《运筹学》教材习题答案

习题一

1.1 讨论下列问题：

（1）在例 1.1 中，假定企业一周内工作 5 天，每天 8 小时，企业设备 A 有 5 台，利用率为 0.8,设备 B 有 7 台，利用率为 0.85,其它条件不变，数学模型怎样变化．

（2）在例 1.2 中，如果设 x_j(j=1，2，…，7)为工作了 5 天后星期一到星期日开始休息的营业员，该模型如何变化．

（3）在例 1.3 中，能否将约束条件改为等式；如果要求余料最少，数学模型如何变化；简述板材下料的思路．

（4）在例 1.4 中，若允许含有少量杂质，但杂质含量不超过 1%，模型如何变化．

（5）在例 1.6 中，假定同种设备的加工时间均匀分配到各台设备上，要求一种设备每台每天的加工时间不超过另一种设备任一台加工时间 1 小时，模型如何变化．

1.2 工厂每月生产 *A*、*B*、*C* 三种产品 ,单件产品的原材料消耗量、设备台时的消耗量、资源限量及单件产品利润如表 1－22 所示．

表1－22

产品 资源	A	B	C	资源限量
材料(kg)	1.5	1.2	4	2500
设备(台时)	3	1.6	1.2	1400
利润(元/件)	10	14	12	

根据市场需求,预测三种产品最低月需求量分别是 150、260 和 120,最高月需求是 250、310 和 130.试建立该问题的数学模型,使每月利润最大．

【解】设 x_1、x_2、x_3 分别为产品 A、B、C 的产量，则数学模型为

$$\max Z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

$$\begin{cases} 1.5x_1 + 1.2x_2 + 4x_3 \le 2500 \\ 3x_1 + 1.6x_2 + 1.2x_3 \le 1400 \\ 150 \le x_1 \le 250 \\ 260 \le x_2 \le 310 \\ 120 \le x_3 \le 130 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

1.3 建筑公司需要用 6m 长的塑钢材料制作 A、B 两种型号的窗架．两种窗架所需材料规格及数量如表 1－23 所示：

表1－23 窗架所需材料规格及数量

	型号 A		型号 B	
每套窗架需要材料	长 度（m）	数量(根)	长 度(m)	数量(根)
	A_1：1.7	2	B_1：2.7	2
	A_2：1.3	3	B_1：2.0	3
需要量（套）	200		150	

问怎样下料使得（1）用料最少；（2）余料最少．

【解】 第一步：求下料方案，见下表。

方案	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三	十四	需要量
B1:2.7m	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	300

B2:2m	0	1	0	0	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0	450
A1:1.7m	0	0	1	0	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	400
A2:1.3m	0	1	1	2	0	0	1	0	1	3	0	2	3	4	600
余料	0.6	0	0.3	0.7	0	0.3	0.7	0.6	1	0.1	0.9	0	0.4	0.8	

第二步：建立线性规划数学模型

设 x_j（j=1,2,…，14）为第 j 种方案使用原材料的根数，则

（1）用料最少数学模型为

$$\min Z=\sum_{j=1}^{14} x_j$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4\ge 300 \\ x_2+3x_5+2x_6+2x_7+x_8+x_9+x_{10}\ge 450 \\ x_3+x_6+2x_8+x_9+3x_{11}+2x_{12}+x_{13}\ge 400 \\ x_2+x_3+2x_4+x_7+x_9+3x_{10}+2x_{12}+3x_{13}+4x_{14}\ge 600 \\ x_j\ge 0,\ j=1,2,\cdots,14 \end{cases}$$

用单纯形法求解得到两个基本最优解

$X^{(1)}$=(50 ,200 ,0 ,0,84 ,0,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,200 ,0 ,0);Z=534

$X^{(2)}$=(0 ,200 ,100 ,0,84 ,0,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,150 ,0 ,0);Z=534

（2）余料最少数学模型为

$$\min Z=0.6x_1+0.3x_3+0.7x_4+\cdots+0.4x_{13}+0.8x_{14}$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4\ge 300 \\ x_2+3x_5+2x_6+2x_7+x_8+x_9+x_{10}\ge 450 \\ x_3+x_6+2x_8+x_9+3x_{11}+2x_{12}+x_{13}\ge 400 \\ x_2+x_3+2x_4+x_7+x_9+3x_{10}+2x_{12}+3x_{13}+4x_{14}\ge 600 \\ x_j\ge 0,\ j=1,2,\cdots,14 \end{cases}$$

用单纯形法求解得到两个基本最优解

$X^{(1)}$=(0 ,300 ,0 ,0,50 ,0,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,200 ,0 ,0);Z=0，用料 550 根

$X^{(2)}$=(0 ,450 ,0 ,0,0 ,0,0 ,0 ,0 ,0 ,0 ,200 ,0 ,0);Z=0，用料 650 根

显然用料最少的方案最优。

1.4 A、B 两种产品，都需要经过前后两道工序加工，每一个单位产品 A 需要前道工序 1 小时和后道工序 2 小时，每一个单位产品 B 需要前道工序 2 小时和后道工序 3 小时．可供利用的前道工序有 11 小时，后道工序有 17 小时．

每加工一个单位产品 B 的同时，会产生两个单位的副产品 C，且不需要任何费用，产品 C 一部分可出售赢利，其余的只能加以销毁．

出售单位产品 A、B、C 的利润分别为 3、7、2 元，每单位产品 C 的销毁费为 1 元．预测表明，产品 C 最多只能售出 13 个单位．试建立总利润最大的生产计划数学模型．

【解】设 x_1,x_2 分别为产品 A、B 的产量，x_3 为副产品 C 的销售量,x_4 为副产品 C 的销毁量，有 $x_3+x_4=2x_2$,Z 为总利润，则数学模型为

$$\max Z=3x_1+7x_2+2x_3-x_4$$
$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 11 \\ 2x_1+3x_2\le 17 \\ -2x_2+x_3+x_4=0 \\ x_3\le 13 \\ x_j\ge 0, j=1,2,\cdots,4 \end{cases}$$

1.5 某投资人现有下列四种投资机会, 三年内每年年初都有3万元（不计利息）可供投资：
方案一：在三年内投资人应在每年年初投资，一年结算一次，年收益率是 20%，下一年可继续将本息投入获利；
方案二：在三年内投资人应在第一年年初投资，两年结算一次，收益率是 50%，下一年可继续将本息投入获利，这种投资最多不超过2万元；
方案三：在三年内投资人应在第二年年初投资，两年结算一次，收益率是 60%，这种投资最多不超过1.5万元；
方案四：在三年内投资人应在第三年年初投资，一年结算一次，年收益率是 30%，这种投资最多不超过1万元.

投资人应采用怎样的投资决策使三年的总收益最大，建立数学模型.

【解】是设 x_{ij} 为第 i 年投入第 j 项目的资金数，变量表如下

	项目一	项目二	项目三	项目四
第1年	x_{11}	x_{12}		
第2年	x_{21}		x_{23}	
第3年	x_{31}			x_{34}

数学模型为

$$\max Z=0.2x_{11}+0.2x_{21}+0.2x_{31}+0.5x_{12}+0.6x_{23}+0.3x_{34}$$
$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}\le 30000 \\ -1.2x_{11}+x_{21}+x_{23}\le 30000 \\ -1.5x_{12}-1.2x_{21}+x_{31}+x_{34}\le 30000 \\ x_{12}\le 20000 \\ x_{23}\le 15000 \\ x_{34}\le 10000 \\ x_{ij}\ge 0, i=1,\cdots,3; j=1,\cdots 4 \end{cases}$$

最优解 X=(30000，0，66000，0，109200，0)；Z＝84720

1.6 IV 发展公司是商务房地产开发项目的投资商．公司有机会在三个建设项目中投资：高层办公楼、宾馆及购物中心，各项目不同年份所需资金和净现值见表1－24．三个项目的投资方案是：投资公司现在预付项目所需资金的百分比数，那么以后三年每年必须按此比例追加项目所需资金，也获得同样比例的净现值．例如，公司按 10%投资项目 1，现在必须支付400万，今后三年分别投入600万、900万和100万，获得净现值450万．
公司目前和预计今后三年可用于三个项目的投资金额是：现有2500万，一年后2000万，两年后2000万，三年后1500万．当年没有用完的资金可以转入下一年继续使用．
IV 公司管理层希望设计一个组合投资方案，在每个项目中投资多少百分比，使其投资获得的净现值最大．

表1－24

年份	10%项目所需资金（万元）

	项目 1	项目 2	项目 3
0	400	800	900
1	600	800	500
2	900	800	200
3	100	700	600
净现值	450	700	500

【解】以 1%为单位，计算累计投资比例和可用累计投资额，见表（2）。

表（2）

年份	每种活动单位资源使用量（每个百分点投资的累计数）			
	项目 1	项目 2	项目 3	累计可用资金(万元)
0	40	80	90	2500
1	100	160	140	4500
2	190	240	160	6500
3	200	310	220	8000
净现值	45	70	50	

设 x_j 为 j 项目投资比例，则数学模型：

$$\max Z = 45x_1 + 70x_2 + 50x_3$$

$$\begin{cases} 40x_1 + 80x_2 + 900x_3 \le 2500 \\ 100x_1 + 160x_2 + 140x_3 \le 4500 \\ 190x_1 + 240x_2 + 160x_3 \le 6500 \\ 200x_1 + 310x_2 + 220x_3 \le 8000 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

最优解 X＝（0，16.5049，13.1067）；Z=1810.68 万元

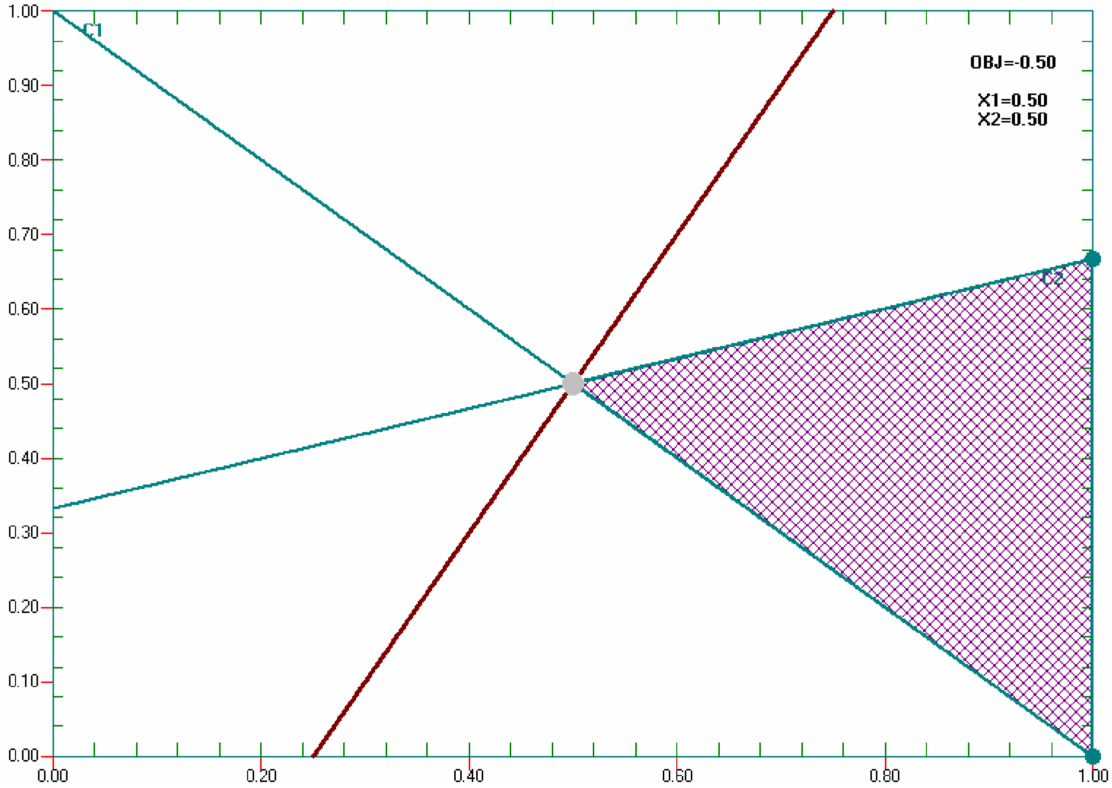
年份	实际投资			
	项目 1 比例：0	项目 2 比例：16.5049	项目 3 比例：13.1067	累计投资(万元)
0	0	1320.392	1179.603	2499.995
1	0	2640.784	1834.938	4475.722
2	0	3961.176	2097.072	6058.248
3	0	5116.519	2883.474	7999.993
净现值	0	1155.343	655.335	

1.7 图解下列线性规划并指出解的形式：

$$\max Z = -2x_1 + x_2$$

(1) $$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - 3x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

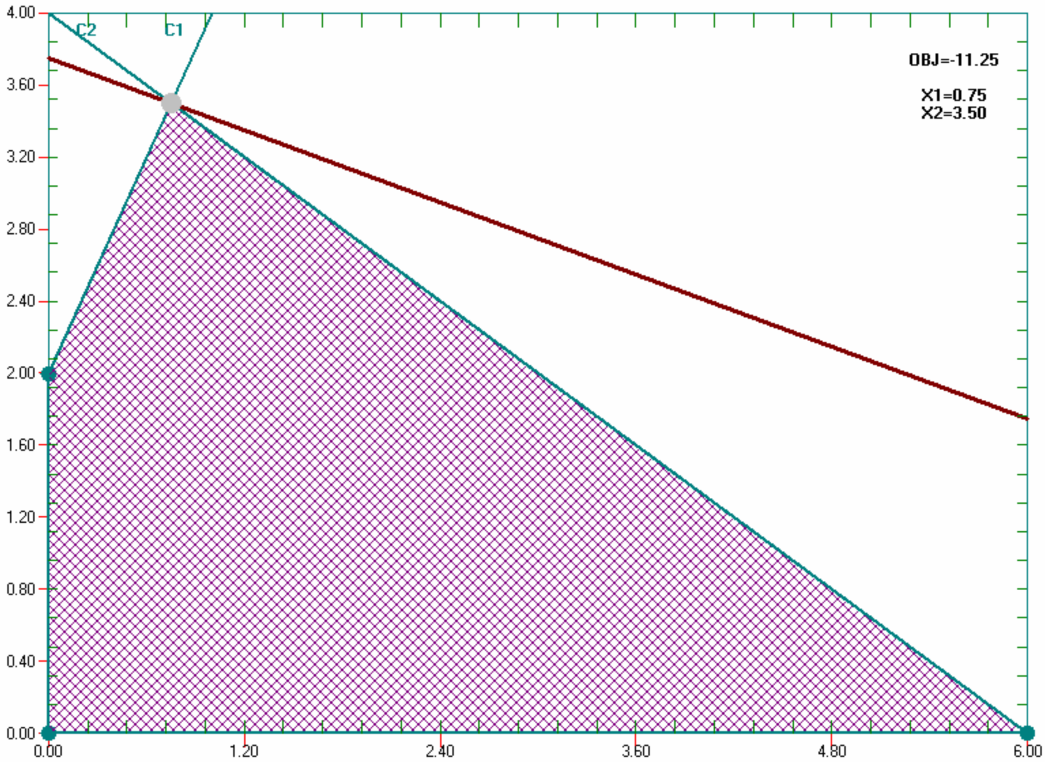
【解】最优解 X＝（1/2，1/2）；最优值 Z=－1/2



$$\min Z = -x_1 - 3x_2$$

(2) $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

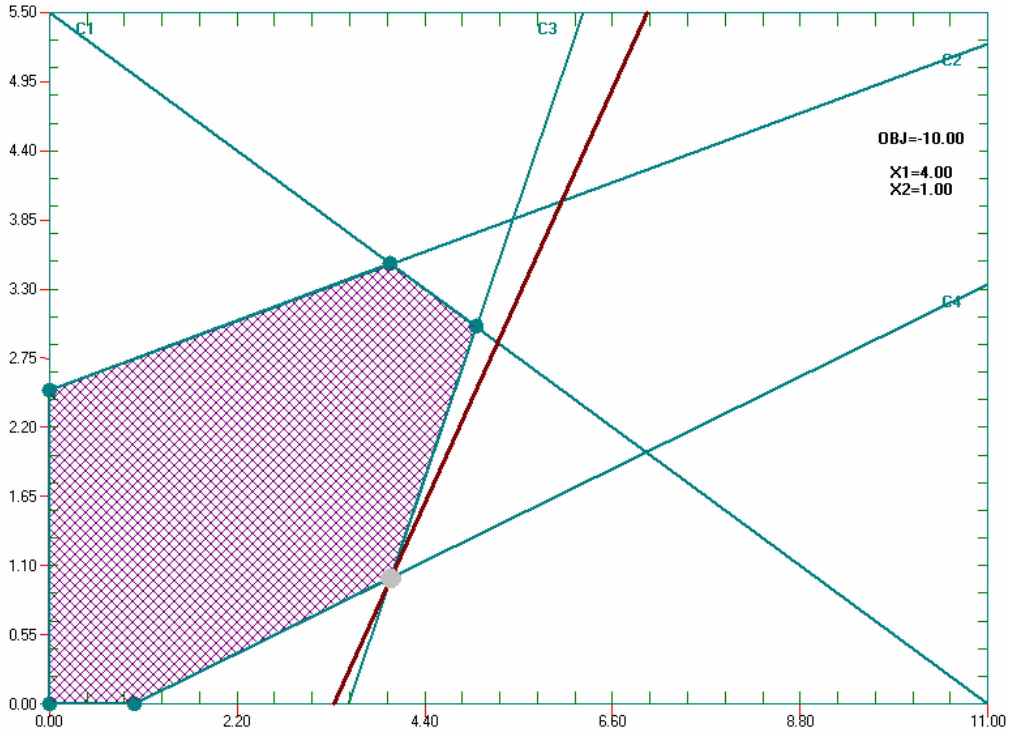
【解】最优解 X=（3/4，7/2）；最优值 Z=－45/4



$$\min Z = -3x_1 + 2x_2$$

(3) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11 \\ -x_1 + 4x_2 \le 10 \\ 2x_1 - x_2 \le 7 \\ x_1 - 3x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

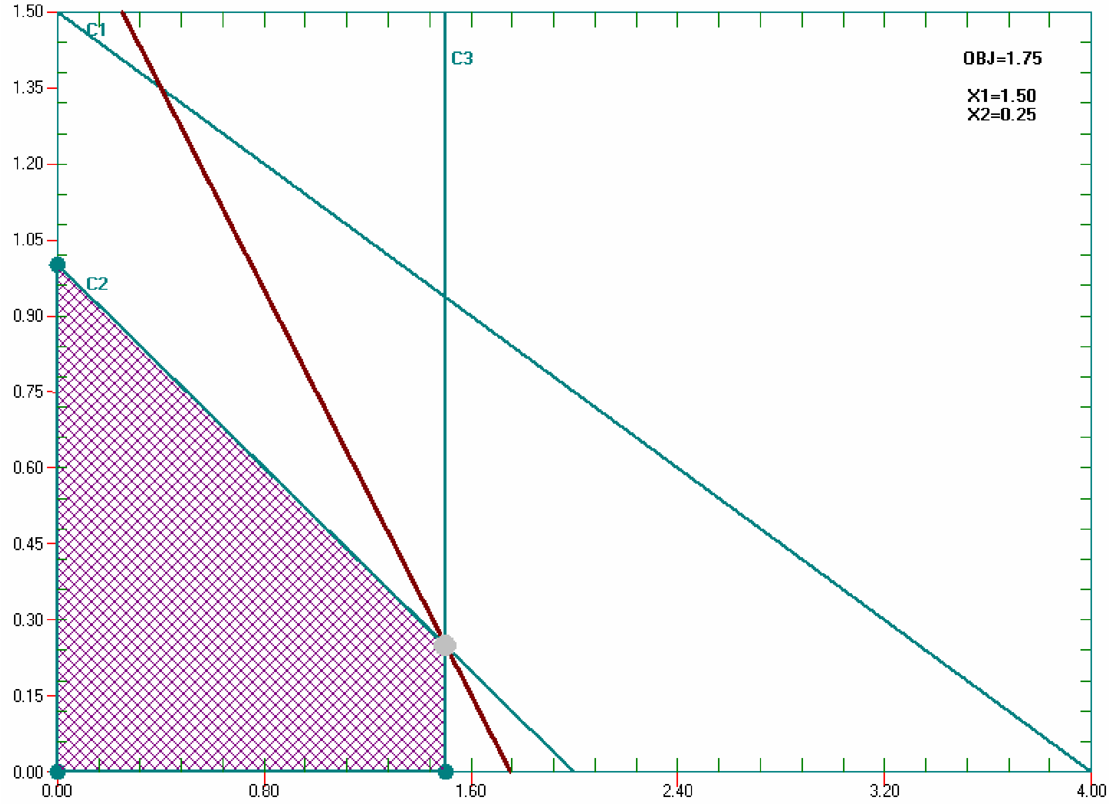
【解】最优解 X=（4，1）；最优值 Z=－10



$$\max Z = x_1 + x_2$$

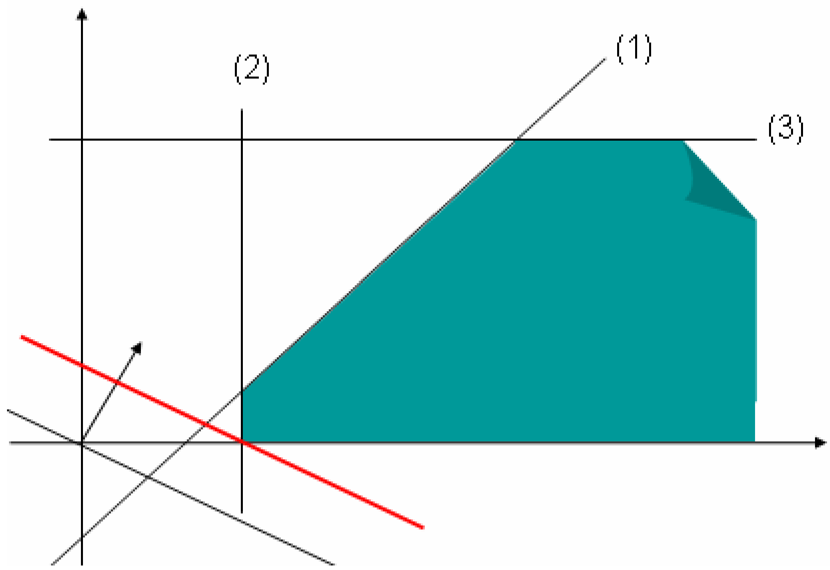
(4) $$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【解】最优解 X=（3/2，1/4）；最优值 Z=7/4



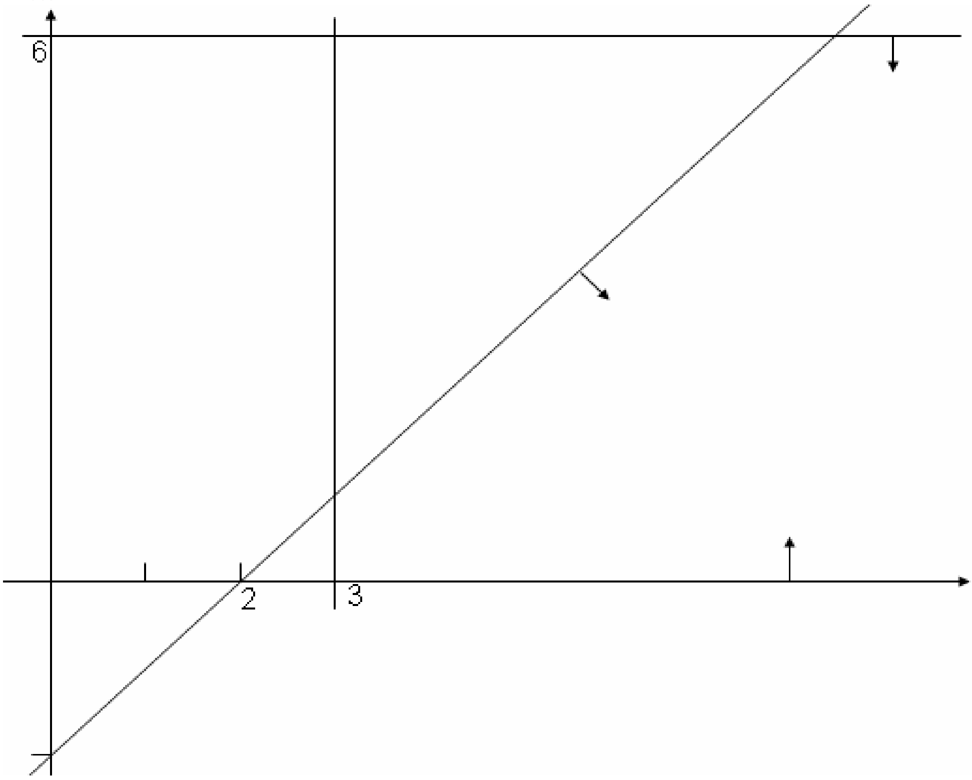
(5) $$\min Z = x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【解】 最优解 X=（3，0）；最优值 Z=3



