摘 要

本文主要研究密群和正则密群的性质，结构和正则密群上的同余. 全文共分五章.

第一章给出完全正则半群的一些基本概念和性质，同时固定本文经常使用的符号.

第二章展开关于密群，正则密群和正规密群等的讨论. 包括利用 Green 关系和其它等价关系对密群进行刻画；用左 (右) 平移及同态对 (正则，正规) 密群进行刻画；从簇的角度刻画密群；利用偏序关系对密群进行等价刻画. 最后我们介绍局部左正则纯正密群簇所满足的等式.

在比较充分地讨论密群之后，第三章利用左右正则带和一族群及群之间的同态构造正则密群.

第四章给出密群的构造定理. 首先利用带和一族群及群之间的同态构造了密群，然后刻画密群之间的同态.

第五章首先给出了正则密群的同余的结构. 利用半格和完全单半群上的同余及完全单半群的同态刻画了正则密群的同余. 然后刻画正则密群上的最小纯正同余.

关键词: 密群；正则密群；同态；同余；簇

MR(2000) **分类号**: 20M10

中图分类号: O152.7

Abstract

This Ph.D disertation consists of five chapters. We study properties and constructions of (regular) cryptogroups and congruences on regular cryptogroups.

Some definitions and properties for completely regular semigroups are proposed in Chapter 1. And then, we fix some notation which is used later.

The aim of Chapter 2 is to character cryptogroups and regular(normal) cryptogroups using Green relations and other equivalent relations, left(right) translation and homomorphisms, some partial relations and variety. Finally, an identity for locally left regular orthocryptogroups is introduced.

After investigating properties of cryptogroups and regular cryptogroups, in Chapter 3, we construct regular cryptogroups by left and right regular bands, a family of groups and homomorphisms.

Chapter 4 is devoted to construct cryptogroups. Using bands and a family of groups and homomorphism between groups, we charactered constructions of cryptogroups. As an application, homomorphisms between cryptogroups are studied.

We investigated congruences on regular cryptogroups in the final chapter. By congruences on semilattices and completely simple semigroups and homomorphism $\theta_{\alpha,\beta}$ of completely simple semigroups, congruences on regular cryptogroups are charactered. And then, we give the least orthodox congruence on regular cryptogroups.

Keywords: Cryptogroup; Regular Cryptogroup; Homomorphism; Congruence; Variety

MR(2000)Mathematics Subject Classification: 20M10

致 谢

本文是作者在导师宋光天教授的精心指导下完成的. 在此，我对宋老师表示诚挚的谢意. 正当我为学习和工作感到迷茫的时候，有幸成为宋老师的学生并承蒙他三年的指导，鼓励和爱护. 宋老师渊博的学识，严谨的教风和求真务实的科研精神深深地影响着我科大三年的学习和生活并将永远成为我人生的榜样. 宋老师和叶林秀老师对作者的生活给予了无微不至的关怀，作者对此表示最衷心的感谢.

感谢科大数学系的全体老师. 正是他们提供了良好的学习和科研条件，作者才得以顺利完成学业.

感谢郭聿琦教授， K.P.Shum 教授和 Pastijn 教授. 在本论文完成过程中，他们给过作者很多有益的建议.

感谢我的同学朱凤林，张建刚，孟祥芹，范自强，张庆海，储诚浩，李忠华，彭喻振. 在讨论班上他们给过我很多有益的启示.

最后感谢我的家人. 本文凝聚着他们的奉献，理解，鼓励和期待. 我用本文纪念我的父亲.

第0章　引　言

1941 年，Clifford A.H. 在文 [2] 中提出了完全正则半群的概念. 称半群 S 是一个 **完全正则半群**(Completely regular semigroup)，如果它的每个元素都属于 S 的某个极大子群. 所以完全正则半群有时也被称作群并. 这是一类重要的正则半群. 在 [2] 中，Clifford 证明了半群 S 是一个完全正则半群当且仅当 S 是完全单半群的半格. 这给出了完全正则半群 S 的整体结构 $S=\cup_{\alpha\in Y}S_\alpha$, 也就是通常所说的半格结构. 所以完全正则半群 S 通常被表示成 $S=(Y,S_\alpha)$, 其中 Y 是半格，S_α 是完全单半群，$\alpha\in Y$. 1940 年，Rees 在 [23] 中给出了完全单半群的一个优美的 Rees 矩阵表示. 这样，完全正则半群的局部结构也被很好地解决. 接下来的问题是进一步确定 S_α 和 S_β 之间的交互作用，这是一个相当复杂的问题.

Lallement 于 1967 年在 [11] 中给出了完全正则半群的一个置换表示. 设 $S=(Y;S_\alpha)$ 是一个完全正则半群，$a\in S$. $\lambda_a\in \mathcal{PT}'(S)$, $\rho_a\in\mathcal{PT}(S)$. 则 $\chi: a\mapsto(\lambda_a,\rho_a)$ 是 S 到 $\mathcal{PT}'(S)\times\mathcal{PT}(S)$ 的单同态，这里 $\mathcal{PT}'(S)$ 和 $\mathcal{PT}(S)$ 是 S 上的左平移和右平移 (分别作用在左边和右边). 这样，确定完全正则半群 S 的结构，就归结于确定 $\mathcal{PT}'(S)\times\mathcal{PT}(S)$ 的完全正则子半群的结构. 在同一篇文章中，Lallement 还用完全单半群的平移包给出了完全正则半群的一个结构定理.

Warne 于 1973 年在文 [26] 中用群和右零半群的半格及左零半群的半格的一般化的 Schreier 积刻画了完全正则半群.

1974 年，Petrich 在 [17] 中用完全单半群的平移包的 wreath 积表示更细致地刻画了完全正则半群的结构.

前述几个结构定理给出了 S 的完全单半群 S_α 间的交互作用的刻画. 然而，寻找上述结构定理中的结构参数不是一件容易的事情. 对于一些具有某种性质而地位又比较重要的完全正则半群，我们期望给出它们的代数意义比较明确的构造定理.

在完全正则半群中，最重要的两类是密群和纯正群 (参看 [3],[15],[17]). 称一个完全正则半群 S 为 **密群**(Cryptogroup), 如果 S 上的 Green 关系 $\mathcal{H}$

是一个同余. 密群 S 被称为 **正则密群**(Regular cryptogroup)，如果 $S/\mathcal{H}$ 是一个正则带. 而一个密群 S 被称为 **正规密群**(Normal cryptogroup)，如果 $S/\mathcal{H}$ 是一个正规带. 在专著 [15] 中，Petrich 证明了一个完全正则半群 S 是正规密群当且仅当 S 是完全单半群的强半格.

一个完全正则半群 S 是 **纯正群**(Orthogroup)，如果它的幂等元集合构成带. 在文 [17] 中，Petrich 用完全正则半群结构定理中的参数 $\varphi^{a}_{\alpha,\beta}$，$\omega_{\alpha,\beta}$ 和 $\psi_{\alpha,\beta}$ 对完全正则半群进行了分类. 在纯正群中，正规纯正群 (正规纯正密群) 的结构相对简单，它可以被表述为左正规带，Clifford 半群和右正规带的 **织积**(Spined product). 而正则纯正密群是左正则带，Clifford 半群和右正则带的织积. 一般地，纯正密群是一个带和一个 Clifford 半群的织积 [15]. 但是，即使是正规密群 (完全单半群的强半格) 和正则纯正群，也没有相应的织积结构.

1973 年，Yamada 在文 [28] 对正则纯正群的结构做了精彩的刻画. 我们认为有必要在这里复述 Yamada 定理 (参看 [27],[15]).

设 $L=(Y;L_\alpha)$ 是左正则带，$G=(Y;G_\alpha)$ 是 Clifford 半群，$R=(Y;R_\alpha)$ 右正则带. 如果

$$\mathcal{E}'(L)\xleftarrow{\sigma} G\xrightarrow{\tau}\mathcal{E}(R),$$

其中 $\sigma: g\mapsto\sigma_g$，$\tau: g\mapsto\tau_g$ 是满足下列条件的映射:

(1) $\sigma_g L_\beta\subseteq L_{\alpha\beta}$，$R_\beta\tau_g\subseteq R_{\alpha\beta}$，其中 $g\in G_\alpha$.

(2) $\sigma_{1_\alpha}=\lambda_i$，$\tau_{1_\alpha}=\rho_\mu$，其中 $i\in L_\alpha$，$\mu\in R_\alpha$.

(3) $\lambda_i\sigma_g\sigma_h=\lambda_i\sigma_{gh}$，$\tau_g\tau_h\rho_\mu=\tau_{gh}\rho_\mu$，其中 $g\in G_\alpha$，$h\in G_\beta$，$i\in L_{\alpha\beta}$，$\mu\in R_{\alpha\beta}$.

在 $S=\bigcup_{\alpha\in Y}(L_\alpha\times G_\alpha\times R_\alpha)$ 定义乘法 $*$:

$$(i,g,\lambda)*(j,h,\mu)=(i(\sigma_g j),gh,(\lambda\tau_h)\mu).$$

则 S 是一个正则纯正群. 反之，每一个正则纯正群都能如此构造.

在上述定理中，我们看到，正则纯正群 S 已经没有织积结构，而 Clifford 半群 $G=(Y;G_\alpha)$ 通过诱导同态 σ_g 和 τ_h 分别影响左正则带 $L=(Y;L_\alpha)$ 和右正则带 $R=(Y;R_\alpha)$ 的乘法. 上述结构通常被称做半织积结构. 而关于

一般纯正群， Song, Zhang 和 Liu 于 2004 年在 [25] 中给出了它们的一种构造.

综上所述，作为完全正则半群的两个重要子类，密群和纯正群，它们的公共子类，纯正密群是一个带和一个 Clifford 半群的织积，纯正群的构造已被研究，而正规密群是完全单半群的强半格. 但是，即使是正则密群的结构，人们仍然知道不多.

X.Z.Kong 和 K.P.Shum 于 2001 年在 [9] 中用 $\mathcal{J}^*$ 单半群间的一族满足一定条件的同态刻画了正则密半群的结构.

本文主要讨论密群和正则密群，偶有涉及正规密群.

首先，在第二章我们推导了密群和正则密群的一些新性质，包括利用 Green 关系，偏序关系，其他等价关系和同态对它们做等价刻画. 我们还建立了局部左正则密群簇所满足的等式 (定理 2.3.7)：

$$(axy)^0 = (a^0x^0y^0a^0y^0)^0,\ a, x, y \in S.$$

在上述准备工作完成之后，我们给出正则密群的结构. 前面提到，完全正则半群是完全单半群的半格，而正规密群是完全单半群的强半格. 我们有理由推测，正则密群的结构应该介于完全单半群的半格和强半格之间. 设 $S = (Y, S_\alpha)$ 是正则密群，这里 Y 是半格而 $S_\alpha = \mathcal{M}(I_\alpha, G_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha)$ 是完全单半群， $\alpha \in Y$. 如果 $\alpha, \beta \in Y$ 满足 $\alpha \geq \beta$，则

$$\theta_{\alpha,\beta} : S_\alpha \longrightarrow S_\beta,\ x \mapsto x\theta_{\alpha,\beta} = x(xe_\beta x)^0$$

是一个 S_α 到 S_β 的同态. 这个同态诱导出一个群同态

$$\tilde{\theta}_{\alpha,\beta} : G_\alpha \longrightarrow G_\beta, g \mapsto g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}.$$

且可用 $\theta_{\alpha,\beta}$ 刻画正则密群 S 的运算：

$$xy = (xye_{\alpha\beta})^0 x\theta_{\alpha,\alpha\beta} y\theta_{\beta,\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}xy)^0,\ x \in S_\alpha,\ y \in S_\beta.$$

而我们知道，如果 S 是正规半群，则 $xy = x\theta_{\alpha,\alpha\beta}y\theta_{\beta,\alpha\beta}$, 这里 $\theta_{\alpha,\beta}$ 刚好是 S 的强半格结构同态.

利用群同态 $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}$： $G_\alpha \to G_\beta$，我们给出正则密群的结构 (定理 3.1.1).

设 Y 是半格， $I=(Y;I_\alpha)$ 是左正则带， $\Lambda=(Y;\Lambda_\alpha)$ 是右正则带. 对每个 $\alpha\in Y$, 设 $S_\alpha=\mathcal{M}(I_\alpha,G_\alpha,\Lambda_\alpha;P_\alpha)$ 是群 G_α 上的 Rees 矩阵半群，其中 Sandwich 矩阵 P_α 在 $(1_\alpha,1'_\alpha)\in I_\alpha\times\Lambda_\alpha$ 处正规化. 对于任意 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $\alpha\geq\beta\geq\gamma$，记 $u_{\alpha,\beta}(i)=p^{-1}_{1'_\beta 1'_\alpha,i1_\beta}p_{1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta}$, $v_{\alpha,\beta}(\lambda)=p^{-1}_{1'_\beta\lambda,1_\alpha 1_\beta}$. 其中 $i\in I_\alpha,\lambda\in\Lambda_\alpha$. 设 $\tilde\theta_{\alpha,\beta}$ 是 G_α 到 G_β 的同态，且满足下列条件：

(i) $\tilde\theta_{\alpha,\alpha}=1_{G_\alpha}$.

(ii) $\tilde\theta_{\alpha,\beta}\tilde\theta_{\beta,\gamma}=\tilde\theta_{\alpha,\gamma}\varepsilon_{u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)}$.

(iii) $p_{\lambda i}\tilde\theta_{\alpha,\beta}=v_{\alpha,\beta}(\lambda)p_{1'_\beta\lambda,i1_\beta}u_{\alpha,\beta}(i)$, 对任意 $i\in I_\alpha$ 和 $\lambda\in\Lambda_\alpha$.

(iv) $p^{-1}_{\eta,iq}p_{\eta,i1_\beta}x\sigma_{\alpha,\beta}=x\sigma_{\alpha,\beta}p_{1'_\beta\lambda,q}p^{-1}_{\eta\lambda,q}$, 其中 $q\in I_\beta$, $\eta\in\Lambda_\beta$, $x=(i,g,\lambda)\in S_\alpha$, 记

$$x\sigma_{\alpha,\beta}=u_{\alpha,\beta}(i)g\tilde\theta_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(\lambda).$$

若 $x=(i,g,\lambda)\in S_\alpha$, $y=(j,h,\mu)\in S_\beta$, 在 $S=\bigcup_{\alpha\in Y}S_\alpha$ 上定义乘法 $*$:

$$x*y=(ij,x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta},\lambda\mu).$$

则 S 是一个正则密群. 反之，每一个正则密群都能如此构造.

从上述定理能够看到，正则密群有一种半织积结构. 需要指出的是，$\bigcup_{\alpha\in Y}G_\alpha$ 一般不能通过群同态 $\tilde\theta_{\alpha,\beta}$ 构成 Clifford 半群. 但上述结构定理刻画了左右正则带对正则密群第二个坐标的乘法的影响. 作为应用，我们考察了正规密群和左拟正规密群.

在本文的第四章，我们构造密群. 当密群 S 不具有正则性时， $\theta_{\alpha,\beta}$ 已经不是 S_α 到 S_β 的同态. 但它限制到 S_α 的每一个 $\mathcal{H}-$ 类上仍然是一个同态，从而诱导一个群同态，仍用 $\bar\theta_{\alpha,\beta}$ 表示：

$$\bar\theta_{\alpha,\beta}:G_\alpha\longrightarrow G_\beta,g\mapsto g\theta_{\alpha,\beta}.$$

在处理密群时，我们整体刻画带对 S 的第二个坐标的乘法的影响 (定理 4.1.1).

设 Y 是半格， $B=(Y;B_\alpha)$ 是一个带. 对任意 $\alpha\in Y$, 令 $S_\alpha=\mathcal{M}(B_\alpha,G_\alpha;P_\alpha)$ 是群 G_α 上的 Rees 矩阵半群，ι_α 是 G_α 的单位元. Sandwich 矩阵 P_α 在 $\tilde\alpha\in B_\alpha$ 处被正规化. 记 $u_{\alpha,\beta}(a)=p^{-1}_{a\tilde\alpha\tilde\beta a\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha a\tilde\beta a\tilde\alpha}$, $v_{\alpha,\beta}(a)=p^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\beta\tilde\alpha a}$,

其中 $\alpha,\beta\in Y$ 满足 $\alpha\geq\beta$, $a\in B_\alpha$. 对任意 $\alpha,\beta\in Y$，其中 $\alpha\geq\beta$, 令 $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}$ 是 G_α 到 G_β 的同态，且满足条件：如果 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$， $\alpha\geq\beta\geq\gamma$,

(i) $\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha}=1_{G_\alpha}$.

(ii) $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\tilde{\theta}_{\beta,\gamma}=\tilde{\theta}_{\alpha,\gamma}\varepsilon_{u_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})}$.

(iii) $p_a\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}=v_{\alpha,\beta}(a)p_{a\tilde{\beta}a}u_{\alpha,\beta}(a)$, 对任意 $a\in B_\alpha$.

(iv) $p_{acb}^{-1}p_{a\tilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta}=x\sigma_{\alpha,\beta}p_{c\tilde{\beta}a}p_{cba}^{-1}$, 对任意 $b,c\in B_\beta$ 和 $x=(a,g)\in S_\alpha$, 其中

$$x\sigma_{\alpha,\beta}=u_{\alpha,\beta}(a)g\theta_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(a).$$

对任意 $x=(a,g)\in S_\alpha$, $y=(b,h)\in S_\beta$, 在 $S=\bigcup_{\alpha\in Y}S_\alpha$ 定义乘法 $*$:

$$x*y=(ab,x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{b\widetilde{\alpha\beta}a}y\sigma_{\beta,\alpha\beta}).$$

则 S 是一个密群. 反之每一个密群都能如此构造.

从上述定理能够看到，密群也有一种半织积结构，而 $\bigcup_{\alpha\in Y}G_\alpha$ 一般不能通过 $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}$ 构成 Clifford 半群. 上述结构定理刻画了带对密群第二个坐标的乘法的影响. 证明密群的结构定理要比证明正则密群的结构定理困难许多.

作为上述定理的应用，我们研究了密群之间的同态 (定理 4.4.1).

设 $S=(Y;S_\alpha)$, $T=(Z;T_\alpha)$ 是两个密群，且设 $\xi:Y\to Z$ 是两个半格之间的同态. 对每个 $\alpha\in Y$, 令 $\eta_\alpha:S_\alpha\to T_{\alpha\xi}$ 是一个同态，且满足条件：

(1) 对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $a\in S_\alpha$, $b\in S_\beta$, $a\eta_\alpha b\eta_\beta\mathcal{H}(ab)\eta_{\alpha\beta}$.

(2) 对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $\eta_\alpha\psi_{\alpha\xi,\beta\xi}=\varphi_{\alpha,\beta}\eta_\beta$. 其中， $\psi_{\alpha\xi,\beta\xi}$ 是 $T_{\alpha\xi}$ 到 $T_{\beta\xi}$ 的映射： $x\psi_{\alpha\xi,\beta\xi}=x(xe_{\beta\xi}x)^0$.

则 $\eta=\cup_{\alpha\in Y}\eta_\alpha$ 是 S 到 T 的一个同态. 反之，对每个 S 到 T 的同态 η, 都存在唯一的 ξ 和 η_α，使得 η 能够如此构造.

在本文的最后一章，我们利用上述同态 $\theta_{\alpha,\beta}$ 和完全单半群上的同余刻画了正则密群的同余. 我们证明了下面的结果 (定理 5.2.10).

如果 (ξ,η_α) 是 S 的 **同余成分**(Congruence aggregate), 则 $\rho=\rho_{(\xi,\eta_\alpha)}$ 是 S 上的使得 $re\rho=\xi,\rho|_{S_\alpha}=\eta_\alpha$ 的唯一同余，其中 $\alpha\in Y$. 反之，如果 ρ 是 S 上的同余，则 $(re\rho,\rho\,|_{S_\alpha})$ 是 S 的同余成分且 $\rho=\rho_{(re\rho,\rho|_{S_\alpha})}$.

最后我们利用第 3 章和第 4 章的结构定理刻画正则密群和密群上的最小纯正同余 (定理 5.3.2).

设 $S=(Y;S_\alpha)$ 是正则密群. 在 S 上定义二元关系 $\mathcal{O}$: 设 $a=(i,g,\lambda)$, $b=(j,h,\mu)$,

$$\mathcal{O}=\{(a,b)\in S_\alpha\times S_\alpha|a\mathcal{H}b,\ gh^{-1}\in\hat{P}_\alpha\}.$$

则 $\mathcal{O}$ 是 S 上的最小纯正同余.

类似地, 我们得到了密群上的最小纯正同余 (定理 5.3.3).

第1章　基本概念和性质

本文所讨论的半群，如果没有特别指出，都是完全正则半群．我们把一个完全正则半群 S 表示成 $S=(Y;S_\alpha)$, 其中 Y 是一个半格， $S_\alpha=(I_\alpha,G_\alpha,\Lambda_\alpha;P_\alpha)$ 是群 G_α 上的 Rees 矩阵半群， $\alpha\in Y$. 本文所用符号，如果没有指出，都是 [15] 中的标准符号．本章首先给出完全正则半群的一些基本性质．然后介绍完全单半群，包括它的基本性质，等价刻画和同态．我们今后将反复利用这些结果．

§1.1　基本概念和符号

众所周知， Green 关系是研究半群的重要工具．它们包括 $\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H},\mathcal{D},\mathcal{J}$ 五种等价关系．设 S 是一个半群， $a,b\in S$. $a\mathcal{L}b\Leftrightarrow S^1a=S^1b$, 而 $a\mathcal{R}b\Leftrightarrow aS^1=bS^1$. 它们是最基本的两种 Green 关系．另外， $\mathcal{H}=\mathcal{L}\wedge\mathcal{R}$, $\mathcal{D}=\mathcal{L}\vee\mathcal{R}$, $a\mathcal{J}b\Leftrightarrow S^1aS^1=S^1bS^1$. 对于完全正则半群，容易证明， $\mathcal{D}=\mathcal{J}$.

半群 S 的一个元素 a 是 **完全正则** 的，如果存在 $x\in S$ 使得 $a=axa$, $ax=xa$. 称半群 S 是一个 **完全正则半群**, 如果它的每个元素是完全正则的．通过完全正则半群的这个元素定义，我们得到下列等价命题．

定理 1.1.1. [[15] Theorem II.1.4] *设 S 是一个半群．则下列命题等价．*

(1) *S 是完全正则的；*

(2) *S 的每个 $\mathcal{H}$- 类是一个子群；*

(3) *S 是群并；*

(4) *对任意 $a\in S$, $a\in aSa^2$;*

(5) *S 是完全单半群的半格．* □

Clifford [2] 发现一个半群 S 是完全正则的当且仅当 S 是完全单半群的半格．这对于完全正则半群的结构刻画是重要的．

由定理 1.1.1, 可用 a^{-1} 表示 S 的元素 a 在 H_a 中的逆元， a^0 表示 H_a 的单位元．且记

$$E(S)=\{e\in S|\ e^2=e\}.$$

下列引理的证明是容易的．

引理 1.1.2. 设 S 完全正则半群， $a, b \in S$. 则 $a\mathcal{H}b \Leftrightarrow a^0 = b^0$. □

引理 1.1.3. [[15] Lemma II.2.1] 设 S 是完全正则半群， $a \in S$. 则 a^{-1} 是唯一和 a 可交换的 a 的逆元. □

完全正则半群是一类同型代数类. 它关于同态象，子代数和直积封闭，也可以用恒等式表示，因此构成代数 **簇**. 用 $\mathcal{CR}$ 表示完全正则半群簇. 即

$$\mathcal{CR} = [a = aa^{-1}a, a = (a^{-1})^{-1}, aa^{-1} = a^{-1}a].$$

我们以后会碰到很多完全正则半群簇的子簇. 这里沿用文献 [15] 中的记号，列出一些重要的子簇并给出它们所满足的恒等式.

$\mathcal{O} = [(a^0b^0)^0 = a^0b^0]$	纯正群
$\mathcal{LRO} = [ax = axa^0]$	左正则纯正群
$\mathcal{RRO} = [xa = a^0xa]$	右正则纯正群
$\mathcal{BG} = [(ab)^0 = (a^0b^0)^0]$	密群
$\mathcal{RBG} = [(axya)^0 = (axaya)^0]$	正则密群
$\mathcal{LQNBG} = [(axy)^0 = (axay)^0]$	左拟正规密群
$\mathcal{NBG} = [(axya)^0 = (ayxa)^0]$	正规密群
$\mathcal{OBG} = [(ab)^0 = a^0b^0]$	纯正密群
$\mathcal{ROBG} = [a(xy)^0a = ax^0a^0y^0a]$	正则纯正密群
$\mathcal{ONBG} = [axy^0a = ay^0xa]$	正规纯正密群
$\mathcal{SG} = [ax^0 = x^0a]$	Clifford 半群

我们将陆续建立一些完全正则半群簇的子簇所满足的等式.

如果 S 的所有具备形式 eSe, $e \in E(S)$ 的子半群都属于完全正则半群簇的某个子簇 $\mathcal{V}$, 我们称 S 是 **局部**$\mathcal{V}$, 记做 $S \in L\mathcal{V}$. 我们以后会看到，对任意的完全正则半群簇 $\mathcal{V}$, $L\mathcal{V}$ 构成完全正则半群簇的子簇. 关于局部，我们首先陈述几件有趣的事实.

命题 1.1.4. [[15] Proposition II.8.4] $L\mathcal{BG} = \mathcal{BG}$. □

引理 1.1.5. [[15] Lemma II.7.4] 设 S 是一个完全正则半群. 如果 S 是局部纯正的，则 S 的每一个单侧主理想是纯正的. □

这个引理帮助我们确定局部纯正群簇. 下面列出能用局部确定的一些完全正则半群簇的子簇.

推论 1.1.6. [[15] Corollary II.7.5] $\mathcal{LO} = [(ax)^0(ay)^0 = ((ax)^0(ay)^0)^0]$. □

定理 1.1.7. [[15] Theorem IV.1.2] *一个完全正则半群是正规密群当且仅当它是局部 Clifford 半群.* □

定理 1.1.8. [[15] Theorem V.4.3] *$\mathcal{R}$ 是完全正则半群 S 上的正规带同余当且仅当 $S \in \mathcal{LRRO}$.* □

定理 1.1.9. [[15] Theorem III.1.3] *一个完全正则半群 S 是完全单的当且仅当 S 是局部群.* □

对于正则半群 S, 定义一个关系 $\leq$:

$$a \leq b \Longleftrightarrow \text{存在 } e, f \in E(S), \text{使得 } a = eb = bf, (a, b \in S).$$

容易验证 $\leq$ 是 S 上的 **偏序关系**. 我们把这种用 S 的乘法运算定义的偏序关系叫做 **自然偏序关系**.

我们用 $\mathcal{E}(S)$ 和 $\mathcal{C}(S)$ 分别表示 S 上的等价关系和同余关系全体. 设 $\rho \in \mathcal{C}(S)$, 称 ρ 是 S 上的 $\mathcal{V}$ 同余, 如果 $S/\rho \in \mathcal{V}$. 令 $\theta \in \mathcal{E}(S)$, 称 S 满足 θ-优化, 如果 $a, b, c \in S$, $a \geq b$, $a \geq c$, $b\theta c$, 则 $b = c$.

称 S 上的自然偏序关系 $\leq$ 是 **左相容** 的, 如果 $a, b, c \in S, a \leq b \Rightarrow ca \leq cb$. 类似地, 可以定义自然偏序关系的 **右相容**. 自然偏序关系如果既是左相容的又是右相容的, 我们则称它是 **相容** 的. 自然偏序关系的相容性和 Green 关系的 **优化** 很有联系. 事实上, 如下结果成立.

定理 1.1.10. [[15] Theorem II.4.11] *在正则半群 S 上, 下列命题是等价的.*

(i) *自然偏序关系是右相容的.*

(ii) *对于幂等元, S 满足 $\mathcal{L}$- 优化.*

(iii) *S 满足 $\mathcal{L}$- 优化.* □

下面的定理刻画 $\mathcal{D}$- 优化和 $\mathcal{L}$- 优化及 $\mathcal{R}$- 优化的关系.

定理 1.1.11. [[15] Theorem II.4.14] 在完全正则半群 S 上，下列命题是等价的.

(i) S 满足 $\mathcal{D}$- 优化.

(ii) 对于幂等元， S 满足 $\mathcal{D}$- 优化.

(iii) S 满足 $\mathcal{L}$- 优化和 $\mathcal{R}$- 优化.

(iv) 对于幂等元， S 满足 $\mathcal{L}$- 优化和 $\mathcal{R}$- 优化. □

在完全正则半群中，满足 $\mathcal{D}$- 优化的子类有非常好的代数性质. 完全正则半群 S 满足 $\mathcal{D}$- 优化等价于 S 是正规密群，也等价于 S 是完全单半群的强半格. 而强半格结构通常被认为是好的代数结构.

定理 1.1.12. [[15] Theorem IV.1.6] 在完全正则半群 S 上，下列命题是等价的.

(i) S 是正规密群.

(ii) S 是局部 *Clifford* 半群.

(iii) S 满足 $\mathcal{D}$- 优化.

