+s+\frac{3}{2}}{s^3+2s^2+3s+5}$$

与教材式（3-121）比较得到

$$n=3，a_0=5，a_1=3，a_2=2$$
$$b_0'=3/2，b_1'=1，b_2'=1/2，b_3=0$$

代入教材式（3-130）得状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -5 & -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

式中，u 为输入变量。

第4章 系统的瞬态响应与误差分析

复习思考题

1.　时间响应由哪两部分组成，它们的含义是什么？

解答：时间响应是指系统的响应（输出）在时域上的表现形式，或系统的动力学方程在一定初始条件下的时域解。或者说系统在输入信号激励下，其输出量随时间变化的函数关系。

按分类的原则不同，时间响应有不同的分类方法。

按响应的来源分：零状态响应，即初始状态为零时，由系统的输入引起的响应；零输入响应，即系统的输入为零时，由初始状态引起的响应。

按响应的性质分为强迫响应项和自由响应项。

对于稳定的系统，其时间响应又可分为瞬态响应项和稳态响应项。

2.　脉冲响应函数的定义及如何利用脉冲响应函数来求系统对任意时间函数输入时的输出时间响应？

解答：当一个系统受到一个单位脉冲激励(输入)时，它所产生的反应或响应(输出〕定义为脉冲响应函数。

系统对任意时间函数输入时的输出时间响应：

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

式中 $g(t)$为脉冲响应函数。

3.　一阶系统的脉冲响应、阶跃响应的定义及其曲线形状。

解答：一阶系统的脉冲响应：一阶系统对脉冲函数的响应。曲线形状如图 4-1fs 所示。

一阶系统的阶跃响应：一阶系统对阶跃函数的响应。曲线形状如图 4-2fs 所示。

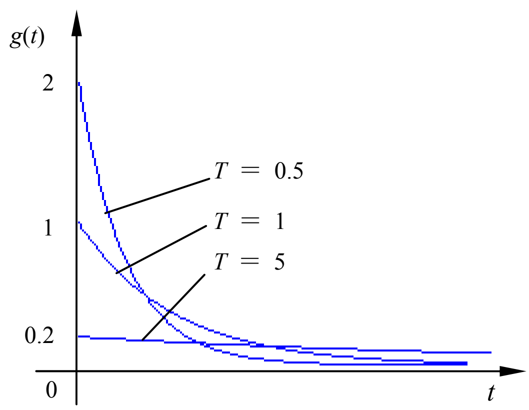


图 4-1fs　一阶系统 $G(s)=1/(Ts+1)$ 的单位脉冲响应曲线

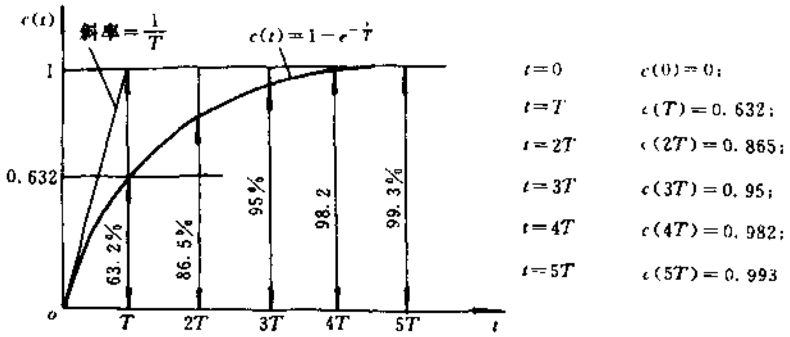


图 4-2fs 一阶系统 $G(s)=1/(Ts+1)$ 的单位阶跃响应曲线

4. 如何描述二阶系统的阶跃响应及其时域性能指标。
5. 试分析二阶系统 ω_n 和 ζ 对系统性能的影响。
6. 试分析二阶系统特征根的位置及阶跃响应曲线之间的关系。
7. 误差和稳态误差的定义以及与系统哪些因素有关。
8. 如何计算干扰作用下的稳态误差。

习　题

4-1　√设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{4}{s(s+5)}$$

求这个系统的单位阶跃响应。

解法 1：系统的闭环传递函数为（假定为负反馈）

$$\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\frac{4}{s(s+5)}}{1+\frac{4}{s(s+5)}}=\frac{4}{s^2+5s+4}=\frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

所以系统的单位阶跃响应的拉氏变换为

$$C(s)=\frac{4}{(s+1)(s+4)}\frac{1}{s}=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1}+\frac{K_3}{s+4}$$

利用部分分式法计算得到

$$K_1=C(s)s\big|_{s=0}=1,\quad K_2=C(s)(s+1)\big|_{s=-1}=-\frac{4}{3},\quad K_3=C(s)(s+4)\big|_{s=-4}=\frac{1}{3}$$

所以
$$C(s)=\frac{1}{s}-\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+4}$$

对上式做拉普拉氏反变换得到单位阶跃响应为

$$c(t)=1(t)-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t}\quad (t\geqslant 0)$$

解法 2：利用教材上的结论

系统的闭环传递函数为（假定为负反馈）

$$\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{4}{s(s+5)}}{1+\dfrac{4}{s(s+5)}}=\frac{4}{s^2+5s+4}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

上式等号两边比较得

$$\omega_n^2=4\text{，}\quad 2\zeta\omega_n=5$$

解得：$\omega_n=2\ \ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$（负根舍掉），$\zeta=\dfrac{5}{4}$

这是一个过阻尼二阶震荡系统，有两个不相等的负实数极点：$s_1=-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n=-4$，$s_2=-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n=-1$，所以，该单位阶跃响应为

$$c(t)=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{-p_1t}}{p_1}-\frac{e^{-p_2t}}{p_2}\right)\quad (t\geqslant 0)$$

式中：$p_1=-s_1=4$，$p_2=-s_2=1$，代入上式得阶跃响应为

$$c(t)=1+\frac{4}{3}\left(\frac{e^{-4t}}{4}-e^{-t}\right)=1+\frac{1}{3}\left(e^{-4t}-4e^{-t}\right)=1+\frac{1}{3}e^{-4t}-\frac{4}{3}e^{-t}\quad (t\geqslant 0)$$

4-2　√设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)}$$

试求系统的上升时间、峰值时间、最大超调量和调整时间。

解法 1：直接套用教材上的结论。系统的闭环传递函数为（假定为负反馈）

$$\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{1}{s(s+1)}}{1+\dfrac{1}{s(s+1)}}=\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

等号两边比较得 ω_n=1 $\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$（负根舍掉），ζ=0.5。这是一个欠阻尼二阶震荡系统，所以

上升时间：$$t_r=\frac{\pi-\arctan\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{\pi-\arctan\dfrac{\sqrt{1-0.5^2}}{0.5}}{1\times\sqrt{1-0.5^2}}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{9}\approx 2.418(\mathrm{s})$$

峰值时间：$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{\pi}{1\times\sqrt{1-0.5^2}}=\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\approx 3.628(\mathrm{s})$$

最大超调量：$$M_p=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=e^{-\frac{0.5\pi}{\sqrt{1-0.5^2}}}=e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}}\approx 0.163=16.3\%$$

调整时间（用近似公式）：

$$t_s=\frac{\ln 100-\ln\delta-\ln\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n}=\frac{\ln 100-\ln\delta-\ln\sqrt{1-0.5^2}}{0.5\times 1}\approx\begin{cases}6.279(\mathrm{s}) & (\delta=5)\\ 8.112(\mathrm{s}) & (\delta=2)\end{cases}$$

调整时间的较准确值（用 Matlab 按准确的理论响应曲线测量的结果）：

$$t_s\approx\begin{cases}5.289(\mathrm{s}) & (\delta=5)\\ 8.076(\mathrm{s}) & (\delta=2)\end{cases}$$

解法 2：直接按指标定义求解。系统的闭环传递函数为（假定为负反馈）

$$G_B(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{1}{s(s+1)}}{1+\dfrac{1}{s(s+1)}}=\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

等号两边比较得 ω_n=1 rad·s^{-1}（负根舍掉），ζ=0.5。这是一个欠阻尼二阶系统，其单位阶跃响应为

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})=1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\pi}{3})\quad (t\geqslant 0)$$

然后按着指标的定义求解（参见教材中的求解过程）。

4-3 √设有一闭环系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

为了使系统对阶跃输入的响应，有约 5%的超调量和 2s 的调整时间，试求 ζ 和 ω_n 的值应等于多大。

解：设允许的误差范围为 δ%，系统为欠阻尼系统，则根据题意得到

$$M_p=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=5\% \tag{1}$$

$$t_s=\frac{\ln 100-\ln\delta-\ln\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta\omega_n}=2 \tag{2}$$

由（1）式解得（舍掉负根–0.69）

$$\zeta\approx 0.69$$

将 δ%=5%和 $\zeta\approx$0.69 代入（2）式解得

$$\omega_n\approx 2.405\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

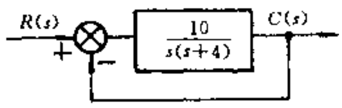
将 δ%=2%和 $\zeta\approx$0.69 代入（2）式解得

$$\omega_n\approx 3.069\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

4-4 √图题 4－4 所示系统，当输入 $r(t)=10t$ 和 $r(t)=4+6t+3t^2$ 时，求系统的稳态误差。

解：系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{10}{s(s+4)}$$



图题 4－4

开环增益 K=10/4=2.5。

复域系统误差为

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{R(s)}{1+\dfrac{10}{s(s+4)}}=\frac{10(s+4)R(s)}{s^2+4s+10}$$

（1）**解法 1**：利用教材的结论。这是一个 1 型系统，所以其单位斜坡响应的稳态误差为

$$e_{ssu}=\frac{1}{K}=\frac{1}{2.5}=0.4$$

当 $r(t)=10t$ 时的稳态误差为

$$e_{ss}=10e_{ssu}=10\times 0.4=4$$

解法 2：按定义推导。当 $r(t)=10t$ 时，$R(s)=10/s^2$，代入上述误差的拉氏变换式得到

$$E(s)=\frac{10(s+4)}{s(s^2+4s+10)}$$

利用拉普拉斯变换的终值定理得系统的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{10(s+4)}{s(s^2+4s+10)}=4$$

（2）**解法 1**：利用教材的结论。这是一个 1 型系统，其静态位置、速度和加速度误差系数分别为

$$K_p=\infty，K_v=K=2.5，K_a=0$$

根据线性系统的叠加原理可知，系统对 $r(t)=4+6t+3t^2$ 响应的稳态误差为

$$e_{ss}=\frac{4}{1+K_p}+\frac{6}{K_v}+\frac{6}{K_a}=\frac{4}{1+\infty}+\frac{6}{2.5}+\frac{6}{0}=\infty$$

解法 2：按定义推导。当 $r(t)=4+6t+3t^2$ 时，$R(s)=\frac{4}{s}+\frac{6}{s^2}+\frac{6}{s^3}$，代入上述误差的拉氏变换式得到

$$E(s)=\frac{s(s+4)(\frac{4}{s}+\frac{6}{s^2}+\frac{6}{s^3})}{s^2+4s+10}=\frac{(4s^2+6s+6)(s+4)}{s^2(s^2+4s+10)}$$

利用拉普拉斯变换的终值定理得系统的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{(4s^2+6s+6)(s+4)}{s^2(s^2+4s+10)}=\infty$$

4-5　设题 4－4 中的前向传递函数变为

$$G(s)=\frac{10}{s(s+1)(10s+1)}$$

输入分别为 $r(t)=10t$，$r(t)=4+6t+3t^2$ 和 $r(t)=4+6t+3t^2+1.8t^3$ 时，求系统的稳态误差。

解：系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{10}{s(s+1)(10s+1)}$$

其开环增益为 K=10/1=10。

复域系统误差为

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{R(s)}{1+\dfrac{10}{s(s+1)(10s+1)}}=\frac{s(s+1)(10s+1)R(s)}{10s^3+11s^2+s+10}$$

（1）**解法 1**：利用教材的结论。这是一个 1 型系统，开环增益 K=10，所以其单位斜坡响应的稳态误差为

$$e_{ssu}=\frac{1}{K}=\frac{1}{10}=0.1$$

当 $r(t)$ ＝ $10t$ 时的稳态误差为

$$e_{ss}=10e_{ssu}=10\times 0.1=1$$

解法 2：按定义推导。

当 $r(t)$ ＝ $10t$ 时，$R(s)$ ＝ $10/s^2$，代入上述误差公式得到

$$E(s)==\frac{s(s+1)(10s+1)R(s)}{10s^3+11s^2+s+10}=\frac{10(s+1)(10s+1)}{s(10s^3+11s^2+s+10)}$$

利用拉普拉斯变换的终值定理得系统的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{10(s+1)(10s+1)}{s(10s^3+11s^2+s+10)}=1$$

（2）当 $r(t)$ ＝ 4 ＋ $6t$ ＋ $3t^2$ 时

利用上述方法可分别求得系统对单位阶跃信号 $1(t)$、单位斜坡信号（t）和加速度信号（t^2）的稳态误差为

$$e_{ss1}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{(s+1)(10s+1)}{(10s^3+11s^2+s+10)}=0$$

$$e_{ss2}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{(s+1)(10s+1)}{s(10s^3+11s^2+s+10)}=\frac{1}{10}$$

$$e_{ss3}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{2(s+1)(10s+1)}{s^2(10s^3+11s^2+s+10)}=\infty$$

根据线性系统的叠加特性可得系统对 $r(t)$ ＝ 4 ＋ $6t$ ＋ $3t^2$ 响应的稳态误差为

$$e_{ss}=4e_{ss1}+6e_{ss2}+3e_{ss3}=\infty$$

（3）当 $r(t)$ ＝ 4 ＋ $6t$ ＋ $3t^2$ ＋ $1.8t^3$ 时

系统对信号 t^3 的稳态误差为

$$e_{ss4}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{6(s+1)(10s+1)}{s^3(10s^3+11s^2+s+10)}=\infty$$

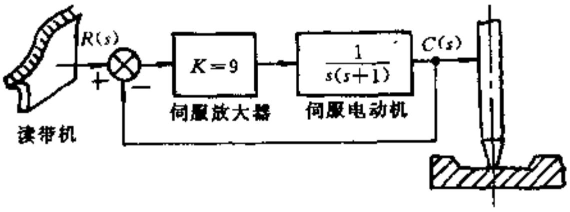
根据线性系统的叠加特性可得系统对 $r(t)$ ＝ 4 ＋ $6t$ ＋ $3t^2$ ＋ $1.8t^3$ 响应的稳态误差为

$$e_{ss}=4e_{ss1}+6e_{ss2}+3e_{ss3}+1.8e_{ss4}=\infty$$

【注】此题所给系统是一个不稳定系统（因为有一对共轭极点的实部大于 0。特征方程的根=闭环传递函数极点：-1.4857，0.2069±j0.7974），所以上述计算结果毫无意义。若将系统改成

$G(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}$，则系统稳定。

4-6　√图题 4－6 为由穿孔纸带输入的数控机床的位置控制系统方块图，试求



图题 4－6

（1）系统的无阻尼自然频率 ω_n 和阻尼比 ζ。

（2）单位阶跃输入下的超调量 M_p 和上升时间 t_r。

（3）单位阶跃输入下的稳态误差。

（4）单位斜坡输入下的稳态误差。

解：系统的前向传递函数为

$$G(s)=\frac{9}{s(s+1)}$$

系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{9}{s(s+1)}}{1+\dfrac{9}{s(s+1)}}=\frac{9}{s^2+s+9}=\frac{3^2}{s^2+2\times\dfrac{1}{6}\times 3s+3^2}$$

（1）由闭环传递函数可知，这是一个二阶震荡系统

$$\omega_n=3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\zeta=\frac{1}{6}$$

（2）最大超调量：$M_p=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=e^{-\frac{\frac{1}{6}\pi}{\sqrt{1-(\frac{1}{6})^2}}}\approx 0.588=58.8\%$

上升时间：$t_r=\dfrac{\pi-\arctan\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\dfrac{\pi-\arctan\dfrac{\sqrt{1-(1/6)^2}}{1/6}}{3\times\sqrt{1-(1/6)^2}}\approx 0.588(\text{s})$

（3）当 $r(t)=1(t)$时，$R(s)=1/s$，复域系统误差为

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{1}{s}}{1+\dfrac{9}{s(s+1)}}=\frac{s+1}{s^2+s+9}$$

利用拉普拉斯变换的终值定理得系统对单位阶跃输入响应的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{s+1}{s^2+s+9}=0$$

也可以利用教材上的结论求解（这是个 1 型系统，开环增益 K=9。1 型系统对单位阶跃输入响应的稳态误差为 0）。

（4）当 $r(t) = t$ 时，$R(s) = 1/s^2$，复域的系统误差为

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\frac{1}{s^2}}{1+\frac{9}{s(s+1)}}=\frac{s+1}{s(s^2+s+9)}$$

利用拉普拉斯变换的终值定理得系统对单位斜坡输入响应的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{s+1}{s(s^2+s+9)}=\frac{1}{9}$$

也可以利用教材上的结论求解（这是个 1 型系统，开环增益 K=9。1 型系统对单位斜坡输入响应的稳态误差为 $e_{ss}=1/K=1/9$）。

4-7 √求图题 4－7 所示带有速度控制的控制系统的无阻尼自然频率 ω_n，阻尼比 ζ 及最大超调量 M_p（取 $K = 1500$，$\tau_d = 0.01$(s)）。

图题 4－7

解：系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{75s+7500}{s^2+109.5s+7500}=\frac{75s+7500}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{75s+7500}{[s-(-\zeta+j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n][s-(-\zeta-j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n]}$$

等号两边比较得

$$\omega_n=\sqrt{7500}\approx 86.603\ \ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$2\zeta\omega_n=109.5$$

$$\zeta=\frac{109.5}{2\omega_n}\approx 0.632$$

当输入为单位阶跃信号时，$R(s)=1/s$，所以

$$C(s)=\frac{75s+7500}{[s-(-\zeta+j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n][s-(-\zeta-j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n]}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{K_1}{s-(-\zeta+j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n}+\frac{K_2}{s-(-\zeta-j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n}+\frac{K_3}{s}$$

利用部分分式法计算得到

$$K_1=-\frac{1}{2}+j\frac{100\zeta-\omega_n}{200\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$K_2=K_1^*=-\frac{1}{2}-j\frac{100\zeta-\omega_n}{200\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$K_3=1$$

对 $C(s)$进行拉氏逆变换得到系统的阶跃响应为

$$c(t)=K_1e^{(-\zeta+j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n}+K_2e^{(-\zeta-j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_n}+K_3$$

将 K_1、K_2、K_3 代入上式中，并整理得

$$c(t)=1-e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)-\frac{100\zeta-\omega_n}{100\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$$

$$=1-e^{-\zeta\omega_n t}\frac{\sqrt{100^2-200\zeta\omega_n+\omega_n^2}}{100\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\arctan\frac{100\sqrt{1-\zeta^2}}{100\zeta-\omega_n})$$

令

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=t_p}=0$$

解得第一个峰值时间为

$$t_p=\frac{\pi+\arctan\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}-\arctan\dfrac{100\sqrt{1-\zeta^2}}{100\zeta-\omega_n}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{\pi-\arctan\dfrac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{100-\zeta\omega_n}}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

将 t_p 代入 $c(t)$中可得到最大超调量为

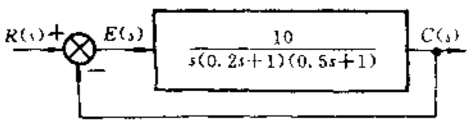
$$M_p=c(t_p)-1=-e^{-\zeta\omega_n t_p}\frac{\sqrt{100^2-200\zeta\omega_n+\omega_n^2}}{100\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\pi+\arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})$$

$$=e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi-\arctan\frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{100-\zeta\omega_n})}\frac{\sqrt{100^2-200\zeta\omega_n+\omega_n^2}}{100}$$

将 ω_n 和 ζ 代入上式求得

$$M_p=e^{-\frac{0.632}{\sqrt{1-0.632^2}}(\pi-\arctan\frac{86.603\sqrt{1-0.632^2}}{100-109.5/2})}\frac{\sqrt{100^2-100\times109.5+7500}}{100}\approx0.138=13.8\%$$

4-8　求图题 4－8 所示系统的静态误差系数 K_p、K_v、K_a，当输入是 $40t$ 时，稳态速度误差等于多少？



图题 4－8

解：这是一个 1 型系统，其开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

开环增益 K=10。

静态位置误差系数　　$K_p=\lim_{s\to0}G(s)H(s)=\lim_{s\to0}\frac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}=\infty$

静态速度误差系数 $K_v=\lim\limits_{s\to0}sG(s)H(s)=\lim\limits_{s\to0}\dfrac{10s}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}=10$

静态加速度误差系数 $K_a=\lim\limits_{s\to0}s^2G(s)H(s)=\lim\limits_{s\to0}\dfrac{10s^2}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}=0$

当输入是 $40t$ 时，稳态速度误差为

$$
\begin{aligned}
e_{ss}&=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}\\
&=\lim_{s\to0}\frac{s}{1+\dfrac{10}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}}\times\frac{40}{s^2} \qquad \text{或者 } e_{ss}=\frac{40}{K}=\frac{40}{10}=4\\
&=4
\end{aligned}
$$