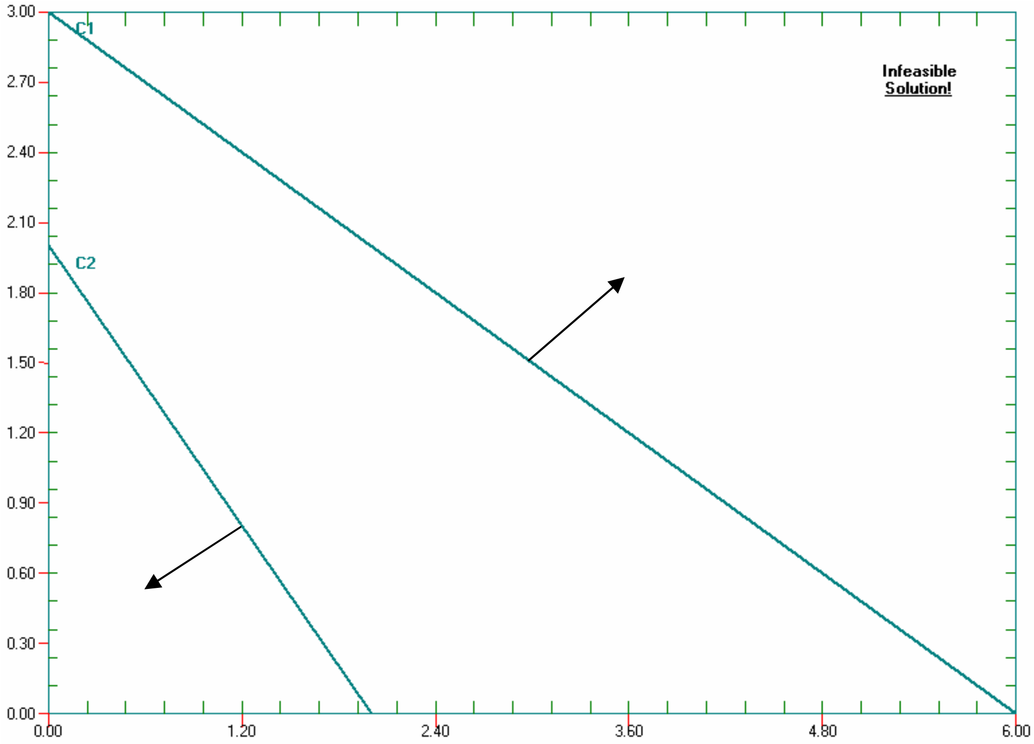
(6) $$\max Z = x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 3 \\ x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【解】无界解。



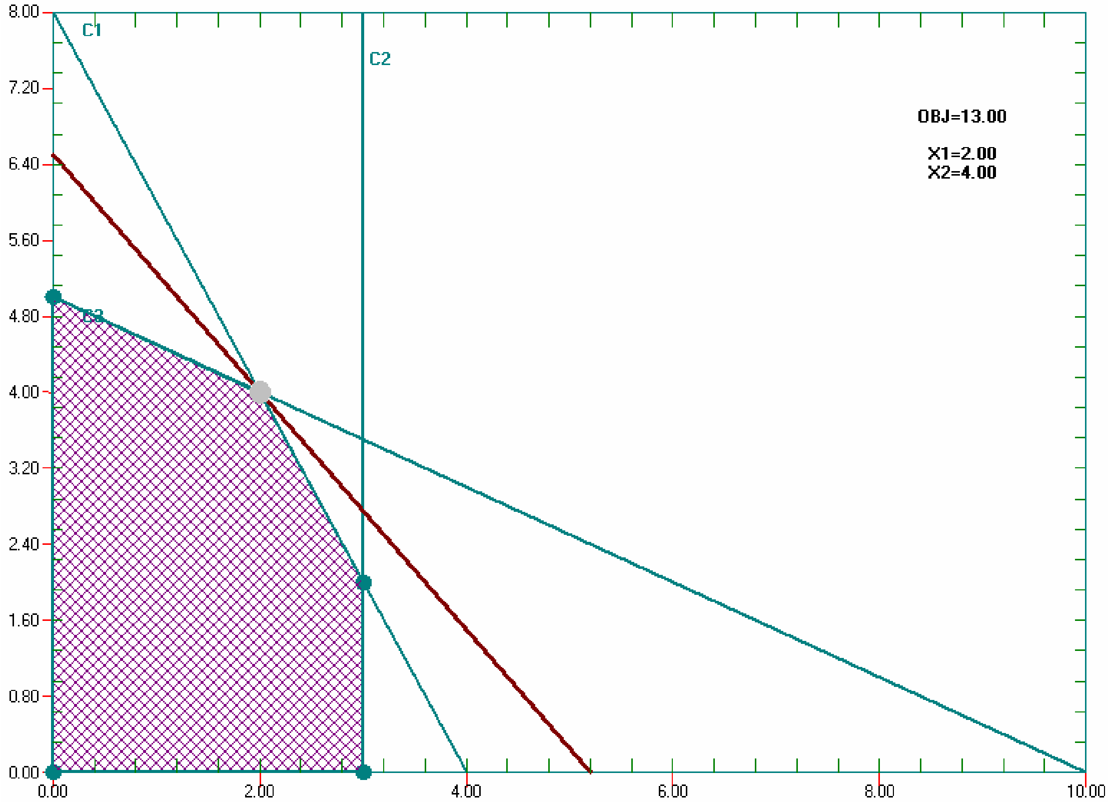
(7) $$\min Z = 2x_1 - 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【解】无可行解。



(8) $$\max Z = 2.5x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 0.5x_1 \le 1.5 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【解】最优解 X=（2，4）；最优值 Z=13



1.8 将下列线性规划化为标准形式

$$\max Z = x_1 + 4x_2 - x_3$$

$$(1)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 20 \\ 5x_1 - 7x_2 + 4x_3 \ge 3 \\ 10x_1 + 3x_2 + 6x_3 \ge -5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3\text{无限制} \end{cases}$$

【解】（1）令 $x_3 = x_3^{'} - x_3^{''}, x_4, x_5, x_6$ 为松驰变量 ，则标准形式为

$$\max Z = x_1 - 4x_2 - x_3^{'} + x_3^{''}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3^{'} - 3x_3^{''} + x_4 = 20 \\ 5x_1 - 7x_2 + 4x_3^{'} - 4x_3^{''} - x_5 = 3 \\ -10x_1 - 3x_2 - 6x_3^{'} + 6x_3^{''} + x_6 = 5 \\ x_1, x_2, x_3^{'}, x_3^{''}, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min Z = 9x_1 - 3x_2 + 5x_3$$

$$(2)\begin{cases} |\, 6x_1 + 7x_2 - 4x_3 \,| \le 20 \\ x_1 \ge 5 \\ x_1 + 8x_2 = -8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

【解】（2）将绝对值化为两个不等式，则标准形式为

$$\max Z' = -9x_1 + 3x_2 - 5x_3$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 20 \\ -6x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_5 = 20 \\ x_1 - x_6 = 5 \\ -x_1 - 8x_2 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$
(3) $\begin{cases} 1 \leq x_1 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

【解】方法1：

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

方法2：令 $x_1' = x_1 - 1$, 有$x_1 = x_1' + 1, x_1' \leq 5 - 1 = 4$

$$\max Z = 2(x_1' + 1) + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1' \leq 4 \\ -(x_1' + 1) + x_2 = -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

则标准型为

$$\max Z = 2 + 2x_1' + 3x_2$$
$$\begin{cases} x_1' + x_3 = 4 \\ -x_1' + x_2 = 0 \\ x_1', x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max Z = \min(3x_1 + 4x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$
(4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 15 \\ 9x_1 + x_2 + 6x_3 \geq -5 \\ x_1\text{无约束}, x_2、x_3 \geq 0 \end{cases}$

【解】令 $y \leq 3x_1 + 4x_2, y \leq x_1 + x_2 + x_3, x_1 = x_1' - x_1''$，线性规划模型变为

$$\max Z = y$$
$$\begin{cases} y \le 3(x_1' - x_1'') + 4x_2 \\ y \le x_1' - x_1'' + x_2 + x_3 \\ x_1' - x_1'' + 2x_2 + x_3 \le 30 \\ 4(x_1' - x_1'') - x_2 + 2x_3 \ge 15 \\ 9(x_1' - x_1'') + x_2 + 6x_3 \ge -5 \\ x_1', x_1'', x_2、 x_3 \ge 0 \end{cases}$$

标准型为

$$\max Z = y$$
$$\begin{cases} y - 3x_1' + 3x_1'' - 4x_2 + x_4 = 0 \\ y - x_1' + x_1'' - x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1' - x_1'' + 2x_2 + x_3 + x_6 = 30 \\ 4x_1' - 4x_1'' - x_2 + 2x_3 - x_7 = 15 \\ -9x_1' + 9x_1'' - x_2 - 6x_3 + x_8 = 5 \\ x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \ge 0 \end{cases}$$

1.9 设线性规划

$$\max Z = 5x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 50 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 60 \\ x_j \ge 0, j = 1,\Lambda ,4 \end{cases}$$

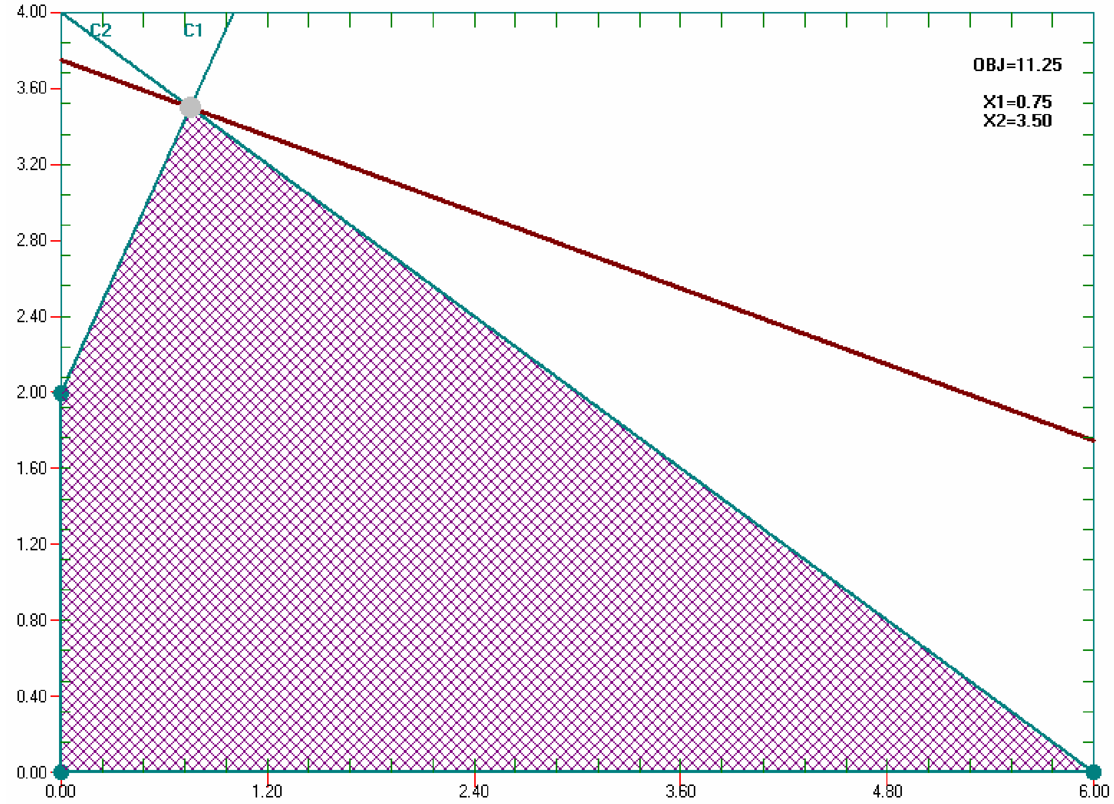
取基 $B_1 = (\mathrm{P}_1，\mathrm{P}_3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$、$B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$，分别指出 B_1 和 B_2 对应的基变量和非基变量，求出基本解，并说明 B_1、B_2 是不是可行基.

【解】 B_1：x_1，x_3 为基变量，x_2，x_4 为非基变量, 基本解为 X=（15，0，20，0）^{T}，B_1 是可行基。B_2：x_1,x_4 是基变量，x_2,x_3 为非基变量，基本解 X=（25，0，0，－40）^{T}，B_2 不是可行基。

1.10 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划，指出单纯形法迭代的每一步的基可行解对应于图形上的那一个极点.

$$\max Z = x_1 + 3x_2$$
$$(1) \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【解】 图解法



单纯形法：

C(j)		1	3	0	0	b	Ratio
C(i)	Basis	X1	X2	X3	X4		
0	X3	-2	[1]	1	0	**2**	2
0	X4	2	3	0	1	**12**	4
C(j)-Z(j)		1	3	0	0	**0**	
3	X2	-2	1	1	0	**2**	M
0	X4	[8]	0	-3	1	**6**	0.75
C(j)-Z(j)		7	0	-3	0	**6**	
3	X2	0	1	0.25	0.25	**7/2**	
1	X1	1	0	-0.375	0.125	**3/4**	
C(j)-Z(j)		0	0	-0.375	-0.875	**11.25**	

对应的顶点：

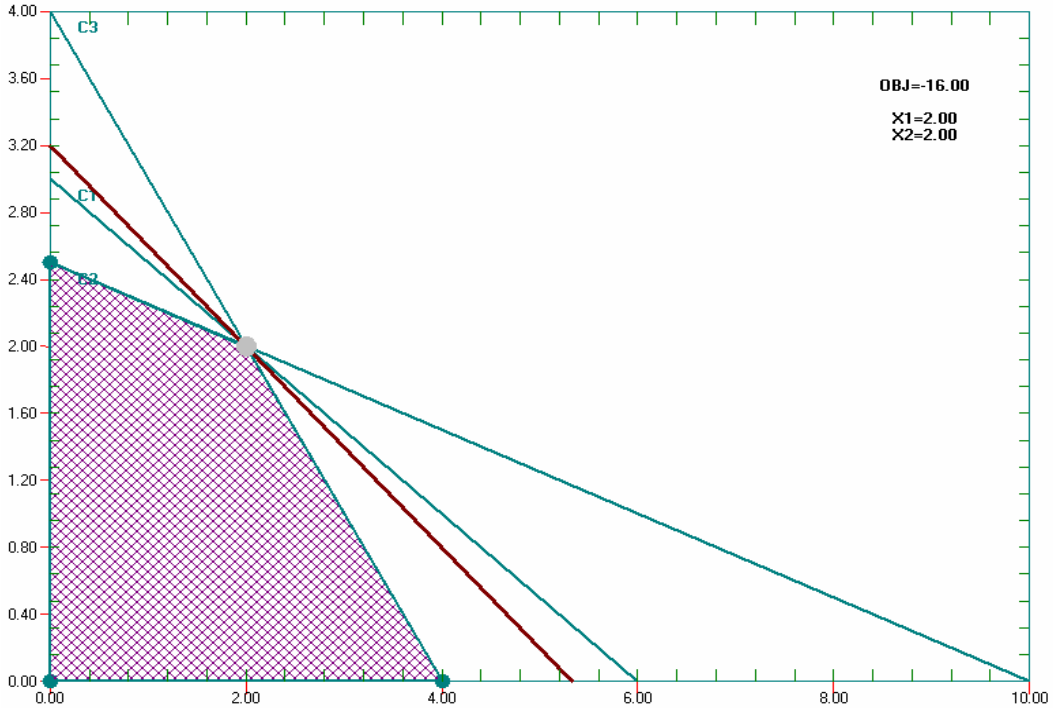
基可行解	可行域的顶点
$X^{(1)}$=（0，0，2，12）`	（0，0）
$X^{(2)}$=（0，2，0，6，）`	（0，2）
$X^{(3)}$=（$\frac{3}{4},\frac{7}{2}$,0,0）`	$(\frac{3}{4},\frac{7}{2})$

最优解 $X=(\frac{3}{4},\frac{7}{2}), Z=\frac{45}{4}$

$$\min Z=-3x_1-5x_2$$

$$(2)\quad \begin{cases} x_1+2x_2\le 6 \\ x_1+4x_2\le 10 \\ x_1+x_2\le 4 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

【解】图解法



单纯形法：

C(j)		-3	-5	0	0	0	***b***	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5		
X3	0	1	2	1	0	0	6	3
X4	0	1	**[4]**	0	1	0	10	2.5
X5	0	1	1	0	0	1	4	4
C(j)-Z(j)		-3	-5	0	0	0	0	
X3	0	**[0.5]**	0	1	-0.5	0	1	2
X2	-5	0.25	1	0	0.25	0	2.5	10
X5	0	0.75	0	0	-0.25	1	1.5	2
C(j)-Z(j)		-1.75	0	0	1.25	0	-12.5	
X1	-3	1	0	2	-1	0	2	M
X2	-5	0	1	-0.5	0.5	0	2	4
X5	0	0	0	-1.5	**[0.5]**	1	0	0
C(j)-Z(j)		0	0	3.5	-0.5	0	-16	
X1	-3	1	0	-1	0	2	2	
X2	-5	0	1	1	0	-1	2	
X4	0	0	0	-3	1	2	0	
C(j)-Z(j)		0	0	2	0	1	-16	

对应的顶点：

基可行解	可行域的顶点
$X^{(1)}$=（0，0，6，10，4）\`	（0，0）
$X^{(2)}$=（0，2.5，1，0，1.5，）\`	（0，2.5）
$X^{(3)}$=（2，2，0，0，0）	(2，2)
$X^{(4)}$=（2，2，0，0，0）	（2，2）

最优解：X=（2，2，0，0，0）；最优值 Z=－16
该题是退化基本可行解，5 个基本可行解对应 4 个极点。

1.11 用单纯形法求解下列线性规划

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

(1) $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 3 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

【解】单纯形表：

C(j)		3	4	1	0	0	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5		
X4	0	2	[3]	1	1	0	1	1/3
X5	0	1	2	2	0	1	3	3/2
C(j)-Z(j)		3	4	1	0	0	0	
X2	4	[2/3]	1	1/3	1/3	0	1/3	1/2
X5	0	-1/3	0	4/3	-2/3	1	7/3	M
C(j)-Z(j)		1/3	0	-1/3	-4/3	0	-4/3	
X1	3	1	3/2	1/2	1/2	0	1/2	
X5	0	0	1/2	3/2	-1/2	1	5/2	
C(j)-Z(j)		0	-1/2	-1/2	-3/2	0	-3/2	

最优解：X=（1/2，0，0，0，5/2）；最优值 Z=3/2

$$\max Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$$

(2) $$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 \le 30 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 10 \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 + 4x_4 \le 20 \\ x_j \ge 0, j = 1,\text{L}\ \ ,4 \end{cases}$$

【解】单纯形表：

C(j)		2	1	-3	5	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7		
X5	0	1	5	3	-7	1	0	0	30	M
X6	0	3	-1	[1]	1	0	1	0	10	10
X7	0	2	-6	-1	[4]	0	0	1	20	5

C(j)-Z(j)		2	1	-3	5	0	0	0		
X5	0	9/2	-11/2	5/4	0	1	0	7/4	65	M
X6	0	5/2	**[1/2]**	5/4	0	0	1	-1/4	5	10
X4	5	1/2	-3/2	-1/4	1	0	0	1/4	5	M
C(j)-Z(j)		-1/2	17/2	-7/4	0	0	0	-5/4		
X5	0	32	0	15	0	1	11	**-1**	120	M
X2	1	5	1	5/2	0	0	2	**-1/2**	10	10
X4	5	8	0	7/2	1	0	3	**-1/2**	20	M
C(j)-Z(j)		-43	0	-23	0	0	-17	**3**		

因为 $\lambda_7=3>0$ 并且 $a_{i7}<0(i=1,2,3)$，故原问题具有无界解，即无最优解。

(3)
$$\max Z = 3x_1 + 2x_2 - \tfrac{1}{8}x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 4 \\ 4x_1 - 2x_3 \le 12 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 \le 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

【解】

C(j)		3	2	-0.125	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	X6		
X4	0	-1	2	3	1	0	0	4	M
X5	0	**[4]**	0	-2	0	1	0	12	3
X6	0	3	8	4	0	0	1	10	3.3333
C(j)-Z(j)		3	2	-0.125	0	0	0	0	
X4	0	0	2	2.5	1	0.25	0	7	3.5
X1	3	1	0	-0.5	0	0.25	0	3	M
X6	0	0	**[8]**	5.5	0	-0.75	1	1	0.125
C(j)-Z(j)		0	2	1.375	0	-0.75	0	9	
X4	0	0	0	1.125	1	0.4375	-0.25	6.75	6
X1	3	1	0	-0.5	0	0.25	0	3	M
X2	2	0	1	**[0.6875]**	0	-0.0938	0.125	0.125	0.181818
C(j)-Z(j)		0	0	**0**	0	-0.5625	-0.25	9.25	

X3 进基、X2 出基，得到另一个基本最优解。

	C(j)	3	2	-0.125	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Basis		X1	X2	X3	X4	X5	X6		
X4	0	0	-1.6	0	1	0.5909	-0.4545	6.5455	6
X1	3	1	0.73	0	0	0.1818	0.0909	3.0909	M
X3	-0.125	0	1.45	1	0	-0.1364	0.1818	0.1818	0.1818
C(j)-Z(j)		0	0	0	0	-0.5625	-0.25	9.25	

原问题具有多重解。

基本最优解 $X^{(1)}=(3,\frac{1}{8},0,\frac{27}{4},0)$ 及 $X^{(2)}=(\frac{34}{11},0,\frac{2}{11},\frac{72}{11},0)^T;Z=\frac{37}{4}$,最优解的通解可表

示为 $X=aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}$ 即

$$X=(\frac{34}{11}-\frac{1}{11}a,\frac{1}{8}a,\frac{2}{11}-\frac{2}{11}a,\frac{72}{11}-\frac{72}{11}a,0)^T,(0\le a\le 1)$$

$$\min Z=-2x_1-x_2-4x_3+x_4$$

(4) $$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-3x_4\le 8 \\ -x_2+x_3+2x_4\le 10 \\ 2x_1+7x_2-5x_3-10x_4\le 20 \\ x_j\ge 0, j=1,\cdots,4 \end{cases}$$

【解】单纯形表：

C(j)		-2	-1	-4	1	0	0	0	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7		
X5	0	1	2	**[1]**	-3	1	0	0	8	8
X6	0	0	-1	1	2	0	1	0	10	10
X7	0	2	7	-5	-10	0	0	1	20	M
C(j)-Z(j)		-2	-1	-4	1	0	0	0		
X3	-4	1	2	1	-3	1	0	0	8	M
X6	0	-1	-3	0	**[5]**	-1	1	0	2	0.4
X7	0	7	17	0	-25	5	0	1	60	M
C(j)-Z(j)		2	7	0	-11	4	0	0		
X3	-4	**[2/5]**	1/5	1	0	2/5	3/5	0	46/5	23
X4	1	-1/5	-3/5	0	1	-1/5	1/5	0	2/5	M
X7	0	2	2	0	0	0	5	1	70	35
C(j)-Z(j)		-1/5	2/5	0	0	9/5	11/5	0		
X1	-2	1	1/2	5/2	0	1	3/2	0	23	
X4	1	0	-1/2	1/2	1	0	1/2	0	5	
X7	0	0	1	-5	0	-2	2	1	24	
C(j)-Z(j)		0	1/2	1/2	0	2	5/2	0		

最优解：X=（23，0，0，5，0，0，24）；最优值 Z=－41

$$\max Z=3x_1+2x_2+x_3$$

（5） $$\begin{cases} 5x_1+4x_2+6x_3\le 25 \\ 8x_1+6x_2+3x_3\le 24 \\ x_j\ge 0, j=1,2,3 \end{cases}$$

【解】单纯形表：

C(j)		3	2	1	0	0	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5		
X4	0	5	4	6	1	0	25	5
X5	0	**[8]**	6	3	0	1	24	3
C(j)-Z(j)		3	2	1	0	0	0	

X4	0	0	0.25	4.125	1	-0.625	10	
X1	3	1	0.75	0.375	0	0.125	3	
C(j)-Z(j)		0	-0.25	-0.125	0	-0.375	9	

最优解：X=（3，0，0，9，0）；最优值 Z=9

$$\max Z = 5x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$(6)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 50 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 80 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

【解】单纯形表：

C(j)		5	6	8	0	0	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5		
X4	0	1	3	**[2]**	1	0	50	25
X5	0	1	4	3	0	1	80	26.6667
C(j)-Z(j)		5	6	8	0	0	0	
X3	8	**[1/2]**	3/2	1	1/2	0	25	50
X5	0	-1/2	-1/2	0	-3/2	1	5	M
C(j)-Z(j)		1	-6	0	-4	0	-200	
X1	5	1	3	2	1	0	50	
X5	0	0	1	1	-1	1	30	
C(j)-Z(j)		0	-9	-2	-5	0	-250	

最优解：X=（50，0，0，0，0，30）；最优值 Z=250

1.12 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划：

$$\max Z = 10x_1 - 5x_2 + x_3$$

$$(1)\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ -5x_1 + x_2 - 10x_3 \le 15 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

【解】大 M 法。数学模型为

$$\max Z = 10x_1 - 5x_2 + x_3 - Mx_5$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ -5x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 = 15 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

C(j)		10	-5	1	0	-M	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5		
X5	-M	5	3	1	0	1	10	2
X4	0	-5	1	-10	1	0	15	M
C(j)-Z(j)		10	-5	1	0	0	0	
* Big M		5	3	1	0	0	0	
X1	10	1	3/5	1/5	0	1/5	2	
X4	0	0	4	-9	1	1	25	

C(j)-Z(j)	0	-11	-1	0	-2	20	
* Big M	0	0	0	0	-1	0	

最优解 X＝(2,0,0)；Z=20

两阶段法。

第一阶段：数学模型为

$$\min w = x_5$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 10 \\ -5x_1 + x_2 - 10x_3 + x_4 = 15 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

C(j)		0	0	0	0	1	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5		
X5	1	[5]	3	1	0	1	10	2
X4	0	-5	1	-10	1	0	15	M
C(j)-Z(j)		-5	-3	-1	0	0		
X1	0	1	3/5	1/5	0	1/5	2	
X4	0	0	4	-9	1	1	25	
C(j)-Z(j)		0	0	0	0	1		

第二阶段

C(j)		10	-5	1	0	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4		
X1	10	1	3/5	1/5	0	2	2
X4	0	0	4	-9	1	25	M
C(j)-Z(j)		0	-11	-1	0		

最优解 X=(2,0,0)；Z=20

(2)

$$\min Z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

【解】大 M 法。数学模型为

$$\min Z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3 + MA_1 + MA_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - S_1 + A_1 = 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + S_2 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 + A_3 = 5 \\ \text{所有变量非负} \end{cases}$$

C(j)		5	-6	-7	0	0	M	M	R.H.S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	S1	S2	A1	A3		
A1	M	1	[5]	-3	-1	0	1	0	15	3
S2	0	5	-6	10	0	1	0	0	20	M