(iv) S 是完全单半群的强半格.

(v) S 满足恒等式 $(axya)^0 = (ayxa)^0$.

(vi) S 上的自然偏序关系是相容的. □

§1.2 完全正则半群的基本性质

本节列出关于完全正则半群的一些结论. 这些结论在我们以后构造密群和正则密群以及构造同余的时候经常用到.

下列引理说明用更高一级的 $\mathcal{D}$- 类中的元素做左平移和右平移时，分别不改变 $\mathcal{L}$ 关系和 $\mathcal{R}$ 关系.

引理 1.2.1. [[15] Corollary II.4.3] 令 $\alpha, \beta \in Y$ ， $\alpha \geq \beta, x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$. 则 $xy\mathcal{L}y$ ， $yx\mathcal{R}y$. □

我们引进一些幂等元的性质. 它们将帮助我们寻找密群的新的代数性质，而这种代数性质对于密群和正则密群的构造，几乎是决定性的.

引理 1.2.2. [[15] Corollary II.4.4]) 令 $e, f \in E(S)$.

(i) $(ef)^{-1} = (ef)^0(fe)^0(ef)^0$.

(ii) $e(fe)^0 = (efe)^0 = (ef)^0 e$. □

下面的一些引理是关于同余和同态的.

引理 1.2.3. [[15] Lemma II.4.7] 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是一个完全正则半群，$\rho \in \mathcal{C}(S)$. 则

(1) 如果 $\alpha, \beta \in Y$，$\alpha \geq \beta$, $a, c \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ 且 $a\rho b$. 则 $c\rho d$, 其中 $d \in S_\beta$ 满足 $d \leq c$.

(2) 令 $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ 满足 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, $a, x \in S_\alpha$, $w \in S_\beta$, $c \in S_\gamma$ 且 $a\rho c$. 则 $x\rho y$，其中 $y \in S_\beta$ 且 $w\rho z$ 对某个 $z \in S_\gamma$.

(3) 令 $a, x \in S_\alpha$, $b, y \in S_\beta$, $a\rho b$, 且 $x \geq y$. 则 $x\rho y$. □

这个引理反映偏序关系和同余的联系. 我们继续讨论同余和 Green 关系的联系.

引理 1.2.4. [[15] Theorem VI.5.1] 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是一个完全正则半群，$\rho \in \mathcal{C}(S)$. 用 $\mathcal{P}$ 表示 S 上的任意一种 *Green* 关系. 则

(1) $\rho \vee \mathcal{P} = \rho\mathcal{P}\rho$.

(2) $a(\rho \vee \mathcal{P})b \Leftrightarrow a\rho\mathcal{P}b\rho$, $(a, b \in S)$. □

我们知道半群的同态有很好的代数性质，例如，它保持半群簇，保持幂等元.

引理 1.2.5. [[15] Lemma II.2.4] 设 T 是一个半群，S 是一个完全正则半群，$\varphi : S \to T$ 是一个同态，则

(i) $S\varphi$ 是完全正则的.

(ii) 对任意 $a \in S$, $a^{-1}\varphi = (a\varphi)^{-1}$, $a^0\varphi = (a\varphi)^0$. □

下列结果是引理 1.2.5 的自然推论.

引理 1.2.6. [[15] Corollary II.2.5]) 设 ρ 是完全正则半群 S 上的同余，$a\rho b$. 则 $a^{-1}\rho b^{-1}$, $a^0\rho b^0$, $a^0\rho = (a\rho)^0$. □

引理 1.2.7. [[15] Lemma II.3.3] 设 ρ 是正则半群 S 上的同余，如果 $a \in S, a\rho \in E(S/\rho)$, 则存在 $e \in E(aSa)$, 使得 $a\rho e$. □

在本章的最后，我们讨论完全单半群. 完全正则半群的最重要的结构特征为它是完全单半群的半格. 我们能够这样理解，对完全正则半群的结构刻画在很大程度上依赖于它的局部结构，完全单半群的刻画. 本节介绍的 Rees 定理完美地刻画了后者的结构. 我们还将叙述一些完全单半群的有趣的性质.

引理 1.2.8. [[15] Proposition III.1.1] 设 S 是一个完全正则半群，则下列命题等价.

(i) S 是完全单的.
(ii) S 满足恒等式 $(ab)^0 = (axb)^0$.
(iii) 对任意 $a, b, x \in S$, 有 $ab\mathcal{H}axb$.
(iv) S 满足恒等式 $a^0 = (axa)^0$.
(v) S 满足恒等式 $a = (ax)^0a$. □

我们知道，一类代数构成代数簇当且仅当它们是满足某些等式的代数类. 因此，完全单半群是完全正则半群簇的子簇.

定理 1.2.9. [[15] Theorem II.4.2] 在完全单半群 S 上，自然偏序关系是平凡的，且 S 的所有幂等元本原. □

满足下列定理中等式的蕴涵关系的完全正则半群类被称为 **拟簇**.

定理 1.2.10. [[15] Theorem III.1.3] 设 S 是一个完全正则半群，则下列命题等价.

(i) S 是完全单的.
(ii) S 是局部群.
(iii) S 满足弱可消去性.
(iv) 对任意 $a, b \in S$, 有 $a\mathcal{R}ab$.
(v) S 满足蕴涵关系 $a = axa \Rightarrow x = xax$.
(vi) S 的幂等元都是本原的. □

设 G 是群，I, Λ 是任意非空集合，$P : \Lambda \times I \to G$, 其中，$(\lambda, i)P = p_{\lambda i}$ 是映射. 令 $S = I \times G \times \Lambda$. 在 S 上定义乘法

$$(i, g, \lambda)(j, h, \mu) = (i, gp_{\lambda j}h, \mu).$$

容易验证， S 是半群，称它为群 G 上的 Rees $\Lambda \times I$ 矩阵半群，用 $S = \mathcal{M}(I, G, \Lambda; P)$ 表示，其中， P 被称为 Sandwich 矩阵.

引理 1.2.11. [[15] Lemma III.2.2] *设 $S = \mathcal{M}(I, G, \Lambda; P)$, 则 S 是完全单半群. 且*

$$E(S) = \{(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda) \in S | i \in I,\ \lambda \in \Lambda\}. \qquad \square$$

定义 1.2.12. *设 P 是群 G 上的 $\Lambda \times I$ 矩阵. 如果存在元素 $1 \in I \cap \Lambda$ 使得对任意 $i \in I, \lambda \in \Lambda$, 总有 $p_{\lambda 1} = p_{1i} = e$, e 是 G 的单位元. 称 P 在 1 处正规化.*

下面介绍完全单半群的结构定理. 它被认为是半群中最好的结构定理，因为它具有某种唯一性，利用它能够刻画完全单半群的同态和同余，等等.

定理 1.2.13. [[15] Theorem(Rees)III.2.6] *半群 S 是完全单的当且仅当 S 同构于一个 Rees 矩阵半群 (Sandwich 矩阵已被正规化).* $\square$

设 $S = \mathcal{M}(I, G, \Lambda; P), T = \mathcal{M}(J, H, \Theta; Q)$ 是 Rees 矩阵半群， $u : I \to H, i \mapsto u_i$; $\omega : G \to H$; $v : \Lambda \to H, \lambda \mapsto v_\lambda$; $\varphi : I \to J$ 和 $\psi : \Lambda \to \Theta$ 是映射且满足条件:

$$p_{\lambda i}\omega = v_\lambda q_{\lambda\psi, i\varphi} u_i. \tag{1.1}$$

定义映射 $\chi = \chi(\varphi, u, \omega, v, \psi) : (i, g, \lambda) \to (i\varphi, u_i(g\omega)v_\lambda, \lambda\psi)$. 则有

引理 1.2.14. [[15] Theorem III.3.2] *设 $S = \mathcal{M}(I, G, \Lambda; P), T = \mathcal{M}(J, H, \Theta; Q)$ 是 Rees 矩阵半群. 则 $\chi = \chi(\varphi, u, \omega, v, \psi)$ 是 S 到 T 的同态. 反之，每个 S 到 T 的同态都能如此构造.* $\square$

因此，完全单半群的结构和完全单半群之间的同态被认为已经解决. 事实上，完全单半群上的同余也已被清楚地刻画.

第2章 关于密群的进一步讨论

很多代数学家研究过完全正则半群的性质 ([3],[8],[10],[15],[17],[22]). 在专著 **Completely Regular Semigroups** 中, Petrich 和 Reilly 系统地整理了半个多世纪以来这方面的研究成果.

这一章进一步讨论密群的代数性质. 在引言中已经提到, 密群是一类非常重要的完全正则半群. 我们试图尽可能多地发现密群的新性质, 目标是给出它们的一个代数意义比较明确的结构定理. 我们将从以下几个方面刻画密群: 1, 利用 Green 关系和其他等价关系对密群进行等价刻画; 2, 用左 (右) 平移及同态对 (正则, 正规) 密群进行等价刻画; 3, 从簇的角度刻画密群; 4, 利用偏序关系对密群进行等价刻画. 最后我们给出局部左正则纯正密群所满足的等式.

§2.1 密群的若干性质

本节利用这些性质和第一章的结论, 通过格林关系, 左 (右) 平移及同态对 (正则, 正规) 密群进行 (等价) 刻画.

设 $S = \mathcal{M}(I, G, \Lambda; P)$ 是一个 Rees 矩阵半群. 对任意的 $x, y \in S$, S 上的映射 σ(作用在左边) 称为左平移, 如果 $\sigma(xy) = (\sigma x)y$; S 上的映射 ρ(作用在右边) 称为右平移, 如果 $(xy)\rho = x(y\rho)$. 用 $\Sigma(X)(P(X))$ 表示集合 X 上作用在左 (右) 边的所有变换所组成的集合. 令 $\sigma(\rho)$ 是 S 上的左 (右) 平移, 由 Petrich [17], 存在 $\varphi \in \Sigma(I)$, $\psi \in P(\Lambda)$ 使得对任意的 $(i, g, \lambda) \in S$, $\sigma(i, g, \lambda) = (\varphi i, \quad, \lambda)$, $(i, g, \lambda)\rho = (i, \quad, \lambda\psi)$. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是一个完全正则半群, 其中 $S_\alpha = \mathcal{M}(I_\alpha, G_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha)$ 是 Rees 矩阵半群. 如果 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$, 对任意的 $a \in S_\alpha$, $\varphi^a_{\alpha,\beta}(\psi^a_{\alpha,\beta})$ 表示由 a 诱导的 $I_\beta(\Lambda_\beta)$ 上的左 (右) 变换.

首先给出 [15] 中的一些结果, 引用时不再多加说明. 下面的两个引理用 Green 关系和簇分别刻画密群和正则密群

引理 2.1.1. [[15] Theorem II.8.1] *设 S 为完全正则半群, 则下列情形等价.*

(1) *S 是密群;*

(2) S 是群带;

(3) 对任意 $a, b \in S$, $a^2bS = abS, Sab^2 = Sab$;

(4) S 满足等式 $(ab)^0 = (a^0b^0)^0$. □

引理 2.1.2. [[15] Proposition V.4.4] 设 S 为完全正则半群, 则下列情形等价:

(1) S 是正则密群;

(2) 格林关系 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 都是 S 上的同余;

(3) 对任意 $a, x, y \in S$, $(axya)^0 = (axaya)^0$. □

我们着手给出密群的一些性质. 首先用完全单半群的平移包刻画密群和正则密群.

引理 2.1.3. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是完全正则半群. 则 S 是密群当且仅当 $\varphi^a_{\alpha,\beta} = \varphi^{a^0}_{\alpha,\beta}$, $\psi^a_{\alpha,\beta} = \psi^{a^0}_{\alpha,\beta}$, 其中 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$, $a \in S_\alpha$.

证明 设 S 是密群, $\alpha \geq \beta$ 且 $a \in S_\alpha$. 则对任意的 $b = (j, h, \mu) \in S_\beta$, $(\varphi^a_{\alpha,\beta}j, \ \ , \mu) = ab\mathcal{H}a^0b = (\varphi^{a^0}_{\alpha,\beta}j, \ \ , \mu)$. 因此 $\varphi^a_{\alpha,\beta} = \varphi^{a^0}_{\alpha,\beta}$. 对偶地, $\psi^a_{\alpha,\beta} = \psi^{a^0}_{\alpha,\beta}$. 相反地, 假设 $a, b \in S_\alpha$ 且 $a\mathcal{H}b$, 则 $a^0 = b^0$. 对任意的 $\beta \in Y$, $c \in S_\beta$, 我们记 $a^0c = b^0c = (i, g, \lambda) \in S_{\alpha\beta}$, 那么 $ac = aa^0c = (\varphi^a_{\alpha,\alpha\beta}i, \ \ , \lambda)$, $bc = bb^0c = (\varphi^b_{\alpha,\alpha\beta}i, \ \ , \lambda)$. 因为 $\varphi^a_{\alpha,\alpha\beta} = \varphi^{a^0}_{\alpha,\alpha\beta} = \varphi^{b^0}_{\alpha,\alpha\beta} = \varphi^b_{\alpha,\alpha\beta}$, 故 $ac\mathcal{R}bc$. 对偶地, $ca\mathcal{L}cb$. 所以 $\mathcal{H}$ 是 S 上的同余, 也即 S 是密群. □

引理 2.1.4. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是正则密群, $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$. 则对任意 $a, b \in S_\alpha$, $ker\varphi^a_{\alpha,\beta} = ker\varphi^b_{\alpha,\beta}$, $ker\psi^a_{\alpha,\beta} = ker\psi^b_{\alpha,\beta}$.

证明 对任意 $x = (i, g, \lambda)$, $y = (j, h, \lambda) \in S_\beta$, 如果 $\varphi^a_{\alpha,\beta}i = \varphi^a_{\alpha,\beta}j$, 则 $ax\mathcal{H}ay$. 故我们有 $b(ax)^0b = b(ay)^0b$, $(b(ax)^0b)^0 = (b(ay)^0b)^0$. 由引理 2.1.1, $(b(ax)^0b)^0 = (b^0((ax)^0b)^0)^0 = (b^0((ax)^0b^0)^0)^0 = (b^0((ax)b)^0)^0 = (baxb)^0$. 类似地, $(b(ay)^0b)^0 = (bayb)^0$. 所以 $(baxb)^0 = (bayb)^0$. 又由引理 2.1.2, $(babxb)^0 = (babyb)^0$. 因为 $a, b \in S_\alpha$, 有引理 1.2.8, $(bab)^0 = b^0$. 由引理 2.1.1, $(bxb)^0 = (b^0(xb)^0)^0 = ((bab)^0(xb)^0)^0 = (babxb)^0$. 类似地, $(babyb)^0 = (byb)^0$. 因此 $(bxb)^0 = (byb)^0$. 结合引理 1.2.1, 我们有 $bx\mathcal{R}bxb\mathcal{R}(bxb)^0 = (byb)^0\mathcal{R}byb\mathcal{R}by$.

因此， $\varphi^b_{\alpha,\beta}i = \varphi^b_{\alpha,\beta}j$, 这就说明了 $ker\varphi^a_{\alpha,\beta} \subseteq ker\varphi^b_{\alpha,\beta}$. 类似地可以证明, $ker\varphi^b_{\alpha,\beta} \subseteq ker\varphi^a_{\alpha,\beta}$. 对偶地， $ker\psi^a_{\alpha,\beta} = ker\psi^b_{\alpha,\beta}$. □

下列引理反映密群 $\mathcal{D}-$ 类的垂直关系.

引理 2.1.5. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是完全正则半群. 则 S 正则密群当且仅当对 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$, 子半群 $S_\alpha \cup S_\beta$ 是正则密群.

证明 假设对 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$, 子半群 $S_\alpha \cup S_\beta$ 是正则密群, 则对任意的 $\alpha, \beta \in Y$, $S_\alpha \cup S_{\alpha\beta}$ 是正则密群. 令 $x, y \in S_\alpha$ 且 $x\mathcal{L}y$. 则对任意的 $a \in S_\beta$, 因为 $xa \in S_{\alpha\beta}$, 所以 $xax\mathcal{L}xay$. 由引理 1.2.1, $ax\mathcal{L}ay$. 故 $\mathcal{L}$ 是 S 上的同余. 类似地， $\mathcal{R}$ 也是 S 上的同余. 由引理 2.1.2, S 是正则密群. 另一方面是显然的. □

实际上，当 S 是正规密群和一般的密群时，上述命题也成立.

以下利用完全单半群的左 (右) 平移的核关系给出正则密群的刻画.

命题 2.1.6. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是完全正则半群. 则 S 是正则密群当且仅当 $ker\varphi^a_{\alpha,\beta} = ker\varphi^b_{\alpha,\beta}$, $ker\psi^a_{\alpha,\beta} = ker\psi^b_{\alpha,\beta}$, $\varphi^a_{\alpha,\beta} = \varphi^{a^0}_{\alpha,\beta}$ 和 $\psi^a_{\alpha,\beta} = \psi^{a^0}_{\alpha,\beta}$, 其中 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$, $a, b \in S_\alpha$.

证明 设 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$, $a, b \in S_\alpha$ 且 $a\mathcal{R}b$. 对任意 $c \in S_\beta$, $bc\mathcal{R}b^0c$, 这是因为 $\varphi^b_{\alpha,\beta} = \varphi^{b^0}_{\alpha,\beta}$. 则 $b(bc)\mathcal{R}bc$. 又 $ker\varphi^a_{\alpha,\beta} = ker\varphi^b_{\alpha,\beta}$, 故 $a(bc)\mathcal{R}ac$. 进一步，因为 $\varphi^a_{\alpha,\beta} = \varphi^{a^0}_{\alpha,\beta}$ 我们有 $bc = a^0bc = a^{-1}(a(bc))\mathcal{R}a^{-1}(ac) = a^0c\mathcal{R}ac$. 对偶地，如果 $a\mathcal{L}b, ca\mathcal{L}cb$. 由引理 2.1.2, S 是正则密群. 另一方面的结论由引理 2.1.3 和引理 2.1.4 可得. □

下面的两个命题考虑 (正则) 密群的 Green 关系.

命题 2.1.7. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 为完全正则半群. 则 S 是密群当且仅当对任意的 $a, x, y \in S$, $x\mathcal{H}y$ 蕴涵 $xay\mathcal{H}yax$.

证明 假设 $a, x, y \in S$ 且 $x\mathcal{H}y$. 如果 $xay\mathcal{H}yax$, 则由引理 1.2.1, $ay\mathcal{L}xay\mathcal{L}yax\mathcal{L}ax$. 又 $ax\mathcal{R}ay$ 显然成立. 因此我们有 $\mathcal{H}$ 是 S 上的左同余. 类似的可以证明 $\mathcal{H}$ 是 S 上的右同余. 所以 S 为密群. 相反的方面显然. □

命题 2.1.8. 设 $S=(Y;S_\alpha)$ 为完全正则半群. 则 S 为正则密群当且仅当对任意的 $a,x,y\in S$, $x\mathcal{L}y$ 蕴涵 $xay\mathcal{L}yax$, $x\mathcal{R}y$ 蕴涵 $xay\mathcal{R}yax$.

证明 假设 $a,x,y\in S$ 且 $x\mathcal{L}y$. 如果 $xay\mathcal{L}yax$, 则由引理 1.2.1, $ay\mathcal{L}xay\mathcal{L}yax\mathcal{L}ax$. 所以 $\mathcal{L}$ 是 S 上的左同余. 又 $\mathcal{L}$ 为 S 上的右同余, 故 $\mathcal{L}$ 是 S 上的同余. 类似的可以证明 $\mathcal{R}$ 是 S 上的同余. 由引理 2.1.2, S 为正则密群. 另一方面为显然. □

设 S 为完全正则半群. 定义 S 上的二元关系 η 如下:

$$\eta=\{(a,b)\in S_\alpha\times S_\alpha \mid 任意\ \beta\in Y 且\ \beta\geq\alpha, 存在\ c\in S_\beta, 使得\ ca\mathcal{R}cb, ac\mathcal{L}bc\}.$$

令 θ 是正则半群 S 上的等价关系. 称 S 满足 θ- 优化, 如果 $a\geq b$, $a\geq c$, $b\theta c$ 意味着 $b=c$.

引理 2.1.9. [[15] Lemma II.4.6] 设 $S=(Y;S_\alpha)$ 为完全正则半群. 任意 $a,b,c\in S$, 如果 $b\mathcal{H}c$ 且 $a\geq b,c$, 则 $b=c$. □

引理 2.1.10. [[15] Proposition VI.2.7, Corollary VI.2.9] 如果 S 是完全正则半群且 μ 是 S 上的最大幂等分离同余, 则

(i) $a\mu b\Leftrightarrow a^0=b^0$; 且对任意 $e\in E(S)$, 若 $e\leq a^0$, $a^{-1}ea=b^{-1}eb$,

(ii) $Ker\mu=\{a\in S \mid 任意\ e\in E(S), 若\ e\leq a^0, 则\ ea=ae\}$. □

引理 2.1.11. 设 $S=(Y;S_\alpha)$ 为密群. 任意 $a,b\in S$, 如果 $b\leq a$, 则 $b^2=ab=ba$.

证明 设 S 为密群. 如果 $a,b\in S$, $b\leq a$, 则存在 $e,f\in E(S)$, 使得 $b=af=ea$. 此时 $b^0=a^0(af)^0=(ea)^0a^0$, 这说明 $b^0\leq a^0$. 因为 S 是密群, $\mu_S=\mathcal{H}$, 则 $Ker\mu=S$. 由引理 2.1.10(2), $b^0a=ab^0$. 不妨假设 $b^0a=ab^0=c$. 因为 $b=af=ea$, 我们有 $b=b^0af=eab^0=cf=ec$, 这意味着 $b\leq c$. 若 $b\in S_\beta$, $a\in S_\alpha$, 那么 $\beta\leq\alpha$, $c=b^0a\in S_\beta$. 因为自然偏序在完全单半群上是平凡关系, 我们有 $b=c$. 从而 $b=ab^0=b^0a$, $b^2=ab=ba$. □

命题 2.1.12. 设 $S=(Y;S_\alpha)$ 是正则密群. 则 η 是 S 上的等价关系且 S 满足 η- 优化.

证明 η 的自反性和对称性显然. 下面设 $a\eta b$, $b\eta c$. 由 η 的定义, 存在 $\alpha \in Y$, $a, b, c \in S_\alpha$. 若 $\beta \geq \alpha$, 则存在 $x, y \in S_\beta$ 使得 $xa\mathcal{R}xb$, $yb\mathcal{R}yc$, 进一步我们有 $yxa\mathcal{R}yxb$, $xyb\mathcal{R}xyc$. 由命题 2.1.6, $ker\varphi_{\beta,\alpha}^{yx} = ker\varphi_{\beta,\alpha}^{xy}$. 所以 $xya\mathcal{R}xyb$. 因此 $xya\mathcal{R}xyc$. 类似地可以证明 $axy\mathcal{L}cxy$. 从而 $a\eta c$, η 是传递的.

假设 $b_1, b_2 \in S_\gamma$, $a \in S_\alpha$, $a \geq b_1, b_2$ 且 $b_1\eta b_2$. 由引理 2.1.11, $b_1^2 = ab_1 = b_1a$, $b_2^2 = ab_2 = b_2a$. 因为存在 $c \in S_\alpha$ 使得 $cb_1\mathcal{R}cb_2$ 并且 $ker\varphi_{\alpha,\gamma}^{a} = ker\varphi_{\alpha,\gamma}^{c}$, $ab_1\mathcal{R}ab_2$. 所以 $b_1\mathcal{R}b_1^2 = ab_1\mathcal{R}ab_2 = b_2^2\mathcal{R}b_2$. 类似的可以证明 $b_1\mathcal{L}b_2$. 既然 S 满足 $\mathcal{H}$- 优化, $b_1 = b_2$. 因此 S 满足 η- 优化. □

下列结论是显然的.

引理 2.1.13. 完全正则半群 S 是正规密群当且仅当 $\mathcal{L}$ 是 S 上的右正规带同余, $\mathcal{R}$ 是 S 上的左正规带同余. □

命题 2.1.14. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 为完全正则半群. 则 S 是正规密群当且仅当 $\eta = \mathcal{D}$.

证明 假设 S 是正规密群. 任意的 $a, b \in S_\alpha$, $c \in S_\beta$ 其中 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \leq \beta$. 由引理 2.1.13, $cab\mathcal{R}cba$, 进一步由引理 1.2.1,$ca\mathcal{R}cb$. 类似地, $ac\mathcal{L}bc$. 所以 $\eta = \mathcal{D}$. 相反地, 如果 $\eta = \mathcal{D}$. 则对任意的 $a \in S_\alpha, x, y \in S$, $axy\eta ayx$ 并且存在 $c \in S_\alpha$ 使得 $caxy\mathcal{R}cayx$, $acaxy\mathcal{R}acayx$, 进一步 $(aca)^0xy\mathcal{R}(aca)^0yx$. 又因为 $a, c \in S_\alpha$, 所以 $(aca)^0 = a^0$. 从而我们有 $a^0xy\mathcal{R}a^0yx$, $axy\mathcal{R}ayx$. 由 [15] 中的定理 V.4.3 , $\mathcal{R}$ 是一个左正规带同余. 类似的可以证明 $\mathcal{L}$ 是一个右正规带同余. 由引理 2.1.13, S 是正规密群. □

下面的命题从簇的角度刻化密群.

命题 2.1.15. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是完全正则半群. 则 S 是密群当且仅当对任意的 $a, b \in S$, $ab = a(aba)^0b(bab)^0$.

证明 设 S 是密群, 对任意 $a, b \in S$, $a(aba)^0 = a(aba)^0a^{-1}a$, 又 $a(aba)^0a^{-1} \cdot a(aba)^0a^{-1} = a(aba)^0a^0(aba)^0a^{-1} = a(aba)^0a^{-1}$. 所以 $a \geq a(aba)^0$. 类似地, $a \geq (aba)^0a$. 由引理 2.1.1, $((aba)^0a)^0 = (a(aba)^0)^0$. 由引理 2.1.10, $(aba)^0a = a(aba)^0$. 从而由引理 1.2.1, $a(aba)^0b(bab)^0 = (aba)^0ab(bab)^0 = ab(bab)^0 = ab$. 相反地, 如果任意的 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$, 其中 $\alpha, \beta \in Y$ 且

$\alpha \leq \beta$, 满足 $ab = a(aba)^0b(bab)^0$. 则 $a^0b = a^{-1}ab = a^{-1}a(aba)^0b(bab)^0 = (aba)^0b(bab)^0 = aba(aba)^{-1}b(bab)^0$. 同时,

$$\begin{aligned} ab &= a^2a^{-1}b = a^2a^{-1}(a^{-1}ba^{-1})^0b(ba^{-1}b)^0 \\ &= a^0ba^{-1}(a^{-1}ba^{-1})^{-1}b(ba^{-1}b)^0. \end{aligned}$$

从而 $a^0b\mathcal{R}ab$, 这说明 $\varphi^{a^0}_{\alpha,\beta} = \varphi^{a}_{\alpha,\beta}$. 类似的可以证明 $\psi^{a^0}_{\alpha,\beta} = \psi^{a}_{\alpha,\beta}$. 由引理 2.1.3, S 为密群. □

下面的观察对于我们后面构造密群和正则密群几乎是决定性的.