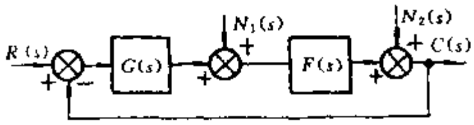
【注】此题所给系统是一个不稳定系统（可以用劳斯稳定判据判别）（闭环传递函数的三个极点为：-7.4572，0.2286±j3.6548），所以上述计算结果毫无意义。

4-9　控制系统的结构如题 4－9 所示。

（1）试求在单位阶跃输入信号 $1(t)$作用下系统的稳态误差。

（2）试求外部扰动 $N_1(s)$和 $N_2(s)$分别单独作用时系统的稳态误差。

（3）假设 $R(s)=0$，$N_2(s)=0$，$F(s)=\dfrac{1}{Js}$和 $G(s)=K_p+\dfrac{K}{s}$，试求出外部扰动 $N_1(s)$为单位阶跃函数时系统的稳态误差。



图题 4－9 图

解：（1）由图可知

$$C(s)=N_2(s)+N_1(s)F(s)+[R(s)-C(s)]G(s)F(s)$$

求得

$$
\begin{aligned}
C(s)&=\frac{N_2(s)+N_1(s)F(s)+R(s)G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}\\
&=\frac{1}{1+G(s)F(s)}N_2(s)+\frac{F(s)}{1+G(s)F(s)}N_1(s)+\frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}R(s)
\end{aligned}
$$

复域的系统误差为

$$
\begin{aligned}
E(s)&=R(s)-C(s)\\
&=\frac{1}{1+G(s)F(s)}R(s)-\frac{1}{1+G(s)F(s)}N_2(s)-\frac{F(s)}{1+G(s)F(s)}N_1(s)
\end{aligned}
$$

则在单位阶跃输入信号 $1(t)$作用下系统的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s\left[\frac{1}{1+G(s)F(s)}\frac{1}{s}-\frac{1}{1+G(s)F(s)}N_2(s)-\frac{F(s)}{1+G(s)F(s)}N_1(s)\right]$$

（2）外部扰动 $N_1(s)$单独作用时系统的稳态误差

$$e_{ss1}=\lim_{s\to 0}s\left[-\frac{F(s)}{1+G(s)F(s)}N_1(s)\right]$$

外部扰动 $N_2(s)$单独作用时系统的稳态误差

$$e_{ss2}=\lim_{s\to 0}s\left[-\frac{1}{1+G(s)F(s)}N_2(s)\right]$$

（3）

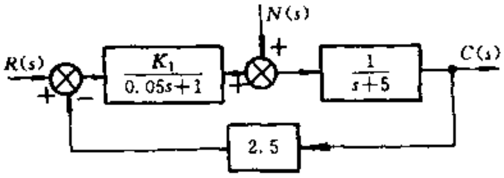
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\left[-\frac{F(s)}{1+G(s)F(s)}N_1(s)\right]$$

$$=\lim_{s\to 0}s\left[-\frac{\frac{1}{Js}}{1+(K_p+\frac{K}{s})\frac{1}{Js}}\frac{1}{s}\right]=-\frac{1}{K}$$

4-10 已知系统如图题 4－10 所示。在输入信号为单位阶跃 $r(t)$ ＝ $1(t)$和干扰信号亦为阶跃信号 $n(t)$ ＝ $2\times1(t)$作用下，试求：

（1）当 K ＝ 40 和 K ＝ 20 时，系统的稳态误差。

（2）若在扰动作用点之前的前向通道中引入积分环节 $1/s$，对稳态误差有什么影响？在扰动作用点之后引入积分环节 $1/s$，结果又将如何？



题 4－10（图中 K_1 应为 K）

解：（1）由图可知

$$E(s)=R(s)-2.5C(s)=R(s)-2.5\left[\frac{K}{0.05s+1}E(s)+N(s)\right]\frac{1}{s+5}$$

求得

$$C(s)=\frac{K}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}R(s)+\frac{0.05s+1}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}N(s)$$

复域系统误差为

$$E(s)=R(s)-2.5C(s)=\frac{(0.05s+1)(s+5)}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}R(s)-\frac{2.5(0.05s+1)}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}N(s)$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{(0.05s+1)(s+5)}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}R(s)-\lim_{s\to 0}s\frac{2.5(0.05s+1)}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}N(s)$$

将 $R(s)=1/s$ 和 $N(s)=2/s$ 代入上式得

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s\frac{(0.05s+1)(s+5)}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}\frac{1}{s}-\lim_{s\to0}s\frac{2.5(0.05s+1)}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}\frac{2}{s}$$
$$=\frac{5}{5+2.5K}-\frac{5}{5+2.5K}=0$$

【注】此题原题可能有数据错误。

当 K=40 时

$$e_{ss}=0$$

当 K=20 时

$$e_{ss}=0$$

（2）若在扰动作用点之前的前向通道中引入积分环节 $1/s$，则

$$C(s)=[R(s)-2.5C(s)]\frac{K}{0.05s+1}\frac{1}{s}\frac{1}{s+5}+\frac{1}{s+5}N(s)$$

求得

$$C(s)=\frac{K}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}R(s)+\frac{s(0.05s+1)}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}N(s)$$

复域系统误差为

$$E(s)=R(s)-2.5C(s)=\frac{s(0.05s+1)(s+5)}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}R(s)-\frac{2.5s(0.05s+1)}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}N(s)$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s\frac{s(0.05s+1)(s+5)}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}R(s)-\lim_{s\to0}s\frac{2.5s(0.05s+1)}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}N(s)$$

将 $R(s)$=1/s 和 $N(s)$=2/s 代入上式得

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}s\frac{s(0.05s+1)(s+5)}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}\frac{1}{s}-\lim_{s\to0}s\frac{2.5s(0.05s+1)}{(0.05s+1)(s+5)+2.5K}\frac{2}{s}$$
$$=0-0=0$$

结果说明：在扰动作用点之前的前向通道中引入积分环节 $1/s$，可以同时消除对阶跃型输入信号和干扰信号响应的稳态误差。

若在扰动作用点之后引入积分环节 $1/s$，则

$$C(s)=[R(s)-2.5C(s)]\frac{K}{0.05s+1}\frac{1}{s+5}\frac{1}{s}+\frac{1}{s(s+5)}N(s)$$

求得

$$C(s)=\frac{K}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}R(s)+\frac{0.05s+1}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}N(s)$$

复域系统误差为

$$E(s)=R(s)-2.5C(s)=\frac{s(0.05s+1)(s+5)}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}R(s)-\frac{2.5(0.05s+1)}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}N(s)$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s(0.05s+1)(s+5)}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}R(s)-\lim_{s\to 0}s\frac{2.5(0.05s+1)}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}N(s)$$

将 $R(s)=1/s$ 和 $N(s)=2/s$ 代入上式得

$$\begin{aligned}e_{ss}&=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{s(0.05s+1)(s+5)}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}\frac{1}{s}-\lim_{s\to 0}s\frac{2.5(0.05s+1)}{s(0.05s+1)(s+5)+2.5K}\frac{2}{s}\\&=0-\frac{2}{K}=-\frac{2}{K}\end{aligned}$$

结果说明：在扰动作用点之后引入积分环节 $1/s$，可以消除对阶跃型输入信号响应的稳态误差，但不能消除由阶跃型干扰信号引起的稳态误差。

第5章 系统的频率特性

复习思考题

1. 什么叫频率响应？

答：**解** 线性定常系统对简谐输入信号的稳态响应特性称为频率响应。

对于线性定常系统，若输入为简谐信号，则其稳态输出一定是同频率的简谐信号。将输出的幅值与输入的幅值之比定义为系统的幅频特性；将输出的相位与输入相位之差定义为系统的相频特性。将系统的幅频特性和相频特性统称为系统的频率特性。

2. 系统的频率特性的定义？它由哪两部分组成？
3. 机械系统的动刚度和动柔度如何表示？

解 若机械系统的输入为力，输出为位移（变形），则机械系统的频率特性就是机械系统的动柔度；机械系统的频率特性的倒数就是机械系统的动刚度；当 $\omega=0$ 时，系统频率特性的倒数为系统的静刚度。

4. 频率特性和单位脉冲函数的关系是什么？
5. 各典型环节的伯德图和乃奎斯特图。
6. 试述绘制系统的伯德图和乃奎斯特图的一般方法和步骤。
7. 最小相位系统与非最小相位系统的定义及本质区别。
8. 频域性能指标 M_r，ω_r，ω_b 和频宽的定义是什么？如何计算二阶系统的上述指标？
9. 如何由开环频率特性确定系统的闭环频率特性？
10. 什么叫系统辨识？为什么要进行系统辨识？在本课程学习的基础上，可用哪些方法进行系统辨识？

习 题

5-1 √设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{s+1}$$

当系统作用以下输入信号时，试求系统的稳态输出。

① $x(t)=\sin(t+30°)$

② $x(t)=2\cos(2t-45°)$

③ $x(t)=\sin(t+30°)-2\cos(2t-45°)$

解：系统的闭环传递函数为 $G_{\mathrm{B}}(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{10}{s+11}$

则 $$G_{\mathrm{B}}(\mathrm{j}\omega)=\frac{10}{\mathrm{j}\omega+11}$$

$$|G_B(j\omega)|=\frac{10}{\sqrt{121+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\angle G(j\omega)=0-\arctan\frac{\omega}{11}=-\arctan\frac{\omega}{11}$$

①因为系统是线性系统，且输入为简谐信号，所以系统的稳态输出为

$$y(t)=y_{\mathrm{m}}(\omega)\sin[t+30°+\varphi(\omega)]$$

其中

$$y_m(\omega)=|G_B(j\omega)|x_m=\frac{10}{\sqrt{121+\omega^2}}\times 1=\frac{10}{\sqrt{121+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\angle G(j\omega)=-\arctan\frac{\omega}{11}$$

将输入信号角频率 ω=1 代入上两式得

$$y_m(1)\big|=\frac{10}{\sqrt{121+1}}\approx 0.905$$

$$\varphi(1)=-\arctan\frac{1}{11}\approx -5.194°=-0.091\ \mathrm{rad}$$

所以系统的稳态输出为

$$y(t)=0.905\sin(t+30°-5.194°)=0.905\sin(t+24.806°)=0.905\sin(t+0.433)$$

②过程同①，ω=2，所以

$$y_m(2)=\frac{10}{\sqrt{121+4}}\times 2=\frac{4}{\sqrt{5}}\approx 1.789$$

$$\varphi(2)=-\arctan\frac{2}{11}\approx -10.305°=-0.180\ \mathrm{rad}$$

所以系统的稳态输出为

$$y(t)=1.789\cos(2t-45°-10.305)=1.789\cos(2t-55.305°)=1.789\cos(2t-0.965)$$

③因为输入为①-②，根据线性系统的叠加原理知，系统的稳态输出就是上面两个稳态响应相减，即

$$\begin{aligned}y(t)&=0.905\sin(t+24.806°)-1.789\cos(2t-55.305°)\\&=0.905\sin(t+0.433)-1.789\cos(2t-0.965)\end{aligned}$$

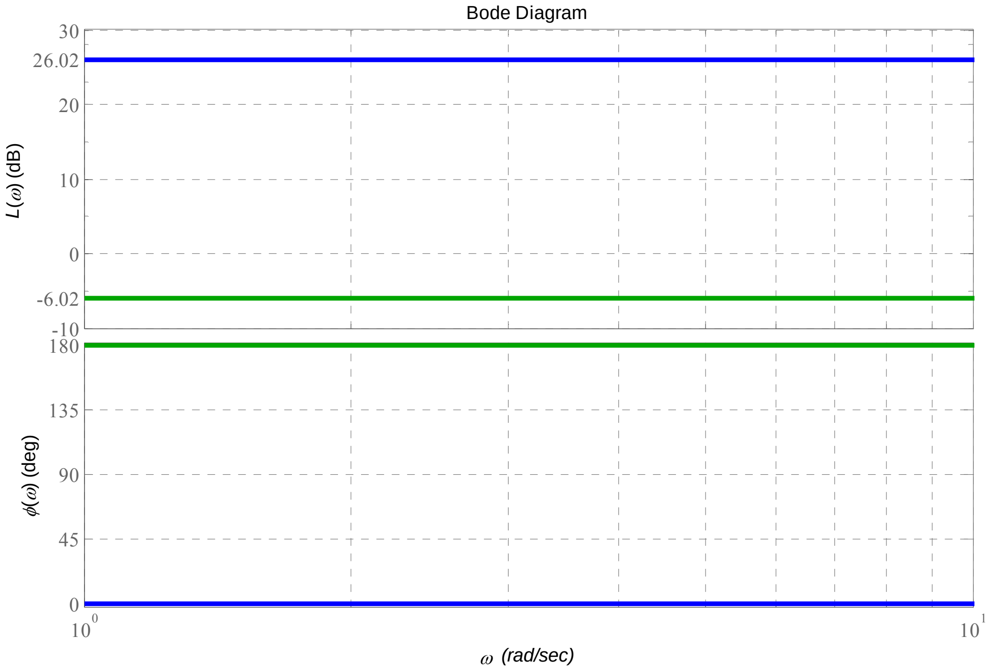
5-2 √绘制下列各环节的伯德图

① $G(j\omega)=20$；$G(j\omega)=-0.5$

解：两个都是比例环节

$L(\omega)=20\lg\left|G(j\omega)\right|=20\lg 20\approx 26.02$，$\varphi(\omega)$=0°

$L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|=20\lg 0.5\approx -6.02$，$\varphi(\omega)$=180°

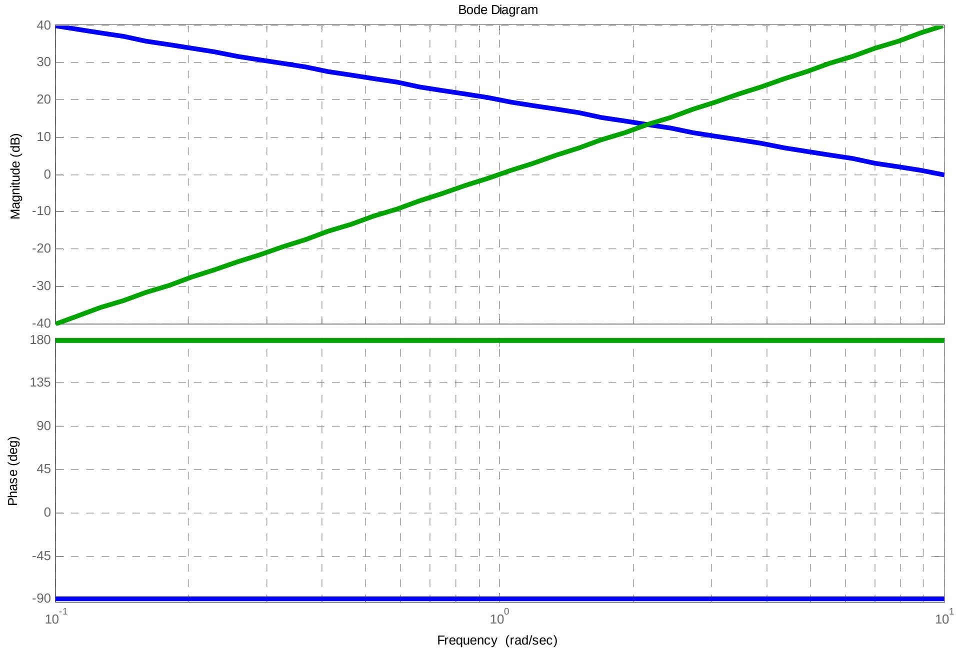


② $G(j\omega)=\dfrac{10}{j\omega}$；$G(j\omega)=(j\omega)^2$

解：第一个为比例环节与积分环节串联，第二个为 2 重微分环节

$L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|=20\lg\dfrac{10}{\omega}=20-20\lg\omega$，$\varphi(\omega)=-90°$，斜率=−20dB/dec；

$L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|=20\lg\omega^2=40\lg\omega$，$\varphi(\omega)=180°$，斜率=40dB/dec



③ $G(j\omega)=\dfrac{10}{1+j\omega}$；$G(j\omega)=5(1+2j\omega)$

解：第一个是一个比例环节与一个惯性环节串联：$L(\omega)=20\lg\left|G(j\omega)\right|=20-20\lg\sqrt{1+\omega^2}$，$\varphi(\omega)=-\arctan\omega$，转角频率 ω_T=1 rad·s^{-1}。

低频渐近线：$L(\omega)=20\text{dB}$

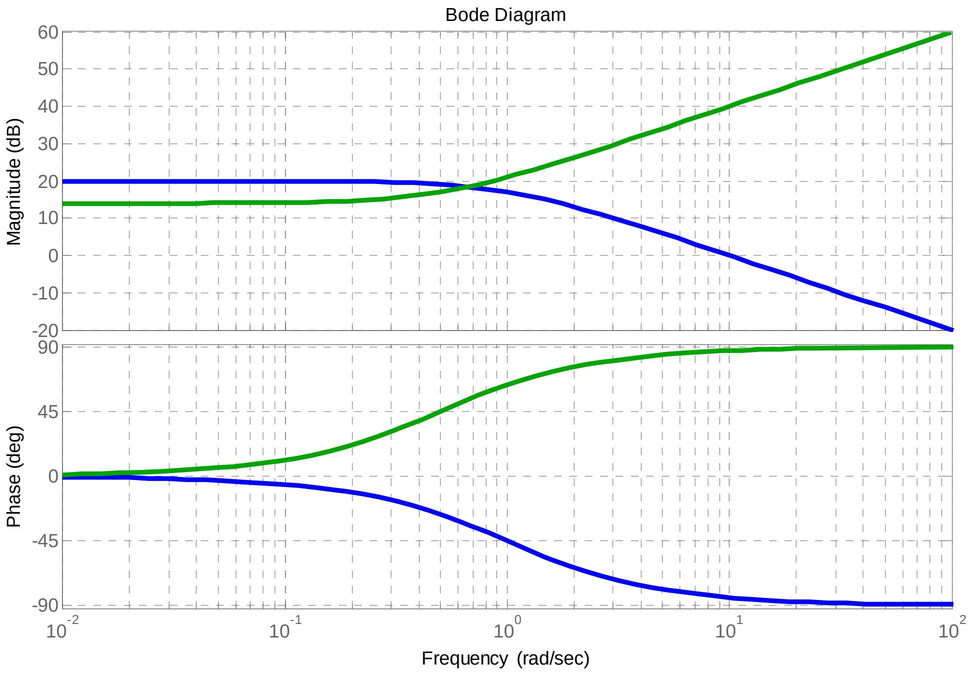
高频渐近线：$L(\omega)=20-20\lg\omega$，斜率−20dB/dec

第二个是一个比例环节与一个一阶微分环节串联：

$L(\omega)=20\lg\left|G(j\omega)\right|=20\lg5+20\lg\sqrt{1+4\omega^2}$，$\varphi(\omega)=\arctan2\omega$，转角频率 ω_T=1/2=0.5 rad·s^{-1}。

低频渐近线：$L(\omega)=20\lg5$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=20+20\lg\omega$，斜率 20dB/dec



④ $G(j\omega)=\dfrac{1+0.2j\omega}{1+0.05j\omega}$；$G(j\omega)=\dfrac{1+0.05j\omega}{1+0.2j\omega}$

解：第一个由一个一阶微分环节和一个惯性环节串联

一阶微分环节：$L(\omega)=20\lg\sqrt{1+(0.2\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=\arctan(0.2\omega)$，转角频率 ω_T=1/0.2=5 rad·s^{-1}。

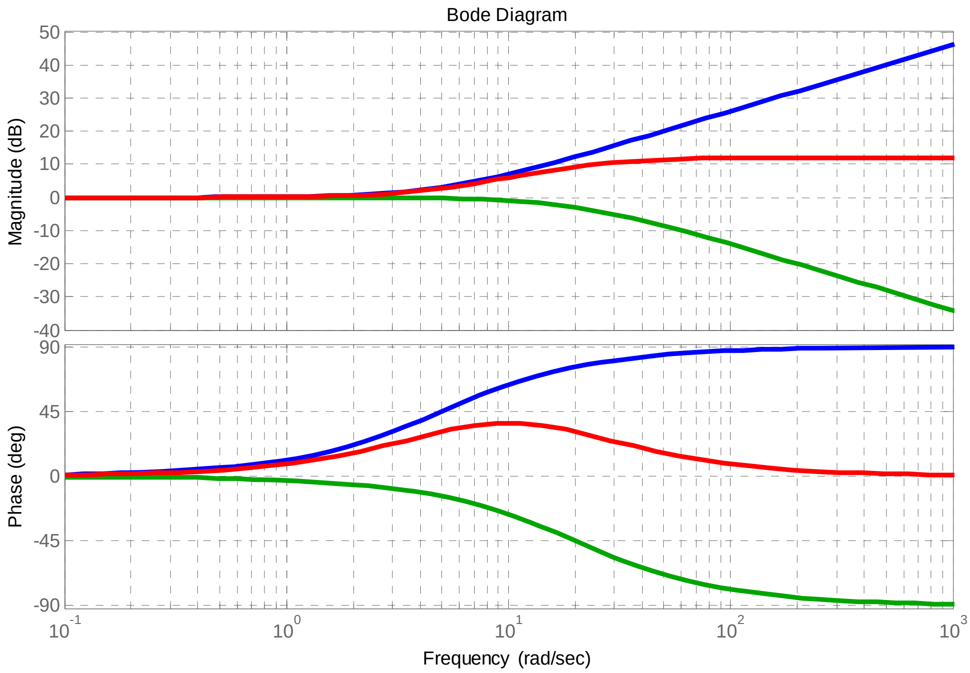
低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=20\lg 0.2+20\lg\omega$ dB，斜率 20dB/dec