A3	M	1	1	1	0	0	0	1	5	5
C(j)-Z(j)		5	-6	-7	0	0	0	0		
* Big M		-2	-6	2	1	0	0	0		
X2	-6	1/5	1	-3/5	-1/5	0	1/5	0	3	M
S2	0	31/5	0	32/5	-6/5	1	6/5	0	38	95/16
A3	M	4/5	0	**[8/5]**	1/5	0	-1/5	1	2	5/4
C(j)-Z(j)		31/5	0	-53/5	-6/5	0	6/5	0		
* Big M		-4/5	0	-8/5	-1/5	0	6/5	0		
X2	-6	1/2	1	0	-1/8	0	1/8	3/8	15/4	
S2	0	3	0	0	-2	1	2	-4	30	
X3	-7	1/2	0	1	1/8	0	-1/8	5/8	5/4	
C(j)-Z(j)		23/2	0	0	1/8	0	-1/8	53/8		
* Big M		0	0	0	0	0	1	1		

两阶段法。

第一阶段：数学模型为

$$\min w = A_1 + A_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - S_1 + A_1 = 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + S_2 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 + A_3 = 5 \\ \text{所有变量非负} \end{cases}$$

C(j)		0	0	0	0	0	1	1	R.H.S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	S1	S2	A1	A3		
A1	1	1	**5**	-3	-1	0	1	0	15	3
S2	0	5	-6	10	0	1	0	0	20	M
A3	1	1	1	1	0	0	0	1	5	5
C(j)-Z(j)		-2	-6	2	1	0	0	0		
X2	0	1/5	1	-3/5	-1/5	0	1/5	0	3	M
S2	0	31/5	0	32/5	-6/5	1	6/5	0	38	95/16
A3	1	4/5	0	**[8/5]**	1/5	0	-1/5	1	2	5/4
C(j)-Z(j)		-0.8	0	-1.6	-0.2	0	1.2	0		
X2	0	1/2	1	0	-1/8	0	1/8	3/8	15/4	
S2	0	3	0	0	-2	1	2	-4	30	
X3	0	1/2	0	1	1/8	0	-1/8	5/8	5/4	
C(j)-Z(j)		0	0	0	0	0	1	1		

第二阶段：

C(j)		5	-6	-7	0	0	R.H.S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	S1	S2		
X2	-6	1/2	1	0	-1/8	0	15/4	3
S2	0	3	0	0	-2	1	30	M
X3	-7	1/2	0	1	1/8	0	5/4	5
C(j)-Z(j)		23/2	0	0	1/8	0		

最优解：X=(0，3.75，1.25)；Z=－31.25 即 $X=(0,\frac{15}{4},\frac{5}{4})^T, Z=-\frac{125}{4}$

$$\max Z=10x_1+15x_2$$

$$(3)\begin{cases}5x_1+3x_2\le 9\\ -5x_1+6x_2\le 15\\ 2x_1+x_2\ge 5\\ x_1、x_2、x_3\ge 0\end{cases}$$

【解】大 M 法。数学模型为

$$\max Z=10x_1+15x_2-Mx_7$$

$$\begin{cases}5x_1+3x_2+x_4=9\\ -5x_1+6x_2+x_5=15\\ 2x_1+x_2-x_6+x_7=5\\ x_j\ge 0, j=1,2,\ldots,7\end{cases}$$

C(j)		10	15	0	0	0	-M	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X4	X5	X6	X7		
X4	0	[5]	3	1	0	0	0	9	1.8
X5	0	-5	6	0	1	0	0	15	M
X7	-M	2	1	0	0	-1	1	5	2.5
C(j)-Z(j)		10	15	0	0	0	0	0	
* Big M		2	1	0	0	-1	0	0	
X1	10	1	3/5	1/5	0	0	0	9/5	
X5	0	0	9	1	1	0	0	24	
X7	-M	0	-1/5	-2/5	0	-1	1	7/5	
C(j)-Z(j)		0	9	-2	0	0	0	18	
* Big M		0	-1/5	-2/5	0	-1	0	0	

因为 X7>0,原问题无可行解。

两阶段法

第一阶段：数学模型为

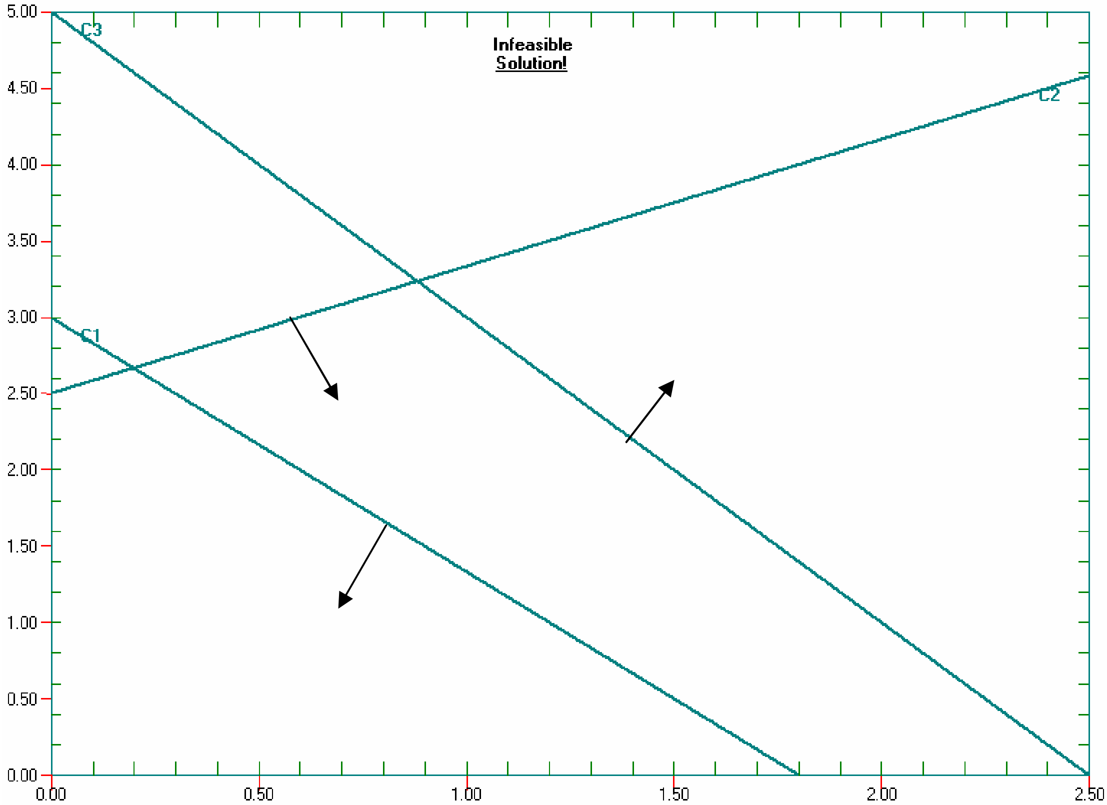
$$\min Z=x_7$$

$$\begin{cases}5x_1+3x_2+x_4=9\\ -5x_1+6x_2+x_5=15\\ 2x_1+x_2-x_6+x_7=5\\ x_j\ge 0, j=1,2,\ldots,7\end{cases}$$

C(j)		0	0	0	0	0	1	R. H. S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X4	X5	X6	X7		
X4	0	[5]	3	1	0	0	0	9	1.8
X5	0	-5	6	0	1	0	0	15	M
X7	1	2	1	0	0	-1	1	5	2.5
C(j)-Z(j)		-2	-1	0	0	1	0	5	14
X1	0	1	3/5	1/5	0	0	0	9/5	

X5	0	0	9	1	1	0	0	24	
X7	1	0	-1/5	-2/5	0	-1	1	**7/5**	
C(j)-Z(j)		0	1/5	2/5	0	1	0		

因为 X7>0,原问题无可行解。图解法如下：



$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4$$

(4) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 9 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 5 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \leq -1 \\ x_1 + x_3 \geq 3 \\ x_j \geq 0, j = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

【解】大 M 法。数学模型为

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - Mx_9 - Mx_{10} - Mx_{11}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_9 = 9 \\ \quad 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_7 + x_{10} = 1 \\ x_1 + \quad x_3 - x_8 + x_{11} = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \cdots, 11 \end{cases}$$

C(j)		2	3	-1	1					-M	-M	-M	R.H.S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11		
X9	-M	1	-1	2	1	-1				1			9	4.5
X6			2	1	-1		1						5	5

X10	-M	2	-1	**[3]**	-1			-1			1		1	0.3333
X11	-M	1		1					-1			1	3	3
C(j)-Z(j)		2	3	-1	1									
* Big M		4	-2	**6**		-1		-1	-1					
X9	-M	-1/3	-1/3		**[1.67]**	-1		2/3		1	-2/3		8.33	5
X6		-2/3	2.33		-2/3		1	1/3			-1/3		4.67	M
X3	-1	2/3	-1/3	1	-1/3			-1/3			1/3		1/3	M
X11	-M	1/3	1/3		1/3			1/3	-1		-1/3	1	2.67	8
C(j)-Z(j)		2.67	2.67		2/3			-1/3			1/3		-1/3	
* Big M					**2**	-1		1	-1		-2			
X4	1	-1/5	-1/5		1	-3/5		0.4		3/5	-0.4		5	M
X6		-0.8	2.2			-0.4	1	3/5		0.4	-3/5		8	3.6364
X3	-1	3/5	-0.4	1		-1/5		-1/5		1/5	1/5		2	M
X11	-M	0.4	0.4			1/5		1/5	-1	-1/5	-1/5	1	1	2.5
C(j)-Z(j)		2.8	**[2.8]**			0.4		-3/5		-0.4	3/5		3	
* Big M		0.4	**0.4**			1/5		1/5	-1	-1.2	-1.2			
X4	1				1	-0.5		0.5	-0.5	0.5	-0.5	0.5	5.5	M
X6		-3				-1.5	1	-0.5	**[5.5]**	1.5	0.5	-5.5	2.5	0.4545
X3	-1	1		1					-1			1	3	M
X2	3	1	1			0.5		0.5	-2.5	-0.5	-0.5	2.5	2.5	M
C(j)-Z(j)						-1		-2	**7**	1	2	-7	10	
* Big M										-1	-1	-1		
X4	1	-0.27			1.00	-0.64	0.09	0.45		0.64	-0.45		5.73	M
X8		-0.55				-0.27	0.18	-0.09	1.00	0.27	0.09	-1.00	0.45	M
X3	-1	**[0.45]**		1.00		-0.27	0.18	-0.09		0.27	0.09		3.45	7.6
X2	3	-0.36	1.00			-0.18	0.45	0.27		0.18	-0.27		3.64	M
C(j)-Z(j)		**3.82**				0.91	-1.27	-1.36		-0.91	1.36		13.18	
* Big M										-1	-1	-1		
X4	1			3/5	1	**-0.8**	1/5	0.4		0.8	-0.4		7.8	M
X8				1.2		**-3/5**	0.4	-1/5	1	3/5	1/5	-1	4.6	M
X1	2	1		2.2		**-3/5**	0.4	-1/5		3/5	1/5		7.6	M
X2	3		1	0.8		**-0.4**	3/5	1/5		0.4	-1/5		6.4	M
C(j)-Z(j)				-8.4		**3.2**	-2.8	-3/5		-3.2	3/5		42.2	
* Big M										-1	-1	-1		

无界解。

两阶段法。第一阶段：

C(j)										1	1	1	R.H.S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11		
X9	1	1	-1	2	1	-1				1			9	9/2
X6			2	1	-1		1						5	5
X10	1	2	-1	**[3]**	-1			-1			1		1	1/3
X11	1	1		1					-1			1	3	3

C(j)-Z(j)		-4	2	**-6**		1		1	1				13	
X9	1	-1/3	-1/3		**[5/3]**	-1		2/3		1	-2/3		25/3	5
X6		-2/3	7/3		-2/3		1	1/3			-1/3		14/3	M
X3		2/3	-1/3	1	-1/3			-1/3			1/3		1/3	M
X11	1	1/3	1/3		1/3			1/3	-1		-1/3	1	8/3	8
C(j)-Z(j)					**-2**	1		-1	1		2		11	
X4		-1/5	-1/5		1	-3/5		2/5		3/5	-2/5		5	M
X6		-4/5	11/5			-2/5	1	3/5		2/5	-3/5		8	40/11
X3		3/5	-2/5	1		-1/5		-1/5		1/5	1/5		2	M
X11	1	2/5	**[2/5]**			1/5		1/5	-1	-1/5	-1/5	1	1	5/2
C(j)-Z(j)		-2/5	**-2/5**			-1/5		-1/5	1	6/5	6/5		1	
X4					1	-1/2		1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2	11/2	M
X6		-3				-3/2	1	-1/2	**11/2**	3/2	1/2	-11/2	5/2	5/11
X3		1		1					-1			1	3	M
X2		1	1			1/2		1/2	-5/2	-1/2	-1/2	5/2	5/2	M
C(j)-Z(j)										1	1	1		

第二阶段：

C(j)		2	3	-1	1					R.H.S.	Ratio
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8		
X4	1				1	-1/2		1/2	-1/2	11/2	M
X6		-3				-3/2	1	-1/2	**[11/2]**	5/2	5/11
X3	-1	1		1					-1	3	M
X2	3	1	1			1/2		1/2	-5/2	5/2	M
C(j)-Z(j)						-1		-2	**7**	10	
X4	1	-3/11			1	-7/11	1/11	5/11		63/11	M
X8		-6/11				-3/11	2/11	-1/11	1	5/11	M
X3	-1	**5/11**		1		-3/11	2/11	-1/11		38/11	38/5
X2	3	-4/11	1			-2/11	5/11	3/11		40/11	M
C(j)-Z(j)		**42/11**				1	-14/11	-15/11		13.18	
X4	1			3/5	1	**-4/5**	1/5	2/5		39/5	M
X8				6/5		**-3/5**	2/5	-1/5	1	23/5	M
X1	2	1		11/5		**-3/5**	2/5	-1/5		38/5	M
X2	3		1	4/5		**-2/5**	3/5	1/5		32/5	M
C(j)-Z(j)				-42/5		**16/5**	-14/5	-3/5		42.2	

原问题无界解。

1.13 在第 1.9 题中，对于基 $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$，求所有变量的检验数 $\lambda_j\,(j=1,\Lambda,4)$，并判断 B 是不是最优基.

【解】 $\left|B\right|=-4, B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$,

$$\lambda=C-C_B B^{-1}A$$

$$=(5,2,0,0)-(5,0)\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=(5,2,0,0)-(5,-\frac{5}{2},0,\frac{5}{4})=(0,\frac{9}{2},0,-\frac{5}{4})$$

$\lambda=(0,\frac{9}{2},0,-\frac{5}{4})$, B 不是最优基，可以证明 B 是可行基。

1.14 已知线性规划

$$\max z=5x_1+8x_2+7x_3+4x_4$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+3x_3+2x_4\le 20\\ 3x_1+5x_2+4x_3+2x_4\le 30\\ x_j\ge 0, j=1,\cdots,4\end{cases}$$

的最优基为 $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，试用矩阵公式求（1）最优解；(2) 单纯形乘子；(3) $\overline{N}_1$ 及 $\overline{N}_3$； (4) λ_1 和 λ_3。

【解】

$B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}, C_B=(c_4,c_2)=(4,8,)$, 则

(1) $X_B=(x_4,x_2)^T=B^{-1}b=(\frac{5}{2},5)^T$, 最优解 $X=(0,5,0,\frac{5}{2})^T, Z=50$

(2) $\pi=C_B B^{-1}=(1,1)$

(3)

$$\overline{N}_1=B^{-1}P_1=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\overline{N}_3=B^{-1}P_2=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(4)

$$\lambda_1 = c_1 - C_B\overline{N}_1 = 5-(4,8)\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} = 5-5=0$$

$$\lambda_3 = c_3 - C_B\overline{N}_3 = 7-(4,8)\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} = 7-7=0$$

注：该题有多重解：

$X^{(1)}$=(0，5，0，5/2)

$X^{(2)}$=(0，10/3，10/3，0)

$X^{(3)}$=(10，0，0，0)，x_2是基变量，$X^{(3)}$是退化基本可行解

Z＝50

1.15 已知某线性规划的单纯形表 1—25, 求价值系数向量 C 及目标函数值 Z.

表 1—25

C_j		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3	x_4	0	1	2	1	−3	0	2	4
4	x_1	1	0	−1	0	2	0	−1	0
0	x_6	0	−1	4	0	−4	1	2	3/2
λ_j		0	−1	−1	0	1	0	−2	

【解】由 $\lambda_j = c_j - \sum_i c_i\bar{a}_{ij}$ 有 $c_j = \lambda_j + \sum_i c_i\bar{a}_{ij}$

c_2＝－1＋（3×1＋4×0＋0×（－1））＝2

c_3＝－1＋（3×2＋4×（－1）＋0×4）＝1

c_5＝1＋（3×（－3）＋4×2＋0×（－4））＝0

则 λ＝(4,2,1,3,0,0,0,)，Z=C_BX_B=12

1.16 已知线性规划

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

的最优单纯形表如表 1—26 所示，求原线性规划矩阵 C、A、及 b，最优基 B 及 B^{-1} .

表1—26

C_j		c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	b
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
c_1	x_1	1	0	4	1/6	1/15	6
c_2	x_2	0	1	−3	0	1/5	2
λ_j		0	0	−1	−2	−3	

【解】 $B=\begin{bmatrix}6&-2\\0&5\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{15}\\0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$，$c_4=c_5=0$，

仿照第 15 题方法可求出 $c_1=12$，$c_2=11$，$c_3=14$

由 $\overline{A}=B^{-1}A$

得 $A=B\overline{A}=\begin{bmatrix}6&-2\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-2&30\\0&5&-15\end{bmatrix}$

由 $\overline{b}=B^{-1}b$

得 $b=B\overline{b}=\begin{bmatrix}6&-2\\0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32\\10\end{bmatrix}$

则有 $C=(12,11,14),A=\begin{bmatrix}6&-2&30\\0&5&-15\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}32\\10\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}6&-2\\0&5\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{15}\\0&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$

1.17 已知线性规划的单纯形表 1－27.

表1－27

C_j		－3	a	－1	－1	***b***
C_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	
－1	x_3	2	2	1	0	b_1
－1	x_4	3	1	0	1	b_2
λ_j		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	

当 $b_1=$（　　）,$b_2=$（　　）,$a=$（　　）时，$X=(0,0,b_1,b_2)$ 为唯一最优解.

当 $b_1=$（　　）,$b_2=$（　　）,$a=$（　　）时，有多重解，此时 $\lambda=$（　　　）

【解】(1)$b_1\geqslant0$, $b_2\geqslant0$, $a<-3$　　(2)$b_1\geqslant0$, $b_2\geqslant0$, $a=-3$, $(-2,0,0,0)$

习题二

1．某人根据医嘱，每天需补充 A、B、C 三种营养，A 不少于 80 单位，B 不少于 150 单位，C 不少于 180 单位．此人准备每天从六种食物中摄取这三种营养成分．已知六种食物每百克的营养成分含量及食物价格如表 2-22 所示．（1）试建立此人在满足健康需要的基础上花费最少的数学模型；（2）假定有一个厂商计划生产一中药丸，售给此人服用，药丸中包含有 A，B，C 三种营养成分．试为厂商制定一个药丸的合理价格，既使此人愿意购买，又使厂商能获得最大利益，建立数学模型．

表2-22

含量 食物 营养成分	一	二	三	四	五	六	需要量
A	13	25	14	40	8	11	⩾80
B	24	9	30	25	12	15	⩾150
C	18	7	21	34	10	0	⩾180
食物单价（元/100g）	0.5	0.4	0.8	0.9	0.3	0.2	

【解】（1）设 x_j 为每天第 j 种食物的用量，数学模型为

$$\min Z = 0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.8x_3 + 0.9x_4 + 0.3x_5 + 0.2x_6$$

$$\begin{cases} 13x_1 + 25x_2 + 14x_3 + 40x_4 + 8x_5 + 11x_6 \geq 80 \\ 24x_1 + 9x_2 + 30x_3 + 25x_4 + 12x_5 + 15x_6 \geq 150 \\ 18x_1 + 7x_2 + 21x_3 + 34x_4 + 10x_5 \geq 180 \\ x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 \geq 0 \end{cases}$$

（2）设 y_i 为第 i 种单位营养的价格，则数学模型为

$$\max w = 80y_1 + 150y_2 + 180y_3$$

$$\begin{cases} 13y_1 + 24y_2 + 18y_3 \leq 0.5 \\ 25y_1 + 9y_2 + 7y_3 \leq 0.4 \\ 14y_1 + 30y_2 + 21y_3 \leq 0.8 \\ 40y_1 + 25y_2 + 34y_3 \leq 0.9 \\ 8y_1 + 12y_2 + 10y_3 \leq 0.3 \\ 11y_1 + 15y_2 + \qquad \leq 0.5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

2．写出下列线性规划的对偶问题

（1）
$$\max = -2x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq -1 \\ x_1 + 5x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【解】
$$\min w = -y_1 + 4y_2$$
$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \geq -2 \\ 3y_1 + 5y_2 \geq 4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

（2）$\min Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 8 \\ x_1, x_2\text{无约束，} x_3 \ge 0 \end{cases}$$

【解】 $\max w = 10y_1 + 8y_2$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 2 \\ 2y_1 - 3y_2 = -1 \\ y_2 \le 3 \\ y_1\text{无约束；} y_2 \ge 0 \end{cases}$$

（3）$\max Z = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4$

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 8 \\ 7x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 5x_4 \ge 10 \\ 4x_1 - 8x_2 + 6x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3 \le 0, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

【解】 $\min w = 8y_1 + 10y_2 + 6y_3$

$$\begin{cases} 10y_1 + 7y_2 + 4y_3 \ge 1 \\ y_1 + 6y_2 - 8y_3 \ge 2 \\ -y_1 - 2y_2 + 6y_3 \le 4 \\ -4y_1 - 5y_2 + y_3 = -3 \\ y_1\text{无约束；} y_2 \le 0, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

（4）$\max Z = -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 7x_4$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 = 9 \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 \ge 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \le -2 \\ 5 \le x_1 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2, x_3, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

【解】 $\max Z = -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 7x_4$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 = 9 \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 \ge 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \le -2 \\ x_1 \ge 5 \\ x_1 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2, x_3, x_4\text{无约束} \end{cases}$$

对偶问题为：

$$\min w = 9y_1 - 6y_2 - 2y_3 + 5y_4 + 10y_5$$

$$\begin{cases} 3y_1 - 6y_2 - y_3 + y_4 - y_5 \ge -2 \\ -2y_1 + 2y_2 = 3 \\ y_1 - 5y_2 - y_3 = 6 \\ -6y_1 + y_2 + 2y_3 = -7 \\ y_1\text{无约束；} y_2 \le 0\text{，} y_3, \ge 0\text{，} y_4 \le 0\text{，} x_5 \ge 0 \end{cases}$$

3．考虑线性规划

$\min Z = 12x_1 + 20x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_1 + 5x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(1)说明原问题与对偶问题都有最优解；

(2)通过解对偶问题由最优表中观察出原问题的最优解；

(3)利用公式 $C_B B^{-1}$ 求原问题的最优解；

(4)利用互补松弛条件求原问题的最优解．

【解】(1)原问题的对偶问题为

$$\max w = 4y_1 + 2y_2 + 7y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \le 12 \\ 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 \le 20 \\ y_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

容易看出原问题和对偶问题都有可行解，如 X＝(2，1)、Y＝(1，0，1)，由定理 2.4 知都有最优解。

(2)对偶问题最优单纯形表为

C(j)		4	2	7	0	0	R. H. S.
Basis	C(i)	y1	y2	y3	y4	y5	
y3	7	0	-1/5	1	4/5	-1/5	28/5
y1	4	1	7/5	0	-3/5	2/5	4/5
C(j)-Z(j)		0	-11/5	0	-16/5	-1/5	*w*=42.4

对偶问题的最优解 Y＝(4/5,0,28/5)，由定理 2.6，原问题的最优解为 X=(16/5，1/5)，Z＝42.4

（3）C_B=(7,4), $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$，$X = (7,4)\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = (16/5, 1/5)$

(4)由 y_1、y_3 不等于零知原问题第一、三个约束是紧的，解等式

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

得到原问题的最优解为 X=(16/5，1/5)。

4．证明下列线性规划问题无最优解

$$\min Z = x_1 - 2x_2 - 2x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

证明：首先看到该问题存在可行解，例如 x=(2,1,1)，而上述问题的对偶问题为

$$\max w = 3y_1 + 2y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 1 \\ y_1 - 2y_2 \le -2 \\ -2y_1 + 3y_2 = -2 \\ y_2 \ge 0, y_1\text{无约束} \end{cases}$$

由约束条件①②知 $y_1 \leqslant 0$，由约束条件③当 $y_2 \geqslant 0$ 知 $y_1 \geqslant 1$，对偶问题无可行解，因此原问题也无最优解(无界解)。

5．已知线性规划

$$\max Z = 15x_1 + 20x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 \le 5 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \le 6 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

的最优解 $X = (\frac{1}{4}, 0, \frac{19}{4})^T$，求对偶问题的最优解.