引理 2.1.16. *设 $S = (Y; S_\alpha)$ 为密群. 则对任意的 $x, y \in S$, $(xyx)^0 = x^0(yx)^0 = (xy)^0x^0$.*

证明 因为对完全正则半群 T, 如果 $e, f \in E(T)$, 则由引理 1.2.2, $e(fe)^0 = (ef)^0e = (efe)^0$. 因此对密群 S, 我们有 $(xyx)^0 = ((xy)^0x^0)^0 = ((x^0y^0)^0x^0)^0 = (x^0y^0x^0)^0 = (x^0y^0)^0x^0 = (xy)^0x^0$. 类似的可以证明 $(xyx)^0 = x^0(yx)^0$. □

设 $S = (Y; S_\alpha)$ 为完全正则半群. 对任意 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$. 对任意的 $b \in S_\beta$, 定义从 S_α 到 S_β 的映射 $\theta^b_{\alpha,\beta}$ 和 $\vartheta^b_{\alpha,\beta}$ 如下:

$$\theta^b_{\alpha,\beta} : S_\alpha \to S_\beta, \quad x \mapsto x(bx)^0; \qquad \vartheta^b_{\alpha,\beta} : S_\alpha \to S_\beta, \quad x \mapsto (xb)^0x.$$

我们可以得到如下结果:

命题 2.1.17. *设 $S = (Y; S_\alpha)$ 为完全正则半群. 则 S 为正则密群当且仅当 $\theta^b_{\alpha,\beta}$ 和 $\vartheta^b_{\alpha,\beta}$ 均为同态.*

证明 设 S 为正则密群. 对任意的 $x, y \in S_\alpha$, $xy\mathcal{L}y$. 由引理 2.1.2 和引理 1.2.1 可知, $bxy\mathcal{L}by$, $bxy\mathcal{R}by$. 所以 $(bxy)^0 = (by)^0$. 对偶地, 我们有 $(xyb)^0 = (xb)^0$. 下面验证 $\theta^b_{\alpha,\beta}$ 是同态,

$$\begin{aligned} (xy)\theta^b_{\alpha,\beta} &= xy(bxy)^0 = xy(xy)^0(bxy)^0 \\ &= xy(xybxy)^0 = (xybxy)^0xy(xybxy)^0 \\ &= (xyb)^0xy(bxy)^0 \quad (\text{由引理 } 2.1.16) \\ &= (xb)^0xy(by)^0 = (xb)^0x^0xyy^0(by)^0 \\ &= (xbx)^0xy(yby)^0 \quad (\text{由引理 } 2.1.16) \\ &= x(xbx)^0y(yby)^0 = x(bx)^0y(by)^0 \quad (\text{由引理 } 2.1.16) \\ &= x\theta^b_{\alpha,\beta}y\theta^b_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

所以 $\theta^b_{\alpha,\beta}$ 为同态. 类似的可以验证 $\vartheta^b_{\alpha,\beta}$ 也为同态. 反之, 如果 $\theta^b_{\alpha,\beta}$ 是同态, 则对 $x,y\in S_\alpha$ 且 $x\mathcal{R}y$, 我们有 $x(bx)^0\mathcal{R}y(by)^0$. 由引理 1.2.1, $x(bx)^0=xbx(bx)^{-1}\mathcal{R}xb$. 类似地, $y(by)^0\mathcal{R}yb$. 从而 $xb\mathcal{R}yb$. 对偶地, 因为 $\vartheta^b_{\alpha,\beta}$ 为同态, 可以证明如果 $x\mathcal{L}y$, 则 $bx\mathcal{L}by$. 由引理 2.1.2, S 为正则密群. □

§2.2 完全正则半群上的一些偏序关系

半群上的一些偏序关系能够帮助我们认识半群的性质和刻画半群的结构. 例如, 我们知道 $S=(Y;S_\alpha)$ 是正规密群当且仅当对任意 $\alpha,\beta\in Y,\alpha\geq\beta$ 和任意 $a\in S_\alpha$, 存在唯一的 $b\in S_\beta$ 使得 $a\geq b$. 令 $\chi_{\alpha,\beta}$ 是 S_α 到 S_β 的映射, $a\chi_{\alpha,\beta}=b$, 则 S 是 S_α 的一个强半格且 $\chi_{\alpha,\beta}$ 是结构同态.

设 S 是一个半群. Conrad 在 [4] 中定义了 S 上的一个二元关系 $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}=\{(a,b)\in S\times S\mid \text{对任意 } s\in S, asa=asb=bsa\}.$$

Burgess 和 Raphael 在 [1] 中证明了 $\mathcal{C}$ 是 S 上的偏序关系当且仅当 S 是弱可裂的, 即如果对任意 $s\in S$, $asa=asb=bsa=bsb$, 则 $a=b$. 在 [12] 中, Nambooripad 引进了半群 S 上的另一二元关系 $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N}=\{(a,b)\in S\times S\mid a=axa=axb=bxa,\ \text{对某个 } x\in S\}.$$

他证明了 $\mathcal{N}$ 是 S 上的偏序关系当且仅当 S 是一个正则半群. 在 [5] 中, Drazin 定义了半群 S 上的二元关系 $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}=\{(a,b)\in S\times S\mid a^2=ab=ba\},$$

并且证明了如果 S 是一个完全正则半群, 则 $\mathcal{S}$ 是 S 上的偏序关系. 对于正则半群 S, 我们有一个自然偏序关系 $\leq$:

$$\leq=\{(a,b)\in S\times S\mid a=eb=bf,\ \text{其中 } e,f\in E(S)\}.$$

Drazin 证明了如果 S 是一个完全正则半群, 则 $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{S}\subseteq\mathcal{N}$. 对任意正则半群 S, 容易证明 $\mathcal{N}\subseteq\leq$.

一个自然的问题是在哪些条件下这些二元关系相等. 本节我们将证明如果 S 是一个完全正则半群, 则 $\mathcal{S}=\leq$ 当且仅当 S 是一个密群, 而 $\mathcal{C}=\mathcal{S}$ 当且仅当 S 是一个正规密群.

为了证明我们的主要结论，我们需要一些引理.

引理 2.2.1. ([15] Lemma II.4.6) 设 $S=(Y;S_\alpha)$ 是一个完全正则半群，$\alpha,\beta\in Y$ 且 $\alpha\geq\beta$.

(1) 如果 $a\in S_\alpha$, 则存在 $b\in S_\beta$, 满足 $a\geq b$.

(2) 如果 $a\in E(S)$ ， $b\in S$ ， $a>b$, 则 $b\in E(S)$.

(3) 如果 $e\in E(S_\alpha)$, 则存在 $f\in E(S_\beta)$ 使得 $e\geq f$. □

不幸的是，偏序关系 $\mathcal{S}$ 没有类似引理 2.2.1(1) 的性质.

例 2.2.2. 令 $S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$ 是一个矩阵半群. 明显地， S 是一个完全正则半群,

$$D_\alpha=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\} \text{和 } D_\beta=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$$

是 S 的两个 $\mathcal{D}$ 类，且 $\alpha>\beta$. 表示 $a=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in D_\alpha$, $b=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\in D_\beta$. 则 $b^2=b$, $ab=c$, $c^2=c$, $ac=b$. 因此， $(c,a)\notin\mathcal{S}$ 且 $(b,a)\notin\mathcal{S}$. □

命题 2.2.3. 设 S 是一个完全正则半群， $a,b\in S$. 则 $a\mathcal{S}b$ 当且仅当存在 $e\in E(S)$ 使得 $a=eb=be$.

证明 如果 $a\mathcal{S}b$, 则 $a^2=ab=ba$ ，于是我们有 $a=a^0b=ba^0$.

反之,如果存在 $e\in E(S)$ 满足 $a=eb=be$, 则 $a^2=aeb=ab=bea=ba$, 即 $a=a^0b=ba^0$. □

尽管在完全正则半群上，偏序关系 $\mathcal{S}$ 没有类似引理 2.2.1 的性质，我们仍然有

命题 2.2.4. 设 $S=(Y;S_\alpha)$ 是一个密群. 则对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $a\in S_\alpha$, 存在 $b\in S_\beta$ 使得 $b\mathcal{S}a$.

证明 由引理 2.2.1, 对任意 $a \in S_\alpha$, $\alpha \geq \beta$, 存在 $e \in E(S_\beta)$ 使得 $e = a^0 e a^0$. 既然 $\mathcal{H}$- 关系是 S 上的同余, 我们有 $e = a^0 e a^0 \mathcal{H} a^{-1} e a$, 其中 $a^{-1} e a \in E(S)$. 因此 $e = a^{-1} e a$. 于是 $ae = aa^{-1} e a = a^0 e a = ea$. 令 $b = ae = ea = eae$. 则 $b^0 = (eae)^0 = e$. 既然 $b = ab^0 = b^0 a$ 蕴涵 $b^2 = ab = ba$, 我们有 bSa. □

既然对任意完全正则半群 S, 我们总有 $\mathcal{S} \subseteq \leq$, 由引理 2.2.1 和命题 2.2.4, 我们得到

推论 2.2.5. *设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是一个密群, $\alpha, \beta \in Y$ 且满足 $\alpha \geq \beta$, $a \in E(S_\alpha)$, $b \in S_\beta$. 如果 bSa, 则 $b \in E(S_\beta)$.* □

我们用已有的这些偏序关系对密群和正规密群作等价刻画.

定理 2.2.6. *设 $S = (Y; S_\alpha)$ 完全正则半群. 则偏序关系 $\mathcal{S} = \leq$ 当且仅当 S 是密群.*

证明 设 S 是一个密群. 则由引理 2.1.10, 我们有 $\mu_S = \mathcal{H}$.

若 $a, b \in S$, $b \leq a$, 则 $b = af = ea$, 其中 $e, f \in E(S)$. 且有 $b^0 = a^0(af)^0 = (ea)^0 a^0$, 这蕴涵 $b^0 \leq a^0$. 由引理 2.1.10, $b^0 a = ab^0$. 令 $b^0 a = ab^0 = c$. 既然 $b = af = ea$, 我们有 $b = b^0 af = eab^0 = cf = ec$. 因此 $b \leq c$. 如果 $b \in S_\beta$, $a \in S_\alpha$, 则 $\beta \leq \alpha$, $c = b^0 a \in S_\beta$. 因为完全单半群上的自然偏序关系是平凡的, 我们有 $b = c$. 因此, $b = ab^0 = b^0 a, b^2 = ab = ba$. 即 bSa. 既然对任意完全正则半群 S, $\mathcal{S} \subseteq \leq$ 我们得到 $\mathcal{S} = \leq$.

如果 $e \in E(S)$, $e \leq a^0$, $b = (ea^{-1}e)^{-1}$, 则 $b^0 = e(ea^{-1}e)^0 = (ea^{-1}e)^0 e$, 即, $b^0 = e$, 既然 $b^0 \leq e$, $b\mathcal{D}e$. 因此 $b = (ea^{-1}e)^{-1} = e(ea^{-1}e)^{-1} = a^0 e(ea^{-1}e)^{-1} = aa^{-1}e(ea^{-1}e)^{-1}e = e(ea^{-1}e)^{-1}ea^0 = e(ea^{-1}e)^{-1}ea^{-1}a$, 而

$$
\begin{aligned}
& (a^{-1}e(ea^{-1}e)^{-1}e) \cdot (a^{-1}e(ea^{-1}e)^{-1}e) \\
= \; & a^{-1}e(ea^{-1}e)^0)(ea^{-1}e)^{-1}e \\
= \; & a^{-1}e(ea^{-1}e)^{-1}e \in E(S).
\end{aligned}
$$

类似地, $e(ea^{-1}e)^{-1}ea^{-1} \in E(S)$. 因此, $b \leq a$. 既然 $\leq = \mathcal{S}$, 我们得到 $b^2 = ba = ab$, 这蕴涵 $b^0 a = ab^0$. 于是 $ea = ae$. 由引理 2.1.10, $Ker\mu = S$. 令 $a\mathcal{H}b$, 即, $a^0 = b^0$. 则 $a\mu a^0 = b^0 \mu b$. 因此, $\mu = \mathcal{H}$ 且 $\mathcal{H}$ 是 S 上的同余. □

定理 2.2.7. 设 $S=(Y;S_\alpha)$ 是一个完全正则半群. 则 $\mathcal{C}=\mathcal{S}$ 当且仅当 S 是正规密群.

证明 如果 S 是正规密群, $a,b\in S$ 满足 $b\mathcal{S}a$, 则 $b^2=ab=ba$. 对任意 $s\in S$, 由 $b^2s=abs=bas$, 我们有 $b^2sb=absb=basb$. 既然 $S/\mathcal{H}$ 是一个正规带, 我们得到 $bsb\mathcal{H}b^2sb=absb\mathcal{H}asb^2\mathcal{H}asb$. 因为 $b=b^0a$, 我们有 $bsb=(bsb)^0bsb=(bsb)^0b^0asb=(bsb)^0asb=asb$. 既然 $b^2=ab=ba$, 我们有 $bsb^2=bsab=bsba$, 这诱导出 $bsb\mathcal{H}bsb^2=bsba\mathcal{H}b^2sa\mathcal{H}bsa$. 则 $bsa=bsa(bsb)^0=bsab^0(bsb)^0=bsb(bsb)^0=bsb$. 既然对任意完全正则半群, 由 [5] 有 $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{S}$, 我们结论 $\mathcal{C}=\mathcal{S}$.

反之, 令 $S=(Y;S_\alpha)$ 是一个完全正则半群, 在 S 上恒有 $\mathcal{C}=\mathcal{S}$. 如果 $a,x,y\in S$, 则 $(axya)^0=a^0(axya)^0=(axya)^0a^0$, 这蕴涵 $(axya)^0\mathcal{S}a^0$. 由假设, $(axya)^0\mathcal{C}a^0$. 因此, $(axya)^0(ayxa)^0(axya)^0=a^0(ayxa)^0(axya)^0=(axya)^0(ayxa)^0a^0$. 则 $(ayxa)^0(axya)^0=(axya)^0(ayxa)^0$. 既然 $(ayxa)^0$ 和 $(axya)^0$ 属于相同的 $\mathcal{D}$- 类, 我们有 $(ayxa)^0=(axya)^0$. 由引理 1.1.12, S 是正规密群. □

命题 2.2.8. 设 S 是一个完全正则半群. 则偏序关系 $\mathcal{N}=\leq$.

证明 如果 $a,b\in S$ 满足 $a\leq b$, 则存在 $e,f\in E(S)$ 使得 $a=be=fb$. 因此 $a=ab^0=ab^{-1}b$ 且 $a=b^0a=bb^{-1}a$. 于是 $ab^{-1}a=fbb^{-1}a=fb^0a=fa=fb=a$, $a=ab^{-1}a=ab^{-1}b=bb^{-1}a$. 我们有 $a\mathcal{N}b$. 既然对任意正则半群, 总有 $\mathcal{N}\subseteq\leq$, 命题成立. □

我们举一个例子说明上述命题的条件不是必须的.

例 2.2.9. 令 $I_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, I_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, I_4=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, I_5=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $S=\{I_1,I_2,I_3,I_4,I_5\}$ 是一个矩阵半群. 容易看到 S 是逆半群而不是完全正则半群. 二元关系 $\mathcal{N}=\{(I_1,I_2),(I_1,I_3),(I_1,I_4),(I_1,I_5)\}=\leq$. □

推论 2.2.10. 设 $S=(Y;S_\alpha)$ 是完全正则半群. 则 $\mathcal{S}=\mathcal{N}$ 当且仅当 S 是一个密群.

证明 由定理 2.2.6 和命题 2.2.8 得到. □

推论 2.2.11. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 完全正则半群. 则偏序关系 $\mathcal{C} = \mathcal{S} = \mathcal{N} = \leq$ 当且仅当 S 是一个正规密群.

证明 由定理 2.2.6 和定理 2.2.7 得到 □

设 S 是一个半群. 我们定义二元关系 $\ll$ ([1]):

$$\ll = \{(a,b) \in S \times S \mid a = xb = by,\ xa = a,\ x,y \in S^1.\}$$

容易看到 $\ll$ 是 S 上的一个偏序关系.

命题 2.2.12. 令 S 是半群. 则二元关系 $\mathcal{N} = \ll$ 当且仅当 S 是正则半群.

证明 如果 S 是正则半群且 $a,b \in S$ 满足 $a \ll b$, 则存在 $x,y \in S^1$ 使得 $a = xb = by$, $xa = a$. 不妨假设 $x,y \in S$. 令 $a' \in V(a)$. 则 $ay = xby = xa = a$, $a = aa'a = bya'a$ 且 $ya'a \cdot ya'a = ya'aa'a = ya'a$. 完全类似地, $aa'x \cdot aa'x = aa'x$. 因此 $a = eb = bf$, 这里 $e = aa'x$, $f = ya'a$ 是 S 中的幂等元. 容易证明 $a'x,\ ya' \in V(a)$. 令 $a^* = a'x$, $a^{**} = ya'$. 则 $a = aa^*b = ba^{**}a$. 设 $\bar{a} = a^{**}aa^*$. 则 $a\bar{a}b = aa^{**}aa^*b = aya'aa'xb = aa'aa'a = a$. 类似地, $a = b\bar{a}a = a\bar{a}a$. 因此, $a\mathcal{N}b$. 而 $\mathcal{N} \subseteq \ll$ 是平凡的.

设在 S 上有 $\mathcal{N} = \ll$ on S. 既然 $\ll$ 是 S 上的偏序关系, 而 $\mathcal{N}$ 是 S 上的偏序关系当且仅当 S 正则半群 [5], 故命题成立. □

既然在任意半群上 $\mathcal{C}$ 总是相容的而在正规密群上 $\mathcal{C} = \ll$ 我们诱导出自然偏序关系在正规密群上是相容的.

§2.3 局部左正则纯正密群

本章最后给出局部左正则纯正密群所满足的等式. 事实上, 半群的局部方法是研究半群代数理论的重要方法. 例如我们知道半群 S 是完全单半群当且仅当 S 是局部群, 而 S 是正规密群当且仅当 S 是局部 Clifford 半群. 下面的引理介绍讨论完全正则半群的局部的一般方法.

引理 2.3.1. [[15] Proposition II.7.3] 如果 $\mathcal{V} = [u_\alpha = v_\alpha]_{\alpha \in A} \in \mathcal{L}(\mathcal{CR})$, 则 $L\mathcal{V} = [u_\alpha(xx_ix) = v_\alpha(xx_ix)]_{\alpha \in A}$, 其中 $x \notin \cup_{\alpha \in A}(u_\alpha v_\alpha)$. □

下面的引理是 [15] 中定理 V.4.3 的对偶，我们仍然给出它的证明.

引理 2.3.2. $S \in L\mathcal{LRO}$ 当且仅当 S 满足等式 $axy = axy(ay)^0$.

证明 设 $S \in L\mathcal{LRO}$. 对任意 $a, x, y \in S$, 由引理 2.3.1 和第一章中介绍的左正则纯正密群所满足的等式，我们有 $(yay)(yxy) = (yay)(yxy)(yay)^0$. 做替换 $x \to ax$, $a \to xa$, 则有

$$(yxay)(yaxy) = (yxay)(yaxy)(yxay)^0.$$

用 $(yaxyxay)^{-1}(yax)$ 左乘上式，得

$$(yaxyxay)^0(yaxy) = (yaxyxay)^0(yaxy)(yxay)^0.$$

由引理 1.2.1，我们有

$$yaxy = yaxy(yxay)^0.$$

用 $(axy)^{-1}ax$ 左乘上式，得

$$axy = axy(yxay)^0.$$

用 $(ay)^0$ 右乘上式，得 $axy = axy(ay)^0$.

反之，假设对任意 $a, x, y \in S$, $(axy) = (axy)(ay)^0$. 令 $e \in E(S), b, z \in eSe$, 则 $(bz)^0, (bzb)^0 \le e, (bz)^0\mathcal{R}(bzb)^0$. 因此,

$$(bz)^0 = (bzb)^0(bz)^0 = (bzb)^0(bz)^0e = (bzb)^0(bz)^0e((bzb)^0e)^0 = (bzb)^0.$$

用 b^0 右乘上式，我们有 $bz = bzb^0$. 因此， $S \in L\mathcal{LRO}$. □

引理 2.3.3. $S \in \mathcal{BG}$ 当且仅当 S 满足等式 $a^0(ba)^0 = (ab)^0a^0$.

证明 直接部分的证明由引理 1.2.2 和引理 2.1.1 得到.

反之, 设 S 满足等式 $a^0(ba)^0 = (ab)^0a^0$. 则 $a^0(ba)^0(aba)^0 = (ab)^0a^0(aba)^0 = (ab)^0(aba)^0 = (aba)^0$. 在另一方面， $(aba)^0a^0(ba)^0 = (aba)^0(ba)^0 = (aba)^0$. 因此， $a^0(ba)^0 = (aba)^0$. 类似地， $(ab)^0a^0 = (aba)^0$.

设 $a,b,c\in S$, $a\mathcal{H}b$. 则 $a^0=b^0$.

$$\begin{aligned}(ac)^0(bc)^0 &= (ac)^0b^0(bc)^0=(ac)^0a^0(bc)^0\\ &= (aca)^0(bc)^0=b^0(ca)^0(bc)^0\\ &= b^0(cab^0)^0(bc)^0=(bca)^0(bc)^0\\ &= (bc)^0.\end{aligned}$$

另外,

$$\begin{aligned}(ac)^0(bc)^0 &= (ac)^0c^0(bc)^0=(ac)^0(cbc)^0\\ &= (ac)^0(cba^0c)^0=(ac)^0(cba^{-1}ac)^0\\ &= (ac)^0.\end{aligned}$$

因此, $(ac)^0=(bc)^0$. 类似地, $(ca)^0=(cb)^0$. 故 $\mathcal{H}$ 关系是 S 上的同余. 因此, S 是密群. □

引理 2.3.4. *设 $S\in\mathcal{CR}$, 且对任意 $a,x,y\in S$, $(axy)^0=(axy)^0(ay)^0$. 则 S 满足 $\mathcal{R}$ 优化.*

证明 设对任意 $a,x,y\in S$, $(axy)^0=(a^0xy)^0(ay)^0$. 如果 $e,f,g\in E(S)$, $f,g\leq e$, $f\mathcal{R}g$, 则

$$\begin{aligned}f &= gf=gfe=(gfe)^0\\ &= (gfe)^0(ge)^0(gf)^0g\\ &= g.\end{aligned}$$

因此, 由引理 1.1.11, S 满足 $\mathcal{R}$ 优化. □

引理 2.3.5. *设 $S\in\mathcal{CR}$, 且对任意 $a,x,y\in S$, $(axy)^0=(a^0xy)^0(ay)^0$. 则 S 是密群.*

证明 设对任意 $a,x,y\in S$, $(axy)^0=(a^0xy)^0(ay)^0$. 由引理 1.2.1, 我们有 $(axy)^0a^0\mathcal{R}(axya)^0$. 显然有 $(axy)^0a^0,(axya)^0\leq a^0$. 因此, 由引理 2.3.4, $(axy)^0a^0=(axya)^0$. 取 $x=a^0$, $y=b$, 我们有 $(ab)^0a^0=(aba)^0$. 另外, 取 $x=b$, $y=a$, 则 $(aba)^0=(a^0ba)^0$. 又因为 $a^0(ba)^0\mathcal{R}(a^0ba)^0$, 故 $a^0(ba)^0=(a^0ba)^0$. 因此, 由引理 2.3.3, $a^0(ba)^0=(aba)^0$. 故 S 是密群. □

显然, $(axy)^0=(a^0xy)^0(ay)^0$ 蕴涵 $(axy)^0=(axy)^0(ay)^0$. 因此, 结合命题 1.1.4, 我们得到

引理 2.3.6. 设 $S \in \mathcal{CR}$. $S \in L\mathcal{LROBG}$ 当且仅当对任意 $a, x, y \in S$, $(axy)^0 = (a^0xy)^0(ay)^0$. □

定理 2.3.7. 设 $S \in \mathcal{CR}$. $S \in L\mathcal{LROBG}$ 当且仅当对任意 $a, x, y \in S$, $(axy)^0 = (a^0x^0y^0a^0y^0)^0$.

证明 在 $(axy)^0 = (a^0x^0y^0a^0y^0)$ 中取 $y = x^0$, 我们得到 $(ax)^0 = a^0x^0a^0x^0 = (a^0x^0)^0$. 因此 S 是密群. 从而, $(axy)^0 = (a^0x^0y^0a^0y^0) = (axyay)^0 = ((axy)^0(ay)^0)^0$. 则

$$axy = axy((axy)^0(ay)^0)^0.$$

用 $(ay)^0$ 右乘此式，我们有 $axy = axy(ay)^0$. 由引理 2.3.2， $S \in L\mathcal{LROBG}$.

反之，设 $S \in L\mathcal{LROBG}$. 则由引理 2.3.2， $axy = axy(ay)^0$. 由命题 1.1.4, $S \in \mathcal{BG}$. 故 $(axy)^0 = (a^0x^0y^0a^0y^0)^0$. □

推论 2.3.8. $\mathcal{LQNBG} \subseteq L\mathcal{LROBG}$.

证明 设 $S \in \mathcal{LQNBG}$, 由第一章所介绍的等式, 对任意 $a, x, y \in S$, $(axy)^0 = (axay)^0$. 用 ya 代替 a, 我们有

$$\begin{aligned}
(yaxy)^0 &= (yaxyay)^0 \\
&\Rightarrow y^0(axy)^0 = y^0(axyay)^0 (\text{由引理 1.2.1 和引理 2.1.1}) \\
&\Rightarrow y^0(axy)^0 = y^0((axy)^0ay)^0 \\
&\Rightarrow axyy^0(axy)^0 = axyy^0((axy)^0ay)^0 \\
&\Rightarrow axy(axy)^0 = axy((axy)^0ay)^0 \\
&\Rightarrow axy = axy((axy)^0ay)^0 \\
&\Rightarrow (axy)^0 = (axy((axy)^0ay)^0)^0 \\
&\Rightarrow (axy)^0 = (axyay)^0 \\
&\Rightarrow (axy)^0 = (a^0x^0y^0a^0y^0)^0.
\end{aligned}$$

□

第3章　正则密群的构造

Petrich 在文 [17] 中指出，完全正则半群的结构依赖于三个问题的解决：(1) 完全单半群的结构；(2) 完全单半群的平移包的结构；(3) 引言中参数 $\varphi_{\alpha,\beta},\omega_{\alpha,\beta},\psi_{\alpha,\beta}$ 的构造．Rees 定理完美地解决了第一个问题．第二个问题也被认为基本解决 (参看 [15])．而第三个问题则远远没有解决．对于一些特殊类型的完全正则半群，尤其是密群和纯正群，人们依然有望获得比较满意的结构定理．例如，在文 [15] 中，正规密群被描述成完全单半群的强半格．Yamada 给出了正则纯正群的一个非常漂亮的结构定理．在本章中，我们利用左右正则带和一族群及群之间的同态构造正则密群．

§3.1　引言和主要定理

回忆一个完全正则半群 S 叫做正则密群，如果 S 上的 Green 关系 $\mathcal{H}$ 是一个同余，且 $S/\mathcal{H}$ 是一个正则带．设 $S=\mathcal{M}(I,G,\Lambda;P)$ 是群 G 上的 Rees 矩阵半群，ι 是 G 的单位元，$(1,1')\in I\times\Lambda$．回忆 Sandwich 矩阵 $P=(p_{\lambda i})_{\Lambda\times I}$ 在 $(1,1')$ 处正规化，如果对任意 $i\in I$ 和 $\lambda\in\Lambda$，$p_{\lambda 1}=p_{1'i}=\iota$．令 G 是一个群，$g\in G$．我们用 ε_g 表示 G 的一个内自同构，即 $x\varepsilon_g=g^{-1}xg$，其中 $x\in G$．

我们的主要结果是

定理 3.1.1. *设 $I=(Y;I_\alpha)$ 和 $\Lambda=(Y;\Lambda_\alpha)$ 分别是一个左正则带和右正则带，其中 Y 是一个半格．对每个 $\alpha\in Y$，令 $S_\alpha=\mathcal{M}(I_\alpha,G_\alpha,\Lambda_\alpha;P_\alpha)$ 是群 G_α 上的 Rees 矩阵半群，ι_α 是 G 的单位元，Sandwich 矩阵 P_α 在固定的 $(1_\alpha,1'_\alpha)\in I_\alpha\times\Lambda_\alpha$ 处正规化．表示 $u_{\alpha,\beta}(i)=p^{-1}_{1'_\beta 1'_\alpha,i1_\beta}p_{1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta}$，$v_{\alpha,\beta}(\lambda)=p^{-1}_{1'_\beta\lambda,1_\alpha 1_\beta}$，其中 $\alpha,\beta\in Y$ 且满足 $\alpha\geq\beta$，$i\in I_\alpha,\lambda\in\Lambda_\alpha$．对任意 $\alpha,\beta\in Y$，$\alpha\geq\beta$，令 $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}$ 是 G_α 到 G_β 的同态，满足条件：对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$，$\alpha\geq\beta\geq\gamma$，*

(i) $\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha}=1_{G_\alpha}$.

(ii) $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\tilde{\theta}_{\beta,\gamma}=\tilde{\theta}_{\alpha,\gamma}\varepsilon_{u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)}$.

(iii) $p_{\lambda i}\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}=v_{\alpha,\beta}(\lambda)p_{1'_\beta\lambda,i1_\beta}u_{\alpha,\beta}(i)$，*对任意* $i\in I_\alpha$ *和* $\lambda\in\Lambda_\alpha$.

(iv) $p^{-1}_{\eta,iq}p_{\eta,i1_\beta}x\sigma_{\alpha,\beta} = x\sigma_{\alpha,\beta}p_{1'_\beta\lambda,q}p^{-1}_{\eta\lambda,q}$, 对任意 $q \in I_\beta$, $\eta \in \Lambda_\beta$ 和 $x = (i, g, \lambda) \in S_\alpha$, 其中

$$x\sigma_{\alpha,\beta} = u_{\alpha,\beta}(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(\lambda).$$

如果 $x = (i, g, \lambda) \in S_\alpha$, $y = (j, h, \mu) \in S_\beta$, 在 $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ 定义乘法 $*$:

$$x * y = (ij, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta}, \lambda\mu).$$

则 S 是一个正则密群. 反之每一个正则密群都能如此构造.

下面我们分两节来证明本章的主要结果.

§3.2 直接部分的证明

在本节里, 我们采用第一节的符号和说明. 证明定理 3.1.1 的难点在于验证第一节所定义的运算满足结合律. 我们在努力揭示左正则带和右正则带对第二个坐标的乘法的影响. 我们发现它们是通过影响 Sandwich 矩阵的元素来对第二个坐标的乘法施加影响的. 换句话说, 正则密群的乘法运算是由它的核的乘法运算决定的.

作为定理 3.1.1 中条件 (iv) 的一个直接结果, 我们有

引理 3.2.1. 设 $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $i \in I_\alpha$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$, $q, k \in I_\beta$, $\xi, \eta \in \Lambda_\beta$.