惯性环节：$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+(0.05\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=-\arctan(0.05\omega)$，转角频率 ω_T=1/0.05=20 rad·s^{-1}。

低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=-20\lg 0.05-20\lg\omega$ dB，斜率−20dB/dec



第二个由一个一阶微分环节和一个惯性环节串联

一阶微分环节：，$L(\omega)=20\lg\sqrt{1+(0.05\omega)^2}$ ，$\varphi(\omega)=\arctan(0.05\omega)$ 转角频率 ω_T=1/0.05=20 rad·s^{-1}。

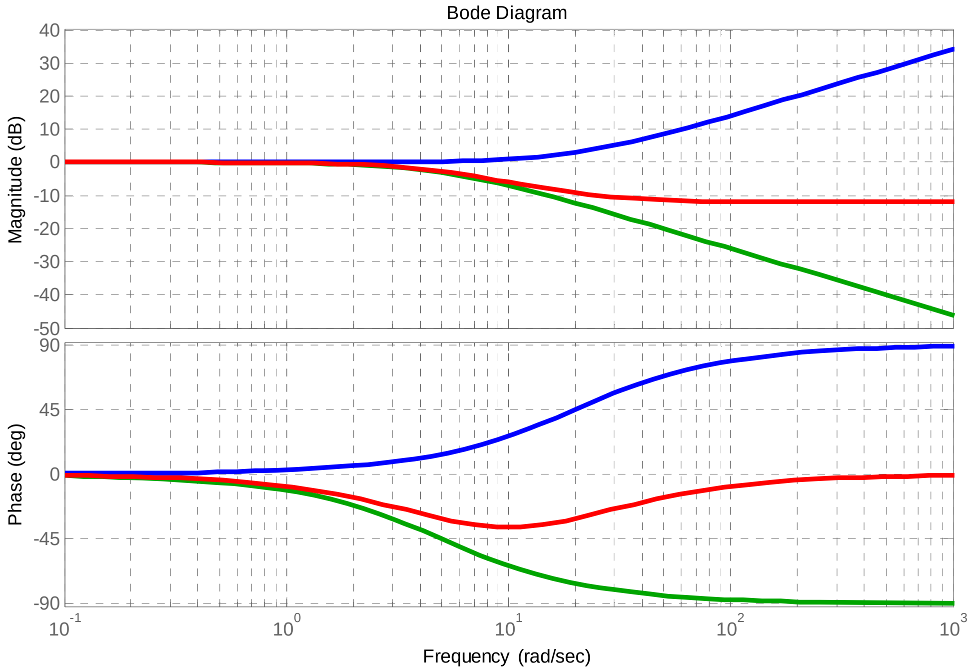
低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=20\lg 0.05+20\lg\omega$ dB，斜率 20dB/dec

惯性环节：$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+(0.2\omega)^2}$ ，$\varphi(\omega)=-\arctan(0.2\omega)$，转角频率 ω_T=1/0.2=5 rad·s^{-1}。

低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=-20\lg 0.2-20\lg\omega$ dB，斜率−20dB/dec



⑤ $G(j\omega)=\dfrac{20(1+2j\omega)}{j\omega(1+j\omega)(10+j\omega)}$

解： $G(j\omega)=\dfrac{20(1+2j\omega)}{j\omega(1+j\omega)(10+j\omega)}=\dfrac{2(1+2j\omega)}{j\omega(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}$

由一个比例环节、一个一阶微分环节、一个积分环节、二个惯性环节串联组成

比例环节：$L(\omega)=20\lg 2=6.021\text{ dB}$，$\varphi(\omega)=0$

一阶微分环节：$L(\omega)=20\lg\sqrt{1+(2\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=\arctan(2\omega)$，转角频率 ω_T=1/2=0.5 rad·s^{-1}。

　　低频渐近线：$L(\omega)=0\text{ dB}$

　　高频渐近线：$L(\omega)=20\lg 2+20\lg\omega\text{ dB}$，斜率 20dB/dec

积分环节：$L(\omega)=-20\lg\omega$，斜率−20dB/dec，$\varphi(\omega)=-90°$

惯性环节 1：$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+\omega^2}$，$\varphi(\omega)=-\arctan\omega$，转角频率 ω_T=1/1=1 rad·s^{-1}。

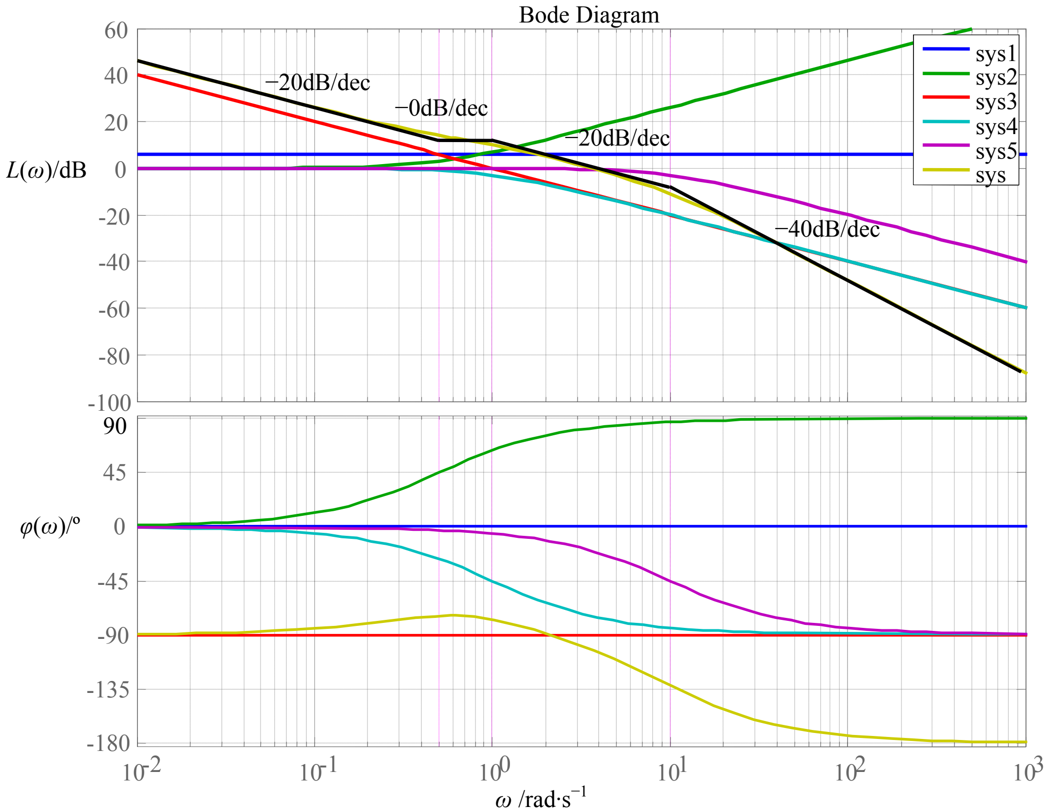
　　低频渐近线：$L(\omega)=0\text{ dB}$

　　高频渐近线：$L(\omega)=-20\lg\omega\text{ dB}$，斜率−20dB/dec

惯性环节 2：$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+(0.1\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=-\arctan 0.1\omega$，转角频率 ω_T=1/0.1=10 rad·s^{-1}。

　　低频渐近线：$L(\omega)=0\text{ dB}$

　　高频渐近线：$L(\omega)=-20\lg 0.1-20\lg\omega\text{ dB}$，斜率−20dB/dec



⑥ $G(j\omega)=\dfrac{(1+0.2j\omega)(1+0.5j\omega)}{(1+0.05j\omega)(1+5j\omega)}$

解： 由二个一阶微分环节、二个惯性环节串联组成

一阶微分环节 1：$L(\omega)=20\lg\sqrt{1+(0.2\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=\arctan(0.2\omega)$，转角频率 ω_T=1/0.2=5 rad·s^{-1}。

低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=20\lg 0.2+20\lg\omega$ dB，斜率 20dB/dec

一阶微分环节 2：$L(\omega)=20\lg\sqrt{1+(0.5\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=\arctan(0.5\omega)$，转角频率 ω_T=1/0.5=2 rad·s^{-1}。

低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=20\lg 0.5+20\lg\omega$ dB，斜率 20dB/dec

惯性环节 1：$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+(0.05\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=-\arctan 0.05\omega$，转角频率 ω_T=1/0.05=20 rad·s^{-1}。

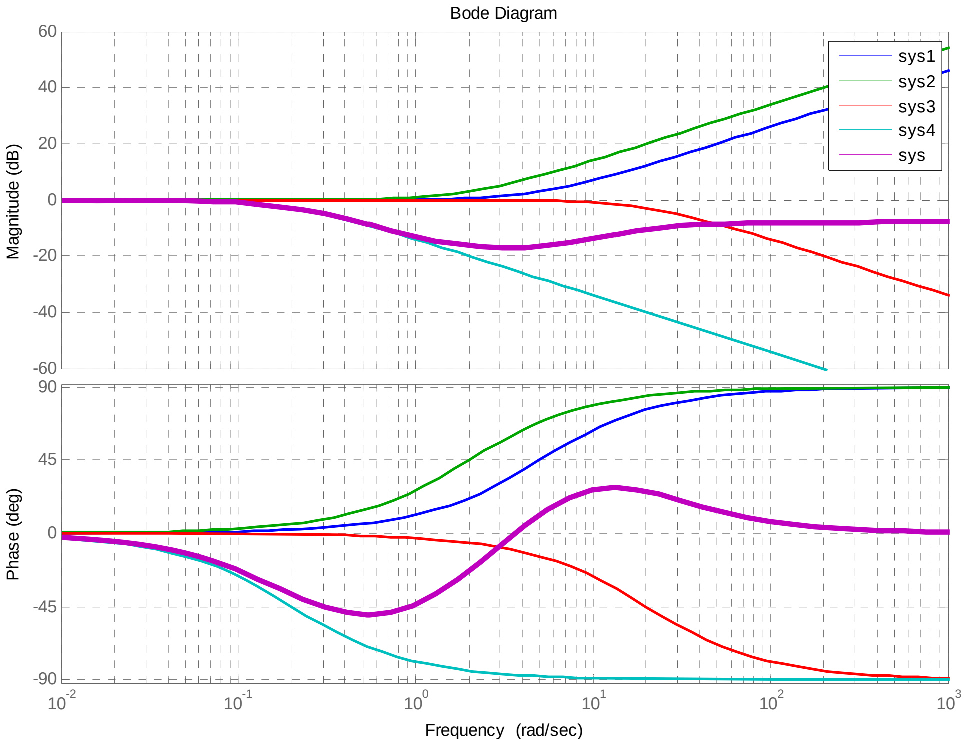
低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=-20\lg 0.05-20\lg\omega$ dB，斜率−20dB/dec

惯性环节 2：$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+(5\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=-\arctan 5\omega$，转角频率 ω_T=1/5=0.2 rad·s^{-1}。

低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=-20\lg 5-20\lg\omega$ dB，斜率−20dB/dec



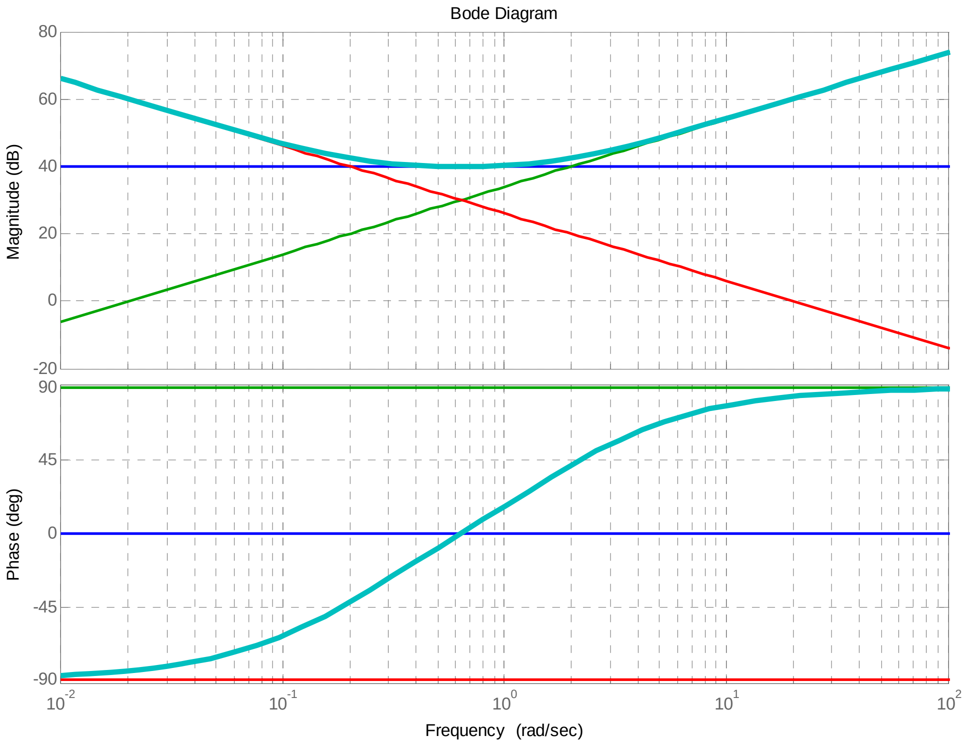
⑦ $G(j\omega)=K_P+K_Dj\omega+\dfrac{K_I}{j\omega}$

解： 一个比例环节，一个微分环节与一个比例环节串联（可以看成一个微分环节），一个积分环节与一个比例环节串联（可以看成一个积分环节），然后三者并联组成

比例环节：$L(\omega)=20\lg|K_P|$，$\varphi(\omega)=\begin{cases}0^\circ & K_P>0\\ 180^\circ & K_P<0\end{cases}$。

微分环节：$L(\omega)=20\lg|K_D|+20\lg\omega$，$\varphi(\omega)=\begin{cases}+90^\circ & K_D>0\\ -90^\circ & K_D<0\end{cases}$。

积分环节：$L(\omega)=20\lg|K_I|-20\lg\omega$，$\varphi(\omega)=\begin{cases}-90^\circ & K_I>0\\ +90^\circ & K_I<0\end{cases}$。



⑧ $G(j\omega)=\dfrac{10(0.5+j\omega)}{(j\omega)^2(2+j\omega)(10+j\omega)}=\dfrac{0.25(1+2j\omega)}{(j\omega)^2(1+0.5j\omega)(1+0.1j\omega)}$

解：由一个比例环节，一个一阶微分环节，二重积分环节，二个惯性环节串联组成。

比例环节：$L(\omega)=20\lg 0.25=-12.04\text{dB}$，$\varphi(\omega)=0°$

一阶微分环节 1：$L(\omega)=20\lg\sqrt{1+(2\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=\arctan(2\omega)$，转角频率 ω_T=1/2=0.5 rad·s^{-1}。

　　低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

　　高频渐近线：$L(\omega)=20\lg 2+20\lg\omega$ dB，斜率 20dB/dec

两重积分环节：$L(\omega)=-40\lg\omega$，$\varphi(\omega)=-180°$。

惯性环节 1：$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+(0.5\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=-\arctan 0.5\omega$，转角频率 ω_T=1/0.5=2 rad·s^{-1}。

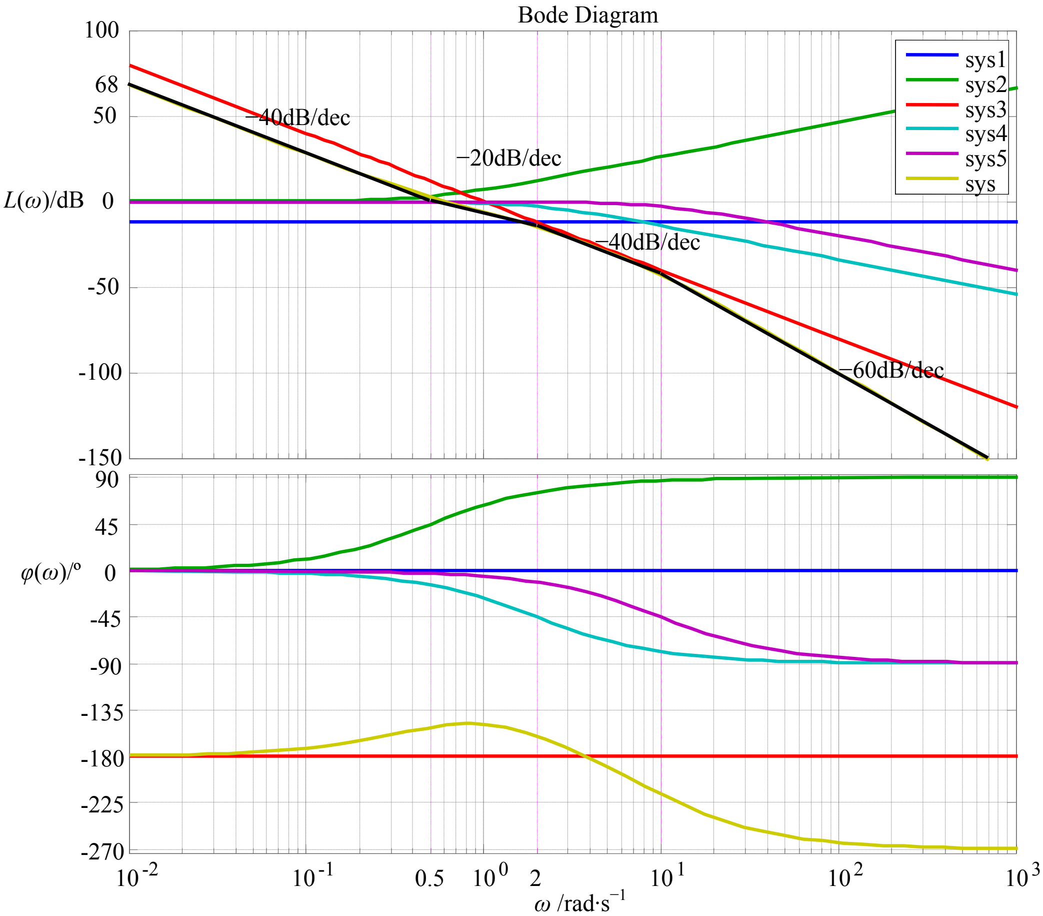
　　低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

　　高频渐近线：$L(\omega)=-20\lg 0.5-20\lg\omega$ dB，斜率−20dB/dec

惯性环节 2：$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+(0.1\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=-\arctan 0.1\omega$，转角频率 ω_T=1/0.1=10 rad·s^{-1}。

　　低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

　　高频渐近线：$L(\omega)=20-20\lg\omega$ dB，斜率−20dB/dec

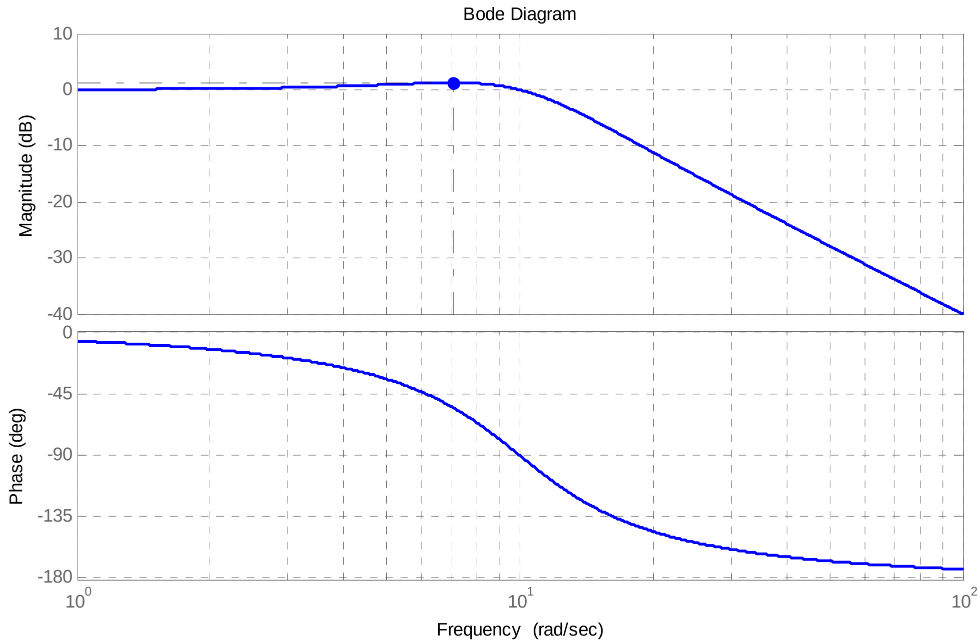


⑨ $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+0.1j\omega+0.01(j\omega)^2}=\dfrac{1}{1+2\zeta Tj\omega+T^2(j\omega)^2}=\dfrac{\omega_n^2}{\omega_n^2+2\zeta\omega_n j\omega+(j\omega)^2}$

解：这是一个欠阻尼振荡环节，时间常数 T=0.1 s，无阻尼固有角频率 $\omega_n=1/T=10\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$，阻尼比 ζ=0.5。

低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=-40\lg\omega$ dB，斜率−40dB/dec，转角频率 $\omega_T=1/T=\omega_n=10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$。