【解】其对偶问题是：

$$\min w = 5y_1 + 6y_2 + 7y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 3y_3 \ge 15 \\ 5y_1 + 6y_2 + 10y_3 \ge 20 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 5 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

由原问题的最优解知，原问题约束①等于零，x_1、x_2不等于零，则对偶问题的约束①、约束③为等式，y_1＝0；解方程

$$\begin{cases} 5y_2 + 3y_3 = 15 \\ y_2 + y_3 = 5 \end{cases}$$

得到对偶问题的最优解 Y=(5/2,5/2,0)；w＝55/2＝27.5

6．用对偶单纯形法求解下列线性规划

(1) $\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

【解】将模型化为

$$\min Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -8 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -10 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

对偶单纯形表：

	c_j	**3**	**4**	**5**	**0**	**0**	
C_B	X_B	X₁	X₂	X₃	X₄	X₅	b
0	X_4	－1	－2	－3	1	0	－8
0	X_5	**[－2]**	－2	－1	0	1	－10
	C(j)-Z(j)	3	4	5	0	0	0
0	X_4	0	**[－1]**	－5/2	1	－1/2	－3
3	X_1	1	1	1/2	0	－1/2	5
	C(j)-Z(j)	0	1	7/2	0	3/2	0

5	X_2	0	1	5/2	－1	1/2	3
3	X_1	1	0	－2	1	－1	2
C(j)-Z(j)		0	0	1	1	1	

b 列全为非负，最优解为 x＝(2，3，0)；Z＝18

（2） $\min Z = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【解】将模型化为

$\min Z = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

		3	**4**	**0**	**0**	***b***
X_B	C_B	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_3	0	[-1]	-1	1	0	-4
X_4	0	2	1	0	1	2
Cj－Zj		3	4	0	0	
X_1	3	1	1	-1	0	4
X_4	0	0	[-1]	2	1	-6
Cj－Zj		0	1	3	0	
X_1	3	1	0	1	1	-2
X_2	4	0	1	-2	-1	6
Cj－Zj		0	0	5	1	

出基行系数全部非负，最小比值失效，原问题无可行解。

(3) $\min Z = 2x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_1 + 3x_2 \ge 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【解】将模型化为

$\min Z = 2x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 24 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -10 \\ -x_1 - 3x_2 + x_5 = -15 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

c_j		**2**	**4**	**0**	**0**	**0**	b
X_B	***C_B***	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	

X_3	**0**	2	3	1	0	0	24
X_4	**0**	-1	-2	0	1	0	-10
X_5	**0**	-1	[-3]	0	0	1	-15
Cj－Zj		2	4	0	0	0	
X_3	**0**	1	0	1	0	1	9
X_4	**0**	-1/3	0	0	1	－2/3	0
X_2	**4**	1/3	1	0	0	－1/3	5
Cj－Zj		2/3	0	0	0	4/3	

最优解 X=(0，5)；Z＝20

（4） $\min Z=2x_1+3x_2+5x_3+6x_4$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4\ge 2 \\ -2x_1+x_2-x_3+3x_4\le -3 \\ x_j\ge 0, j=1,\cdots,4 \end{cases}$$

【解】将模型化为

$$\min Z=2x_1+3x_2+5x_3+6x_4$$

$$\begin{cases} -x_1-2x_2-3x_3-x_4+x_5=-2 \\ -2x_1+x_2-x_3+3x_4+x_6=-3 \\ x_j\ge 0, j=1,\cdots,6 \end{cases}$$

Cj		**2**	**3**	**5**	**6**	**0**	**0**	b
X_B	C_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_5	0	-1	[-2]	-3	-4	1	0	-2
X_6	0	-2	1	-1	3	0	1	-3
Cj－Zj		2	3	5	6	0	0	
X_2	3	1/2	1	3/2	2	-1/2	0	1
X_6	0	-5/2	0	[-5/2]	1	1/2	1	-4
Cj－Zj		1/2	0	1/2	0	3/2	0	
X_2	3	[-1]	1	0	13/5	-1/5	3/5	-7/5
X_3	5	1	0	1	-2/5	-1/5	-2/5	8/5
Cj－Zj		0	0	0	1/5	8/5	1/5	
X_1	2	1	-1	0	-13/5	1/5	-3/5	7/5
X_3	5	0	[1]	1	11/5	-2/5	1/5	1/5
Cj－Zj		0	0	0	1/5	8/5	1/5	
X_1	2	1	0	1	-2/5	-1/5	-2/5	8/5
X_2	3	0	1	1	11/5	-2/5	1/5	1/5
Cj－Zj		0	0	0	1/5	8/5	1/5	

原问题有多重解：$X^{(1)}$＝(7/5，0，1/5，)；最优解 $X^{(2)}$＝(8/5，1/5，0)；Z＝19/5

如果第一张表 X_6 出基，则有

Cj		**2**	**3**	**5**	**6**	**0**	**0**	b
X_B	C_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_5	0	-1	-2	-3	-4	1	0	-2

X_6	0	[-2]	1	-1	3	0	1	-3
Cj－Zj		2	3	5	6	0	0	
X_5	0	0	[-5/2]	-5/2	-11/2	1	-1/2	-1/2
X_1	2	1	-1/2	1/2	-3/2	0	-1/2	3/2
Cj－Zj		0	2	4	9	0	1	
X_2	3	0	1	1	11/5	-2/5	1/5	1/5
X_1	2	1	0	1	-7/5	-1/5	-2/5	8/5
Cj－Zj		0	0	2	23/5	4/5	3/5	

7．某工厂利用原材料甲、乙、丙生产产品 A、B、C，有关资料见表 2-23．

表2-23

产品 材料消耗 原材料	A	B	C	每月可供原材料（Kg）
甲	2	1	1	200
乙	1	2	3	500
丙	2	2	1	600
每件产品利润	4	1	3	

（1）怎样安排生产，使利润最大．

（2）若增加 1kg 原材料甲，总利润增加多少．

（3）设原材料乙的市场价格为 1.2 元/Kg，若要转卖原材料乙，工厂应至少叫价多少，为什么？

（4）单位产品利润分别在什么范围内变化时，原生产计划不变．

（5）原材料分别单独在什么范围内波动时，仍只生产 A 和 C 两种产品．

（6）由于市场的变化，产品 B、C 的单件利润变为 3 元和 2 元，这时应如何调整生产计划．

（7）工厂计划生产新产品 D，每件产品 D 消耗原材料甲、乙、丙分别为 2kg，2kg 及 1kg，每件产品 D 应获利多少时才有利于投产．

【解】（1）设 x_1、x_2、x_3 分别为产品 A、B、C 的月生产量，数学模型为

$$\max Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + x_3 \le 200 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 500 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 600 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

最优单纯形表：

C(j)		4	1	3	0	0	0	R.H.S.	Ratio
X_B	C_B	X1	X2	X3	X4	X5	X6		
X1	4	1	1/5	0	3/5	-1/5	0	20	
X3	3	0	3/5	1	-1/5	2/5	0	160	
X6	0	0	0	0	-1	0	1	400	
C(j)-Z(j)		0	-8/5	0	-9/5	-2/5	0	Z=560	

最优解 X=（20，0，160），Z=560。工厂应生产产品 A20 件，产品 C160 种，总利润为 560 元。

（2）则最优表可知，影子价格为 $y_1 = \dfrac{9}{5}, y_2 = \dfrac{2}{5}, y_3 = 0$，故增加利润 1.8 元。

（3）因为 y_2=0.4，所以叫价应不少于 1.6 元。

（4）依据最优表计算得

$$-3 \le \Delta c_1 \le 2,\quad \Delta c_2 \le \frac{8}{5},\quad -1 \le \Delta c_3 \le 9$$

$$c_1 \in [1,6],\quad c_2 \in (-\infty, \frac{13}{5}],\quad c_3 \in [2,12]$$

（5）依据最优表计算得

$$-\frac{100}{3} \le \Delta b_1 \le 400,\ -400 \le \Delta b_2 \le 100,\ -400 \le \Delta b_3$$

$$b_1 \in [\frac{500}{3}, 600],\ b_2 \in [100,600],\ b_3 \in [200,+\infty).$$

（6）变化后的检验数为 $\lambda_2=1,\lambda_4=-2,\lambda_5=0$。故 x_2 进基 x_1 出基,得到最最优解 X=(0,200,0)，即只生产产品 B 200 件,总利润为 600 元。

C(j)		4	3	2	0	0	0	R.H.S.	Ratio
X_B	**C_B**	X1	X2	X3	X4	X5	X6		
X1	4	1	[1/5]	0	3/5	-1/5	0	20	100
X3	2	0	3/5	1	-1/5	2/5	0	160	800/3
X6	0	0	0	0	-1	0	1	400	M
C(j)-Z(j)		0	1	0	-2	0	0	560	
X2	2	5	1	0	3	-1	0	100	M
X3	3	-3	0	1	-2	[1]	0	100	100
X6	0	0	0	0	-1	0	1	400	M
C(j)-Z(j)		-5	0	0	-5	1	0		
X2	2	2	1	1	1	0	0	200	
X4	0	-3	0	1	-2	1	0	100	
X6	0	0	0	0	-1	0	1	400	
C(j)-Z(j)		-2	0	-1	-3	0	0		

(7)设产品 D 的产量为 x_7，单件产品利润为 c_7，只有当 $\lambda_7 = c_7 - C_B B^{-1} P_7 > 0$ 时才有利于投产。

$$c_7 > C_B B^{-1} P_7 = YP_7 = \left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{22}{5}$$

则当单位产品 D 的利润超过 4.4 元时才有利于投产。

8．对下列线性规划作参数分析

$$\max Z=(3+2\mu)x_1+(5-\mu)x_2$$

（1） $\begin{cases} x_1 \le 4 \\ x_2 \le 6 \\ 3x_1+2x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

【解】μ＝0 时最优解 X=(4,3,0)；最优表：

C(j)		3	5	0	0	0	R. H. S.
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	
X1	3	1	0	1	0	0	4
X2	5	0	1	0	0.5	0	3
X5	0	0	0	-3	-1	1	0
C(j)-Z(j)		0	0	-3	-2.5	0	27

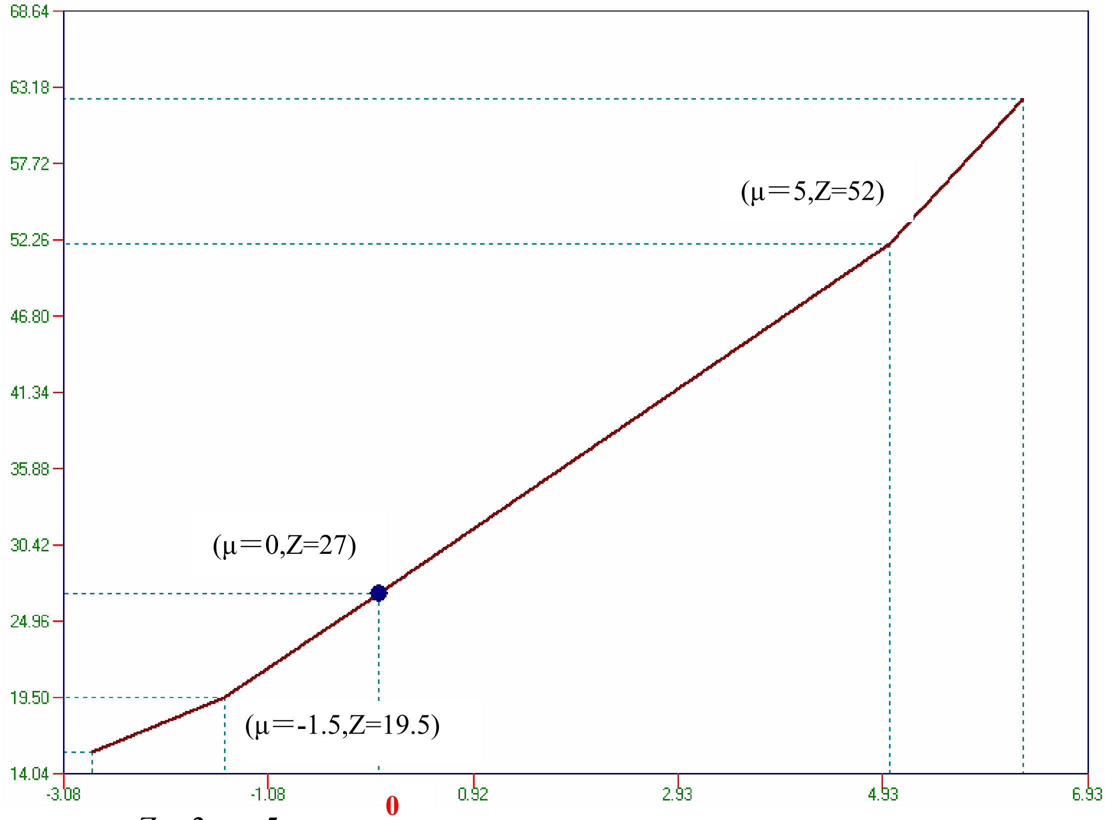
将参数引入到上表：

C(j)		3＋2μ	5－μ	0	0	0	R.H.S.
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	
X1	3＋2μ	1	0	1	0	0	4
X2	5－μ	0	1	0	0.5	0	3
X5	0	0	0	-3	-1	1	0
C(j)-Z(j)		0	0	－3－2μ	-2.5＋0.5μ	0	27

当－3－2μ≤0 及-2.5＋0.5μ≤0 时最优基不变，有－1.5≤μ≤5。当μ<－1.5 时 X3 进基 X1 出基；μ>5 时 X4 进基 X2 出基，用单纯形法计算。参数变化与目标值变化的关系如下表所示。

	From	To	From	To		Leaving	Entering
Range	(Vector)	(Vector)	OBJ Value	OBJ Value	Slope	Variable	Variable
1	0	5	27	52	5	X2	X4
2	5	M	52	M	8		
3	0	-1.5	27	19.5	5	X1	X3
4	-1.5	-M	19.5	M	-3		

目标值变化如下图所示。



$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

（2）$$\begin{cases} x_1 \le 4+\mu \\ x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 - 2\mu \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【解】μ＝0 时最优解 X=(4,3,0)，Z=27；最优表：

C(j)		3	5	0	0	0	R. H. S.
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	
X1	3	1	0	1	0	0	4
X2	5	0	1	0	0.5	0	3
X5	0	0	0	-3	-1	1	0
C(j)-Z(j)		0	0	-3	-2.5	0	27

$$b = b' + b'' = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\mu$$

$$\bar{b} = B^{-1}(b' + b''\mu) = B^{-1}b' + B^{-1}b''\mu$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\mu$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}\mu$$

替换最优表的右端常数，得到下表。

C(j)		3	5	0	0	0	R.H.S.
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	
X1	3	1	0	1	0	0	4＋μ
X2	5	0	1	0	0.5	0	3
X5	0	0	0	[-3]	-1	1	－5μ
C(j)-Z(j)		0	0	-3	-2.5	0	

① μ<－4 时问题不可行，－4≤μ<0 时最优基不变。μ＝－4 时 Z＝15。

② μ>0 时 X5 出基 X3 进基得到下表：

C(j)		3	5	0	0	0	R.H.S.
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	
X1	3	1	0	0	-1/3	1/3	4-2/3μ
X2	5	0	1	0	1/2	0	3
X3	0	0	0	1	1/3	-1/3	5μ/3
C(j)-Z(j)		0	0	0	-3/2	-1	

0≤μ≤6 时为最优解。μ＝6 时 Z＝15。

③ μ>6 时 X1 出基 X4 进基得到下表：

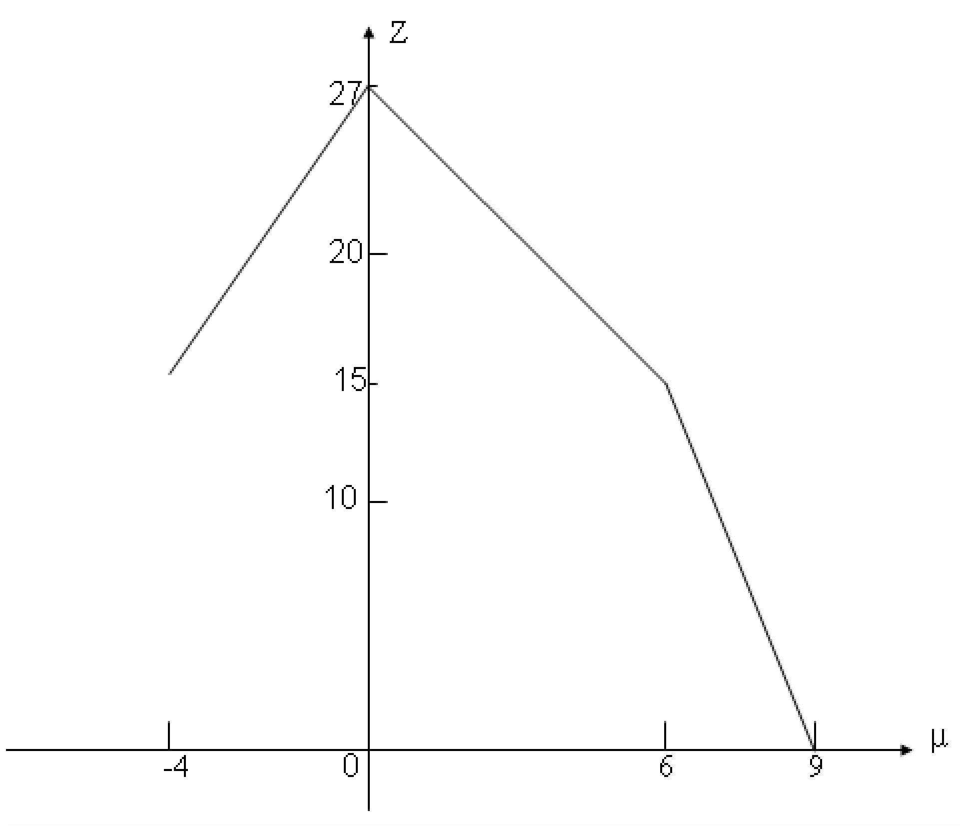
C(j)		3	5	0	0	0	R.H.S.
Basis	C(i)	X1	X2	X3	X4	X5	
X4	0	-3	0	0	1	-1	-12+2μ
X2	5	3/2	1	0	0	1/2	9-μ
X3	0	1	0	1	0	0	4+μ
C(j)-Z(j)							

μ＝9 时最优解 X=(0，0，13，6，0)，Z=0；μ>9 时无可行解。

综合分析如下表所示。

	From	To	From	To		Leaving	Entering
Range	(Vector)	(Vector)	OBJ Value	OBJ Value	Slope	Variable	Variable
1	0	0	27	27	3	X5	X3
2	0	6	27	15	-2	X1	X2
3	6	9	15	0	-5	X2	
4	9	Infinity	Infeasible				
5	0	-4	27	15	3	X1	
6	-4	-Infinity	Infeasible				

目标值变化如下图所示。



习题三

1．设 $x_j=\begin{cases}1,\text{投资}j\text{项目}\\0,\ \text{不投资}j\text{项目}\end{cases}$

$$\max Z=30x_1+40x_2+20x_3+15x_4+30x_5$$

$$\begin{cases}5x_1+4x_2+5x_3+7x_4+8x_5\le 30\\x_1+7x_2+9x_3+5x_4+6x_5\le 25\\8x_1+2x_2+6x_3+2x_4+9x_5\le 30\\x_j=0\text{或}1,\ j=1,\cdots,5\end{cases}$$

最优解 X＝(1,1,1,0,1)，Z=110 万元。

2．设 x_j 为投资第 j 个点的状态，x_j=1 或 0，j=1,2,…,12

$$\max Z=400x_1+500x_2+450x_3+\cdots+400x_{12}$$

$$\begin{cases}900x_1+1200x_2+1000x_3+\cdots+850x_{11}+1000x_{12}\le 9000\\\sum_{j=1}^{4}x_j\ge 2,\sum_{j=1}^{4}x_j\le 3,\sum_{j=5}^{7}x_j\ge 1,\sum_{j=5}^{7}x_j\le 2,\sum_{j=8}^{12}x_j\ge 3\qquad,\sum_{j=8}^{12}x_j\le 4\\x_j=1\text{或}0,\ j=1,\cdots,12\end{cases}$$

最优解：x1＝x5=x12=0，其余 xj=1,总收益 Z=3870 万元，实际完成投资额 8920 万元。

3．设 x_j 为装载第 j 件货物的状态，x_j=1 表示装载第 j 件货物，x_j=0 表示不装载第 j 件货物，有

$$\max Z=5x_1+8x_2+4x_3+6x_4+7x_5+3x_6$$

$$\begin{cases}6x_1+5x_2+3x_3+4x_4+7x_5+2x_6\le 20\\3x_1+7x_2+4x_3+5x_4+6x_5+2x_6\le 56\\x_4-x_5\le 0\\x_1+x_2\le 1\\x_j=0\text{或}1\end{cases}$$

4．设 x_{ij}（i=1，2，…，5；j=1，2，3，4）为第 i 人参赛 j 项目的状态，即

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{人参赛}j\text{项目}\\0 & \text{第}i\text{人不参赛}j\text{项目}\end{cases}$$

记第 i 人参赛 j 项目的成绩为 C_{ij}，目标函数

$$\max Z=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4}C_{ij}x_{ij}$$

每个运动员最多只能参加 3 个项目并且每个项目只能参赛一次,约束条件：

$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}\le 3 \qquad i=1,2,\Lambda,5$$

每个项目至少要有人参赛一次，并且总的参赛人次数等于 10，约束条件：

$$x_{1j}+x_{2j}+x_{3j}+x_{4j}+x_{5j}\ge 1 \qquad j=1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4}x_{ij}=10$$

x_{ij}=1 或 0，i=1，2，…，5；j=1，2，3，4

5. (1) $\begin{cases}x_1+2x_2\le 8+y_1M\\4x_1+x_2\ge 10-y_2M\\2x_1+6x_2\le 18+y_3M\\y_1+y_2+y_2\le 1\\y_j=0\text{或}1,\ j=1,2,3\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1\ge 5-yM\\x_1<5+(1-y)M\\x_2\ge 10-yM\\x_2\le 8+(1-y)M\\y=0\text{或}1\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x_1=2y_1+4y_2+6y_3+8y_4\\y_1+y_2+y_3+y_4=1\\y_j=0\text{或}1,\ j=1,2,3,4\end{cases}$

$$\min Z=10y_1+6x_1+15y_2+10x_2$$

6. $$\begin{cases}x_1\le y_1M;x_2\le y_2M & \\x_1\ge 8-y_3M & \text{条件（1）}\\x_2\ge 6-(1-y_3)M & \\x_1-x_2=0y_4-4y_5+4y_6-8y_7+8y_8 & \text{条件（2）}\\y_4+y_5+y_6+y_7+y_8=1 & \\x_1+2x_2\ge 20-y_9M & \text{条件（3）}\\2x_1+x_2\ge 20-y_{10}M & \\x_1+x_2\ge 20-y_{11}M & \\y_9+y_{10}+y_{11}\le 2 & \\x_1\ge 0,x_2\ge 0;y_j=0\text{或}1,\ j=1,2,\Lambda,11 & \text{条件（4）}\end{cases}$$

7．(1)X=(1,2),Z=3 (2) X=(5,0),Z=5

8．(1)X=(3,3),Z=15 (2)X=(5,2),Z=16

9．教材原题遗漏，请补上。

（1）$$\max Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7 \\ x_j = 0或1，j = 1,2,3 \end{cases}$$

（2）$$\min Z = 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \ge 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \ge 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 7 \\ x_j = 0或1，j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

答案：(1)X=(1,1,1),Z=8 (2)X=(1,1,1,0),Z=4

10．(1)X=(1,0,1,1),Z=8 (2)X=(1,1,0,0,0),Z=－2

习题四

4.1 工厂生产甲、乙两种产品，由 A、B 二组人员来生产。A 组人员熟练工人比较多，工作效率高，成本也高；B 组人员新手较多工作效率比较低，成本也较低。例如，A 组只生产甲产品时每小时生产 10 件，成本是 50 元有关资料如表 4.21 所示。

表 4.21

	产品甲		产品乙	
	效率(件/小时)	成本(元/件)	效率(件/小时)	成本(元/件)
A 组	10	50	8	45
B 组	8	45	5	40
产品售价(元/件)	80		75	

二组人员每天正常工作时间都是 8 小时，每周 5 天。一周内每组最多可以加班 10 小时，加班生产的产品每件增加成本 5 元。

工厂根据市场需求、利润及生产能力确定了下列目标顺序：

P_1：每周供应市场甲产品 400 件，乙产品 300 件

P_2：每周利润指标不低于 500 元

P_3：两组都尽可能少加班，如必须加班由 A 组优先加班

建立此生产计划的数学模型。

4.1【解】 **解法一**：设 x_1, x_2 分别为 A 组一周内正常时间生产产品甲、乙的产量，x_3, x_4 分别为 A 组一周内加班时间生产产品甲、乙的产量；x_5, x_6 分别为 B 组一周内正常时间生产产品甲、乙的产量，x_7, x_8 分别为 B 组一周内加班时间生产产品甲、乙的产量。

总利润为

$$\begin{aligned}&80(x_1+x_3+x_5+x_7)-(50x_1+55x_3+45x_5+50x_7)+\\&75(x_2+x_4+x_6+x_8)-(45x_2+50x_4+40x_6+45x_8)\\&=30x_1+30x_2+25x_3+25x_4+35x_5+35x_6+30x_7+30x_8\end{aligned}$$

生产时间为

A 组：$0.1x_1 + 0.125x_2 + 0.1x_3 + 0.125x_4$

B 组：$0.125x_5 + 0.2x_6 + 0.125x_7 + 0.2x_8$

数学模型为：

$$\min Z = p_1(d_1^- + d_2^-) + p_2 d_3^- + p_3(d_4^- + d_5^-) + p_4(d_6^+ + 2d_7^+)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + d_2^- - d_2^+ = 300 \\ 30x_1 + 30x_2 + 25x_3 + 25x_4 + 35x_5 + 35x_6 + 30x_7 + 30x_8 + d_3^- - d_3^+ = 500 \\ 0.1x_1 + 0.125x_2 + d_4^- - d_4^+ = 40 \\ 0.125x_5 + 0.2x_6 + d_5^- - d_5^+ = 40 \\ 0.1x_3 + 0.125x_4 + d_6^- - d_6^+ = 10 \\ 0.125x_7 + 0.2x_8 + d_7^- - d_7^+ = 10 \\ x_j \geq 0, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1, 2, \cdots, 7; j = 1, 2, \cdots, 8 \end{cases}$$

解法二：设 x_1, x_2 分别为 A 组一周内生产产品甲、乙的正常时间，x_3, x_4 分别为 A 组一周内生产产品甲、乙的加班时间；x_5, x_6 分别为 B 组一周内生产产品甲、乙的正常时间，x_7, x_8 分别为 B 组一周内生产产品甲、乙的加班时间。

数学模型请同学们建立。

4.2 设 x_{ij} 为 A_i 到 B_j 的运量，数学模型为

$$\min z = P_1 d_1^- + P_2(d_2^- + d_3^- + d_4^-) + P_3 d_5^- + P_4 d_6^+ + P_5(d_7^- + d_7^+) + P_6 d_8^+$$