(1) 如果 $iq = ik$, 则 $p_{\eta\lambda,q}p^{-1}_{\xi\lambda,q} = p_{\eta\lambda,k}p^{-1}_{\xi\lambda,k}$.

(2) 如果 $\eta\lambda = \xi\lambda$, 则 $p^{-1}_{\xi,ik}p_{\xi,iq} = p^{-1}_{\eta,ik}p_{\eta,iq}$.

(3) $p_{\xi\lambda,i1_\beta} = p_{\eta\lambda,i1_\beta}$.

(4) $p_{1'_\beta\lambda,ik} = p_{1'_\beta\lambda,iq}$.

证明 假设 $x = (i, g, \lambda) \in S_\alpha$, $iq = ik$, 由条件 (iv),

$$x\sigma_{\alpha,\beta}p_{1'_\beta\lambda,q}p^{-1}_{\eta\lambda,q} = p^{-1}_{\eta,iq}p_{\eta,i1_\beta}x\sigma_{\alpha,\beta} = p^{-1}_{\eta,ik}p_{\eta,i1_\beta}x\sigma_{\alpha,\beta} = x\sigma_{\alpha,\beta}p_{1'_\beta\lambda,k}p^{-1}_{\eta\lambda,k}.$$

因此, $x\sigma_{\alpha,\beta}p_{1'_\beta\lambda,q} = x\sigma_{\alpha,\beta}p_{1'_\beta\lambda,k}p^{-1}_{\eta\lambda,k}p_{\eta\lambda,q}$. 用 ξ 代替 η, 我们有 $x\sigma_{\alpha,\beta}p_{1'_\beta\lambda,q} = x\sigma_{\alpha,\beta}p_{1'_\beta\lambda,k}p^{-1}_{\xi\lambda,k}p_{\xi\lambda,q}$. 所以, $p^{-1}_{\eta\lambda,k}p_{\eta\lambda,q} = p^{-1}_{\xi\lambda,k}p_{\xi\lambda,q}$. 我们证明了 (1) 成立.

如果 $\eta\lambda = \xi\lambda$, 由条件 (iv),

$$p^{-1}_{\eta,iq}p_{\eta,i1_\beta}x\sigma_{\alpha,\beta} = x\sigma_{\alpha,\beta}p_{1'_\beta\lambda,q}p^{-1}_{\eta\lambda,q} = x\sigma_{\alpha,\beta}p_{1'_\beta\lambda,q}p^{-1}_{\xi\lambda,q} = p^{-1}_{\xi,iq}p_{\xi,i1_\beta}x\sigma_{\alpha,\beta}.$$

因此, $p_{\xi,i1_\beta}x\sigma_{\alpha,\beta} = p_{\xi,iq}p^{-1}_{\eta,iq}p_{\eta,i1_\beta}x\sigma_{\alpha,\beta}$. 用 k 代替 q, 我们有 $p_{\xi,i1_\beta}x\sigma_{\alpha,\beta} = p_{\xi,ik}p^{-1}_{\eta,ik}p_{\eta,i1_\beta}x\sigma_{\alpha,\beta}$. 因此, $p_{\xi,iq}p^{-1}_{\eta,iq} = p_{\xi,ik}p^{-1}_{\eta,ik}$. 这样 (2) 成立.

既然 P_β 在 $(1_\beta, 1'_\beta) \in I_\beta \times \Lambda_\beta$ 处正规化, 在 (1) 中取 $k = 1_\beta$, $q = i1_\beta$, 在 (2) 中取 $\xi = 1'_\beta$, $\eta = 1'_\beta\lambda$, 则 (3) 和 (4) 同时成立. □

从这个引理可以看出, Sandwich 矩阵的元素是非常不自由的, 尽管完全单半群的 Sandwich 矩阵的元素是自由的. 这恰恰为我们刻画正则密群的结构提供了可能.

下面刻画群同态对 Sandwich 矩阵的元素的影响.

引理 3.2.2. 令 $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $i \in I_\alpha$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$. 则

(1) $(u_{\alpha,\alpha\beta}(i))\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} = u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})u_{\alpha,\alpha\beta\gamma}(i)u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta})$.

(2) $(v_{\alpha,\alpha\beta}(\lambda))\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} = u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)$.

证明 (1). 由 $u_{\alpha,\alpha\beta}(i)$ 的定义和条件 (iii), 我们有

$$\begin{aligned}
& (u_{\alpha,\alpha\beta}(i))\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} = (p^{-1}_{1'_{\alpha\beta}1'_\alpha,i1_{\alpha\beta}}p_{1'_{\alpha\beta}1'_\alpha,1_\alpha 1_{\alpha\beta}})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} \\
= \;& u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}1'_\alpha,i1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}1'_\alpha)v_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}1'_\alpha) \\
& p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}1'_\alpha,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta}) \\
= \;& u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}1'_\alpha,i1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}1'_\alpha,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta}) \\
= \;& u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_\alpha,i1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_\alpha,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta}) \\
& (\text{应用引理 3.2.1.(1), 取 } 1_\alpha = i,\ i1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma} = k,\ 1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma} = q, \\
& 1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}1'_\alpha = \xi,\ 1'_{\alpha\beta\gamma}1'_\alpha = \eta \text{ 和 } 1'_\alpha = \lambda.) \\
= \;& u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_\alpha,i1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_\alpha,1_\alpha 1_{\alpha\beta\gamma}}u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta}) \\
& (\text{由引理 3.2.1.(4)}) \\
= \;& u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})u_{\alpha,\alpha\beta\gamma}(i)u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta}).
\end{aligned}$$

(2). 由条件 (iii),

$$\begin{aligned}
(v_{\alpha,\alpha\beta}(\lambda))\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} &= p^{-1}_{1'_{\alpha\beta}\lambda,1_\alpha 1_{\alpha\beta}}\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} \\
&= u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda).
\end{aligned}$$

我们完成了引理的证明. □

下面的三个引理我们用来计算 $(x*y)\sigma_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$, 其中 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, 而 $x\in S_\alpha$, $y\in S_\beta$.

引理 3.2.3. 对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, 和任意 $x=(i,g,\lambda)\in S_\alpha$, 我们有

$$(x\sigma_{\alpha,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}=u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda).$$

证明 既然 $\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$ 是一个同态, 由 $x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
&(x\sigma_{\alpha,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}=(u_{\alpha,\alpha\beta}(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}v_{\alpha,\alpha\beta}(\lambda))\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\\
=\;&(u_{\alpha,\alpha\beta}(i))\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(g\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(v_{\alpha,\alpha\beta}(\lambda))\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\\
=\;&u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})u_{\alpha,\alpha\beta\gamma}(i)u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta})u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta})g\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\\
&u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta})u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1_\alpha 1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)\\
&\text{由引理 3.2.2 和条件 (ii))}\\
=\;&u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})u_{\alpha,\alpha\beta\gamma}(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)\\
=\;&u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})u_{\alpha,\alpha\beta\gamma}(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta\gamma}v_{\alpha,\alpha\beta\gamma}(\lambda)v^{-1}_{\alpha,\alpha\beta\gamma}(\lambda)\\
&p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)\\
=\;&u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,1_\alpha 1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)\\
=\;&u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)\\
&\text{(由引理 3.2.1.(4))}\\
=\;&u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)\\
&\text{(既然 } I \text{ 是左正则带, } 1_\alpha(1_\alpha 1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma})=1_\alpha(1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}).\\
&\text{则由引理 3.2.1.(1), 等式成立.)}
\end{aligned}$$

因此, 需证的等式成立. □

引理 3.2.4. 对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $j\in I_\beta$, 和任意 $x=(i,g,\lambda)\in S_\alpha$,

$$u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(ij)(x\sigma_{\alpha,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}=x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda).$$

证明 由引理 3.2.3, 我们有

$$
\begin{aligned}
& u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(ij)(x\sigma_{\alpha,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} \\
= \ & u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(ij)u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}} \\
& p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda) \\
= \ & u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(ij)u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(i1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta},i1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta},i1_{\alpha\beta\gamma}}x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma} \\
& v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)(\text{由条件 (iv)}) \\
= \ & p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta},ij1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta},1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta},1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta},i1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}} \\
& p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta},i1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta},i1_{\alpha\beta\gamma}}x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)\ \ (\text{由 } u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} \text{ 的定义}) \\
= \ & p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta},ij1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta},i1_{\alpha\beta\gamma}}x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda) \\
= \ & x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)\ \ (\text{由条件 (iv)}).
\end{aligned}
$$

因此，等式成立. □

引理 3.2.5. 对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $y=(j,h,\mu)\in S_\beta$, 和任意 $\lambda\in\Lambda_\alpha$,

$$(y\sigma_{\beta,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}v_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(\lambda\mu)=u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(j1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}.$$

证明 由引理 3.2.3 和 $v_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(\lambda\mu)$ 的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
& (y\sigma_{\beta,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}v_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(\lambda\mu) \\
= \ & u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(j1_{\alpha\beta})y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\mu,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\mu,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}} \\
& v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\mu)v_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(\lambda\mu) \\
= \ & u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(j1_{\alpha\beta})y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\mu,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\mu,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}} \\
& p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\mu,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda\mu,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}} \\
= \ & u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(j1_{\alpha\beta})y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\mu,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda\mu,1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}} \\
= \ & u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(j1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}\ (\text{由条件 (iv)}).
\end{aligned}
$$

这样，我们完成了证明. □

引理 3.2.6. 对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, 和任意 $x=(i,g,\lambda)\in S_\alpha$, $y=(j,h,\mu)\in S_\beta$,

$$(x*y)\sigma_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}=x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}.$$

证明 由乘法 $*$ 的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
&(x*y)\sigma_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} = (ij, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta}, \lambda\mu)\sigma_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\\
= \ & u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(ij)(x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}v_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(\lambda\mu)\\
= \ & u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(ij)(x\sigma_{\alpha,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(p_{1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(y\sigma_{\beta,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}v_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(\lambda\mu)\\
= \ & x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)\\
& (p_{1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(y\sigma_{\beta,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}v_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(\lambda\mu) \ \text{(由引理 3.2.4)}\\
= \ & x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}v^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)v_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(1'_{\alpha\beta}\lambda)\\
& p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(j1_{\alpha\beta})(y\sigma_{\beta,\alpha\beta})\tilde{\theta}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}v_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(\lambda\mu) \ \text{(由条件 (iii))}\\
= \ & x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}u_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(j1_{\alpha\beta})\\
& u^{-1}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(j1_{\alpha\beta})p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma} \ \text{(由引理 3.2.5)}\\
= \ & x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}\\
& p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}\\
= \ & x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}\\
& y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma} \text{(既然 } I \text{ 是左正则带，} i(j1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}) = i(j1_{\alpha\beta\gamma}). \text{ 则由引理}\\
& 3.2.1.(1),\ p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta}1_{\alpha\beta\gamma}} = p_{1'_{\alpha\beta\gamma}1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}p^{-1}_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}.)\\
= \ & x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}.
\end{aligned}
$$

因此，等式成立. □

在大量艰苦的准备工作之后，我们证明乘法 $*$ 满足结合律.

引理 3.2.7. *在 $S = \bigcup_{\alpha\in Y} S_\alpha$ 上，定理 3.1.1 中定义的乘法 $*$ 满足结合律.*

证明 对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, 和任意 $x = (i, g, \lambda) \in S_\alpha$, $y = (j, h, \mu) \in S_\beta$, $z = (k, l, \xi) \in S_\gamma$, 由乘法 $*$ 的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
&(x*y)*z = (ij, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{1'_{\alpha\beta}\lambda,j1_{\alpha\beta}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta}, \lambda\mu)*(k,l,\xi)\\
= \ & (ijk, (x*y)\sigma_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda\mu,k1_{\alpha\beta\gamma}}z\sigma_{\gamma,\alpha\beta\gamma}, \lambda\mu\xi)\\
= \ & (ijk, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda\mu,k1_{\alpha\beta\gamma}}z\sigma_{\gamma,\alpha\beta\gamma}, \lambda\mu\xi) \ \text{(由引理 3.2.6)}.
\end{aligned}
$$

用同样的方法，我们得到

$$
\begin{aligned}
&x*(y*z) = (i,g,\lambda)*(jk, y\sigma_{\beta,\beta\gamma}p_{1'_{\beta\gamma}\mu,k1_{\beta\gamma}}z\sigma_{\gamma,\beta\gamma}, \mu\xi)\\
= \ & (ijk, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,jk1_{\alpha\beta\gamma}}(y*z)\sigma_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}, \lambda\mu\xi)\\
= \ & (ijk, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,jk1_{\alpha\beta\gamma}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\mu,k1_{\alpha\beta\gamma}}z\sigma_{\gamma,\alpha\beta\gamma}, \lambda\mu\xi) \ \text{(由引理 3.2.6)}.
\end{aligned}
$$

由条件 (iv), 我们有

$$p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,j1_{\alpha\beta\gamma}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda\mu,k1_{\alpha\beta\gamma}} = p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\lambda,jk1_{\alpha\beta\gamma}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{1'_{\alpha\beta\gamma}\mu,k1_{\alpha\beta\gamma}}.$$

因此， $x*(y*z)=(x*y)*z$. □

引理 3.2.8. *在 $S=\bigcup_{\alpha\in Y}S_\alpha$ 上定义乘法 $*$，则 S 是一个正则密群.*

证明 对任意 $\alpha\in Y$, 在 S_α, 乘法 $*$ 和 S_α 上已给的乘法运算一致. 因此, 由引理 3.2.7, S 是一个完全正则半群. 由乘法 $*$ 的定义, $\mathcal{H}$ 是 S 上的同余. 另外, $S/\mathcal{H}$ 是一个正则带, 既然 I 是一个左正则带而 Λ 是一个右正则带. 因此, S 是正则密群. □

我们完成了定理 3.1.1 的直接部分的证明.

§3.3 相反方向的证明

为了证明定理 3.1.1 的余下的部分, 在这一节里, 我们做如下说明, 并固定一些符号:

(a) $S=(Y,S_\alpha)$ 是一个正则密群, 其中 Y 是一个半格.

(b) 对每个 $\alpha\in Y$, $S_\alpha=\mathcal{M}(I_\alpha,G_\alpha,\Lambda_\alpha;P_\alpha)$ 是群 G_α 上的 Rees 矩阵半群, 群 G_α 的单位元是 ι_α.

(c) 对每个 $\alpha\in Y$, Sandwich 矩阵 P_α 在 $(1_\alpha,1'_\alpha)\in I_\alpha\times\Lambda_\alpha$ 处正规化.

(d) 表示 $e_\alpha=(1_\alpha,\iota_\alpha,1'_\alpha)$, 它是 S_α 的幂等元.

(e) 对任意 $\alpha,\beta\in Y,\alpha\geq\beta$, $i\in I_\alpha$, $\lambda\in\Lambda_\alpha$, 记

$$u_{\alpha,\beta}(i)=p^{-1}_{1'_\beta1'_\alpha,i1_\beta}p_{1'_\beta1'_\alpha,1_\alpha1_\beta} \text{ 和 } v_{\alpha,\beta}(\lambda)=p^{-1}_{1'_\beta\lambda,1_\alpha1_\beta}.$$

我们利用引理 2.1.2 确定正则密群 S 的第一个坐标和第三个坐标的运算. 我们证明它们分别构成左正则带和右正则带.

引理 3.3.1. *设 S 是正则密群, 则*

(1) *对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $i\in I_\alpha$, $j\in I_\beta$, 如下定义乘积 ij:*

$$(i,\ ,\ )(j,\ ,\ )=(ij,\ ,\ ).$$

则 $I=\bigcup_{\alpha\in Y}I_\alpha$ 是一个左正则带.

(2) 对任意 $\alpha,\ \beta \in Y$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$, $\mu \in \Lambda_\beta$, 如下定义乘积 $\lambda\mu$：

$$(\ ,\ \ ,\lambda)(\ ,\ \ ,\mu) = (\ ,\ \ ,\lambda\mu).$$

则 $\Lambda = \bigcup_{\alpha\in Y}\Lambda_\alpha$ 是一个右正则带.

(3) 对任意 $\alpha,\ \beta \in Y$, $i \in I_\alpha$, $j \in I_\beta$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$, $\mu \in \Lambda_\beta$, 在 $B = \bigcup_{\alpha\in Y}(I_\alpha \times \Lambda_\alpha)$ 上定义乘积:

$$(i,\ \ ,\lambda)(j,\ \ ,\mu) = (ij,\ \ ,\lambda\mu).$$

则 B 是一个正则带.

证明 令 $a=(i,g,\lambda)$, $a'=(i,g',\lambda') \in S_\alpha$, 而 $b=(j,h,\mu)$, $b'=(j,h',\mu') \in S_\beta$. 既然 $\mathcal{R}$ 是 S 上的同余 (由引理 2.1.2), 我们有 $ab\mathcal{R}a'b'$. 因此 $ab=(ij,\ \ ,\ \ )$, $a'b'=(ij,\ \ ,\ \ )$, 我们结论 ij 是良定义的. 定义的乘法满足结合律, 既然 S 是结合的. 又由于对任意 $\alpha \in Y$, I_α 是一个左零半群, 故 I 是一个左正则带. 而 (2) 是 (1) 的对偶. 由 (1) 和 (2), 我们得到 (3). □

由引理 3.3.1, 对任意 $\alpha,\beta \in Y$, $x=(i,g,\lambda)\in S_\alpha$, $y=(j,h,\mu)\in S_\beta$, 我们有 $xy=(ij,k,\lambda\mu)\in S_{\alpha\beta}$, 其中 $k \in G_{\alpha\beta}$ 是我们需要决定的.

引理 3.3.2. 对任意的 $x,y \in S$, $(xyx)^0 = x^0(yx)^0 = (xy)^0x^0$, $x(xyx)^0 = (xyx)^0x$.

证明 由引理 1.2.2, 如果 $e,f \in E(S)$, 则 $e(fe)^0 = (ef)^0e = (efe)^0$. 既然 S 密群, 由引理 2.1.1, 对任意 $a,b \in S$, $(ab)^0 = (a^0b^0)^0$. 则我们有 $(xyx)^0 = ((xy)^0x^0)^0 = ((x^0y^0)^0x^0)^0 = ((x^0y^0x^0)^0)^0 = (x^0y^0x^0)^0 = (x^0y^0)^0x^0 = (xy)^0x^0$. 类似地, $(xyx)^0 = x^0(yx)^0$. 因此, $(x(xyx)^0)^0 = ((xyx)^0x)^0 = (xyx)^0$. 从而, $(xyx)^0x = (xyx)^0x(xyx)^0 = x(xyx)^0$. □

在正则密群的构造中, 下面的引理是重要的.

引理 3.3.3. 设 $\alpha,\beta \in Y$ 满足 $\alpha \geq \beta$. 则映射

$$\theta_{\alpha,\beta} : S_\alpha \to S_\beta;\ x \mapsto x\theta_{\alpha,\beta} = x(xe_\beta x)^0$$

是 S_α 到 S_β 的同态.

证明 令 $x, y \in S_\alpha$. 则 $xy\mathcal{L}y$. 由引理 2.1.2, $e_\beta xy\mathcal{L}e_\beta y$. 而由引理 1.2.1, 我们有 $e_\beta xy\mathcal{R}e_\beta\mathcal{R}e_\beta y$. 因此 $(e_\beta xy)^0 = (e_\beta y)^0$. 对偶地, 我们有 $(xye_\beta)^0 = (xe_\beta)^0$. 则由引理 3.3.2,

$$\begin{aligned}
(xy)\theta_{\alpha,\beta} &= xy(xye_\beta xy)^0 = (xye_\beta xy)^0 xy(xye_\beta xy)^0 \\
&= (xye_\beta)^0(xy)^0 xy(xy)^0(e_\beta xy)^0 \quad (\text{由引理 } 3.3.2) \\
&= (xye_\beta)^0 xy(e_\beta xy)^0 = (xe_\beta)^0 xy(e_\beta y)^0 = (xe_\beta)^0 x^0 xyy^0(e_\beta y)^0 \\
&= (xe_\beta x)^0 xy(ye_\beta y)^0 \quad (\text{由引理 } 3.3.2) \\
&= x(xe_\beta x)^0 y(ye_\beta y)^0 = x\theta_{\alpha,\beta} y\theta_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

因此 $\theta_{\alpha,\beta}$ 是一个同态. □

我们注释如果 $S = (Y; S_\alpha)$ 是正规密群, $a \in S_\alpha, \alpha, \beta \in Y, \alpha \geq \beta$, 则 $a \geq a\theta_{\alpha,\beta}$. 因此, $\theta_{\alpha,\beta}$ 是 S 的强半格结构同态.

利用 $\theta_{\alpha,\beta}$, 我们描述 S 的乘法.

引理 3.3.4. 设 $\alpha, \beta \in Y$, $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$. 则

$$xy = (xye_{\alpha\beta})^0 x\theta_{\alpha,\alpha\beta} y\theta_{\beta,\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}xy)^0.$$

证明 由引理 1.2.1, 我们有

$$(xye_{\alpha\beta}x)^0\mathcal{L}(xe_{\alpha\beta}x)^0, \quad (ye_{\alpha\beta}y)^0\mathcal{R}(ye_{\alpha\beta}xy)^0. \tag{3.1}$$

则,

$$\begin{aligned}
&(xye_{\alpha\beta})^0 x\theta_{\alpha,\alpha\beta} y\theta_{\beta,\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}xy)^0 \\
= \ &(xye_{\alpha\beta})^0 x(xe_{\alpha\beta}x)^0 y(ye_{\alpha\beta}y)^0(e_{\alpha\beta}xy)^0 \\
= \ &(xye_{\alpha\beta}x)^0(xe_{\alpha\beta}x)^0 xy(ye_{\alpha\beta}y)^0(ye_{\alpha\beta}xy)^0 \quad (\text{由引理 } 3.3.2) \\
= \ &(xye_{\alpha\beta}x)^0 xy(ye_{\alpha\beta}xy)^0 \ (\text{由 } (3.1)) \\
= \ &xy(ye_{\alpha\beta}xy)^0 \quad (\text{由引理 } 1.2.1) \\
= \ &xy \quad (\text{由引理 } 1.2.1).
\end{aligned}$$

因此等式成立. □

下面的引理刻画 $\theta_{\alpha,\beta}$, $\theta_{\beta,\gamma}$ 和 $\theta_{\alpha,\gamma}$ 的关系.

引理 3.3.5. 令 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, 且满足 $\alpha\geq\beta\geq\gamma$, $x\in S_\alpha$. 则

$$x\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma}=(xe_\beta e_\gamma)^0 x\theta_{\alpha,\gamma}(e_\beta e_\gamma e_\beta x)^0.$$

证明 由引理 1.2.1, 我们有

$$(xe_\beta e_\gamma x)^0\mathcal{L}(xe_\gamma x)^0,\quad (xe_\beta e_\gamma e_\beta x)^0\mathcal{R}(xe_\beta e_\gamma x)^0. \tag{3.2}$$

因此,

$$\begin{aligned}
(x\theta_{\alpha,\beta})\theta_{\beta,\gamma} &= x\theta_{\alpha,\beta}(x\theta_{\alpha,\beta}e_\gamma x\theta_{\alpha,\beta})^0\\
&= x(xe_\beta x)^0(x(xe_\beta x)^0e_\gamma x(xe_\beta x)^0)^0\\
&= x(xe_\beta x)^0(x^0(xe_\beta x)^0e_\gamma x^0(xe_\beta x)^0)^0 \ (\text{由引理 } 2.1.1)\\
&= x(xe_\beta x)^0(xe_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0 \ (\text{由引理 } 3.3.2)\\
&= x(xe_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0 \ (\text{由引理 } 3.3.2)\\
&= x(xe_\beta e_\gamma e_\beta x)^0 \ (\text{由引理 } 2.1.2)\\
&= x(xe_\beta e_\gamma x)^0(xe_\beta e_\gamma e_\beta x)^0 \ (\text{由 } (3.2))\\
&= (xe_\beta e_\gamma x)^0x(xe_\beta e_\gamma e_\beta x)^0 \ (\text{由引理 } 3.3.2)\\
&= (xe_\beta e_\gamma x)^0(xe_\gamma x)^0x(xe_\beta e_\gamma e_\beta x)^0 \ (\text{由 } (3.2))\\
&= (xe_\beta e_\gamma x)^0(xe_\gamma x)^0xx^0(e_\beta e_\gamma e_\beta x)^0 \ (\text{由引理 } 3.3.2)\\
&= (xe_\beta e_\gamma)^0x^0x(xe_\gamma x)^0(e_\beta e_\gamma e_\beta x)^0 \ (\text{由引理 } 3.3.2)\\
&= (xe_\beta e_\gamma)^0x\theta_{\alpha,\gamma}(e_\beta e_\gamma e_\beta x)^0.
\end{aligned}$$

我们完成了证明. □

令 $\alpha,\beta\in Y$ 满足 $\alpha\geq\beta$, $g\in G_\alpha$, 而 $x=(1_\alpha,g,1'_\alpha)\in S_\alpha$. 既然

$$\begin{aligned}
(xe_\beta x)^0 &= ((1_\alpha,g,1'_\alpha)(1_\beta,\iota_\beta,1'_\beta)(1_\alpha,g,1'_\alpha))^0\\
&= (1_\alpha 1_\beta 1_\alpha, p^{-1}_{1'_\alpha 1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\alpha}, 1'_\alpha 1'_\beta 1'_\alpha) \ (\text{由引理 } 3.3.1)\\
&= (1_\alpha 1_\beta, p^{-1}_{1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta}, 1'_\beta 1'_\alpha) \ (\text{既然 } I(\Lambda) \text{ 是左 (右) 正则带}).
\end{aligned}$$

而由引理 1.2.1 和引理 3.3.2, $x\theta_{\alpha,\beta}=x(xe_\beta x)^0\mathcal{H}(xe_\beta x)^0$. 因此，存在唯一的 $g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\in G_\beta$ 使得

$$x\theta_{\alpha,\beta}=(1_\alpha 1_\beta, g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}p^{-1}_{1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta}, 1'_\beta 1'_\alpha). \tag{3.3}$$

我们诱导出映射

$$\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}:G_\alpha\to G_\beta;\ g\mapsto g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}.$$

回忆第二节的证明，我们并没有利用完全单半群间的同态构造正则密群. 在正则密群的构造中，起作用的仅是完全单半群中群之间的同态.

下面，我们分若干引理证明映射 $\bar{\theta}_{\alpha,\beta}$ 是满足定理 3.1.1 的条件 (i)-(iv) 的同态.

引理 3.3.6. $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}$ 是 G_α 到 G_β 的同态且 $\bar{\theta}_{\alpha,\alpha}=1_{G_\alpha}$.

证明 令 $g,g'\in G_\alpha$. 由 (3.3), $(1_\alpha,gg',1'_\alpha)\theta_{\alpha,\beta}=(1_\alpha1_\beta,(gg')\bar{\theta}_{\alpha,\beta}p^{-1}_{1'_\beta1'_\alpha,1_\alpha1_\beta},1'_\beta1'_\alpha)$. 另一方面，

$$\begin{aligned}(1_\alpha,gg',1'_\alpha)\theta_{\alpha,\beta} &= ((1_\alpha,g,1'_\alpha)(1_\alpha,g',1'_\alpha))\theta_{\alpha,\beta}\\ &= (1_\alpha1_\beta,g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}p^{-1}_{1'_\beta1'_\alpha,1_\alpha1_\beta},1'_\beta1'_\alpha)(1_\alpha1_\beta,g'\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}p^{-1}_{1'_\beta1'_\alpha,1_\alpha1_\beta},1'_\beta1'_\alpha)\\ &= (1_\alpha1_\beta,g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}g'\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}p^{-1}_{1'_\beta1'_\alpha,1_\alpha1_\beta},1'_\beta1'_\alpha).\end{aligned}$$

因此 $(gg')\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}=g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}g'\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}$. 我们结论 $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}$ 是一个 G_α 到 G_β 的同态. 而 $\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha}=1_{G_\alpha}$ 是显然的. □

我们证明了 $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}$ 满足定理 3.1.1 的条件 (i).