⑩ $G(j\omega)=\dfrac{9}{j\omega(0.5+j\omega)[1+0.6j\omega+(j\omega)^2]}=\dfrac{18}{j\omega(1+2j\omega)[1+0.6j\omega+(j\omega)^2]}$

解：由一个比例环节、一个积分环节、一个惯性环节、一个欠阻尼振荡环节串联组成。

比例环节：$L(\omega)=20\lg 18=25.105\text{dB}$，$\varphi(\omega)=0$

积分环节：$L(\omega)=-20\lg\omega$，$\varphi(\omega)=-90°$。

惯性环节：$L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+(2\omega)^2}$，$\varphi(\omega)=-\arctan 2\omega$，转角频率 ω_T=1/2=0.5 rad·s^{-1}。

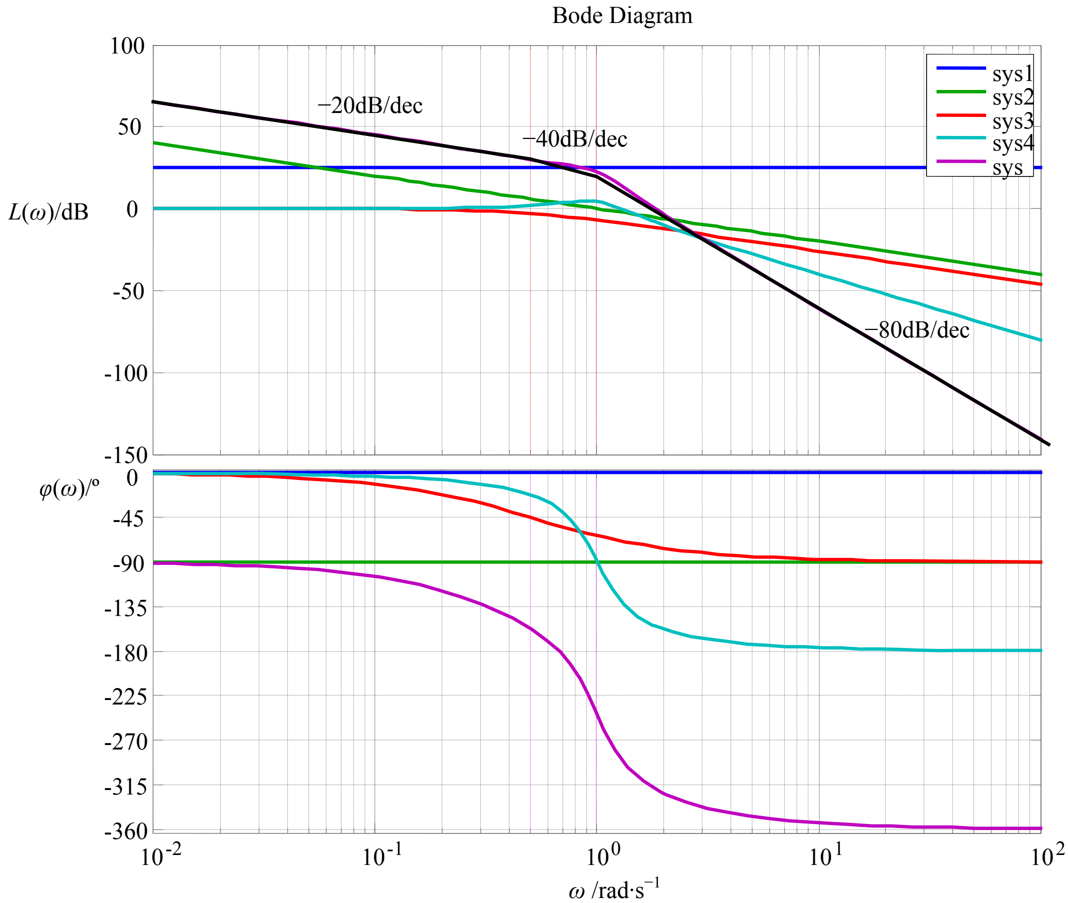
低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

高频渐近线：$L(\omega)=-20\lg 2-20\lg\omega$ dB，斜率−20dB/dec

振荡环节，时间常数 T=1 s，无阻尼固有角频率 ω_n=1/T=1 rad·s^{-1}，阻尼比 ζ=0.6/(2T)=0.3。

低频渐近线：$L(\omega)=0$ dB

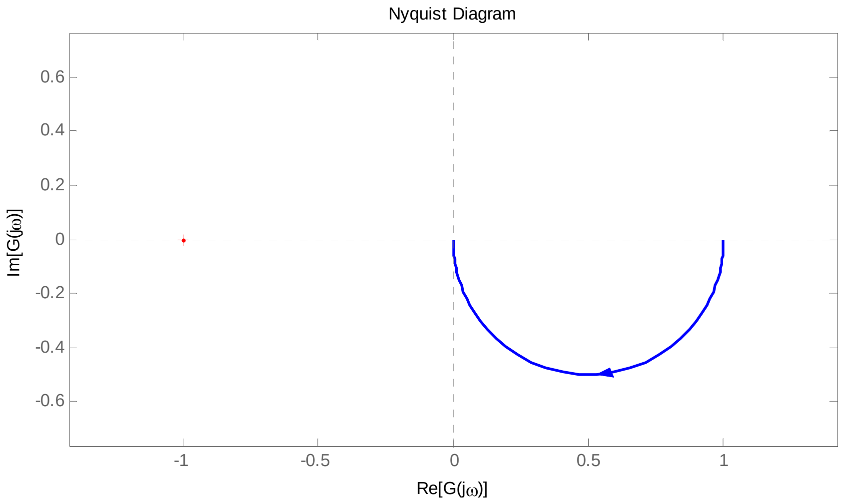
高频渐近线：$L(\omega)=-40\lg\omega$ dB，斜率−40dB/dec，转角频率 ω_T=1/T=ω_n=1 rad·s^{-1}。



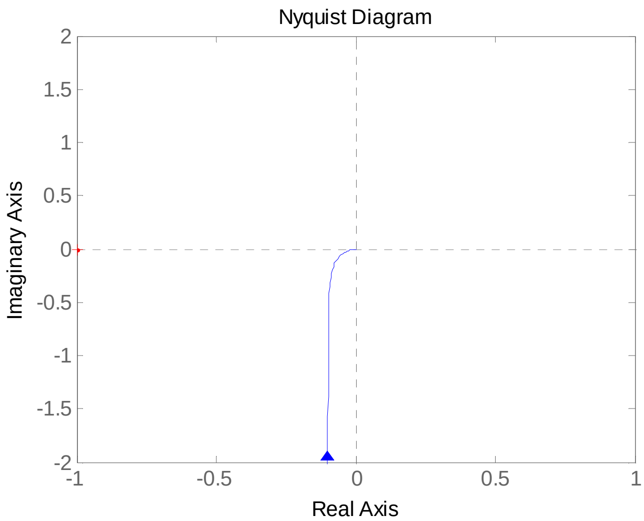
5-3 绘制下列各环节的乃奎斯特图

① $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+0.01j\omega}$

解：



② $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega(1+0.1j\omega)}$



③ $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+0.1j\omega+0.01(j\omega)^2}$

解：

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+0.1j\omega+0.01(j\omega)^2}=\frac{100}{100-\omega^2+j10\omega}=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{10}\right)^2+j2\times0.5\left(\frac{\omega}{10}\right)}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{\omega}{10}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right]^2+\left(\frac{\omega}{10}\right)^2}-j\frac{\frac{\omega}{10}}{\left[1-\left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right]^2+\left(\frac{\omega}{10}\right)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctan\frac{\frac{\omega}{10}}{1-\left(\frac{\omega}{10}\right)^2}$$

ω_n=10，ζ=0.5。

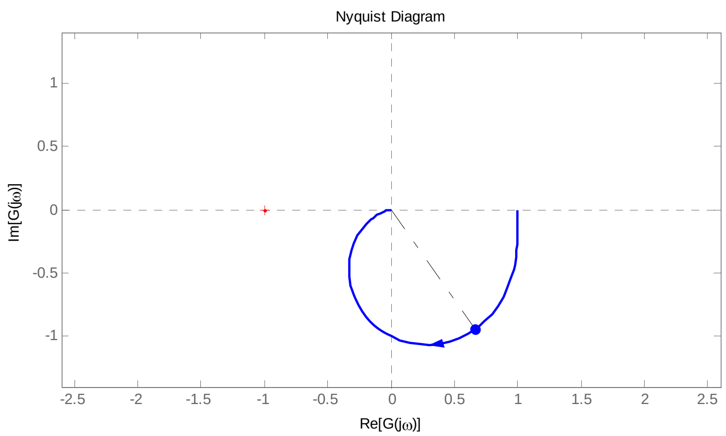
$G(j0) = 1\angle 0°$， $\mathrm{Re}(0) = 1$， $\mathrm{Im}(0) = 0$

$G(j\infty) = 0\angle -180°$， $\mathrm{Re}(\infty) = 0-$， $\mathrm{Im}(\infty) = 0-$

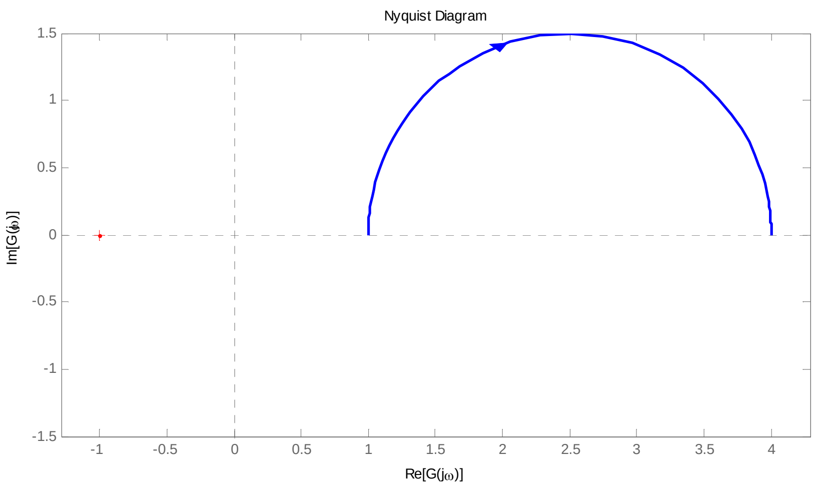
因相角从 0º 变化到–180º，且终点从第 3 象限趋于原点，所以与负虚轴必有交点，令实部等于 0，解得与虚轴的交点频率 $\omega=\omega_n$=10，该点幅值和相角为

$$G(j\omega_n) = \frac{1}{2\zeta}\angle -90° = 1\angle -90°$$

峰值点：$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 7.071\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$，$M_r = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.155$



④ $G(j\omega) = \dfrac{1+0.2j\omega}{1+0.05j\omega}$



⑤ $G(j\omega)=\dfrac{5}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+0.1j\omega)}$

解：

$$\begin{aligned}G(j\omega)&=\frac{5}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+0.1j\omega)}\\&=-\frac{3}{\left[1+(0.5\omega)^2\right]\left[1+(0.1\omega)^2\right]}-j\frac{5-0.25\omega^2}{\omega\left[1+(0.5\omega)^2\right]\left[1+(0.1\omega)^2\right]}\\&=\frac{5}{\omega\sqrt{1+(0.5\omega)^2}\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}\angle-90^\circ-\arctan(0.5\omega)-\arctan(0.1\omega)\end{aligned}$$

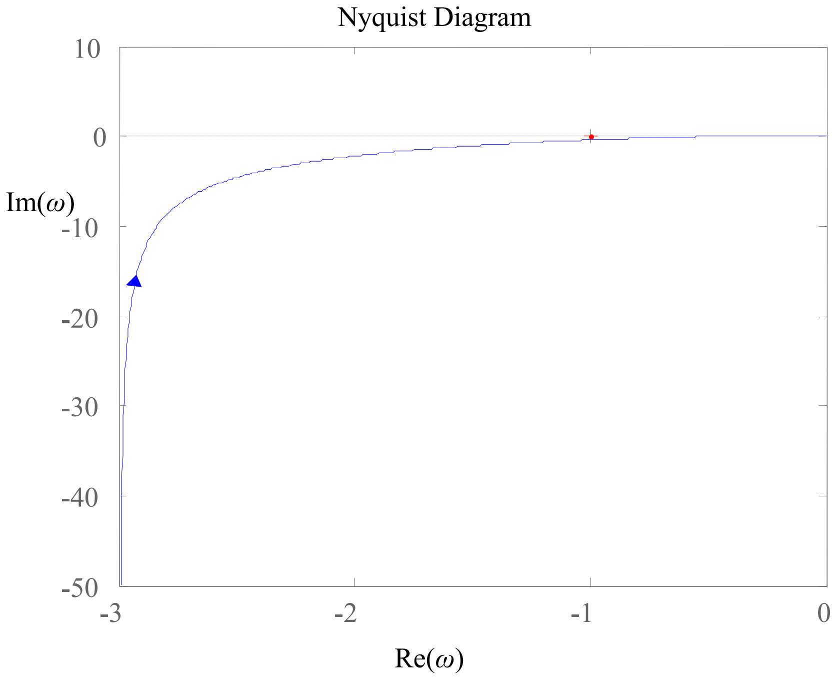
$G(j0)=\infty\angle-90^\circ$， $\mathrm{Re}(0)=-3$， $\mathrm{Im}(0)=-\infty$

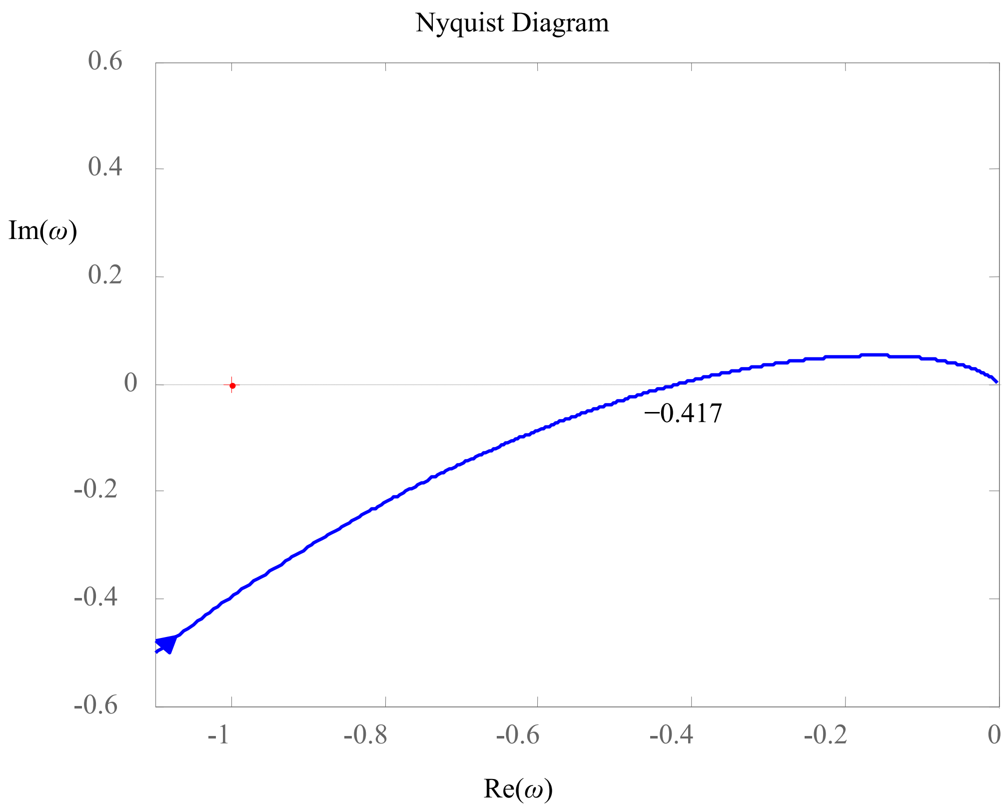
$G(j\infty)=0\angle-270^\circ$， $\mathrm{Re}(\infty)=0-$， $\mathrm{Im}(\infty)=0+$

与实轴交点频率 $\omega=\sqrt{20}\approx4.472\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

与实轴交点

$$\mathrm{Re}(\sqrt{20})=-\frac{3}{\left[1+(0.5\sqrt{20})^2\right]\left[1+(0.1\sqrt{20})^2\right]}=-\frac{5}{12}\approx-0.417$$





⑥ $G(j\omega)=\dfrac{kj\omega}{Tj\omega+1}$

解： 设 $k>0$，$T>0$

$$G(j\omega)=\frac{kj\omega}{Tj\omega+1}=\frac{kT\omega^2}{1+(T\omega)^2}+j\frac{k\omega}{1+(T\omega)^2}$$

$$=\frac{k\omega}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}\angle 90^\circ-\arctan(T\omega)$$

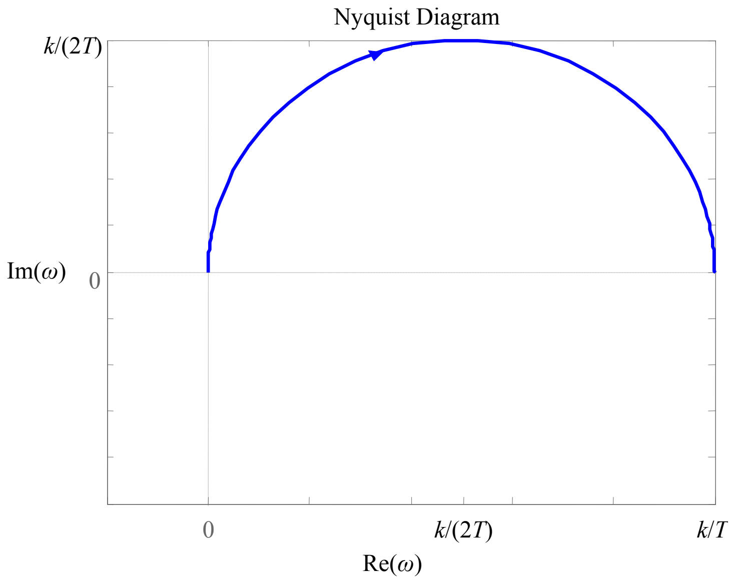
$G(j0)=0\angle 90^\circ$，Re(0)=0，Im(0)=0

$G(j\infty)=\dfrac{k}{T}\angle 0^\circ$，Re(∞)=$k/T$，Im(∞)=0

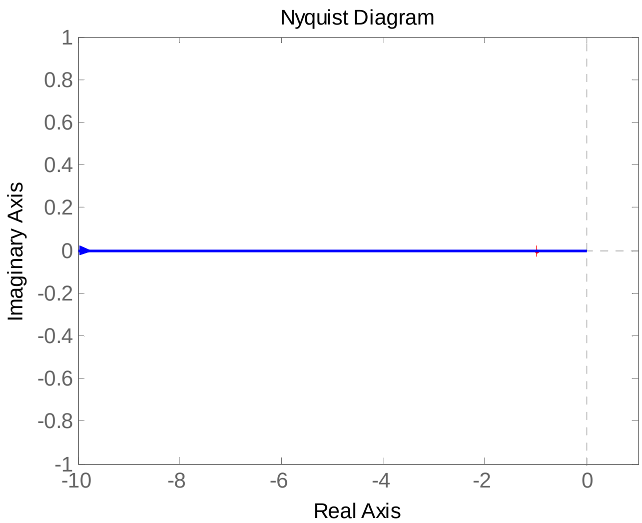
$G(j\dfrac{1}{T})=\dfrac{k}{\sqrt{2}}\angle 45^\circ$，$\mathrm{Re}(\dfrac{1}{T})=\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{T}$，$\mathrm{Im}(\dfrac{1}{T})=\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{T}$

$$\left[\mathrm{Re}(\omega)-\frac{1}{2}\frac{k}{T}\right]^2+\mathrm{Im}^2(\omega)=\left[\frac{kT\omega^2}{1+(T\omega)^2}-\frac{1}{2}\frac{k}{T}\right]^2+\left[\frac{k\omega}{1+(T\omega)^2}\right]^2=\left(\frac{1}{2}\frac{k}{T}\right)^2$$

所以，Nyquist 曲线是一个圆心在（$k/(2T)$，0），半径为 $k/(2T)$的半圆。



⑦ $G(j\omega)=\dfrac{5}{(j\omega)^2}$



⑧ $G(j\omega)=\dfrac{50(1+0.6j\omega)}{(j\omega)^2(1+4j\omega)}$

解：

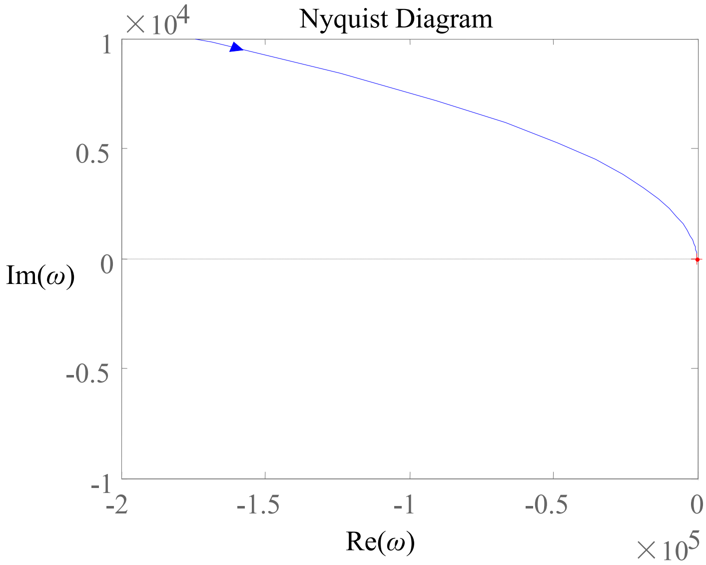
$$G(j\omega)=\frac{50(1+0.6j\omega)}{(j\omega)^2(1+4j\omega)}=-\frac{50+120\omega^2}{\omega^2(1+16\omega^2)}+j\frac{170}{\omega(1+16\omega^2)}$$