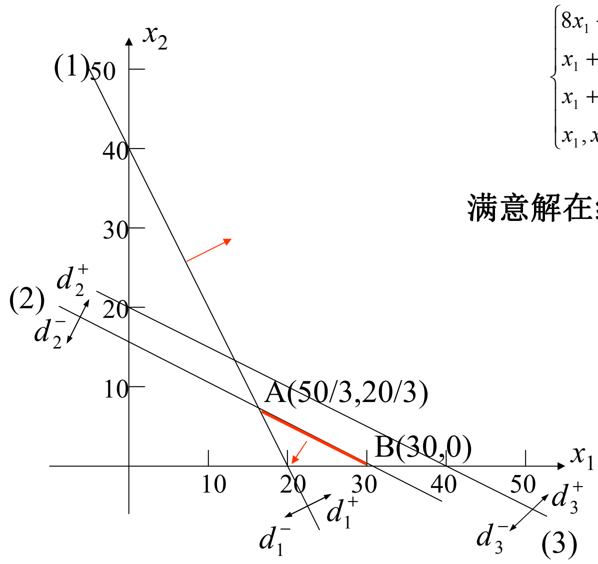
$$s.t.\begin{cases} x_{13} + x_{23} + x_{33} + d_1^- - d_1^+ = 480 & B_3\text{保证供应} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + d_2^- - d_2^+ = 274 & B_1\text{需求的85\%} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + d_3^- - d_3^+ = 204 & B_2\text{需求的85\%} \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + d_4^- - d_4^+ = 323 & B_3\text{需求的85\%} \\ x_{33} + d_5^- - d_5^+ = 200 & A_3\text{对}B_3 \\ x_{21} - d_6^+ = 0 & A_2\text{对}B_1 \\ 2x_{11} + 2x_{21} + 2x_{31} - x_{12} - x_{22} - x_{32} + d_7^- - d_7^+ = 0 & B_2\text{与}B_3\text{的平衡} \\ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} - d_8^+ = 0 & \text{运费最小} \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4); \\ d_i^-, d_i^+ \geq 0 (i = 1, 2, \ldots, 8); \end{cases}$$

4.3 双击下图，打开幻灯片。

习题4.3(1)

$$\min Z = p_1 d_1^- + p_2(2d_2^+ + d_3^-)$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 160 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 30 \\ x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 40 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$



满意解在线段 $\overline{AB}$ 上

4.4 已知某实际问题的线性规划模型为

$$\max z = 100x_1 + 50x_2$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 16x_2 \leq 200 & (\text{资源}1) \\ 11x_1 + 3x_2 \geq 25 & (\text{资源}2) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

假定重新确定这个问题的目标为:

P_1: z 的值应不低于 1900

P_2: 资源 1 必须全部利用

将此问题转换为目标规划问题，列出数学模型。

【解】数学模型为

$$\min Z = p_1 d_1^- + p_2(d_2^- + d_2^+)$$

$$\begin{cases} 100x_1 + 50x_2 + d_1^- - d_1^+ = 1900 \\ 10x_1 + 16x_2 + d_2^- - d_2^+ = 200 \\ 11x_1 + 3x_2 \geq 25 \\ x_j, d_j^-, d_j^+ \geq 0, j = 1,2 \end{cases}$$

4.5 已知目标规划问题

$$\min z = p_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(5d_3^- + 3d_4^-) + P_4 d_1^+$$

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 6 \\
x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 9 \\
x_1 - 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 4 \\
x_2 + d_4^- - d_4^+ = 2 \\
x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0 \qquad (i = 1, \Lambda, 4)
\end{cases}
$$

（1）分别用图解法和单纯形法求解；

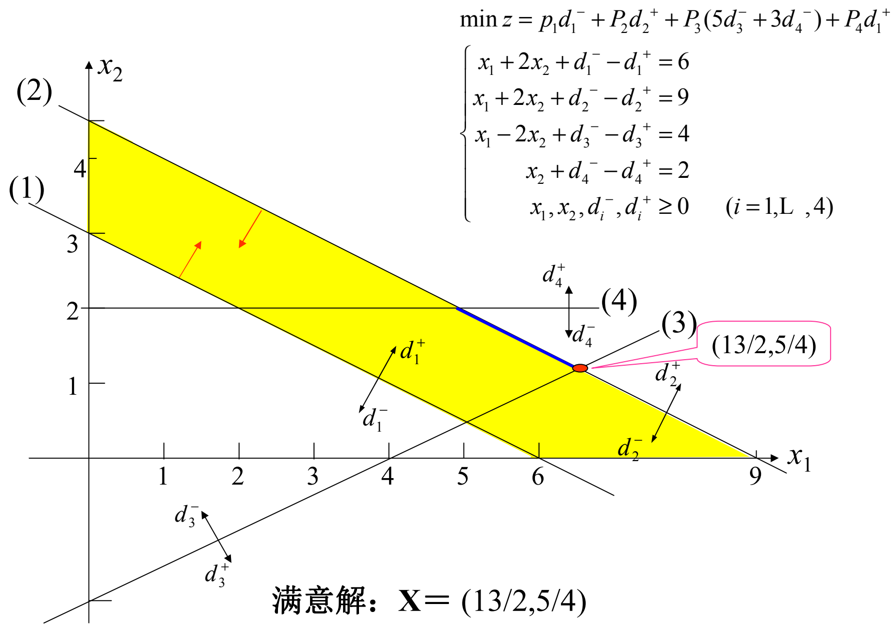
(2)分析目标函数分别变为①、②两种情况时（②中分析 w_1、w_2 的比例变动）解的变化。

① $\min z = p_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3 d_1^+ + P_4(5d_3^- + 3d_4^-)$

② $\min z = p_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(w_1 d_3^- + w_2 d_4^-) + P_4 d_1^+$

【解】（1）**图解法**（双击下图，打开幻灯片）

习题4.5(1)



（1）单纯形法

C_j		0	0	P_1	P_4	0	P_2	$5P_3$	0	$3P_3$	0	b
C_B	基	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	
P_1	d_1^-	1	2	1	−1							6
0	d_2^-	1	2			1	−1					9
$5P_3$	d_3^-	1	−2					1	−1			4
$3P_3$	d_4^-		[1]							1	−1	2
表（1） C_j-Z_j	P_1	−1	−2		1							
	P_2						1					
	P_3	−5	7						5		3	
	P_4				1							

P_1	d_1^-	[1]		1	−1					−2	2	2
0	d_2^-	1				1	−1			−2	2	5
$5P_3$	d_3^-	1						1	−1	2	−2	8
0	x_2^-		1							1	−1	2
表（2） C_j-Z_j	P_1	−1			1					2	−2	
	P_2						1					
	P_3	−5	7						5	−7	10	
	P_4				1							
0	x_1	1				1/2	−1/2	1/2	−1/2	0	0	13/2
P_4	d_1^+			−1	1	1	−1					3
$3P_3$	d_4^-					−1/4	1/4	1/4	−1/4	1	−1	3/4
0	x_2		1			1/4	−1/4	−1/4				5/4
表（5） C_j-Z_j	P_1			1								
	P_2						1					
	P_3					3/4	−3/4	17/4	3/4		3	
	P_4			1		1	1					

(b) $\min z = p_1 d_1^- + P_2 d_2^+ + P_3(w_1 d_3^- + w_2 d_4^-) + P_4 d_1^+$

单纯形法，利用上表（5）的结果，引入参数 w_1、w_2 进行灵敏度分析，得到下表。

C_j		0	0	P_1	P_4	0	P_2	w_1P_3	0	w_2P_3	0	b
C_B	基	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	
0	x_1	1				1/2	−1/2	1/2	−1/2	0	0	13/2
P_4	d_1^+			−1	1	1	−1					3
w_2P_3	d_4^-					−1/4	1/4	[1/4]	−1/4	1	−1	3/4
0	x_2		1			1/4	−1/4	−1/4				5/4
表（1） C_j-Z_j	P_1			1								
	P_2						1					
	P_3					$w_2/4$	$-w_2/4$	$w_1- w_2/4$	$w_2/4$		w_2	
	P_4			1		1	1					
0	x_1	1				1	−1			−2	2	5
P_4	d_1^+			−1	1	1	−1					3
w_1P_3	d_3^-					−1	1	1	−1	4	−4	3
0	x_2^-		1							1	−1	2
表（2） C_j-Z_j	P_1			1								
	P_2						1					
	P_3					w_1	$-w_1$		w_1	w_2-4w_1	$4w_1$	
	P_4			1		−1	1					

（1）由表（1）知，当 $w_1-w_2/4>0$，即 $\dfrac{w_1}{w_2}>\dfrac{1}{4}(w_1,w_2>0)$ 时，满意解为：X=（13/2，5/4）

（2）由表（2）知，当 $w_2-4w_1>0$，即 $\dfrac{w_1}{w_2}<\dfrac{1}{4}(w_1,w_2>0)$ 时，满意解为：X=（5，2）

（3）当 $\frac{w_1}{w_2}=\frac{1}{4}(w_1,w_2>0)$ 时，表(1)和表(2)都是满意解。

习题五

5.2 用元素差额法直接给出表 5-53 及表 5-54 下列两个运输问题的近似最优解.

表5-53

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	A_i
A_1	19	16	10	21	9	18
A_2	14	13	5	24	7	30
A_3	25	30	20	11	23	10
A_4	7	8	6	10	4	42
B_j	15	25	35	20	5	

表5-54

	B_1	B_2	B_3	B_4	A_i
A_1	5	3	8	6	16
A_2	10	7	12	15	24
A_3	17	4	8	9	30
B_j	20	25	10	15	

【解】表 5-53。Z=824

19	16 8	10 5	21	9 5	18	0
14	13	5 30	24	7	30	-5
25	30	20	11 10	23	10	-7
7 15	8 17	6	10 10	4	42	-8
15	25	35	20	5		
15	16	10	18	9		

Objective Value = 824 (Minimization)

表 5-54 **Z=495**

5 16	3	8	6 Cij=-1 **	16	0
10 4	7 20	12	15	24	5
17	4 5	8 10	9 15*	30	2
20	25	10	15		
5	2	6	7		

Objective Value = 495 (Minimization)

** Entering: Source 1 to Destination 4 * Leaving: Source 3 to Desti

5.3 求表 5-55 及表 5-56 所示运输问题的最优方案.

（1）用闭回路法求检验数（表 5-55）

表5-55

	B_1	B_2	B_3	B_4	Ai
A_1	10	5	2	3	70
A_2	4	3	1	2	80
A_3	5	6	4	4	30
b_j	60	60	40	20	

（2）用位势法求检验数（表 5-56）

表5-56

	B_1	B_2	B_3	B_4	A_i
A_1	9	15	4	8	10
A_2	3	1	7	6	30
A_3	2	10	13	4	20
A_4	4	5	8	3	43
b_j	20	15	50	15	

【解】（1）

From \ To	B1	B2	B3	B4	Supply	Dual P(i)
A1	10	5 10	2 40	3 20	70	0
A2	4 30	3 50	1	2	80	-2
A3	5 30	6	4	4	30	-1
Demand	60	60	40	20		
Dual P(j)	6	5	2	3		
	Objective Value = 610 (Minimization)					

(2)

	B1	B2	B3	B4	Unused_Supply	Supply	Dual P(i)
A1	9	15	4 10	8	+1M	10	0
A2	3	1 15	7 15	6	+1M	30	3
A3	2 20	10	13	4	+1M 0	20	4
A4	4	5	8 25	3 15	+1M 3	43	4
Demand	15	50	15	3	3		
Dual P(j)	-2	-2	4	-1	-4+1M		
	Objective Value = 445 (Minimization)						

5.4 求下列运输问题的最优解

（1）C_1 目标函数求最小值；（2）C_2 目标函数求最大值

$$C_1=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}3&5&9&2\\6&4&8&5\\11&13&12&7\end{bmatrix}\begin{array}{c}50\\25\\30\end{array}\\ \begin{array}{cccc}15&45&20&40\end{array}\end{array}\qquad C=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}7&10&15&20\\14&13&9&6\\5&8&7&10\end{bmatrix}\begin{array}{c}60\\30\\90\end{array}\\ \begin{array}{cccc}60&30&50&40\end{array}\end{array}$$

(3)目标函数最小值,B_1 的需求为 $30\leqslant b_1\leqslant 50$，$B_2$ 的需求为 40，B_3 的需求为 $20\leqslant b_3\leqslant 60$,$A_1$ 不

可达 A_4 ，B_4的需求为 30.

$$\left[\begin{array}{cccc}4 & 9 & 7 & - \\ 6 & 5 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 9 & 10\end{array}\right]\begin{array}{c}70 \\ 20 \\ 50\end{array}$$

【解】（1）

From \ To	B1	B2	B3	B4	Supply	Dual P(i)
A1	3 15	5 20	9	2 15	50	0
A2	6	4 25	8	5	25	-1
A3	11	13	12 5	7 25	30	5
nfilled_Dema	+1M	+1M	+1M 15	+1M	-15	-7+1M
Demand	45	20	40	-15		
Dual P(j)	3	5	7	2		

Objective Value = 510 (Minimization

（2）

7	10	15 20	20 40	60	0
14 30	13	9	6	30	1
5 30	8 30	7 30	10	90	-8
60	30	50	40		
13	16	15	20		

Objective Value = 2120 (Maximization)

（3）先化为平衡表

	B_{11}	B_{12}	B_2	B_{31}	B_{32}	B_4	a_i

A_1	4	4	9	7	7	M	70
A_2	6	6	5	3	3	2	20
A_3	8	8	5	9	9	10	50
A_4	M	0	M	M	0	M	40
b_j	30	20	40	20	40	30	**180**

最优解：

	B11	B12	B2	B31	B32	B4	Supply	Dual P(i)
A1	4 30	4 20	9	7 20	7 0	+1M	70	0
A2	6	6	5	3	3	2 20	20	-6
A3	8	8	5 40	9	9 0	10 10	50	2
A4	+1M	0	+1M	+1M	0 40	+1M	40	-7
Demand	30	20	40	20	40	30		
Dual P(j)	4	4	3	7	7	8		
	Objective Value = 680 (Minimization)							

5.5（1）建立数学模型

设 x_{ij}(I=1,2,3;j=1,2)为甲、乙、丙三种型号的客车每天发往 B_1，B_2 两城市的台班数，则

$$\max Z = 40(80x_{11} + 65x_{12} + 60x_{21} + 50x_{22} + 50x_{31} + 40x_{32})$$

$$\begin{cases} 40x_{11} + 40x_{21} + 40x_{31} = 400 \\ 40x_{12} + 40x_{22} + 40x_{32} = 600 \\ x_{11} + x_{12} \le 5 \\ x_{11} + x_{22} \le 10 \\ x_{31} + x_{32} \le 15 \\ x_{ij} \ge 0 (i = 1,2,3; j = 1,2) \end{cases}$$

(2)写平衡运价表

将第一、二等式两边同除以 40，加入松驰变量 x_{13},x_{23} 和 x_{33} 将不等式化为等式，则平衡表为：

	B_1	B_2	B_3	a_i
甲	80	65	0	5
乙	60	50	0	10
丙	50	40	0	15
b_j	10	15	5	

为了平衡表简单，故表中运价没有乘以 40，最优解不变

（3）最优调度方案：

From \ To	Destination	Destination	Unused Supply	Supply	Dual P(i)
Source 1	3200 5	2600	-1M	5	0
Source 2	2400 5	2000 5	-1M	10	-800
Source 3	2000	1600 10	-1M 5	15	-1200
Demand	15	5	5		
Dual P(j)	3200	2800	1200-1M		
	Objective Value = -5M+54000 (Ma				

即甲第天发 5 辆车到 B_1 城市，乙每天发 5 辆车到 B_1 城市，5 辆车到 B_2 城市，丙每天发 10 辆车到 B_2 城市，多余 5 辆，最大收入为

Z=40（5×80+5×60+5×50+10×40）=54000（元）

5.6（1）设 x_{ij} 为第 i 月生产的产品第 j 月交货的台数，则此生产计划问题的数学模型为

$$\min Z = x_{11} + 1.15x_{12} + 1.3x_{13} + 1.45x_{14} + Mx_{21} + \cdots + 0.98x_{44}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=50 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=40 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=60 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=80 \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 65 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 65 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\le 65 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}\le 65 \\ x_{ij}\ge 0,(i,j=1,\cdots,4) \end{cases}$$

（2）化为运输问题后运价表（即生产费用加上存储费用）如下，其中第 5 列是虚设销地费用为零，需求量为 30。

	1	2	3	4	5	a_i
1	1	1.15	1.3	1.45	0	65
2	M	1.25	1.4	1.55	0	65
3	M	M	0.87	1.02	0	65
4	M	M	M	0.98	0	65
b_j	50	40	60	80	30	

(3)用表上作业法，最优生产方案如下表：

	1	2	3	4	5	a_i
1	50	15				65
2		25		10	30	65
3			60	5		65
4				65		65
B_i	50	40	60	80	30	

上表表明：一月份生产 65 台，当月交货 50 台；二月份交货 15 台,二月份生产 35 台，当月交货 25 台，四月份交货 10 台；三月份生产 65 台，当月交货 60 台，四月份交货 5 台，4 月份生产 65 台当月交货。最小费用 Z=235 万元。

5.7 假设在例 5.15 中四种产品的需求量分别是 1000、2000、3000 和 4000 件，求最优生产配置方案.

【解】将表 5-35 所示的单件产品成本乘以需求量，为计算简便，从表中提出公因子 1000.

	产品 1	产品 2	产品 3	产品 4
工厂 1	58	138	540	1040
工厂 2	75	100	450	920
工厂 3	65	140	510	1000
工厂 4	82	110	600	1120

用匈牙利法得到最优表

	产品1	产品2	产品3	产品4
工厂1	0	5	37	67
工厂2	70	20	0	0
工厂3	0	0	0	20
工厂4	47	0	120	170

第一个工厂加工产品 1，第二工厂加工产品 4，第三个工厂加工产品 3，第四个工厂加工产品 2；

总成本

$$Z=1000\times(58+920+510+110)=1598000$$

注：结果与例 5.15 的第 2 个方案相同，但并不意味着“某列（行）同乘以一个非负元素后最优解不变”结论成立。

5.8 求解下列最小值的指派问题，其中第（2）题某人要作两项工作，其余 3 人每人做一项工作.

$$（1）C=\begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 & 15 \\ 20 & 12 & 18 & 26 \\ 35 & 18 & 10 & 25 \\ 6 & 10 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

【解】最优解

$$X=\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{bmatrix},Z=43$$

$$（2）C=\begin{bmatrix} 26 & 38 & 41 & 52 & 27 \\ 25 & 33 & 44 & 59 & 21 \\ 20 & 30 & 47 & 56 & 25 \\ 22 & 31 & 45 & 53 & 20 \end{bmatrix}$$

【解】虚拟一个人，其效率取 4 人中最好的，构造效率表为

	1	2	3	4	5
甲	26	38	41	52	27
乙	25	33	44	59	21
丙	20	30	47	56	25
丁	22	31	45	53	20
戊	20	30	41	52	20

最优解：甲～戊完成工作的顺序为 3、5、1、2、4，最优值 Z=165

最优分配方案：甲完成第 3、4 两项工作，乙完成第 5 项工作，丙完成第 1 项工作，丁完成第 2 项工作。

5.9 求解下列最大值的指派问题：

（1）$C=\begin{bmatrix} 10 & 9 & 6 & 17 \\ 15 & 14 & 10 & 20 \\ 18 & 13 & 13 & 19 \\ 16 & 8 & 12 & 26 \end{bmatrix}$

【解】最优解

$$X=\begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, Z=64$$

（2）$C=\begin{bmatrix} 9 & 6 & 5 & 10 \\ 4 & - & 8 & 5 \\ 7 & 10 & 9 & 12 \\ 6 & 15 & 7 & 16 \\ 9 & 8 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

【解】最优解

$$X=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, Z=44$$

第 5 人不安排工作。

5.10 学校举行游泳、自行车、长跑和登山四项接力赛，已知五名运动员完成各项目的成绩（分钟）如表 5-58 所示．如何从中选拔一个接力队，使预期的比赛成绩最好．

表 5-58 成绩表(分钟)

	游泳	自行车	长跑	登山
甲	20	43	33	29
乙	15	33	28	26
丙	18	42	38	29
丁	19	44	32	27
戊	17	34	30	28

【解】设 x_{ij} 为第 i 人参加第 j 项目的状态，则数学模型为

$$\min Z = 20x_{11} + 43x_{12} + 33x_{13} + 29x_{14} + \cdots 28x_{54}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1 \\ x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}=1 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=1 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=1 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=1 \\ x_{ij}=0\text{或}1, i=1,2,\cdots,5; j=1,2,3,4 \end{cases}$$

接力队最优组合

乙　　长跑

丙　　游泳

丁　　登山

戊　　自行车

甲淘汰。预期时间为 107 分钟。

习题六

6.1 如图 6—39 所示，建立求最小部分树的 0—1 整数规划数学模型。

【解】边[i，j]的长度记为 c_{ij}，设

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{边}[i,j]\text{包含在最小部分树内} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

数学模型为：

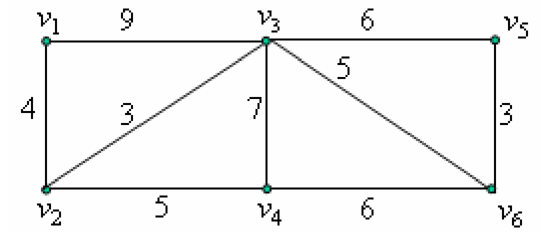


图 6—39

$$\min Z = c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i,j} x_{ij} = 5 \\ x_{12} + x_{13} + x_{23} \le 2, x_{23} + x_{24} + x_{34} \le 2 \\ x_{34} + x_{36} + x_{46} \le 2, x_{35} + x_{36} + x_{56} \le 2 \\ x_{23} + x_{26} + x_{36} \le 2, x_{12} + x_{13} + x_{24} + x_{34} \le 3 \\ x_{34} + x_{35} + x_{46} + x_{56} \le 3, x_{12} + x_{13} + x_{26} + x_{36} \le 3 \\ x_{23} + x_{35} + x_{26} + x_{56} \le 3, x_{12} + x_{15} + x_{26} + x_{56} \le 3 \\ x_{ij} = 1或0, 所有边[i, j] \end{cases}$$

6.2 如图 6－40 所示，建立求 v_1 到 v_6 的最短路问题的 0－1 整数规划数学模型。

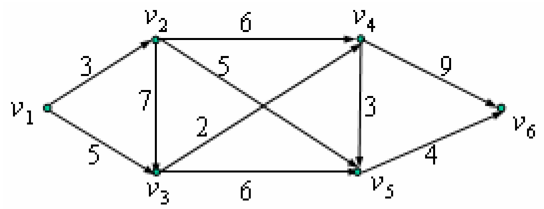


图 6－40

【解】弧(i，j)的长度记为 c_{ij}，设

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & 弧(i, j)包含在最短路径中 \\ 0 & 否则 \end{cases}$$

数学模型为：

$$\min Z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} = 1, x_{12} = x_{23} + x_{24} + x_{25} \\ x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{35}, x_{24} + x_{34} = x_{45} + x_{46} \\ x_{25} + x_{35} + x_{45} = x_{56}, x_{46} + x_{56} = 1 \\ x_{ij} = 1或0, 所有弧(i, j) \end{cases}$$

6.3 如图 6－40 所示，建立求 v_1 到 v_6 的最大流问题的线性规划数学模型。

【解】 设 x_{ij} 为弧（i,j）的流量，数学模型为

$$\min Z = x_{12} + x_{13}$$

$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} = x_{46} + x_{56} \\ x_{12} = x_{23} + x_{24} + x_{25} \\ x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{35} \\ x_{24} + x_{34} = x_{45} + x_{46} \\ x_{25} + x_{35} + x_{45} = x_{56} \\ 0 \le x_{ij} \le c_{ij}, 所有弧(i, j) \end{cases}$$

6.4 求图 6－41 的最小部分树。图 6-41（a）用破圈法,图 6-41（b）用加边法。

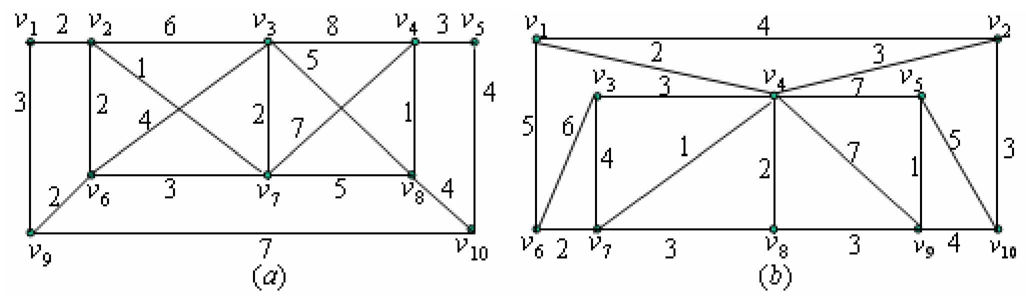


图 6－41

【解】图 6-41（a），该题有 4 个解，最小树长为 21，其中一个解如下图所示。

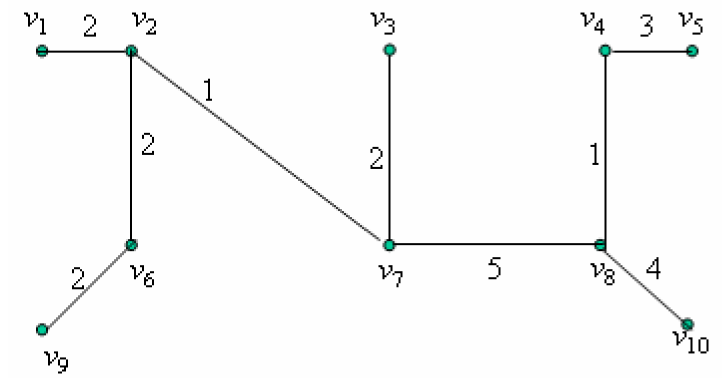
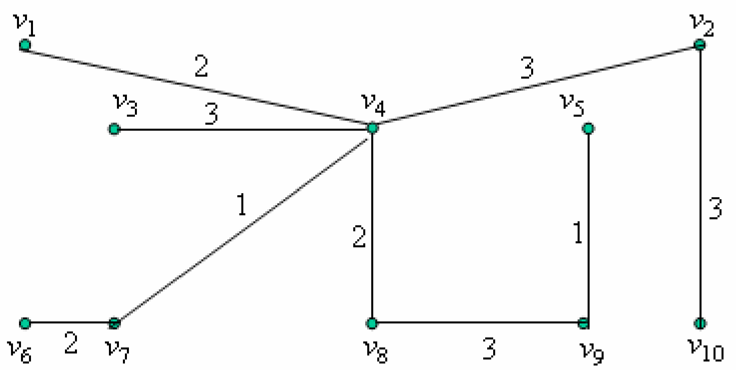