引理 3.3.7. 设 $\alpha,\beta\in Y$, 且满足 $\alpha\geq\beta$, $(i,g,\lambda)\in S_\alpha$. 则

$$(i,g,\lambda)\theta_{\alpha,\beta}=(i1_\beta,u_{\alpha,\beta}(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(\lambda),1'_\beta\lambda).$$

证明 既然 $(i,\iota_\alpha,1'_\alpha)\in E(S_\alpha)$ 而 $\theta_{\alpha,\beta}$ 是一个同态，我们有

$$\begin{aligned}&(i,\iota_\alpha,1'_\alpha)\theta_{\alpha,\beta}=(i,\iota_\alpha,1'_\alpha)((i,\iota_\alpha,1'_\alpha)e_\beta(i,\iota_\alpha,1'_\alpha))^0\\ =\ &((i,\iota_\alpha,1'_\alpha)(1_\beta,\iota_\beta,1'_\beta)(i,\iota_\alpha,1'_\alpha))^0\ \ (\text{由引理 } 3.3.2)\\ =\ &(i1_\beta i,p^{-1}_{1'_\alpha1'_\beta1'_\alpha,i1_\beta i},1'_\alpha1'_\beta1'_\alpha)\ \ (\text{由引理 } 3.3.1)\\ =\ &(i1_\beta,p^{-1}_{1'_\beta1'_\alpha,i1_\beta},1'_\beta1'_\alpha)\ (\text{既然 } I(\Lambda) \text{ 是左 (右) 正则带})\\ =\ &(i1_\beta,p^{-1}_{1'_\beta1'_\alpha,i1_\beta}p_{1'_\beta1'_\alpha,1_\alpha1_\beta}p^{-1}_{1'_\beta1'_\alpha,1_\alpha1_\beta},1'_\beta1'_\alpha)=(i1_\beta,u_{\alpha,\beta}(i)p^{-1}_{1'_\beta1'_\alpha,1_\alpha1_\beta},1'_\beta1'_\alpha).\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}&(1_\alpha,\iota_\alpha,\lambda)\theta_{\alpha,\beta}=(1_\alpha,\iota_\alpha,\lambda)((1_\alpha,\iota_\alpha,\lambda)e_\beta(1_\alpha,\iota_\alpha,\lambda))^0\\ =\ &((1_\alpha,\iota_\alpha,\lambda)(1_\beta,\iota_\beta,1'_\beta)(1_\alpha,\iota_\alpha,\lambda))^0\\ =\ &(1_\alpha1_\beta,p^{-1}_{1'_\beta\lambda,1_\alpha1_\beta},1'_\beta\lambda)=(1_\alpha1_\beta,v_{\alpha,\beta}(\lambda),1'_\beta\lambda).\end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&(i,g,\lambda)\theta_{\alpha,\beta} = ((i,\iota_\alpha,1'_\alpha)(1_\alpha,g,1'_\alpha)(1_\alpha,\iota_\alpha,\lambda))\theta_{\alpha,\beta} \\
= \ & (i,\iota_\alpha,1'_\alpha)\theta_{\alpha,\beta}(1_\alpha,g,1'_\alpha)\theta_{\alpha,\beta}(1_\alpha,\iota_\alpha,\lambda)\theta_{\alpha,\beta} \\
= \ & (i1_\beta, u_{\alpha,\beta}(i)p^{-1}_{1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta}, 1'_\beta 1'_\alpha)(1_\alpha 1_\beta, g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta} \\
& p^{-1}_{1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta}, 1'_\beta 1'_\alpha)(1_\alpha 1_\beta, v_{\alpha,\beta}(\lambda), 1'_\beta\lambda) \\
= \ & (i1_\beta, u_{\alpha,\beta}(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(\lambda), 1'_\beta\lambda).
\end{aligned}
$$

于是, 引理成立. □

为方便起见, 我们表示 $x\sigma_{\alpha,\beta} = u_{\alpha,\beta}(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(\lambda)$, 其中 $\alpha,\beta\in Y$ 且满足 $\alpha\geq\beta$, 而 $x=(i,g,\lambda)\in S_\alpha$. 于是我们有

$$
x\theta_{\alpha,\beta} = (i1_\beta, x\sigma_{\alpha,\beta}, 1'_\beta\lambda). \tag{3.4}
$$

引理 3.3.8. 令 $\alpha,\beta\in Y$ 满足 $\alpha\geq\beta$, $i\in I_\alpha, \lambda\in\Lambda_\alpha$. 则

$$
p_{\lambda i}\tilde{\theta}_{\alpha,\beta} = v_{\alpha,\beta}(\lambda)p_{1'_\beta\lambda, i1_\beta}u_{\alpha,\beta}(i).
$$

证明 设 $(i,p^{-1}_{\lambda i},\lambda)\in S_\alpha$. 由引理 3.3.7,

$$
(i,p^{-1}_{\lambda i},\lambda)\theta_{\alpha,\beta} = (i1_\beta, u_{\alpha,\beta}(i)p^{-1}_{\lambda i}\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(\lambda), 1'_\beta\lambda).
$$

既然 $(i,p^{-1}_{\lambda i},\lambda)$ 是 S_α 的一个幂等元, 而 $\theta_{\alpha,\beta}$ 是 S_α 到 S_β 的一个同态, 我们有 $u_{\alpha,\beta}(i)p^{-1}_{\lambda i}\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(\lambda) = p^{-1}_{1'_\beta\lambda, i1_\beta}$. 因此 $p_{\lambda i}\tilde{\theta}_{\alpha,\beta} = v_{\alpha,\beta}(\lambda)p_{1'_\beta\lambda,i1_\beta}u_{\alpha,\beta}(i)$. □

这样, 我们验证了 $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}$ 满足定理 3.1.1 的条件 (iii).

引理 3.3.9. 设 $\alpha,\beta\in Y$, $x=(i,g,\lambda)\in S_\alpha$, $y=(j,h,\mu)\in S_\beta$. 则

$$
xy = (ij, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{1'_{\alpha\beta}\lambda, j1_{\alpha\beta}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta}, \lambda\mu).
$$

证明 由引理 3.3.4, 我们有

$$
\begin{aligned}
&xy = (xye_{\alpha\beta})^0 x\theta_{\alpha,\alpha\beta}y\theta_{\beta,\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}xy)^0 \\
= \ & (ij,\iota_{\alpha\beta},1'_{\alpha\beta})x\theta_{\alpha,\alpha\beta}y\theta_{\beta,\alpha\beta}(1_{\alpha\beta},\iota_{\alpha\beta},\lambda\mu) \quad (\text{由引理 } 3.3.1) \\
= \ & (ij,\iota_{\alpha\beta},1'_{\alpha\beta})(i1_{\alpha\beta}, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}, 1'_{\alpha\beta}\lambda)(j1_{\alpha\beta}, y\sigma_{\beta,\alpha\beta}, 1'_{\alpha\beta}\mu) \\
& (1_{\alpha\beta},\iota_{\alpha\beta},\lambda\mu) \ (\text{由 } (3.4)) \\
= \ & (ij, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{1'_{\alpha\beta}\lambda, j1_{\alpha\beta}}y\sigma_{\beta,\alpha\beta}, \lambda\mu).
\end{aligned}
$$

我们完成了证明. □

因此, S 上的乘法运算和定理 3.1.1 定义的运算 $*$ 一致.

引理 3.3.10. 设 $\alpha, \beta \in Y$ 且满足 $\alpha \geq \beta$, $q \in I_\beta$, $\eta \in \Lambda_\beta$, 而 $x = (i, g, \lambda) \in S_\alpha$. 则

$$p_{\eta,iq}^{-1} p_{\eta,i1_\beta} x\sigma_{\alpha,\beta} = x\sigma_{\alpha,\beta} p_{1'_\beta\lambda,q} p_{\eta\lambda,q}^{-1}.$$

证明 令 $y = (1_\beta, \iota_\beta, \eta)$, $z = (q, \iota_\beta, 1'_\beta) \in S_\beta$. 由 $I(\Lambda)$ 的左 (右) 正则性, 我们有 $1_\beta i = 1_\beta i 1_\beta = 1_\beta$, $\eta\lambda 1'_\beta = 1'_\beta \eta\lambda 1'_\beta = 1'_\beta$. 注意对任意 $\beta \in Y$, $u_{\beta,\beta}(1_\beta) = p_{1'_\beta 1'_\beta, 1_\beta 1_\beta}^{-1} p_{1'_\beta 1'_\beta, 1_\beta 1_\beta} = \iota_\beta$. 既然 P_β 在 $(1_\beta, 1'_\beta)$ 处被正规化, 对任意 $\eta \in \Lambda_\beta$, $v_{\beta,\beta}(\eta) = p_{1'_\beta \eta, 1_\beta}^{-1} = \iota_\beta$. 由条件 (i), $\iota_\beta \bar{\theta}_{\beta,\beta} = \iota_\beta$. 因此 $y\sigma_{\beta,\beta} = u_{\beta,\beta}(1_\beta)\iota_\beta \bar{\theta}_{\beta,\beta} v_{\beta,\beta}(\eta) = \iota_\beta$, 由引理 3.3.9,

$$\begin{aligned} (yx)z &= (1_\beta i, y\sigma_{\beta,\beta} p_{1'_\beta \eta, i1_\beta} x\sigma_{\alpha,\beta}, \eta\lambda)z = (1_\beta, p_{\eta,i1_\beta} x\sigma_{\alpha,\beta}, \eta\lambda)(q, \iota_\beta, 1'_\beta) \\ &= (1_\beta, p_{\eta,i1_\beta} x\sigma_{\alpha,\beta} p_{\eta\lambda,q}, \eta\lambda 1'_\beta) = (1_\beta, p_{\eta,i1_\beta} x\sigma_{\alpha,\beta} p_{\eta\lambda,q}, 1'_\beta). \end{aligned}$$

类似地, $y(xz) = (1_\beta, p_{\eta,iq} x\sigma_{\alpha,\beta} p_{1'_\beta\lambda,q}, 1'_\beta)$. 因此,

$$p_{\eta,i1_\beta} x\sigma_{\alpha,\beta} p_{\eta\lambda,q} = p_{\eta,iq} x\sigma_{\alpha,\beta} p_{1'_\beta\lambda,q}.$$

则等式成立. □

这样我们验证了定理 3.1.1 的条件 (iv). 由引理 3.2.1 的完全相同的证明, 我们有

引理 3.3.11. 设 $\alpha, \beta \in Y$ 且满足 $\alpha \geq \beta$, 而 $i \in I_\alpha$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$, $k, q \in I_\beta, \xi, \eta \in \Lambda_\beta$.

(1) 如果 $iq = ik$, 则 $p_{\eta\lambda,q} p_{\xi\lambda,q}^{-1} = p_{\eta\lambda,k} p_{\xi\lambda,k}^{-1}$.

(2) $p_{1'_\beta\lambda,ik} = p_{1'_\beta\lambda,iq}$.

下面的引理描述了 $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}, \tilde{\theta}_{\beta,\gamma}$ 和 $\tilde{\theta}_{\alpha,\gamma}$ 之间的关系.

引理 3.3.12. 设 $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ 且满足 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, 而 $g \in G_\alpha$. 则

$$g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\tilde{\theta}_{\beta,\gamma} = g\tilde{\theta}_{\alpha,\gamma}\varepsilon_{u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)}.$$

证明 令 $x=(1_\alpha, g, 1'_\alpha)\in S_\alpha$. 则由 (3.3), 我们有

$$x\theta_{\alpha,\beta}=(1_\alpha 1_\beta, g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}p^{-1}_{1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta}, 1'_\beta 1'_\alpha).$$

因此, 由引理 3.3.7,

$$\begin{aligned}
x\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma} &= (1_\alpha 1_\beta 1_\gamma, u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)(g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}p^{-1}_{1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta})\tilde{\theta}_{\beta,\gamma}v_{\beta,\gamma}(1'_\beta 1'_\alpha), 1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha)\\
&= (1_\alpha 1_\beta 1_\gamma, u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\tilde{\theta}_{\beta,\gamma}(p^{-1}_{1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta})\tilde{\theta}_{\beta,\gamma}v_{\beta,\gamma}(1'_\beta 1'_\alpha), 1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha)\\
&= (1_\alpha 1_\beta 1_\gamma, u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\tilde{\theta}_{\beta,\gamma}u^{-1}_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}\\
&\quad v^{-1}_{\beta,\gamma}(1'_\beta 1'_\alpha)v_{\beta,\gamma}(1'_\beta 1'_\alpha), 1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha)\ \text{(由引理 3.3.8)}\\
&= (1_\alpha 1_\beta 1_\gamma, u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\tilde{\theta}_{\beta,\gamma}u^{-1}_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}, 1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha)
\end{aligned}$$

在另一方面, 由引理 3.3.5,

$$\begin{aligned}
x\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma} &= (xe_\beta e_\gamma)^0 x\theta_{\alpha,\gamma}(e_\beta e_\gamma e_\beta x)^0\\
&= (1_\alpha 1_\beta 1_\gamma, \iota_\gamma, 1'_\gamma)(1_\alpha 1_\gamma, g\tilde{\theta}_{\alpha,\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\gamma}, 1'_\gamma 1'_\alpha)\\
&\quad (1_\beta 1_\gamma, p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}, 1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha)\ \text{(由引理 3.3.1 和 (3.3))}\\
&= (1_\alpha 1_\beta 1_\gamma, g\tilde{\theta}_{\alpha,\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\gamma}p_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}, 1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha).
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
&u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\tilde{\theta}_{\beta,\gamma}u^{-1}_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}\\
=\ &g\tilde{\theta}_{\alpha,\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\gamma}p_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}.
\end{aligned}$$

即,

$$\begin{aligned}
&u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\tilde{\theta}_{\beta,\gamma}u^{-1}_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)\\
=\ &g\tilde{\theta}_{\alpha,\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\gamma}p_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}p_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}.
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\gamma}p_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}p_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}\\
=\ &p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\gamma}p_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}p_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}\\
&\text{(既然 } I \text{ 是左正则带,}\ \ 1_\alpha(1_\beta 1_\gamma)=1_\alpha(1_\alpha 1_\beta 1_\gamma)\text{. 则由}\\
&\text{引理 3.11.(1), } p_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\beta 1_\gamma}=p_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\beta 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma})\\
=\ &p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\gamma}p_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}=p^{-1}_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}p_{1'_\gamma 1'_\alpha,1_\alpha 1_\beta 1_\gamma}\ \text{(由引理 3.11.(2))}\\
=\ &\iota_\gamma.
\end{aligned}$$

因此 $g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\tilde{\theta}_{\beta,\gamma} = u_{\beta,\gamma}^{-1}(1_\alpha 1_\beta) g\tilde{\theta}_{\alpha,\gamma} u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)$, i.e., $g\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}\tilde{\theta}_{\beta,\gamma} = g\tilde{\theta}_{\alpha,\gamma}\varepsilon_{u_{\beta,\gamma}(1_\alpha 1_\beta)}$. □

因此，我们证明了 $\tilde{\theta}_{\alpha,\beta}$ 满足定理 3.1.1 的条件 (ii).

我们完成了定理 3.1.1 的证明.

§3.4 特殊情况的注记

下面我们把定理 3.1.1 的结论用于一些特殊情况的讨论. 这里仅讨论正规密群和左拟正规密群的情形.

引理 3.4.1. [[15] Proposition V.4.5] *令 S 是一个完全正则半群. 则下列命题等价.*

(i) *S 是左拟正规密群.*

(ii) *$\mathcal{L}$- 关系是一个正规带同余而 $\mathcal{R}$- 关系是一个同余.*

(iii) *S 满足等式 $(axy)^0 = (axay)^0$.* □

注记 3.4.2. *在定理 3.1.1 中，如果 $I = (Y; I_\alpha)$ 是一个左正规带而 $\Lambda = (Y; \Lambda_\alpha)$ 是一个右正规带，则条件 (iv) 自然满足，既然对任意 $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $i \in I_\alpha$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$, $q \in I_\beta$ 和 $\eta \in \Lambda_\beta$, 由 [15] 中的命题 II.3.10, 我们有 $p_{\eta, i1_\beta} = p_{\eta, iq}$ 而 $p_{\eta\lambda, q} = p_{1'_\beta \lambda, q}$. 因此，我们能够得到正规密群的结构定理.*

注记 3.4.3. *在定理 3.1.1 中，如果 $I = (Y; I_\alpha)$ 是一个左正则带而 $\Lambda = (Y; \Lambda_\alpha)$ 是一个右正规带，则条件 (iv) 能够由如下的一个稍微简单的条件代替.*

(iv′) $p_{\eta, i1_\beta} = p_{\eta, iq}$, *对任意 $i \in I_\alpha$, $q \in I_\beta, \eta \in \Lambda_\beta$.*

事实上，对任意 $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $i \in I_\alpha$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$, $q \in I_\beta$ 和 $\eta \in \Lambda_\beta$, 由条件 (iv), $p_{\eta, i1_\beta} = p_{\eta, iq}$, 由 [15] 中命题 II.3.9 对偶， $p_{\eta\lambda, q} = p_{1'_\beta \lambda, q}$. 条件 (iv′) 蕴涵条件 (iv) 是明显的. 这样，我们得到了左拟正规密群的结构.

第4章 密群的构造

本章讨论密群的构造. 回忆第三章我们用左正则带, 群及诱导群同态, 右正则带构造了正则密群. 构造密群时, 框架式结构与之类似. 我们用带和一族群及其同态构造密群. 这是由于密群没有正则性, 我们不得不对完全单半群的结构做技术上的处理. 技术处理目的是整体考察带对第二个坐标的乘法的影响. 另外, 关于结合律的验证, 也面临比第三章更多的困难. 当然, 我们可以使用引言中参数 $\varphi_{\alpha,\beta}$, $\psi_{\alpha,\beta}$ 等构造密群. 但我们发现这是一件非常麻烦的事情.

§4.1 引言和主要结果

称一个完全正则半群 S 为 **密群**, 如果 Green 关系 $\mathcal{H}$ 是 S 上的一个同余. 我们已经知道, 在正则密群 S 上, $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 都是同余. 自然地, $\mathcal{H}$ 也是同余, 且 $S/\mathcal{H}$ 是一个正则带. 又由于一个正则带是左正则带和右正则带的织积, 所以在构造正则密群时, 我们分别考虑左正则带和右正则带对第二个坐标的乘法的影响. 而第一个坐标和第三个坐标则就是通常的织积的乘法. 由于在密群 S 上, $S/\mathcal{H}$ 是一个带, 我们统一处理带对第二个坐标的乘法的影响. 以后我们会发现, 密群失去了正则性, 第三章中对我们的结构定理起非常重要作用的 $\theta_{\alpha,\beta}$ 也不再是同态. 这给我们对问题的处理会带来一些技术上的困难. 幸运的是, 当我们将 $\theta_{\alpha,\beta}$ 限制到每个 $\mathcal{H}$- 类上时, 是一个同态. 且 $\theta_{\alpha,\beta}$ 诱导群同态. 我们利用这个同态及带构造密群.

设 $S=\mathcal{M}(I,G,\Lambda;P)$ 是一个群 G 上的 Rees 矩阵半群, G 的单位元记作 ι. 另设 $B=I\times\Lambda$ 是一个矩形带, 而 $a=(i,\lambda)$, $b=(j,\mu)\in B$, $g,h\in G$. 为了后面的运算方便, 我们把 (i,g,λ) 记作 (a,g) 而把 (j,h,μ) 记作 (b,h). 它们都分别是 S 的元素. 另外, 我们把 $p_{\lambda i}$ 记作 p_a, 这是 Sandwich 矩阵 P 的元素. 这样处理以后, S 的乘法就应该表述为

$$(a,g)(b,h)=(ab,gp_{ba}h).$$

我们相应用 $\mathcal{M}(B,G,P)$ 表示这样的 Rees 矩阵半群 S. 回忆 Sandwich 矩阵 P 正规化的定义以及上述约定, 我们称 P 在 $a\in B$ 处正规化, 如果对任意

的 $b \in B$， $p_{ba} = p_{ab} = \iota$. 设 G 是群， $g \in G$. 我们仍用 ε_g 表示 G 的一个内自同构，即 $x\varepsilon_g = g^{-1}xg$，其中 $x \in G$.

这一章的主要结果是

定理 4.1.1. *设 $B = (Y, B_\alpha)$ 是带，其中 Y 是半格. 对每个 $\alpha \in Y$, 设 $S_\alpha = \mathcal{M}(B_\alpha, G_\alpha; P_\alpha)$ 是一个群 G_α 上的 Rees 矩阵半群， G_α 的单位元记做 ι_α, Sandwich 矩阵 P_α 在 $\widetilde{\alpha} \in B_\alpha$ 处被正规化. 记 $u_{\alpha,\beta}(a) = p^{-1}_{a\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}a\widetilde{\alpha}} p_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\beta}a\widetilde{\alpha}}$, $v_{\alpha,\beta}(a) = p^{-1}_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha}a}$, 其中 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$, $a \in B_\alpha$. 对任意 $\alpha, \beta \in Y, \alpha \geq \beta$, 令 $\theta_{\alpha,\beta}$ 是 G_α 到 G_β 的一个同态且满足下列条件：对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$,*

(i) $\theta_{\alpha,\alpha} = 1_{G_\alpha}$.

(ii) $\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma} = \theta_{\alpha,\gamma}\varepsilon_{u_{\beta,\gamma}(\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha})}$.

(iii) $p_a\theta_{\alpha,\beta} = v_{\alpha,\beta}(a)p_{a\widetilde{\beta}a}u_{\alpha,\beta}(a)$, 对任意 $a \in B_\alpha$.

(iv) $p^{-1}_{acb}p_{a\widetilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta} = x\sigma_{\alpha,\beta}p_{c\widetilde{\beta}a}p^{-1}_{cba}$, 对任意 $b, c \in B_\beta$ 和 $x = (a, g) \in S_\alpha$, 其中

$$x\sigma_{\alpha,\beta} = u_{\alpha,\beta}(a)g\theta_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(a).$$

对任意 $x = (a, g) \in S_\alpha$, $y = (b, h) \in S_\beta$, 在 $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ 上定义乘法 $*$ 运算如下：

$$x * y = (ab, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{b\widetilde{\alpha\beta}a}y\sigma_{\beta,\alpha\beta}).$$

则 S 是密群. 反之，每一个密群在同构的意义下都能如此构造.

由于结构定理的证明很长，象第 3 章一样，我们分两节证明这个定理.

§4.2 直接部分的证明

本节采用上节的说明和符号. 我们分若干引理完成定理 4.1.1 的直接部分的证明. 作为定理 4.1.1 的条件 (iv) 的直接结果，我们有下面四个引理.

引理 4.2.1. *设 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$, $x = (a, g) \in S_\alpha$, $b, c, d \in B_\beta$. 则*

(1) $p^{-1}_{acb}p_{adb}x\sigma_{\alpha,\beta} = x\sigma_{\alpha,\beta}p_{c\widetilde{\beta}a}p^{-1}_{cba}p_{dba}p^{-1}_{d\widetilde{\beta}a}$,

(2) $p^{-1}_{a\widetilde{\beta}b}p_{acb}p^{-1}_{acd}p_{a\widetilde{\beta}d}x\sigma_{\alpha,\beta} = x\sigma_{\alpha,\beta}p_{cba}p^{-1}_{cda}$.

证明 既然对任意 $x=(a,g)\in S_\alpha$, $b,c\in B_\beta$, $p_{acb}^{-1}p_{a\tilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta}=x\sigma_{\alpha,\beta}p_{c\tilde{\beta}a}p_{cba}^{-1}$, 我们有 $p_{a\tilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta}=p_{acb}x\sigma_{\alpha,\beta}p_{c\tilde{\beta}a}p_{cba}^{-1}=p_{adb}x\sigma_{\alpha,\beta}p_{d\tilde{\beta}a}p_{dba}^{-1}$, 其中 $d\in B_\beta$. 因此 (1) 式成立. 类似地, 我们能够证明 (2) 式. □

引理 4.2.2. *设 $\alpha,\beta\in Y$ 且 $\alpha\geq\beta$, $a\in B_\alpha$, $b,c,d,e\in B_\beta$ 满足 $ac\mathcal{R}ad$. 则 $p_{c\tilde{\beta}a}^{-1}p_{d\tilde{\beta}a}=p_{cba}^{-1}p_{dba}=p_{cea}^{-1}p_{dea}$.*

证明 令 $x=(a,g)\in S_\alpha$. 既然 $ac\mathcal{R}ad$, 我们有 $acd=abd$. 则由条件 (iv), $x\sigma_{\alpha,\beta}p_{c\tilde{\beta}a}p_{cba}^{-1}=p_{acb}^{-1}p_{a\tilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta}=p_{adb}^{-1}p_{a\tilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta}=x\sigma_{\alpha,\beta}p_{d\tilde{\beta}a}p_{dba}^{-1}$. 因此, $p_{c\tilde{\beta}a}^{-1}p_{d\tilde{\beta}a}=p_{cba}^{-1}p_{dba}$. 既然 b 是 B_β 的任意元素, 我们有 $p_{c\tilde{\beta}a}^{-1}p_{d\tilde{\beta}a}=p_{cba}^{-1}p_{dba}=p_{cea}^{-1}p_{dea}$. □

类似于上述引理, 我们有

引理 4.2.3. *设 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $a\in B_\alpha$, $b,c,d,e\in B_\beta$ 且 $ca\mathcal{L}da$. 则 $p_{a\tilde{\beta}c}p_{a\tilde{\beta}d}^{-1}=p_{abc}p_{abd}^{-1}=p_{aec}p_{aed}^{-1}$.* □

引理 4.2.4. *设 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $a\in B_\alpha$, $b,c\in B_\beta$. 则 $p_{a\tilde{\beta}a}=p_{a\tilde{\beta}ba}=p_{ac\tilde{\beta}a}$.*

证明 在引理 4.2.2, 取 $c=a\widetilde{\beta}$ 和 $d=\widetilde{\beta}$, 我们有 $p_{a\tilde{\beta}a}=p_{a\tilde{\beta}ba}$, 既然 P_β 在 $\widetilde{\beta}$ 处被正规化. 类似地, 我们有 $p_{a\tilde{\beta}a}=p_{ac\tilde{\beta}a}$. □

上述四个引理说明, 作为密群的半格成分的完全单半群, 它们的 Sandwich 矩阵不是自由的. 我们将反复利用这些引理来简化结合律的验证.

引理 4.2.5. [[18] Lemma II.1.3] *设 $B=(Y;B_\alpha)$ 是一个带而 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$. 如果 $a\in B_\alpha$, $b,c\in B_\beta$, 则 $bac=bc$.* □

引理 4.2.6. *设 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $a,b\in B_\alpha$. 则 $v_{\alpha,\beta}(ab)=v_{\alpha,\beta}(b)$.*

证明 由 $v_{\alpha,\beta}$ 的定义和引理 4.2.5, 我们有 $v_{\alpha,\beta}(ab)=p_{\tilde{\alpha}ab\tilde{\beta}\tilde{\alpha}ab}^{-1}=p_{\tilde{\alpha}b\tilde{\beta}\tilde{\alpha}b}^{-1}=v_{\alpha,\beta}(b)$. □

为了方便, 从引理 4.2.7 到引理 4.2.15, 对于 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, 我们表示

$$\alpha\beta=\xi,\ \alpha\beta\gamma=\delta.$$

引理 4.2.7. *设 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $a\in B_\alpha$. 则*

(1) $(u_{\alpha,\xi}(a))\theta_{\xi,\delta} = u^{-1}_{\xi,\delta}(a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})p^{-1}_{a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}p_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}u_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})$.

(2) $(v_{\alpha,\xi}(a))\theta_{\xi,\delta} = u^{-1}_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a)p^{-1}_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a}v^{-1}_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a)$.