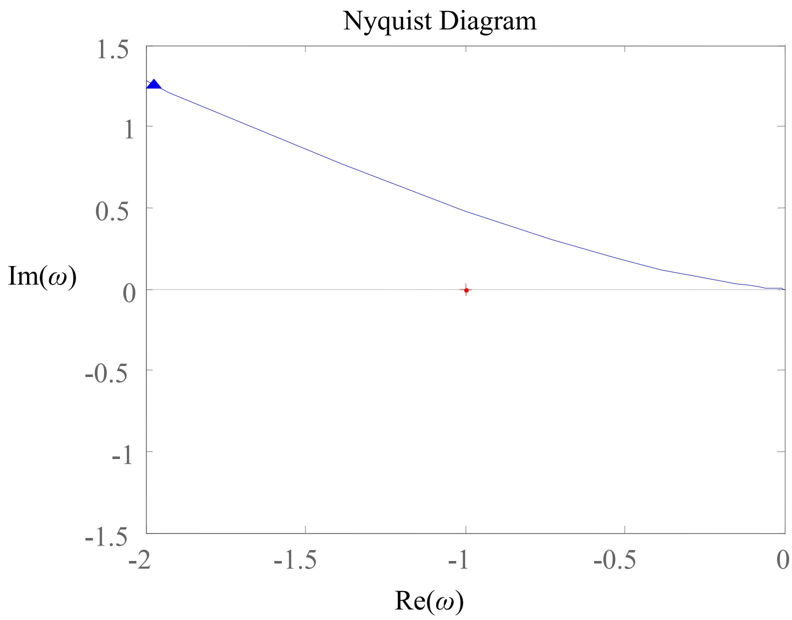
$$=50\frac{\sqrt{1+0.36\omega^2}}{\omega^2\sqrt{1+16\omega^2}}\angle\arctan(0.6\omega)-180°-\arctan(4\omega)$$

$G(j0)=\infty\angle-180°$， $\mathrm{Re}(0)=-\infty$， $\mathrm{Im}(0)=+\infty$

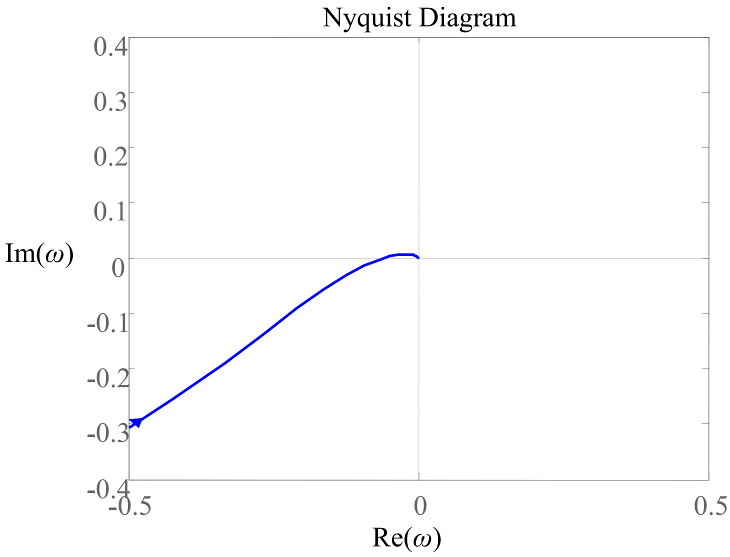
$G(j\infty)=0\angle-180°$， $\mathrm{Re}(\infty)=0-$， $\mathrm{Im}(\infty)=0+$

$\mathrm{Re}(\omega)\leqslant 0$，$\mathrm{Im}(\omega)\geqslant 0$

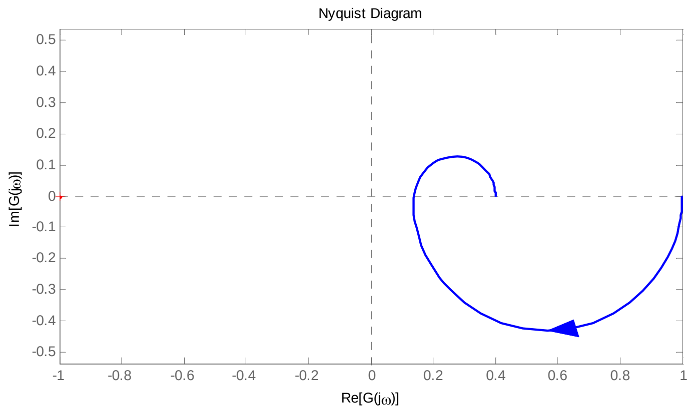




⑨ $G(j\omega)=\dfrac{10(0.5+j\omega)}{(j\omega)^2(2+j\omega)(10+j\omega)}$



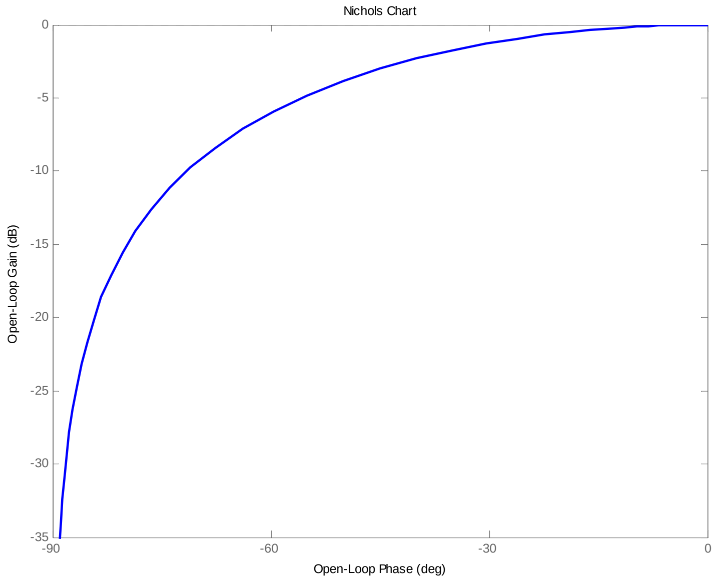
⑩ $G(j\omega)=\dfrac{(1+0.2j\omega)(1+0.5j\omega)}{(1+0.05j\omega)(1+5j\omega)}$

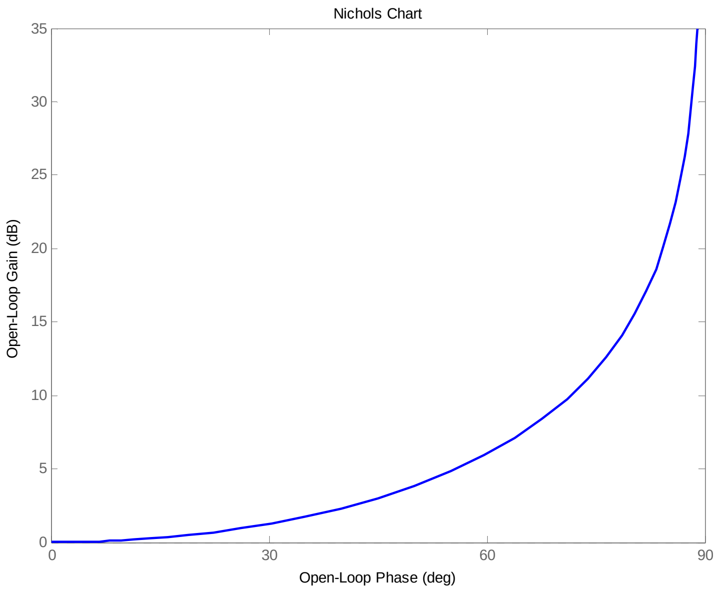


5-4 绘制下列各环节尼柯尔斯图

① $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+0.01j\omega}$； $G(j\omega)=1+0.01j\omega$

解：





② $G(j\omega)=\dfrac{10}{j\omega}$； $G(j\omega)=10j\omega$

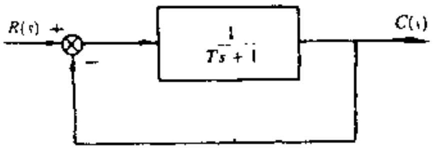
③ $G(j\omega)=\dfrac{10}{1+0.1j\omega+0.01(j\omega)^2}$

④ $G(j\omega)=\dfrac{10(1+0.2j\omega)}{1+0.05j\omega}$； $G(j\omega)=\dfrac{10(1+0.05j\omega)}{1+0.2j\omega}$

⑤ $G(j\omega)=\dfrac{60(1+0.5j\omega)}{j\omega(1+5j\omega)}$

⑥ $G(j\omega)=\dfrac{20(1+2j\omega)}{j\omega(1+j\omega)(10+j\omega)}$

5-5 √为使题 5-5 图所示系统的截止频率 ω_b=100(rad·s^{-1})，T 值应为多少？



图题 5-5

解：系统的闭环传递函数为

$$G_B(s)=\frac{\dfrac{1}{Ts+1}}{1+\dfrac{1}{Ts+1}}=\frac{1}{Ts+2}=\frac{0.5}{\dfrac{T}{2}s+1} \qquad (1)$$

$$G_B(j\omega)=\frac{0.5}{\dfrac{T}{2}j\omega+1}=\frac{0.5}{1+j\dfrac{T}{2}\omega} \qquad (2)$$

$$\left|G_B(j\omega)\right|=\frac{0.5}{\sqrt{1+\left(\dfrac{T}{2}\omega\right)^2}}$$

所以

$$\left|G_B(j0)\right|=0.5$$

令

$$\left|G_B(j\omega_b)\right|=\frac{0.5}{\sqrt{1+\left(\dfrac{T}{2}\omega_b\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|G_B(j0)\right|=\frac{0.5\sqrt{2}}{2}$$

解得

$$T=\frac{2}{\omega_b}=\frac{2}{100}=0.02\ \text{s}$$

【注】如果要套用教材上的公式，则在套用之前一定要先将传递函数或频响函数化成标准的惯性环节表达式，确定时间常数，如上面公式（1）和（2）所示。本题惯性环节时间常数为 $T/2$，即截止频率 $\omega_b=2/T$。

5-6 √设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{10}{(0.2s+1)(0.02s+1)}$$

试求闭环系统的 M_r，ω_r 及 ω_b。

解：单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{10}{(0.2s+1)(0.02s+1)}$

则前向传递函数为 $G_1(s)=\dfrac{10}{(0.2s+1)(0.02s+1)}=\dfrac{10}{0.004s^2+0.22s+1}$

系统的闭环传递函数为$G_B(s)=\dfrac{G_1(s)}{1+G_1(s)}=\dfrac{\dfrac{10}{0.004s^2+0.22s+1}}{1+\dfrac{10}{0.004s^2+0.22s+1}}=\dfrac{10}{0.004s^2+0.22s+11}$

变成通用形式

$$G_B(s)=\frac{\frac{10}{11}\times 2750}{s^2+55s+2750}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \text{ 或 } G_B(s)=\frac{10/11}{\frac{0.004}{11}s^2+0.02s+1}=\frac{K}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$$

由上面的式子可知

静态增益 $K=10/11$

无阻尼固有角频率 $\omega_n=\sqrt{2750}=5\sqrt{110}\approx 52.440\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

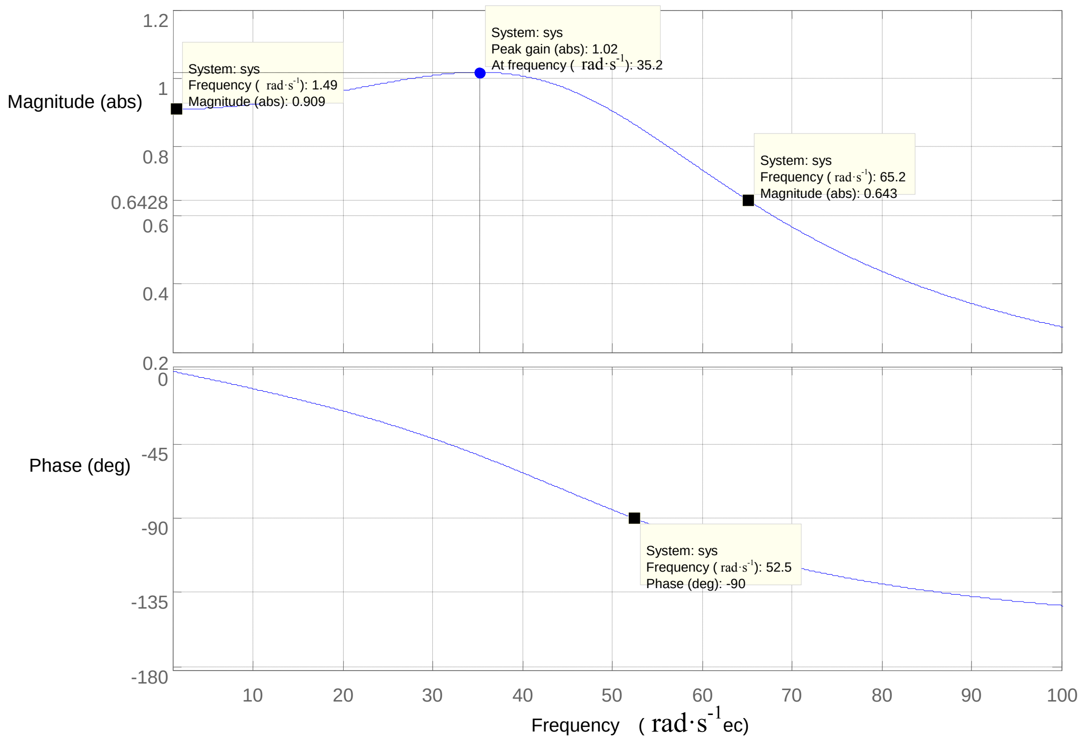
阻尼比 $\zeta=\dfrac{55}{2\omega_n}=\dfrac{55}{10\sqrt{110}}=\dfrac{1}{10}\sqrt{\dfrac{55}{2}}\approx 0.524$

因阻尼比小于$\sqrt{2}/2$，所以幅频特性存在峰值。所以

相对谐振峰值：$M_r=\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\approx 1.120$

谢振频率：$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}\approx 35.178\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

截止频率：$\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}\approx 65.216\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$



5-7 设单位反馈系统的开环传递函数分别为

$$G_1(s)=\frac{K}{(s+4)^2}\ ;\quad G_2(s)=\frac{K}{s(0.25s^2+0.4s+1)}$$

试确定 K，使闭环系统的 M_r＝1.4，同时求出 ω_r 和 ω_b。

解：（1）开环传递函数为

$$G_1(s)=\frac{K}{(s+4)^2}$$

闭环传递函数为

$$G_B(s)=\frac{\dfrac{K}{(s+4)^2}}{1+\dfrac{K}{(s+4)^2}}=\frac{\dfrac{K}{16+K}\times(16+K)}{s^2+8s+(16+K)}=\frac{\dfrac{K}{16+K}\times\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

由上式可见，这是一个典型二阶系统，其中

$$\omega_n=\sqrt{16+K} \tag{1}$$

$$\zeta=\frac{8}{2\omega_n}=\frac{4}{\sqrt{16+K}} \tag{2}$$

将阻尼比 ζ 代入 $M_r=\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=1.4$ 解得

$$K=\begin{cases}90.6149\\2.8251\end{cases}$$

代入（2）式得

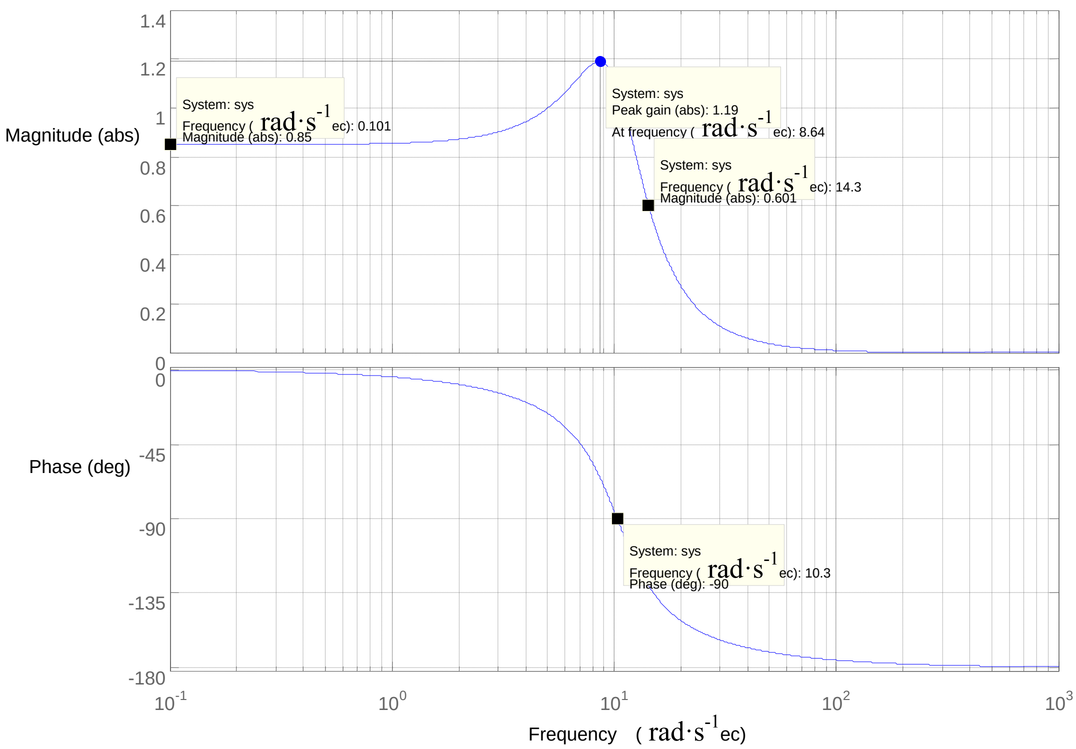
$$\zeta=\begin{cases}0.3874 & K=90.6149\\0.9219 & K=2.8251\end{cases}$$

根据题意，幅频特性存在峰值，所以阻尼比应该小于 $\sqrt{2}/2$，即取 ζ=0.3874，K=90.6149。将 K 值代入（1）式得

$$\omega_n=\sqrt{16+K}=10.3254\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

谐振频率 $$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}\approx 8.6380\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}\approx 14.3089\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$



（2）开环传递函数为

$$G_2(s)=\frac{K}{s(0.25s^2+0.4s+1)}$$

闭环传递函数

$$G_B(s)=\frac{\dfrac{K}{s(0.25s^2+0.4s+1)}}{1+\dfrac{K}{s(0.25s^2+0.4s+1)}}=\frac{K}{0.25s^3+0.4s^2+s+K}$$

闭环频率特性

$$G_B(j\omega)=\frac{K}{0.25(j\omega)^3+0.4(j\omega)^2+j\omega+K}=\frac{K}{(K-0.4\omega^2)+j(\omega-0.25\omega^3)}$$

幅频特性

$$|G_B(j\omega)|=\frac{K}{\sqrt{(K-0.4\omega^2)^2+(\omega-0.25\omega^3)^2}} \tag{1}$$

$$|G_B(j0)|=\frac{K}{\sqrt{K^2}}=1$$

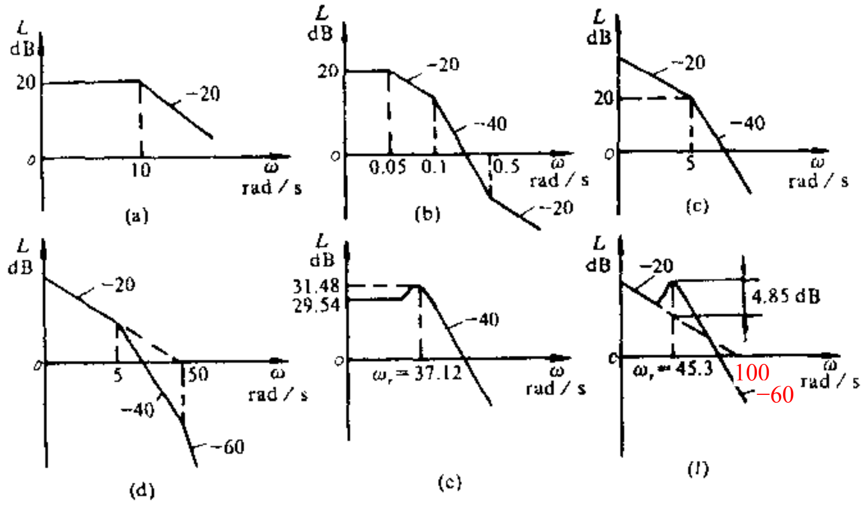
令
$$\frac{\mathrm{d}|G_B(j\omega)|}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{K}{\sqrt{(K-0.4\omega^2)^2+(\omega-0.25\omega^3)^2}}=0$$