图 6-41（b），最小树长为 20。最小树如下图所示。



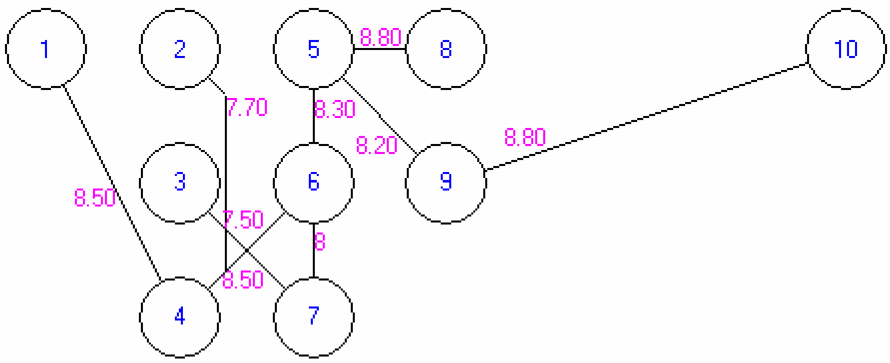
6.5 某乡政府计划未来 3 年内，对所管辖的 10 个村要达到村与村之间都有水泥公路相通的目标。根据勘测，10 个村之间修建公路的费用如表 6-20 所示。乡镇府如何选择修建公路的路线使总成本最低。

表 6-20

	两村庄之间修建公路的费用(万元)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		12.8	10.5	8.5	12.7	13.9	14.8	13.2	12.7	8.9
2			9.6	7.7	13.1	11.2	15.7	12.4	13.6	10.5
3				13.8	12.6	8.6	8.5	10.5	15.8	13.4
4					11.4	7.5	9.6	9.3	9.8	14.6
5						8.3	8.9	8.8	8.2	9.1
6							8.0	12.7	11.7	10.5

7								14.8	13.6	12.6
8									9.7	8.9
9										8.8
10										

【解】属于最小树问题。用加边法，得到下图所示的方案。



最低总成本 74.3 万元。

6.6 在图 6－42 中，求 A 到 H、I 的最短路及最短路长，并对图(*a*)和(*b*)的结果进行比较。

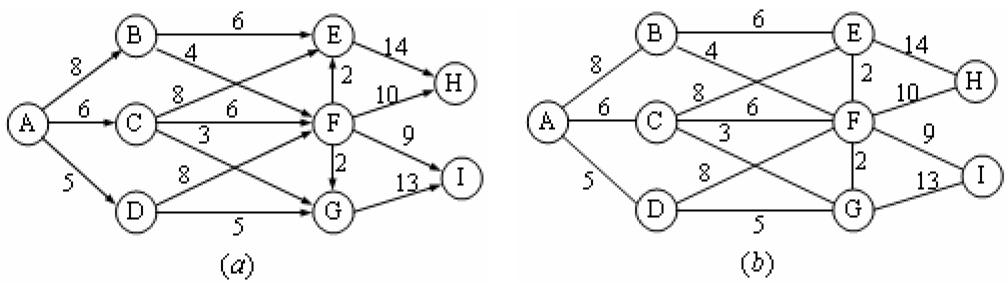
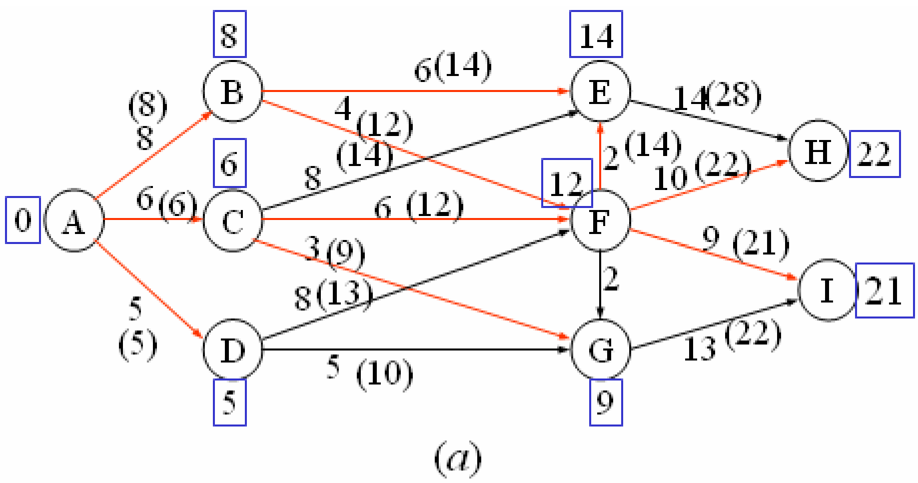


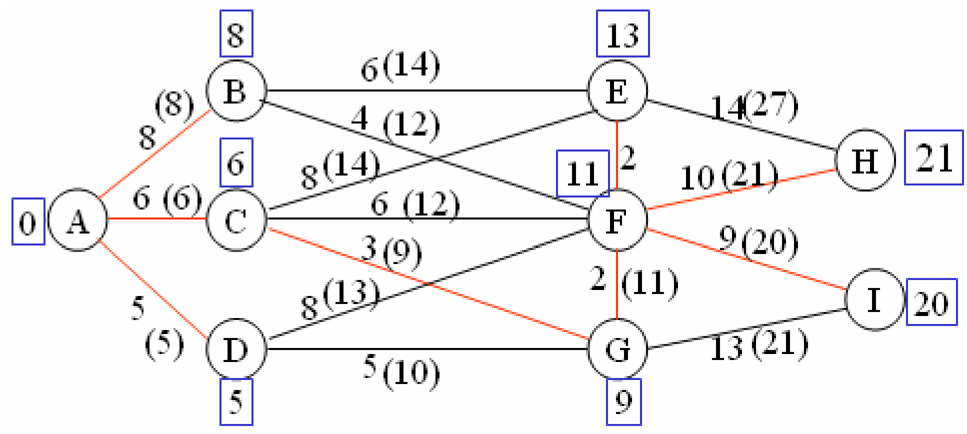
图 6－42

【解】图 6－42(*a*):



A 到 H 的最短路 P_{AH}={A,B,F,H},{A,C,F,H}最短路长 22；A 到 I 的最短路 P_{AI}={A,B,F,I},{A,C,F,I}最短路长 21。

对于图 6－42(*b*):



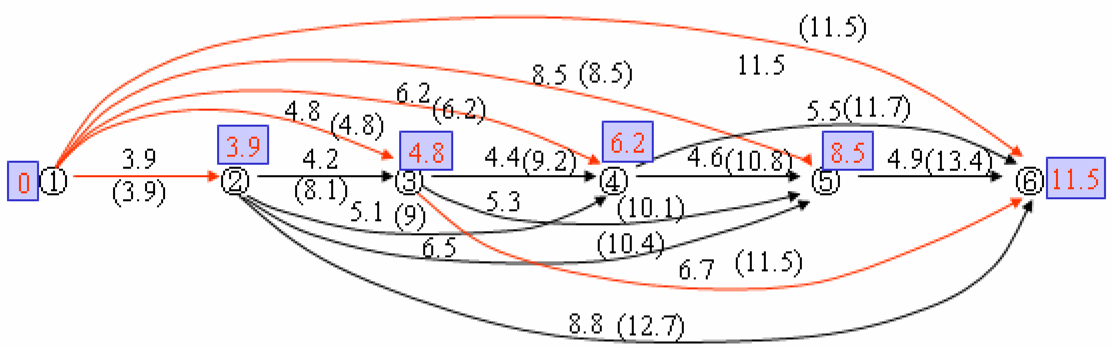
(b)

A 到 H 的最短路 P_{AH}={A,C,G,F,H},最短路长 21；A 到 I 的最短路 P_{AI}={A,C,G,F,I},最短路长 20；

结果显示有向图与无向图的结果可能不一样。

6.7 已知某设备可继续使用 5 年，也可以在每年年末卖掉重新购置新设备。已知 5 年年初购置新设备的价格分别为 3.5、3.8、4.0、4.2 和 4.5 万元。使用时间在 1～5 年内的维护费用分别为 0.4、0.9、1.4、2.3 和 3 万元。试确定一个设备更新策略，使 5 年的设备购置和维护总费用最小。

【解】设点 v_j 为第 j 年年初购置新设备的状态，（i，j）为第 i 年年初购置新设备使用到第 j 年年初，弧的权为对应的费用（购置费＋维护费），绘制网络图并计算，结果见下图所示。



总费用最小的设备更新方案为：第一种方案，第 1 年购置一台设备使用到第 5 年年末；第二种方案，第 1 年购置一台设备使用到第 2 年年末，第 3 年年初更新后使用到第 5 年年末。总费用为 11.5 万元。

6.8 图 6－43 是世界某 6 大城市之间的航线，边上的数字为票价（百美元），用 Floyd 算法设计任意两城市之间票价最便宜的路线表。

【解】教师可利用模板求解：data\chpt6\ch6.xls

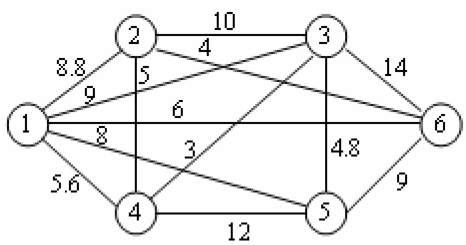


图 6－43

L1

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	8.8	9	5.6	8	6
v2	8.8	0	10	5	100	4

v3	9	10	0	3	4.8	14
v4	5.6	5	3	0	12	100
v5	8	100	4.8	12	0	9
v6	6	4	14	100	9	0

L2

	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	8.8	8.6	5.6	8	6
v2	8.8	0	8	5	13	4
v3	8.6	8	0	3	4.8	14
v4	5.6	5	3	0	7.8	9
v5	8	13	4.8	7.8	0	9
v6	6	4	14	9	9	0

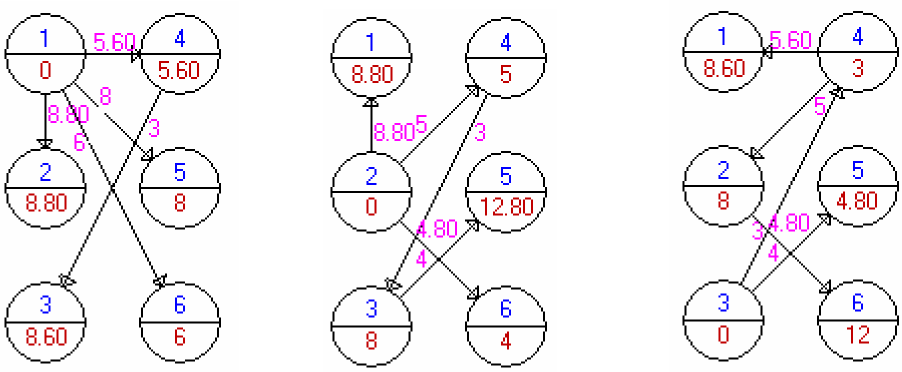
L3

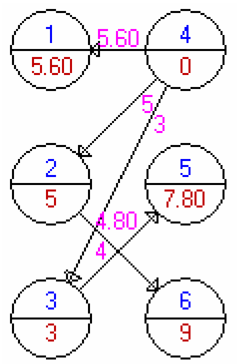
	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	8.8	8.6	5.6	8	6
v2	8.8	0	8	5	13	4
v3	8.6	8	0	3	4.8	12
v4	5.6	5	3	0	7.8	9
v5	8	13	4.8	7.8	0	9
v6	6	4	12	9	9	0

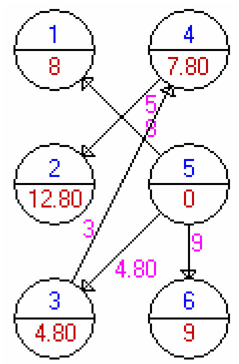
最优票价表：

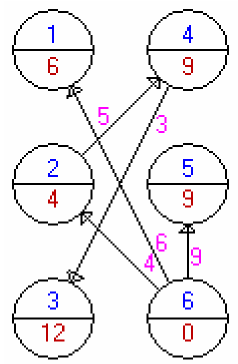
	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	8.8	8.6	5.6	8	6
v2		0	8	5	13	4
v3			0	3	4.8	12
v4				0	7.8	9
v5					0	9
v6						0

v_1、v_2、…、v_6到各点的最优路线图分别为：









6.9 设图 6—43 是某汽车公司的 6 个零配件加工厂，边上的数字为两点间的距离(km)。现要在 6 个工厂中选一个建装配车间。

（1）应选那个工厂使零配件的运输最方便。

（2）装配一辆汽车 6 个零配件加工厂所提供零件重量分别是 0.5、0.6、0.8、1.3、1.6 和 1.7 吨，运价为 2 元/吨公里。应选那个工厂使总运费最小。

【解】(1)利用习题 6.8 表 L3 的结果

$$L=\min_i \max_j \left\{L_{ij}\right\}=12.8$$

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	Max	
v1	0	8.8	8.6	5.6	8	6	**8.8**	
v2	8.8	0	8	5	13	4	12.8	
v3	8.6	8	0	3	4.8	12	12	
v4	5.6	5	3	0	7.8	9	9	
v5	8	13	4.8	7.8	0	9	12.8	
v6	6	4	12	9	9	0	12	

选第 1 个工厂最好。

(2)计算单件产品的运价，见下表最后一行。计算单件产品的运费，见下表最后一列。

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	单件产品运费
v1	0	8.8	8.6	5.6	8	6	84.88
v2	8.8	0	8	5	13	4	89.16
v3	8.6	8	0	3	4.8	12	82.16
v4	5.6	5	3	0	7.8	9	**71.96**
v5	8	13	4.8	7.8	0	9	81.92
v6	6	4	12	9	9	0	82.2
运价	1	1.2	1.6	2.6	3.2	3.4	

选第 4 个工厂最好。

6.10 如图 6—44，（1）求 v_1 到 v_{10} 的最大流及最大流量；（2）求最小割集和最小割量。

【解】给出初始流如下

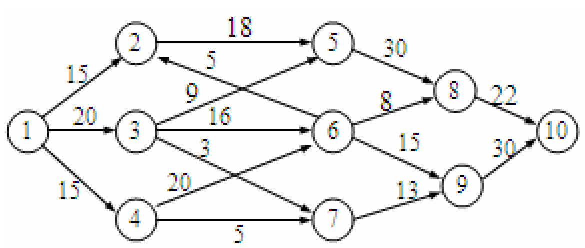
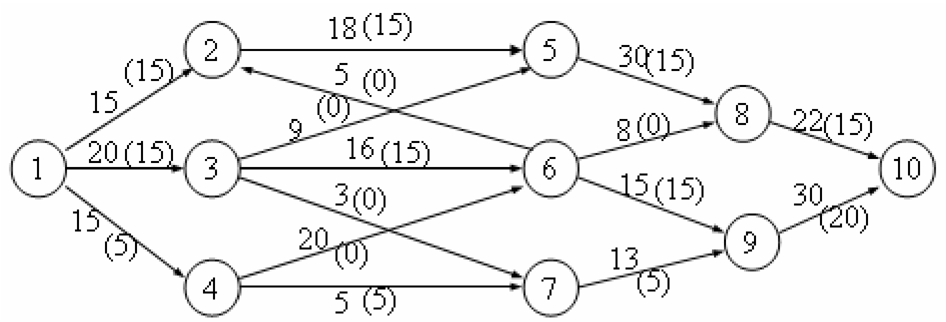
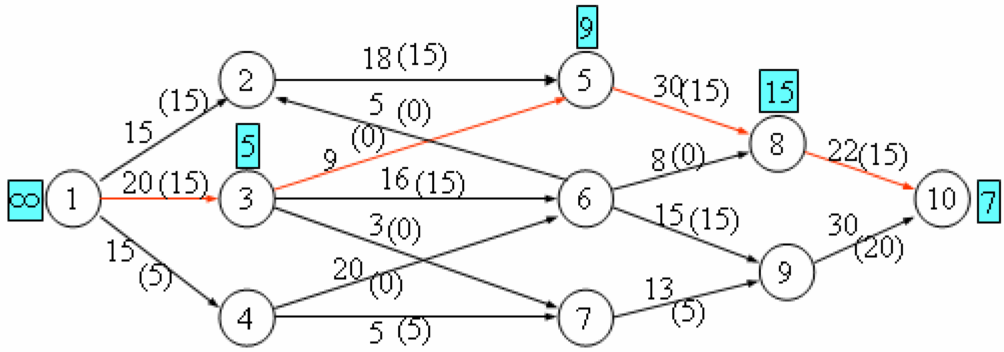


图 6—44

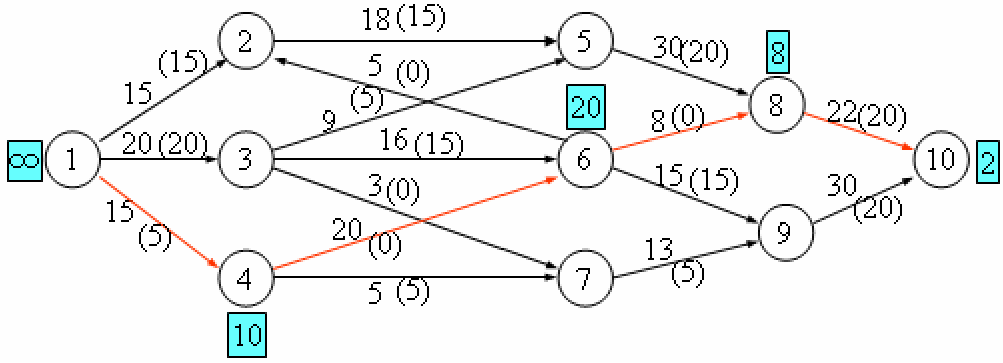


第一轮标号：得到一条增广链，调整量等于 5，如下图所示



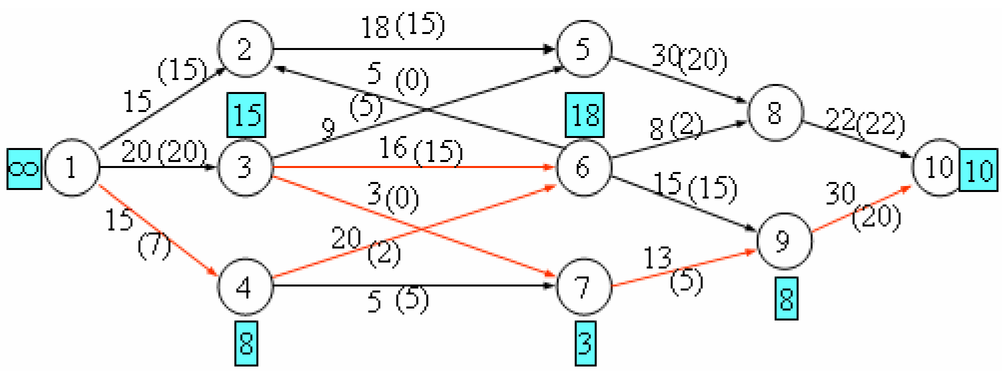
调整流量。

第二轮标号：得到一条增广链，调整量等于 2，如下图所示



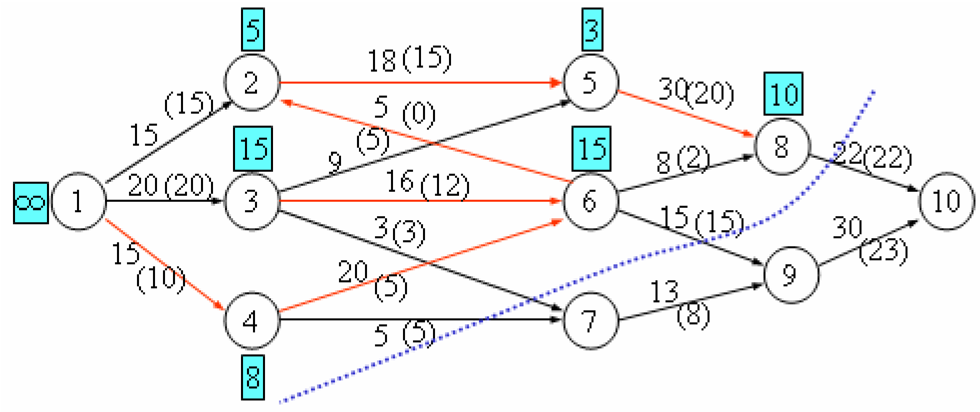
调整流量。

第三轮标号：得到一条增广链，调整量等于 3，如下图所示



调整流量。

第四轮标号：不存在增广链，最大流量等于 45，如下图所示



取 $V_1=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_8\},\overline{V}_1=\{v_7,v_9,v_{10}\}$，最小截集{(3,7),(4,7),(6,9),(8,10)，最小截量等于 45。

6.11 将 3 个天然气田 A_1、A_2、A_3 的天然气输送到 2 个地区 C_1、C_2，中途有 2 个加压站 B_1、B_2，天然气管线如图 6－45 所示。输气管道单位时间的最大通过量 c_{ij} 及单位流量的费用 d_{ij} 标在弧上(c_{ij}, d_{ij})。求(1)流量为 22 的最小费用流；（2）最小费用最大流。

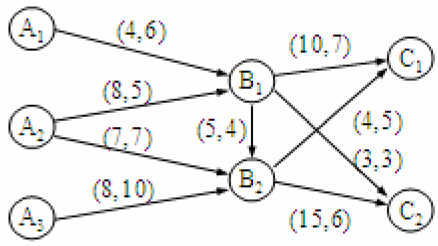
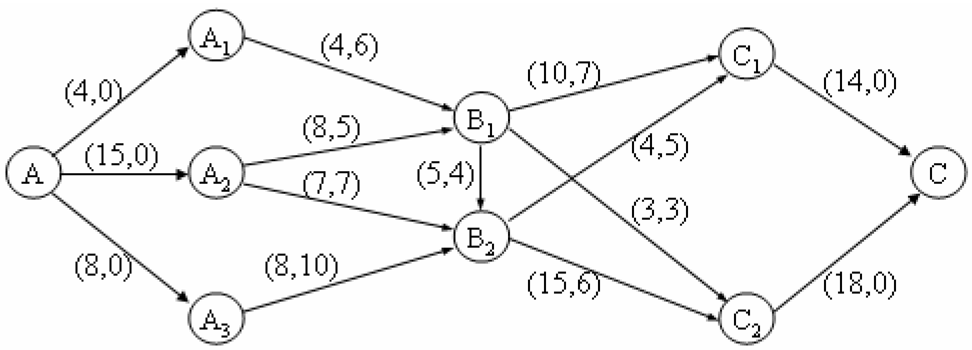


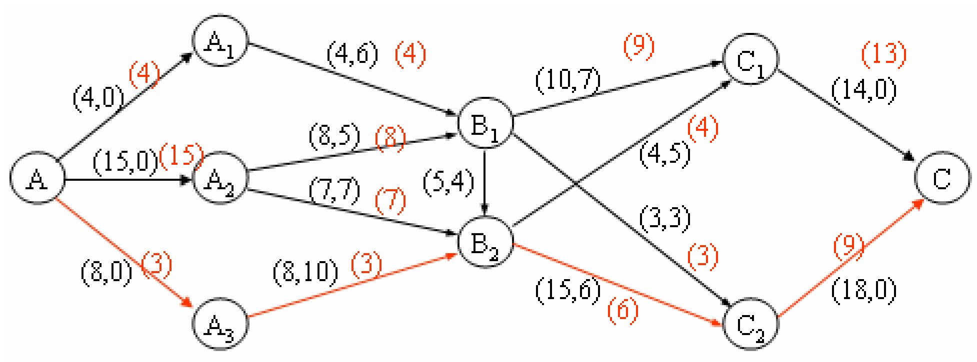
图 6－45

【**解**】虚拟一个发点和一个收点



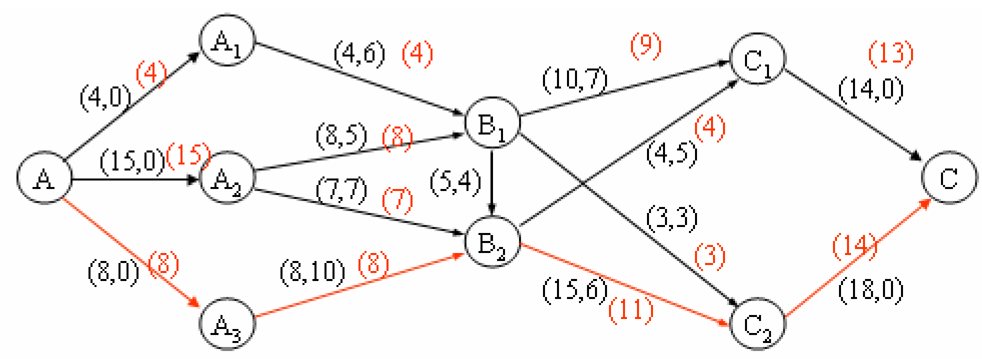
T6.11－1

得到流量 v=22 的最小费用流，最小费用为 271。求解过程参看第 4 章 PPT 文档习题答案。



T6.11－13

最小费用最大流如下图，最大流量等于 27，总费用等于 351。



6.12 如图 6－43 所示，（1）求解旅行售货员问题；（2）求解中国邮路问题。

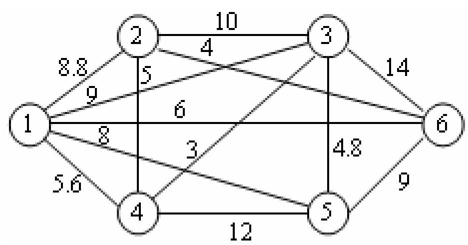


图 6-43

【解】（1）旅行售货员问题。

距离表 C

	1	2	3	4	5	6
1	∞	8.8	9	5.6	8	6
2	8.8	∞	10	5	∞	4
3	9	10	∞	3	4.8	14
4	5.6	5	3	∞	12	∞
5	8	∞	4.8	12	∞	9
6	6	4	14	∞	9	∞