证明 由条件 (iii) 以及 $u_{\alpha,\alpha\beta}$ 的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
& u_{\alpha,\xi}(a)\theta_{\xi,\delta} = (p^{-1}_{a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}p_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}})\theta_{\xi,\delta} \\
= \ & u^{-1}_{\xi,\delta}(a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})p^{-1}_{a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}v^{-1}_{\xi,\delta}(a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})v_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})p_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}u_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}) \\
= \ & u^{-1}_{\xi,\delta}(a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})p^{-1}_{a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}p_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}u_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}) \quad (\text{由引理 } 4.2.6).
\end{aligned}
$$

类似地，我们能够证明 (2) 式. □

引理 4.2.8. 设 $\alpha,\beta,\gamma \in Y$, $a \in B_\alpha$, $b \in B_\xi$. 则

$$
u_{\xi,\delta}(ab)u^{-1}_{\xi,\delta}(a\widetilde{\xi}a)p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} = p^{-1}_{ab\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}a}.
$$

证明 由 $u_{\xi,\delta}$ 的定义，我们有

$$
\begin{aligned}
& u_{\xi,\delta}(ab)u^{-1}_{\xi,\delta}(a\widetilde{\xi}a)p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} = p^{-1}_{ab\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}ab\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\xi}ab\widetilde{\delta}ab\widetilde{\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\xi}}p_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\xi}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} \\
= \ & p^{-1}_{ab\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}ab\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\xi}ab\widetilde{\delta}ab\widetilde{\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}}p_{a\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} \quad (\text{既然 } B \text{ 是带}) \\
= \ & p^{-1}_{ab\xi ab\widetilde{\delta}ab\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\xi}ab\widetilde{\delta}ab\widetilde{\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}}p_{a\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} \quad (\text{由引理 } 4.2.4) \\
= \ & p^{-1}_{ab\widetilde{\delta}ab\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\xi}ab\widetilde{\delta}ab\widetilde{\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}}p_{a\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} \quad (\text{由引理 } 4.2.5) \\
= \ & p^{-1}_{ab\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p_{\widetilde{\xi}ab\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}}p_{a\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} \quad (\text{在引理 } 4.2.2 \text{ 中，取 } a = \xi,\ b = \widetilde{\delta}a, \\
& \quad c = \widetilde{\xi}a\widetilde{\delta},\ d = a\widetilde{\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}} \text{ 而 } e = \widetilde{\delta}a\widetilde{\delta}) \\
= \ & p^{-1}_{ab\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p_{\widetilde{\xi}ab\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}}p_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} \quad (\text{由引理 } 4.2.4) \\
= \ & p^{-1}_{ab\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p_{\widetilde{\xi}ab\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} \quad (\text{由引理 } 4.2.2) \\
= \ & p^{-1}_{ab\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p_{\widetilde{\xi}\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} \quad (\text{由引理 } 4.2.4) \\
= \ & p^{-1}_{ab\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} \\
= \ & p^{-1}_{ab\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}a}}p_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}a}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}a\widetilde{\xi}a} \quad (\text{在引理 } 4.2.3 \text{ 中，取 } b = b\widetilde{\delta},\ c = \widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}},\ d = \widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}a} \\
& \quad \text{而 } e = \widetilde{\xi}a\widetilde{\delta}) \\
= \ & p^{-1}_{ab\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}a}}p_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}a}}p^{-1}_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}a}} \quad (\text{由引理 } 4.2.4) \\
= \ & p^{-1}_{ab\widetilde{\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}a}}.
\end{aligned}
$$

□

引理 4.2.9. 设 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $a\in B_\alpha$. 则

$$u_{\xi,\delta}(\widetilde{\widetilde{\alpha}\xi\widetilde{\alpha}})(v_{\alpha,\xi}(a))\theta_{\xi,\delta}=p^{-1}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a}v^{-1}_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a).$$

证明 由引理 4.2.7.(2), 我们有

$$\begin{aligned}
&u_{\xi,\delta}(\widetilde{\widetilde{\alpha}\xi\widetilde{\alpha}})(v_{\alpha,\xi}(a))\theta_{\xi,\delta}\\
=\;&u_{\xi,\delta}(\widetilde{\widetilde{\alpha}\xi\widetilde{\alpha}})u^{-1}_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a)p^{-1}_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a}v^{-1}_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a)\\
=\;&p^{-1}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a}v^{-1}_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a)\ \ (\text{在引理 4.2.8 中，取 } a=\widetilde{\alpha}a\,,\quad b=\widetilde{\widetilde{\alpha}\xi\widetilde{\alpha}}).
\end{aligned}$$

我们完成了引理的证明. □

引理 4.2.10. 设 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $a\in B_\alpha$, $b\in B_\beta$. 则

$$u_{\xi,\delta}(ab)u^{-1}_{\xi,\delta}(a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})p^{-1}_{a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}=p^{-1}_{ab\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}.$$

证明 由引理 4.2.5, 我们有 $ab=a\widetilde{\alpha}(ab)$. 在引理 4.2.8, 用 $a\widetilde{\alpha}$ 代替 a, 用 ab 代替 b , 则等式成立. □

引理 4.2.11. 设 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $x=(a,g)\in S_\alpha$. 则

$$(x\sigma_{\alpha,\xi})\theta_{\xi,\delta}=u^{-1}_{\xi,\delta}(a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})p^{-1}_{a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}p_{a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}x\sigma_{\alpha,\delta}p_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}a}.$$

证明 由引理 4.2.7.(1),

$$\begin{aligned}
&(x\sigma_{\alpha,\xi})\theta_{\xi,\delta}=(u_{\alpha,\xi}(a)g\theta_{\alpha,\xi}v_{\alpha,\xi}(a))\theta_{\xi,\delta}\\
=\;&u^{-1}_{\xi,\delta}(a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})p^{-1}_{a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}p_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}u_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})g\theta_{\alpha,\xi}\theta_{\xi,\delta}(v_{\alpha,\xi}(a))\theta_{\xi,\delta}\\
=\;&Qu_{\xi,\delta}(\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})u^{-1}_{\xi,\delta}(\widetilde{\widetilde{\alpha}\xi\widetilde{\alpha}})g\theta_{\alpha,\delta}u_{\xi,\delta}(\widetilde{\widetilde{\alpha}\xi\widetilde{\alpha}})(v_{\alpha,\xi}(a))\theta_{\xi,\delta}\\
&(\text{由条件 (ii) 且令 } Q=u^{-1}_{\xi,\delta}(a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha})p^{-1}_{a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}}p_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}})\\
=\;&Qp^{-1}_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}}g\theta_{\alpha,\delta}R\\
&(\text{其中 } R=u_{\xi,\delta}(\widetilde{\widetilde{\alpha}\xi\widetilde{\alpha}})(v_{\alpha,\xi}(a))\theta_{\xi,\delta})\\
=\;&Qp^{-1}_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}}g\theta_{\alpha,\delta}R\ \ (\text{由引理 4.2.5})\\
=\;&Qp^{-1}_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\xi}a\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}a\widetilde{\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi}\widetilde{\alpha}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}\widetilde{\delta}\widetilde{\alpha}\widetilde{\xi}}g\theta_{\alpha,\delta}R\ \ (\text{由引理 4.2.4})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Qp^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}p_{\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}p^{-1}_{\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha\tilde\xi}p_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\delta\tilde\alpha\tilde\xi}g\theta_{\alpha,\delta}R \quad \text{(由引理 4.2.2 和引理 4.2.5)}\\
&= Qp^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}p_{\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}p^{-1}_{\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha\tilde\xi}p_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha\tilde\xi}g\theta_{\alpha,\delta}R \quad \text{(由引理 4.2.4)}\\
&= Qp^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}p_{\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}p^{-1}_{\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}p_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}g\theta_{\alpha,\delta}R \quad \text{(由引理 4.2.2)}\\
&= Qp^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}p_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}g\theta_{\alpha,\delta}R \quad \text{(由引理 4.2.4)}\\
&= Qp^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}p_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}u_{\alpha,\delta}(\tilde\alpha)g\theta_{\alpha,\delta}v_{\alpha,\delta}(\tilde\alpha)v^{-1}_{\alpha,\delta}(\tilde\alpha)R \quad \text{(既然 } u_{\alpha,\delta}(\tilde\alpha)=\iota_\delta\text{)}\\
&= Qp^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}p_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi}x'\sigma_{\alpha,\delta}v^{-1}_{\alpha,\delta}(\tilde\alpha)R \quad \text{(其中 } x'=(\tilde\alpha,g)\text{)}\\
&= Qx'\sigma_{\alpha,\delta}p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p_{\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p^{-1}_{\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}v^{-1}_{\alpha,\delta}(\tilde\alpha)R \quad \text{(应用 4.2.1(1)，取 } a\\
&\quad \text{为 } \tilde\alpha,\ b \text{ 为 } \widetilde{\delta\xi},\ c \text{ 为 } a\widetilde{\xi a\tilde\alpha\delta}, d \text{ 为 } \widetilde{\xi\tilde\alpha\delta}\text{)}\\
&= Qu_{\alpha,\delta}(\tilde\alpha)g\theta_{\alpha,\delta}v_{\alpha,\delta}(\tilde\alpha)p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p_{\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p^{-1}_{\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}R\\
&= Qg\theta_{\alpha,\delta}p^{-1}_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p_{\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p^{-1}_{\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}R\\
&= Qg\theta_{\alpha,\delta}p^{-1}_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p^{-1}_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}R \quad \text{(由引理 4.2.2)}\\
&= Qg\theta_{\alpha,\delta}p^{-1}_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}R \quad \text{(由引理 4.2.4)}\\
&= Qg\theta_{\alpha,\delta}p^{-1}_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}u_{\xi,\delta}(\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha)(v_{\alpha,\xi}(a))\theta_{\xi,\delta}\\
&= Qg\theta_{\alpha,\delta}p^{-1}_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p^{-1}_{\tilde\alpha\tilde\xi\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha a}v^{-1}_{\xi,\delta}(\tilde\alpha a\widetilde{\xi}\tilde\alpha a) \quad \text{(由引理 4.2.9)}\\
&= Qg\theta_{\alpha,\delta}p^{-1}_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha a}v^{-1}_{\xi,\delta}(\tilde\alpha a\widetilde{\xi}\tilde\alpha a) \quad \text{(由引理 4.2.3)}\\
&= Qg\theta_{\alpha,\delta}p^{-1}_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha}R_1 \quad \text{(其中 } R_1=p^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha a}v^{-1}_{\xi,\delta}\tilde\alpha a\widetilde{\xi}\tilde\alpha a\text{)}\\
&= Qg\theta_{\alpha,\delta}p^{-1}_{\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}R_1 \quad \text{(由引理 4.2.2)}\\
&= u^{-1}_{\xi,\delta}(a\tilde\alpha\widetilde{\xi}a\tilde\alpha)p^{-1}_{a\tilde\alpha\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta a\tilde\alpha\tilde\xi a\tilde\alpha}p_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha}g\theta_{\alpha,\delta}R_1 \quad \text{(由引理 4.2.4)}\\
&= Q_1p_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha}u^{-1}_{\alpha,\delta}(a)u_{\alpha,\delta}(a)g\theta_{\alpha,\delta}v_{\alpha,\delta}(a)v^{-1}_{\alpha,\delta}(a)R_1\\
&\quad \text{(固定 } Q_1=u^{-1}_{\xi,\delta}(a\tilde\alpha\widetilde{\xi}a\tilde\alpha)p^{-1}_{a\tilde\alpha\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta a\tilde\alpha\tilde\xi a\tilde\alpha}\text{)}\\
&= Q_1p_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha}p^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\delta a\tilde\alpha}p_{a\tilde\alpha\tilde\delta a\tilde\alpha}x\sigma_{\alpha,\delta}v^{-1}_{\alpha,\delta}(a)R_1\\
&= Q_1p_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha}p^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\delta a\tilde\alpha}p_{a\tilde\alpha a\tilde\delta a\tilde\alpha}x\sigma_{\alpha,\delta}v^{-1}_{\alpha,\delta}(a)R_1 \quad \text{(由引理 4.2.4)}\\
&= Q_1p_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha}p^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\delta\tilde\alpha}x\sigma_{\alpha,\delta}v^{-1}_{\alpha,\delta}(a)R_1 \quad \text{(由引理 4.2.2)}\\
&= Q_1p_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi a\tilde\alpha}p^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\delta\tilde\alpha}x\sigma_{\alpha,\delta}v^{-1}_{\alpha,\delta}(a)R_1 \quad \text{(由引理 4.2.4)}\\
&= Q_1p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi a\tilde\alpha}p^{-1}_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha}p_{a\tilde\delta\tilde\alpha}x\sigma_{\alpha,\delta}v^{-1}_{\alpha,\delta}(a)R_1 \quad \text{(由引理 4.2.2)}\\
&= Q_2x\sigma_{\alpha,\delta}p_{\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta a}p^{-1}_{\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha a}v^{-1}_{\alpha,\delta}(a)R_1\\
&\quad \text{(由条件 (iv), 其中 } Q_2=Q_1p_{a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi a\tilde\alpha}\text{)}\\
&= Q_2x\sigma_{\alpha,\delta}p_{\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta a}p^{-1}_{\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha a}p_{\tilde\alpha a\tilde\delta\tilde\alpha a}p^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha a}v^{-1}_{\xi,\delta}(\tilde\alpha a\widetilde{\xi}\tilde\alpha a)\\
&= Q_2x\sigma_{\alpha,\delta}p_{\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta a}p^{-1}_{\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha a}p_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\alpha a}p^{-1}_{\tilde\alpha a\tilde\xi a\tilde\alpha\tilde\delta\tilde\xi\tilde\alpha a}v^{-1}_{\xi,\delta}(\tilde\alpha a\widetilde{\xi}\tilde\alpha a) \quad \text{(由引理 4.2.4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= Q_2 x\sigma_{\alpha,\delta} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a} p^{-1}_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\alpha}a} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\alpha}a} p^{-1}_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a} v^{-1}_{\xi,\delta}(\tilde{\alpha}a\widetilde{\xi\tilde{\alpha}a}) \quad (\text{由引理 } 4.2.2)\\
&= Q_2 x\sigma_{\alpha,\delta} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a} p^{-1}_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\alpha}a} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\alpha}a} p^{-1}_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\alpha}a} v^{-1}_{\xi,\delta}(\tilde{\alpha}a\widetilde{\xi\tilde{\alpha}a}) \quad (\text{由引理 } 4.2.4)\\
&= Q_2 x\sigma_{\alpha,\delta} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a} p^{-1}_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a} v^{-1}_{\xi,\delta}(\tilde{\alpha}a\widetilde{\xi\tilde{\alpha}a})\\
&= Q_2 x\sigma_{\alpha,\delta} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a} p^{-1}_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a} p_{\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a\tilde{\delta}\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a}\\
&= Q_2 x\sigma_{\alpha,\delta} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a} p^{-1}_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a} p_{\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a\tilde{\delta}\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a} \quad (\text{既然 } B \text{ 是带})\\
&= Q_2 x\sigma_{\alpha,\delta} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a} p^{-1}_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}\tilde{\alpha}a} \quad (\text{由引理 } 4.2.4)\\
&= Q_2 x\sigma_{\alpha,\delta} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a} = u^{-1}_{\xi,\delta}(a\tilde{\alpha}\widetilde{\xi a\tilde{\alpha}}) p^{-1}_{a\tilde{\alpha}\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a\tilde{\alpha}\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}} p_{a\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}} x\sigma_{\alpha,\delta} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a}.
\end{aligned}
$$

我们完成了引理的证明. □

引理 4.2.12. 设 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $x=(a,g)\in S_\alpha$, $b\in B_\beta$. 则

$$u_{\xi,\delta}(ab)(x\sigma_{\alpha,\xi})\theta_{\xi,\delta} = x\sigma_{\alpha,\delta} p_{b\tilde{\delta}a} p^{-1}_{b\tilde{\delta}\tilde{\xi}a} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}a}.$$

证明 由引理 4.2.11, 我们有

$$
\begin{aligned}
& u_{\xi,\delta}(ab)(x\sigma_{\alpha,\xi})\theta_{\xi,\delta}\\
&= u_{\xi,\delta}(ab) u^{-1}_{\xi,\delta}(a\tilde{\alpha}\widetilde{\xi a\tilde{\alpha}}) p^{-1}_{a\tilde{\alpha}\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a\tilde{\alpha}\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}} p_{a\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}} x\sigma_{\alpha,\delta} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a}\\
&= p^{-1}_{ab\tilde{\delta}\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}} p_{a\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}} x\sigma_{\alpha,\delta} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a} \quad (\text{由引理 } 4.2.10)\\
&= x\sigma_{\alpha,\delta} p_{b\tilde{\delta}a} p^{-1}_{b\tilde{\delta}\tilde{\xi}a} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}a} p^{-1}_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}a} \quad (\text{由引理 } 4.2.1(1))\\
&= x\sigma_{\alpha,\delta} p_{b\tilde{\delta}a} p^{-1}_{b\tilde{\delta}\tilde{\xi}a} p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\tilde{\delta}\tilde{\xi}a}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

引理 4.2.13. 设 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $a\in B_\alpha$, $y=(b,h)\in S_\beta$. 则

$$y\sigma_{\beta,\xi}\theta_{\xi,\delta}v_{\xi,\delta}(ab) = u^{-1}_{\xi,\delta}(b\tilde{\beta}\widetilde{\xi b\tilde{\beta}}) p^{-1}_{b\tilde{\beta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}b\tilde{\beta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}} p_{b\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}} p^{-1}_{b\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\xi}a} p_{b\tilde{\delta}\tilde{\xi}a} y\sigma_{\beta,\delta}.$$

证明 由引理 4.2.11,

$$
\begin{aligned}
& y\sigma_{\beta,\xi}\theta_{\xi,\delta}v_{\xi,\delta}(ab)\\
&= u^{-1}_{\xi,\delta}(b\tilde{\beta}\widetilde{\xi b\tilde{\beta}}) p^{-1}_{b\tilde{\beta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}b\tilde{\beta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}} p_{b\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}} y\sigma_{\beta,\delta} p_{\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}b} p^{-1}_{\tilde{\xi}ab\tilde{\delta}\tilde{\xi}ab}\\
&= u^{-1}_{\xi,\delta}(b\tilde{\beta}\widetilde{\xi b\tilde{\beta}}) p^{-1}_{b\tilde{\beta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}b\tilde{\beta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}} p_{b\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}} y\sigma_{\beta,\delta} p_{\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}b} p^{-1}_{\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\xi}ab} \quad (\text{由引理 } 4.2.4)\\
&= u^{-1}_{\xi,\delta}(b\tilde{\beta}\widetilde{\xi b\tilde{\beta}}) p^{-1}_{b\tilde{\beta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}b\tilde{\beta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}} p_{b\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\xi}b\tilde{\beta}} p^{-1}_{b\tilde{\xi}b\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\xi}a} p_{b\tilde{\delta}\tilde{\xi}a} y\sigma_{\beta,\delta} \quad (\text{由引理 } 4.2.1.(2)).
\end{aligned}
$$

因此，结论成立. □

引理 4.2.14. 设 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $a\in B_\alpha$, $y=(b,h)\in S_\beta$. 则

$$p_{b\widetilde{\xi a}}\theta_{\xi,\delta}y\sigma_{\beta,\xi}\theta_{\xi,\delta}v_{\xi,\delta}(ab)=p^{-1}_{\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\widetilde{\xi a}}}p_{b\widetilde{\delta\widetilde{\xi a}}}y\sigma_{\beta,\delta}.$$

证明 由引理 4.2.13,

$$\begin{aligned}
& p_{b\widetilde{\xi a}}\theta_{\xi,\delta}y\sigma_{\beta,\xi}\theta_{\xi,\delta}v_{\xi,\delta}(ab)\\
= \ & p_{b\widetilde{\xi a}}\theta_{\xi,\delta}u^{-1}_{\xi,\delta}(b\widetilde{\beta\widetilde{\xi b\widetilde{\beta}}})p^{-1}_{b\overline{\beta\xi}b\overline{\beta\delta}b\overline{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}p_{b\widetilde{\xi b\widetilde{\beta\delta}\widetilde{\xi b\widetilde{\beta}}}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi a}}}p_{b\widetilde{\delta\widetilde{\xi a}}}y\sigma_{\beta,\delta}\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}u_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})u^{-1}_{\xi,\delta}(b\widetilde{\beta\widetilde{\xi b\widetilde{\beta}}})p^{-1}_{b\widetilde{\beta\widetilde{\xi}}b\widetilde{\beta\delta}b\widetilde{\beta\widetilde{\xi}}b\widetilde{\beta}}R\\
& (\text{其中 } R=p_{b\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi}b\widetilde{\beta}}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi a}}}p_{b\widetilde{\delta\widetilde{\xi a}}}y\sigma_{\beta,\delta}\text{ ，由条件 (iii)})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}u_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p^{-1}_{\widetilde{\xi b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta\delta}b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta\xi}}}p_{b\overline{\beta\xi}b\overline{\beta\xi\delta}b\overline{\beta\xi}b\overline{\beta\xi}}p^{-1}_{b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta\delta}b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}u_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p^{-1}_{\widetilde{\xi b\widetilde{\beta\delta}b\widetilde{\beta\xi}}}p_{b\widetilde{\beta\xi\delta}b\widetilde{\beta\xi}}p^{-1}_{b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta\delta}b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\ \ (\text{由引理 4.2.5})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}u_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p^{-1}_{\widetilde{\xi b\widetilde{\beta\delta}b\widetilde{\beta\xi}}}p_{b\overline{\beta\xi}b\overline{\beta\delta}b\overline{\beta\xi}}p^{-1}_{b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta\delta}b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\ \ (\text{由引理 4.2.4})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}u_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p^{-1}_{\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi}}}p_{b\overline{\beta\xi}b\overline{\beta\delta\xi}}p^{-1}_{b\overline{\beta\xi}b\overline{\beta\delta}b\overline{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\ \ (\text{由引理 4.2.2})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi}}}p_{\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi}}}p_{b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta\delta\xi}}p^{-1}_{b\overline{\beta\xi}b\overline{\beta\delta}b\overline{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\ \ (\text{由引理 4.2.5})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi}}p_{\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi}}}p_{b\overline{\beta\xi}b\overline{\beta\delta\xi}}p^{-1}_{b\widetilde{\beta\xi}b\overline{\beta\delta}b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\ \ (\text{由引理 4.2.4})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\xi}}p_{\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi}}}p_{b\widetilde{\beta\xi}b\overline{\beta\delta\xi}}p^{-1}_{b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta\delta}b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\ \ (\text{由引理 4.2.2})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\xi}}p_{\overline{\xi\delta\xi}}p^{-1}_{\widetilde{\xi\delta\xi}}p_{b\widetilde{\beta\xi}b\overline{\beta\delta\xi}}p^{-1}_{b\widetilde{\beta\xi}b\overline{\beta\delta}b\overline{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\ \ (\text{由引理 4.2.4})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\xi}}p_{b\widetilde{\beta\xi}b\overline{\beta\delta\xi}}p^{-1}_{b\widetilde{\beta\xi}b\overline{\beta\delta}b\overline{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\xi}b\widetilde{\beta}}p_{b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta\delta\xi}b\widetilde{\beta}}p^{-1}_{b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta\delta}b\widetilde{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\ \ \ (\text{由引理 4.2.3})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\xi}b\widetilde{\beta}}p_{b\overline{\beta\xi}b\overline{\beta\delta}b\overline{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}p^{-1}_{b\widetilde{\beta\xi}b\overline{\beta\delta}b\overline{\beta\xi}b\widetilde{\beta}}R\ \ \ (\text{由引理 4.2.4})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta}b\widetilde{\xi a}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\xi}b\widetilde{\beta}}R\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\widetilde{\xi a}}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\widetilde{\xi}}b\widetilde{\beta}}R\ \ (\text{由引理 4.2.4})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi a}}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi}b\widetilde{\beta}}}p_{b\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi}b\widetilde{\beta}}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi b\widetilde{\beta\delta\widetilde{\xi a}}}}p_{b\widetilde{\delta\xi a}}y\sigma_{\beta,\delta}\ \ (\text{由引理 4.2.3})\\
= \ & v_{\xi,\delta}(b\widetilde{\xi a})p_{b\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi a}}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi a}}}p_{b\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi a}}}p^{-1}_{b\widetilde{\xi b\overline{\beta\delta\xi a}}}p_{b\widetilde{\delta\widetilde{\xi a}}}y\sigma_{\beta,\delta}\ \ (\text{由引理 4.2.3})\\
= \ & p^{-1}_{\widetilde{\xi a}\widetilde{\delta\widetilde{\xi a}}}p_{b\widetilde{\delta\widetilde{\xi a}}}y\sigma_{\beta,\delta}. \qquad\square
\end{aligned}$$

引理 4.2.15. 设 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $x=(a,g)\in S_\alpha$, $y=(b,h)\in S_\beta$. 则

$$(x*y)\sigma_{\xi,\delta}=x\sigma_{\alpha,\delta}p_{b\widetilde{\delta a}}y\sigma_{\beta,\delta}.$$

证明 由引理 4.2.13 和引理 4.2.14,

$$
\begin{aligned}
(x*y)\sigma_{\xi,\delta} &= (ab, x\sigma_{\alpha,\xi}p_{b\tilde{\xi}a}y\sigma_{\beta,\xi})\sigma_{\xi,\delta} \\
&= u_{\xi,\delta}(ab)(x\sigma_{\alpha,\xi})\theta_{\xi,\delta}p_{b\tilde{\delta}a}\theta_{\xi,\delta}(y\sigma_{\beta,\xi})\theta_{\xi,\delta}v_{\xi,\delta}(ab) \\
&= x\sigma_{\alpha,\delta}p_{b\tilde{\delta}a}p^{-1}_{b\widetilde{\delta\tilde{\xi}a}}p_{\tilde{\xi}a\tilde{\alpha}\widetilde{\delta\tilde{\xi}a}}p^{-1}_{\tilde{\xi}a\widetilde{\delta\tilde{\xi}a}}p_{b\widetilde{\delta\tilde{\xi}a}}y\sigma_{\beta,\delta} \\
&= x\sigma_{\alpha,\delta}p_{b\tilde{\delta}a}p^{-1}_{b\widetilde{\delta\tilde{\xi}a}}p_{\tilde{\xi}a\widetilde{\delta\tilde{\xi}a}}p^{-1}_{\tilde{\xi}a\widetilde{\delta\tilde{\xi}a}}p_{b\widetilde{\delta\tilde{\xi}a}}y\sigma_{\beta,\delta} \quad (\text{由引理 } 4.2.4) \\
&= x\sigma_{\alpha,\delta}p_{b\tilde{\delta}a}y\sigma_{\beta,\delta}.
\end{aligned}
$$

□

引理 4.2.16. *在 $S=\bigcup_{\alpha\in Y}S_\alpha$ 上, 定理 4.1.1 中定义的乘法 $*$ 满足结合律.*

证明 对任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, 和任意的 $x=(a,g)\in S_\alpha$, $y=(b,h)\in S_\beta$, $z=(c,k)\in S_\gamma$, 由引理 4.2.14, 我们有

$$
\begin{aligned}
(x*y)*z &= (ab, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{b\widetilde{\alpha\beta}a}y\sigma_{\beta,\alpha\beta})*(c,k) \\
&= (abc, (x*y)\sigma_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}p_{c\widetilde{\alpha\beta}\gamma ab}z\sigma_{\gamma,\alpha\beta\gamma}) \\
&= (abc, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{b\widetilde{\alpha\beta}\gamma a}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{c\widetilde{\alpha\beta}\gamma ab}z\sigma_{\gamma,\alpha\beta\gamma}).
\end{aligned}
$$

类似地, $x*(y*z)=(abc, x\sigma_{\alpha,\alpha\beta\gamma}p_{bc\widetilde{\alpha\beta}\gamma a}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{c\widetilde{\alpha\beta}\gamma b}z\sigma_{\gamma,\alpha\beta\gamma})$. 由条件 (iv), $p_{b\widetilde{\alpha\beta}\gamma a}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{c\widetilde{\alpha\beta}\gamma ab}=p_{bc\widetilde{\alpha\beta}\gamma a}y\sigma_{\beta,\alpha\beta\gamma}p_{c\widetilde{\alpha\beta}\gamma b}$. 因此, $x*(y*z)=(x*y)*z$. □

引理 4.2.17. *在 $S=\bigcup_{\alpha\in Y}S_\alpha$ 上定义乘法 $*$ 运算, 则 S 是密群.*

证明 由乘法 $*$ 的定义, 对每个 $\alpha\in Y$, 在 S_α 上, $*$ 运算和 S_α 上已给的运算一致. 因此, 由引理 4.2.16, S 是一个完全正则半群, 且 $\mathcal{H}$ 是 S 上的同余. 因此, S 是密群. □

我们完成了定理 4.1.1 的直接部分的证明.

§4.3 相反方向的证明

本节我们采用下面的说明和符号:

(*a*) $S=(Y,S_\alpha)$ 是密群, 其中 Y 是一个半格.

(*b*) 对每个 $\alpha\in Y$, $S_\alpha=\mathcal{M}(B_\alpha,G_\alpha;P_\alpha)$ 是群 G_α 上的 Rees 矩阵半群, G_α 的单位元是 ι_α (参考第一节).

(c) 对每个 $\alpha \in Y$, Sandwich 矩阵 P_α 在 $\widetilde{\alpha} \in B_\alpha$ 处正规化.

(d) 表示 $e_\alpha = (\widetilde{\alpha}, \iota_\alpha)$, 它是 S_α 的幂等元.

(e) 对任意 $\alpha, \beta \in Y, \alpha \geq \beta, a \in B_\alpha$, 记 $u_{\alpha,\beta}(a) = p^{-1}_{a\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}a\widetilde{\alpha}} p_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\beta}a\widetilde{\alpha}}$, $v_{\alpha,\beta}(a) = p^{-1}_{\widetilde{\alpha}a\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha}a}$.

首先，我们利用密群的 Green 关系 $\mathcal{H}$ 是同余这个性质，确定第一个坐标的运算.

引理 4.3.1. *对任意 $\alpha, \beta \in Y$, $a \in B_\alpha$, $b \in B_\beta$, 在 S 定义乘积 ab：*

$$(a, g)(b, h) = (ab,\ ).$$

则 $B = \bigcup_{\alpha \in Y} B_\alpha$ 是一个带，且 $S/\mathcal{H} \simeq B$.

证明 令 $x = (a, g)$, $x' = (a, g') \in S_\alpha$, $y = (b, h)$, $y' = (b, h') \in S_\beta$. 既然 $\mathcal{H}$ 是 S 上的一个同余，我们有 $xy\mathcal{H}x'y'$. 因此 $xy = (ab,\ )$, $x'y' = (ab,\ )$, 故乘积 ab 是有定义的. 我们定义的乘法是结合的，既然 S 是结合的. 明显地，我们有 $S/\mathcal{H} \simeq B$. □

设 $T = \mathcal{M}(B, G; P)$ 是一个 Rees 矩阵半群， $a \in B$. 表示 $H_a = \{(a, g) | g \in G\}$, 这是 T 的一个 $\mathcal{H}$- 类.

引理 4.3.2. *设 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$, $a \in B_\alpha$. 定义映射*

$$\varphi_{\alpha,\beta} : S_\alpha \to S_\beta;\ x \mapsto x\varphi_{\alpha,\beta} = x(xe_\beta x)^0.$$

则 $\varphi_{\alpha,\beta}|_{H_a}$ 是一个 H_a 到 S_β 的同态.