得
$$\omega_r^2=\frac{0.68\pm\sqrt{0.6K-0.2876}}{0.375}$$

代入（1）式得

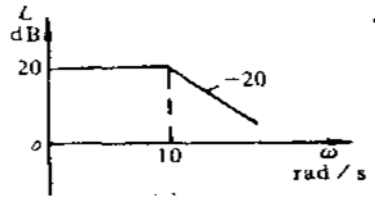
$$M_{\max}(\omega_r)=\frac{K}{\sqrt{(K-0.4\omega_r^2)^2+\omega_r^2(1-0.25\omega_r^2)^2}}=1.4$$

5-8 √有下列最小相位系统，通过实验求得各系统的对数幅频特性如题 5-8 图，试估计它们的传递函数。



图题 5-8

解:（a）由图中对数幅频特性各段斜率可见，系统为 0 型系统，由一个比例环节、一个惯性环节（斜率−20dB/dec）串联组成，所以系统的传递函数具有如下形式：



(a)

$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$

式中静态增益 K 可由水平段线段确定，即

$$20\lg K=20\text{dB}$$

解得 $$K=10$$

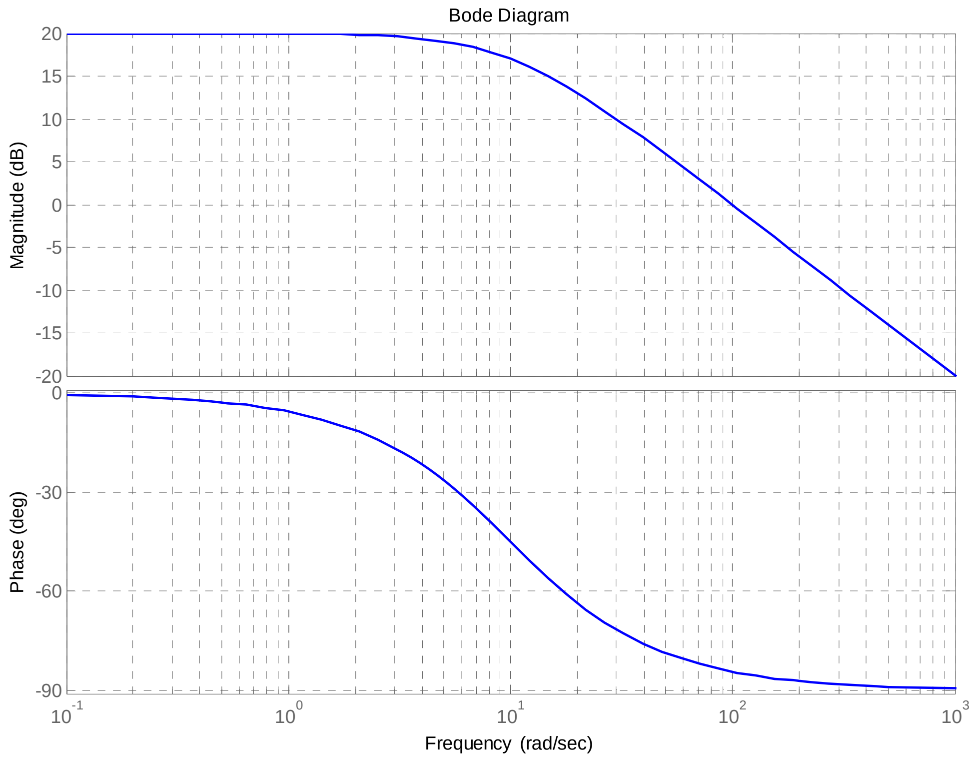
T 为渐近线转角频率的倒数，即

$$T=1/10=0.1\ \text{s}$$

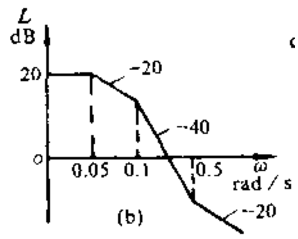
将结果代入传递函数表达式中得

$$G(s)=\frac{10}{0.1s+1}$$

下图是根据求出的传递函数画出的 Bode 图。



（b）由图中对数幅频特性各段斜率可见，系统为 0 型系统，由一个比例环节、二个惯性环节（斜率−20dB/dec）和一个一阶微分环节（斜率+20dB/dec）串联组成，所以系统的传递函数具有如下形式：



(b)

$$G(s)=\frac{K(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

式中静态增益 K 可由水平段线段确定，即

$$20\lg K=20\text{dB}$$

解得 K=10

时间常数 T_i（i=1，2，3）为各对应段渐近线转角频率的倒数，即

$$T_1=1/0.05=20\ \text{s}$$

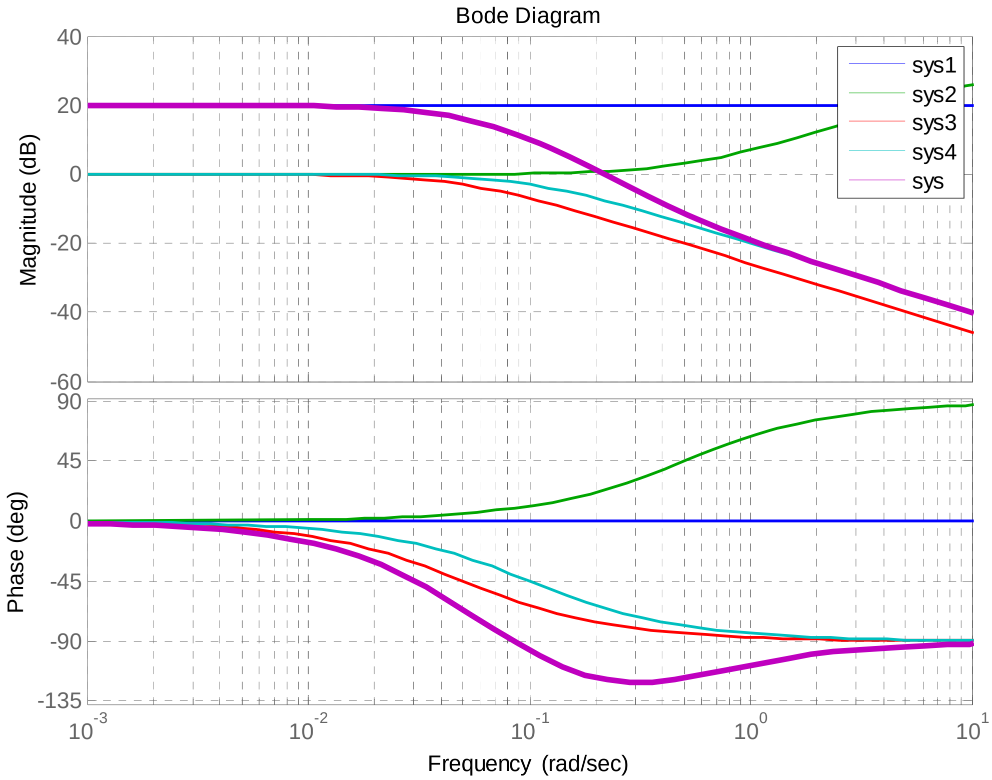
$$T_2=1/0.1=10\ \text{s}$$

$$T_3=1/0.5=2\ \text{s}$$

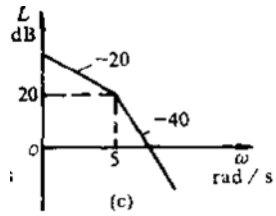
将结果代入传递函数表达式中得

$$G(s)=\frac{10(2s+1)}{(20s+1)(10s+1)}$$

下图是根据求出的传递函数画出的 Bode 图，以供比较。



（c）由图中对数幅频特性各段斜率可见，系统是一个 I 型系统，由一个比例环节、一个积分环节（斜率−20dB/dec）和一个惯性环节（斜率−20dB/dec）串联组成，所以系统的传递函数具有如下形式：



(c)

$$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)}$$

式中静态增益 K 可由两段渐近线的交点确定，即

$$20\lg\left|\frac{K}{j\omega}\right|=20\lg\frac{K}{\omega}=20\lg\frac{K}{5}=20\text{dB}$$

解得 K=50

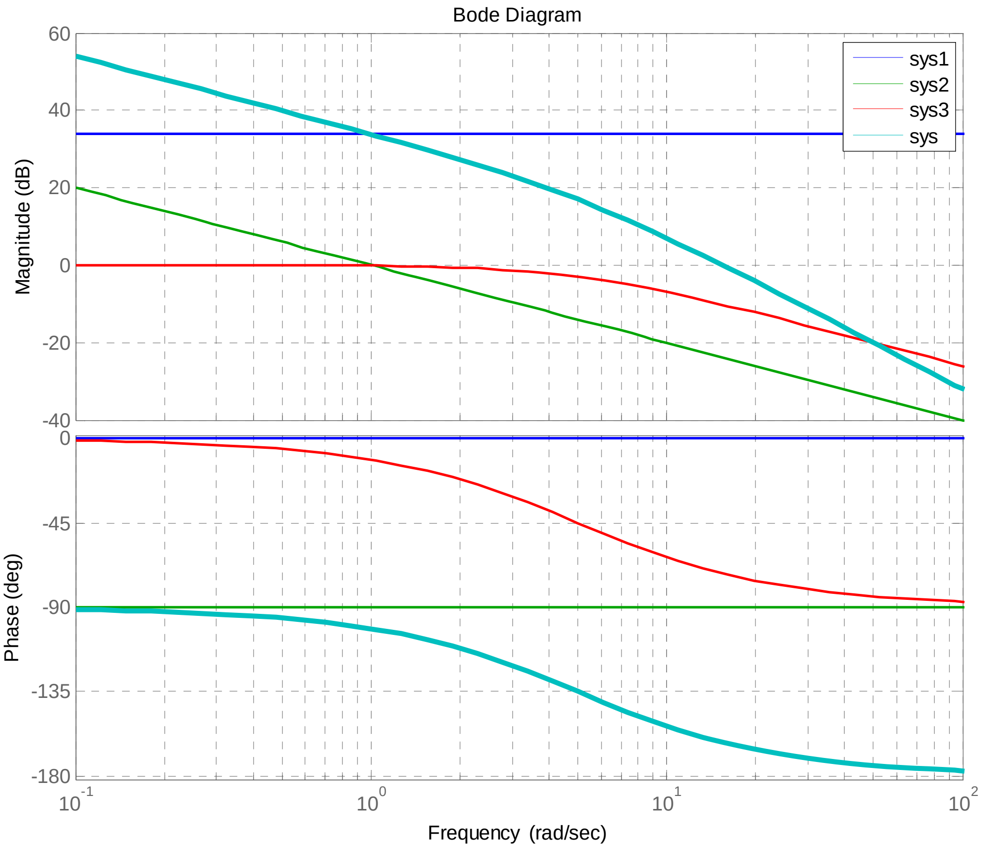
时间常数 T 为渐近线转角频率的倒数，即

T=1/5=0.2 s

将结果代入传递函数表达式中得

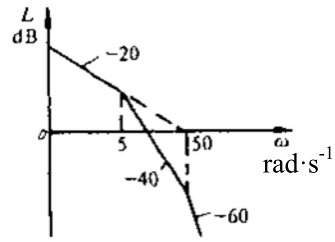
$$G(s)=\frac{50}{s(0.2s+1)}$$

下图是根据求出的传递函数画出的 Bode 图，以供比较。



（d）由图中对数幅频特性各段斜率可见，系统是一个 I 型系统，由一个比例环节、一个积分环节（斜率−20dB/dec）和二个惯性环节（斜率−20dB/dec）串联组成，所以系统的传递函数具有如下形式：

$$G(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$



(d)

式中静态增益 K 可由斜率为−20dB/dec 的线段与横轴的的交点确定，即

$$20\lg\left|\frac{K}{j\omega}\right|=20\lg\frac{K}{\omega}=20\lg\frac{K}{50}=0\text{dB}$$

解得 K=50

时间常数 T_i（i=1，2）为各段渐近线转角频率的倒数，即

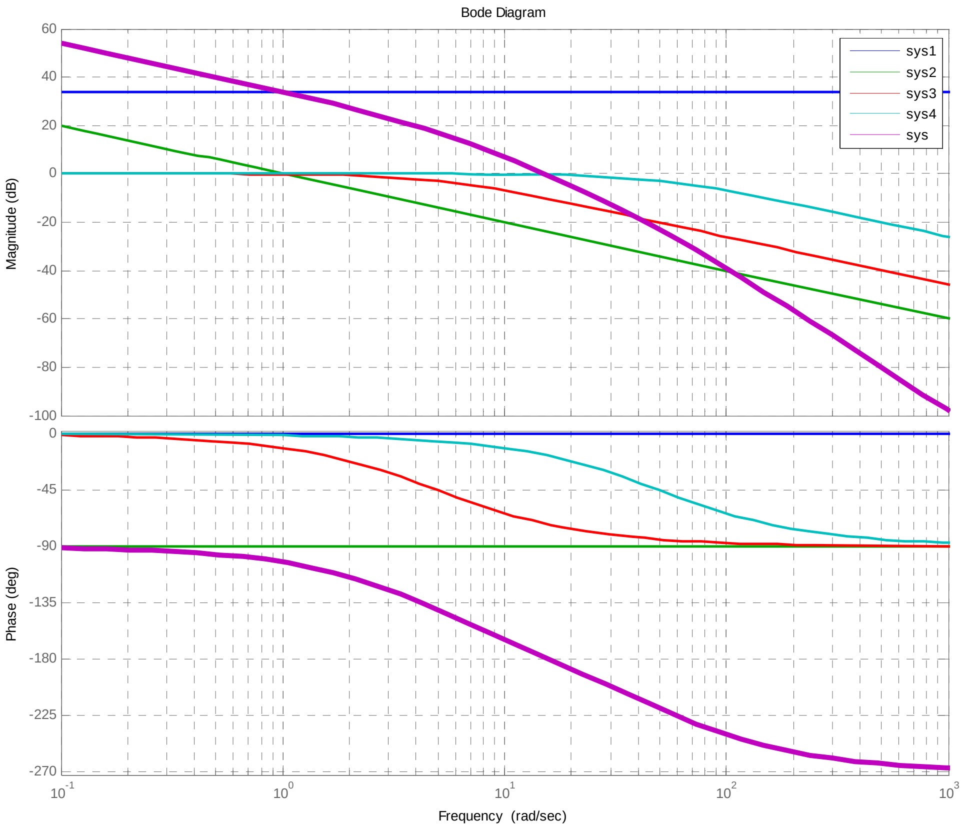
$$T_1=1/5=0.2\text{ s}$$

$$T_2=1/50=0.02\text{ s}$$

将结果代入传递函数表达式中得

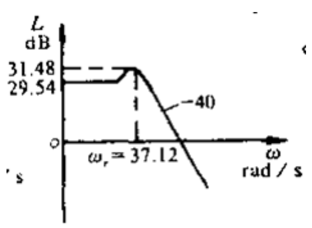
$$G(s)=\frac{50}{s(0.2s+1)(0.02s+1)}$$

下图是根据求出的传递函数画出的 Bode 图，以供比较。



（e）由图中对数幅频特性各段斜率可见，系统是一个 0 型系统，由一个比例环节、一个振荡环节（斜率−40dB/dec）串联组成，所以系统的传递函数具有如下形式：

$$G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



(e)

式中静态增益 K 可由斜率为 0dB/dec 的线段与横轴的的交点确定，即

$$20\lg K=29.54\text{dB}$$

解得 K=30

振荡环节的参数可根据幅频特性曲线峰值点的频率和峰值来确定。

阻尼比小于 $\sqrt{2}/2$ 振荡环节幅频特性的峰值为

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

所以 $$20\lg M_r = 20\lg\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 31.48 - 29.54 = 1.94\text{dB}$$

解得 $$\zeta = \begin{cases} 0.8945 \\ 0.4471 \end{cases}$$

因为振荡环节的幅频特性有峰值，所以$\zeta < \sqrt{2}/2$，所以取

$$\zeta = 0.4471 \approx 0.45$$

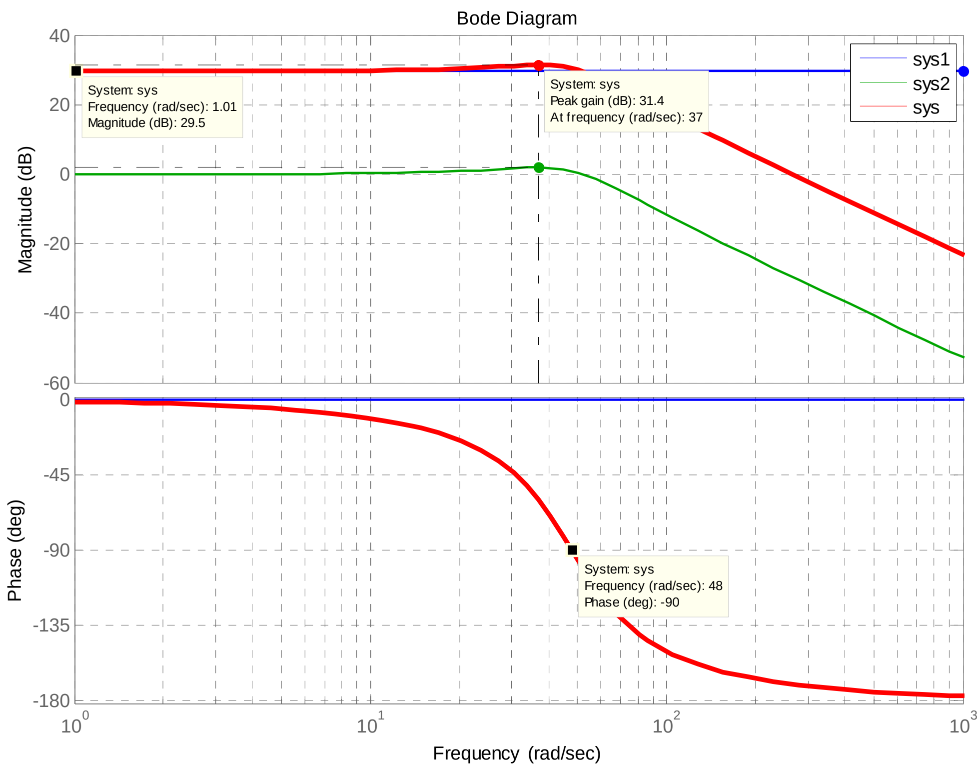
由 $$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} = 37.12 \quad \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

得 $$\omega_n = \frac{37.12}{\sqrt{1-2\zeta^2}} = 48\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

将上述结果代入传递函数表达式中得

$$G(s) = \frac{30\times 2304}{s^2 + 43.2s + 2304}$$

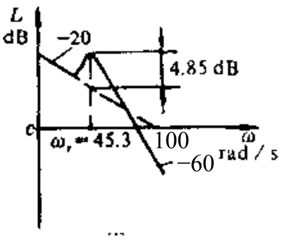
下图是根据求出的传递函数画出的 Bode 图，以供比较。



（f）由图中对数幅频特性各段斜率可见，系统是一个 I 型系统，由一个比例环节、一个积

分环节（斜率−20dB/dec）和一个振荡环节（斜率−40dB/dec）串联组成，所以系统的传递函数具有如下形式：

$$G(s)=K\frac{1}{s}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$



(f)

静态增益 K 可根据对数幅频特性斜率−20dB/dec 的低频特性的延长线与横轴相交处的频率 100 来确定，即有

$$20\lg\left|\frac{K}{j\omega}\right|=20\lg K-20\lg 100=0$$

得 $$K=100$$

振荡环节的参数可根据幅频特性曲线峰值点的频率和峰值来确定。

阻尼比小于 $\sqrt{2}/2$ 振荡环节幅频特性的峰值为

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

所以 $$20\lg M_r=20\lg\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=4.85\text{dB}$$

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=1.748$$

解得 $$\zeta=\begin{cases}0.9540\\0.2999\end{cases}$$

因为振荡环节的幅频特性有峰值，所以 $\zeta<\sqrt{2}/2$，所以取

$$\zeta=0.2999\approx 0.3$$

由 $$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}=45.3\ \ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

得 $$\omega_n=\frac{45.3}{\sqrt{1-2\zeta^2}}=50\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