在 C 中行列分别减除对应行列中的最小数，得到距离表 C1。

距离表 C1

	1	2	3	4	5	6
1	∞	3.2	3.4	0	0.6	0.4
2	2.8	∞	6	1	∞	0

3	4	7	∞	0	0	11
4	0.6	2	0	∞	7.2	∞
5	1.2	∞	0	7.2	∞	9
6	0	0	10	∞	3.2	∞

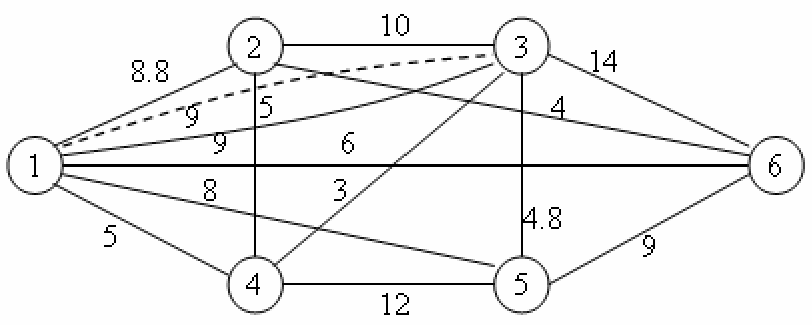
由距离表 C1，v_1 到 v_4， $H_1=\{v_1, v_4, v_3, v_5, v_6, v_2, v_1\}$, $C(H_1)=5.6+3+4.8+9+4+8.8=35.2$
去掉第 1 行第四列，$d_{41}=\infty$，得到距离表 C2。

得到距离表 C2

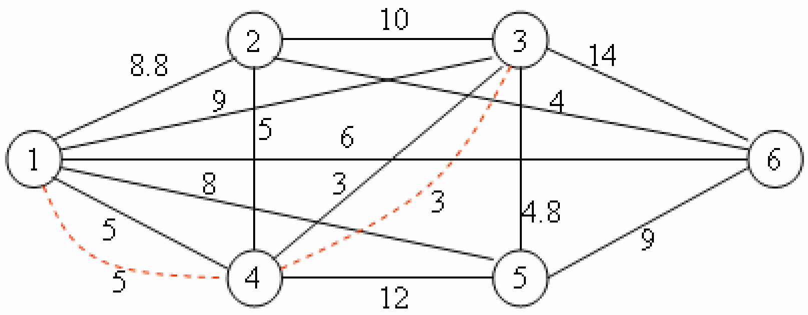
	1	2	3	5	6
2	2.8	∞	6	∞	0
3	4	7	∞	0	11
4	∞	2	0	7.2	∞
5	1.2	∞	0	∞	9
6	0	0	10	3.2	∞

距离表 C2 的每行每列都有零，$H_2= H_1=\{v_1, v_4, v_3, v_5, v_6, v_2, v_1\}$就是总距离最小的 Hamilton 回路，$C(H_1)=35.2$。

(2)中国邮路问题。虚拟一条边



取回路 $H_1=\{v_1, v_3, v_4\}$，$C(H_1)=9+5+3=17$,$C(v_1, v_3)=9> C(H_1)/2$，调整回路。



所有回路满足最短回路的准则，上图是最短的欧拉回路，其中边(v_1, v_4)和(v_4, v_3)各重复一次。

习题七

7.2(1)分别用节点法和箭线法绘制表 7-16 的项目网络图，并填写表中的紧前工序。
(2) 用箭线法绘制表 7-17 的项目网络图，并填写表中的紧后工序

表 7-16

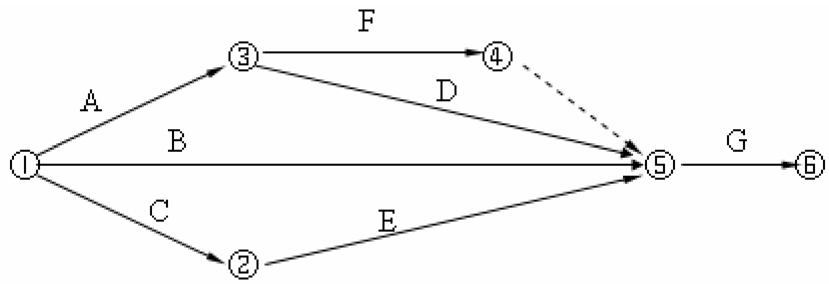
工序	A	B	C	D	E	F	G
紧前工序	—	—	—	**A**	**C**	**A**	**F、D、B、E**
紧后工序	D,E	G	E	G	G	G	—

表 7-17

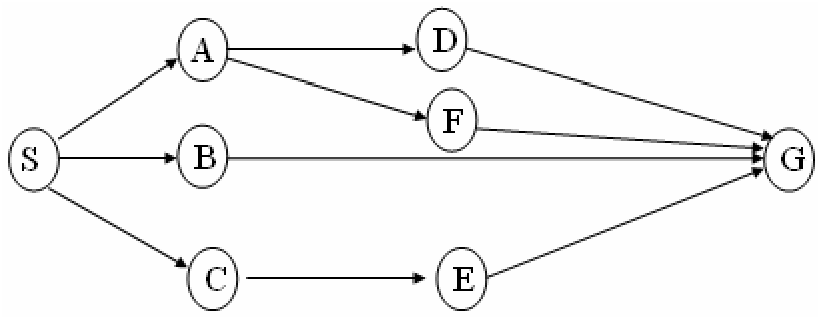
工序	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M

紧前工序	-	-	-	B	B	A,B	B	D,G	C,E,F,H	D,G	C,E	I	J,K,L
紧后工序	**F**	**E,D,F,G**	**I,K**	**H,J**	**I,K**	**I**	**H,J**	**I**	**L**	**M**	**M**	**M**	—

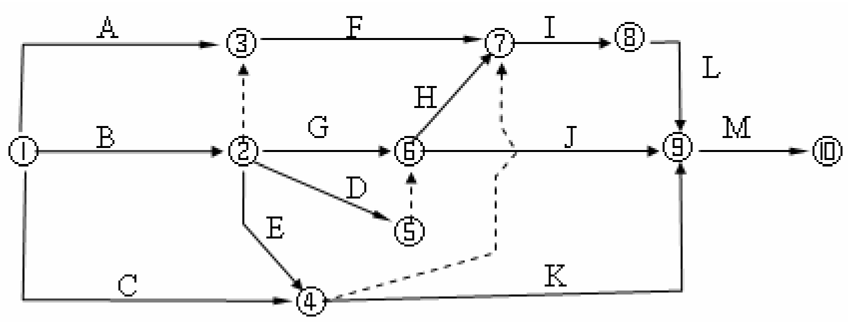
【解】（1）箭线图：



节点图：



（2）箭线图：



7.3 根据项目工序明细表 7-18：

（1）画出网络图。

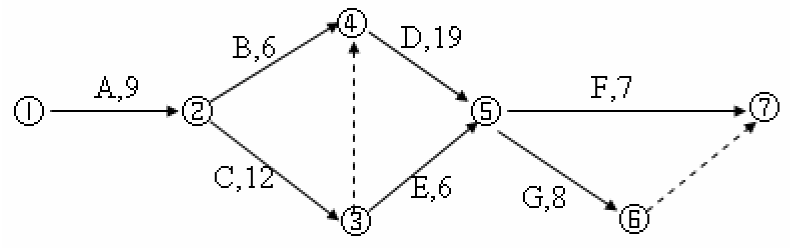
（2）计算工序的最早开始、最迟开始时间和总时差。

（3）找出关键路线和关键工序。

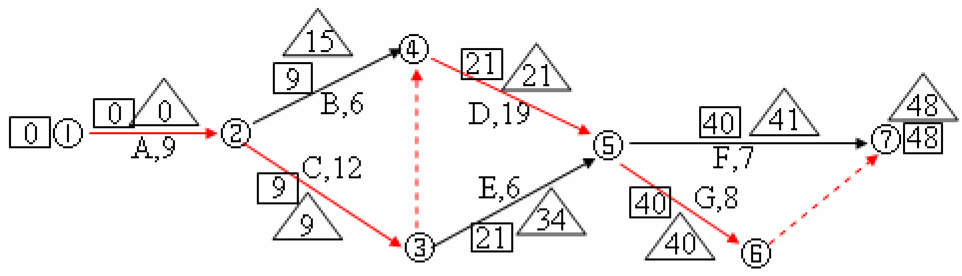
表 7-18

工序	A	B	C	D	E	F	G
紧前工序	-	A	A	B,C	C	D,E	D,E
工序时间（周）	9	6	12	19	6	7	8

【解】(1)网络图



(2)网络参数



工序	A	B	C	D	E	F	G
最早开始	0	9	9	21	21	40	40
最迟开始	0	15	9	21	34	41	40
总时差	0	6	0	0	13	1	0

(3)关键路线：①→②→③→④→⑤→⑥→⑦；关键工序：A、C、D、G；完工期：48 周。

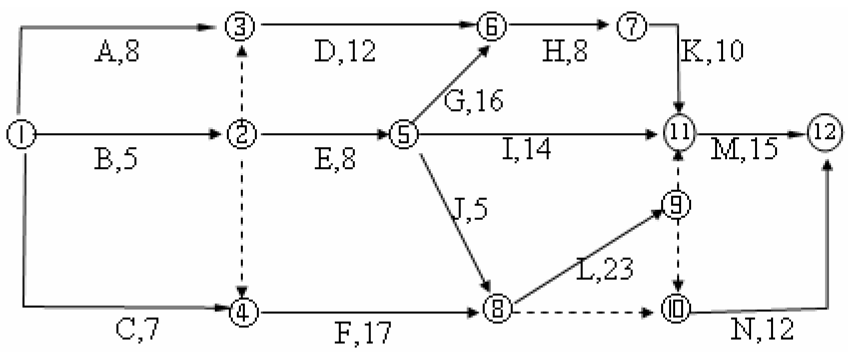
7.4 表 7-19 给出了项目的工序明细表。

表 7-19

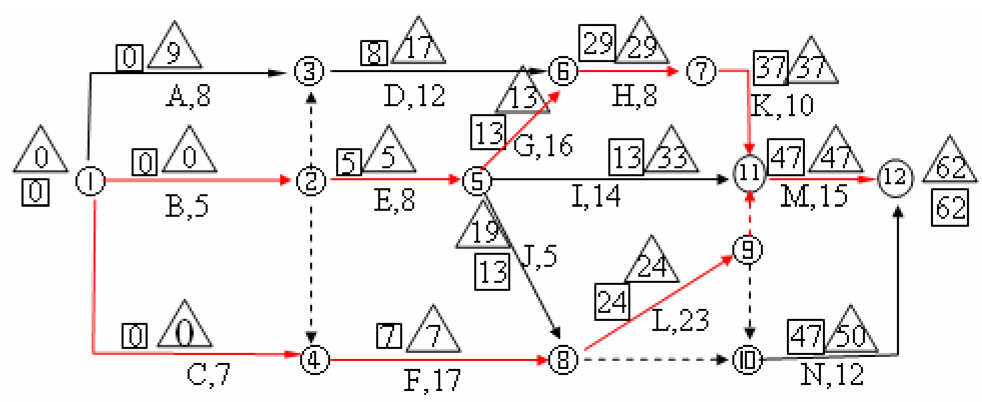
工序	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
紧前工序	-	-	-	A,B	B	B,C	E	D,G	E	E	H	F,J	I,K,L	F,J,L
工序时间(天)	8	5	7	12	8	17	16	8	14	5	10	23	15	12

（1）绘制项目网络图。
（2）在网络图上求工序的最早开始、最迟开始时间。
（3）用表格表示工序的最早最迟开始和完成时间、总时差和自由时差。
（4）找出所有关键路线及对应的关键工序。
（5）求项目的完工期。

【解】(1)网络图



（2）工序最早开始、最迟开始时间



（3）用表格表示工序的最早最迟开始和完成时间、总时差和自由时差

工序	t	T_{ES}	T_{EF}	T_{LS}	T_{LF}	总时差 S	自由时差 F
A	8	0	8	9	17	9	0
B	5	0	5	0	5	0	0
C	7	0	7	7	7	0	0
D	12	8	20	17	29	9	9
E	8	5	13	5	13	0	0
F	17	7	24	7	24	0	0
G	16	13	29	13	29	0	0
H	8	29	37	29	37	0	0
I	14	13	27	33	47	20	20
J	5	13	18	19	24	6	6
K	10	37	47	37	47	0	0
L	23	24	47	24	47	0	0
M	15	47	62	47	62	0	0
N	12	47	59	50	62	3	3

(4)关键路线及对应的关键工序

关键路线有两条，第一条：①→②→⑤→⑥→⑦→⑪→⑫；关键工序：B,E,G,H,K,M

第二条：①→④→⑧→⑨→⑪→⑫；关键工序：C,F,L,M

（5）项目的完工期为 62 天。

7.5 已知项目各工序的三种估计时间如表 7-20 所示。

求：

（1）绘制网络图并计算各工序的期望时间和方差。

（2）关键工序和关键路线。

（3）项目完工时间的期望值。

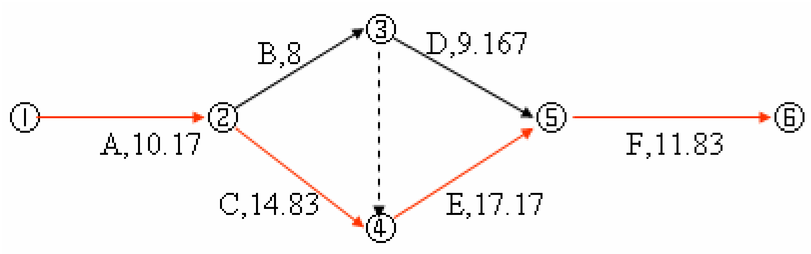
（4）假设完工期服从正态分布，项目在 56 小时内完工的概率是多少。

（5）使完工的概率为 0.98，最少需要多长时间。

表 7-20

工序	紧前工序	工序的三种时间（小时）		
		a	*m*	*b*
A	—	9	10	12
B	A	6	8	10
C	A	13	15	16
D	B	8	9	11
E	B,C	15	17	20
F	D,E	9	12	14

【解】（1）网络图



工序	紧前工序	工序的三种时间（小时）			期望值	方差
		a	*m*	*b*		
A	—	9	10	12	10.17	0.25
B	A	6	8	10	8	0.4444
C	A	13	15	16	14.83	0.25
D	B	8	9	11	9.167	0.25
E	B,C	15	17	20	17.17	0.6944
F	D,E	9	12	14	11.83	0.6944

(2)关键工序：A,C,E,F；关键路线：①→②→④→⑤→⑥

(3) 项目完工时间的期望值：10.17+14.83+17.17+11.83＝54(小时)

完工期的方差为 0.25+0.25+0.6944+0.6944＝1.8889

$$\sigma=\sqrt{1.8889}=1.37437$$

(4)X_0=56，$\Phi\left(\frac{X_0-\mu_n}{\sigma_n}\right)=\Phi\left(\frac{56-54}{1.37437}\right)=\Phi(1.4552)=0.927$

56 天内完工的概率为 0.927

(5) p=0.98，$p\{X\le X_0)=\Phi(Z)=0.98, Z=2.05$

$$X_0=Z\sigma+\mu=2.05\times1.3744+54=56.82$$

要使完工期的概率达到 0.98，则至少需要 56.82 小时。

7.6 表 7-21 给出了工序的正常、应急的时间和成本。

表 7-21

工序	紧前工序	时间(天)		成本		时间的最大缩量(天)	应急增加成本（万元/天）
		正常	应急	正常	应急		
A		15	12	50	65	3	5
B	A	12	10	100	120	2	10
C	A	7	4	80	89	3	3
D	B,C	13	11	60	90	2	15
E	D	14	10	40	52	4	3
F	C	16	13	45	60	3	5
G	E,F	10	8	60	84	2	12

（1）绘制项目网络图，按正常时间计算完成项目的总成本和工期。

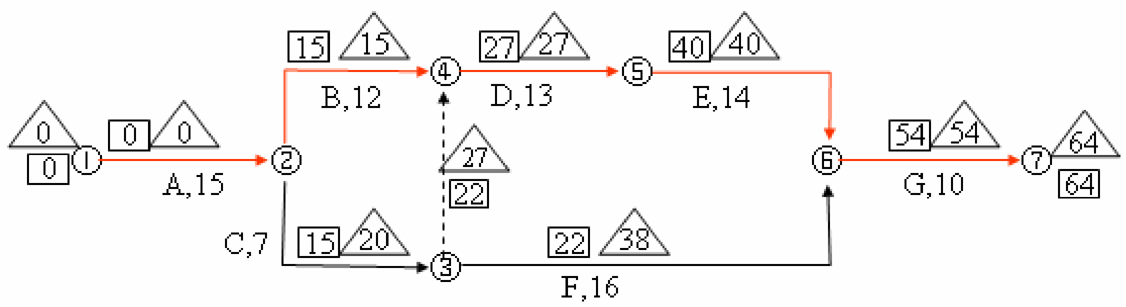
（2）按应急时间计算完成项目的总成本和工期。

（3）按应急时间的项目完工期，调整计划使总成本最低。

（4）已知项目缩短 1 天额外获得奖金 4 万元，减少间接费用 2.5 万元，求总成本最低的项目完工期。

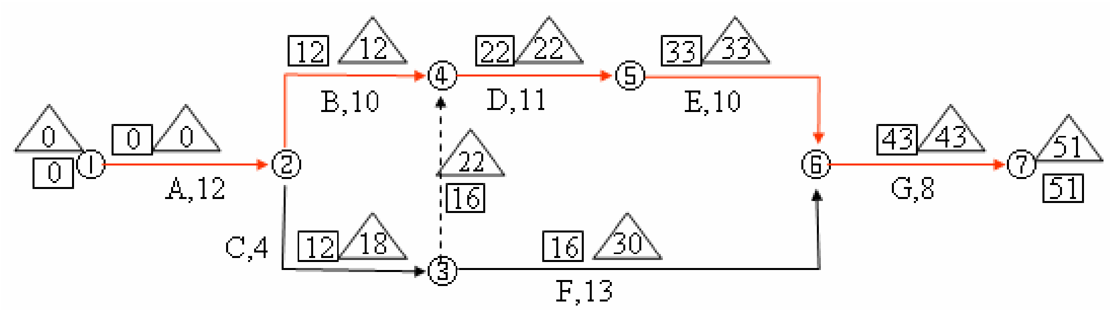
(1) 正常时间项目网络图

项目网络图



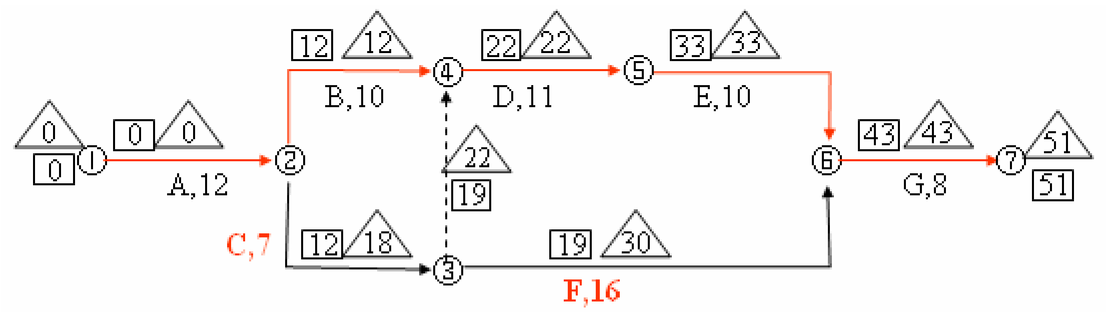
总成本为 435，工期为 64。

(2)应急时间项目网络图



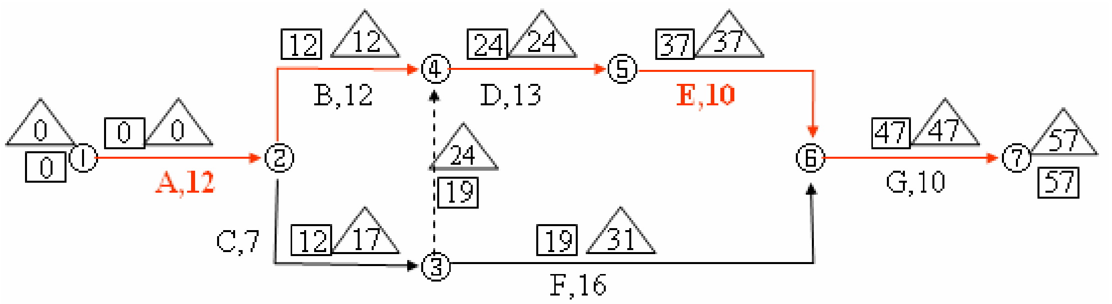
总成本为 560，工期为 51。

(3)应急时间调整



工序 C、F 按正常时间施工，总成本为 560-9-15＝536，完工期为 51。

(4) 总成本最低的项目完工期



工序 A、E 分别缩短 3 天，总成本为 435+15+12-6.5×7＝416.5，完工期为 57。

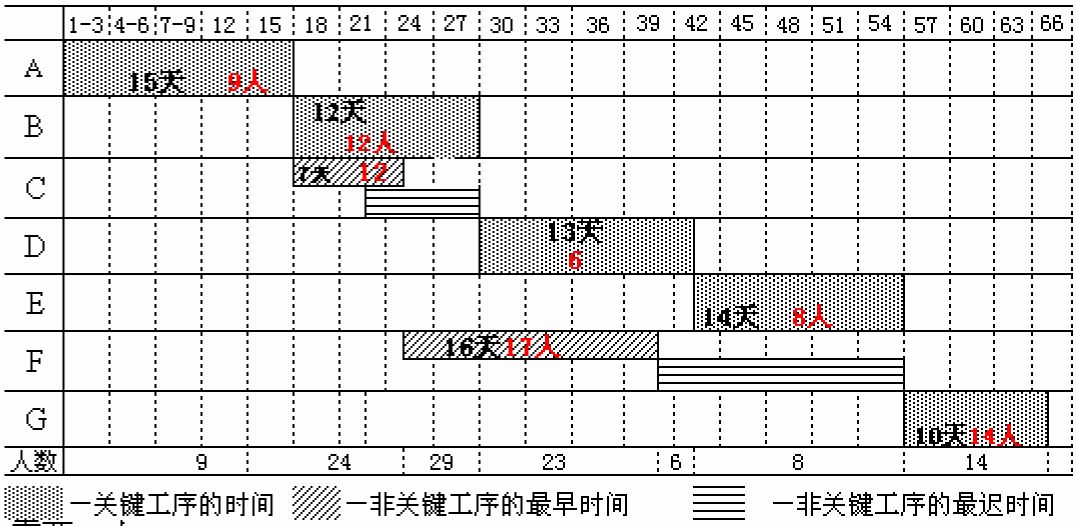
7.7 继续讨论表 7-21。假设各工序在正常时间条件下需要的人员数分别为 9、12、12、6、8、17、14 人。

（1）画出时间坐标网络图

（2）按正常时间计算项目完工期，按期完工需要多少人。

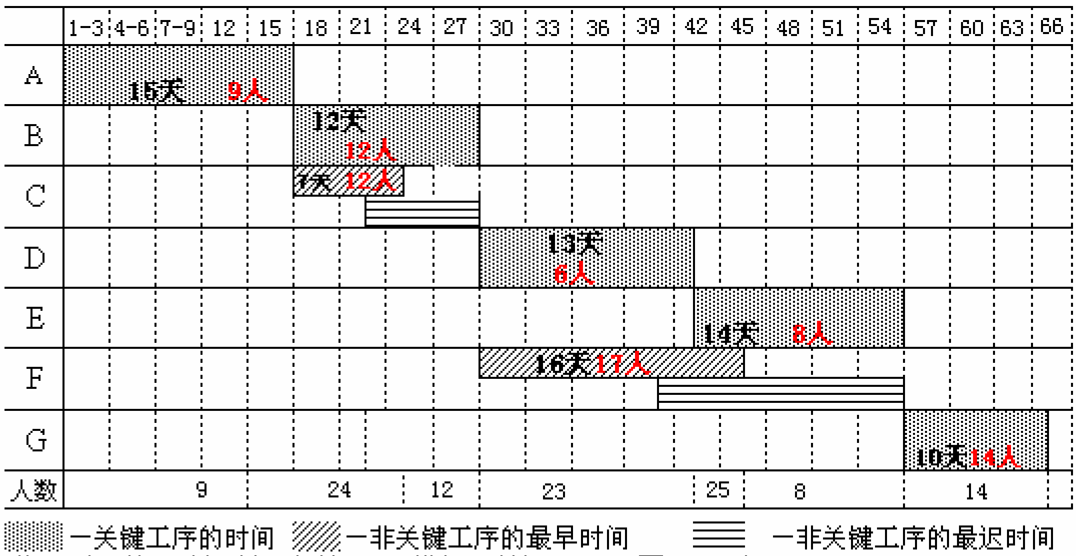
（3）保证按期完工，怎样采取应急措施，使总成本最小又使得总人数最少，对计划进行系统优化分析。

【解】（1）正常时间的时间坐标网络图



需要29人

(2) 按正常时间调整非关键工序的开工时间



将工序F的开始时间由第22天推迟到第27天，需要25人。

(3)略，参看教材。

7.8 用 WinQSB 软件求解 7.5。

7.9 用 WinQSB 软件求解 7.6。

习题八

8.1 在设备负荷分配问题中，n=10，a=0.7，b=0.85，g=15，h=10，期初有设备 1000 台。试利用公式(8.7)确定 10 期的设备最优负荷方案。

