

摘 要

空间网壳结构是以三维形体及三维受力为主要特征的结构型式，它的特点是受力合理，刚度大，重量轻，造价低，结构形式新颖丰富，生动活泼，可以突出结构美且富有艺术表现力，国内外应用非常广泛。

随着建筑材料、计算机技术和结构理论的进步，网壳结构总的发展趋势是：跨度越来越大，所用材料越来越经济。网壳结构的稳定问题也因此成为设计中的关键问题。只有在结构的荷载一位移非线性全过程分析中才能准确把握网壳的稳定承载力。因此，本文从结构的非线性全过程分析入手，对单层联方球面网壳的承载力进行了深入、系统的研究。

本文利用结构分析软件 ANSYS，对不同跨度、不同矢跨比及不同截面的单层球面网壳结构进行了非线性全过程稳定分析。通过变化不同的参数，考虑了对称荷载、不对称荷载和初始缺陷等因素对网壳稳定承载力的影响，对所得结果进行统计、分析和归纳，发现许多规律，最后拟合出单层联方网壳稳定设计的实用公式，对工程设计有一定的指导意义。

关键词：单层球面网壳，稳定性，屈曲，极限荷载，不对称荷载，初始缺陷

ABSTRACT

Space latticed dome is a type of structural system whose major character is three-dimensional shape and three-dimensional loaded. The rationally loaded character, great stiffness, lightweight, low fabrication cost, novel and lively pattern, beauty and great expression art measuring are features of this type of structure. Therefore the latticed domes are widely used abroad and home.

Total trend in development of latticed domes is that the span of latticed dome becomes more and more large, as well as the material used becomes more and more economic with the development of building materials, computer technique and structural theory. So, the stability is the key problem on the structural design of latticed domes. Only by the load-displacement nonlinear analysis during the whole process of the structure, the stability capability of the single-layer unite latticed domes can be estimated correctly. Therefore, based on the nonlinear whole process analysis of structure, the paper studies on the stability capability of latticed domes systematically and deeply.

Based on FEM analysis software ANSYS, the nonlinear whole process analysis of stability behavior of single-layer latticed domes with different span and different ratio of rise to span and different section are carried out. The effect of the symmetrical load and unsymmetrical load and initial imperfection behavior of single-layer latticed domes with various parameters changes is also analyzed. A lot of stability regularities are found through the deduction and analysis of these obtained curves of whole course. At last, the empirical formula of load capacity of single-layer latticed domes is obtained through fitting. Some important conclusions are acquired and can be used to guide engineering design.

Keywords: single-layer latticed domes , stability , buckling , ultimate load , unsymmetrical load, initial imperfection

1 绪 论

1.1 选题的背景

空间结构是指结构的形态呈三维状态,在荷载作用下具有三维受力特性并呈空间工作的结构。平板网架,网壳以及悬索结构等空间结构在我国得到了广泛的应用,已为人们所熟悉。空间结构与平面结构相比具有很多独特的优点:平面结构从技术经济方面讲,很难跨越很大的空间,也很难满足建筑平面,空间和造型方面的要求,而空间结构是以三维形体及三维受力为主要特征的结构形式,它的特点是受力合理,刚度大,重量轻,造价低,结构形式新颖丰富,生动活泼,可以突出结构美而富有艺术表现力,国内外应用非常广泛。特别是近年来,人们生活水平不断提高,工业生产、文化、体育等事业不断进步,大大增强了社会对空间结构尤其是大跨度高性能空间结构的需求。而计算理论的日益完善以及计算机技术的飞速发展使得对任何极其复杂的三维结构的分析与设计成为可能。这些正是空间结构能够扩大应用范围得以蓬勃发展的主要因素。近几十年来,世界上建造了成千上万的大型体育馆、飞机库、展厅,采用了各类空间结构,展示着优美的造型,成为一道道风景。更有无数的厂房、仓库等采用空间结构,实现了经济、合理的完美统一。

虽然在 1966 年,人们还将空间结构视为“interesting but exotic, non-conventional structure”,而如今,空间结构已经在全世界范围内得到了广泛的应用。空间结构的类型与形式也日益丰富多彩,并难以对其严格分类。但在众多的空间结构类型中,网壳结构无疑是应用得最为普遍的空间结构形式之一。国外著名的新奥尔良体育馆,西班牙巴塞罗那的 Palau d'Esport 体育馆,日本的 Fukuoka 展览馆,澳大利亚维多利亚艺术中心塔等等不胜枚举。在我国,香港国际机场的 Passenger terminal building,黑龙江省速滑馆,天津市体育馆,北京石景山体育馆,长春五环体育馆等是其中的代表。对空间结构这种自由度多,受力情况复杂的结构的研究方法也随着计算机技术的迅猛发展与应用,从对连续化模型分析(即拟壳法)逐渐转到了对离散化模型分析(即有限单元法)。在就空间结构力学性能的研究中,大致有三个方向:静力问题,动力问题和稳定问题。在研究稳定问题时,目前的趋势是考虑结构非线性性能并通过有限元分析来进行研究。

随着建筑材料、计算机技术和结构理论的发展,网壳结构总的发展趋势是:跨度越来越大,所用材料越来越经济。网壳结构的稳定问题也因此成为设计中的关键问题。当设计者对网壳结构的稳定性没有把握时,网壳结构通常被设计成双

层的,这主要是因为双层网壳不易发生失稳,然而对于单层球面网壳,由于壳面整体较薄,刚度较差,稳定问题尤为重要。

1.2 国内外研究现状

世界各国为大跨度空间结构的发展投入了大量的研究经费。例如,早在 20 年前,美国土木工程学会曾组织了为期 10 年的空间结构研究的计划,投入经费 1550 万美元。同一时期,西德由斯图加特大学主持组织了一个“大跨度空间结构综合研究计划”,每年研究经费 100 万马克以上。国际壳体 and 空间结构学会(IASS)还每年定期举行年会和各种学术交流活动。我国大跨度空间结构的基础原来比较薄弱,但随着国家经济实力的增强和社会发展的需要,近些年也取得了比较迅猛的发展。工程实践的数量较多,空间结构的类型和形式逐步趋向多样化,相应的理论、研究和设计也逐步完善。以北京亚运会(1990)、哈尔滨冬季亚运会(1996)和上海八运会(1997)等许多体育建筑为代表的一系列大跨空间结构作为我国建筑科技进步的某种象征在国内外都取得了一定影响^[36]。

中外学者对网壳稳定问题进行了大量研究,取得了丰硕成果,在理论与实践均具有极大价值。早期的结构几何非线性稳定性分析中,摄动法占有极其重要的地位,并大都引用了关于连续薄壳的研究成果,但这种拟壳法具有很大的局限性。随着计算机的发展和广泛应用非线性有限元分析方法成为结构稳定性分析最有力的工具。由 Ricks 和 Wempnor 提出的并由 Crisfield 和 Ramn 等人改进的各种弧长法是这一方面的一个重要成果^[4~7]。近十余年来我国的钱若军、沈世钊、董石麟、沈祖炎、胡学仁、吴剑国等学者在总结国内外成果的基础上也积极开展了自己的研究工作,除了早期对连续化计算公式作了一定探讨外,还把大部分精力投放在以非线性有限元为基础的全过程分析方面^[8~18],对理论表达式精确化、合理选用平衡路径跟踪的计算方法、灵活的迭代策略等方面进行了深入细致的探索,使具有大量自由度的复杂结构体系的全过程分析成为可能,并编制出相应的分析程序。

1.3 结构稳定分析简史

稳定问题是结构力学领域中一个最古老的问题。早在 1744 年, Euler 就发表了他关于柱子稳定的研究,提出了基于小挠度理论的欧拉临界荷载,到 18 世纪 Lagrange 又详细研究了柱子屈曲的大变形理论。Euler 和 Lagrange 主要研究的是理想柱,即柱子是呈严格的直线;材料是关于柱中心线轴对称的;压力沿着柱子的中心线作用,由此建立起来的经典理论成为以后对稳定问题深入研究的理论基础,

并且, 有关柱子临界荷载的公式一直沿用至今。

采用经典方法预估弹性薄壳的分枝屈曲荷载的研究早在 1908 年, 1911 年由劳伦兹 (Lorenz); 1910 年由铁木辛柯 (Timoshenko); 1914 年由苏斯威尔 (Sorthwell) 及 1915 年由兹里 (Zocly) 等人系统展开。然而, 这些屈曲荷载未能得到实验证明。直到 20 世纪 30 年代末, 冯·卡门 (V. Karman) 和钱学森及唐奈尔 (Donnell) 等分别取得了一些进展, 论证了结构屈曲荷载理论与实践之间的差别在于结构的不稳定后屈曲形态, 并形成了考虑前屈曲变形的后屈曲形态研究的弹性稳定大挠度理论。柯依托 (Koiter) 研究了结构的后屈曲问题, 解决了分枝点附近的后屈曲模态和第二平衡路径问题, 以及微小的初始缺陷对屈曲性状的影响, 并提出了初始缺陷灵敏度与临界点自身不稳定之间的关系。1963 年, 汤姆逊 (Thompson) 系统发展了结构弹性稳定的基本概念, 将总势能方程作为幂级数进行展开, 用 N 个广义坐标和一个荷载变量描述结构的弹性稳定问题, 并讨论了结构的分枝和跳跃这两个临界状态。伯因卡 (Poincare) 则以力学系统中广义坐标的概念为基础研究了临界平衡状态附近的平衡图形, 指出了极值点存在的可能性。

早期的结构非线性稳定分析中, 摄动法占有极其重要的地位。Morin 和 Connor 采用摄动法不仅得到壳体的临界荷载和屈曲前的结构位移, 而且还追踪到结构的后屈曲平衡路径。这一时期, 网壳结构的稳定性分析大都引用关于连续薄壳的研究成果, 这种方法对估算某些特定形式网壳的承载力起过重要作用, Wright、Buchert、Del、Bzo 和我国的胡学仁等提出了关于球面网壳稳定性的计算公式。但这种拟壳法具有较大的局限性: 连续化壳体理论本身并不完善, 缺乏统一的理论模式, 需要对于不同问题假定可能的失稳模态, 并作出相应的近似假设, 并且反应不出不同部位采用不同规格杆件的真实情况, 也无法反应多种网格各向异性的实际情况。因而在理论验算的同时, 必须实验进一步测试。但由于试验工作的复杂性, 往往很难得到规律性的结果。进入 20 世纪 70 年代, 随着计算机的日益发展和广泛应用, 非线性有限元方法的兴起, 并逐渐成为结构稳定性分析的主要工具。国内外的学者在几何非线性问题的理论表达式和平衡路径的跟踪方面做了许多工作, 由于结构体系的非线性迭代计算在某些奇异点和特殊路径段容易发散, 研究者们在计算技术方面做了很多探索, 如牛顿拉伏逊法、人工弹簧法、弧长法等, 虽然各种方法都有不同程度的局限性, 但普遍认为, 弧长法具有较强的适应性, 如计算参数适当的话, 一般能成功越过平衡路径上的奇异点, 进入后屈段。

1.4 本文研究目的及方法

早期的网壳稳定分析只限于线性分析或屈曲前的非线性分析。线性分析方法

是将结构的稳定问题化为特征值来求解。由于球面网壳是跨高比较大的结构，它具有很高的几何非线性，线性分析方法中的一些基本假设与实际情况很难相符。用线性方法通常会过高地估计结构的稳定承载力，而且线性分析方法也无法描述结构的荷载一位移全过程性能，尤其是无法预测结构的屈曲后性能。而许多结构的稳定承载能力恰恰是由结构的屈曲后性能所决定。因此，对单层球面网壳进行非线性全过程分析是十分必要的。

网壳结构的非线性全过程分析问题包括两个方面：一是几何非线性；二是物理非线性。由于单层球面网壳结构的折算厚度相对于跨度是非常小的，因而几何非线性是主要的，当然也不能排除结构在失稳前已有部分杆件截面的局部已进入塑性，且鉴于网壳结构的弹塑性稳定问题过于繁复，材料非线性对结构全过程曲线及其极限点的影响实际上是使结构稳定承载力的安全储备稍有下降，对这种影响已有可能从定量上作出适当判断^[19]，故在进行大规模参数分析时暂不考虑其物理非线性特性是合理的。

研究中，人们通常利用计算机对网壳进行全过程分析，得到精确的网壳稳定承载力及其他性能。然而对于广大设计人员来说，这种方法显然过于繁琐。人们迫切需要一种相对简单，而又不失准确的方法来设计网壳结构。在这一方面，国内外的研究并不很多，并未得到一致肯定的简易计算方法。因此，本课题所研究的内容具有一定的实用价值。

本文选用不同的跨度、矢高比、荷载形式及初始缺陷情况，用 ANSYS 对单层球面网壳的稳定性进行大规模的参数分析，希望由此能对单层球面网壳的失稳机理有更进一步的认识，并用等效连续法把单层球面网壳等效为正交各向异性壳体，用壳体的稳定性理论及 MATLAB 程序求得壳体的理论解来加以比较，在此基础上得到一个比较简明的网壳结构稳定承载力设计公式，以方便广大设计工作者。

1.5 本论文的主要工作

(1) 根据所拟定的结构分析方案利用 SAP2000 工程有限元分析应用软件对各结构进行内力分析，适当选择与调整网壳杆件的截面，以使结构内力分布均匀，具有良好的受力性能，更符合工程实际。

(2) 利用结构分析软件 ANSYS，对单层球面网壳的稳定性能进行了全过程分析。分析不同的跨度、矢高比、荷载形式及初始缺陷等各参数情况下的对球面网壳型单层球面网壳分别进行了荷载一位移全过程计算。

(3) 对大量计算结果进行分析、整理、归纳，分析不同的跨度、矢高比、荷载形式及初始缺陷等各参数对球面网壳型单层球面网壳稳定承载力的影响，由此

得出对实际工程有参考价值的结论及建议。

(4) 利用回归分析方法得到一个比较简明的网壳结构稳定承载力设计经验公式，以方便广大设计工作者。

2 单层球面网壳结构的稳定性分析

2.1 失稳现象

稳定是结构所处的一种状态。由于习惯上对稳定状态熟视无睹，描述稳定状态时更多的是以不稳定现象或失稳现象来反衬。

稳定，实质上可分为三类：第一类是结构体内的几何稳定；第二类是结构受外部约束后的稳定，即约束的充分性；第三类是外部约束充分的结构的弹性或弹塑性稳定。这三个问题构成了广义稳定问题。简单的讲结构的稳定问题就是广义稳定问题。因此，在结构的稳定分析中主要研究的是不平衡现象，也就是研究结构运动。失稳是由轴向压力引起的，或者说失稳通常出现在薄膜应力为主的区域。失稳的真正含义是几何突变，即在任意微小的外力干扰下物体或结构的几何发生极大的改变。在撤除了这个任意微小的外力后，物体或结构并不能恢复到原来的几何。事实上自从开始研究失稳现象以来稳定就没有一个统一的定义。关键在于将这种现象放在哪一种理论系统中研究。一种能比较广泛地被接受地解释是：失稳意味着稳定平衡向不稳定平衡的转移而到达一个新的稳定的平衡。所以人们刻意寻求可能发生平衡转移的那个瞬间或状态，即临界状态。同时人们的兴趣也就理所当然地集中在稳定平衡或不稳定平衡的定义及其判断。

至此，可以对失稳作这样的定义，即结构的失稳是处于高位能的结构由平衡的临界状态随着能量的释放向不稳定平衡状态运动的过程。引起网壳结构失稳的根本原因在于薄膜力，即如果结构本身的刚度以薄膜刚度为主而弯曲刚度很小，薄膜应力是主要的应力形式。或者说，在荷载作用下，结构弯曲应力的增长远小于薄膜应力的增长，结构主要处于薄膜应力状态时才可能发生失稳。对于多数网壳结构，在一定的荷载形式、几何形状和边界条件下以及弯曲刚度很小或者弯曲刚度退化，网壳结构才处于薄膜状态，几何软化导致失稳是网壳结构主要的破坏形式。所以在进行失稳分析时了解结构的可能破坏形式是极为重要的。因为，因强度破坏的结构根本没有失稳的可能。另外，对网壳的失稳跟踪分析时，意味着也可以通过其他方式加载，只需保证结构的薄膜力状态^[23]。

结构的不稳定性能主要有两种类型：分枝点失稳和极值点失稳，如图 2.1 (a, b, c) 所示。图中实线表示稳定的平衡路径，虚线表示不稳定的平衡路径， P_c 是临界荷载。对于分枝点失稳情况过临界点时将存在轴向受压和受弯两种不同受力性质的平衡状态的可能，即发生平衡路径的分枝，其中沿着初始位移形态变化的一条平衡路径成为“基本路径”，结构在该路径上的平衡是不稳定的，其它的平衡

路径称为“分枝失稳”。在分枝路径上如果荷载呈上升的形式称为稳定的分枝失稳[图 2.1 (a)]；如果荷载呈减小的形式则称为不稳定的分枝失稳[图 2.1 (b)]。对于极值点失稳情况[图 2.1 (c)]，过临界点后不会发生平衡形式的分枝，自始至终都处于压弯平衡状态中，一般情况下杆件在失稳之前，受压一侧已存在塑性变形，屈曲的发生是杆件丧失承载力的结果，它过临界点后的唯一一条平衡路径的曲线是下降的，荷载是减小的，结构的平衡是不稳定的。

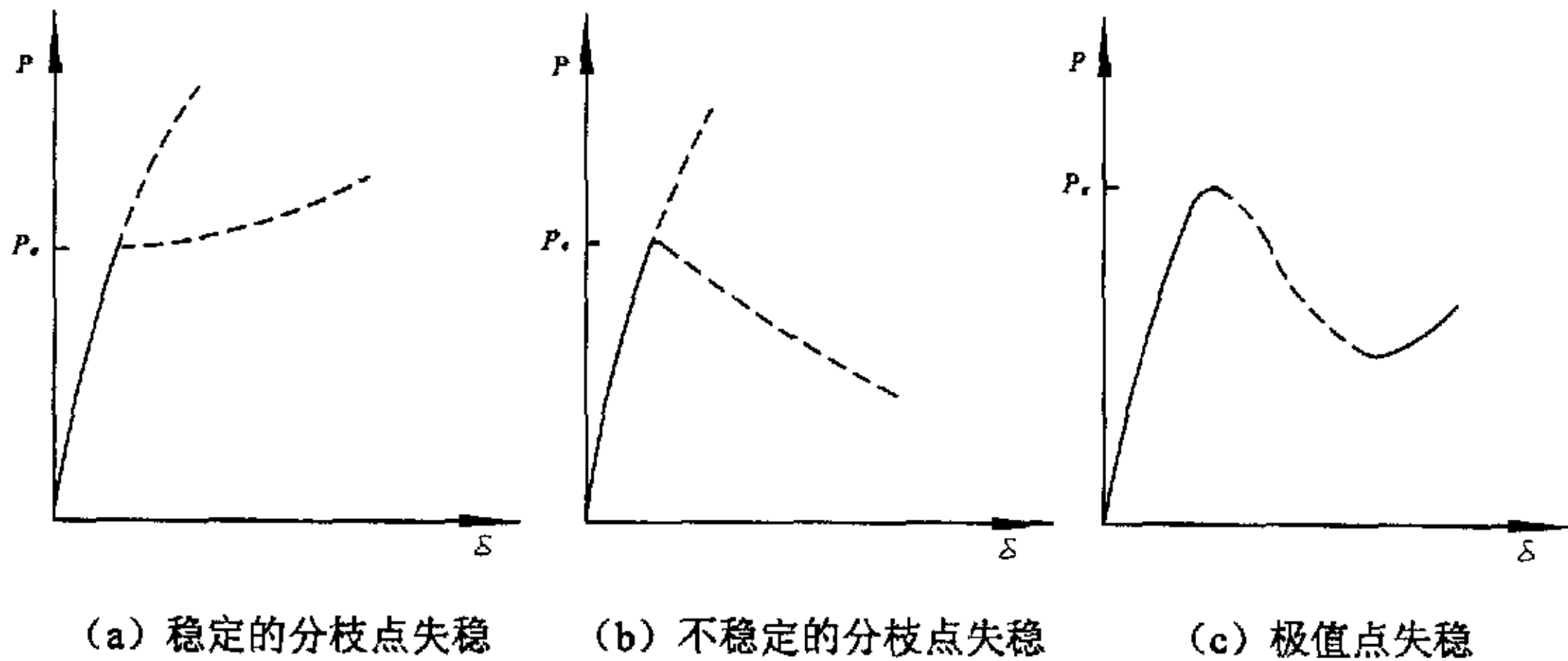


图 2.1 失稳类型

Fig 2.1 Types of buckling

2.2 几何非线性的有限元法及 T.L 一般式

根据实际结构的失稳现象，通常使用的线性方法所得的屈曲荷载并不能反映单层球壳结构的实际承载能力，非线性性能，初始缺陷可能对单层网壳结构的稳定性产生极大的影响。在理论研究中，一般采用非线性有限元法直接考虑非线性性能的影响。

用于结构分析的非线性有限元法通常有两种列式方法 (T.L) 和更改的拉格朗日列式 (U.L)。前者采用参照描述法，以未变形时的机构位形为参照位形；后者采用相关描述法，参照最后一个已知平衡位形，即参照 t 时刻的结构位形计算 $t+\delta t$ 时刻的新平衡位形。一般认为，U.L 法比较容易引入非线性本构关系，因而适合于非弹性大应变分析，而 T.L 法特别适合非线性弹性问题，特别是大位移、中等转动和小应变问题，实际工程中的板壳问题和梁的弯曲通常属于这类问题，单层球壳的稳定分析也属于该类问题。

根据网壳结构的受力特点及采用杆件的截面特性，在单刚推导过程中采用基本假设：(1) 单元是等截面的，且双轴对称，这样就排除了扭转刚度与弯曲刚度以及扭转刚度与轴向刚度的相互耦联；(2) 不考虑剪切变形和截面翘曲；(3) 外

荷载仅作用在结点上，且与变形无关。

本文在介绍几何非线性有限元法的一般列式 (T.L) 的基础上，推导了空间梁单元的切线刚度矩阵。

用 $\{\Psi\}$ 表示结构的内力、外力的矢量和，则由虚功原理得到：

$$d\{u^*\}^T \{\Psi\} = \int d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - d\{u^*\}^T \{R\} \quad (2.1)$$

增量形式的几何方程为：

$$d\{\varepsilon^*\} = [B]d\{u^*\} \quad (2.2)$$

将 (2.1) 代入式 (2.2) 可得到结构的一般平衡方程为：

$$\{\Psi\} = \int [B]^T \{\sigma\} dV - \{R\} = 0 \quad (2.3)$$

在大位移、小应变假定下，结构的应变和结构的位移关系即几何方程是非线性的，几何矩阵 $[B]$ 是结点位移向量 $\{u\}$ 的函数，为方便起见，可将其分为线性和非线性两部分，即：

$$[B] = [B_L] + [B_{NL}] \quad (2.4)$$

其中，非线性部分是由结构的非线性变形引起的，一般为结构结点位移向量的线性函数。

仍然假定结构处于弹性状态，结构应力、应变关系即结构的物理方程为：

$$\{\sigma\} = [D]([\varepsilon] - [\varepsilon_0]) + \{\sigma_0\} \quad (2.5)$$

如果采用牛顿-拉夫逊法求解非线性问题，则要求计算结构的切线刚度矩阵，根据切线刚度矩阵的定义，由式 (2.3) 可得：

$$d\{\Psi\} = \int d[B]^T \{\sigma\} dV = \int [B]^T d\{\sigma\} dV \quad (2.6)$$

增量形式的物理方程为：

$$d\{\sigma\} = [D]d\{\varepsilon\} \quad (2.7)$$

将式 (2.7) 代入式 (2.6)，可得：

$$d\{\Psi\} = ([K_0] + [K_L] + [K_\sigma])d\{u\} = [K_T]d\{u\} \quad (2.8)$$

其中 $[K_T]$ 为结构的切线刚度矩阵，由三部分组成：

$[K_0] = \int [B_L]^T [D] [B_L] dV$ 为结构的弹性刚度矩阵；

$[K_\sigma] = \int d[B_{NL}]^T \{\sigma\} dV$ 为初应力刚度矩阵；

$[K_L] = \int ([B_L]^T [D] [B_{NL}] + [B_{NL}]^T [D] [B_L] + [B_{NL}]^T [D] [B_{NL}]) dV$ 为初位移刚度

矩阵。

与单元初应力等效的结点力向量为：

$$\{f\} = -\int [B]^T \{\sigma_0\} dV \quad (2.9)$$

根据有限元法的 T.L.一般列式,求解结构非线性问题必须首先计算结构的切线刚度矩阵,2.4 节对单层网壳结构分析中的梁单元加以分析,并推导相应的切线刚度矩阵。

2.3 缺陷引起的等效结点初内力^[22]

结构的缺陷将会产生初应力,而这些初应力对缺陷敏感性结构将会较大地削弱其承载力,但并非所有缺陷均能量化。这里仅讨论因单位长度偏差及初弯折产生的初始等效内力。

因杆件长度的随机偏差而产生的等效结点力

$$p_{xi} = -p_{xj} = \frac{EA}{L} \Delta L \quad (2.10)$$

式中 ΔL 是杆件长度的随机偏差。经量测,杆件长度的偏差呈正态分布,图 2.2。

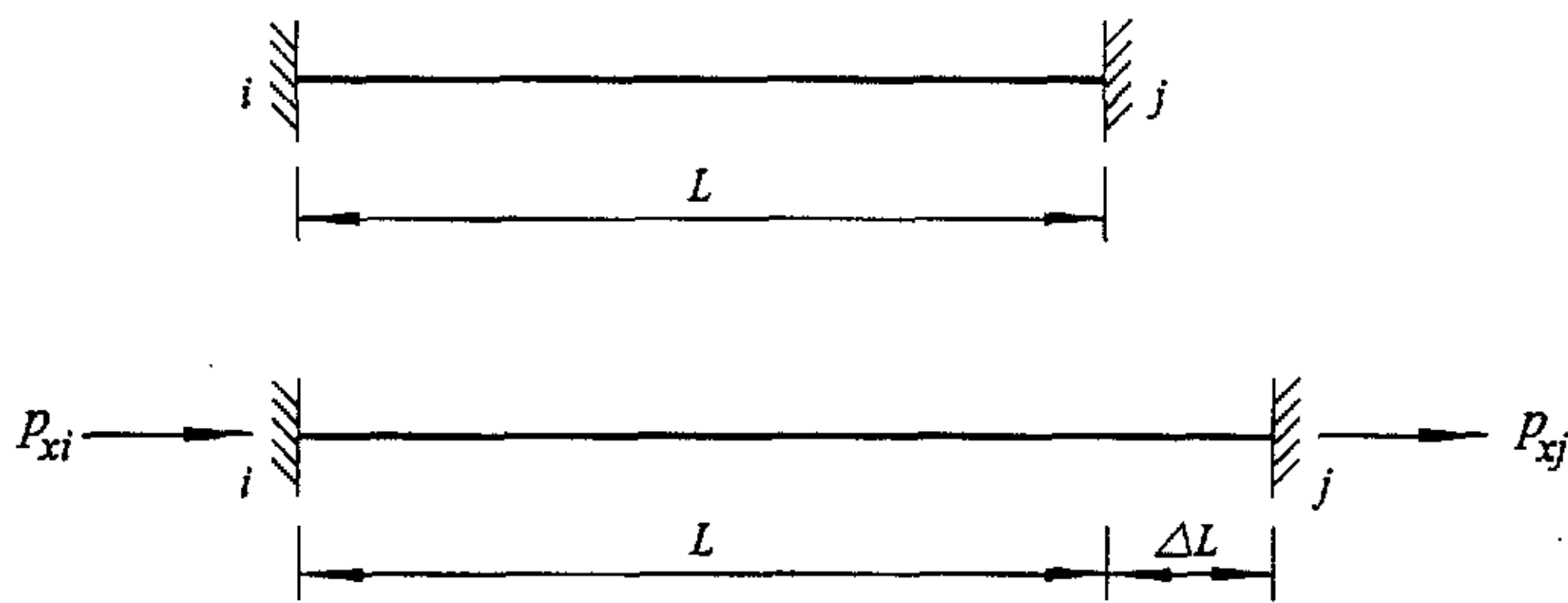


图 2.2

因杆件随机的初弯折而产生的等效结点力

$$\begin{aligned}
m_{yi} &= -\frac{2EI_y \Delta\theta_y}{L^2} (2L - 3a_y) \\
m_{yj} &= -\frac{2EI_y \Delta\theta_y}{L^2} (L - 3a_y) \\
P_{yi} &= -\frac{6EI_y \Delta\theta_y}{L^3} (L - 2a_y) = -P_{yj} \\
m_{zi} &= \frac{2EI_z \Delta\theta_z}{L^2} (2L - 3a_z) \\
m_{zj} &= \frac{2EI_z \Delta\theta_z}{L^2} (L - 3a_z) \\
P_{zi} &= -\frac{6EI_z \Delta\theta_z}{L^3} (L - 2a_z) = -P_{zj}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