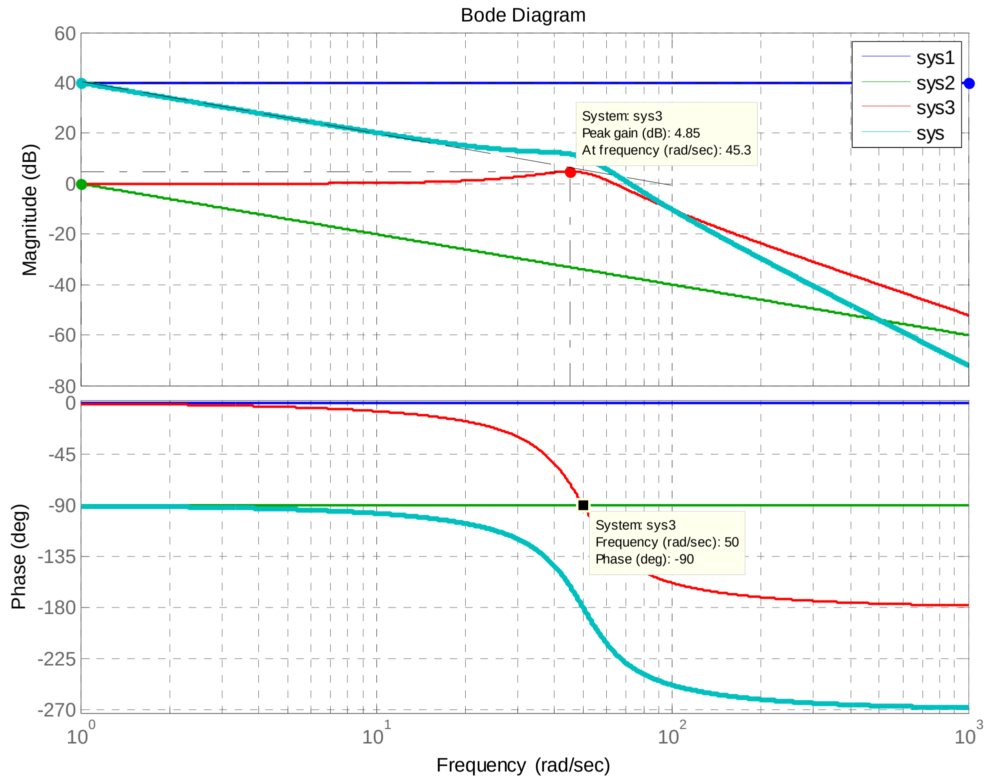
将上述结果代入传递函数表达式中得

$$G(s)=100\frac{1}{s}\frac{2500}{s^2+30s+2500}=\frac{250000}{s(s^2+30s+2500)}$$

或写成

$$G(s)==\frac{100}{s(0.0004s^2+0.012s+1)}$$

下图是根据求出的传递函数画出的 Bode 图，以供比较。


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)
sys1
sys2
sys3
sys
System: sys3
Peak gain (dB): 4.85
At frequency (rad/sec): 45.3
System: sys3
Frequency (rad/sec): 50
Phase (deg): -90

第6章 系统的稳定性

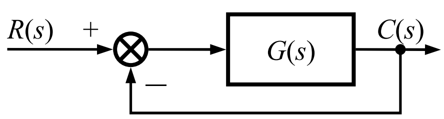
复习思考题

1. 如何区分稳定系统和不稳定系统？
2. 判别系统稳定与否的基本出发点是什么？
3. 劳斯－胡尔维茨判别系统稳定的充要条件是什么？
4. 乃奎斯特方法判别系统稳定性的基本原理和方法，为什么能用开环传递函数并结合开环乃奎斯特图就可以判定闭环系统的极点位置？
5. 当系统开环传递函数在虚轴上有极点存在时，如何处理对应于极点处的乃奎斯特图？
6. 当系统开环传递函数在原点或虚轴上存在重极点时，对应的乃奎斯特图与无重极点的有什么不同？
7. 相位裕量和幅值裕量是如何定义的，在极坐标和对数坐标上如何表示？
8. 根轨迹是如何定义的？它应满足什么条件？
9. 根据哪些特征就能方便地画出根轨迹的近似线？

习　题

6-1 设(图题 6-1)系统开环传递函数为 $G(s)$，试判别闭环系统稳定与否。

（1）$G(s)=\dfrac{10(s+1)}{s(s-1)(s+5)}$



图题 6-1

解：方法 1—利用劳斯稳定性判据

系统的闭环传递函数为

$$G_B(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{10(s+1)}{s^3+4s^2+5s+10}$$

系统特征方程为：$s^3+4s^2+5s+10=0$

闭环系统特征方程系数符号相同，满足劳斯判据必要条件，但系统是否稳定还要看劳斯数列第一列元素的符号是否相同。

劳斯数列为

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 4 & 10 \\ s^1 & 2.5 & \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

Routh 表第一列元素均大于 0。根据 Routh 判据的充要条件可知，该系统稳定。

方法 2—利用胡尔维茨稳定性判据

系统的闭环传递函数为

$$G_B(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{10(s+1)}{s^3+4s^2+5s+10}$$

系统特征方程为：$s^3+4s^2+5s+10=0$

闭环系统特征方程系数符号相同，满足胡尔维茨稳定性判据的必要条件，但系统是否稳定还要看胡尔维茨行列式结果是否全为正。

$$D_3=\begin{vmatrix}4 & 10 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 4 & 10\end{vmatrix}=100 \qquad D_2=\begin{vmatrix}4 & 10\\ 1 & 5\end{vmatrix}=10 \qquad D_1=4$$

主行列式及各子行列式全为正，故系统稳定。

特征根：-3.3949，-0.3026 ± j1.6894

（2）$G(s)=\dfrac{10}{s(s-1)(2s+3)}$

解：方法 1—利用劳斯稳定性判据

系统的闭环传递函数为

$$G_B(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{10}{2s^3+s^2-3s+10}$$

系统特征方程为：$2s^3+s^2-3s+10=0$

闭环系统特征方程系数符号不相同，不满足劳斯判据必要条件，故该系统不稳定。由劳斯数列第一列元素的符号变化次数可确定特征方程具有正实部根的个数。

劳斯数列为

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 2 & -3 \\ s^2 & 1 & 10 \\ s^1 & -23 & \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

Routh 表第一列元素中有小于 0 的元素，根据 Routh 判据的充要条件可知：该系统不稳定。由于 Routh 表第一列元素的符号改变了两次，因此，系统有两个特征根的实部为正。

该闭环系统的极点（特征方程的根）为：−2.2066；0.8533 ± j1.2401。

6-2 系统如图题 6-1 所示，采用劳斯－胡尔维茨判据判别系统稳定与否。

（1）$G(s)=\dfrac{K(s+1)(s+2)}{s^2(s+3)(s+4)(s+5)}$

解：

闭环传递函数：$G_B(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{K(s+1)(s+2)}{s^5+12s^4+47s^3+(60+K)s^2+3Ks+2K}$

系统特征方程为： $s^5+12s^4+47s^3+(60+K)s^2+3Ks+2K=0$

方法 1：劳斯稳定性判据

劳斯数列为

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 47 & 3K \\
s^4 & 12 & 60+K & 2K \\
s^3 & 42-\dfrac{K}{12} & \dfrac{17K}{6} & \\
s^2 & \dfrac{K^2-36K-30240}{K-504} & 2K & \\
s^1 & \dfrac{3K(-K^2+90K+14448)}{-K^2+36K+30240} & & \\
s^0 & 2K & &
\end{array}
$$

系统若要稳定，特征方程系数必须全为正，且劳斯数列第一列必须全大于 0，即

$$
\begin{cases}
60+K>0 \\
42-\dfrac{K}{12}>0 \\
\dfrac{K^2-36K-30240}{K-504}>0 \\
\dfrac{3K(-K^2+90K+14448)}{-K^2+36K+30240}>0 \\
2K>0
\end{cases}
$$

由此解得：当$0<K<\sqrt{16473}+45$时，系统稳定，否则系统不稳定。

方法 2：胡尔维茨稳定性判据

$$
D_5=\begin{vmatrix}
12 & 60+K & 2K & 0 & 0 \\
1 & 47 & 3K & 0 & 0 \\
0 & 12 & 60+K & 2K & 0 \\
0 & 1 & 47 & 3K & 0 \\
0 & 0 & 12 & 60+K & 2K
\end{vmatrix}=6K^2(-K^2+90K+14448)
$$

$$
D_4=\begin{vmatrix}
12 & 60+K & 2K & 0 \\
1 & 47 & 3K & 0 \\
0 & 12 & 60+K & 2K \\
0 & 1 & 47 & 3K
\end{vmatrix}=3K(-K^2+90K+14448)
$$

$$D_3=\begin{vmatrix}12 & 60+K & 2K \\ 1 & 47 & 3K \\ 0 & 12 & 60+K\end{vmatrix}=-K^2+36K+30240 \qquad D_2=\begin{vmatrix}12 & 60+K \\ 1 & 47\end{vmatrix}=504-K$$

$D_1=12$

根据胡尔维茨稳定性判据，解得当 $0<K<\sqrt{16473}+45$ 时，系统稳定，否则不稳定。

（2）$G(s)=\dfrac{0.2(s+2)}{s(s+0.5)(s+0.8)(s+3)}$

解：闭环传递函数：$G_B(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{0.2(s+2)}{s^4+4.3s^3+4.3s^2+1.4s+0.4}$

系统特征方程为：$s^4+4.3s^3+4.3s^2+1.4s+0.4=0$

方法 1：利用劳斯稳定性判据

闭环系统特征方程系数符号相同，满足劳斯判据必要条件，但系统是否稳定还要看劳斯数列第一列元素的符号是否相同。

劳斯数列为

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 4.3 & 0.4 \\ s^3 & 4.3 & 1.4 & 0 \\ s^2 & 4.3-\dfrac{1.4}{4.3} & 0.4 & \\ s^1 & 0.967 & & \\ s^0 & 0.4 & & \end{array}$$

系统稳定。

方法 2：利用胡尔维茨稳定性判据

闭环系统特征方程系数符号相同，满足胡尔维茨稳定性判据的必要条件，但系统是否稳定还要看胡尔维茨行列式结果是否全为正。

$$D_4=\begin{vmatrix}4.3 & 1.4 & 0 & 0 \\ 1 & 4.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 4.3 & 1.4 & 0 \\ 0 & 1 & 4.3 & 0.4\end{vmatrix}=6.612>0 \qquad D_3=\begin{vmatrix}4.3 & 1.4 & 0 \\ 1 & 4.3 & 0.4 \\ 0 & 4.3 & 1.4\end{vmatrix}=16.53>0$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4.3 & 1.4 \\ 1 & 4.3\end{vmatrix}=17.09>0 \qquad D_1=4.3>0$$

系统稳定。

特征根：-3.0121， -1，-0.1440 ± j0.3348

（3）$G(s)=\dfrac{K(s+6)}{(s^2+2s+3)(s^2+4s+5)}$

解：闭环传递函数：$G_B(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{K(s+6)}{s^4+6s^3+16s^2+(22+K)s+15+6K}$

系统特征方程为：$s^4+6s^3+16s^2+(22+K)s+15+6K=0$

方法 1：利用劳斯稳定性判据

劳斯数列为

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 16 & 15+6K \\
s^3 & 6 & 22+K & 0 \\
s^2 & \dfrac{74-K}{6} & 15+6K & \\
s^1 & \dfrac{-K^2-164K+1088}{74-K} & & \\
s^0 & 15+6K & &
\end{array}
$$

根据劳斯稳定性判据的充要条件得

$$
\begin{cases}
22+K>0 \\
15+6K>0 \\
\dfrac{74-K}{6}>0 \\
\dfrac{-K^2-164K+1088}{74-K}>0
\end{cases}
\text{，解得}
\begin{cases}
K>-22 \\
K>-2.5 \\
K<74 \\
-82-\sqrt{7812}<K<\sqrt{7812}-82
\end{cases}
\text{，综合得}
$$

$$-2.5<K<\sqrt{7812}-82$$

即 $-2.5<K<\sqrt{7812}-82\approx 6.3855$ 时，系统稳定，否则不稳定。

方法 2：利用胡尔维茨稳定性判据

$$
D_4=\begin{vmatrix} 6 & 22+K & 0 & 0 \\ 1 & 16 & 15+6K & 0 \\ 0 & 6 & 22+K & 0 \\ 0 & 1 & 16 & 15+6K \end{vmatrix}
=6\times\begin{vmatrix} 16 & 15+6K & 0 \\ 6 & 22+K & 0 \\ 1 & 16 & 15+6K \end{vmatrix}
-1\times\begin{vmatrix} 22+K & 0 & 0 \\ 6 & 22+K & 0 \\ 1 & 16 & 15+6K \end{vmatrix}
$$

$$=(15+6K)(-K^2-164K+1088)$$

$$
D_3=\begin{vmatrix} 6 & 22+K & 0 \\ 1 & 16 & 15+6K \\ 0 & 6 & 22+K \end{vmatrix}=-K^2-164K+1088 \qquad D_2=\begin{vmatrix} 6 & 22+K \\ 1 & 16 \end{vmatrix}=74-K \qquad D_1=6
$$

根据胡尔维茨稳定性判据，解得当 $-2.5<K<\sqrt{7812}-82$ 时，系统稳定，否则不稳定。

（4） $G(s)=\dfrac{100}{s(s^2+8s+24)}$

解：闭环传递函数 $G_B(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{100}{s^3+8s^2+24s+100}$

系统特征方程为：$s^3+8s^2+24s+100=0$

方法 1：利用劳斯稳定性判据

特征方程系数符号相同，满足劳斯稳定性判据的必要条件。

劳斯数列为

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 24 \\ s^2 & 8 & 100 \\ s^1 & 11.5 & \\ s^0 & 100 & \end{array} \quad \text{系统稳定}$$

方法 2：利用胡尔维茨稳定性判据

闭环系统特征方程系数符号相同，满足胡尔维茨稳定性判据的必要条件，但系统是否稳定还要看胡尔维茨行列式结果是否全为正。

$$D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 100 & 0 \\ 1 & 24 & 0 \\ 0 & 8 & 100 \end{vmatrix} = 9200 > 0 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 8 & 100 \\ 1 & 24 \end{vmatrix} = 92 > 0 \qquad D_1 = 8 > 0\text{，系统稳定。}$$

特征根：-6.6520，-0.6740 ± j3.8182

（5）$G(s) = \dfrac{3s+1}{s^2(300s^2+600s+50)}$

解：闭环传递函数 $G_B(s) = \dfrac{G(s)}{1+G(s)} = \dfrac{3s+1}{300s^4+600s^3+50s^2+3s+1}$

系统特征方程为：$300s^4+600s^3+50s^2+3s+1=0$

劳斯稳定性判据

特征方程系数符号相同，满足劳斯稳定性判据的必要条件。

劳斯数列为

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 300 & 50 & 1 \\ s^3 & 600 & 3 & 0 \\ s^2 & \dfrac{97}{2} & 1 & \\ s^1 & -\dfrac{909}{97} & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

或

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 300 & 50 & 1 \\ s^3 & 600 & 3 & 0 \\ s^2 & 48.5 & 1 & \\ s^1 & -9.371 & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

，系统不稳定，有两个实部为正的根。

胡尔维茨稳定性判据

特征方程系数符号相同，满足稳定性判据的必要条件。

$$D_4 = \begin{vmatrix} 600 & 3 & 0 & 0 \\ 300 & 50 & 1 & 0 \\ 0 & 600 & 3 & 0 \\ 0 & 300 & 50 & 1 \end{vmatrix} = -272700 < 0$$

，故系统不稳定。子行列式不用再计算了。

$$D_3 = \begin{vmatrix} 600 & 3 & 0 \\ 300 & 50 & 1 \\ 0 & 600 & 3 \end{vmatrix} = -272700 < 0\text{，}\quad D_2 = \begin{vmatrix} 600 & 3 \\ 300 & 50 \end{vmatrix} = 29100 > 0\text{，}\quad D_1 = 600 > 0$$

特征根：-1.9152，-0.1414，0.0283 ± j0.1073

（6） $G(s)=\dfrac{24}{s(s+2)(s+4)}$

解：闭环传递函数　　$G_B(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{24}{s^3+6s^2+8s+24}$

系统特征方程为：$s^3+6s^2+8s+24=0$

劳斯稳定性判据

特征方程系数符号相同，满足劳斯稳定性判据的必要条件。

劳斯数列为

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 8 \\ s^2 & 6 & 24 \\ s^1 & 4 & \\ s^0 & 24 & \end{array}$$ ，故系统稳定

胡尔维茨稳定性判据

特征方程系数符号相同，满足胡尔维茨稳定性判据的必要条件。

$$D_3=\begin{vmatrix} 6 & 24 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 24 \end{vmatrix}=576>0 \quad D_2=\begin{vmatrix} 6 & 24 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=24>0$$

$D_1=6>0$，故系统稳定。

特征根：-5.3434，-0.3283 ± j2.0937

6-3 判别图题 6-3(a)，(b)所示系统的稳定性。

解：（a）前向传递函数为

$$G(s)=\frac{0.1(s+1)^2}{s(s^2+0.09)}$$

闭环传递函数为

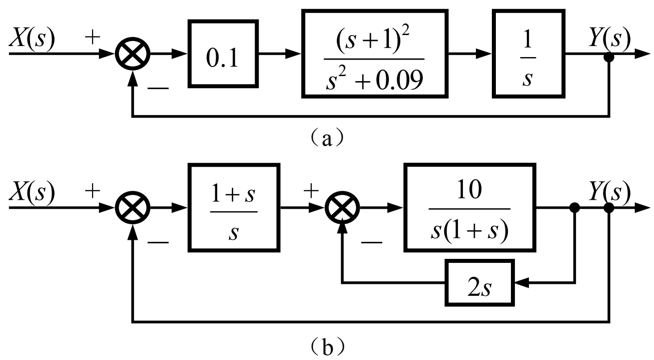
$$G_B(s)=\frac{0.1(s+1)^2}{s^3+0.1s^2+0.29s+0.1}$$

系统特征方程为：

$$s^3+0.1s^2+0.29s+0.1=0$$

利用劳斯判据判稳

特征方程系数符号相同，满足劳斯稳定性判据的必要条件。



图题 6-3

闭环传递函数特征方程之劳斯数列如下：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 0.29 \\ s^2 & 0.1 & 0.1 \\ s^1 & -0.71 & \\ s^0 & 0.1 & \end{array}$$ ，系统不稳定，有两个极点在 s 平面的左半平面。

特征根：0.0949 ± j0.5797，-0.2898

（b）经化简得前向传递函数为

$$G(s)=\frac{1+s}{s}\frac{10}{s(s+21)}=\frac{10(s+1)}{s^2(s+21)}$$

闭环传递函数为 $G_B(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{10(s+1)}{s^3+21s^2+10s+10}$

系统特征方程为：$s^3+21s^2+10s+10=0$

特征方程系数符号相同，满足劳斯稳定性判据的必要条件。

劳斯数列

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 21 & 10 \\ s^1 & \frac{200}{21} & \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

劳斯数列第 1 列皆为正，根据劳斯稳定判据知：系统稳定。

特征根：-20.5368，-0.2316 ± j0.6582

也可以利用开环传递函数用乃奎斯特稳定性判据判稳。

6-4 画出下列各开环传递函数的乃奎斯特图，并判别系统是否稳定。

（1）$G(s)H(s)=\frac{100}{(1+s)(1+0.1s)}$

解：开环传递函数的极点为 p_1=−1，p_2=−10，即在右半 s 平面无极点存在，所以 p=0。

开环频率特性

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{100}{(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}=\frac{100}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+(0.1\omega)^2}}\angle-\arctan\omega-\arctan0.1\omega$$

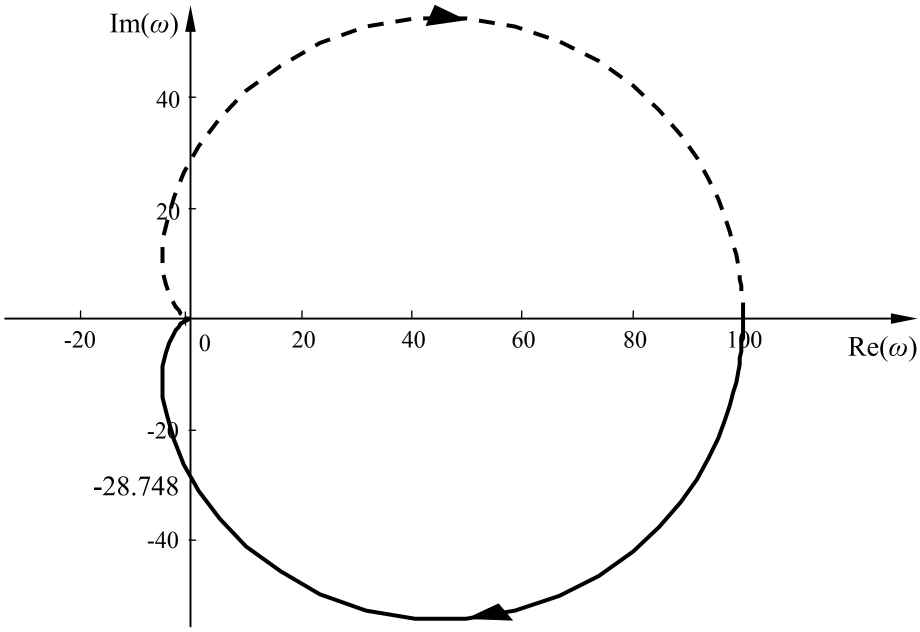
$$=\frac{100-10\omega^2}{(1+\omega^2)(1+0.01\omega^2)}-j\frac{110\omega}{(1+\omega^2)(1+0.01\omega^2)}$$

$G(j0)H(j0)=100\angle0°$，Re(0)=100，Im(0)=0

$G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-180°$，Re(∞)= 0-，Im(∞)=0-

因为相角在 0º～−180º 之间，且终点从第 3 象限趋于原点，所以与负虚轴必有一交点，令 Re(ω)=0 得交点频率为 $\omega=\sqrt{10}$，代入虚部得交点的虚部为

$$\mathrm{Im}(+\sqrt{10})=-\frac{100\sqrt{10}}{11}\approx-28.748$$



由图可见，开环 Nyquist 曲线不包围(−1，j0)点，即 N=0，所以 N=p，故系统稳定。

也可以只画出 $G(s)H(s)=\dfrac{1}{(1+s)(1+0.1s)}$ 的 Nyquist 曲线，然后根据包围(−1/100，j0)点的圈数 N 来判稳。以下各题可采用类似方法判稳。