证明 设 $x = (a, g)$, $y = (a, h) \in H_a \subseteq S_\alpha$. 则

$$\begin{aligned}
(xy)\varphi_{\alpha,\beta} &= xy(xye_\beta xy)^0 = xy(ye_\beta y)^0 \ \text{(由引理 2.1.1)} \\
&= x(ye_\beta y)^0 y(ye_\beta y)^0 \ \text{(由引理 3.3.2)} \\
&= x(xe_\beta x)^0 y(ye_\beta y)^0 \ \text{(由引理 2.1.1)} \\
&= x\varphi_{\alpha,\beta} y\varphi_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

因此， $\varphi_{\alpha,\beta}|_{H_a}$ 是一个同态. □

在密群的构造中，映射 $\varphi_{\alpha,\beta}$ 的作用是重要的，尽管一般说来，它不是两个完全单半群之间的同态. 我们需要的是 $\varphi_{\alpha,\beta}$ 所诱导的群同态.

引理 4.3.3. 设 $\alpha, \beta \in Y$ 且 $\alpha \geq \beta$, $x, y \in S_\alpha$. 则我们有

$$(xy)\varphi_{\alpha,\beta} = (xye_\beta)^0 x\varphi_{\alpha,\beta} y\varphi_{\alpha,\beta}(e_\beta xy)^0.$$

证明 由 $\varphi_{\alpha,\beta}$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned}
(xy)\varphi_{\alpha,\beta} &= xy(xye_\beta xy)^0 \\
&= (xye_\beta xy)^0 xy(xye_\beta xy)^0 \text{ (由引理 3.3.2)} \\
&= (xye_\beta)^0 xy(e_\beta xy)^0 \text{ (由引理 3.3.2)} \\
&= (xye_\beta)^0(xe_\beta)^0 xy(e_\beta y)^0(e_\beta xy)^0 \text{ (由引理 1.2.1)} \\
&= (xye_\beta)^0(xe_\beta x)^0 xy(ye_\beta y)^0(e_\beta xy)^0 \text{ (由引理 3.3.2)} \\
&= (xye_\beta)^0 x(xe_\beta x)^0 y(ye_\beta y)^0(e_\beta xy)^0 \text{ (由引理 3.3.2)} \\
&= (xye_\beta)^0 x\varphi_{\alpha,\beta} y\varphi_{\alpha,\beta}(e_\beta xy)^0. \qquad \square
\end{aligned}$$

下面我们用 $\varphi_{\alpha,\beta}$ 来描述 S 的乘法. 它帮助我们寻找结构定理中群同态所满足的条件.

引理 4.3.4. 设 $\alpha, \beta \in Y$, $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$. 则

$$xy = (xye_{\alpha\beta})^0 x\varphi_{\alpha,\alpha\beta} y\varphi_{\beta,\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}xy)^0.$$

证明 由引理 1.2.1, 我们有

$$(xye_{\alpha\beta}x)^0 \mathcal{L} (xe_{\alpha\beta}x)^0, \quad (ye_{\alpha\beta}y)^0 \mathcal{R} (ye_{\alpha\beta}xy)^0. \tag{4.1}$$

则,

$$\begin{aligned}
&(xye_{\alpha\beta})^0 x\varphi_{\alpha,\alpha\beta} y\varphi_{\beta,\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}xy)^0 = (xye_{\alpha\beta})^0 x(xe_{\alpha\beta}x)^0 y(ye_{\alpha\beta}y)^0(e_{\alpha\beta}xy)^0 \\
=\ & (xye_{\alpha\beta}x)^0(xe_{\alpha\beta}x)^0 xy(ye_{\alpha\beta}y)^0(ye_{\alpha\beta}xy)^0 \ \text{ (由引理 3.3.2)} \\
=\ & (xye_{\alpha\beta}x)^0 xy(ye_{\alpha\beta}xy)^0 \text{ (由 (4.1))} \\
=\ & xy \ \text{ (由引理 1.2.1)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

下面的引理刻画 $\varphi_{\alpha,\beta}$, $\varphi_{\beta,\gamma}$ 和 $\varphi_{\alpha,\gamma}$ 的关系. 我们以后会发现这种关系正好揭示群同态之间的关系.

引理 4.3.5. 设 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$ 且 $\alpha\geq\beta\geq\gamma$, $x\in S_\alpha$. 则

$$x\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma}=(xe_\beta xe_\gamma)^0x\varphi_{\alpha,\gamma}(e_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0.$$

证明 由引理 1.2.1, 我们有

$$(xe_\beta xe_\gamma x)^0\mathcal{L}(xe_\gamma x)^0,\quad (xe_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0\mathcal{R}(xe_\beta xe_\gamma x)^0. \tag{4.2}$$

因此,

$$\begin{aligned}
(x\varphi_{\alpha,\beta})\varphi_{\beta,\gamma} &= x\varphi_{\alpha,\beta}(x\varphi_{\alpha,\beta}e_\gamma x\varphi_{\alpha,\beta})^0=x(xe_\beta x)^0(x(xe_\beta x)^0e_\gamma x(xe_\beta x)^0)^0\\
&= x(xe_\beta x)^0(xe_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0=x(xe_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0 \quad (\text{由引理 } 2.1.1)\\
&= x(xe_\beta xe_\gamma x)^0(xe_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0 \quad (\text{由 } (4.2))\\
&= (xe_\beta xe_\gamma x)^0x(xe_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0 \quad (\text{由引理 } 3.3.2)\\
&= (xe_\beta xe_\gamma x)^0(xe_\gamma x)^0x(xe_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0 \quad (\text{由 } (4.2))\\
&= (xe_\beta xe_\gamma x)^0(xe_\gamma x)^0xx^0(e_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0 \quad (\text{由引理 } 3.3.2)\\
&= (xe_\beta xe_\gamma)^0x^0x(xe_\gamma x)^0(e_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0 \quad (\text{由引理 } 3.3.2)\\
&= (xe_\beta xe_\gamma)^0x\varphi_{\alpha,\gamma}(e_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0.
\end{aligned}$$

□

设 $\alpha,\beta\in Y$ 满足 $\alpha\geq\beta$, $g\in G_\alpha$, $x=(\widetilde{\alpha},g)\in S_\alpha$. 由引理 4.3.1, 存在唯一的 $g\theta_{\alpha,\beta}\in G_\beta$ 使得

$$x\varphi_{\alpha,\beta}=(\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha},g\theta_{\alpha,\beta}p^{-1}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha}}). \tag{4.3}$$

它诱导映射

$$\theta_{\alpha,\beta}:G_\alpha\to G_\beta;\ g\mapsto g\theta_{\alpha,\beta}.$$

下面我们分若干引理来证明 $\theta_{\alpha,\beta}$ 是一个同态，且满足定理 4.1.1 中的条件 (i)-(iv).

引理 4.3.6. $\theta_{\alpha,\beta}$ 是一个 G_α 到 G_β 的同态. 且 $\theta_{\alpha,\alpha}=1_{G_\alpha}$.

证明 设 $g,g'\in G_\alpha$. 则 $(\widetilde{\alpha},gg')\varphi_{\alpha,\beta}=(\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha},(gg')\theta_{\alpha,\beta}p^{-1}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha}})$. 另一方面，我们有 $(\widetilde{\alpha},gg')\varphi_{\alpha,\beta}=((\widetilde{\alpha},g)(\widetilde{\alpha},g'))\varphi_{\alpha,\beta}=(\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha},g\theta_{\alpha,\beta}p^{-1}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha}})(\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha},g\theta_{\alpha,\beta}p^{-1}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha}})=(\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha},g\theta_{\alpha,\beta}g'\theta_{\alpha,\beta}p^{-1}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha}})$. 因此，$(gg')\theta_{\alpha,\beta}=g\theta_{\alpha,\beta}g'\theta_{\alpha,\beta}$. 这样我们结论 $\theta_{\alpha,\beta}$ 是一个从 G_α 到 G_β 的同态. $\theta_{\alpha,\alpha}=1_{G_\alpha}$ 是显然的. □

因此， $\theta_{\alpha,\beta}$ 满足条件 (i). 为了方便的缘故，我们表示

$$u_{\alpha,\beta}(a)=p^{-1}_{a\tilde{\alpha}\tilde{\beta}a\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}a\tilde{\alpha}},\quad v_{\alpha,\beta}(a)=p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}p^{-1}_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}\tilde{\alpha}a},$$

其中 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $a\in B_\alpha$. 后面我们将证明 $v_{\alpha,\beta}(a)=p^{-1}_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}\tilde{\alpha}a}$.

引理 4.3.7. 设 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $x=(a,g)\in S_\alpha$. 则有

$$x\varphi_{\alpha,\beta}=(a\widetilde{\beta}a,u_{\alpha,\beta}(a)g\theta_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(a)).$$

证明 表示 $x_1=(a\tilde{\alpha},\iota_\alpha),x_3=(\tilde{\alpha}a,\iota_\alpha)\in E(S_\alpha)$. 由引理 4.3.2, 我们有 $x_1\varphi_{\alpha,\beta}=(a\tilde{\alpha}\widetilde{\beta}a\tilde{\alpha},p^{-1}_{a\tilde{\alpha}\tilde{\beta}a\tilde{\alpha}})$, $x_3\varphi_{\alpha,\beta}=(\tilde{\alpha}a\widetilde{\beta}\tilde{\alpha}a,p^{-1}_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}\tilde{\alpha}a})$. 表示 $x_2=(\tilde{\alpha},g)$, 由 (4.3), $x_2\varphi_{\alpha,\beta}=(\tilde{\alpha}\widetilde{\beta}\tilde{\alpha},p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}})$. 由引理 4.3.1, $(x_1x_2x_3e_\beta)^0=(a\widetilde{\beta},\iota_\beta)$, $(x_2x_3e_\beta)^0=(\tilde{\alpha}a\widetilde{\beta},\iota_\beta)$, $(e_\beta x_2x_3)^0=(\widetilde{\beta}\tilde{\alpha}a,\iota_\beta)$ ， 而 $(e_\beta x_1x_2x_3)^0=(\widetilde{\beta}a,\iota_\beta)$. 因此,

$$\begin{aligned}
&(a,g)\varphi_{\alpha,\beta}=(x_1(x_2x_3))\varphi_{\alpha,\beta}=(x_1x_2x_3e_\beta)^0x_1\varphi_{\alpha,\beta}(x_2x_3)\varphi_{\alpha,\beta}(e_\beta x_1x_2x_3)^0\\
=\ &(x_1x_2x_3e_\beta)^0x_1\varphi_{\alpha,\beta}(x_2x_3e_\beta)^0x_2\varphi_{\alpha,\beta}x_3\varphi_{\alpha,\beta}(e_\beta x_2x_3)^0(e_\beta x_1x_2x_3)^0\\
=\ &(a\widetilde{\beta},\iota_\beta)(a\tilde{\alpha}\widetilde{\beta}a\tilde{\alpha},p^{-1}_{a\tilde{\alpha}\tilde{\beta}a\tilde{\alpha}})(\tilde{\alpha}a\widetilde{\beta},\iota_\beta)(\tilde{\alpha}\widetilde{\beta}\tilde{\alpha},p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}})(\tilde{\alpha}a\widetilde{\beta}\tilde{\alpha}a,p^{-1}_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}\tilde{\alpha}a})(\widetilde{\beta}\tilde{\alpha}a,\iota_\beta)(\widetilde{\beta}a,\iota_\beta)\\
=\ &(a\widetilde{\beta}a,p^{-1}_{a\tilde{\alpha}\tilde{\beta}a\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}a\tilde{\alpha}}g\theta_{\alpha,\beta}p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}p^{-1}_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}\tilde{\alpha}a})=(a\widetilde{\beta}a,u_{\alpha,\beta}(a)g\theta_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(a)).
\end{aligned}$$ □

为了方便，我们表示

$$x\sigma_{\alpha,\beta}=u_{\alpha,\beta}(a)g\theta_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(a).$$

对任意的 $\alpha,\beta\in Y$,$\alpha\geq\beta$, $x=(a,g)\in S_\alpha$, 则

$$x\varphi_{\alpha,\beta}=(a\widetilde{\beta}a,x\sigma_{\alpha,\beta}). \tag{4.4}$$

引理 4.3.8. 设 $\alpha,\beta\in Y$, $x=(a,g)\in S_\alpha$, $y=(b,h)\in S_\beta$. 则

$$xy=(ab,x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{b\widetilde{\alpha\beta}a}y\sigma_{\beta,\alpha\beta}).$$

证明 由引理 4.3.5, 我们有

$$\begin{aligned}
xy\ &=\ (xye_{\alpha\beta})^0x\varphi_{\alpha,\alpha\beta}y\varphi_{\beta,\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}xy)^0\\
&=\ (ab\widetilde{\alpha\beta},\iota_{\alpha\beta})x\varphi_{\alpha,\alpha\beta}y\varphi_{\beta,\alpha\beta}(\widetilde{\alpha\beta}ab,\iota_{\alpha\beta})\ \ (\text{由引理 } 4.3.1)\\
&=\ (ab\widetilde{\alpha\beta},\iota_{\alpha\beta})(a\widetilde{\alpha\beta}a,x\sigma_{\alpha,\alpha\beta})(b\widetilde{\alpha\beta}b,y\sigma_{\beta,\alpha\beta})(\widetilde{\alpha\beta}ab,\iota_{\alpha\beta})\ \ (\text{由 } (4.4))\\
&=\ (ab\widetilde{\alpha\beta}ab,x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{b\widetilde{\alpha\beta}}ay\sigma_{\beta,\alpha\beta})=(ab,x\sigma_{\alpha,\alpha\beta}p_{b\widetilde{\alpha\beta}a}y\sigma_{\beta,\alpha\beta}).
\end{aligned}$$

我们完成了证明. □

引理 4.3.9. 设 $\alpha,\beta \in Y$ ， $\alpha \geq \beta$, $b,c \in B_\beta$, 另设 $x=(a,g)\in S_\alpha$. 则

$$p_{acb}^{-1}p_{a\tilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta}=x\sigma_{\alpha,\beta}p_{c\tilde{\beta}a}p_{bca}^{-1}.$$

证明 令 $y=(b,\iota_\beta)$, $z=(c,\iota_\beta)\in S_\beta$. 由引理 4.3.8,

$(yx)z=(ba,y\sigma_{\beta,\beta}p_{a\tilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta})z=(ba,p_{a\tilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta})(c,\iota_\beta)=(bac,p_{a\tilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta}p_{cba})$.
类似地， $y(xz)=(bac,p_{acb}x\sigma_{\alpha,\beta}p_{c\tilde{\beta}a})$. 因此， $p_{a\tilde{\beta}b}x\sigma_{\alpha,\beta}p_{cba}=p_{acb}x\sigma_{\alpha,\beta}p_{c\tilde{\beta}a}$, 所以等式成立. □

因此，我们证明了定理 4.1.1 的条件 (iv) 满足.

类似于引理 4.2.2, 引理 4.2.3 和引理 4.2.4, 我们有

引理 4.3.10. 设 $\alpha,\beta\in Y$ ， $\alpha\geq\beta$, $a\in B_\alpha, b,c,d,e\in B_\beta$. 则

(1) 如果 $ac\mathcal{R}ad$, 则 $p_{c\tilde{\beta}a}^{-1}p_{d\tilde{\beta}a}=p_{cba}^{-1}p_{dba}=p_{cea}^{-1}p_{dea}$.

(2) 如果 $ca\mathcal{L}da$, 则 $p_{a\tilde{\beta}c}p_{a\tilde{\beta}d}^{-1}=p_{abc}p_{abd}^{-1}=p_{aec}p_{aed}^{-1}$.

(3) $p_{a\tilde{\beta}a}=p_{a\tilde{\beta}ea}=p_{ae\tilde{\beta}a}$. □

由引理 4.3.10.(3), 我们有

$$v_{\alpha,\beta}(a)=p_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}^{-1}p_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}\tilde{\alpha}a}^{-1}=p_{\tilde{\alpha}a\tilde{\beta}\tilde{\alpha}a}^{-1},$$

因此 $v_{\alpha,\beta}(a)$ 和定理 4.1.1 中的 $v_{\alpha,\beta}(a)$ 的定义一致, 这样 $x\sigma_{\alpha,\beta}$ 也和定理 4.1.1 中的定义一致.

引理 4.3.11. 令 $\alpha,\beta\in Y$ ， $\alpha\geq\beta$, $a\in B_\alpha$. 则

$$p_a\theta_{\alpha,\beta}=v_{\alpha,\beta}(a)p_{a\tilde{\beta}a}u_{\alpha,\beta}(a).$$

证明 设 $x=(a,p_a^{-1})\in S_\alpha$. 则由引理 4.3.2, 我们有 $x\varphi_{\alpha,\beta}=(a\tilde{\beta}a,p_{a\tilde{\beta}a}^{-1})$. 而由引理 4.3.8, $x\varphi_{\alpha,\beta}=(a\tilde{\beta}a,u_{\alpha,\beta}(a)p_a^{-1}\theta_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(a))$. 因此, $u_{\alpha,\beta}(a)p_a^{-1}\theta_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}(a)=p_{a\tilde{\beta}a}^{-1}$. 因此 $p_a\theta_{\alpha,\beta}=v_{\alpha,\beta}(a)p_{a\tilde{\beta}a}u_{\alpha,\beta}(a)$. □

我们证明了定理 4.1.1 中的条件 (iii) 成立.

引理 4.3.12. 设 $\alpha,\beta,\gamma\in Y,\alpha\geq\beta\geq\gamma$, $g\in G_\alpha$. 则

$$g\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma}=g\theta_{\alpha,\gamma}\varepsilon_{u_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})}.$$

证明 令 $x = (\tilde{\alpha}, g) \in S_\alpha$. 则由 (4.3), $x\varphi_{\alpha,\beta} = (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}, g\theta_{\alpha,\beta}p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}})$. 因此, 由引理 4.3.11,

$$
\begin{aligned}
& x\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma} = (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}, u_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})(g\theta_{\alpha,\beta}p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}})\theta_{\beta,\gamma}v_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})) \\
= \ & (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}, u_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})g\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma}p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}\theta_{\beta,\gamma} \\
= \ & (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}, u_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})g\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma}u^{-1}_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}v^{-1}_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})v_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})) \\
= \ & (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}, u_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})g\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma}u^{-1}_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}).
\end{aligned}
$$

另一方面, 由引理 4.3.5, 我们有

$$
\begin{aligned}
x\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma} &= (xe_\beta xe_\gamma)^0 x\varphi_{\alpha,\gamma}(e_\beta xe_\gamma xe_\beta x)^0 \\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}, \iota_\gamma)(\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}, g\theta_{\alpha,\gamma}p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}})(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}, p^{-1}_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}) \quad (\text{由 } (4.3)) \\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}, g\varphi_{\alpha,\gamma}p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p^{-1}_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}) \\
&= (\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}, g\varphi_{\alpha,\gamma}p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p^{-1}_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}).
\end{aligned}
$$

因此, $u_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})g\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma}u^{-1}_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}} = g\theta_{\alpha,\gamma}p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p^{-1}_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}$. 由引理 4.3.10.(1) 和 (3), 我们得到

$$
\begin{aligned}
& p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p^{-1}_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}} \\
= \ & p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}} \\
= \ & p^{-1}_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}}p_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}} = \iota_\gamma.
\end{aligned}
$$

因此, $g\theta_{\alpha,\beta}\theta_{\beta,\gamma} = g\theta_{\alpha,\gamma}\varepsilon_{u_{\beta,\gamma}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha})}$. □

这样我们证明了 $\theta_{\alpha,\beta}$ 满足定理 4.1.1 的条件 (ii).

我们完成了定理 4.1.1 的证明.

§4.4 密群之间的同态

本节我们利用第三节中的 $\varphi_{\alpha,\beta}$, 半格上的同态及完全单半群上的同态来刻画密群之间的同态. 利用本节的结果, 我们能够容易地导出正规密群间和正则密群间的同态 (参看 [15], Lemma IV.1.8)

定理 4.4.1. 设 $S = (Y; S_\alpha)$, $T = (Z; T_\alpha)$ 是两个密群, 且设 $\xi : Y \to Z$ 是两个半格之间的同态. 对每个 $\alpha \in Y$, 令 $\eta_\alpha : S_\alpha \to T_{\alpha\xi}$ 是一个同态, 且满足条件:

(1) 对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $a\in S_\alpha$, $b\in S_\beta$, $a\eta_\alpha b\eta_\beta\mathcal{H}(ab)\eta_{\alpha\beta}$.

(2) 对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $\eta_\alpha\psi_{\alpha\xi,\beta\xi}=\varphi_{\alpha,\beta}\eta_\beta$. 其中, $\psi_{\alpha\xi,\beta\xi}$ 是 $T_{\alpha\xi}$ 到 $T_{\beta\xi}$ 的映射: $x\psi_{\alpha\xi,\beta\xi}=x(xe_{\beta\xi}x)^0$.

则 $\eta=\cup_{\alpha\in Y}\eta_\alpha$ 是 S 到 T 的一个同态. 反之, 对每个 S 到 T 的同态 η, 都存在唯一的 ξ 和 η_α , 使得 η 能够如此构造.

证明 设 $\eta=\cup_{\alpha\in Y}\eta_\alpha$ 满足上述条件. 对于 $a\in S_\alpha$, $b\in S_\beta$, 我们有

$$\begin{aligned}
&(a\eta)(b\eta)=(a\eta_\alpha)(b\eta_\beta)\\
=\;&(a\eta_\alpha b\eta_\beta e_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta})^0a\eta_\alpha\psi_{\alpha\xi,(\alpha\beta)\xi}b\eta_\beta\psi_{\beta\xi,(\alpha\beta)\xi}(e_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}a\eta_\alpha b\eta_\beta)^0\\
=\;&(a\eta_\alpha b\eta_\beta e_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta})^0a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}b\varphi_{\beta,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}a\eta_\alpha b\eta_\beta)^0(\text{由 }(2))\\
=\;&(a\eta_\alpha b\eta_\beta e_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta})^0(a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}b\varphi_{\beta,\alpha\beta})\eta_{\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}a\eta_\alpha b\eta_\beta)^0\\
=\;&((abe_{\alpha\beta})\eta_{\alpha\beta})^0(a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}b\varphi_{\beta,\alpha\beta})\eta_{\alpha\beta}((e_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}ab)\eta_{\alpha\beta})^0(\text{由 }(1))\\
=\;&((abe_{\alpha\beta})^0(a\varphi_{\alpha,\alpha\beta}b\varphi_{\beta,\alpha\beta})(e_{\alpha\beta}ab)^0)\eta_{\alpha\beta}\\
=\;&(ab)\eta_{\alpha\beta}=(ab)\eta.
\end{aligned}$$

因此, η 是一个同态.

反之, 设 $\eta:S\to T$ 是一个同态. 既然 η 保持 $\mathcal{D}$ 关系, η 诱导同态 $\xi:Y\to T$. 定义 $\alpha\xi=\alpha'$, 如果 $a\in S_\alpha$, $a\eta\in T_{\alpha'}$. 令 $\eta_\alpha=\eta|_{S_\alpha}$, 则 η_α 是 S_α 到 $T_{\alpha\xi}$ 的同态. 显然, 对任意 $a\in S_\alpha$, $b\in S_\beta$, 我们有 $a\eta_\alpha b\eta_\beta\mathcal{H}(ab)\eta_{\alpha\beta}$. 设 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $a\in S_\alpha$. 则 $a\eta_\alpha\psi_{\alpha\xi,\beta\xi}=a\eta_\alpha(a\eta_\alpha e_\beta\eta_\beta a\eta_\alpha)^0=(a(ae_\beta a)^0)\eta=(a(ae_\beta a)^0)\eta_\beta=a\varphi_{\alpha,\beta}\eta_\beta$. □

第5章　正则密群上的同余

本章我们利用第三章的结果，结合 [15] 中的结论首先给出正则密群上的同余的构造，然后刻画正则密群上的最小纯正同余．类似本章的结论，我们能够得到密群上的最小纯正同余．本章给出的一些定义本质上属于 [15].

§5.1　引言

同余理论是半群代数理论的一个重要组成部分．关于正则半群上的同余的构造，目前比较成熟的理论是核 - 迹刻画．设 S 是一个正则半群，$\rho \in \mathcal{C}(S)$．我们把同余 ρ 的核记作 $ker\rho$，而把它的迹记作 $tr\rho$．集合 $ker\rho$ 是和幂等元在一个 ρ- 类的元素的全体，而 $tr\rho$ 是 ρ 在幂等元集合 $E(S)$ 上的限制．这种刻画之所以成功，在于正则半群上的任意同余 ρ 由它的核 $ker\rho$ 和它的迹 $tr\rho$ 唯一确定．文 [15] 利用半格和完全单半群上的同余构造了完全正则半群上的同余，使用的工具是核 - 迹刻画．我们首先陈述这方面的结果.

定义 5.1.1. *设 $S=(Y;S_\alpha)$ 是一个完全正则半群，$\xi \in \mathcal{C}(Y)$，$\eta_\alpha \in \mathcal{C}(S_\alpha)$．称 (ξ,η_α) 为 S 的一个同余成分，如果*

- **(CA1)** $a,b\in S_\alpha$，$c\in S_\beta$，$\alpha\geq\beta$，或 $\beta\geq\alpha, a\eta_\alpha b\Rightarrow ac\eta_{\alpha\beta}bc$，$ca\eta_{\alpha\beta}cb$.
- **(CA2)** $a,b\in S_\alpha$，$c\in S_\beta$，$\alpha(\xi\cap\geq)\beta$，$ac\eta_\beta bc$，$ca\eta_\beta cb\Rightarrow a\eta_\alpha b$.
- **(CA3)** $e\in E(S_\alpha), f\in E(S_\beta)$，$a\in S_\gamma$，$\alpha\xi\beta\geq\gamma, e\geq f\Rightarrow eaf\eta_\gamma fae$.

在此情况下，我们在 S 上定义关系 $\rho_{(\xi,\eta_\alpha)}$：$a\in S_\alpha$，$b\in S_\beta$，

$$a\rho_{(\xi,\eta_\alpha)}b \Leftrightarrow \alpha\xi\beta, ab\eta_{\alpha\beta}ba, ab^{-1}\in ker\ \eta_{\alpha\beta}.$$

我们用 $\mathcal{CA}(S)$ 表示 S 的所有同余成分的集合.

定义 5.1.2. *对于同余 $\rho\in\mathcal{C}(S)$，由 $(\rho\vee\mathcal{D})/\mathcal{D}$ 诱导的 Y 上的同余 ξ 称为 ρ 的反射，记做 $\xi=re\ \rho$.*

关于完全正则半群的同余的构造，我们有 [15] 中给出的如下定理.

定理 5.1.3. 如果 (ξ, η_α) 是 S 的同余成分，则 $\rho_{(\xi,\eta_\alpha)}$ 是 S 上的满足 $re\ \rho = \xi, \rho\,|_{S_\alpha} = \eta_\alpha$ 的唯一同余，反之，如果 ρ 是 S 上的同余，则 $(re\rho, \rho\,|_{S_\alpha})$ 是 S 的同余成分，且 $\rho = \rho_{(re\rho, \rho|_{S_\alpha})}$.

在下面，$S = (Y; S_\alpha)$ 总是表示正则密群，其中 Y 是一个半格. 对每个 $\alpha \in Y$, $S_\alpha = \mathcal{M}(I_\alpha, G_\alpha, \Lambda_\alpha, P_\alpha)$ 是群 G_α 上的 Rees 矩阵半群，G_α 的单位元是 ι_α. 对任意 $\alpha \in Y$, 我们总是 Sandwich 矩阵 P_α 在 $(1_\alpha, 1'_\alpha) \in I_\alpha \times \Lambda_\alpha$ 处正规化，固定 $e_\alpha = (1_\alpha, \iota_\alpha, 1'_\alpha)$, 它是 S_α 的一个幂等元.

§5.2 正则密群上的同余

本节利用第 3 章的同态 $\theta_{\alpha,\beta}$, 半格上的同余 ξ 和完全单半群上的同余 η_α 刻画正则密群上的同余.

首先，我们给出以下定义 (参看 [15] 中的 Definition VII.9.3]).

定义 5.2.1. 设 $\rho \in \mathcal{C}(S)$. 在 Y 上定义关系 ξ: 如果 $\alpha, \beta \in Y, \alpha\xi\beta$ 当且仅当存在 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta, c, d \in S_{\alpha\beta}$ 使得 $a\rho c$ ， $b\rho d$. 我们称 ξ 是 ρ 的反射，记为 $\xi = re\rho$.

引理 5.2.2. 对任意 $\alpha, \beta \in Y, a \in S_\alpha, b \in S_\beta$, $a(\mathcal{D} \vee \rho)b$ 当且仅当存在 $c, d \in S_{\alpha\beta}$ 满足 $a\rho c$, $b\rho d$, 其中 $\rho \in \mathcal{C}(S)$.