式(2.11)中 $\Delta\theta_y$ 、 $\Delta\theta_z$ 分别为主惯性系内杆件随机初始弯折, 如图 2.3 所示。

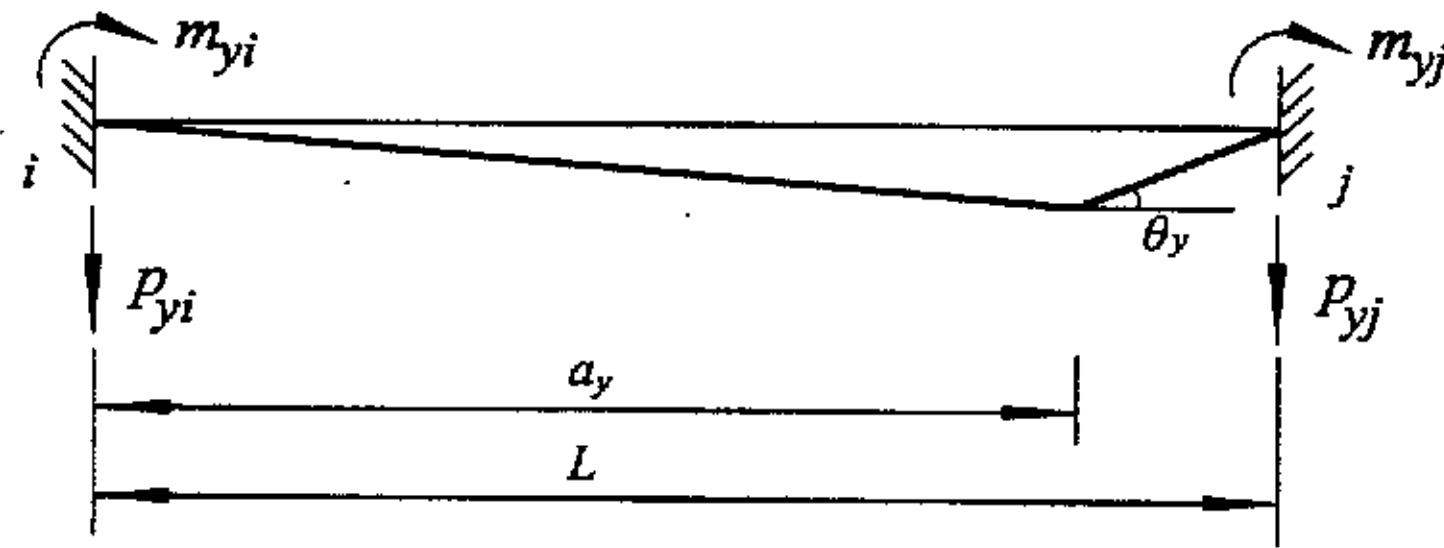


图 2.3 杆件初始弯曲

Fig 2.3 Initial imperfection of the member bar

2.4 空间梁单元及其几何非线性切线刚度矩阵

如图 2.4 所示的双轴对称梁单元 ij , 截面积为 A , 轴惯性矩为 I , 极惯性矩为 J , 弹性模量为 E , 剪切模量为 G , 其结点位移列阵为:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \{u_i\} \tag{2.12}$$

设位移插值函数为:

$$\begin{cases} u = c_1 + c_2 x \\ v = c_3 + c_4 x + c_5 x^2 + c_6 x^3 \\ w = c_7 + c_8 x + c_9 x^2 + c_{10} x^3 \\ \theta = c_{11} + c_{12} x \end{cases} \tag{2.13}$$

则单元内任意点位移为

$$\{d\} = [N] \{\delta\}^e \tag{2.14}$$

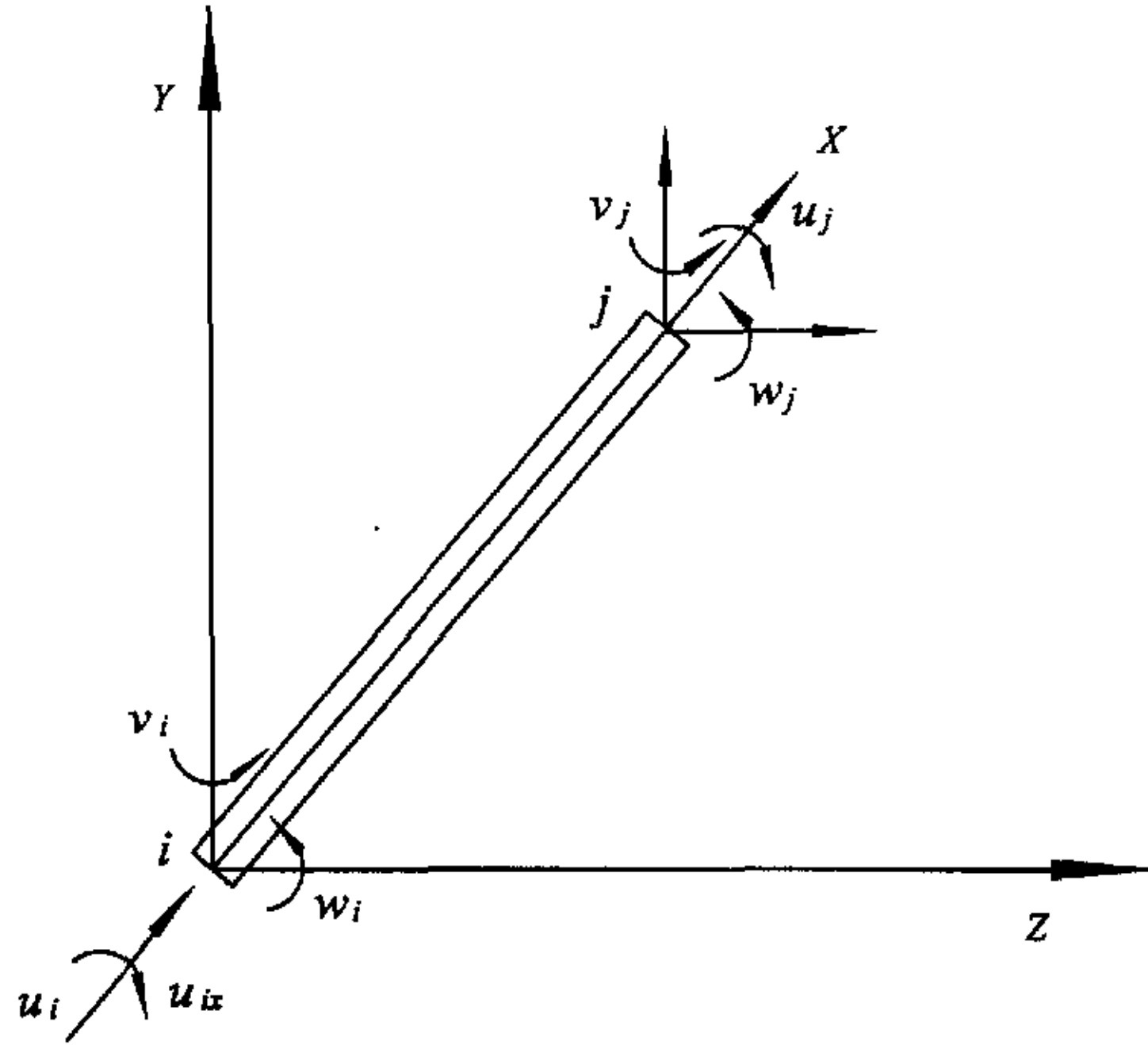


图 2.4 双轴对称梁单元

Fig 2.4 Two-axis symmetrical beam element

其中 $[N]$ 为形函数矩阵:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 & N_6 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & -N_4 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & -N_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad N_3 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_4 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad N_5 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad N_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

梁单元的非线性几何方程为:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi_y \\ \chi_z \\ \chi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \\ -\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2} \frac{du}{dx} \\ -\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dx^2} \frac{du}{dx} \\ \frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

应变的线性部分为:

$$\{E_L\} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{d^2v}{dx^2} \\ -\frac{dx^2}{d^2w} \\ -\frac{dx^2}{d\theta} \\ \frac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix} = [B_L] \{\delta\}^e \quad (2.16)$$

其中:

$$[B_L] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N'_3 & 0 & 0 & 0 & -N'_4 & 0 & -N'_5 & 0 & 0 & 0 & -N'_6 \\ 0 & 0 & -N'_3 & 0 & N'_4 & 0 & 0 & 0 & -N'_5 & 0 & -N'_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

应变的非线性部分为:

$$\{E_N\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \\ \frac{d^2v}{dx^2} \frac{du}{dx} \\ \frac{d^2w}{dx^2} \frac{du}{dx} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

非线性应变 $\{E_N\}$ 可以分为三部分:

$$\{E_N\}^1 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d\theta}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \\ \frac{dw}{dx} \\ \frac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [A_1][G^1] \{\delta\}^e$$

$$\{E_N\}^2 = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{dv}{dx} & \frac{dw}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d\theta}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \\ \frac{dw}{dx} \\ \frac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [A_2][G^1] \{\delta\}^e$$

$$\{E_N\}^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{du}{dx} \\ \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{du}{dx} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d^2 v}{dx^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \\ \frac{dw}{dx} \\ \frac{d\theta}{dx} \end{Bmatrix} = [A_3][G^1]\{\delta\}^e$$

其中:

$$[G^1] = \begin{bmatrix} N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N'_3 & 0 & 0 & 0 & N'_4 & 0 & N'_5 & 0 & 0 & 0 & N'_6 \\ 0 & 0 & N'_3 & 0 & -N'_4 & 0 & 0 & 0 & N'_5 & 0 & -N'_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

综合以上三式可得:

$$\{E_N\} = \left\langle \frac{1}{2}[A_1] + \frac{1}{2}[A_2] + \frac{1}{2}[A_3] \right\rangle [G^1]\{\delta\}^e = [\bar{B}_N]\{\delta\}^e \quad (2.18)$$

应变增量和位移增量的关系推导如下:

$$\{\Delta E_L\} = [B_L]\{\Delta \delta\}^e \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \{\Delta E_N\}^1 = [A_1][G^1]\{\Delta \delta\}^e = [B_N]^1\{\Delta \delta\}^e \\ \{\Delta E_N\}^2 = [A_2][G^1]\{\Delta \delta\}^e = [B_N]^2\{\Delta \delta\}^e \\ \{\Delta E_N\}^3 = [A_{31}][G^2] + [A_3][G^1] = [B_N]^3\{\Delta \delta\}^e \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\text{其中: } [A_{31}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{du}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{du}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[G^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N''_3 & 0 & 0 & 0 & N''_4 & 0 & N''_5 & 0 & 0 & 0 & N''_6 \\ 0 & 0 & N''_3 & 0 & -N''_4 & 0 & 0 & 0 & N''_5 & 0 & -N''_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则:

$$\{\Delta E_N\} = [B_N]\{\Delta \delta\}^e = ([B_N]^1 + [B_N]^2 + [B_N]^3)\{\Delta \delta\}^e \quad (2.21)$$

假定结构处于弹性状态, 梁单元的物理方程及其增量形式为:

$$\{M\} = [D]\{E\} \quad \{\Delta M\} = [D]\{\Delta E\} \quad (2.22)$$

式子中:

$\{M\}$ 为内力矩阵, $\{M\} = \{N \quad M_z \quad M_y \quad M_x\}$;

$\{D\}$ 为单元的弹性矩阵:

$$\{D\} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ \end{bmatrix}$$

将 $[B_L]$ 、 $[B_{NL}]$ 及 $[D]$ 代入式 (2.19) 可以得到空间梁单元的切线刚度矩阵:

$$[K_T] = [K_0] + [K_L] + [K_\sigma] \quad (2.23)$$

其中:

$$[K_0] = \int [B_L][D][B_L]dx$$

$$[K_L] = \int ([B_L][D][B_N] + [B_N][D][B_N] + [B_N][D][B_L])dx$$

$$[K_\sigma]^1 = \int [G^1]^T \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_x \end{bmatrix} [G^1]dx$$

$$[K_\sigma]^2 = \int [G^1]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [G^1]dx$$

$$[K_\sigma]^3 = \int [G^2]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_z & 0 & 0 & 0 \\ M_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [G^1]dx + \int [G^1]^T \begin{bmatrix} 0 & M_z & M_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [G^2]dx$$

2.5 球面弧长法

球面弧长法具有较强且稳定的非线性跟踪分析能力, 其越过极值点的能力较强且稳定, 即使当正切刚度矩阵的倾斜为零或负值时, 也可以阻止发散。这种迭代方法以图形表示在图 2.5 中。

用迭代法求解非线性有限元方程时, 可写成下列迭代格式

$$[K^i][\Delta u^{(i+1)}] = \Delta \lambda^{(i+1)}[P] + [R^i] \quad (2.24)$$

式中: i —— 迭代次数;
 $\Delta\lambda$ —— 荷载增量步长系数;
 R^i —— i 次迭代的不平衡力。

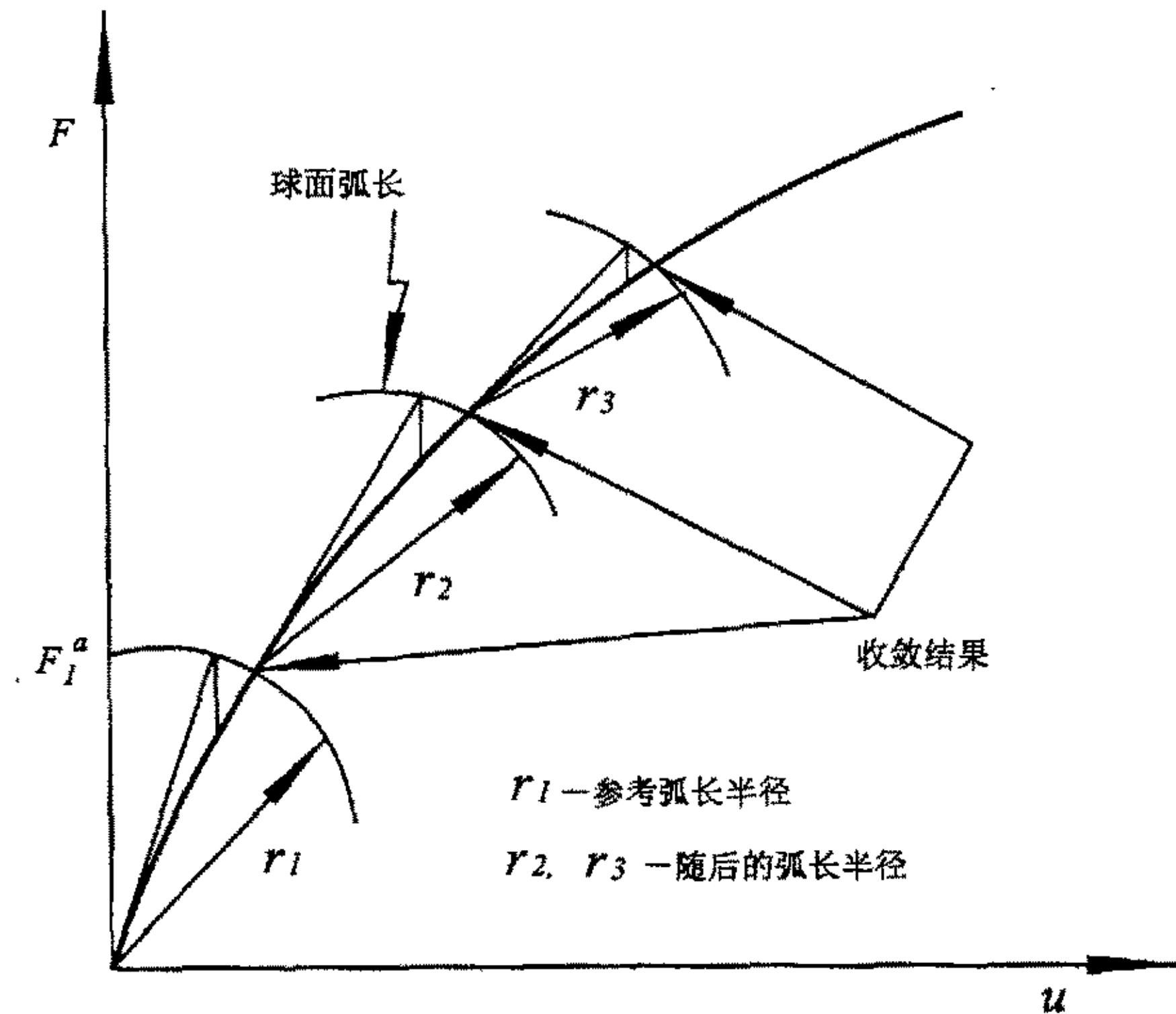


图 2.5 弧长法迭代过程

Fig 2.5 Iteration process of arc-length method

在荷载增量控制法中是控制 $\Delta\lambda$ ，在位移控制法中是控制 Δu 。弧长法中是同时控制 $\Delta\lambda$ 与 Δu ，如图 2.6，使得

$$[\Delta u]^T [\Delta u] + \Delta\lambda^2 = ds^2 \quad (2.25)$$

由图可见 ds 相当于向量 $\bar{r}^{(i)}$ 的模，上述条件也即表示

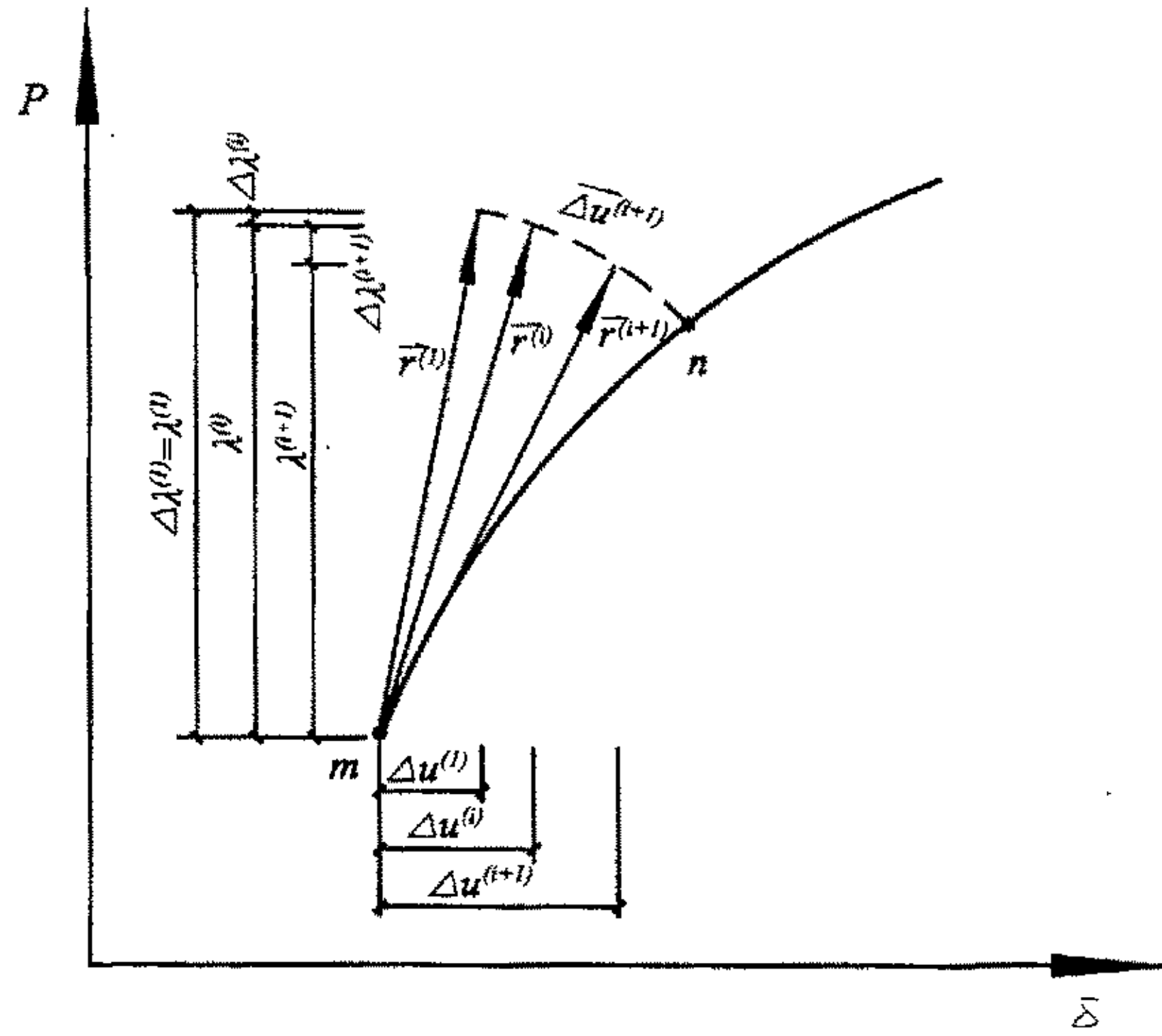
$$\bar{r}^{(i)} \cdot \bar{r}^{(i)} - ds^2 = 0 \quad (2.26)$$

现在的问题是如何确定 $\Delta\lambda^{(i+1)}$ 与 $\Delta u^{(i+1)}$ ，按图 2.6 将迭代向量表示为

$$\bar{r}^{(i+1)} = \bar{r}^{(i)} + \Delta\bar{u}^{(i+1)} \quad (2.27)$$

则条件 (2.26) 也可表示为

$$(\bar{r}^{(i)} + \Delta\bar{u}^{(i+1)}) \cdot (\bar{r}^{(i)} + \Delta\bar{u}^{(i+1)}) - ds^2 = 0 \quad (2.28)$$

图 2.6 同时控制 $\Delta\lambda$ 与 Δu 的弧长法Fig 2.6 Arc-length method of simultaneous controlling $\Delta\lambda$ and Δu

因 $\vec{r}^{(i)} \cdot \vec{r}^{(i)} = ds^2$, 式 (2.28) 又可简化为

$$\Delta \vec{u}^{-(i+1)} \cdot (\Delta \vec{u}^{-(i+1)} + 2\vec{r}^{-(i)}) = 0 \quad (2.29)$$

注意到 $\Delta \vec{u}^{-(i+1)} \cdot \Delta \vec{u}^{-(i+1)} = [\Delta u^{(i+1)}]^T [\Delta u^{(i+1)}] + [\Delta \lambda^{(i+1)}]^2$

$$\vec{r}^{(i)} \cdot \vec{r}^{(i)} = [u^{(i)}]^T [u^{(i)}] + [\lambda^{(i)}]^2$$

式 (2.29) 可以写成矩阵形式

$$[\Delta u^{(i+1)}]^T ([\Delta u^{(i+1)}] + 2[u^{(i)}]) + \Delta \lambda^{(i+1)} [\Delta \lambda^{(i+1)} + 2\lambda^{(i)}] = 0 \quad (2.30)$$

将 $[\Delta u^{(i+1)}]$ 分为两部分

$$[\Delta u^{(i+1)}] = \Delta \lambda^{(i+1)} [\Delta u^{(i+1)}]_{\Gamma} + [\Delta u^{(i+1)}]_{\Pi} \quad (2.31)$$

而这两部分分别解之

$$\begin{aligned} [K^i] \cdot [\Delta u^{(i+1)}]_{\Gamma} &= [P] \\ [K^{(i)}] \cdot [\Delta u^{(i+1)}]_{\Pi} &= [R^{(i)}] \end{aligned} \quad (2.32)$$

代入式 (2.31), 可得到关于 $\Delta \lambda^{(i+1)}$ 的二次方程

$$a(\Delta\lambda^{(i+1)})^2 + 2b(\Delta\lambda^{(i+1)}) + c = 0 \quad (2.33)$$

式中:

$$\begin{aligned} a &= 1 + [\Delta u^{(i+1)}]_I^T [\Delta u^{(i+1)}]_I \\ b &= \lambda^{(i)} [\Delta u^{(i+1)}]_I^T \left\{ [\Delta u^{(i+1)}]_II + [u^{(i)}] \right\} \\ c &= [\Delta u^{(i+1)}]_II^T \left\{ [\Delta u^{(i+1)}]_II + 2[u^{(i)}] \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

从而可以求得 $\Delta\lambda^{(i+1)}$ 。

从以上公式可见, 求 $\Delta\lambda^{(i+1)}$ 相当复杂, 有的学者提出了改进算法, 改进算法之一是用垂直于迭代向量的平面代替圆弧, 如图 2.7 (a)。这时, 有向量 \vec{r}^i 的长度不变的条件改为向量 $\vec{r}^{(i)}$ 与向量 $\Delta\vec{u}^{(i)}$ 相垂直。在迭代过程中, 只要矢量 $\vec{r}^{(i)}$ 变化, $\Delta\vec{u}^{(i+1)}$ 的方向也可不断变化, 与新的 $\vec{r}^{(i)}$ 矢量垂直, 如图 2.7 (b), 从图可见, 其迭代轨迹

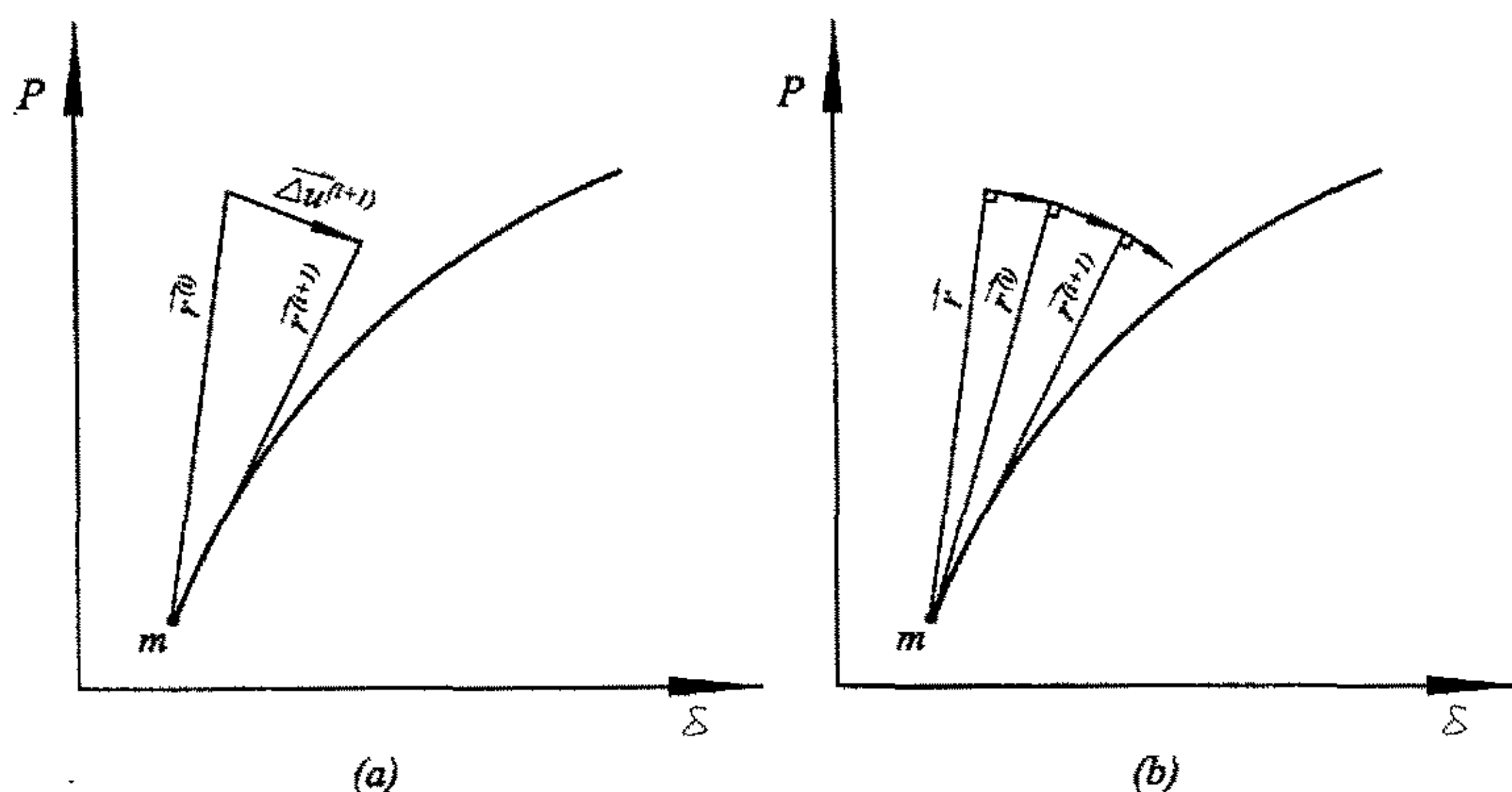


图 2.7

很接近圆弧, 但计算格式可以简化。由垂直条件

$$\vec{r}^{(i)} \cdot \Delta\vec{u}^{(i+1)} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (2.35)$$

写成矩阵形式

$$[\Delta u^{(i)}]^T [\Delta u^{(i+1)}] + \Delta\lambda^{(i)} \cdot \Delta\lambda^{(i+1)} = 0 \quad (2.36)$$

同样, 将 $[\Delta u^{(i+1)}]$ 分为两部分, 见式 (2.31), 解式 (2.32), 代入式 (2.36) 后, 可解得

$$\Delta\lambda^{(i+1)} = -\frac{[\Delta u^{(i)}]^T \cdot [\Delta u^{(i+1)}]_u}{[\Delta u^{(i)}]^T \cdot [\Delta u^{(i+1)}]_i + \Delta\lambda^{(i)}} \quad (2.37)$$

与式 (2.33) 相比, 用式 (2.37) 求 $\Delta\lambda^{(i+1)}$ 是简化多了。

综上所述, 弧长法求解过程可归纳如下:

- (1) 选定一荷载参考值 $[P]$, 从而确定弧长 ds 。由有限元方程解出 $\Delta\lambda^{(1)}$ 与 $[\Delta u^{(1)}]$ 。在第一次可取 $\Delta\lambda^{(1)}=1$, 不平衡力 $[R^{(1)}]=0$;
- (2) 修改刚度矩阵, 并三角化, 检查对角元, 若为正定, 则加载, 若为负定, 则加负荷载。若刚度矩阵行列式为零, 则达极限点;
- (3) 与 (2) 同时, 求出不平衡力 $[R^{(i)}]=0$;
- (4) 由 $[P]$ 求出 $[\Delta u^{(i+1)}]_i$;
由 $[R^{(i)}]$ 求出 $[\Delta u^{(i+1)}]_u$;
- (5) 由式 (2-4-10) 或 (2-4-14) 求出 $\Delta\lambda^{(i+1)}$;
- (6) 由 $[\Delta u^{(i+1)}]_i$, $\Delta\lambda^{(i+1)}$ 和 $[\Delta u^{(i+1)}]_u$ 求出 $[\Delta u^{(i+1)}]$;
- (7) 求出即时荷载水平及位移值;
- (8) 检查是否满足精度要求 (例如, 若二次迭代满足要求, 则加一步荷载增量), 若不满足, 则重复 (2) ~ (7) 步, 直到收敛为止。

2.6 临界点的判别准则

结构在每一荷载增量下的稳定性能都与结构当时的切线刚度有关。正定的切线刚度矩阵对应于结构的稳定平衡状态; 非正定的切线刚度矩阵对应于结构的不稳定平衡状态; 而奇异的切线刚度矩阵对应于结构的临界状态。矩阵是否正定需根据定义来判断: 如果矩阵左上角各阶主子式的行列式都大于零则矩阵是正定的; 如果有部分主子式的行列式小于零则矩阵是非正定的; 如果矩阵的行列式等于零则矩阵是奇异的。

在计算求解时采用 LDL^T 分解, 每步计算都将刚度矩阵分解为以下形式:

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (2.38)$$

其中 $[L]$ 是主元为 1 的下三角阵, $[D]$ 是对角矩阵。

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & D_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D_n \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

对公式 (2.39) 取行列式:

$$|K| = |L||D||L^T| = |D| = D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 \cdots D_n \quad (2.40)$$

即切线刚度矩阵的行列式与对角矩阵的行列式相等。由矩阵的分解过程还可以知道, 矩阵 $[K]$ 和 $[D]$ 的左上角各阶主子式的行列式也都是相等的。因此矩阵 $[K]$ 是否正定完全可以由矩阵 $[D]$ 来判别, 这样问题就变的比较简单了。

如果矩阵 $[D]$ 的所有主元都是正的, 则它的左上角各阶主子式的行列式也必然大于零, 这时结构的切线刚度矩阵是正定的, 因此结构处于稳定的平衡状态; 如果矩阵 $[D]$ 的主元有小于零的, 则切线刚度矩阵是非正定的, 这时结构的平衡是不稳定的; 从理论上来说, 临界点的切线刚度矩阵是奇异的, 它的行列式应该等于零, 这时矩阵 $[D]$ 的主元至少有一个为零, 然而在实际计算中选择的加载步长正好使刚度矩阵奇异的可能性几乎是没有的, 但是我们可以由矩阵 $[D]$ 的主元符号变化来确定临界点的出现。那么该怎样识别临界点的两种类型, 即极值点和分枝点? 两类临界点的屈曲后路径跟踪需要采用哪些策略?