（2） $G(s)H(s)=\dfrac{100}{(1+\frac{s}{2})(1+\frac{s}{5})(1+\frac{s}{20})}$

解：开环传递函数的极点为 p_1=−2，p_2=−5，p_2=−20，即在右半 s 平面无极点存在，所以 p=0。开环频率特性

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{100}{(1+\frac{j\omega}{2})(1+\frac{j\omega}{5})(1+\frac{j\omega}{20})}$$

$$=\frac{100}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4}}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{25}}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{400}}}\angle-\arctan\frac{\omega}{2}-\arctan\frac{\omega}{5}-\arctan\frac{\omega}{20}$$

$$=\frac{100-\frac{27}{2}\omega^2}{(1+\frac{\omega^2}{4})(1+\frac{\omega^2}{25})(1+\frac{\omega^2}{400})}-j\frac{(75-\frac{1}{2}\omega^2)\omega}{(1+\frac{\omega^2}{4})(1+\frac{\omega^2}{25})(1+\frac{\omega^2}{400})}$$

$$=\frac{20000(200-27\omega^2)}{(4+\omega^2)(25+\omega^2)(400+\omega^2)}-j\frac{20000(150-\omega^2)\omega}{(4+\omega^2)(25+\omega^2)(400+\omega^2)}$$

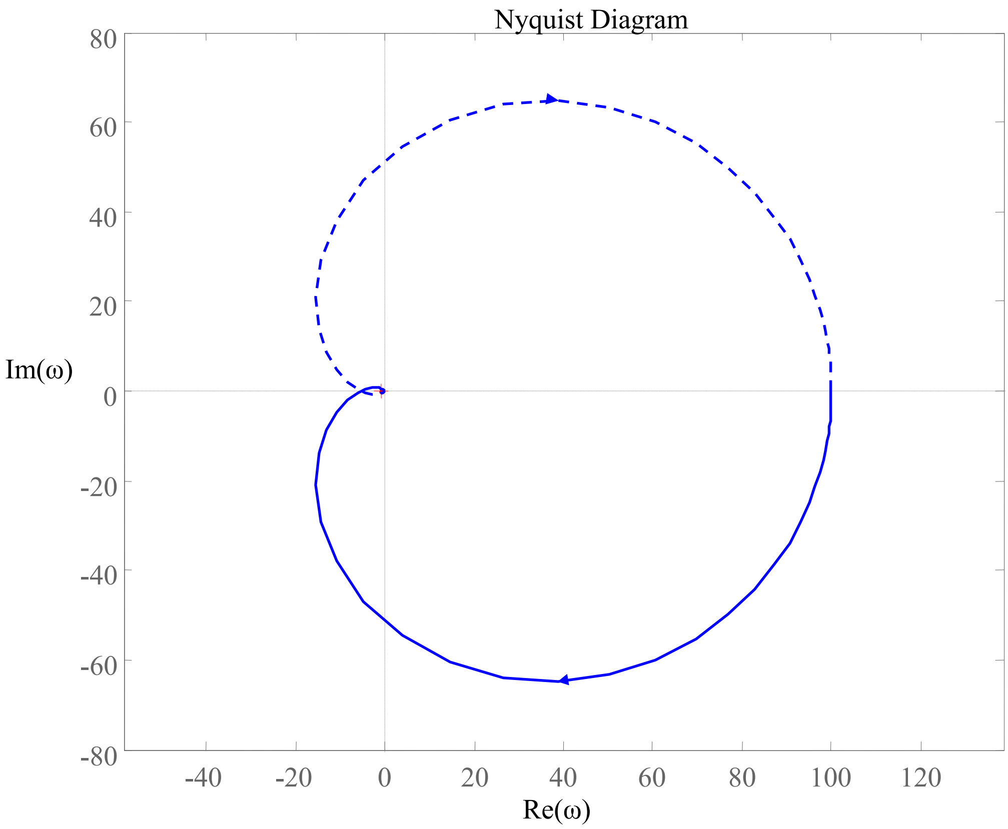
$G(j0)H(j0)=100\angle 0^\circ$，Re(0)=100，Im(0)=0

$G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-270^\circ$，Re(∞)= 0-，Im(∞)=0+

因为相角在 0º～−270º 之间，且终点从第 2 象限趋于原点，所以与负虚轴和负实轴必各有一交点。

令 $\mathrm{Re}(\omega)=0$ 得与虚轴之交点频率为 $\omega_{\mathrm{I}}=\dfrac{10\sqrt{6}}{9}\approx 2.72\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，代入虚部得交点的虚部为 $\mathrm{Im}(\omega_{\mathrm{I}})=-51.53$。

令 $\mathrm{Im}(\omega)=0$ 得与实轴之交点频率为 $\omega_{\mathrm{R}}=\sqrt{150}=5\sqrt{6}\approx 12.25\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，代入实部得交点的实部为 $\mathrm{Re}(\omega_{\mathrm{R}})=-400/77=-5.19$。



$p=0$，$N=-2$，$N\neq p$，故系统不稳定。

（3）$G(s)H(s)=\dfrac{200}{s(1+s)(1+0.1s)}$

解：开环传递函数的极点为 $p_1=0$，$p_1=-1$，$p_2=-10$，即在右半 s 平面无极点存在（将原点处极点看成在 s 左半平面），所以 $p=0$。

开环频率特性

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{200}{j\omega(1+j\omega)(1+0.1j\omega)}$$

$$=\frac{200}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.01\omega^2}}\angle-90^\circ-\arctan\omega-\arctan(0.1\omega)$$

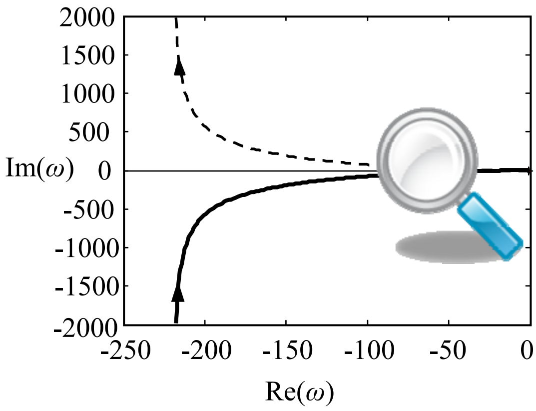
$$=-\frac{220}{(1+\omega^2)(1+0.01\omega^2)}-j\frac{200(1-0.1\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(1+0.01\omega^2)}$$

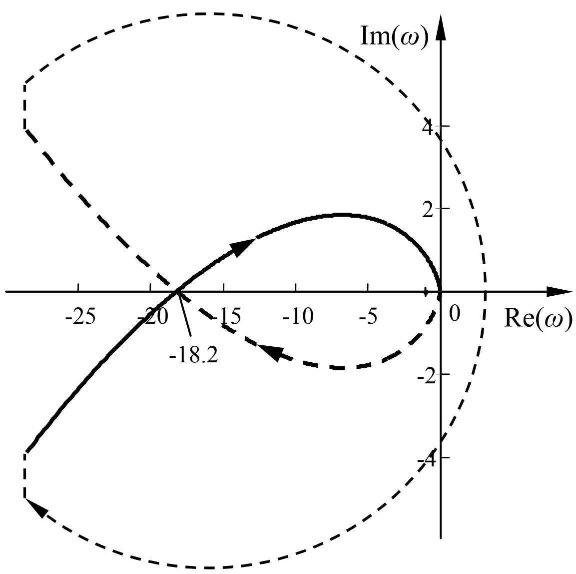
$G(j0)H(j0)=\infty\angle-90^\circ$，$\mathrm{Re}(0)=-220$，$\mathrm{Im}(0)=-\infty$

$G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-270^\circ$，$\mathrm{Re}(\infty)$= 0-，$\mathrm{Im}(\infty)$=0+

因为相角在−90º～−270º 之间，且终点从第 2 象限趋于原点，所以与负实轴必有一交点，令 $\mathrm{Im}(\omega)=0$ 得交点频率为 $\omega=\sqrt{10}$，代入实部得交点的实部为

$$\mathrm{Re}(+\sqrt{10})=-\frac{200}{11}\approx-18.182$$

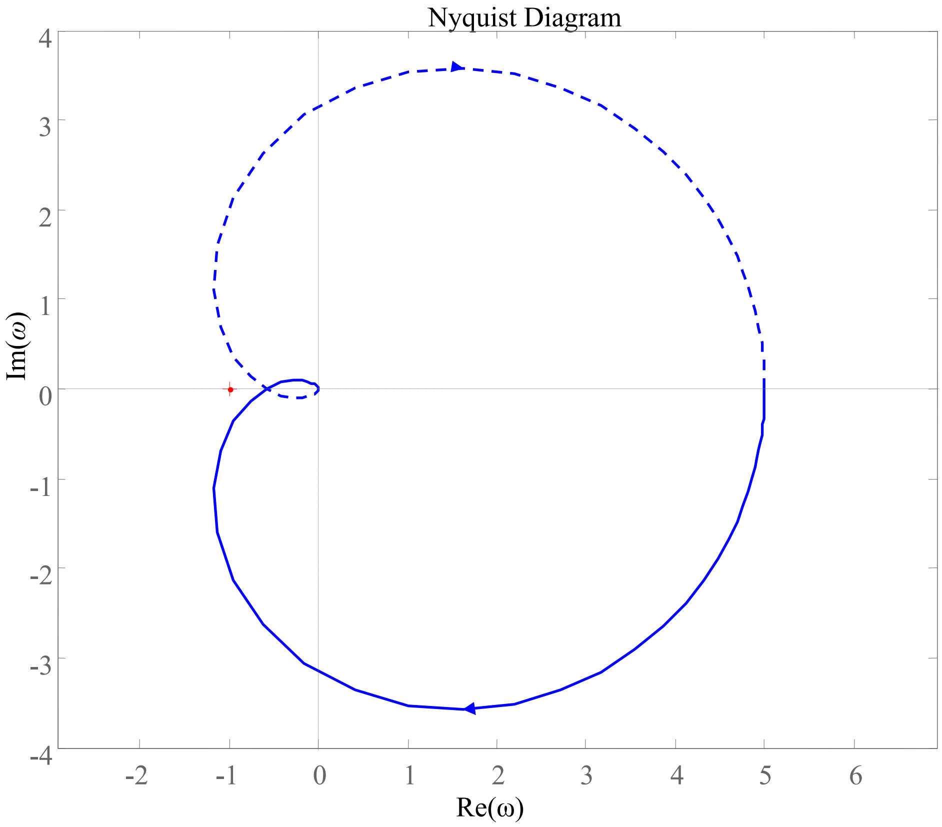




Nyquist Diagram

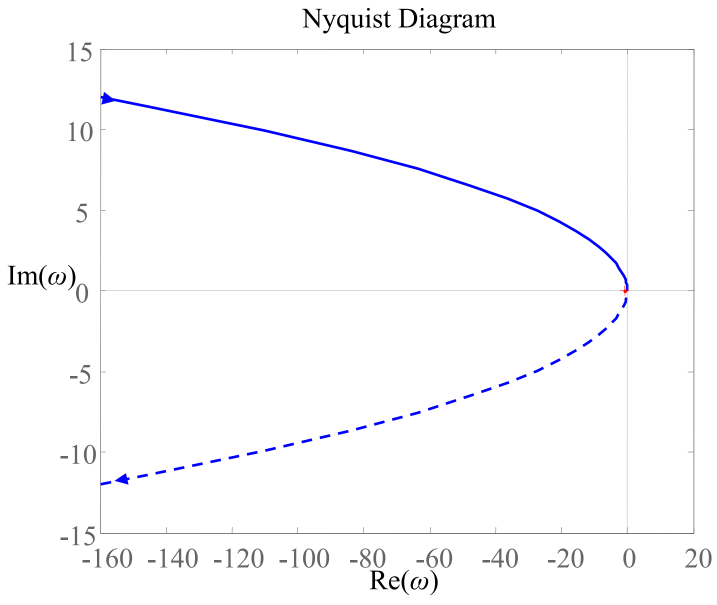
因为存在积分环节，即开环传递函数在原点有一个极点，将此极点看成在左半 s 平面，则从 ω=0−到 ω=0+用一个半径为无穷大的圆顺时针将 Nyquist 曲线封闭起来即可判稳。由图可见：N=−2，$N\neq p$，故系统不稳定。

（4）$G(s)H(s)=\dfrac{10}{(1+s)(1+2s)(2+3s)}$



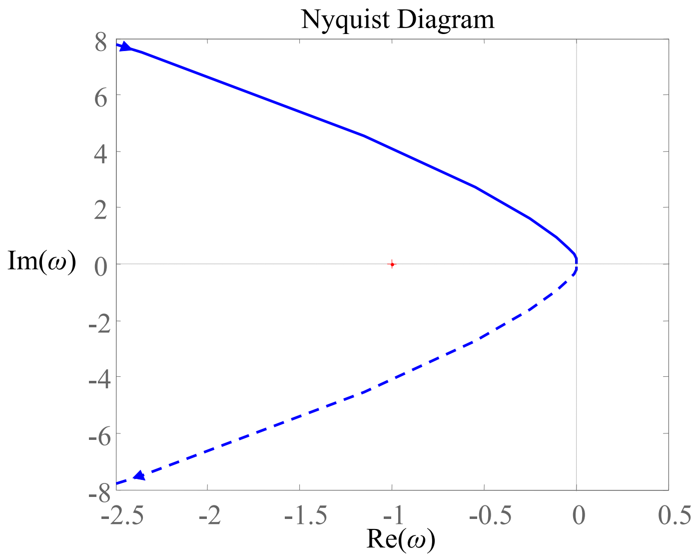
p=0，N=0，N=p，故系统稳定。

（5）$G(s)H(s)=\dfrac{10}{s^2(1+0.1s)(1+0.2s)}$



p=0，N=−2，$N\neq p$，故系统不稳定。

（6） $G(s)H(s)=\dfrac{2}{s^2(1+0.1s)(1+10s)}$



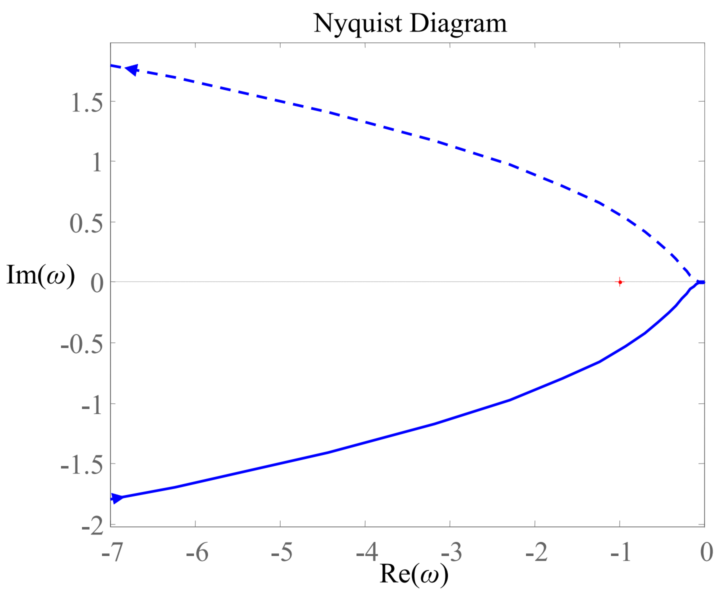
p=0，N=−2，$N\neq p$，故系统不稳定。

6-5 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{10K(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+10)}$$

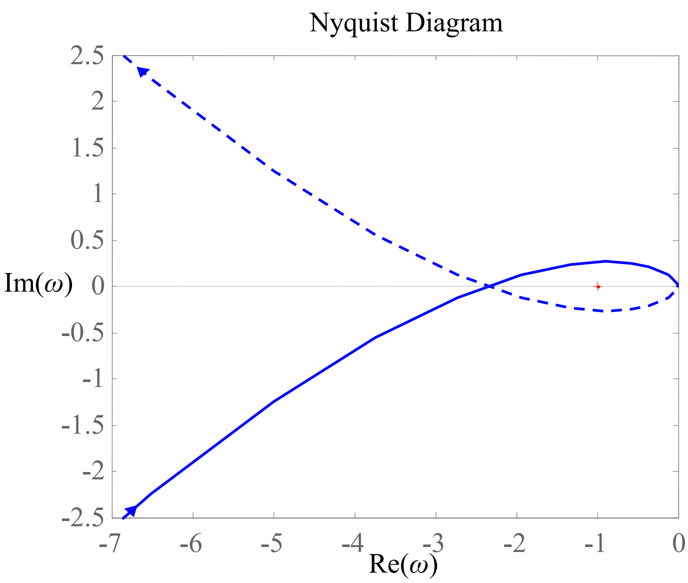
画出 $G(s)H(s)$在 K=1 和 K=40 时的乃奎斯特图，并用乃奎斯特判据判别系统的稳定性。

解： K=1 时



p=0，N=0，N=p，故系统稳定。

K=40 时



p=0，N=−2，$N \neq p$，故系统不稳定。

6-6 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{\alpha s+1}{s^2}$$

试确定使相位裕量等于 45° 时的 α 值。

6-7 有下列开环传递函数

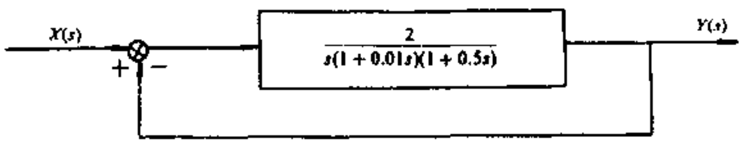
（1） $G(s)H(s)=\dfrac{20}{s(1+0.5s)(1+0.1s)}$

（2） $G(s)H(s)=\dfrac{50(0.6s+1)}{s^2(4s+1)}$

（3） $G(s)H(s)=\dfrac{775(0.1s+1)(0.2s+1)}{s(0.5s+1)(s+1)(0.065\times10^{-4}s^2+6.55\times10^{-5}s+1)}$

试绘制系统的伯德图并分别求它们的幅值裕量和相位裕量。

6-8 有系统如图题 6-8 所示。分别画出其乃奎斯特图和伯德图，求出其相位裕量并在所作出的上述两图上标出。



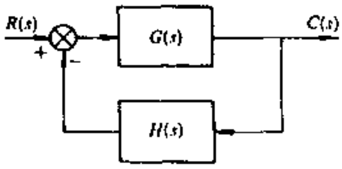
图题 6-8

6-9 设图题 6-9 所示系统中

$$G(s)=\frac{10}{s(s-1)}$$

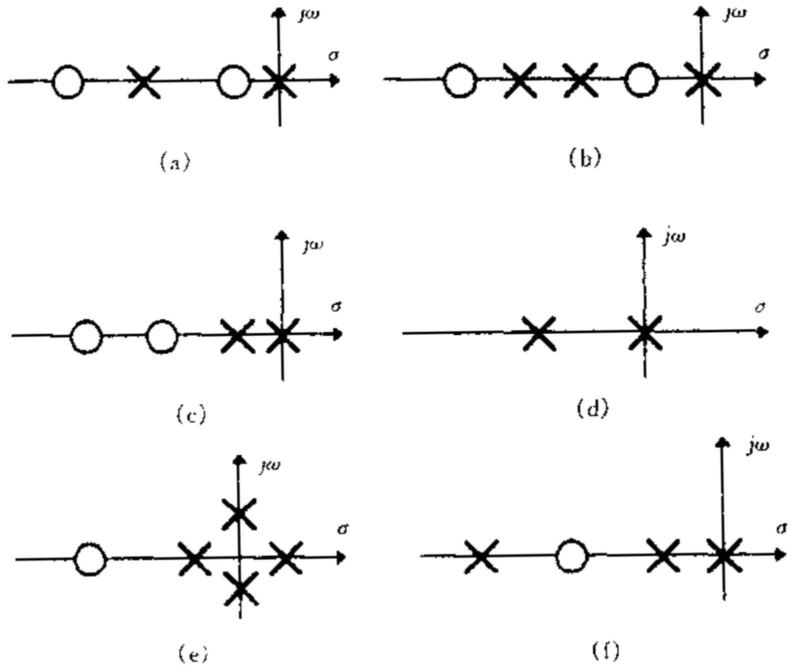
$$H(s)=1+K_n s$$

试确定闭环系统稳定时的 K_n 的临界值。



图题 6-9

6-10设开环极点、零点如题图 6-10 中各图所示，试画出各自相应的根轨迹图。



图题 6-10 的开环零点、极点分布图

6-11一单位负反馈的系统具有如下各前向传递函数：

（1） $G(s)=\dfrac{K}{s(1+0.1s)(1+s)}$

（2） $G(s)=\dfrac{K}{s^2}$

（3） $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(s^2+8s+16)}$

试分别作出其根轨迹图并作出必要的解释，并说明当 K 为何值时系统将不稳定。

6-12设控制系统中：

$$G(s)=\frac{K}{s^2(s+1)}，\quad H(s)=1$$

该系统在增益 K 为任何值时均不稳定，试画出该系统的根轨迹图，利用作出的根轨迹图，说明在负载轴上加一个零点，即把 $G(s)$改为

$$G_1(s)=\frac{K(s+a)}{s^2(s+1)}\quad (0\leqslant a<1)$$

可以使该系统稳定。