证明 设 $a(\mathcal{D} \vee \rho)b$. 则由引理 1.2.4, $a\rho u \mathcal{D} v \rho b$, 其中 $u, v \in S_\gamma$. 因此，$a^2 \rho au$. 显然 $a^2 \in S_\alpha, au \in S_{\alpha\gamma}$. 类似地，$(av)^2 \rho (ab)(av)$, 其中 $av \in S_{\alpha\gamma}, (ab)(av) \in S_{\alpha\beta\gamma}$. 应用引理 1.2.3, 我们诱导出 $a\rho c$,$b\rho d$, 其中 $c, d \in S_{\alpha\beta}$. 相反的蕴涵关系是平凡的. □

由引理 5.2.2, 我们得到

引理 5.2.3. 设 $\rho \in \mathcal{C}(S)$. 则 $\xi = re\rho \in \mathcal{C}(Y)$.

证明 显然 ξ 自反的和对称的.

设 $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha\xi\beta$, $\beta\xi\gamma$. 则存在 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta, c, d \in S_{\alpha\beta}$ ，使得 $a\rho c$,$b\rho d$. 由引理 5.2.2, $a(\mathcal{D} \vee \rho)b$. 类似地，存在 $b' \in S_\beta, e \in S_\gamma$ ，使得

$b'(\mathcal{D}\vee\rho)e$. 因此 $a(\mathcal{D}\vee\rho)e$. 再次由引理 5.2.2, 我们结论 $\alpha\xi\gamma$. 在 Y 上的关系 ξ 是相容的，既然 $\mathcal{D}\vee\rho$ 是 S 上的同余. □

引理 5.2.4. 设 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$. 则对任意 $a\in S_\alpha$, $a\geq a\theta_{\alpha,\beta}$.

证明 由引理 3.3.2, $a\cdot a\theta_{\alpha,\beta}=a\cdot a(ae_\beta a)^0=a(ae_\beta a)^0\cdot a=a(ae_\beta a)^0\cdot a(ae_\beta a)^0=(a\theta_{\alpha,\beta})^2$. 类似地， $a\theta_{\alpha,\beta}\cdot a=(a\theta_{\alpha,\beta})^2$, 因此，结论成立. □

设 $\alpha,\beta\in Y,\alpha\geq\beta$. 对任意 $x\in S_\beta$, 定义映射

$$\theta^x_{\alpha,\beta}:S_\alpha\to S_\beta,\ a\theta^x_{\alpha,\beta}=a(axa)^0. \tag{5.1}$$

容易验证 $\theta^x_{\alpha,\beta}$ 是一个同态且对任意 $a\in S_\alpha$, $a\geq a(axa)^0$.

引理 5.2.5. 设 $\rho\in\mathcal{C}(S)$, $\xi=re\rho$, $\rho\,|_{S_\alpha}=\eta_\alpha$. 则

(1) 对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $a,b\in S_\alpha$, $a\eta_\alpha b$, 有 $a\theta^x_{\alpha,\beta}\eta_\beta b\theta^y_{\alpha,\beta}$, 其中 $x,y\in S_\beta$, $x\eta_\beta y$.

(2) 对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha(\xi\cap\geq)\beta$, $a,b\in S_\alpha$, $a\theta_{\alpha,\beta}\eta_\beta b\theta_{\alpha,\beta}$, 有 $a\eta_\alpha b$.

(3) 对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $\alpha(\xi\cap\geq)\beta\geq\gamma$, 任意 $a\in S_\alpha$ 和 $x\in S_\gamma$, 有 $a\theta_{\alpha,\beta}\theta^x_{\beta,\gamma}\eta_\gamma a\theta^x_{\alpha,\gamma}$.

证明 (1). 由假设， $a\rho b$ 且 $x\rho y$. 因此， $axa\rho byb$, 这蕴涵 $(axa)^0\rho(byb)^0$. 所以 $a(axa)^0\rho b(byb)^0$. 既然 $a(axa)^0,b(byb)^0\in S_\beta$, 由 (5.1)，我们有 $a\theta^x_{\alpha,\beta}\eta_\beta b\theta^y_{\alpha,\beta}$.

(2). 由引理 5.2.4, $a\geq a\theta_{\alpha,\beta}$,$b\geq b\theta_{\alpha,\beta}$. 由引理 1.2.3(3) 和假设， $a\rho a\theta_{\alpha,\beta}$, $b\rho b\theta_{\alpha,\beta}$. 则 $a\eta_\alpha b$.

(3). 由引理 1.2.3, $a\rho a\theta_{\alpha,\beta}$. 因此, $axa\rho a\theta_{\alpha,\beta}xa\theta_{\alpha,\beta}$,$(axa)^0\rho(a\theta_{\alpha,\beta}xa\theta_{\alpha,\beta})^0$. 我们结论 $a(axa)^0\rho a\theta_{\alpha,\beta}(a\theta_{\alpha,\beta}xa\theta_{\alpha,\beta})^0$, 这蕴涵 $a\theta_{\alpha,\beta}\theta^x_{\beta,\gamma}\eta_\gamma a\theta^x_{\alpha,\gamma}$. □

定义 5.2.6. 设 $\xi\in\mathcal{C}(Y)$, $\eta_\alpha\in\mathcal{C}(S_\alpha)$. 称 (ξ,η_α) 是 S 的一个同余成分，如果 (ξ,η_α) 满足下列条件:

(1) 对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha\geq\beta$, $a,b\in S_\alpha$, $a\eta_\alpha b$, 则有 $a\theta^x_{\alpha,\beta}\eta_\beta b\theta^y_{\alpha,\beta}$, 其中 $x,y\in S_\beta$, $x\eta_\beta y$.

(2) 对任意 $\alpha,\beta\in Y$, $\alpha(\xi\cap\geq)\beta$, $a,b\in S_\alpha$, $a\theta_{\alpha,\beta}\eta_\beta b\theta_{\alpha,\beta}$, 则有 $a\eta_\alpha b$.

(3) 对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in Y$, $\alpha(\xi\cap\geq)\beta\geq\gamma$, $a\in S_\alpha$, $x\in S_\gamma$, $a\theta_{\alpha,\beta}\theta^x_{\beta,\gamma}\eta_\gamma a\theta^x_{\alpha,\gamma}$.

在此情况下, 我们在 S 上定义关系 $\rho_{(\xi,\eta_\alpha)}$: 设 $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$

$$a\rho_{(\xi,\eta_\alpha)}b \Leftrightarrow \alpha\xi\beta,\ a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}b\theta_{\beta,\alpha\beta}.$$

我们用 $\mathcal{CA}(S)$ 表示 S 上的所有同余成分的集合. 下面开始证明本节的主要结果.

引理 5.2.7. 设 $(\xi,\eta_\alpha) \in \mathcal{CA}(S)$. 则 $\rho_{(\xi,\eta_\alpha)} \in \mathcal{C}(S)$.

证明 显然 $\rho = \rho_{(\xi,\eta_\alpha)}$ 是自反的和对称的. 设 $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $c \in S_\gamma, a\rho b$, $b\rho c$. 则 $\alpha\xi\beta\xi\gamma$, $a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}b\theta_{\beta,\alpha\beta}$, $b\theta_{\beta,\beta\gamma}\eta_{\beta\gamma}c\theta_{\gamma,\beta\gamma}$. 由条件 (1), 对任意 $x \in S_{\alpha\beta\gamma}$, $a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\theta^x_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}b\theta_{\beta,\alpha\beta}\theta^x_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$, $b\theta_{\beta,\beta\gamma}\theta^x_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}c\theta_{\gamma,\beta\gamma}\theta^x_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}$. 则由条件 (3), 我们有 $a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\theta^x_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}a\theta^x_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$, $b\theta_{\beta,\alpha\beta}\theta^x_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}b\theta^x_{\beta,\alpha\beta\gamma}$. 类似地,

$$b\theta_{\beta,\beta\gamma}\theta^x_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}b\theta^x_{\beta,\alpha\beta\gamma}, c\theta_{\gamma,\beta\gamma}\theta^x_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}c\theta^x_{\gamma,\alpha\beta\gamma}.$$

因此, $a\theta^x_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}c\theta^x_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$. 再次由条件 (3), $a\theta_{\alpha,\alpha\gamma}\theta^x_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}c\theta_{\gamma,\alpha\gamma}\theta^x_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}$. 取 $x = e_{\alpha\beta\gamma}$, 由条件 (2), $a\theta_{\alpha,\alpha\gamma}\eta_{\alpha\gamma}c\theta_{\gamma,\alpha\gamma}$.

设 $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta, a\rho b$. 由条件 (3), 对任意 $x \in S_{\alpha\beta\gamma}$, $a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\theta^x_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$ $\eta_{\alpha\beta\gamma}a\theta^x_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$. 由定义, $a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}b\theta_{\beta,\alpha\beta}$. 而由条件 (1),

$$a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\theta^x_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}b\theta_{\beta,\alpha\beta}\theta^x_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}.$$

因此,

$$a\theta^x_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}b\theta^x_{\beta,\alpha\beta\gamma}. \tag{5.2}$$

既然

$$(ac)^0a(aca)^0c(cac)^0(ac)^0 = (ac)^0(aca)^0ac(cac)^0(ac)^0$$
$$= (aca)^0ac(cac)^0(ac)^0 = ac(cac)^0 = ac,$$

我们有

$$\begin{aligned}
(ac)\theta_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma} &= (ac)^0\theta_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}(a(aca)^0)\theta_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}(c(cac)^0)\theta_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}(ac)^0\theta_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma} \\
&= (ac)^0(ace_{\alpha\beta\gamma}ac)^0a(aca)^0(a(aca)^0e_{\alpha\beta\gamma}a(aca)^0)^0c(cac)^0 \\
&\quad (c(cac)^0e_{\alpha\beta\gamma}c(cac)^0)^0(ac)^0(ace_{\alpha\beta\gamma}ac)^0 \\
&= (ace_{\alpha\beta\gamma}aca)^0a(ace_{\alpha\beta\gamma}ca)^0c(cae_{\alpha\beta\gamma}ac)^0(ace_{\alpha\beta\gamma}ac)^0 \\
&= (ace_{\alpha\beta\gamma}aca)^0(ace_{\alpha\beta\gamma}ca)^0ac(cae_{\alpha\beta\gamma}ac)^0(ace_{\alpha\beta\gamma}ac)^0 \\
&= (ace_{\alpha\beta\gamma}ca)^0ac(cae_{\alpha\beta\gamma}ac)^0(ace_{\alpha\beta\gamma}ac)^0 \\
&= a(ace_{\alpha\beta\gamma}ca)^0c(cae_{\alpha\beta\gamma}ac)^0(ace_{\alpha\beta\gamma}ac)^0 \\
&= a(ace_{\alpha\beta\gamma}ca)^0c(cae_{\alpha\beta\gamma}ac)^0.
\end{aligned}$$

类似地， $(bc)\theta_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma} = b(bce_{\alpha\beta\gamma}cb)^0c(cbe_{\alpha\beta\gamma}bc)^0$.

由条件 (3)，我们有 $a(ace_{\alpha\beta\gamma}ca)^0 = a\theta^{ce_{\alpha\beta\gamma}c}_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\theta^{ce_{\alpha\beta\gamma}c}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$. 另外，$b(bce_{\alpha\beta\gamma}cb)^0 = b\theta^{ce_{\alpha\beta\gamma}c}_{\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}b\theta_{\beta,\alpha\beta}\theta^{ce_{\alpha\beta\gamma}c}_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$. 由 (5.2),

$$a(ace_{\alpha\beta\gamma}ca)^0\eta_{\alpha\beta\gamma}b(bce_{\alpha\beta\gamma}cb)^0.$$

再次由条件 (3)，有 $a\theta_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$ 和 $b\theta_{\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}b\theta_{\beta,\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$. 既然 $a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}b\theta_{\beta,\alpha\beta}$，由条件 (1)，$a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}b\theta_{\beta,\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$. 由条件 (3)，$a\theta_{\alpha,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}b\theta_{\beta,\alpha\beta\gamma}$. 因此由条件 (1)，我们有

$$(ae_{\alpha\beta\gamma}a)^0\eta_{\alpha\beta\gamma}(be_{\alpha\beta\gamma}b)^0,\ c(cae_{\alpha\beta\gamma}ac)^0\eta_{\alpha\beta\gamma}c(cbe_{\alpha\beta\gamma}bc)^0.$$

我们证明了 $(ac)\theta_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma}(bc)\theta_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}$. 我们能够对偶地证明 $(ca)\theta_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma}\eta_{\alpha\beta\gamma} = (cb)\theta_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}$. 因此， $\rho_{(\xi,\eta_\alpha)} \in \mathcal{C}(S)$. □

引理 5.2.8. 设 $(\xi,\eta_\alpha) \in \mathcal{CA}(S)$. 则 $\rho = \rho_{(\xi,\eta_\alpha)}$ 是 S 上满足条件 $\rho|_{S_\alpha} = \eta_\alpha$，$re\rho = \xi$ 的唯一同余.

证明 如果 $a,b \in S_\alpha, a\rho b$, 由 ρ 的定义， $a\eta_\alpha b$. 显然 $\rho|_{S_\alpha} \supseteq \eta_\alpha$.

令 $\alpha,\beta \in Y, \alpha re\rho\beta$. 则存在 $a \in S_\alpha, b \in S_\beta$, $c,d \in S_{\alpha\beta}$ 使得 $a\rho c$ 而 $b\rho d$. 进一步地， $\alpha\xi\alpha\beta\xi\beta$. 因此 $re\rho \subseteq \xi$. 反之，设 $\alpha\xi\beta, a \in S_\alpha, b \in S_\beta$. 则 $a\rho a\theta_{\alpha,\alpha\beta}$, $b\rho b\theta_{\beta,\alpha\beta}$. 因此 $\alpha re\rho\beta$. 而 ρ 的唯一性是平凡的. □

引理 5.2.9. 设 $\rho \in \mathcal{C}(S)$. 则 $\rho = \rho_{(re\rho,\rho|_{S_\alpha})}$.

证明 如果 $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ 且 $a\rho b$, 则 $a\rho a^0 b$, $b\rho ab^0$, 这蕴涵 $\alpha re\rho\beta$. 显然, $a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\rho_{(re\rho,\rho|_{S_\alpha})}b\theta_{\beta,\alpha\beta}$. 反之, 如果 $a\rho_{(re\rho,\rho|_{S_\alpha})}b$, 则 $\alpha re\rho\beta$, $a\theta_{\alpha,\alpha\beta}\rho\mid_{S_\alpha} b\theta_{\beta,\alpha\gamma}$. 既然 $a \geq a\theta_{\alpha,\alpha\beta}, b \geq b\theta_{\beta,\alpha\beta}$, 我们有 $a\rho b$. □

这样, 我们证明了下面的定理.

定理 5.2.10. 如果 (ξ, η_α) 是 S 的同余成分, 则 $\rho = \rho_{(\xi,\eta_\alpha)}$ 是 S 上的使得 $re\rho = \xi, \rho|_{S_\alpha} = \eta_\alpha$ 的唯一同余, 其中 $\alpha \in Y$. 反之, 如果 ρ 是 S 上的同余, 则 $(re\rho, \rho\mid_{S_\alpha})$ 是 S 的同余成分且 $\rho = \rho_{(re\rho,\rho|_{S_\alpha})}$. □

由定理 5.2.10, 我们有

引理 5.2.11. 设 $\rho, \rho' \in \mathcal{C}(S)$, $\rho = \rho_{(\xi,\eta_\alpha)}$, $\rho' = \rho'_{(\xi',\eta'_\alpha)}$, $\xi \subseteq \xi'$, $\eta_\alpha \subseteq \eta'_\alpha$. 则 $\rho \subseteq \rho'$. □

§5.3　最小纯正同余

在本文的最后一节, 我们利用第 3 章和第 4 章导出的关于正则密群和密群的结构定理, 给出它们的最小纯正同余的元素刻画.

设 $\rho \in \mathcal{C}(\mathcal{S})$, S/ρ 是纯正群. 称 ρ 是 S 上的纯正同余. 我们介绍一个引理, 它说明了研究同余的重要性.

引理 5.3.1. 设 $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是半群 S 上的同余族, 且 $\cap_{\alpha\in A}\rho_\alpha = \varepsilon$. 则 S 是半群 S/ρ_α 的子直积, 这里 ε 是恒等同余. □

上述引理说明半群上的同余特别是一些类型的最小同余在半群直积分解理论中是重要的. 完全正则半群上的最小纯正同余已经被研究 [7]. 它属于核 - 迹刻画的范畴. 正则密群甚至密群有更好的代数性质, 因此我们应该能够给它的最小纯正同余一个更清晰的刻画.

设 G 是群, $A \subseteq G$. 我们用 $\hat{A}$ 表示由 A 生成的 G 的正规子群.

定理 5.3.2. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是正则密群, 其中 $S_\alpha = \mathcal{M}_\alpha(I_\alpha, G_\alpha, \Lambda_\alpha\ C\#;P_\alpha)$ 是 Rees 矩阵半群. 在 S 上定义二元关系 $\mathcal{O}$: 设 $a = (i, g, \lambda)$, $b = (j, h, \mu)$,

$$\mathcal{O} = \{(a, b) \in S_\alpha \times S_\alpha | a\mathcal{H}b,\ gh^{-1} \in \hat{P}_\alpha\}.$$

则 $\mathcal{O}$ 是 S 上的最小纯正同余.

证明 显然，$\mathcal{O}$ 是 S 上的等价关系. 设 $a=(i,g,\lambda)$, $b=(i,h,\lambda)\in S_\alpha, gh^{-1}\in \hat{P}_\alpha$. 对任意 $c\in S_\beta$, 则 $ac\mathcal{H}bc$, 既然 S 是正则密群. 由引理 3.3.4,

$$ac=(ace_{\alpha\beta})^0 a\theta_{\alpha,\alpha\beta}c\theta_{\beta,\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}ac)^0,$$

$$bc=(bce_{\alpha\beta})^0 b\theta_{\alpha,\alpha\beta}c\theta_{\beta,\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}bc)^0,$$

其中 $(ace_{\alpha\beta})^0=(bce_{\alpha\beta})^0$, $(e_{\alpha\beta}ac)^0=(e_{\alpha\beta}bc)^0$, 既然 $\mathcal{H}$ 是 S 上的同余，$a\mathcal{H}b$.

令 $(ace_{\alpha\beta})^0=(j,\iota_{\alpha\beta},1'_{\alpha\beta})$, $(e_{\alpha\beta}bc)^0=(1_{\alpha\beta},\iota_{\alpha\beta},\mu)$, $c\theta_{\beta,\alpha\beta}=(k,t,\nu)$. 由 $\theta_{\alpha,\alpha\beta}$ 的定义，我们可以令 $a\theta_{\alpha,\alpha\beta}=(l,u(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}v(\lambda),\eta)$ ，而 $b\theta_{\alpha,\alpha\beta}=(l,u(i)h\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}v(\lambda),\eta)$. 因此,

$$\begin{aligned} ac &= (j,\iota_{\alpha\beta},1'_{\alpha\beta})(i,u(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}v(\lambda),\eta)(k,t,\nu)(1_{\alpha\beta},\iota_{\alpha\beta},\mu) \\ &= (j,u(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}v(\lambda)p_{\eta k}t,\mu). \end{aligned}$$

类似地，我们有 $bc=(j,u(i)h\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}v(\lambda)p_{\eta k}t,\mu)$. 另外,

$$u(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}v(\lambda)p_{\eta k}t(u(i)h\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}v(\lambda)p_{\eta k}t)^{-1}=u(i)(gh^{-1})\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}u^{-1}(i).$$

由 $\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}$ 的性质，$(gh^{-1})\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}\in \hat{P}_{\alpha\beta}$. 因此,

$$u(i)g\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}v(\lambda)p_{\eta k}(u(i)h\tilde{\theta}_{\alpha,\alpha\beta}v(\lambda)p_{\eta k})^{-1}\in \hat{P}_{\alpha\beta}.$$

这样，$ac\mathcal{O}bc$. 对偶地，我们能够证明 $ca\mathcal{O}cb$. 所以，$\mathcal{O}$ 是 S 上的同余.

设 $a=(i,g,\lambda)$, $b=(j,h,\mu)\in S_\alpha$ 且 $a\mathcal{O}$, $b\mathcal{O}\in E(S/\mathcal{O})$. 则由引理 1.2.7, $a\mathcal{O}(i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda)$,$b\mathcal{O}(j,p_{\mu j}^{-1},\mu)$. 我们诱导 $g,h\in \hat{P}_\alpha$. 而 $ab=(i,gp_{\lambda j}h,\mu)$. 因此，$gp_{\lambda j}h\in \hat{P}_\alpha$, 这蕴涵 $a\mathcal{O}b\mathcal{O}\in E(S/\mathcal{O})$,$S_\alpha/\mathcal{O}$ 是纯正群. 由 [15] 中 Theorem II.5.3, $S/\mathcal{O}$ 是纯正群.

下面证明 $\mathcal{O}$ 是 S 上的最小纯正同余. 设 δ 是 S 上的纯正同余，$a=(i,g,\lambda)$, $b=(i,h,\lambda)\in S_\alpha$, $gh^{-1}\in \hat{P}_\alpha$. 则 $ab^{-1}=(i,g,\lambda)(i,p_{\lambda i}^{-1}h^{-1}p_{\lambda i}^{-1},\lambda)=(i,gh^{-1}p_{\lambda i}^{-1},\lambda)$ 而 $gh^{-1}p_{\lambda i}^{-1}\in \hat{P}_\alpha$. 令 $p_{\mu j}$ 是 P_α 中第 μ 行第 j 列的元素，$t\in G_\alpha$. 既然 δ 是 S_α 上的纯正同余,

$$\begin{aligned} (i,tp_{\mu j}t^{-1},\lambda)\delta &= ((i,t,1'_\alpha)(1_\alpha,\iota_\alpha,\mu)(j,\iota_\alpha,1'_\alpha)(1_\alpha,t^{-1},\lambda))\delta \\ &= (i,t,1'_\alpha)\delta(1_\alpha,\iota_\alpha,\mu)\delta(j,\iota_\alpha,1'_\alpha)\delta(1_\alpha,t^{-1},\lambda)\delta \\ &= ((i,t,1'_\alpha)(1_\alpha,\iota_\alpha,1'_\alpha)(1_\alpha,t^{-1},\lambda))\delta=(i,\iota_\alpha,\lambda)\delta. \end{aligned}$$

进一步地， $(i, \iota_\alpha, \lambda) = ((i, \iota_\alpha, 1'_\alpha)(1_\alpha, \iota_\alpha, \lambda))\delta(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda)$. 因此

$$(i, tp_{\mu j}t^{-1}, \lambda)\delta(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda).$$

类似地， $(i, tp_{\mu j}^{-1}t^{-1}, \lambda)\delta(i, p_{\lambda i}^{-1}, \lambda)$. 既然 $\hat{P}_\alpha$ 有形式 $tp_{\mu j}t^{-1}$ 和 $tp_{\mu j}^{-1}t^{-1}$ 的元素生成， $ab^{-1}\delta b^0$, 故 $a\delta b$. 因此 $\mathcal{O}$ 是 S 上的最小纯正同余. □

类似地，我们能得到密群上的最小纯正同余.

定理 5.3.3. 设 $S = (Y; S_\alpha)$ 是密群. 在 S 上定义二元关系 $\mathcal{O}$: 设 $x = (a, g)$, $y = (b, h)$,

$$\mathcal{O} = \{(x, y) \in S_\alpha \times S_\alpha | a = b,\ gh^{-1} \in \hat{P}_\alpha\}.$$

则 $\mathcal{O}$ 是 S 上的最小纯正同余.

附 录

$\varepsilon, \varepsilon_S$	S 上的恒等关系
$\Omega(S)$	S 的平移包
a^0	H_a 的单位元
a^{-1}	H_a 中 a 的逆元
$E(S)$	S 的幂等元集
H_a	a 所在的 $\mathcal{H}$- 类
$\hat{P}$	由 P 的元素生成的正规子群
$\mathcal{CA}(S)$	半群 S 的同余成分
$\mathcal{C}(S)$	半群 S 上的同余
$\mathcal{CP}(S)$	S 上的同余对
$\mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$	Green 关系
$\cong$	同构
$\mathcal{V}$	半群簇
$\mathcal{CR}$	完全正则半群簇
$\mathcal{O}$	纯正群
$\mathcal{LRO}$	左正则纯正群
$\mathcal{RRO}$	右正则纯正群
$\mathcal{BG}$	密群
$\mathcal{RBG}$	正则密群
$\mathcal{LQNBG}$	左拟正规密群
$\mathcal{NBG}$	正规密群
$\mathcal{OBG}$	纯正密群
$\mathcal{C}$	中心完全正则半群
$\mathcal{CBG}$	中心密群
$\mathcal{BA}$	Abel 群带
$\mathcal{ROBG}$	正则纯正密群
$\mathcal{ONBG}$	正规纯正密群
$\mathcal{SG}$	Clifford 半群

参考文献

[1] Burgess W. D. and Raphael R., On Conrad's partial order relation on semiprime rings and on semigroups, Semigroup Forum, 16(1978), 133-140.

[2] Clifford A.H., Semigroups admitting relative inverses, Ann. of Math., 42(1941), 1037-1049.

[3] Clifford A.H. and Petrich M., Some classes of completely regular semigroups, J. Algebra, 46(1977), 462-480.

[4] Conrad P.F., The hulls of semiprime rings, Bull. Austral. Math. Soc., 12(1975), 311-314.

[5] Drazin M. P., A partial order in completely regular semigroups, Journal of Algebra, 98(1986), 362-374.

[6] Howie J.M., An Introduction to Semigroup Theory, Academic PresLondon, 1976.

[7] Jones P.R., The least inverse and orthodox congruences on a completely regular semigroup, Semigroup Forum, 27 (1983), 390-392.

[8] Jones P.R.and Szendrei M.B., Local varieties of completely regular monoids, J.Algebra, 150 (1992), 1-27.

[9] Kong X.Z. and Shum K.P.,On the structure of regular cryptosemigroups, Communications in Algebra, 29 (2001), 2461-2479.

[10] Kopamu,S.J.L., Orthodox right quasi-normal bands of groups, Southeast Asian Bull. Math., 18 (1994), 105-116.

[11] Lallement G., Demi-groupes réguliers, Ann. Mat. Pura Appl., 77(1967),47-129.

[12] Nambooripad K. S. S., The natural partial order on a regular senigroup, Proc. Edinburg Math. Soc., 23(1980), 249-260.

[13] Pastijn F.J.and Petrich M., Congruences on regular semigroups, Tran. Amer. Math. Soc., 295(1986), 607-633.

[14] Pastijn F.J. and Petrich M., Congruences on regular semigroups associated with Green's relations, Boll.Un.Mat.Ital., B1 (1987), 591-603.

[15] Petrich M. and Reilly N., Completely Regular Semigroups, 1999, John. Weley &Sonc. INC.

[16] Petrich M. and Reilly N., The normal hull of a completely regular semigroup, J. Algebra, 81(1983), 232-257.

[17] Petrich M., The structure of completely regular semigroups, Tran. Amer. Math. Soc., 189(1974), 211-236.

[18] Petrich M., Lectures in Semigroups, John Wiley & Sons, New York, 1977.

[19] Petrich, M., The translational hull of a completely 0-simple semigroup, Glasgow Math., 9(1968), 1-11.

[20] Petrich M., Congruences on completely regular semigroups, Canad.J.Math., 41(1989), 439-461.

[21] Petrich M., The kernel relation for a completely regular semigroup, J.Algebra, 172(1995), 90-112.

[22] Rassin V.V., On the varieties of completely simple semigroups, Semigroup Forum, 17(1979), 113-122.

[23] Rees D., On semi-groups, Proc.Cambridge Philos. Soc. 36(1940),387-400.

[24] Reily, N. R., The varieties of completely regular semigroups, J. Austral. Math. Soc. A38 (1985), 372-393.

[25] Song G.T, Zhang J.G. and Liu G.X., A Construction of Orthogroups, submitted.

[26] Warne R.J., On the Structure of Semigroups which Are Unions of Groups, Tran. Amer. Math. Soc., 186(1973), 385-401.

[27] Yamada M., Orthodox semigroups whose idempotents satisfy a certain identity, Semigroup Forum, 6(1973), 113-128.

[28] Yamada M., A note on a certain class of orthodox semigroups, Semigroup Forum, 6(1973), 180-188.

作者学习期间完成的论文

[1] Song Guangtian, Liu Guoxin and Zhang Jiangang, A Construction of Regular Cryptogroups, Semigroup Forum, accepted.

[2] Song Guangtian, Liu Guoxin and Zhang Jiangang, A Construction of Cryptogroups, Acta Math. Sinica, submitted.

[3] Liu Guoxin, Song Guangtian, Some Partial Order Relations on Completely Regular Semigroups, J. University of Science and Technology of China, accepted.

[4] Zhang Jiangang, Liu Guoxin, $\mathcal{H}^*$-Relations on Completely Archimedean Semigroups, J. University of Science and Technology of China, accepted.

[5] Liu Guoxin, Zhang Jiangang, Some Characterizations of Cryptogroups, Chin.Quart.J.of Math., accepted

[6] Song Guangtian, Zhang Jiangang and Liu Guoxin, Translational Hulls of Completely Simple Semigroups, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, accepted.

[7] Song Guangtian, Zhang Jiangang and Liu Guoxin, A Construction of Orthogroups, submitted.