在增量计算中, 每加一级荷载我们都观察矩阵 $[D]$ 的主元符号变化, 结构在屈

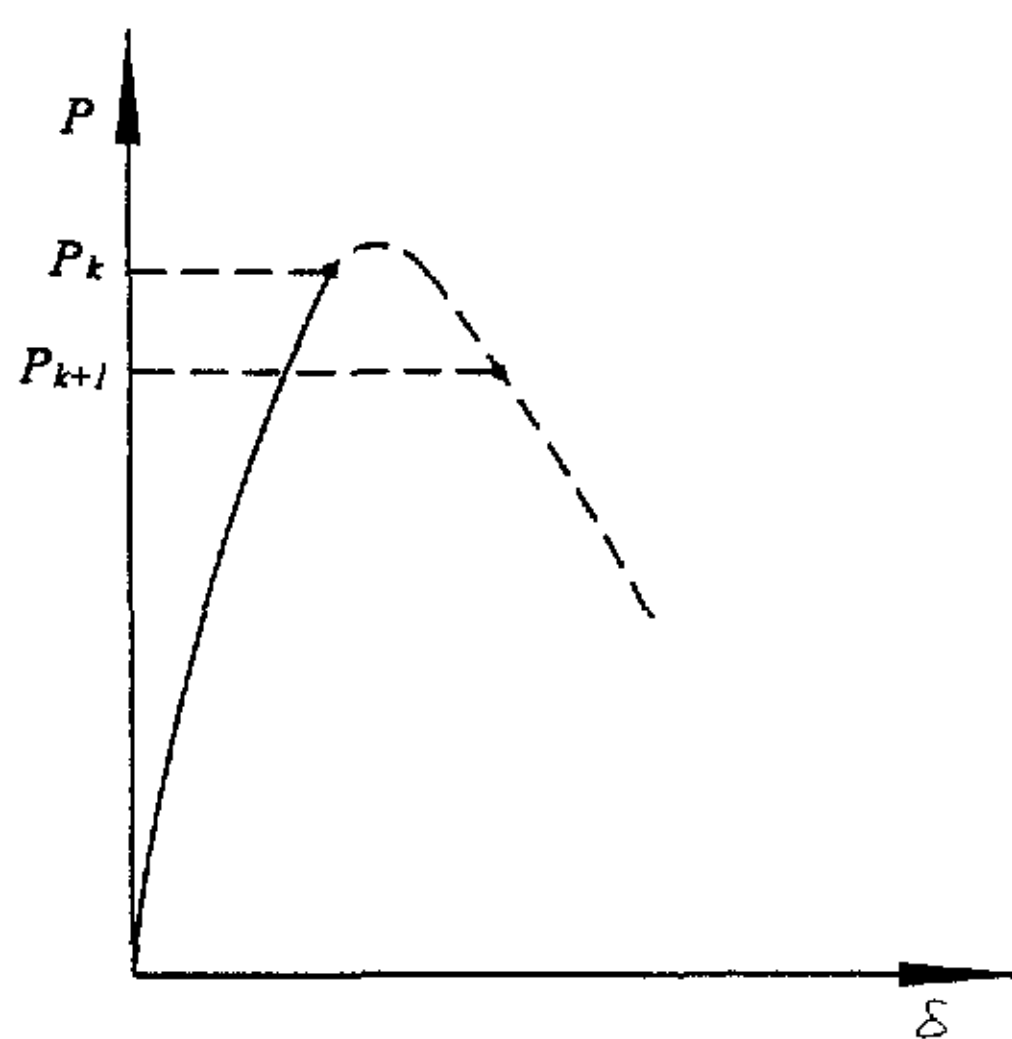


图 2.8 极限点判别

Fig 2.8 Distinguishing the ultimate point

曲前的平衡是稳定的, 因此矩阵 $[D]$ 的所有主元都大于零。假设加到第 k 级荷载时矩阵 $[D]$ 的所有主元仍大于零, 在 $k+1$ 级荷载矩阵 $[D]$ 的主元有个别的小于零, 则可以断定第 $k+1$ 级荷载已超过了临界点。为了确定临界点的类型需要比较 P_k 和 P_{k+1} 的大小, 如果 $P_k > P_{k+1}$ 则该临界点为极限点 (图 2.8); 如果 $P_k < P_{k+1}$ 则还需计算第 $k+2$ 级荷载; 如果 $P_{k+1} > P_{k+2}$ 则该临界点为极限点 (图 2.9); 如果 $P_{k+1} < P_{k+2}$ 则该临界点为分枝点 (图 2.10)。

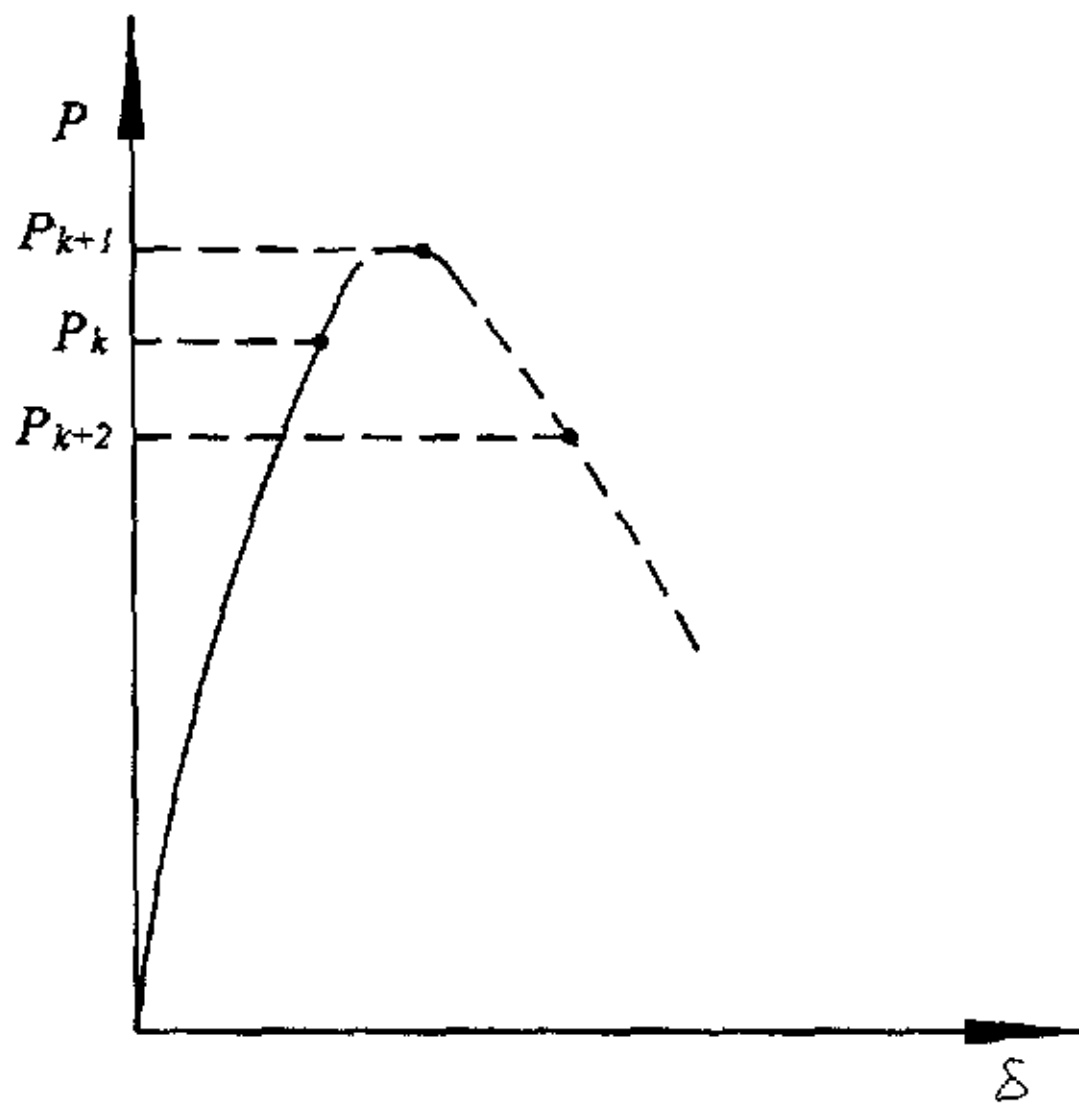


图 2.9 极限点判别

Fig 2.9 Distinguishing the ultimate point

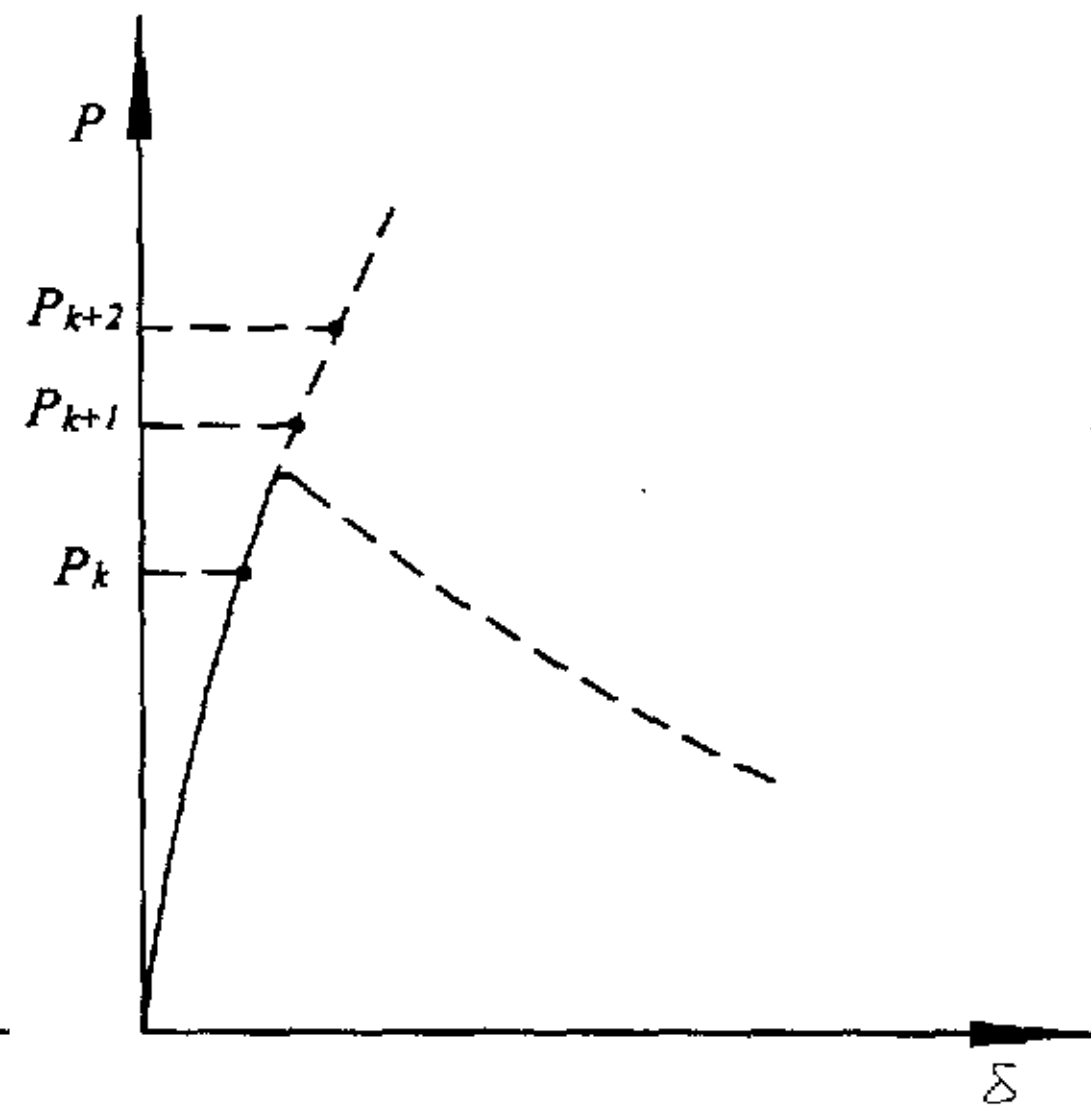


图 2.10 分枝点判别

Fig 2.10 Distinguishing the divaricated point

2.7 分枝路径的跟踪—扰动荷载法

由于极限点屈曲前、后的位移形态是一致的，因此极限屈曲的路径跟踪不需要采取任何特殊的方法。而分枝屈曲就不同了，分枝屈曲的屈曲后位移形态与屈曲前位移形态是不一样的，如果没有任何扰动，结构将保持屈曲前的位移形态、沿着初始路径变形，而不会自动进入分枝后的平衡路径。目前还没有一个较为有效的方法可以适用于各种复杂结构的分枝后屈曲问题。这里提出一种叫做“扰动荷载法”的方法，即根据不同类型的结构而施加不同形式的“扰动”，使计算进入分枝后的平衡路径。

对于只有少量自由度（几十个或几百个自由度）的结构，计算累积误差很少，计算精度容易控制，这时在分枝点的扰动是采用非比例加载实现的。由于屈曲模态是临界点的位移量模态，结构屈曲后的位移形态可以理解为屈曲模态与失稳前位移形态的叠加。因此在计算中引入与该临界点屈曲模态相一致的扰动荷载是比较理想的。如图 2.11 所示，如果在第 $k+2$ 级荷载判别出临界点为分枝点，则把计算退到临界点的前一级荷载，也就是第 k 级荷载。这时采用子空间迭代法求出该临界点的结构失稳模态 $\{Y\}$ ，然后引入扰动荷载 $\{\Delta P\}$ ，即

$$\{P_{k+1}\} = \{P_k\} + \{\Delta P\} \quad (2.41)$$

其中

$$\{\Delta P\} = \frac{\beta \cdot |P_k|}{\max |Y_i|} \cdot \{Y\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.42)$$

在第 k 级荷载之后的 N 步计算中反复施加同一个扰动荷载 $\{\Delta P\}$ ，这时计算将分别收敛于 F_1, F_2, \dots, F_n 点。在 $N+1$ 步计算中取消扰动荷载，则计算将进入分枝后的平衡路径。

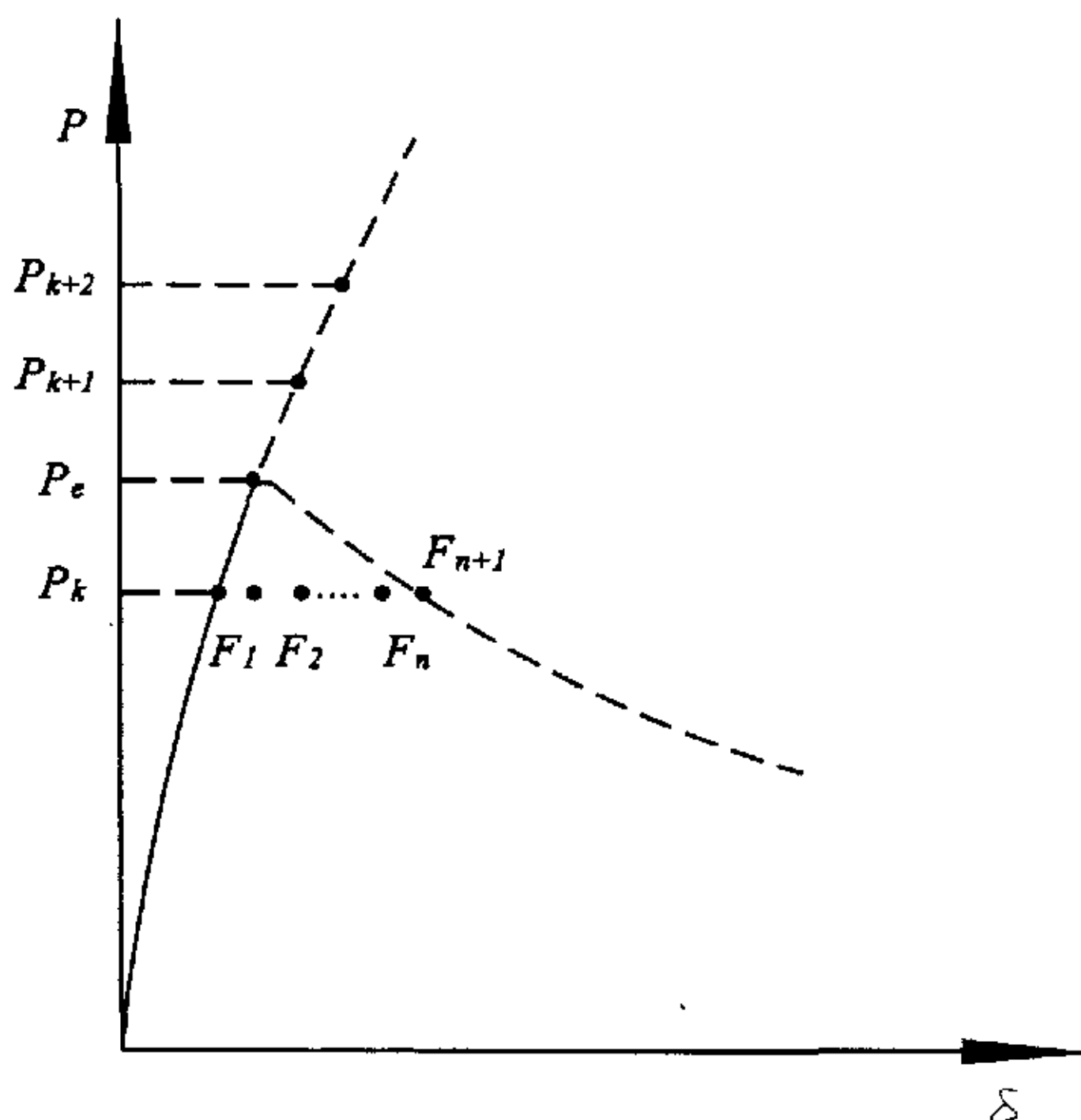


图 2.11 扰动荷载法

Fig 2.11 Disturbed load method

计算点 $F_1 \sim F_n$ 可以看作是由基本路径到分枝路径的过渡点。过渡点的个数 N 取多少合适，主要取决于下面两个因素：（1）计算步长的大小。如果计算步长很小，则过渡点就需要取得多一些，因为只有 F_n 距离分枝路径比基本路径近才有可能在取消扰动荷载时收敛于分枝路径，否则计算将再次返回到基本的平衡路径；

（2）屈曲前的最后一级荷载 P_k 与临界点 P_e 的接近程度。 P_k 与 P_e 越接近，则由基本路径往分枝路径过渡的路线就越短，这时过渡点就可以取得相应地少一些。过渡点个数一般取在 $N=2 \sim 5$ 地范围内。

公式 (2.42) 中的系数 β 表示荷载扰动的大小，因此可以称为“荷载扰动系数”。荷载扰动系数的大小对计算结果影响很大：如果扰动系数太小，则起不到预期的作用，计算仍收敛于基本路径；如果扰动太大则计算不收敛。荷载扰动系数的合理选择取决于多种因素，如结构自由度的多少、结构对缺陷的敏感程度、计算中加载步长的大小等等；而在计算前结构的很多性能是无法事先预料的，因此荷载

扰动系数也可以看作是经验系数。

临界点的前一级荷载 P_k 与临界点的接近程度对计算也有很大影响。 P_k 与临界点越接近, 计算越不容易收敛, 当 P_k 与 P_c 非常接近时, 可以认为结构已处于临界状态, 这时无论 β 取得怎样小, 计算都很难收敛。因此, 在这种情况下通常将荷载减小一级, 即由 P_k 减小到 P_{k-1} , 然后再重新计算。

结构的自由度越多, 计算的累计误差就越大。当结构的计算自由度超过 1000 时, 分枝点以上的基本平衡路径就很难控制了, 因为当结构处于临界状态时非常微小的扰动就可以改变计算的平衡路径, 而计算的累计误差就可以看作是一种扰动, 在这种扰动下计算将自动进入分枝后的平衡路径。这正好与前面的情况相反: 对于少量自由度的结构, 计算总是沿着基本路径, 想要转入分枝路径就必须人为地施加扰动; 对于多自由度体系, 由于计算累计误差的干扰, 计算更容易进入分枝路径, 要想使计算进入基本路径就必须控制累计误差的干扰。

计算累计误差的大小在一定程度上是可以人为控制的。因为非线性有限元的基本过程就是线性逼近, 每个计算点都是通过反复迭代而得到的, 所以迭代到什么程度可以认为是收敛的, 要由计算者决定: 所给的收敛值越小, 得到的结果就越精确; 收敛值越大, 计算误差越大。对于大型结构的计算就是靠改变迭代收敛值的大小来控制计算路径的。如果要进入基本平衡路径, 收敛值就必须给的足够小; 如果要进入分枝路径, 收敛值则需要适当放宽。

2.8 有缺陷网壳结构的稳定性分析

单层网壳结构属于缺陷敏感性结构, 临界荷载可能会因极小的初始缺陷而大大降低。而实际网壳结构不可避免地具有各种初始缺陷, 包括曲面形状的安装偏差、杆件的初弯曲、杆件对结点的初偏心等各种原因引起的初应力, 所以分析初始缺陷对其稳定性的影响是单层网壳结构稳定性研究的关键问题。从实用角度考虑, 关于杆件设计有关的一些缺陷, 如杆件的初弯曲、初始内应力、杆件对结点的初始偏心等, 在按规定选杆件截面时实际上已做适当考虑。这样设计出来的网壳结构, 其杆件的特性对网壳稳定性的影响自然就被限制在一定的范围内; 也就是说, 杆件的稳定性与整个网壳稳定性的耦合作用已不是一个主要因素。对整个网壳的稳定性来说, 曲面形状的安装偏差, 即各结点位置的偏差是一个起主要影响的初始缺陷因素。

在研究中, 通常采用两种方法进行缺陷分析:

2.8.1 随机缺陷模态法

该方法认为, 结构的初始安装误差受各种因素如施工程序、安装设备、测量

技术、工人的熟练程度等的影响。因此,结构的安装误差是随机的,其大小及分布形式事先无法预测。然而,从概率统计观点来看,无论结构的缺陷分布如何复杂,每个结点的安装误差应该近似地符合正态分布,即每个结点的实际安装位置与理论计算位置越接近,其可能性越大。随机缺陷模态法正是基于这一观点,将结构的初始安装缺陷看成是随机的,并用正态随机变量模拟每个结点的安装误差。这样,结构的初始安装缺陷是一个多维随机变量,其样本空间的每一个样本点都对应结构的一种缺陷模态。由于缺陷模态是随机的,因此不妨称该方法为“随机缺陷模态法”。结构的缺陷模态有无限种,我们不可能、也没有必要去研究每一种模态下的极限荷载。这里仅取容量为 N 的样本对缺陷结构进行统计分析,即随机取 N 个缺陷模态进行结构的荷载-位移全过程计算,然后求出极限荷载的一些样本数字特征,以此来评价缺陷结构的一定承载能力。

所采用的随机数可由计算机程序产生,即根据某种给定算法在计算机上自动生成一系列随机数。由于这样的数是由一种算法求出来的,因此确切地说应该把它们称为“伪随机数”,但是这些确实具有随机抽样的性质。作者在计算中以二倍均方差作为结点误差的最大值。假定实际工程中每个结点在坐标轴三个方向的最大允许安装误差为 $\pm R$,则每个结点的误差随即变量为 $RX/2$,其中随机变量 X 服从标准正态分布,误差随机变量的取值范围是 $[-R, R]$ 。在按本方法进行分析时,结构各结点的安装误差是作为相互独立的随机变量处理的。因而整个结构的缺陷模态是由一个多维的独立随机变量代表的。

该方法能较为真实地反映实际结构的稳定性能,但由于需要对不同缺陷分布多次的反复计算后才能确定结构的临界荷载值,所以计算量太大。

2.8.2 一致缺陷模态法

随机缺陷模态法能够较为真实地反映实际结构的工作性能,但由于需对不同缺陷分布进行多次的反复计算,因此计算工作量比较大。那么可否通过一次计算就能够求出极限荷载的最大值?

屈曲模态是临界点处的结构位移趋势,也就是结构屈曲时的位移增量模式。结构的最低阶临界点所对应的屈曲模态为结构的最低阶屈曲模态,结构按该模态变形将处于势能最小状态,所以对于实际结构来说,在加载的最初阶段即有沿着该模态变形的趋势。可以想到,如果结构的缺陷分布形式恰好与最低阶屈曲模态相吻合,这无疑将对其受力性能产生最不利影响。一致缺陷模态法就是用最低阶屈曲模态来模拟结构的初始缺陷分布进行稳定性分析,得到的临界荷载即可以作为实际结构的临界荷载。

结构屈曲模态通常作为特征值问题来求解,计算这类问题的方法很多,如逆

迭代法、子空间迭代法等等。在非线性稳定性分析中，对于多自由度体系来说，特征方程的选择对最终结果影响很大，例如在初始位置或临界点附近或其他某个位置解特征方程可能会得到完全不同的解。在荷载一位移全过程分析中，求临界点处的屈曲模态其实无需解特征方程，根据屈曲模态的定义，只需求出屈曲前后两个邻近状态的位移之差即为该临界点屈曲模态的精确形式。

如果将屈曲模态的最大值定义为 R ，该模态即可作为网壳初始几何缺陷的计算模式。

应该明确，一致缺陷模态法是力图找到结构几何缺陷的最不利分布模态，试图通过一次计算即可以求出按随机缺陷模态得到的最小极限荷载。因此，该方法是否可行需要用随机缺陷模态法来验证。

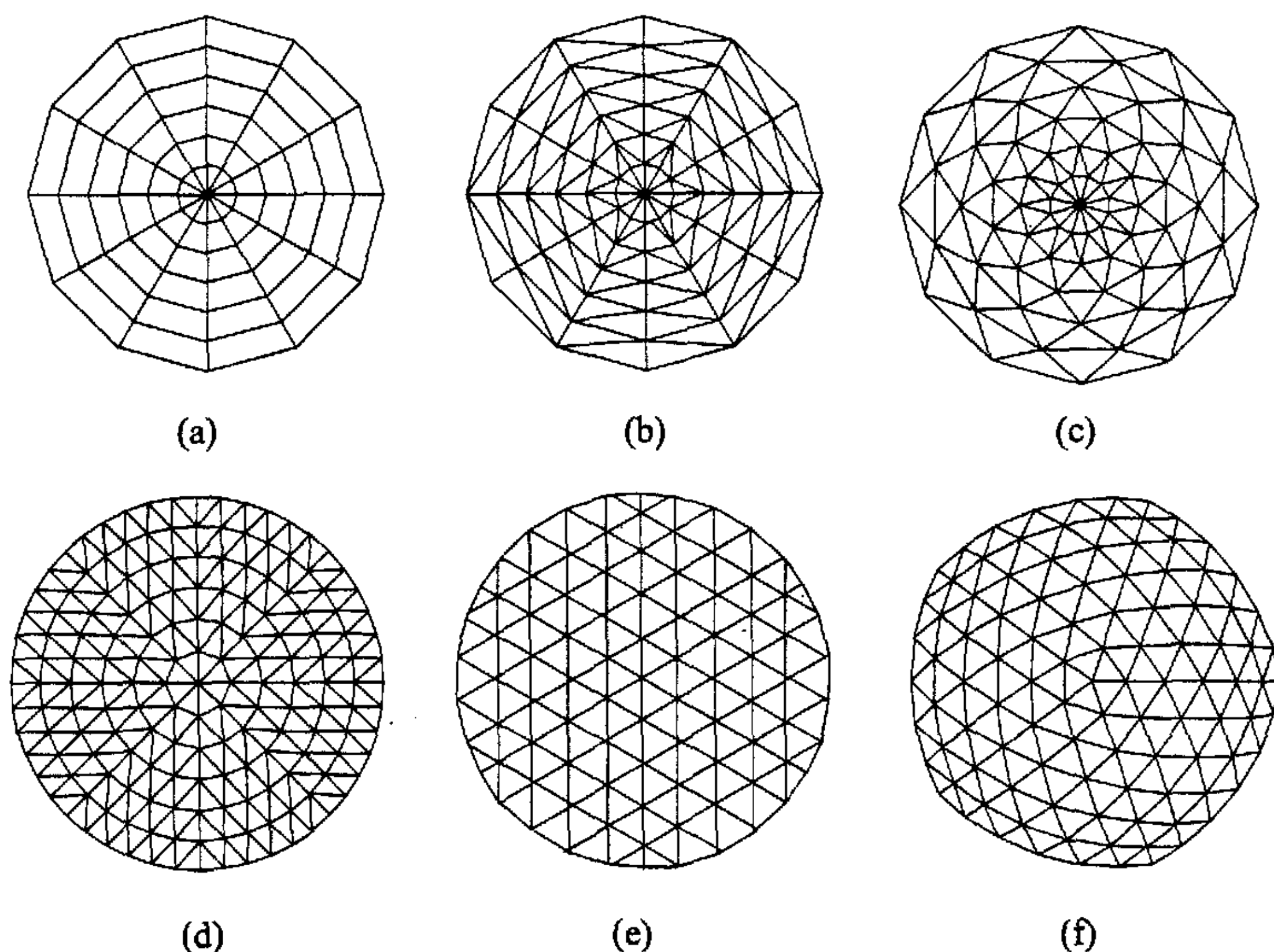
荷载较小时，结构变形也较小，此时结构刚度较大，初始缺陷的扰动对结构的影响也较小；但当荷载接近临界荷载时，结构刚度矩阵趋于奇异，即使是很小的扰动也将使结构沿扰动方向发生较大变形，此时初始缺陷的扰动作用将十分显著。显然，采用一致缺陷模态法对缺陷结构进行稳定分析时，如果理想结构的第一个临界点为分枝点，由于与其屈曲模态一致的初始缺陷的扰动作用，从加载开始，结构就将逐渐偏离其平衡路径而向分枝平衡路径靠近，结构最终无法达到理想结构的临界点而发生分枝失稳，而是以临界荷载较低的极值点失稳完成平衡路径的转换。

3 单层球面网壳荷载一位移全过程分析

3.1 球面网壳简介

球面网壳结构是将杆件沿着球曲面有规律的布置而成的空间结构体系。该结构的受力特点与薄壳类似，即以薄膜作用为主要受力特征，大部分荷载由网壳杆件的轴向力承受。

球面网壳的类型有多种划分方法，可以分别按层数，网格形式来划分。以层数分，球面网壳可以分为单层，双(多)层和局部双(单)层三类；以杆件在球面上布置方式的不同，即网格形式的不同大致可分为肋环型，肋环斜杆型(Schwedler 型)，联方网格型(葵花形三向网格型)，Keiwitt 即 K_n 型(扇形三向网格型)，三向格子型和短程线型六种球面网壳如图 3.1。



(a)肋环型; (b)肋环斜杆型; (c)联方网格型(葵花形三向网格型);
(d)Keiwitt(扇形三向网格型); (e)三向格子型; (f)短程线型

图 3.1 球面网壳的网格形式

Fig 3.1 Types of lattice vaults

3.2 单层球面网壳的参数分析

3.2.1 网格形式

本文选取联方型单层球面网壳进行稳定分析。联方型球面网壳按网格的形式分菱形网格的联方型球面网壳和三角形网格的球面网壳两种型式，如图 3.2 所示。菱形网格的联方型球面网壳有左斜杆和右斜杆组成菱形的网格的网壳，两斜杆的夹角为 30 度~50 度，其造型优美，但网壳的刚度和稳定性差，适用于中小跨度的穹顶。为了增强这种网壳的刚度和稳定性能，一般加设纬向杆件（图 3.2 (b)）组成三角形网格，可用于大中跨度的穹顶。

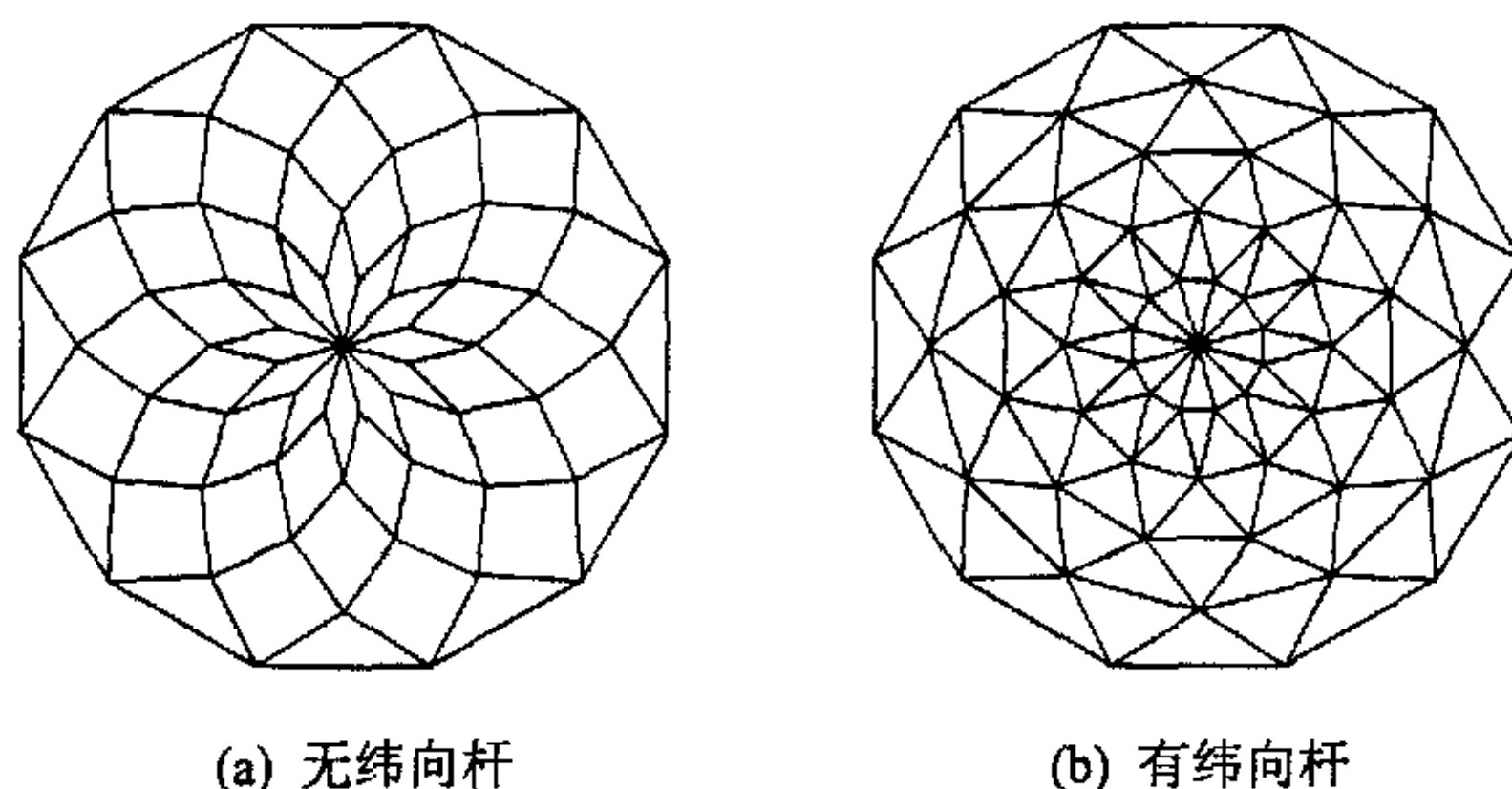


图 3.2 联方型球面网壳

Fig 3.2 The unite lattice vaults

联方型单层球面网壳的特点：轴对称性好，同纬度的纬向杆和斜向杆的长度相等，被同纬向杆分割的纬向杆的长度一般也相等，网格类型少，规律性明显，其内部和周边无不规则网格。缺点是：过分依赖经纬划分网格，致使网格尺寸大小悬殊，边缘网格尺寸大，上部网格尺寸小，顶点杆件交汇很密集，结点构造复杂。

3.2.2 跨度和矢跨比

从实际角度出发，我们选择如下几种跨度和矢跨比进行分析，跨度 $L=40\text{m}$ ， 50m ，矢跨比 $f/L=1/5, 1/6, 1/7, 1/8$ 。为了使杆件不致于过于密集，且不会影响整个网壳的稳定性能，故灵活处理了一下网壳网格划分形式。 40m 跨度网壳网格划分形式为径向杆（肋）划分为 6 段，沿圆周方向（环向）则为 24 等分，但内部三环变为 12 等分和 6 等分（最内一环），这样中央网壳部分就不是典型的联方体系； 50m 跨度的网壳的网格划分形式类似，只是径向杆分为 7 段，而沿环向增为 32，如图 3.3 所示。设定各种跨度联方型单层球面网壳网格的再分频数(NF)和相应的结构节点数，单元数，如表 3.1 所示。

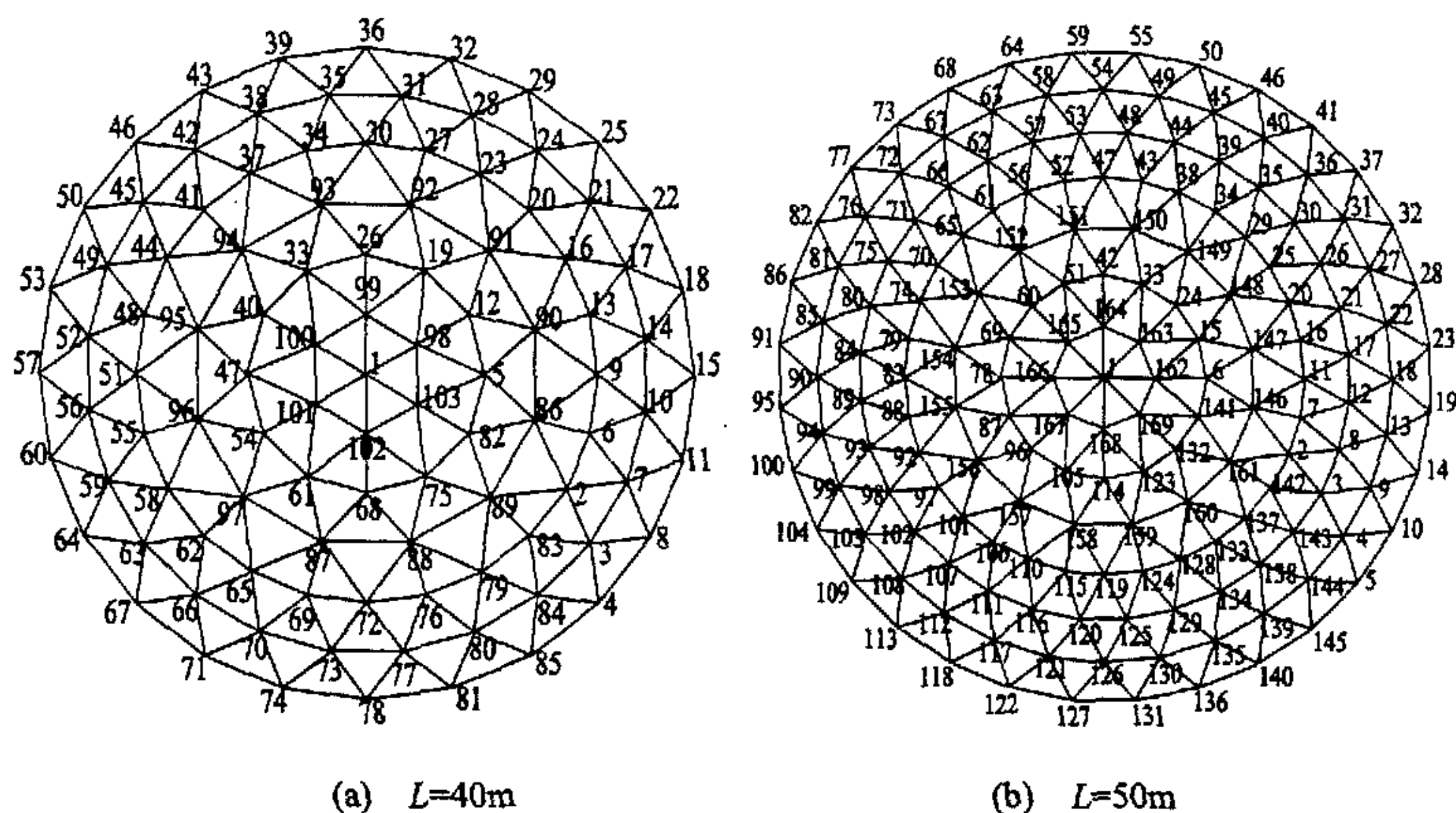


图 3.3 单层联方型球壳网格划分及结点编号

Fig 3.3 Mesh and node number of the single-layer unite lattice vaults

表 3.1

跨度	频数	结点数	单元数
40m	6	103	282
50m	7	169	472

3.2.3 杆件截面

杆件采用实际规格圆钢管, 对每种跨度网壳均选用四套不同的截面尺寸。截面增强顺序为 1、2、3、4 截面, 表 3.2 中列出各种跨度的具体截面尺寸, 它们都是工程中常用的规格。

表 3.2 不同跨度的杆件截面尺寸

Table 3.2 Section dimension of different span member bar

截面 跨度	1	2	3	4
40m	$\phi 102 \times 3.5$	$\phi 114 \times 4$	$\phi 124 \times 4$	$\phi 127 \times 4.5$
50m	$\phi 121 \times 4$	$\phi 127 \times 4$	$\phi 133 \times 4.5$	$\phi 140 \times 5$

3.2.4 材料的有关参数

在本文的分析中, 构件的材料取 Q235 钢材, $E=2.06 \times 10^{11} Pa$, 泊松比取 0.3。

3.2.5 荷载参数的选择

大跨网壳结构屋面一般设计成轻型屋面, 作用于结构上的恒载较小, 因而不对称荷载(如风载、雪载)对网壳的稳定性有明显影响。在实际工程中几个网壳结构失稳就是遇到了不均匀的雪载, 如 1963 年罗马尼亚布加勒斯特一个平面直径 93.5m 的单层球面网壳在大雪下失稳倒塌。因而在实际设计某一结构时, 需要考虑多种荷载组合, 荷载分布在大多数情况下是不对称的, 且非对称荷载通常是不利的荷载分布, 对某些结构类型受力性能有明显影响。对于单层球面网壳结构来讲, 结构设计可能由稳定承载力控制, 荷载非对称分布对球壳结构稳定性能的影响程度, 迄今没有明确的概念。本文试图运用大规模参数分析的方法对这一问题作一较为深入的探讨。本文考虑两种荷载分布: 满跨均布和半跨均布(见图 3.3); 恒载满跨均布, 活载可满跨也可半跨均布, 但活载(p)和恒载(g)有四种不同荷载比例: $p/g=0, 1/4, 1/2, 1$ 。

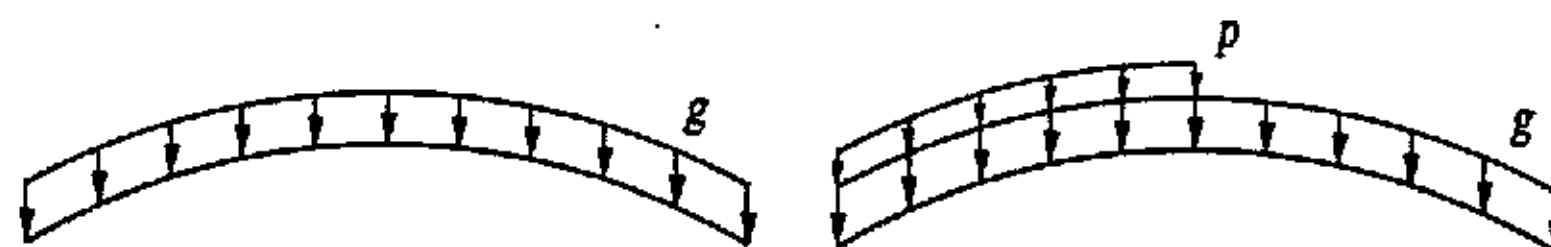


图 3.4 荷载分布形式

Fig 3.4 Forms of load distribution

3.2.6 初始缺陷

根据一致缺陷模态法以及工程中实际可能造成的安装初始缺陷, 以最大偏差为 $L/1000$ 的情况作为基本的初始缺陷对所有网壳进行分析。

3.2.7 支承条件

单层网壳的结点均为刚性连接, 其周围的支承结点一般也均固接在下部支承结构上。因而当下部支承结构具有一定刚度时, 球面网壳的支承结点均应按固接考虑。实际工程中也可能遇到接近铰支座的情形, 如采用某些适当转动的支座构造或下部支承结构刚度不足的情形。但在本章的参数分析方案中, 其基本部分均假定支座为固接。

3.3 荷载一位移全过程曲线、极限荷载和屈曲模态

综合上一节参数确定的情况, 具体选用参数如表 3.3 所示:

表 3.3 参数分析方案

Table 3.3 Scheme of parametric analysis

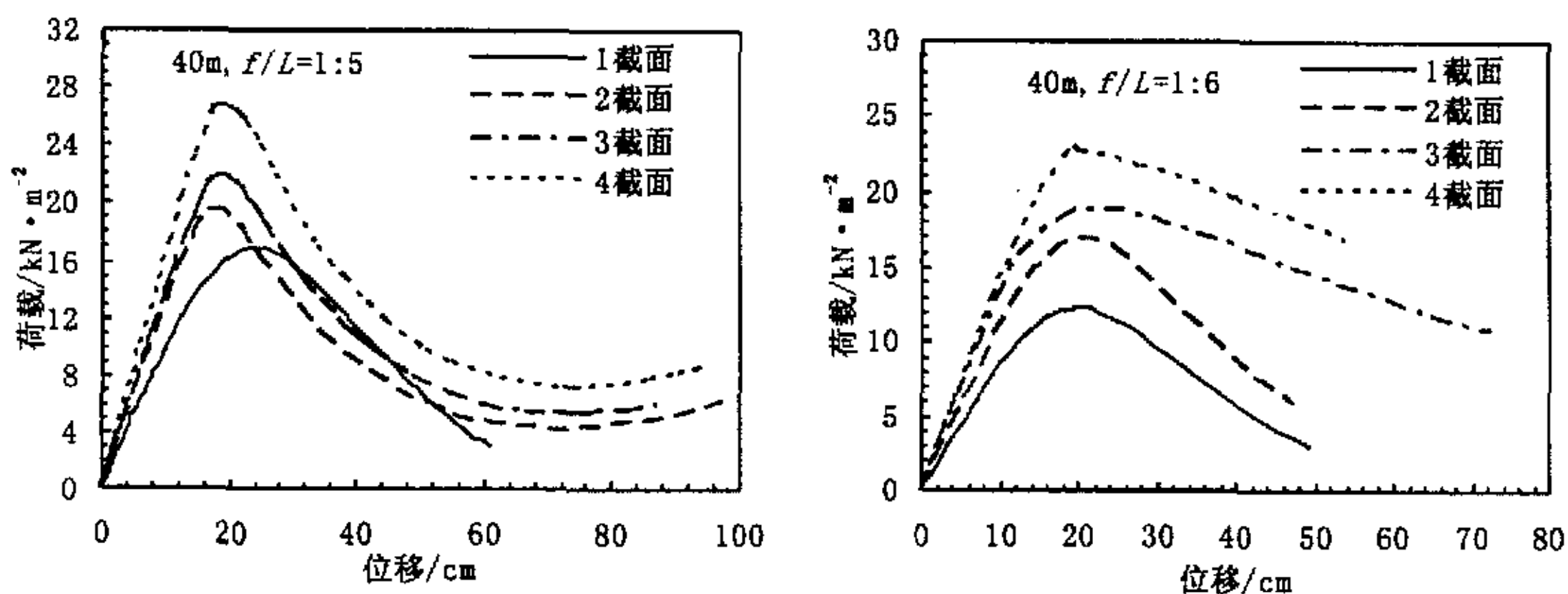
跨度	截面	矢跨比	荷载形式	缺陷 (cm)
40m	4 种	$f/L=1/5, 1/6, 1/7, 1/8$	$p/g=0, 1/4, 1/2, 1$	$R=0, 4$
50m	4 种	$f/L=1/5, 1/6, 1/7, 1/8$	$p/g=0, 1/4, 1/2, 1$	$R=0, 5$

结构的屈曲模态可以作为特征值来解, 如逆迭代法、子空间迭代法等。结构的稳定性可以从其荷载—位移全过程曲线得到完全的概念。传统的线性分析方法是把结构的强度问题和稳定性问题分开来考虑。事实上, 从非线性分析的角度来考察, 结构的稳定性问题和强度问题是相互关联的。结构的荷载—位移全过程曲线, 可以准确地把结构的强度、稳定性以至于刚度的整个变化历程表示的清清楚楚。本文的稳定分析是以荷载—位移全过程分析为基础的, 因此对于极限点的屈曲模态也无需解特征方程, 只是根据屈曲模态的定义求出屈曲前后两个临近状态的位移之差即为该极限点屈曲模态的精确形式。

另外, 钢结构设计中, 结构的极限荷载计算特别重要。从稳定方面来考虑, 第一个上极限点应低于其后的其他各极限点; 从刚度方面来考虑, 达到第一个极限点, 结构位移已经很大, 一般已超过结构设计的容许限度。工程设计中, 所关心的是第一个上极限点。下面的研究中, 计算仅跟踪到结构的第一个临界点位置。

3.3.1 网壳在满跨均布荷载下的全过程曲线

一个单层网壳多达几百个结点, 对每例进行荷载—位移全过程分析后, 每个结点都可画出一条荷载—位移曲线, 为避免不必要的繁琐, 对每个结构仅取迭代结束时位移最大的结点绘出其全过程曲线作为典型代表。便于比较按荷载参数组合, 把所得的全过程曲线示于图 3.4, 这些曲线均以总荷载 ($p+g$) 为纵坐标, 可以看出这些全过程曲线都很有规律性。当理想单层联方球面网壳达到第一个临界点时, 位移一般不超过跨度的 $1/300$, 结构在处于临界状态前, 早已呈现出较强的几何非线性。



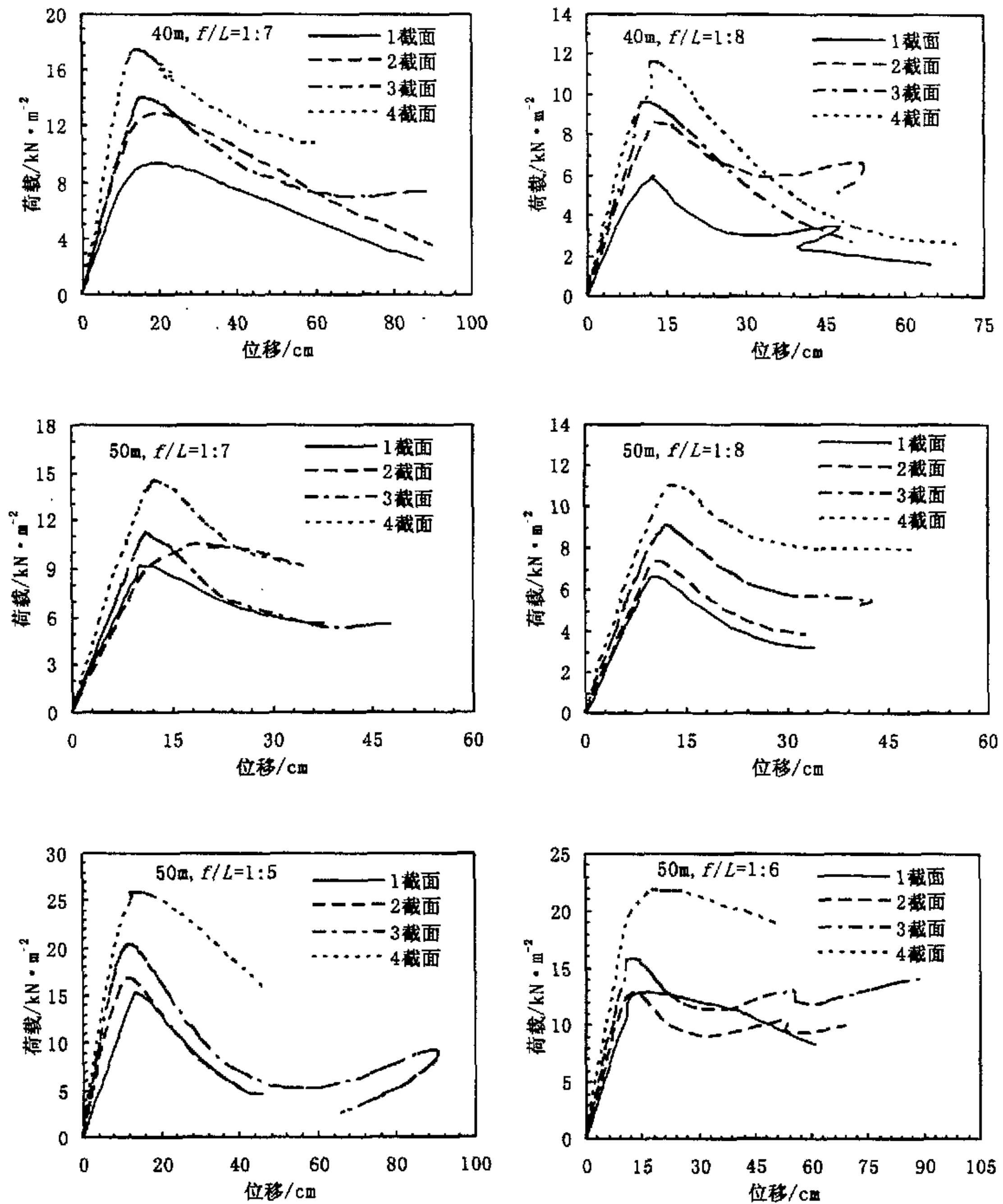


图 3.5 网壳在满跨均布荷载作用下的全过程曲线

Fig 3.5 The whole process curve of the structure by load uniformly distributed over span

3.3.2 对极限荷载的参数分析

对理想网壳的极限荷载进行统计分析, 分别考察杆件截面尺寸、矢跨比两个参数当其中一个单独改变时网壳极限荷载值的变化规律。图 3.5 和图 3.6 形象地表示了这种规律。

根据拟壳法理论网壳的极限荷载与其截面的等效刚度 \sqrt{BD} 成正比, 其中 B 和

D 分别为横向薄膜刚度和折算抗弯刚度。 B 和 D 的计算方法见4.1节。由图3.5可看出理想网壳极限承载力随截面等效刚度 \sqrt{BD} 大致呈线性关系。

由图3.6可看出矢跨比对稳定的影响：结构的平面尺寸、杆件布置、杆件截面和支承条件不变的情况来研究矢跨比对结构临界荷载的影响，曲线基本上呈线性递增，但微上凸。矢跨比的增大，实质上代表了球面曲率半径的减小，从而使网壳承载力增大。

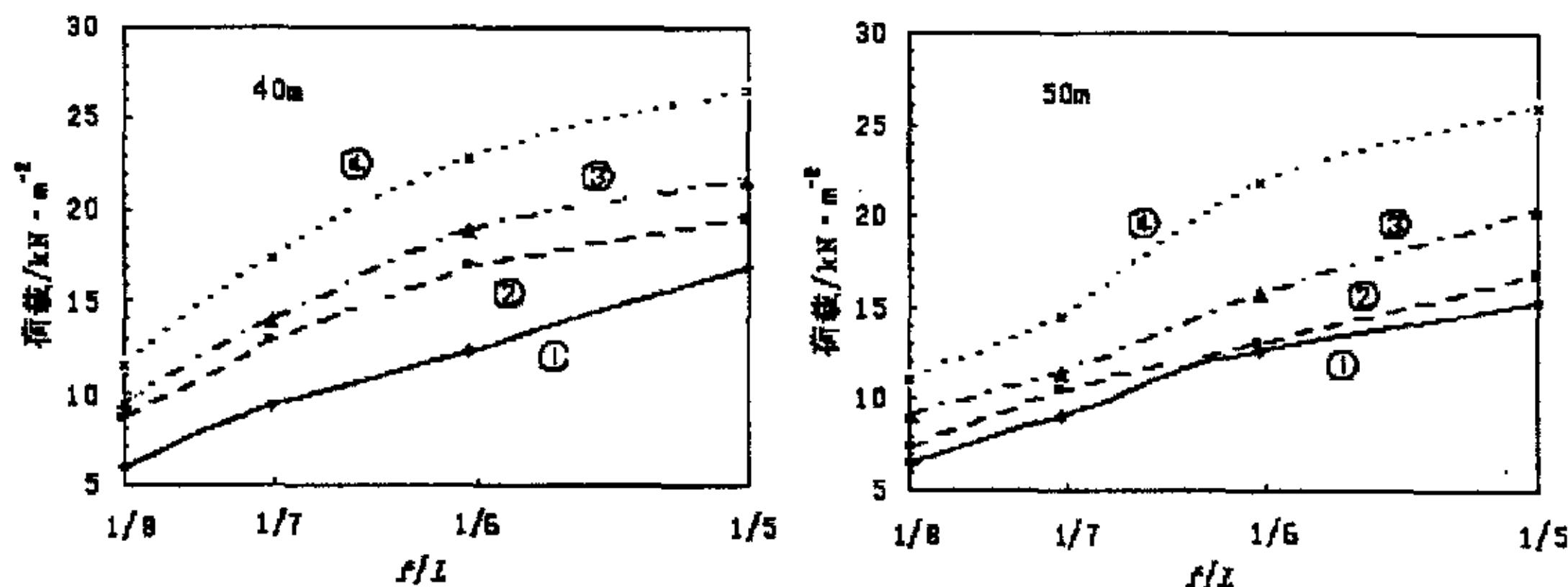


图 3.6 网壳极限荷载随截面大小变化（矢跨比为参变量）
（①代表 1 号截面，②代表 2 号截面，③代表 3 号截面，④ 4 号截面）

Fig 3.6 Variation of structural ultimate load with different section
(Ratio of rise to span is parameter)

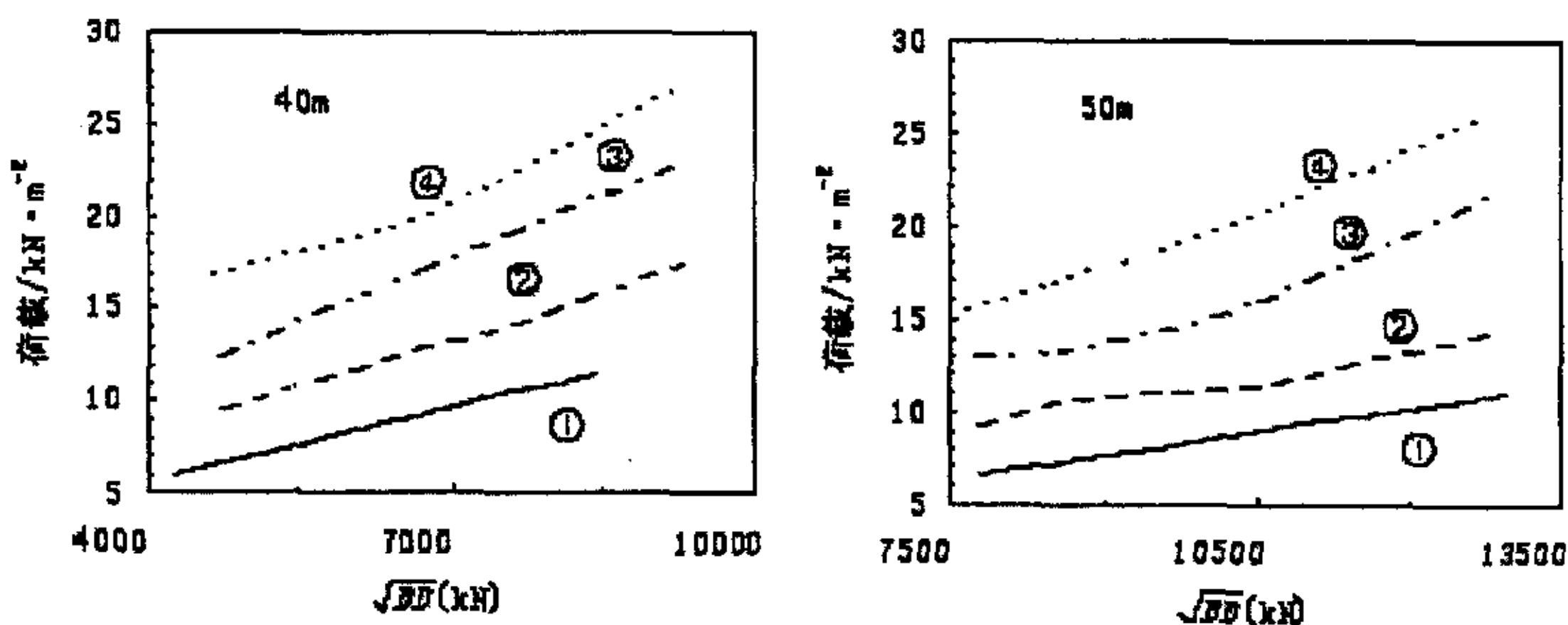


图 3.7 网壳极限荷载随矢跨比变化（截面大小为参变量）
（①代表 1/8 的矢跨比，②代表 1/7 的矢跨比，③代表 1/6 的矢跨比，④代表 1/5 的矢跨比）

Fig 3.7 Variation of structural ultimate load with ratio of rise to span
(Different section is parameter)

3.3.3 网壳在满跨均布荷载下的屈曲模态

在竖向载荷作用下，网壳杆件的主要内力是轴力，且多为压力，但此类结构，有可能在结构的边缘部位少许杆件受拉^[8]。而极大多数杆件的弯曲应力和剪应力所占比例较小，整个网壳基本以薄膜力的方式承受荷载作用，杆件轴力变化比较平

缓, 分布也比较均匀, 荷载主要是通过主肋和斜向杆来传递的, 受力合理。结构边缘杆件, 剪力和弯矩所引起的应力与轴力引起的应力相比较, 其比值向跨中迅速衰减, 但对于结构设计, 这些杆件都不是控制杆。整个网壳结构传力路径明确, 受力合理, 杆件在一个整体中协同工作, 是比较合理的空间结构体系。其屈曲均从主肋结点开始, 一般是个别杆件先于整体屈曲, 多数情况下, 从支承环算起第四、第五或第六环的某个结点产生明显位移, 然后随荷载增大形成逐渐扩大的凹陷。图 3.8 表示 40m 跨度的网壳在均布荷载下发生第一次屈曲时的屈曲模态。

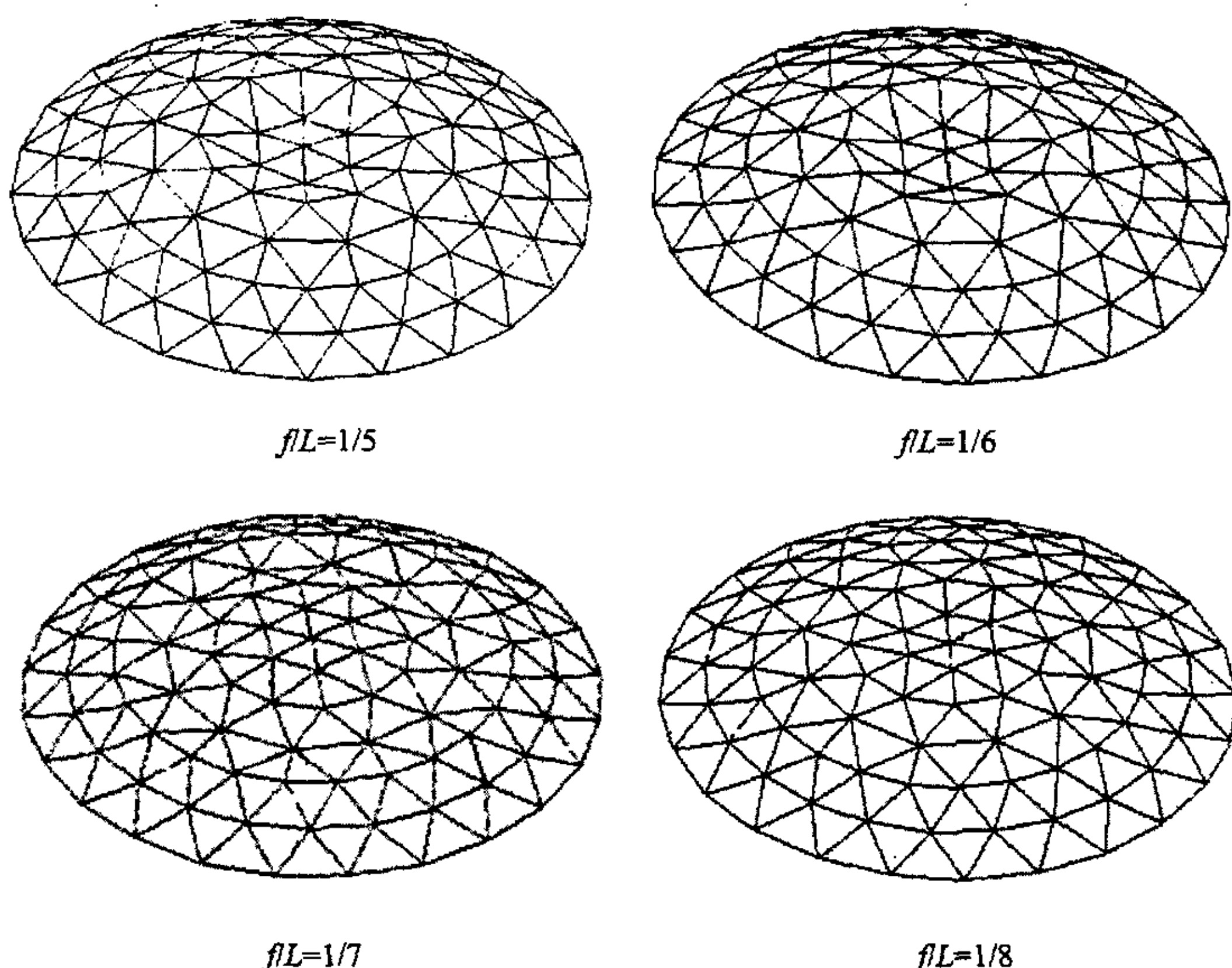


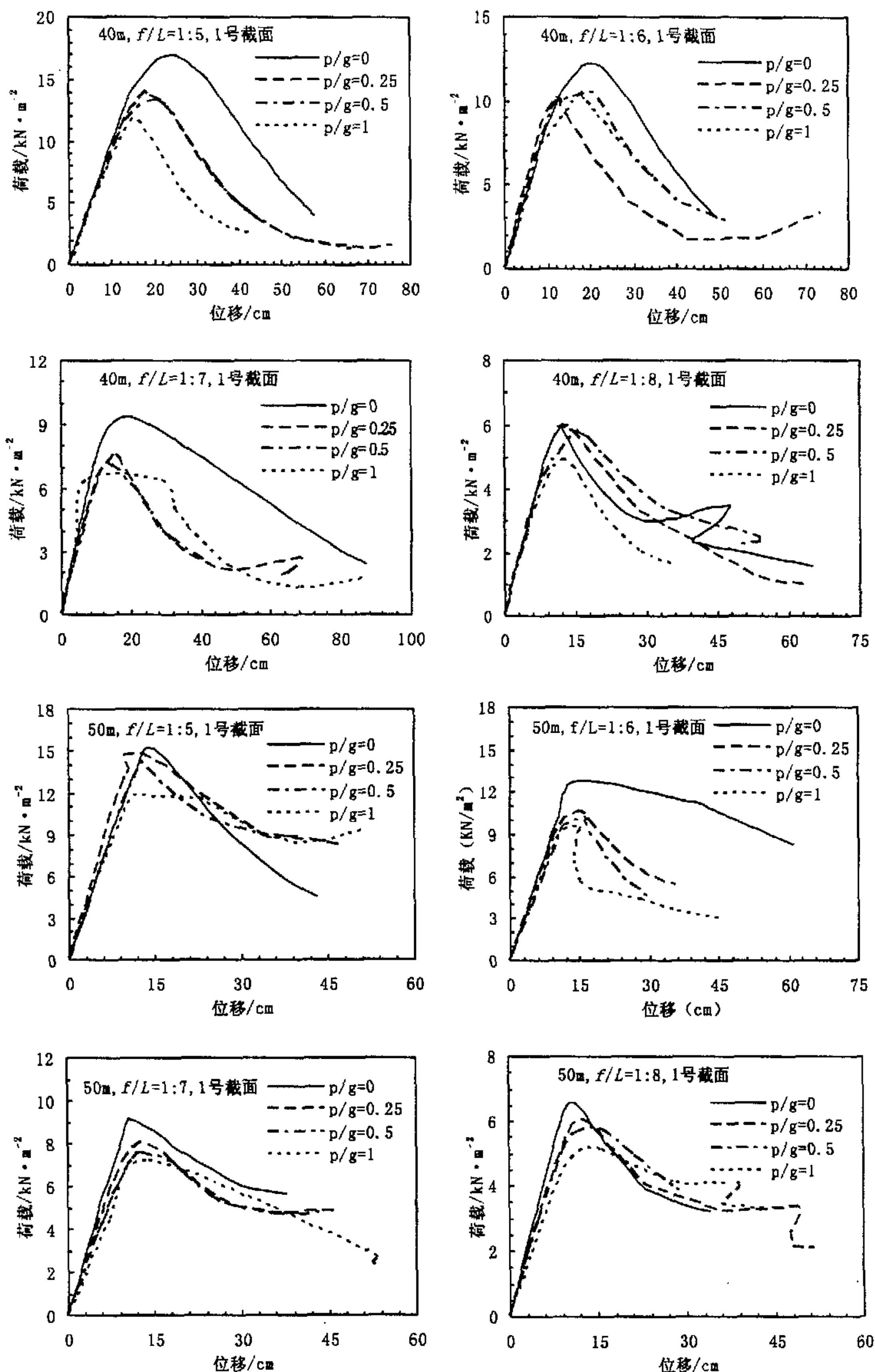
图 3.8 40m 跨度 1 号截面网壳的屈曲模态($p/g=0$)

Fig 3.8 Structural buckling modality of the 40m span one number section ($p/g=0$)

3.4 不对称荷载分布 p/g 的影响

3.4.1 网壳在不对称荷载下的全过程曲线

本文对每个模型均考虑四种荷载比例: 即 $p/g=0, 1/4, 1/2, 1$ 。本文列出了不对称荷载分布下的荷载一位移全过程分析曲线, 为了便于比较, 这些曲线均以总荷载 ($p+g$) 为纵坐标, 可以看出这些全过程曲线 (如图 3.8, 仅列出 1 号截面的情况) 都很有规律性。如当理想单层联方球面网壳达到第一个临界点时, 位移一般不超过跨度的 $1/250$ 。

图 3.9 网壳在不对称荷载作用下 ($p/g=0, 1/4, 1/2, 1$) 的全过程曲线Fig 3.9 The whole course curve of the structure by unsymmetrical load ($p/g=0, 1/4, 1/2, 1$)

不对称荷载作用下的网壳屈曲也是从主肋结点开始，一般是个别杆件先于整体屈曲，多数情况下，从支承环算起第四、第五或第六环的某个结点产生明显位移，然后随荷载增大形成逐渐扩大的凹陷。图 3.9 表示 40m 跨度 1 号截面 $f/L=1/5$ 的网壳在 $(p/g=1/4, 1/2, 1)$ 不对称荷载下发生第一次屈曲时的屈曲模态。

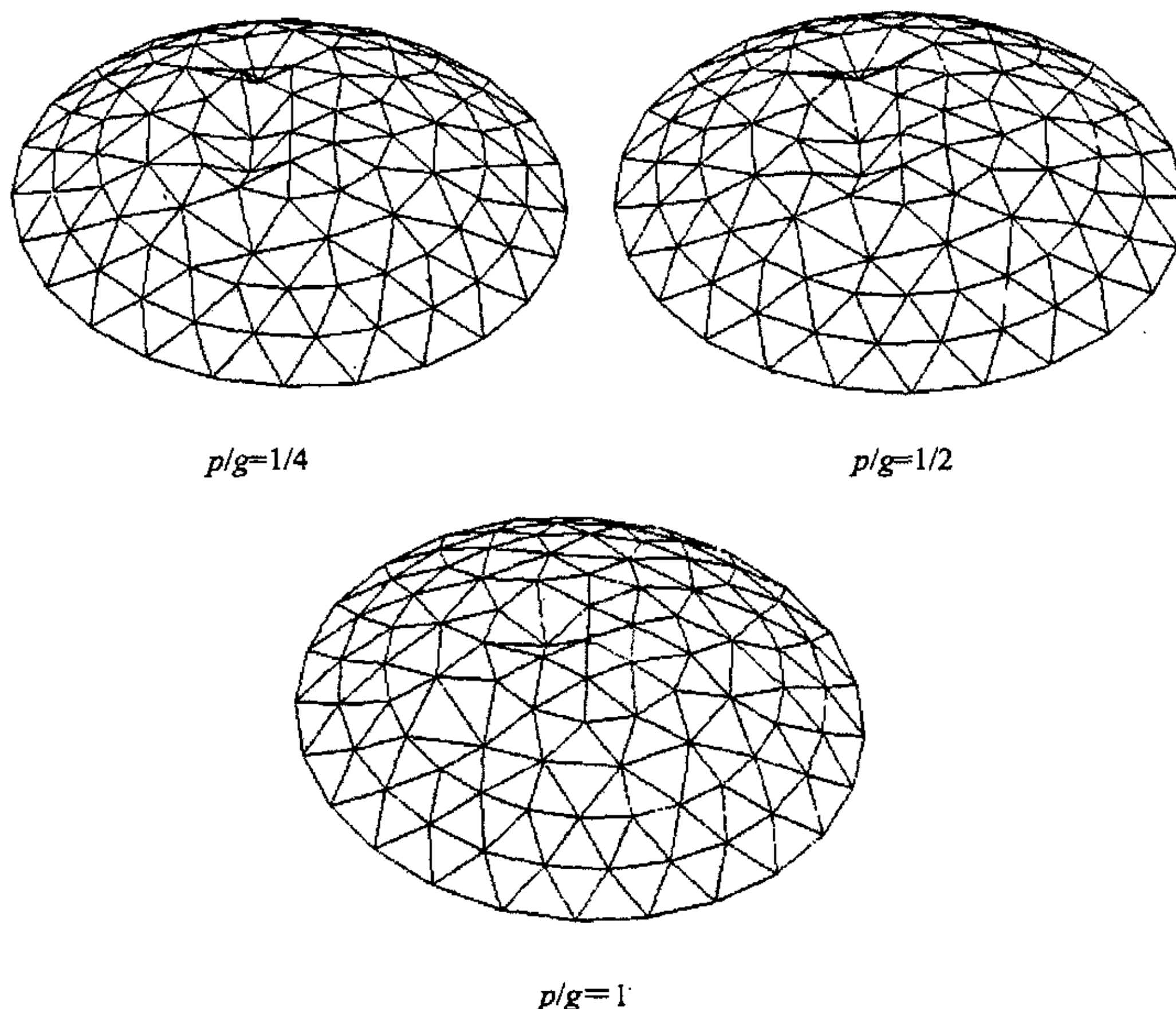


图 3.10 40m 跨度 1 号截面 $f/L=1/5$ 的网壳的屈曲模态($p/g=1/4, 1/2, 1$)

Fig 3.10 Structural buckling modality of the 40m span one number section $f/L=1/5(p/g=1/4, 1/2, 1)$

3.4.2 不对称荷载分布对单层球面网壳稳定性的影响

取第一个临界点（极值点或分枝点）处的荷载值作为结构的极限荷载。结构的极限承载力随 p/g 的变化规律如图 3.10（为节省篇幅，仅列出 $L=40m$ 理想网壳的情况），可以看出球面网壳对荷载的不对称分布并不十分敏感。当以 $p+g$ 来定义极限荷载时，结构的稳定承载力随 p/g 的增大总体呈下降趋势，但下降缓慢。不对称荷载作用下网壳稳定承载力以 $(p+g)$ 考虑，表 3.4~表 3.6 给出了理想结构在不对称荷载作用下网壳稳定承载力相对于理想结构在对称荷载作用下网壳稳定承载力的比值；表 3.7~表 3.9 给出了有缺陷结构在不对称荷载作用下网壳稳定承载力

相对于有缺陷结构在对称荷载作用下网壳稳定承载力的比值（比值即为不对称影响系数）。

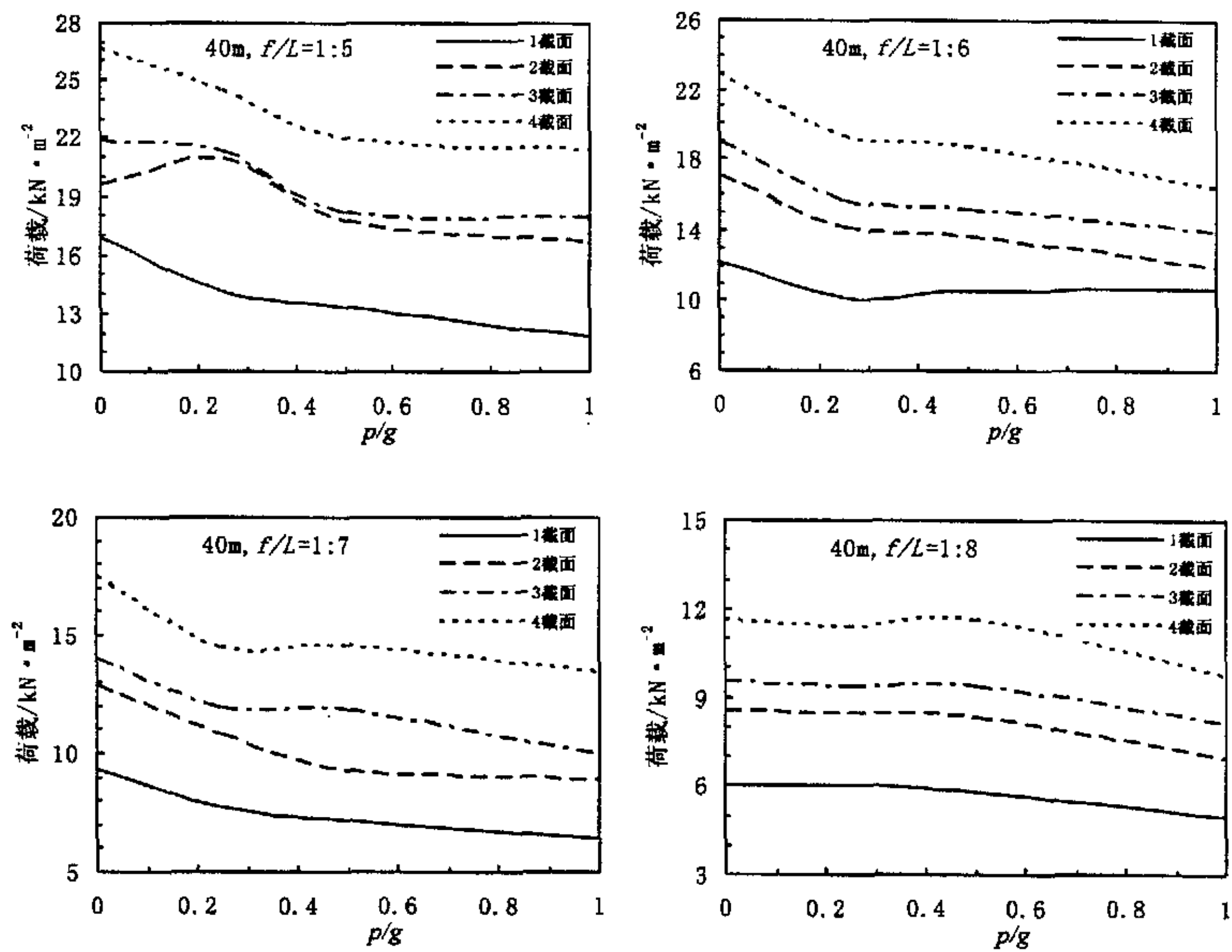


图 3.11 极限荷载随 p/g 的变化关系

Fig 3.11 Variable relationship of structural ultimate load with p/g

表 3.4 不对称荷载影响系数（理想网壳） $p/g=1/4$

Table 3.4 The coefficient of unsymmetrical load influence (perfect structure) $p/g=1/4$

$L=40\text{m}$					$L=50\text{m}$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.8357	0.8257	0.8216	0.9956	1	0.9662	0.8329	0.8760	0.9184
2	1.0699	0.8288	0.8385	0.9842	2	0.9539	0.8923	0.8316	0.8918
3	0.9725	0.8242	0.8498	0.9829	3	0.9600	0.8717	0.9302	0.8820
4	0.9154	0.8421	0.8278	0.9798	4	0.9090	0.7617	0.8802	0.9059
平均值	0.9484	0.8302	0.8344	0.9856	平均值	0.9473	0.8397	0.8795	0.8995

表 3.5 不对称荷载影响系数 (理想网壳) $p/g=1/2$ Table 3.5 The coefficient of unsymmetrical load influence (perfect structure) $p/g=1/2$

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.7873	0.8591	0.7698	0.9672	1	0.9313	0.7945	0.8198	0.8693
2	0.9041	0.7978	0.7721	0.9678	2	0.9294	0.8534	0.7294	0.8564
3	0.8323	0.7998	0.8431	0.9834	3	0.9042	0.8444	0.8912	0.8254
4	0.8231	0.8165	0.8326	1.0030	4	0.8537	0.7350	0.8381	0.8664
平均值	0.8367	0.8183	0.8044	0.9804	平均值	0.9046	0.8068	0.8196	0.8544

表 3.6 不对称荷载影响系数 (理想网壳) $p/g=1.0$ Table 3.6 The coefficient of unsymmetrical load influence (perfect structure) $p/g=1.0$

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.6997	0.8686	0.6868	0.8188	1	0.7767	0.7475	0.7796	0.7764
2	0.8536	0.6927	0.6914	0.8091	2	0.8525	0.8066	0.7448	0.7849
3	0.8239	0.7301	0.7117	0.8532	3	0.8867	0.8021	0.8320	0.7725
4	0.7995	0.7144	0.7657	0.8371	4	0.8238	0.7051	0.7956	0.7801
平均值	0.7942	0.7515	0.7139	0.8296	平均值	0.8349	0.7653	0.7880	0.7785

表 3.7 不对称荷载影响系数 (有缺陷网壳) $p/g=1/4$ Table 3.7 The coefficient of unsymmetrical load influence (imperfect structure) $p/g=1/4$

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.5894	0.6554	0.6405	0.8355	1	0.6985	0.6698	0.6933	0.6737
2	0.5880	0.5962	0.6014	1.2518	2	0.7042	0.7083	0.7095	0.7377
3	0.7244	0.6521	0.7039	1.2982	3	0.7250	0.7197	0.7175	0.7457
4	0.8531	0.6804	0.6573	1.2221	4	0.7228	0.7296	0.7258	0.7497
平均值	0.6887	0.6460	0.6508	1.1519	平均值	0.7126	0.7069	0.7115	0.7267

表 3.8 不对称荷载影响系数 (有缺陷网壳) $p/g=1/2$ Table 3.8 The coefficient of unsymmetrical load influence (imperfect structure) $p/g=1/2$

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.5497	0.5096	0.4975	0.7769	1	0.6542	0.6027	0.6203	0.6151
2	0.5577	0.7306	0.4433	1.0418	2	0.6640	0.6359	0.6278	0.6757
3	0.6631	0.5039	0.5260	1.0838	3	0.6321	0.6464	0.6463	0.6833
4	0.6618	0.5090	0.5084	1.0579	4	0.6846	0.6512	0.6571	0.6879
平均值	0.6081	0.5633	0.4938	0.9901	平均值	0.6587	0.6341	0.6379	0.6655

表 3.9 不对称荷载影响系数（有缺陷网壳） $p/g=1.0$ Table 3.9 The coefficient of unsymmetrical load influence (imperfect structure) $p/g=1.0$

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.5061	0.4468	0.4659	0.7205	1	0.6836	0.5421	0.5657	0.5777
2	0.5081	0.4717	0.4894	0.8187	2	0.6765	0.5752	0.5845	0.6329
3	0.6180	0.4662	0.4961	0.8929	3	0.6541	0.5836	0.5963	0.6389
4	0.6097	0.4799	0.5001	1.0020	4	0.6581	0.5935	0.6079	0.6428
平均值	0.5605	0.4662	0.4879	0.8585	平均值	0.6681	0.5736	0.5886	0.6231

进一步分析, 不对称荷载可以分解为对称荷载($g+p/2$)加上反对称荷载($p/2$), 也就是说, 相当于在均布荷载 $g+p/2$ 作用下加一个反对称的干扰。所以如果把 $g+p/2$ 作为荷载一位移曲线的纵坐标, 则它的极限荷载相对于满跨均布荷载时极限荷载的比值, 就代表这一反对称干扰的影响, 表 3.10~表 3.11 给出了反对称荷载的影响系数（只给出了同一网壳四种不同截面的平均值）。

表 3.10 反对称荷载影响系数（理想网壳）

Table 3.10 The coefficient of antisymmetrical load influence (perfect structure)

$L=40m$					$L=50m$				
f/L p/g	1/5	1/6	1/7	1/8	f/L p/g	1/5	1/6	1/7	1/8
1/4	0.8536	0.7472	0.7510	0.8884	1/4	0.8526	0.7557	0.7916	0.8096
1/2	0.6973	0.6819	0.6706	0.8169	1/2	0.7539	0.6724	0.6977	0.7121
1/1	0.5957	0.5636	0.5354	0.6222	1/1	0.6208	0.5739	0.5729	0.5839

表 3.11 反对称荷载影响系数（有缺陷网壳）

Table 3.11 The coefficient of antisymmetrical load influence (imperfect structure)

$L=40m$					$L=50m$				
f/L p/g	1/5	1/6	1/7	1/8	f/L p/g	1/5	1/6	1/7	1/8
1/4	0.6199	0.5814	0.5857	1.03671	1/4	0.6414	0.6362	0.6404	0.6540
1/2	0.5067	0.4694	0.4115	0.8251	1/2	0.5489	0.5284	0.5316	0.5546
1/1	0.5166	0.4845	0.4881	0.8639	1/1	0.5345	0.5301	0.5336	0.5450

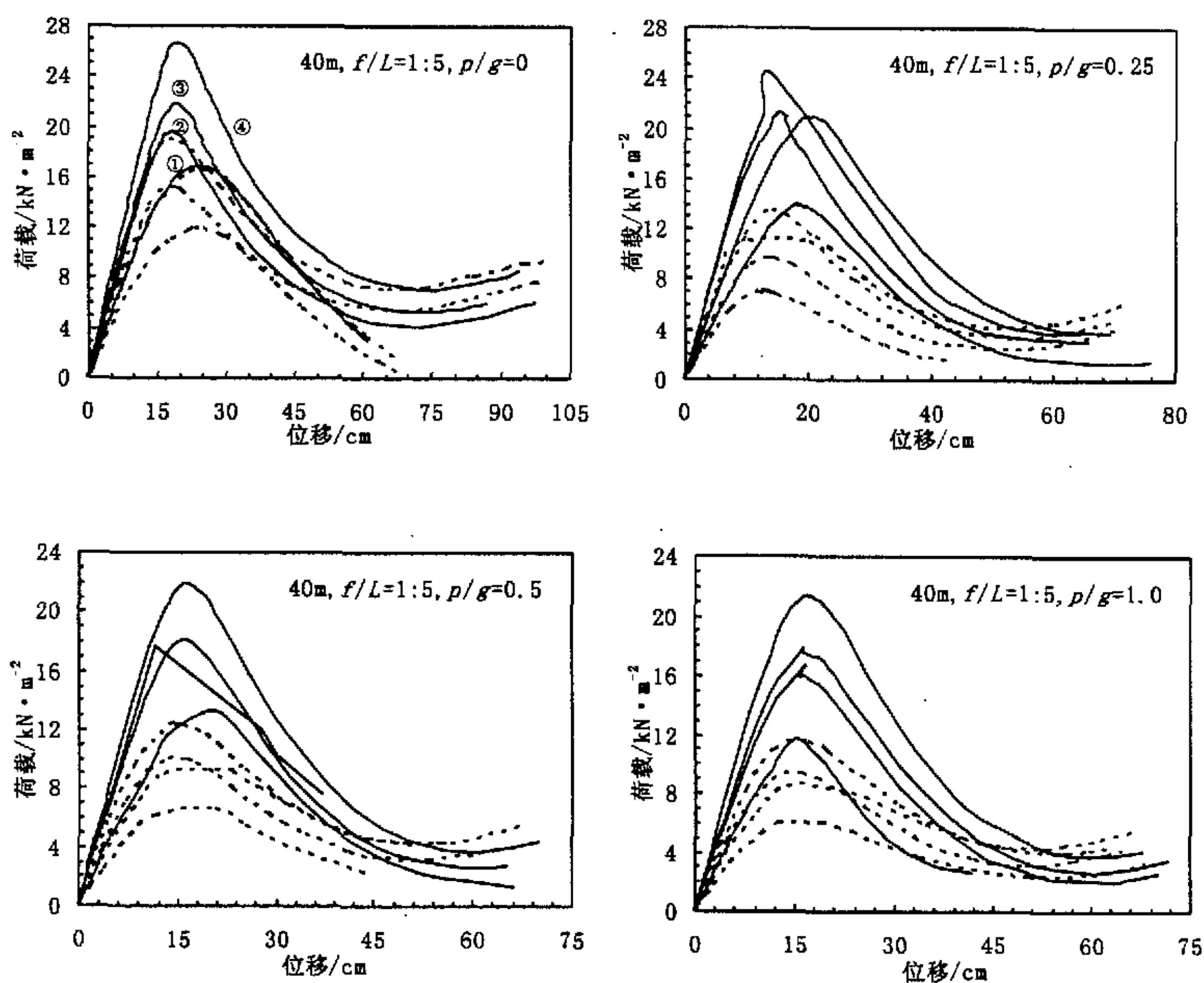
从表 3.10~表 3.11 可以看出反对称干扰确实进一步降低了结构的稳定承载力, 理想情况下: 当 $p/g=1/4$ 时降至均布荷载的 75%~89%; 当 $p/g=1/2$ 时降至均布荷载的 67%~82%; 当 $p/g=1$ 时降至均布荷载的 54%~62%; 有缺陷情况下: 当

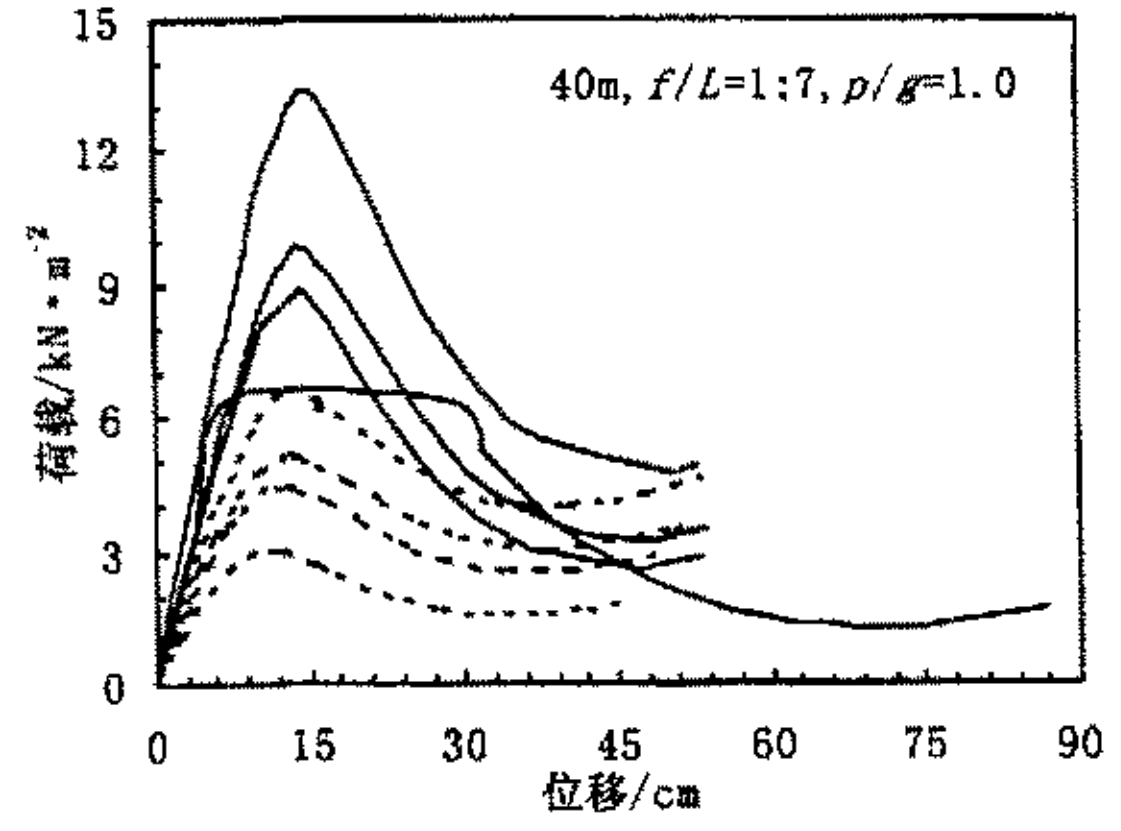
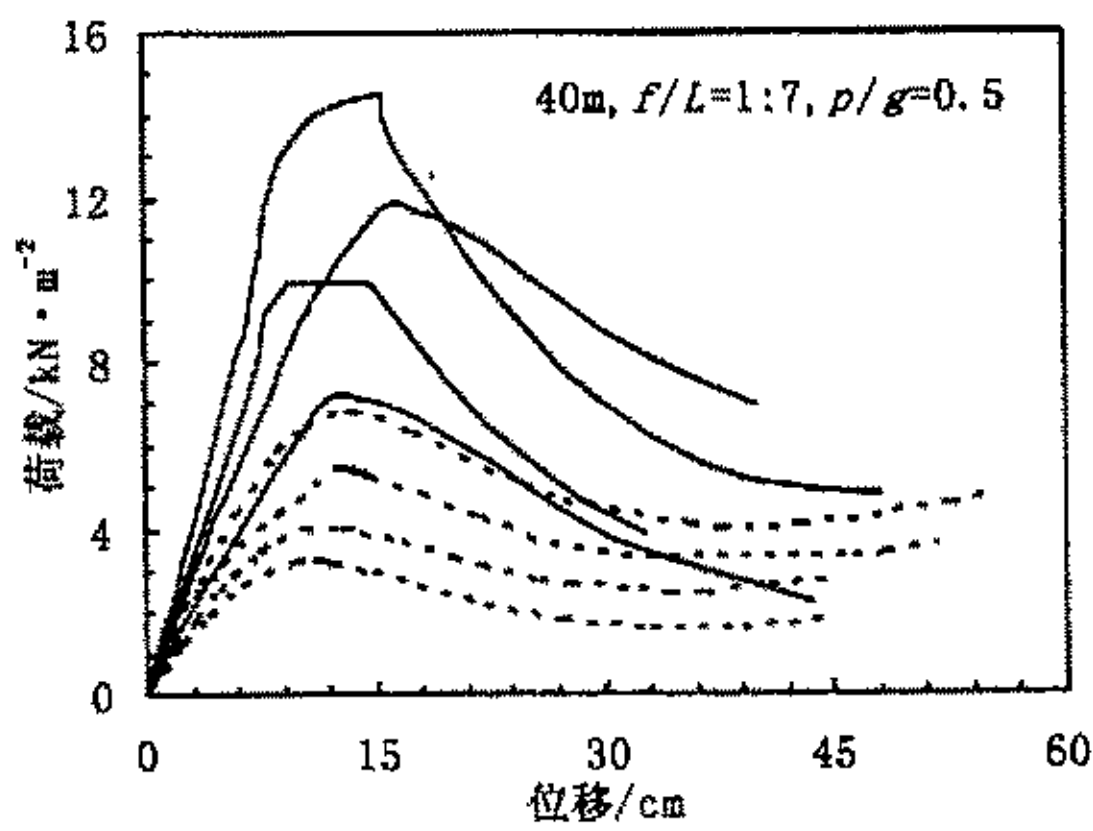
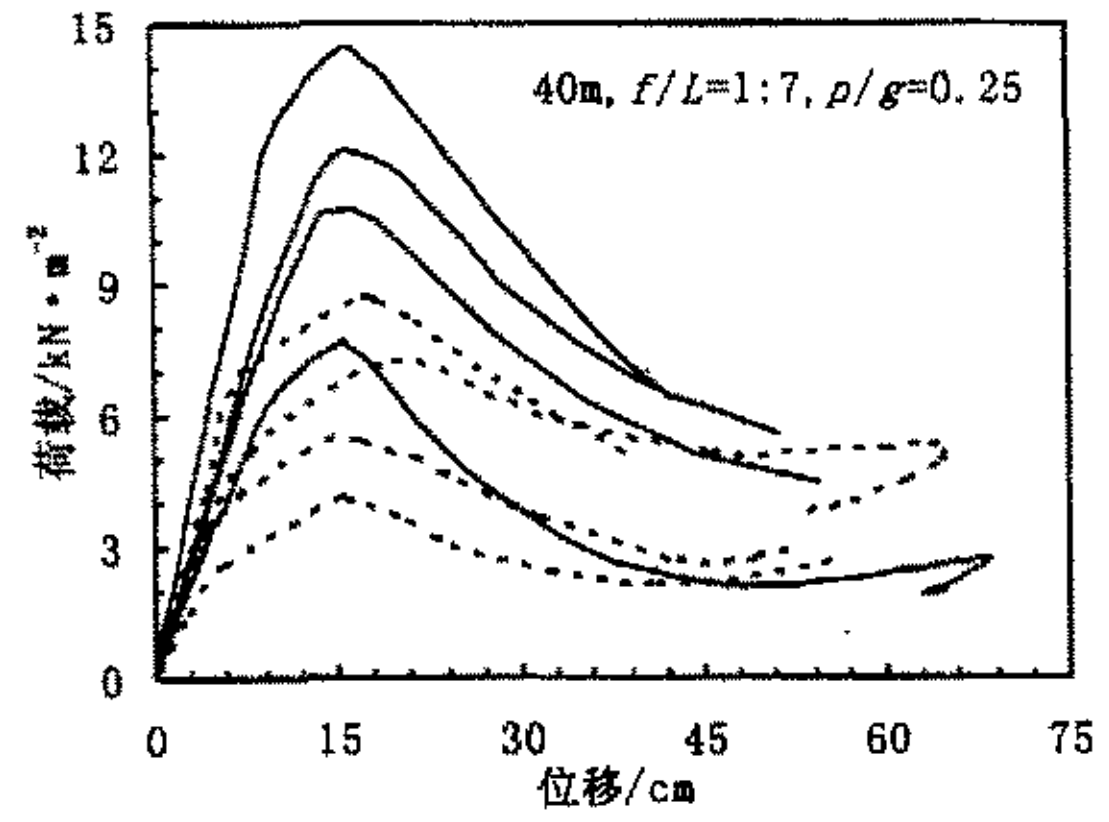
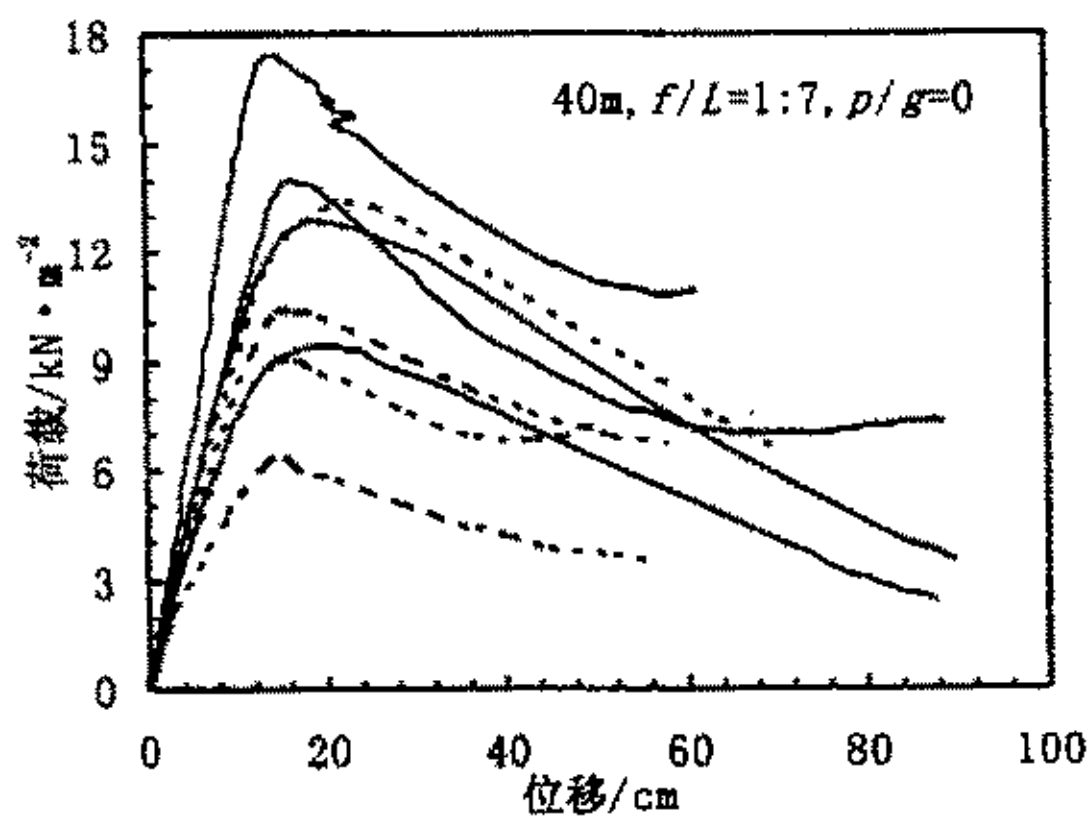
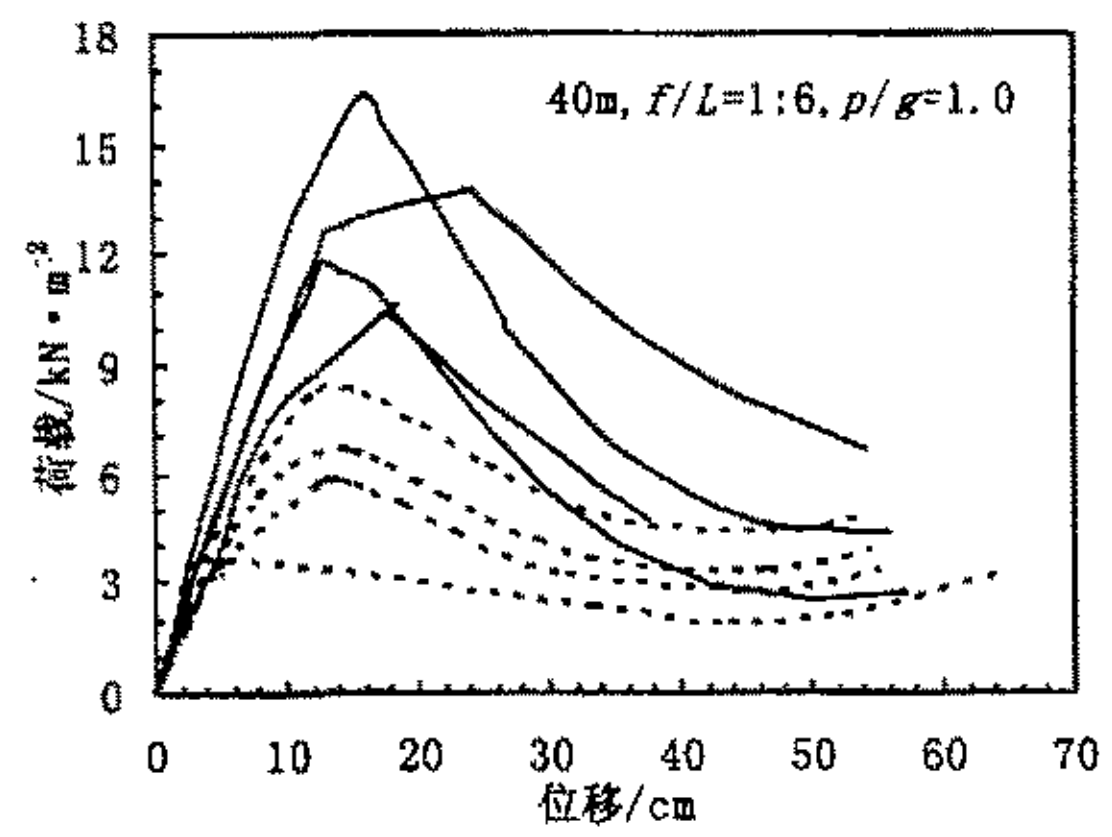
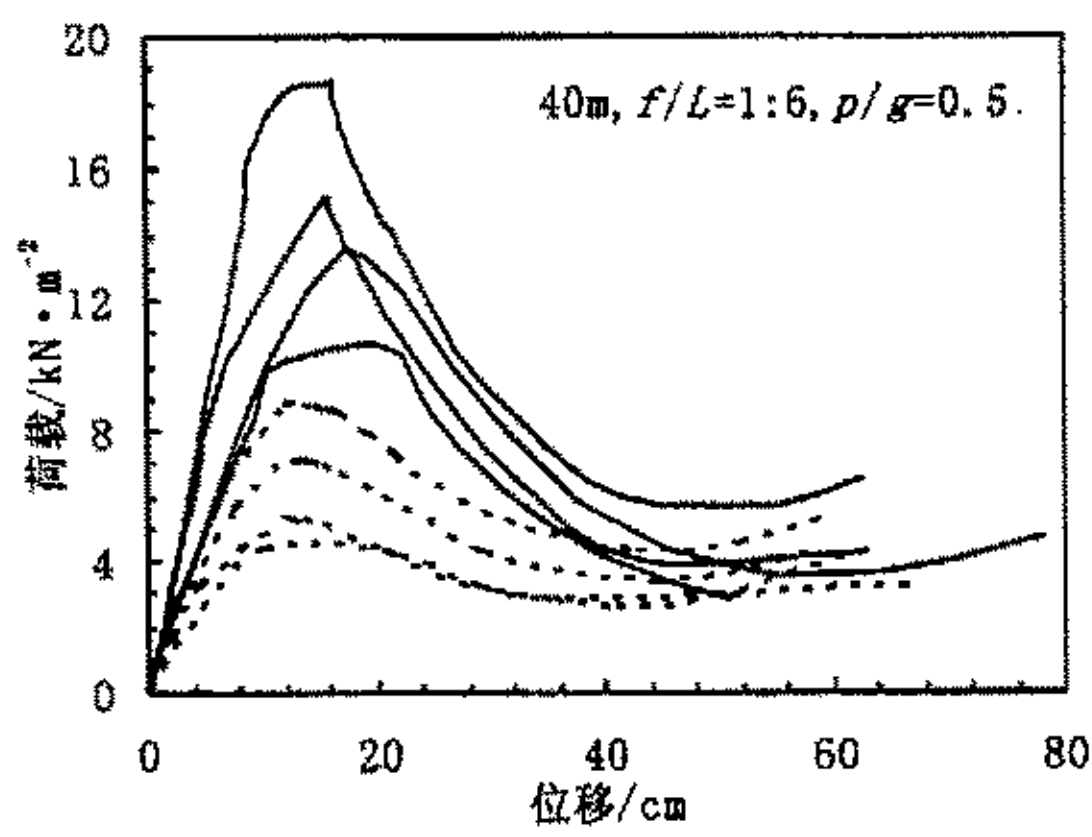
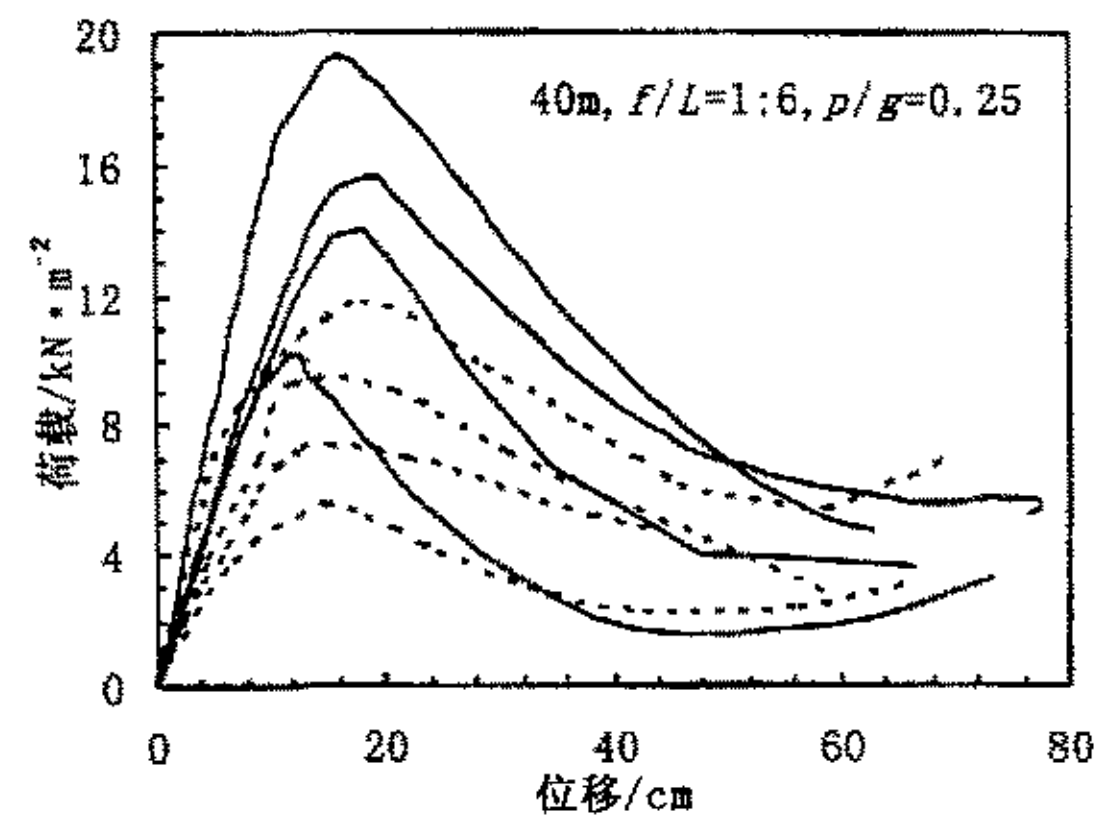
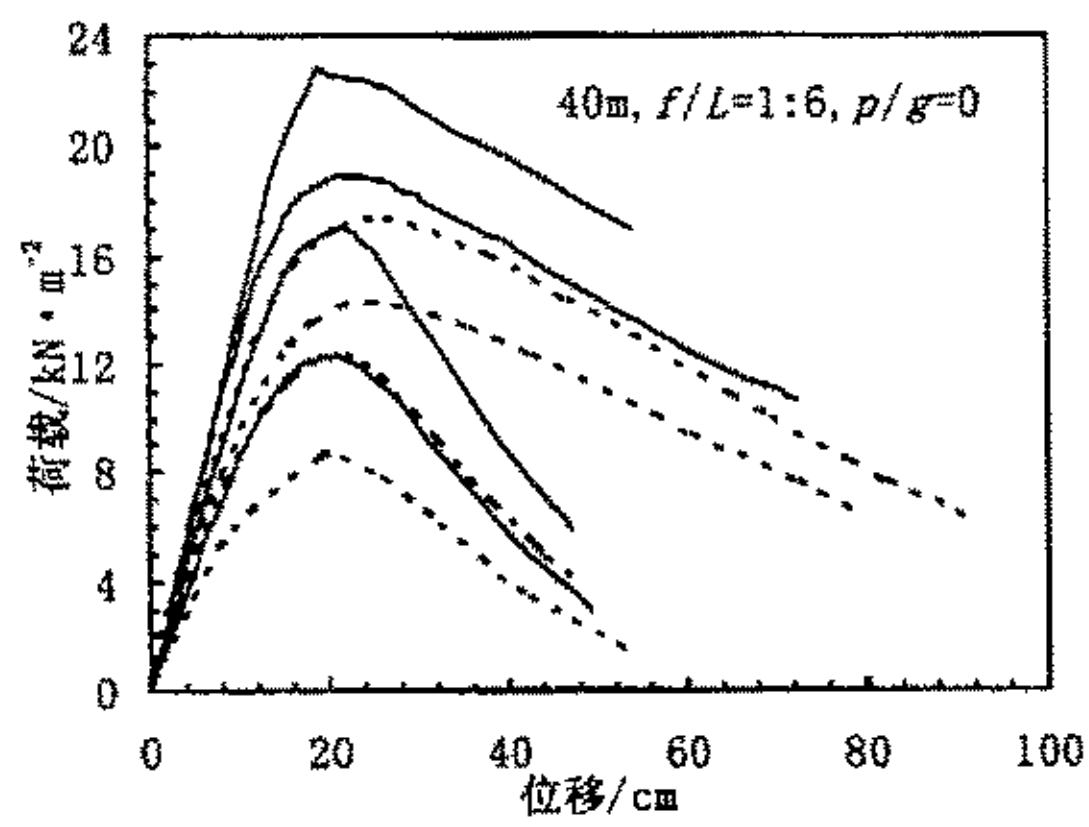
$p/g=1/4$ 时降至均布荷载的 58%~103%; 当 $p/g=1/2$ 时降至均布荷载的 51%~82%; 当 $p/g=1$ 时降至均布荷载的 48%~86%。结构的稳定承载力随 p/g 的增大仍呈下降趋势, 且下降幅度较大。

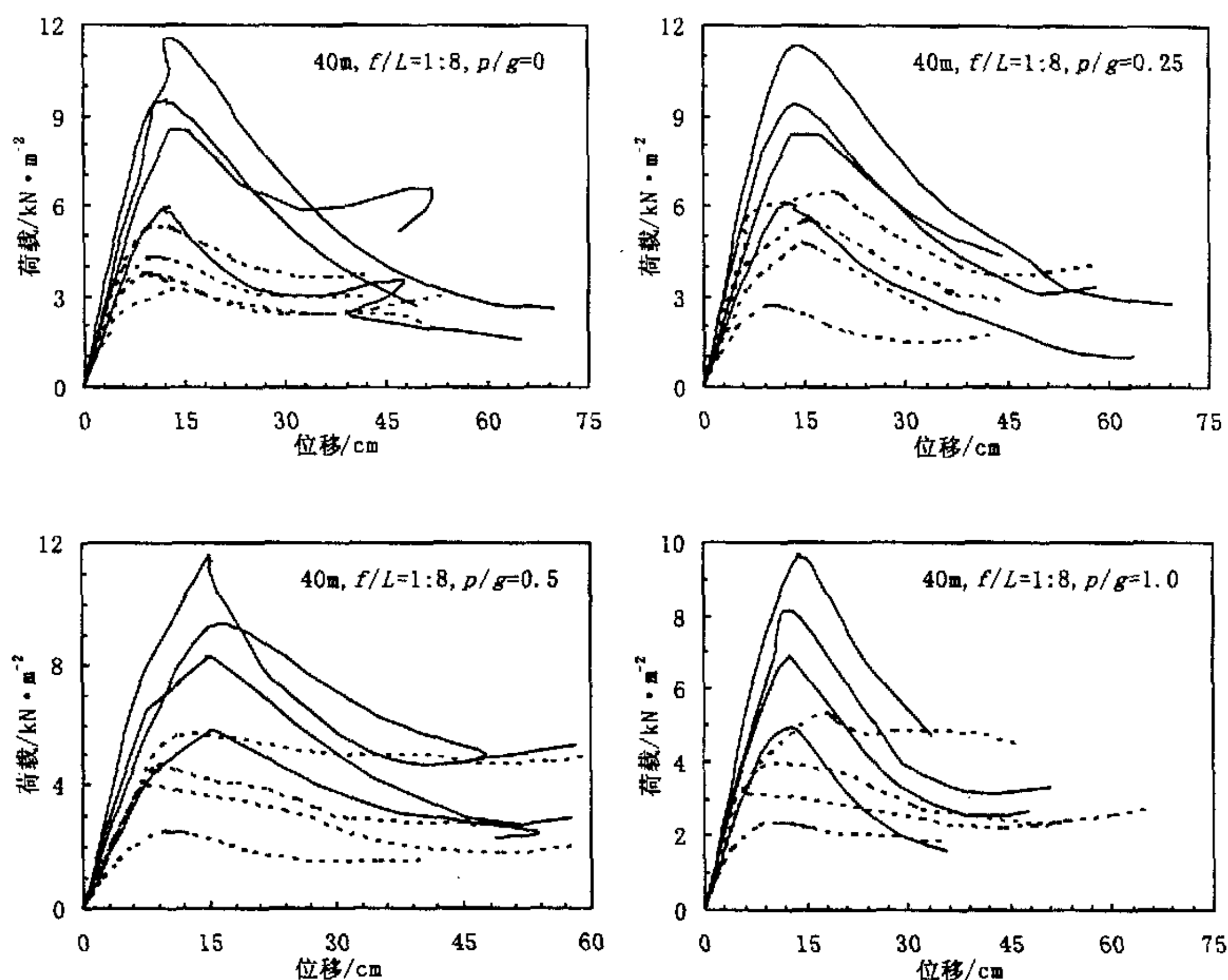
3.5 初始缺陷的影响

3.5.1 网壳有初始缺陷时的全过程曲线

本文对每一个网壳计算模型均进行了缺陷影响分析, 使我们有可能从大量数据中得到统计意义的概念。我们取初始缺陷为 $L/1000$ 并按一致缺陷模态法进行了最不利分析。便于比较, 把理想网壳和 $L/1000$ 初始缺陷的全过程曲线放在同一图中, 图 3.11 (仅列出 $L=40\text{m}$ 的情况) 表示考虑初始缺陷网壳在对称荷载及不对称荷载作用下的全过程曲线, 实线表示理想结构的, 虚线表示了考虑 $L/1000$ 初始缺陷结构的。





3.12 考虑初始缺陷网壳的全过程曲线($p/g=0,1/4,1/2,1$)Fig 3.12 The whole course curve of the structure by initial imperfection ($p/g=0,1/4,1/2,1$)

3.5.2 初始缺陷对单层球面网壳稳定性的影响

从 3.5.1 节中的荷载—位移全过程曲线图中, 可以看出只要考虑初始缺陷, 不管是对称荷载还是不对称荷载作用, 网壳稳定承载力都下降很大。考虑初始缺陷的网壳稳定承载力也以 $(p+g)$ 表示, 表 3.12~表 3.15 给出了考虑初始缺陷网壳在对称荷载及不对称荷载作用下, 网壳稳定承载力相对于对应情况下未考虑初始缺陷网壳稳定承载力的比值, 从中可以清楚的看到 $L/1000$ 初始缺陷对网壳承载力的影响。

表 3.12 缺陷影响系数 ($p/g=0$)Table 3.12 The coefficient of initial imperfection influence ($p/g=0$)

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.7020	0.6936	0.6787	0.5345	1	0.6255	0.7176	0.4579	0.4276
2	0.8429	0.7236	0.6992	0.4448	2	0.6279	0.5632	0.4396	0.3995
3	0.6941	0.7505	0.7356	0.4487	3	0.6346	0.5647	0.4997	0.3998
4	0.7076	0.7543	0.7565	0.4584	4	0.6171	0.5011	0.4796	0.4113
平均值	0.7367	0.7305	0.7175	0.4716	平均值	0.6263	0.5867	0.4692	0.4096

表 3.13 缺陷影响系数 ($p/g=1/4$)Table 3.13 The coefficient of initial imperfection influence ($p/g=1/4$)

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.5913	0.5234	0.6331	0.5454	1	0.4522	0.4439	0.3624	0.3137
2	0.5813	0.6227	0.6082	0.6883	2	0.4635	0.4468	0.3750	0.3304
3	0.6103	0.6704	0.7275	0.6828	3	0.4793	0.4663	0.3861	0.3381
4	0.6292	0.7185	0.6495	0.6663	4	0.4908	0.4799	0.3955	0.3404
平均值	0.6030	0.6338	0.6546	0.6457	平均值	0.4715	0.4592	0.3798	0.3306

表 3.14 缺陷影响系数 ($p/g=1/2$)Table 3.14 The coefficient of initial imperfection influence ($p/g=1/2$)

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.4617	0.4281	0.4110	0.4171	1	0.4394	0.4188	0.3465	0.3026
2	0.4399	0.3760	0.3697	0.4709	2	0.4486	0.4197	0.6550	0.3151
3	0.4733	0.4580	0.4553	0.4948	3	0.4437	0.4323	0.3630	0.3311
4	0.5115	0.4559	0.4646	0.4928	4	0.4949	0.4440	0.3760	0.3263
平均值	0.4716	0.4295	0.4252	0.4689	平均值	0.4566	0.4287	0.4351	0.3188

表 3.15 缺陷影响系数 ($p/g=1.0$)Table 3.15 The coefficient of initial imperfection influence ($p/g=1.0$)

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.4512	0.3753	0.4108	0.3982	1	0.5506	0.4007	0.3323	0.3182
2	0.4743	0.4279	0.4759	0.3763	2	0.4983	0.4015	0.3435	0.3001
3	0.5154	0.43375	0.4329	0.4075	3	0.4681	0.4109	0.3588	0.3307
4	0.5242	0.4433	0.4543	0.4559	4	0.4931	0.4218	0.3664	0.3389
平均值	0.4913	0.4201	0.4435	0.4095	平均值	0.5025	0.4087	0.3503	0.3220

分析表中数据可以发现结构的整体稳定承载力由于初始缺陷的作用而下降,但减小幅度随不同矢跨比和 p/g 差异很大。不对称荷载作用下,矢跨比小的网壳对初始缺陷最为敏感,可降至对应情况理想网壳的 30%~60%,对称荷载作用下,矢跨比大的网壳对初始缺陷敏感性稍差,降至对应情况理想网壳的 60%~73%。

表 3.16~表 3.18 给出了考虑初始缺陷网壳在不对称荷载作用下,网壳稳定承载力相对于理想网壳稳定承载力的比值,从中可以清楚的看到 $L/1000$ 初始缺陷对网壳承载力的影响。

表 3.16 不对称荷载及缺陷影响系数 ($p/g=1/4$)

Table 3.16 The coefficient of unsymmetrical load and initial imperfection influence ($p/g=1/4$)

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.4138	0.4546	0.4348	0.4466	1	0.4369	0.3698	0.3175	0.2881
2	0.4962	0.4314	0.4205	0.5569	2	0.4422	0.3986	0.3152	0.2947
3	0.5028	0.4894	0.5178	0.5825	3	0.4599	0.4065	0.3592	0.2982
4	0.5030	0.5132	0.4973	0.5577	4	0.4461	0.3656	0.3481	0.3084
平均值	0.4790	0.4722	0.4676	0.5359	平均值	0.4463	0.3851	0.3350	0.2974

表 3.17 不对称荷载及缺陷影响系数 ($p/g=1/2$)

Table 3.17 The coefficient of unsymmetrical load and initial imperfection influence ($p/g=1/2$)

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.3216	0.3535	0.3377	0.4152	1	0.4092	0.3327	0.2841	0.2630
2	0.4706	0.3116	0.3101	0.4635	2	0.4169	0.3582	0.2789	0.2699
3	0.4603	0.3782	0.3869	0.4864	3	0.4011	0.3650	0.3535	0.2733
4	0.4683	0.3839	0.3846	0.4828	4	0.4225	0.3263	0.3151	0.2829
平均值	0.4302	0.3568	0.3548	0.4620	平均值	0.4124	0.3456	0.3079	0.2723

表 3.18 不对称荷载及缺陷影响系数 ($p/g=1.0$)

Table 3.18 The coefficient of unsymmetrical load and initial imperfection influence ($p/g=1.0$)

$L=40m$					$L=50m$				
矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8	矢跨比 截面	1/5	1/6	1/7	1/8
1	0.3553	0.3099	0.3163	0.3851	1	0.4276	0.2993	0.2891	0.2462
2	0.4288	0.3413	0.3422	0.3642	2	0.4248	0.3239	0.2597	0.2528
3	0.4289	0.3499	0.3650	0.4007	3	0.4150	0.3296	0.2985	0.2555
4	0.4314	0.3620	0.3783	0.4572	4	0.4062	0.2974	0.2915	0.2644
平均值	0.4111	0.3408	0.3505	0.4018	平均值	0.4184	0.3126	0.2847	0.2547

同时考虑不对称荷载作用和初始缺陷情况时，网壳稳定承载力下降更大。减小幅度随矢跨比和 p/g 差异很大。矢跨比小的网壳稳定承载力降低幅度较大，可降至理想网壳的 25%~30%；矢跨比大的网壳降至理想网壳的 35%~53%。 p/g 的增大也使得网壳稳定承载力降低幅度增大，但浮动较小。

4 单层球面网壳稳定承载力拟合公式

4.1 单层球面网壳等效刚度的计算^[22]

对于壳体结构,刚度和跨度、矢高、曲率半径等一些特性参数都是影响结构稳定性能的重要因素。本文所研究的球面网壳连续化后,通常得到的是正交异性壳体,它具有多个不同方向的刚度。

联方网壳展开投影图如 4.1,径向杆系与纬向杆系相互垂直正交,斜向杆系与纬向杆系的夹角为 α 。设径向杆、纬向杆和斜向杆的截面积、惯性矩和间距分别为 A_r 、 A_θ 、 A_c 、 I_r 、 I_θ 、 I_c 和 Δ_r 、 Δ_θ 、 Δ_c , 并设

$$\begin{aligned} E\delta_r &= \frac{EA_r}{\Delta_r}, \quad E\delta_\theta = \frac{EA_\theta}{\Delta_\theta}, \quad E\delta_c = \frac{EA_c}{\Delta_c} \\ D_r &= \frac{EI_r}{\Delta_r}, \quad D_\theta = \frac{EI_\theta}{\Delta_\theta}, \quad D_c = \frac{EI_c}{\Delta_c} \end{aligned} \quad (4.1)$$

式中 δ_r 、 δ_θ 、 δ_c 、 D_r 、 D_θ 、 D_c 表示相应杆系在自身方向的等效厚度和抗弯刚度。 E 为材料的弹性模量。则网壳连续化后的等效薄膜刚度与抗弯刚度可表示为:

$$\begin{aligned} B_{rr} &= E(\delta_r + 2\delta_c \sin^4 \alpha), \quad D_{rr} = D_r + 2D_c \sin^4 \alpha \\ B_{\theta\theta} &= E(\delta_\theta + 2\delta_c \cos^4 \alpha), \quad D_{\theta\theta} = D_\theta + 2D_c \sin^4 \alpha \\ B_{r\theta} &= B_{\theta r} = B_{\theta\theta} = 2E\delta_c \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ D_{r\theta} &= D_{\theta r} = D_{\theta\theta} = 2D_c \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (4.2)$$

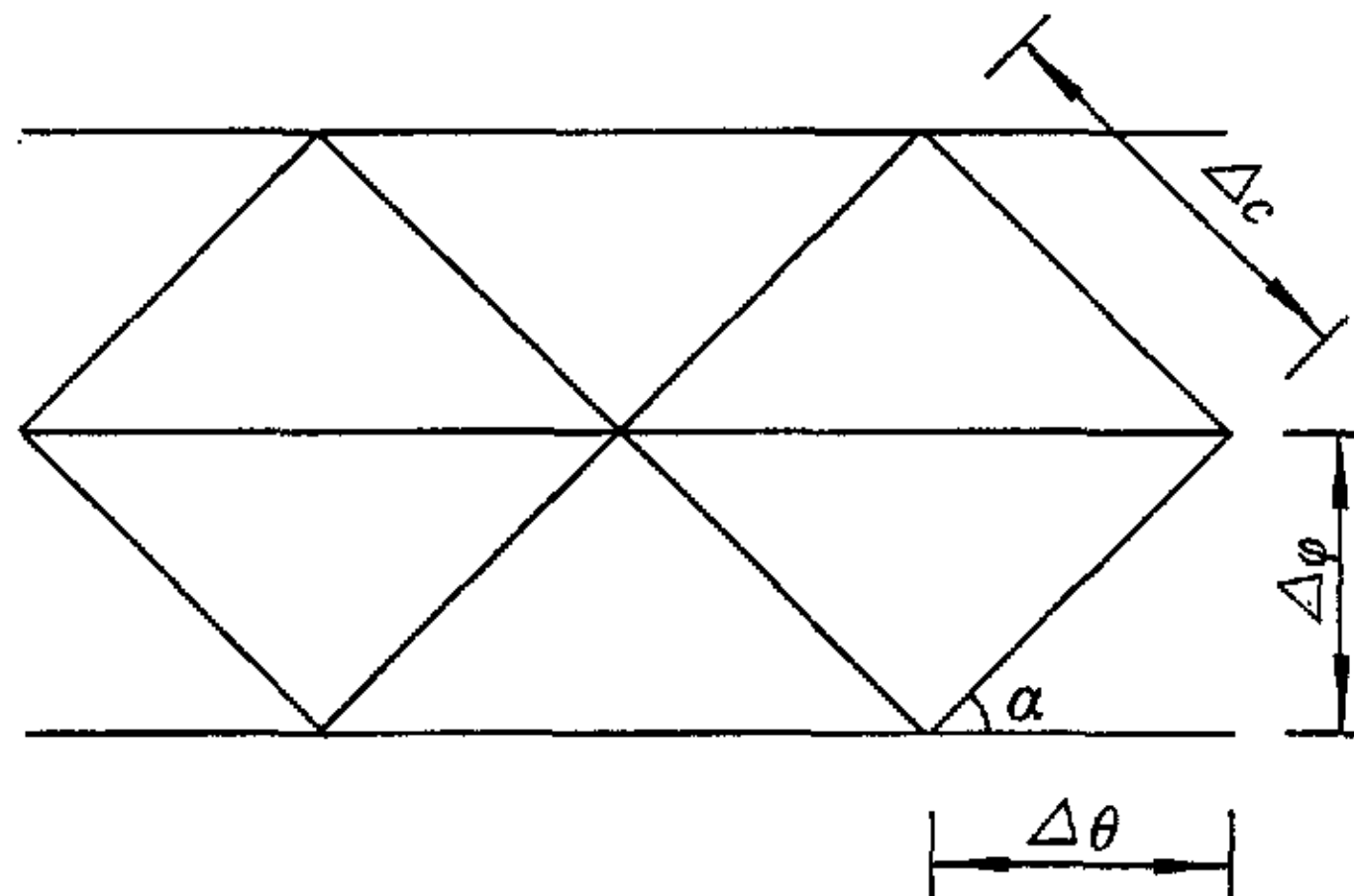


图 4.1 折算刚度简图

Fig 4.1 Simplification figure of reduced stiffness

这里假定杆系的抗扭刚度很小，可忽略不计。由此可见，联方球壳壳认为是正交异性的。

4.2 回归分析的概念^[51]

在所研究的问题中，各物理量之间常存在一定的关系。有的是确定性的，有的是不确定性的，通过大量的观察或试验后，往往能呈现出较为明显的规律性。对变量间的这种统计关系的研究分析就称为“回归分析”。回归分析的主要任务就是寻求非确定性联系的统计关系，然后通过统计关系，可以从一个或几个变量所取的值有效地估计另一随即变量的值。

回归可分为线性回归和非线性回归；一元回归和多元回归。

$$\text{回归分析} \begin{cases} \text{线性回归分析} \begin{cases} \text{一元线性回归} \\ \text{多元线性回归} \end{cases} \\ \text{非线性回归分析} \begin{cases} \text{一元非线性回归} \\ \text{多元非线性回归} \end{cases} \end{cases}$$

一元线性回归是最基本的一种，它处理两个变量间的关系是线性的情况。数学模型为：

$$\begin{cases} Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \\ \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \end{cases} \quad (4.3)$$

式子(4.3)称为一元正态线性回归模型，习惯上仍称为一元线性回归模型。模型中 β_0 , β_1 , σ^2 是与 x 无关的未知常数（待估参数）。

$$\hat{Y} = E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (4.4)$$

式子(4.4)称为（一元线性）回归方程或回归函数，斜率 β_1 称为回归函数。

对于模型(4.3)，我们用最小二乘法来估计模型中的未知参数 β_0 , β_1 。假设有关于 x , Y 的 n 对独立观测值 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$ 。则由(4.3)有

$$\begin{cases} Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i=1, 2, \dots, n \text{ 相互独立} \end{cases} \quad (4.5)$$

我们的目标是由这 n 对数据 (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$ 来推测未知的回归函数 $\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 x$ 。我们考虑 β_0 , β_1 可以任意变动的直线组 $\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 x$ ，并且希望从直线组中确定出其中一条直线 L : $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ ，使这 n 个散点同直线 L 平均说来最为“接近”，我们就用直线 L 所对应的 $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ 作为未知的回归函数 $\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 x$ 的估计，即 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 分别作为截距 β_0 斜率 β_1 的估计。

记直线 L 上对应横坐标 x_i 的点为 (x_i, \tilde{y}_i)

$$\tilde{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_i \quad (4.6)$$

实测值 y_i 与 \tilde{y}_i 的差的绝对值

$$|y_i - \tilde{y}_i| = |y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)| \quad (4.7)$$

表示点 (x_i, y_i) 沿 y 轴方向到 L 的偏离, 如图 4.2 上各竖直短线所示。考虑所有偏离的平方和, 记为

$$Q = Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)]^2 \quad (4.8)$$

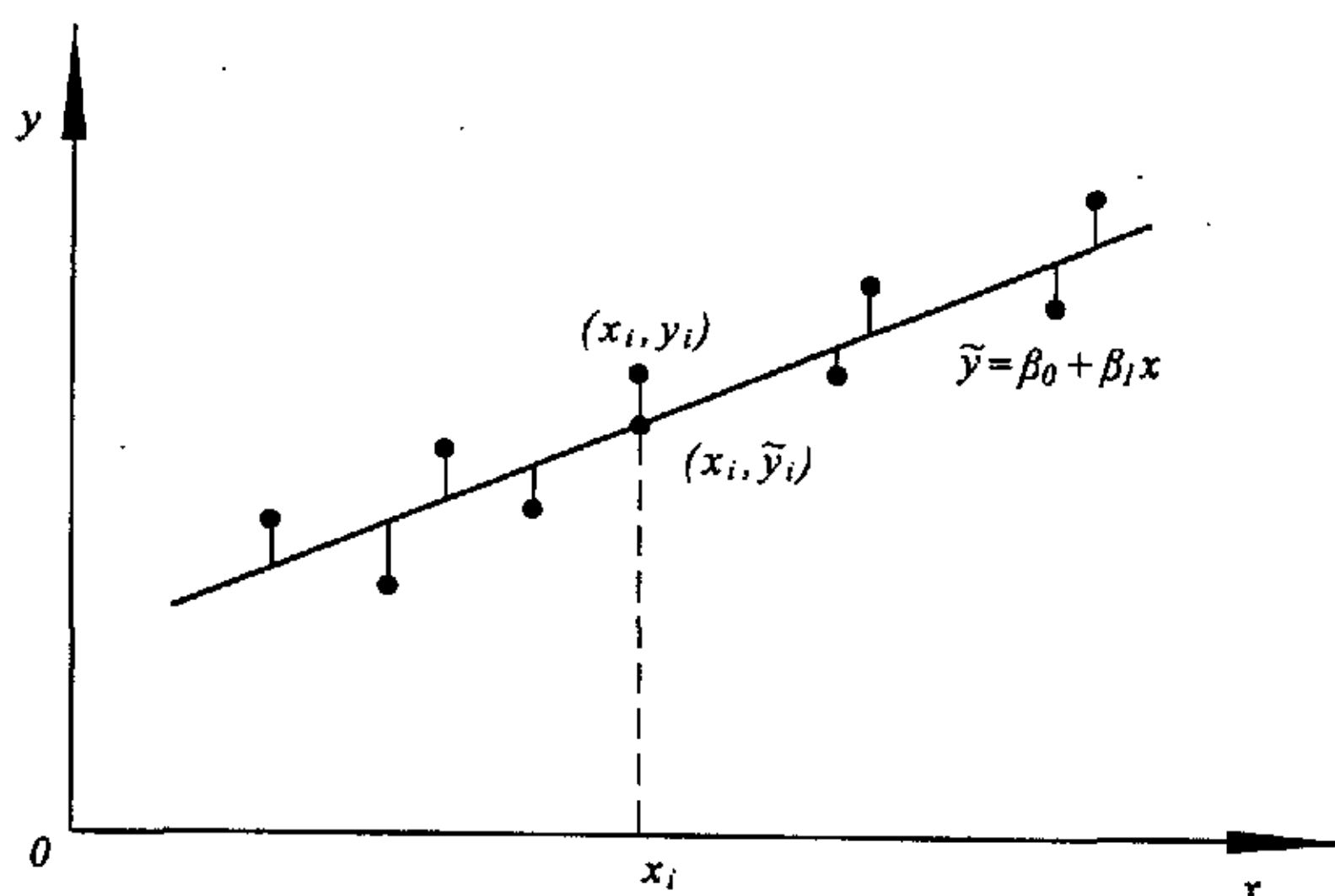


图 4.2

称 $Q(\beta_0, \beta_1)$ 为偏离真实直线的偏差平方和, 它是 β_0, β_1 的函数 (因对于不同的直线 L , Q 值时不同的)。最小二乘法就是要选择 β_0, β_1 的估计 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 使

$$Q(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \min_{-\infty < \beta_0, \beta_1 < \infty} Q(\beta_0, \beta_1) \triangleq Q_{\min} \quad (4.9)$$

为此, 求 Q 关于 β_0, β_1 的偏导数 $\frac{\partial Q}{\partial \beta_0}, \frac{\partial Q}{\partial \beta_1}$, 并令它们为零, 即有

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)] = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)] x_i = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

得方程组

$$\begin{cases} n\beta_0 + (\sum_{i=1}^n x_i)\beta_1 = \sum_{i=1}^n y_i \\ (\sum_{i=1}^n x_i)\beta_0 + (\sum_{i=1}^n x_i^2)\beta_1 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (4.11)$$

式子 (4.11) 称为正规方程组

记

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ \bar{x}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

并将方程组 (4.11) 中得每个方程两边除以 $\frac{1}{n}$ 得

$$\begin{cases} \beta_0 + \bar{x}\beta_1 = \bar{y} \\ \bar{x}\beta_0 + \bar{x}^2\beta_1 = \overline{xy} \end{cases} \quad (4.13)$$

解此方程组得

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad (4.14)$$

或

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.15)$$

及

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (4.16)$$

使偏差平方和 Q 达到最小值的 $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ 称为参数 β_0 , β_1 的最小二乘法估计 (Least Squares Estimation) 简称 LS 估计。这种得到参数估计的方法就称为最小二乘法。于是我们由这种方法得到经验回归直线方程

$$\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (4.17)$$

或

$$\hat{Y} = \bar{y} + \hat{\beta}_1 (x - \bar{x}) \quad (4.18)$$

回归方程在一定程度上揭示了两个相关变量 x , Y 之间的内在联系, 但仔细研

究得到回归方程公式的过程就会发现, 首先并没有事先断定这两个变量之间的一定具有相关关系, 式(4.3)只是一种假设。另外就方法而言, 我们对平面上一堆散点来配一条拟合他们最好的直线, 哪怕是一堆扎乱无章的散点也可以用最小二乘法来得到这样一条直线, 显然此时所配这条直线是毫无实际意义的。因此, 我们自然要进一步探讨什么情况下所拟合的回归直线才有意义? 所以在求出回归方程后, 还需要对这种回归方程同实际数据拟合的效果进行检验。

我们首先研究因变量 Y 的变化规律, 从离差平方和

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (4.19)$$

可以看出 y 的 n 次观察值 $y_i, i=1, 2, \dots, n$ 的波动情况, 说明 y_i 的波动越大即越分散, 这种波动是由哪些因素造成的? 从 l_{yy} 的分解中可以得到解答。

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i, i=1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} l_{yy} &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i + \hat{y}_i - \bar{y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}) \\ \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n [y_i - (\bar{y} + \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x}))](\bar{y} + \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x}) - \bar{y}) \\ &= \sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}) - \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x})][\hat{\beta}_1(x_i - \bar{x})] \\ &= \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})] - \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0 \end{aligned}$$

故

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (4.20)$$

记

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad U = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (4.21)$$

即

$$l_{yy} = Q + U \quad (4.22)$$

现在进一步来分析 U 和 Q 的含义。

对于 $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$, 它是经验回归直线上对应于自变量 x_i 的纵坐标, 且

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} = \bar{y}$$

即 $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ 的平均值也是 \bar{y} 。因此 $U = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ 就反应了 $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ 这 n

个数的偏差平方和, 描述了 $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ 的分散程度。而这分散性来源于 x_1, x_2, \dots, x_n

的分散性 (因它们都是在同一直线上对应于 x_i 的各个点的纵坐标) 且与斜率 $\hat{\beta}_1$ 有关, 这由

$$U = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n [\bar{y} + \hat{\beta}_1 (x_i - \bar{x}) - \bar{y}]^2 = \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \hat{\beta}_1^2 l_{xx} \quad (4.23)$$

即可以看出, $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 不变, $\hat{\beta}_1$ 越大 (直线较陡) U 就会越大。因 U 是直线回归直线上点的纵坐标的离差平方和, 称为回归平方和。

而

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2 \quad (4.24)$$

就是我们在前面提到的扣除了 x 对 y 的线性影响后由随机误差所产生的平方和, 称为残差平方和。

式子 (4.22) 表明 l_{yy} 分解成由 x 对 y 的线性相关关系而引起的 y 的分散性以及剩余部分引起的 y 的分散性, 即回归平方和 U 及残差平方和 Q 。因此 U 在 l_{yy} 中占的比率越大 (Q 占的比率越小), 表明回归的效果越显著。而

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}} \sqrt{l_{yy}}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (4.25)$$

就是反映这种线性关系效果的量, 事实上, U 在 l_{xx} 的比率

$$\frac{U}{l_{yy}} = \frac{\hat{\beta}_1 l_{xx}}{l_{yy}} = \left(\frac{l_{xy}}{l_{xx}} \right)^2 \frac{l_{xx}}{l_{yy}} = \frac{l_{xy}^2}{l_{xx} l_{yy}} = r^2 \quad (4.26)$$

即 r^2 就代表了回归平方和 U 的总离差平方和 l_{yy} 的比率, 称 r 为相关系数。

因 $U \geq 0, Q \geq 0, U \leq l_{yy}$, 由式 (4.26) 知 $0 \leq r^2 \leq 1, 0 \leq |r| \leq 1$ 。

1. 当 $r=0$ 时, $l_{xy}=0$, 则 $\hat{\beta}_1=0$, 此时回归直线平行于 x 轴, 表明 y 的变化与 x 无关, x 与 y 毫无线性关系。通常散点的分布是杂乱无章的。

2. $0 < |r| < 1$, 这是绝大多数情况, 表明 x 与 y 存在着一定的线性关系, r 越接

近 0, x 与 y 的线性越微弱, 散点越分散, 离回归直线越远。当 $|r|$ 越接近 1, x 与 y 线性关系越强, 散点越靠近回归直线。 $r > 0$ 则 $\hat{\beta}_1 > 0$, 此时称 x 与 y 正相关; $r < 0$ 则 $\hat{\beta}_1 < 0$, 此时称 x 与 y 负相关。

3. 当 $|r| = 1$ 时, $U = l_y, Q = 0$, 所有的点都在回归直线上, 此时 x 与 y 存在着确定的线性关系——完全线性相关。

多元线性回归的分析原理与一元线性回归完全相同, 只是研究的是多个变量之间的关系, 计算较为复杂, 数学模型为

$$\begin{cases} Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon \\ \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \end{cases} \quad (4.27)$$

同样采用最小二乘法求未知参数 β 的估计量。

实际问题中, 两个变量之间并非线性关系, 而是某种曲线 (或非线性) 的相关关系, 数学模型的确定是较困难的。目前, 非线性回归都是将自变量和因变量作适当的变换, 将其化为线性回归来求解。

4.3 拟合公式的形式

从实用角度出发, 如能用连续化理论推导出简单实用的解析公式自然是很理想的, 但由于该方法复杂繁琐, 精确度和通用性差, 要想得到能考虑各种因素且具有一定精度的解析解是很困难的。从精确性角度出发, 网壳稳定性最理想的办法是运用计算机进行荷载——位移全过程分析, 从荷载——位移全过程分析中考察结构的稳定性问题, 但这种方法不易为一般设计部门所掌握, 要正确灵活运用所提供的程序也需要较高的理论素质和熟练的计算技术。为了能提供给大家一个可以接受的实用方法, 本文采取了回归分析的方法利用大量荷载——位移全过程分析的结果, 综合各种因素对单层球面网壳稳定承载力的影响规律, 提出了网壳稳定承载力的实用拟合公式。通过参考有关资料文献[8, 10, 14, 22, 45, 46]反复试验比较后, 在不考虑非荷载对称和初始缺陷影响的情况下, 建立的数学模型如下:

$$q_{\sigma} = \alpha \frac{\sqrt{BD}}{R^2} \quad (4.28)$$

其中: D : 网壳折算抗弯刚度

B : 横向薄膜刚度

R : 网壳曲率半径

α : 待定系数, 由回归分析来确定

公式中的控制参数代表了上一章的截面刚度、结构矢跨比、跨度等因素, 不同杆件截面表现在结构的等代刚度 \sqrt{BD} , 而跨度和矢跨比则表现在球面的曲率半径 R 上。当考虑初始缺陷和不对称荷载的影响时, 公式 (4.28) 的系数 α 前还应该

乘以初始缺陷影响系数和不对称影响系数。

4.4 拟合公式的确定

4.4.1 理想网壳的拟合公式

采用拟合公式 (4.28), 对 32 个理想网壳在对称荷载作用下的极限荷载承载力进行回归分析, 得到系数 $\alpha = 2.6227$; 因此单层联方理想网壳极限承载力的拟合公式为

$$q_{cr} = 2.6227 \frac{\sqrt{BD}}{R^2} \quad (4.29)$$

整个公式的回归相关系数为 98.324%。

在表 4.1 中, 我们用 32 个理想网壳的全过程分析结果对公式 (4.29) 进行了

表 4.1 理想网壳的全过程 q_{cr} 与公式 (4.29) q_{cr} 的比较

Table 4.1 Comparison q_{cr} of whole process of perfect structure with q_{cr} of formula(4.29)

截面	跨度(m)	40				50			
	矢跨比	1/5	1/6	1/7	1/8	1/5	1/6	1/7	1/8
1 号截面	q_{cr}	14.430	11.055	8.637	6.200	15.291	11.681	9.110	7.256
	q_{cr} 全过程	16.889	12.256	9.367	6.016	15.302	12.821	9.177	6.603
	误差 (%)	-14.559	-9.797	-7.794	3.053	-0.078	-8.895	-0.729	9.896
2 号截面	q_{cr}	20.568	15.757	12.311	8.837	16.898	12.909	10.068	8.019
	q_{cr} 全过程	19.515	16.985	12.833	8.537	16.753	13.079	10.457	7.309
	误差 (%)	5.400	-7.229	-4.073	3.519	0.867	-1.305	-3.721	9.717
3 号截面	q_{cr}	23.267	17.825	13.926	9.997	20.750	15.851	12.363	9.847
	q_{cr} 全过程	21.785	18.888	13.932	9.51	20.31	15.776	11.27	9.063
	误差 (%)	6.807	-5.630	-0.042	5.119	2.167	0.477	9.697	8.646
4 号截面	q_{cr}	28.697	21.984	17.176	12.330	25.449	19.441	15.162	12.077
	q_{cr} 全过程	26.68	22.884	17.452	11.598	25.838	21.776	14.471	10.981
	误差 (%)	7.561	-3.391	-1.581	6.312	-1.506	-10.720	4.778	9.978

注: 表中误差 = $\frac{q_{cr} - q_{cr}(\text{全过程})}{q_{cr}(\text{全过程})} \times 100\%$

验证,可以看出公式(4.29)的误差绝大多数在10%以内(超过10%的都是负值,是偏于安全的)。从实用角度考虑,如果按偏于安全的要求(保证95%)进行调整,则拟合公式为

$$q_{cr} = 2.3311 \frac{\sqrt{BD}}{R^2} \quad (4.30)$$

4.4.2 考虑各种因素的网壳的拟合公式

如前几章所分析,可以看出球面网壳对荷载的不对称分布并不十分敏感。当以 $p+g$ 来定义极限荷载时,结构的稳定承载力随 p/g 的增大总体呈下降趋势,但下降缓慢。定义 k_1 为荷载非对称分布时极限荷载是荷载对称分布时极限荷载多少的降低系数,利用回归分析的方法拟合公式来反映各种非对称荷载比例对网壳稳定承载力的影响(只分析了理想网壳的情况)。用MATLAB软件回归得到

$$k_1 = -0.3678(p/g)^3 + 0.7269(p/g)^2 - 0.5771(p/g) + 1.0000 \quad (4.31)$$

误差基本在10%左右,详见表4.2。

表3.12~表3.15给出了考虑初始缺陷网壳在对称荷载及不对称荷载作用下,网壳稳定承载力相对于对应情况下未考虑初始缺陷网壳稳定承载力的比值,利用其数据回归得到初始缺陷影响系数

$$k_2 = 0.6409(p/g)^3 - 0.6546(p/g)^2 - 0.1613(p/g) + 0.5935 \quad (4.32)$$

表3.16~表3.18给出了考虑初始缺陷网壳在不对称荷载作用下,网壳稳定承载力相对于理想网壳稳定承载力的比值,利用其数据回归得到同时考虑初始缺陷和不对称荷载影响系数

$$k_3 = -0.5912(p/g)^3 + 1.2695(p/g)^2 - 0.9520(p/g) + 0.5935 \quad (4.33)$$

表4.3列出了在 $p/g=0, 1/4, 1/2, 1$ 情况下单独考虑不对称荷载作用、单独考虑初始缺陷和同时考虑不对称荷载初始缺陷时的网壳极限荷载降低程度。从中可以看出 k_3 和 $k_1 \times k_2$ 相差很小。这说明初始缺陷与不对称荷载作用对网壳的极限承载力影响耦联不明显。

表 4.2 k_1 和公式 (4.31) k_1 的比较Table 4.2 Comparison k_1 with k_1 of formula(4.34)

	截面	跨度(m)	40				50			
		矢跨比	1/5	1/6	1/7	1/8	1/5	1/6	1/7	1/8
$p/g=0.25$ 公式 $k_1=0.8956$	1 号 截面	k_1	0.8357	0.8257	0.8216	0.9956	0.9662	0.8329	0.876	0.9184
		误差 (%)	-7.165	-8.463	-9.004	10.046	7.309	-7.525	-2.235	2.485
	2 号 截面	k_1	1.0699	0.8288	0.8385	0.9842	0.9539	0.8923	0.8316	0.8918
		误差 (%)	16.293	-8.057	-6.807	9.004	6.114	-0.367	-7.693	-0.424
	3 号 截面	k_1	0.9725	0.8242	0.8498	0.9829	0.96	0.8717	0.9302	0.822
		误差 (%)	7.91	-8.66	-5.387	8.884	6.711	-2.739	3.722	-1.539
	4 号 截面	k_1	0.9154	0.8216	0.8278	0.9798	0.909	0.7617	0.8802	0.9059
		误差 (%)	2.165	-6.351	-8.188	8.596	1.477	-17.576	-1.747	1.139
$p/g=0.5$ 公式 $k_1=0.8479$	1 号 截面	k_1	0.7873	0.8591	0.7698	0.9672	0.9313	0.7945	0.8198	0.8693
		误差 (%)	-7.694	1.307	-10.142	12.337	8.958	-6.718	-3.425	2.465
	2 号 截面	k_1	0.9041	0.7978	0.7721	0.9678	0.9294	0.8534	0.7294	0.8564
		误差 (%)	6.219	-6.277	-9.814	12.392	8.772	0.647	-16.243	0.995
	3 号 截面	k_1	0.8323	0.7998	0.8431	0.9834	0.9042	0.8444	0.8912	0.8254
		误差 (%)	-1.871	-6.011	-0.566	13.781	6.229	-0.412	4.861	-2.723
	4 号 截面	k_1	0.8231	0.8165	0.8326	1.003	0.8537	0.735	0.8381	0.8664
		误差 (%)	-3.01	-3.843	-1.835	15.466	0.682	-15.357	-1.166	2.138
$p/g=1.0$ 公式 $k_1=0.7847$	1 号 截面	k_1	0.6997	0.8686	0.6868	0.8188	0.7767	0.7475	0.7796	0.7764
		误差 (%)	-12.148	9.659	-14.255	4.165	-1.03	-4.977	-0.654	-1.069
	2 号 截面	k_1	0.8536	0.6927	0.6914	0.8091	0.8525	0.8066	0.7448	0.7849
		误差 (%)	8.072	-13.281	-13.494	3.016	7.953	2.715	-5.357	0.025
	3 号 截面	k_1	0.8239	0.7301	0.7117	0.8532	0.8867	0.8021	0.832	0.7725
		误差 (%)	4.758	-7.478	-10.257	8.029	11.503	2.169	5.685	-1.579
	4 号 截面	k_1	0.7995	0.7144	0.7657	0.8371	0.8238	0.7051	0.7956	0.7801
		误差 (%)	1.851	-9.48	-2.481	6.26	4.476	-11.289	1.37	0.59

注: 表中误差 = $\frac{k_1 - \text{公式}k_1}{\text{公式}k_1} \times 100\%$

表 4.3 影响系数 k_1 、 k_2 、 k_3 的比较Table 4.3 Comparison influence coefficient k_1 with k_2 with k_3

p/g	k_1	k_2	k_3	$k_1 \times k_3$
0	1.0000	0.5935	0.5935	0.5935
0.25	0.8956	0.5223	0.4274	0.4678
0.5	0.8479	0.4293	0.3678	0.3640
1	0.7847	0.4185	0.3469	0.3284

当考虑初始缺陷和不对称荷载影响时, 实际单层联方球面网壳的极限承载力可按以下的拟合公式计算:

$$q_{cr} = 2.3311k_3 \frac{\sqrt{BD}}{R^2} \quad (4.34)$$

注: 系数 k_3 见公式 (4.33)

4.5 在设计中应用上述回归公式时尚需注意的几个问题

(1) 本文仅考虑了基本部分均假定支座为固接。实际工程中也可能遇到接近铰支座的情形, 如采用某些适当转动的支座构造或下部支承结构刚度不足的情形。

(2) 从精确的计算模型来看, 本文结构模型应将下面两个问题考虑在内:

- ①连接刚度;
- ②构件的弹塑性特性。

对于①, 由于本文的单层网壳模型结点时刚性连接的, 而在实际中结点可能不完全刚接; 对于②, 本文的方法未将构件的弹塑性性能考虑在内, 即仅考虑了几何非线性的全过程分析方法, 而暂时没有考虑材料非线性的影响。所以, 在必要和可能时, 在设计和今后的研究中要考虑上述两个因素。

(3) 从可靠度方面考虑, 由于存在材料和荷载本身变异性等可能削弱结构临界荷载的因素, 也考虑到上面第二点的讨论。故用式 (4.34) 所求得的极限荷载尚须考虑一定的安全系数。

5 结论与展望

5.1 论文的主要结论

本论文的目的在于了解单层联方球面网壳的稳定性能,作为实际工程的参考。通过变化跨度、矢跨比及杆件截面等参数,考虑了对称荷载、不对称荷载和初始缺陷等因素对网壳稳定承载力的影响,对所得结果进行统计、分析和归纳,发现许多规律,最后拟合出单层联方网壳稳定设计的实用公式。通过本文研究,得到如下结论:

1、单层联方球面网壳表现出良好的空间工作性能,适用于大跨度工程。荷载传力点较多,充分发挥了结构的三维受力特性,从受力角度来说避免了不必要的荷载重复传递,大大减轻了结构的自重同时内力分布比较均匀,具有良好的受力合理性。

2、综观所有情况,当单层球壳发生失稳现象时,结构的最大位移都很大。当理想球面网壳达到第一个临界点时,位移一般不超过跨度的 $1/300$ 。结构在处于临界状态前,早已呈现出较强的几何非线性。

3、其屈曲均从主肋结点开始,一般是个别杆件先于整体屈曲,随即形成塑性区域而导致整个网壳屈曲。

4、理想网壳极限承载力随截面等效刚度 \sqrt{BD} 大致呈线性关系。

5、在结构的平面尺寸、杆件布置、杆件截面和支承条件不变的情况来研究矢跨比对结构临界荷载的影响,曲线基本上呈线性递增,但微上凸。

6、荷载不对称分布对它的极限荷载影响不大,但本文的大部分情况都使结构的临界力有所降低,建议设计中应对非对称荷载作用下的情况进行验算。从实用角度考虑,以 $p+g$ 为荷载指标,荷载非对称分布引起单层球面网壳极限荷载的降低,降低系数为 $k_1 = -0.3678(p/g)^3 + 0.7269(p/g)^2 - 0.5771(p/g) + 1.0000$ 。

7、初始缺陷 r 确实降低了网壳的极限承载力,初始缺陷与其他参数对网壳的极限承载力影响耦联不明显。

8、从计算结果可知,在影响网壳屈曲荷载的众多因素中,杆件刚度、壳体的矢跨比以及初始几何缺陷的影响最大。

9、通过线性回归分析,得出单层联方网壳稳定承载力的拟合公式:

$$q_{cr} = 2.3311k_3 \frac{\sqrt{BD}}{R^2}$$

其中 $k_3 = -0.5912(p/g)^3 + 1.2695(p/g)^2 - 0.9520(p/g) + 0.5935$ 。

10、单层网壳结构的稳定性是控制网壳结构的主要因素，在实际工程设计中应重点考虑。

5.2 拟进一步开展的工作

国内外网壳结构的现状和迅速发展，表明了网壳结构是一类很有活力的、适应性很强的、方兴未艾的空间结构。展望未来，网壳结构的应用和发展前景是非常广阔的，网壳结构分支学科的前沿课题和生长点是多种多样的，它已向广大的结构科技工作者提出了新的挑战。机遇与挑战并存。限于文章研究的时间，还有许多有待展开和深入研究的工作需要后者去归纳分析：

1、网壳结构的体型会更加合理。力求做到结构外形与建筑造型的统一、协调。进行结构学与建筑学的综合研究与开发，设计多种多样的、既受力合理又造型美观的网壳结构工程。

2、通过结构形体优化、力集度法等方法的理论分析和试验研究，合理选取和确定适合于各种平面形状的网壳形体。

3、研究和开发预应力网壳结构，通过采用局部预应力、周边预应力等多种预应力技术，减薄网壳结构的厚度，增加结构刚度，进一步降低材料的耗用量。

4、探索 and 开发巨型网壳结构。巨型网壳的主要杆件可采用格构式组合杆件，也可采用大型宽翼缘的 H 型钢或钢板焊接成型的杆件。在巨型网壳的大网格内可布置一般的网壳或网架，从而形成大网壳中套小网壳的巨型网壳体系。

5、发展、开拓、优化各种以网壳为主体的杂交结构体系，如网壳—拱体系、网壳—网架体系、网壳—悬索体系、网壳—薄膜体系、杆+索+膜协同工作的张拉整体体系（Tensegrity Systems）等。

6、网壳结构下部支承约束对网壳的稳定性能有极大影响，要全面正确的反映上下部结构的共同工作，乃至将网壳结构与下部支承结构作为整体进行非线性稳定分析，值得做进一步研究。

7、研究和确定各类网壳的风载体型系数，为抗风计算提供依据。同时，应研究网壳结构在风载作用下的动力反应、动力稳定性及相应的构造措施。

8、研究大跨度网壳结构在竖向与水平地震作用下（包括地震波在网壳各支承处有相位差时）的抗震分析、结构控制、消振方法与构造措施。

9、进一步具体研究，同时考虑几何、材料两种非线性的全过程分析方法。

10、编制网壳结构功能齐全的分析、计算和 CAD 系统软件（包括自动生成节点坐标和网壳杆件，进行各工况的结构分析与内力组合、结构的优化设计，各

种计算结果的图形输出、绘制网壳施工图、杆件和节点的下料、加工图等), 以满足推广应用和发展网壳结构的需要。

11、网壳结构的优化设计, 给定的跨度和荷载作用下, 使所设计的网壳结构重量最轻, 造价最低。

12、改进和更新网壳结构的加工工艺和设备. 采用计算机程序控制的全自动化生产方法来加工制作节点与杆件. 提高加工精度和生产效率, 降低产品成本与工程造价。研究与开发无脚手架和少脚手架的高空悬挑安装法。

13、改进并发展网壳结构的制造技术和施工方法。使网壳结构的制作生产企业同时承担网壳的设计、研究与开发。

14、研制适用于单层网壳能承受弯矩 (包括主平面内的弯矩, 或双向弯矩与扭矩) 的节点形式与构造。

致谢

本论文的研究工作是在导师李正良教授的精心指导和悉心关怀下完成的。从选题、提纲至定稿，无不倾注着导师辛勤的汗水和心血。导师的严谨治学态度、渊博的知识、无私奉献的精神及对前沿动态的准确把握，令人钦佩不已。从尊敬的导师身上，我不仅学到了扎实、宽广的专业知识，也学到了做人的道理。在此我要向我的导师致以最衷心的感谢和深深的敬意。感谢师母邓璞老师，在思想、生活和学习上给我的关心和鼓励。师恩无尽，我将终生铭记！

真诚感谢在日常生活和学习过程中给予帮助的所有老师和同学。在此特别感谢晏致涛师兄和段红霞、孙毅、汪之松、以及张琳在论文上给予的帮助。

感谢父母的养育之恩以及对我学业的鼎力支持！感谢舅舅、姐姐、哥哥、弟弟等亲友长期给我的支持和关爱！并祝他们身体健康，万事顺心。

衷心感谢在百忙之中评阅论文和参加答辩的各位专家、教授。

张春丽

2004年5月于重庆

参考文献

- [1] 中华人民共和国行业标准, 网壳结构技术规程, JGJ61-2003, J258-2003.
- [2] [美] A. 查杰斯著, 唐家祥译, 吴鸿庆校. 结构稳定性理论原理[M], 甘肃人民出版社 1998.
- [3] 中华人民共和国国家标准, 钢结构工程施工质量规范 GBJ50205-2001.
- [4] 沈世钊, 网壳结构的稳定性[J]. 土木工程学报. 1999.32 (6): 11-25
- [5] E. Riks. An Incremental Approach to the solution of Snapping and Bucking Problems. Int. J. Solid Structures, 1979 (15): 525—551
- [6] E. Ramn, strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points, Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, 1981
- [7] M. A. Crisfield, An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations, Int. J. Num. Mech.Eng, 1983 (19): 1269-1289
- [8] 尹德珏, 刘善维, 钱若军, 网壳结构设计[M]. 中国建筑工业出版社, 1996
- [9] 吴剑国, 张其林, 网壳结构稳定性的研究进展[J], 空间结构, 2002.8 (1): 10-18
- [10] 沈世钊, 陈昕, 网壳结构稳定性[M]. 北京. 科学出版社, 1998.12.
- [11] 沈祖炎, 钢结构稳定计算原理的现状与发展趋势[J], 同济大学学报. 1994, 22: 1-9
- [12] 胡学仁, 穹顶网壳的稳定计算[A]. 第四届空间结构学术会议论文集[C]. 1988: 525-524
- [13] 董石麟, 网状球壳的连续化分析方法[A]. 第四届空间结构学术会议论文集[C]. 1988: 525-524
- [14] 钱若军, 网壳结构设计临界荷载及安全系数[J]. 建筑结构学报. 1995.16 (3): 44-51, 58
- [15] 袁行飞, 董石麟, 索穹顶结构几何稳定性分析[J], 空间结构. 1999.5 (1): 3-9
- [16] 沈世钊, 陈昕, 林有军, 汤建南, 单层球面网壳的稳定性[J]. 空间结构. 1997.3 (3): 3-12
- [17] 郭海山, 沈世钊, 蒋晓莹, 白翔, 弹性支承单层柱面网壳稳定性[J]. 空间结构. 2002.8 (2): 26-30
- [18] 罗永峰, 沈祖炎, 胡学仁, 单层网壳结构弹塑性稳定分析[A]. 新型空间结构论文集[C]. 浙江大学出版社. 1994.
- [19] 王娜, 陈昕, 沈世钊, 网壳结构弹塑性大位移全过程分析[J]. 土木工程学报, 1993.26 (2): 19-28
- [20] Th.von.Karman, A.S.Tsien, The Bucking of spherical Shells by External Pressure, J.Aero.Sci.7, 1939: 43—50
- [21] W. E. Haisler and J.A.Stricklin, Displacement Incrementation in Nonlinear Structural Analysis by the Self-Correcting Method, Int. J.Num Meth.Eng., 1977 (11): 3—10
- [22] 董石麟, 钱若军, 空间网格结构分析理论与计算方法[M], 中国建筑工业出版社. 2000.8.

- [23] 钱若军, 王建, 曾银枝, 网壳结构稳定分析的建模[J], 建筑结构学报, 2003.24 (3): 10-15
- [24] 赵才其, 朱建坤, 赵惠麟, 单层球面网壳非线性稳定分析的近似方法[J], 工业建筑, 1999.29 (11): 70-72
- [25] 陈应波, 陈军明, 李秀才, 单层球面网壳结构的力学性能研究[J], 武汉理工大学学报, 2003.25 (5): 40-49
- [26] 张峰, 沈世钊, 荷载非对称分布对单层柱面网壳稳定性的影响[J], 哈尔滨建筑大学学报, 1998.31 (1): 31-36
- [27] 李存权, 结构稳定和稳定内力[M], 人民交通出版社, 1999.11.
- [28] 杨大地, 谈骏渝, 实用数值分析[M], 重庆大学出版社, 2000.2.
- [29] 朱忠义, 董石麟, 单层穹顶网壳结构的几何非线性跳跃失稳及分歧屈曲的研究[J], 空间结构, 1995.1 (2): 8-17
- [30] 黄为民, 赵惠麟, 具有随机几间缺陷的单层网壳临界荷载的确定[J], 空间结构, 1995.1 (2): 26-32
- [31] 王星, 董石麟, 考虑节点刚度的网壳杆件切线刚度矩阵[J], 工程力学, 1999.16 (4): 24-32
- [32] 李红明, 吴剑国, 两种网壳极限承载力计算方法的比较[J], 华东船舶工业学院学报 (自然科学版), 2002.16 (1): 12-16
- [33] 郎婷, 孙炳楠, 网壳结构的非线性分析[J], 工程设计 CAD 与智能建筑, 2002 (4): 40-43
- [34] 董石麟, 姚谏, 网壳结构的未来与展望[J], 空间结构, 1994.1 (1): 3-10
- [35] 贺拥军, 董石麟, 网壳结构平衡路径全过程跟踪的新策略[J], 工业建筑, 2000.30 (12): 51-53
- [36] 沈世钊, 大跨空间结构理论研究和工程实践[J], 中国工程科学, 2001.3 (3): 34-41
- [37] 姜国梁, 大矢跨比单层球面网壳性能分析, 天津大学硕士论文, 2001.
- [38] 尹越, 刘兴业, 刘锡良, 大跨空间网壳结构稳定分析[J], 工程力学增刊, 1996: 523-526
- [39] 符立勇, 大跨度空间结构——网壳结构[J], 建筑, 2002 (11): 50-52
- [40] 马剑, 徐国彬, 单层球面网壳结构的性能研究[J], 工程力学增刊, 1999: 861-867
- [41] 陈建飞, 宋伯铨, 童竞昱, 单层网壳的非线性稳定分析[J], 浙江大学学报 (自然科学版), 1990.24 (1): 136-144
- [42] 关富玲, 高博青, 李黎, 单层网壳的稳定分析[J], 工程力学, 1996.13 (3): 93-104
- [43] 陈昕, 沈世钊, 网壳结构的几何非线性分析[J], 土木工程学报, 1990.23 (3): 47-57
- [44] 钱若军, 李亚玲, 网壳结构非线性稳定分析研究[J], 河海大学学报, 1992.20 (5): 41-47
- [45] 刘鹏远, 两端支承单层柱面网壳非线性稳定参数分析, 哈尔滨建筑大学硕士论文, 1998.
- [46] 张年文, 单层肋环形球面网壳的强度和稳定性分析, 浙江大学硕士论文, 2003.
- [47] 易日等, 使用 ANSYS6.1 进行结构力学分析[M], 北京: 北京大学出版社, 2002.
- [48] 谭建国, 使用 ANSYS6.0 进行有限元分析[M], 北京: 北京大学出版社, 2002.

-
- [49] 丁皓江, 弹性与塑性力学中的有限元方法[M]. 北京: 机械工业出版社. 1989.
- [50] 王勖成, 邵敏, 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社. 1997.
- [51] 蒋承仪, 数理统计[M]. 重庆: 重庆大学研究生教材. 2001.

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得重庆大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：张希明 签字日期：2004年6月2日

学位论文授权使用授权书

本学位论文作者完全了解重庆大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权重庆大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

保密（☐），在 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密（☒）。

（请只在上述一个括号内打“√”）

学位论文作者签名：张希明

导师签名：

李正良

签字日期：2004年6月2日

签字日期：2004年6月2日