【解】将教材中 a 的下标 i 去掉。

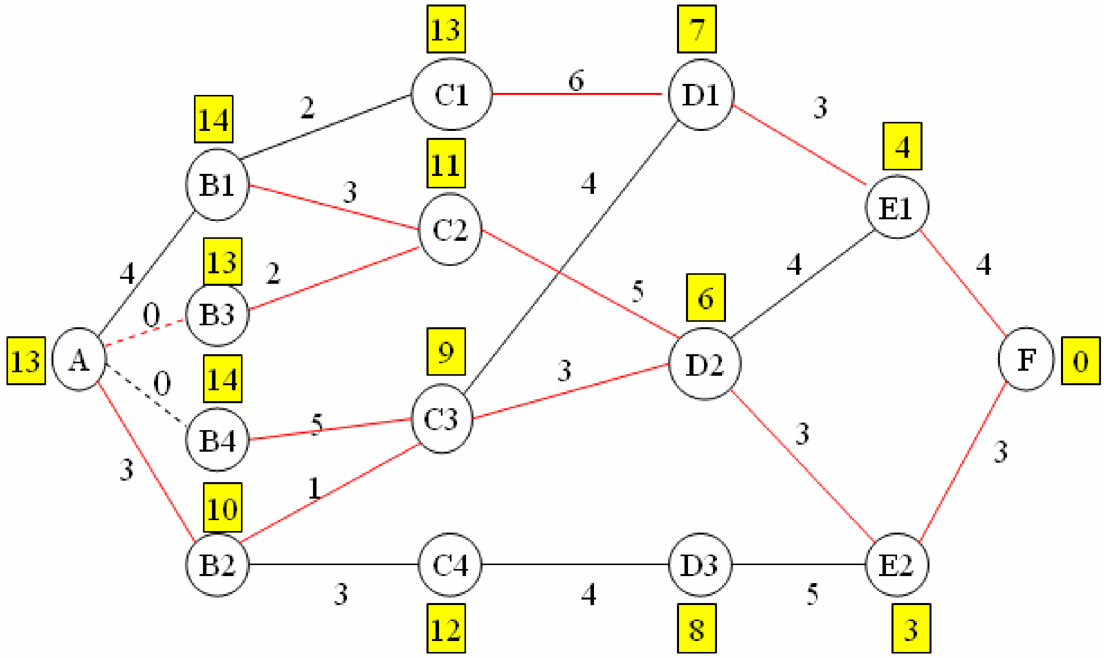
由公式 $\sum_{i=0}^{n-t-1} a^i \le \frac{g-h}{g(b-a)} \le \sum_{i=0}^{n-t} a^i$ 得

$(g-h)/g(b-a)=0.2222$，$a^0+a^1+a^2=1+0.7+0.49=2.19<2.222<a^0+a^1+a^2+a^3=2.533$，$n-t-1=2$，$t=7$，则 1~6 年低负荷运行，7~10 年为高负荷运行。各年年初投入设备数如下表。

年份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
设备台数	1000	850	723	614	522	444	377	264	184.8	129

8.2 如图 8－4，求 A 到 F 的最短路线及最短距离。

【解】A 到 F 的最短距离为 13；最短路线 A→ B2→ C3 → D2 → E2 → F 及 A→C2 → D2 → E2 → F



8.3 求解下列非线性规划

(1) $\max Z = x_1x_2x_3$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=C \\ x_j \ge 0, j=1,2,3 \end{cases}$

(2) $\min Z = x_1+x_2^2+x_3^2$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=C \\ x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{cases}$

（3） $\max Z = 2x_1+3x_2+x_3^2$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=10 \\ x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{cases}$

(4) $\max Z = x_1x_2x_3$ $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=10 \\ x_j \ge 0, j=1,2,3 \end{cases}$

(5) $\max Z = x_1x_2x_3$ $\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3 \le 10 \\ x_j \ge 0, j=1,2,3 \end{cases}$

（6） $\max Z = x_1^2+2x_1+2x_2^2+x_3$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=8 \\ x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{cases}$

【解】（1）设 $s_3=x_3$，$s_3+x_2=s_2$，$s_2+x_1=s_1=C$

则有 $x_3=s_3$，$0\le x_2\le s_2$，$0\le x_1\le s_1=C$

用逆推法，从后向前依次有

$k=3$， $f_3(s_3)=\max\limits_{x_3=s_3}(x_3)=s_3$ 及最优解 $x_3^*=s_3$

$k=2$， $f_2(s_2)=\max\limits_{0\le x_2\le s_2}[x_2 f_3(x_3)]=\max\limits_{0\le x_2\le s_2}[x_2(s_2-x_2)]=\max\limits_{0\le x_2\le s_2} h_2(s_2,x_2)$

由 $\frac{\partial h_2}{\partial x_2}=s_2-2x_2=0$，则 $x_2=\frac{1}{2}s_2$

$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x_2^2}=-2<0$，故 $x_2=\frac{1}{2}s_2$ 为极大值点。

所以 $f_2(s_2)=\frac{1}{2}s_2^2-\frac{1}{4}s_2^2=\frac{1}{4}s_2^2$ 及最优解 $x_2^*=s_2$

k=1 时， $f_1(s_1)=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}[x_1 f_2(s_2)]=\max\limits_{0\le x_1\le s_1} x_1\frac{1}{4}(s_1-x_1)^2=\max\limits_{0\le x_1\le s_1} h_1(s_1,x_1)$，

由 $\frac{\partial h_1}{\partial x_1}=\frac{1}{4}(s_1^2-4s_1x_1+3x_1^2)=0$，得 $x_1^*=\frac{1}{3}s_1$

故 $f_1(s_1)=\frac{1}{12}s_1(s_1-\frac{1}{3}s_1)^2=\frac{1}{27}s_1^3$

已知知 $x_1+x_2+x_3=C$，因而按计算的顺序推算，可得各阶段的最优决策和最优解如下

$x_1^*=\frac{1}{3}C$， $f_1(C)=\frac{1}{27}c^3$

由 $s_2=s_1-x_1^*=2C/3$， $x_2^*=\frac{1}{3}C, f_2(s_2)=\frac{1}{9}C^2$

由 $s_3=s_2-x_2^*=C/3$， $x_3^*=\frac{1}{3}C, f_3(s_3)=\frac{1}{3}C$

最优解为：

$$X=(\frac{1}{3}C,\ \frac{1}{3}C,\ \frac{1}{3}C)^T; z=\frac{1}{27}C^3$$

【解】（2）设 $s_3=x_3$, $s_3+x_2=s_2$，$s_2+x_1=s_1=C$

则有 $x_3=s_3$，$0\le x_2\le s_2$，$0\le x_1\le s_1=C$

用逆推法，从后向前依次有

k＝3， $f_3(s_3)=\min\limits_{x3=s3}(x_3)=s_3^2$ 及最优解 $x_3^*=s_3$

k＝2， $f_2(s_2)=\min\limits_{0\le x2\le s2}[x_2^2+f_3(x_3)=\min\limits_{0\le x_2\le s_2}[x_2^2+(s_2-x_2)^2]=\min\limits_{0\le x_2\le s_2} h_2(s_2,x_2)$

由 $\frac{\partial h_2}{\partial x_2}=4s_2-2x_2=0,$ 则 $x_2=\frac{1}{2}s_2$

$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x_2^2}$=4>0,故 $x_2=\frac{1}{2}s_2$ 为极小值点。

因而有 $f_2(s_2)=\frac{1}{2}s_2^2$, $x_2^*=\frac{1}{2}s_2$

k＝1 时， $f_1(s_1)=\min\limits_{0\le x_1\le s_1}[x_1+\frac{1}{2}(s_1-x_1)^2=\min\limits_{0\le x_1\le s_1} h_1(s_1,x_1)$

由 $\frac{\partial h_1}{\partial x_1}=1-s_1+x_1=0$ 知 $x_1^*=s_1-1, f_1(s_1)=s_1-\frac{1}{2}$

得到最优解

$$X=(C-1,\ 1/2,\ 1/2)^T; z=C-\frac{1}{2}$$

【解】(3) 设 $s_3=x_3$, $s_3+x_2=s_2$，$s_2+x_1=s_1=10$

则有 $x_3=s_3$，$0\le x_2\le s_2$，$0\le x_1\le s_1=10$

用逆推法，从后向前依次有

k＝3 时， $f_3(s_3)=\max\limits_{x_3=s_3}(x_3)=s_3^2$ 及最优解 $x_3=s_3$

k＝2 时， $f_2(s_2)=\max\limits_{0\le x_2\le s_2}[3x_2+(s_2-x_2)^2]=\max\limits_{0\le x_2\le s_2} h_2(s_2,x_2)$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_2}=3-2s_2+2x_2=0\text{时}x_2=-\frac{3}{2}+s_2$$

而 $\dfrac{\partial^2 h_2}{\partial x_2^2}=2>0,\text{故}x_2=-\dfrac{3}{2}+s_2$不是一个极大值点。

讨论端点：当 x_2=0 时 $f_2(s_2)=s_2^2$， x_2= s_2 时 $f_2(s_2)=3s_2$

如果 s_2>3 时，$f_2(s_2)=s_2^2$

k=1 时，$f_1(s_1)=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}[2x_1+(s_1-x_1)^2]=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}h_1(s_1,x_1)$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1}=2-2s_1+2x_1=0\text{时}x_1=-1+s_1$$

$\dfrac{\partial^2 h_1}{\partial x_1^2}=2>0,\text{故}x_1=-1+s_2$不是一个极大值点

同理有, x_1=0, f_1（s_1）= s_1^2= 100，x_1= s_1, f_1（s_1）= $2s_1$= 20 (舍去)

得到最优解

$$X=(0,0,10);z=100$$

【解】(4) 设 s_3=x_3 ,$2s_3+4x_2$=s_2，s_2+x_1=s_1=10

则有 x_3= s_3 ，$0\le x_2\le s_2/4$，$0\le x_1\le s_1$=10

用逆推法，从后向前依次有

k=1， $f_3(s_3)=\max\limits_{x_3=s_3}(x_3)=s_3$ 及最优解 x_3*=s_3

k=2， $f_2(s_2)=\max\limits_{0\le x_2\le s_2/4}[x_2(\frac{1}{2}s_2-2x_2)=\max\limits_{0\le x_2\le s_2/4}h_2(s_2,x_2)$

由 $\dfrac{\partial h_2}{\partial x_2}=\dfrac{1}{2}s_2-4x_2=0$,则 $x_2=\dfrac{1}{8}s_2$

$\dfrac{\partial^2 h_2}{\partial x_2^2}=-4<0$,故 $x_2=\dfrac{1}{8}s_2$ 为极大值点。

则 $f_2(s_2)=\dfrac{s_2^2}{32}$ 及最优解 $x_2^*=s_2/8$

k=1， $f_1(s_1)=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}[\frac{1}{32}x_1(s_1-x_1)^2]=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}h_1(s_1,x_1)$

$\dfrac{\partial h_1}{\partial x_1}=\dfrac{1}{32}(s_1^2-4s_1x_1+3x_1^2)=0,x_1^*=\dfrac{1}{3}s_1$，故 $f_1(s_1)=\dfrac{1}{216}s_1^3$

得到最优解

$$X=(10/3,\ \ 5/6,\ \ 5/3)^T;z=125/27$$

【解】(5) 按问题中变量的个数分为三个阶段 s_1 ，s_2 ，s_3 ，且 $s_3\le 10$，x_1，x_2，x_3 为各阶段的决策变量，各阶段指标函数相乘。

设 $s_1=2x_1$, $s_1+4x_2=s_2$，$s_2+x_3=s_3\le 10$，则有 x_1= $s_1/2$ ，$0\le x_2\le s_2/4$，$0\le x_3\le s_3$=10

用顺推法，从前向后依次有

k=1， $f_1(s_1)=\max\limits_{x_1=s_1/2}(x_1)=\dfrac{s_1}{2}$ 及最优化解 x_1*=$s_1/2$

k=2， $f_2(s_2)=\max\limits_{0\le x_2\le s_2/4}[\frac{1}{2}x_2(s_2-4x_2)=\max\limits_{0\le x_2\le s_2/4}h_2(s_2,x_2)$

由 $\frac{\partial h_2}{\partial x_2}=\frac{1}{2}s_2-4x_2=0$,则 $x_2^*=\frac{1}{8}s_2$

$\frac{\partial^2 h_2}{\partial x_2^2}=-4<0$,故 $x_2=\frac{1}{8}s_2$ 为极大值点。则 $f_2(s_2)=\frac{1}{32}s_2^3$

k＝3， $f_3(s_3)=\max\limits_{0\le x_3\le s_3}[\frac{1}{32}x_3(s_3-x_3)^2]=\max\limits_{0\le x_3\le s_3}h_3(s_3,x_3)$

由 $\frac{\partial h_3}{\partial x_3}=\frac{1}{32}(s_3^2-4s_3x_3+3x_3^2)=0,\ x_3^*=\frac{1}{3}s_3$

故 $f_3(s_3)=\frac{1}{216}s_3^3$，由于 $s_3\le10$，则 $s_3=10$ 时取最大值，x_3＝10/3，$s_2=s_3-x_3$＝20/3，x_2＝5/6，$s_1=s_2-4x_2$＝10/3，x_1＝5/3

得到最优解

$$X=(5/3,\ \ 5/6,\ \ 10/3)^T;z=125/27$$

【解】（6） 设 $s_1=x_1$, $s_1+x_2=s_2$，$s_2+x_3=s_3=8$

k＝1， $f_1(s_1)=\max\limits_{x_1=s_1}(x_1^2+2x_1)=s_1^2+2s_1$ 及最优化解 $x_1^*=s_1$

k＝2， $f_2(s_2)=\max\limits_{0\le x_2\le s_2}[2x_2^2+(s_2-x_2)^2+2(s_2-x_2)]=\max\limits_{0\le x_2\le s_2}h_2(s_2,x_2)$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x_2}=6x_2-2s_2-2,\ \frac{\partial^2 h_2}{\partial x_2^2}=6>0$$

$x_2^*=0$ 时，f_2（s_2）$=s_2^2+2s_2$, $x_2^*=s_2$ 时，f_2（s_2）$=2s_2^2$

故 $f_2(s_2)=\max\{s_2^2+2s_2,2s_2^2\}$

k＝3，

①当 $x_2^*=0$ 时， $f_3(s_3)=\max\limits_{0\le x3\le s3}[x_3+(s_3-x_3)^2+2(s_3-x_3)]=\max\limits_{0\le x3\le s3}h_3(s_3,x_3)$

同样得 $x_3^*=0$ 时 ，f_3（s_3）$=s_3^2+2s_3$

$x_3^*=s_3$ 时，f_3（s_3）$=s_3$

所以， f_3（s_3）$=s_3^2+2s_3=80$

②当 $x_2^*=s_2$ 时，f_3（s_3）$=\max\limits_{0\le x3\le s3}$ [x_3+2（s_3-x_3）^{2}]

同样得 $x_3^*=0$ 时 ，f_3（s_3）$=2s_3^2=128$

$x_3^*=s_3$ 时，f_3（s_3）$=s_3=8$

所以， f_3（s_3）$=2s_3^2=128$

最优解为

$$X=(0,8,0);z=128$$

8.4 用动态规划求解下列线性规划问题。

$$\max Z=2x_1+4x_2$$

$$\begin{cases}2x_1+x_2\le6\\x_1\le2\\x_2\le4\\x_1,x_2\ge0\end{cases}$$

【解】设 $s_2=x_2$,$s_2+2x_1=s_1\le6$

则有 $0\le x_2=s_2\le4$，$0\le x_1\le s_1/2$

用逆推法，从后向前依次有

$f_2(s_2)=4s_2$ 及最优解 $x_2^*=s_2$

$$f_1(s_1)=\max_{0\le x_1\le s_1/2}[2x_1+f_2(s_2)]=\max_{0\le x_1\le s_1/2}[4s_1-6x_1]$$

由 $s_2=s_1-2x_1\leqslant 4$，$s_1\le 6$，取 $s_1=6$，$f_1(s_1)=\max\limits_{0\le x_1\le s_1/2}[24-6x_1]$

又 $1\leqslant x_1\leqslant 2$，取 $x_1=1$，$f_1(s_1)=18$

最优解

$$X=(1,4)^T;\ z=18$$

8.5 10 吨集装箱最多只能装 9 吨，现有 3 种货物供装载，每种货物的单位重量及相应单位价值如表 8.24 所示。应该如何装载货物使总价值最大。

表 8.24

货物编号	1	2	3
单位加工时间	2	3	4
单位价值	3	4	5

【解】设装载第 I 种货物的件数为 x_i（ $i=1,2,3$）则问题可表为：

$$\max\ z=3x_1+4x_2+5x_3$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3\le 9\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\text{且为整数}\end{cases}$$

利用背包问题的前向动态规划计算，建立动态规划模型。由于决策变量离散型值，所以可用列表法求解。当 R=1 时，$f_1(s_2)=\max\limits_{0\le x_1\le s_2/2}(3x_1)$。计算结果如下：

s_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(s_2)$	0	0	3	3	6	6	9	9	12	12
x_1^*	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4

当 R=2 时，$f_2(s_3)=\max\limits_{0\le x1\le s2/4}[4x_2+f_1(s_3-3x_2)]$

计算结果如下：

s_3	0	1	2	3		4		5		6			7			8			9			
x_2	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	3
C_2+f_2	0	0	3	3	4	6	4	6	7	9	7	8	9	10	8	12	10	11	12	13	11	12
$f_2(s_3)$	0	0	3		4	6			7	9				10		12				13		
x_2^*	0	0	0		1	0			1	0				1		0				1		

当 R=3 时，$f_3(9)=\max\limits_{0\le x3\le 2}[5x_3+f_2(9-4x_3)]$ （x_3 为整数）$=\max\limits_{0\le x2\le 2}[f_2(9),\ 5+f_2(5),\ 10+f_2(1)]=\max[13,\ 12,\ 10]=13$

8.6 有一辆货车载重量为 10 吨 ，用来装载货物 A、B 时成本分别为 5 元/吨和 4 元/吨。现在已知每吨货物的运价与该货物的重量有如下线性关系：

A：$P_1=10-2x_1$ ，B：$P_2=12-3x_2$

其中 x_1 、x_2 分别为货物 A、B 的重量。如果要求货物满载，A 和 B 各装载多少，才能使总利润最大

【解】将原题改为 A：$P_1=15-x_1$ ，B：$P_2=18-2x_2$

由题意可得各种货物利润函数为

$$g_1(x_1)=(15-x_1-5)x_1=10x_1-x_1^2$$

$$g_2(x_2)=(18-2x_2-4)x_2=14x_2-2x_2^2$$

原问题的数学模型归结为

$$\max\ z=(10x_1-x_1^2)+(14x_2-2x_2^2)$$
$$\begin{cases}x_1+x_2=10\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

最优解：$x_1=6$，$x_2=4$；z＝48

8.7 现有一面粉加工厂，每星期上五天班。生产成本和需求量见表 8-25。

表 8-25

星期(k)	1	2	3	4	5
需求量(d_k) 单位：袋	10	20	25	30	30
每袋生产成本(c_k)	8	6	9	12	10

面粉加工没有生产准备成本，每袋面粉的存储费为 h_k＝0.5 元/袋，按天交货，分别比较下列两种方案的最优性，求成本最小的方案。

（1）星期一早上和星期五晚的存储量为零，不允许缺货，仓库容量为 S=40 袋；

（2）其它条件不变，星期一初存量为 8。

【**解**】动态规划求解过程如下：

阶段 k：日期，k=1,2,…,6

状态变量 s_k：第 k 天早上（发货以前）的冷库存量

决策变量 x_k：第 k 天的生产量

状态转移方程：$s_{k+1}=s_k+x_k-d_k$；

决策允许集合：$D_k(s_k)=\{x_k|x_k\ge 0, 0\le s_k+x_k-d_k\le 40\}$

阶段指标： $v_k(s_k，x_k)=c_kx_k+0.5s_k$

终端条件：$f_6(s_6)=0$, $s_6=0$;

递推方程：

$$\begin{aligned}f_k(x_k)&=\min_{x_k\in D_k(s_k)}\{v_k(s_k,x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}\\&=\min_{x_k\in D_k(s_k)}\{v_k(s_k,x_k)+f_{k+1}(s_k+x_k-d_k)\}\end{aligned}$$

当 k=5 时，因为 s_6=0，有 $s_6=s_5+x_5-d_5=0$， $x_5=15-s_5$，

由于 $s_5\le 15$，

$$\begin{aligned}f_5(s_5)&=\min_{x_5\in 15-s_5}\{10x_5+0.5s_5\}\\&=150-9.5s_5,\quad x_5^*=15-s_5\end{aligned}$$

k=4 时，$0\le s_5\le 15$，$0\le s_4+x_4-30\le 15$, 有 $30-s_4\le x_4\le 45-s_4$，

$$\begin{aligned}f_4(s_4)&=\min_{x_4\in D_4(s_4)}\{12x_4+0.5s_4+f_5(s_5)\}\\&=\min_{x_4\in D_4(s_4)}\{2.5x_4-9s_4+435\}\\&=\begin{cases}-11.5s_4+510 & s_4\le 30, x_4^*=30-s_4\\ -9s_4+435 & 40\le s_4\le 30, x_4^*=0\end{cases}\end{aligned}$$

k=3 时，当 $0\le s_4\le 30$ 时，$0\le s_3+x_3-25\le 30$，得

$$25-s_3\le x_3\le 55-s_3$$

有 $D_3(s_3)=\{x_3|\max[0.25-s_3]\le x_3\le 55-s_3\}$

$$
\begin{aligned}
f_3(s_3) &= \min_{x_3 \in D_3(s_3)} \{9x_3 + 0.5s_3 + f_4(s_4)\} \\
&= \min_{x_3 \in D_3(s_3)} \{9x_3 + 0.5s_3 - 11.5s_4 + 510\} \\
&= \min_{x_3 \in D_3(s_3)} \{-2.5x_3 - 11s_3 + 797.5\} \\
&= -8.5s_3 + 660 \qquad\qquad \text{取上界：} x_3^* = 55 - s_3
\end{aligned}
$$

当 $30 \le s_4 \le 40$ 时，$x_4 = 0, 30 \le s_3 + x_3 - 25 \le 40$，有

$$D_3(s_3) = \{x_3 \mid 55 - s_3 \le x_3 \le 65 - s_3\}$$

$$
\begin{aligned}
f_3^{(1)}(s_3) &= \min_{x_3 \in D_3(s_3)} \{9x_3 + 0.5s_3 + f_4(s_4)\} \\
&= \min_{x_3 \in D_3(s_3)} \{9x_3 + 0.5s_3 - 9s_4 + 435\} \\
&= \min_{x_3 \in D_3(s_3)} \{-8.5x_3 + 210\}, \quad x_3^* \text{取任意值}
\end{aligned}
$$

显然此决策不可行。

当 k=2 时，由 $0 \le s_4 \le 30, 0 \le s_3 \le 25$，$0 \le s_2 + x_2 - 20 \le 25$, x_2 的决策允许集合为

$$D_2(s_2) = \{x_2 \mid \max[0, 20 - s_2] \le x_2 \le 45 - s_2\}$$

$$
\begin{aligned}
f_2(s_2) &= \min_{x_2 \in D_2(s_2)} \{6x_2 + 0.5s_2 + 660 - 8.5s_2\} \\
&= \min_{x_2 \in D_2(s_2)} \{-2.5x_2 - 8s_2 + 830\} \\
&= -5.5s_2 + 717.5 \qquad\qquad \text{取上界：} x_2^* = 45 - s_2
\end{aligned}
$$

当 k=1 时，由 $0 \le s_2 \le 20, 0 \le s_1 + x_1 - 10 \le 20$，则 x_1 的决策允许集合为

$$D_1(s_1) = \{x_1 \mid \max[0, 10 - s_1] \le x_1 \le 30 - s_1\}$$

$$
\begin{aligned}
f_1(s_1) &= \min_{x_1 \in D_1(s_1)} \{8x_1 + 0.5s_1 + 717.5 - 5.5s_2\} \\
&= \min_{x_1 \in D_1(s_1)} \{2.5x_1 - 5s_1 + 772.5\} \\
&= 797.5
\end{aligned}
$$

因为 $s_1 = 0, \quad x_1 = 10,$

$$
\begin{aligned}
&s_2 = 10 - 10 = 0, && x_2 = 45 - s_2 = 45, \\
&s_3 = s_2 + x_2 - 20 = 25, && x_3 = 55 - s_3 = 30, \\
&s_4 = s_3 + x_3 - 25 = 30, && x_4 = 30 - s_4 = 0, \\
&s_5 = s_4 + x_4 - 30 = 0, && x_5 = 15 - s_5 = -15.
\end{aligned}
$$

(2)期初存储量 s_1=8, 与前面计算相似，x_1=2.

Min Z=772.5+2.5x_1-5s_1=737.5

则总成本最小的方案是第二种。

8.8 某企业计划委派 10 个推销员到 4 个地区推销产品，每个地区分配 1~4 个推销员。各地区月收益（单位：10 万元）与推销员人数的关系如表 8－26 所示。

表 8-26

人数 \ 地区	A	B	C	D
1	4	5	6	7
2	7	12	20	24
3	18	23	23	26
4	24	24	27	30

企业如何分配 4 个地区的推销人员使月总收益最大。

【解】设 x_k 为第 k 种货物的运载重量，该问题的静态规划模型为

$$\max Z = v_1(x_1)+v_2(x_2)+v_3(x_3)+v_4(x_4)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=8 \\ x_j=0,2,4,6,8 \end{cases}$$

利用图表法：

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	0	0	8	30
0	0	2	6	32
0	2	0	6	31
0	0	8	0	27
0	8	0	0	24
0	0	6	2	30
0	2	6	0	28
0	2	2	4	35
0	4	0	4	36
0	0	4	4	44
0	2	4	2	32
0	4	4	0	32
0	4	2	2	25
2	0	0	6	30
2	0	6	0	27
2	6	0	0	27
2	2	0	4	33
2	0	2	4	34
2	2	4	0	29
2	0	4	2	31
2	4	2	0	22
2	4	0	2	23
4	0	0	4	31
4	0	4	0	27
4	4	0	0	19
4	2	0	2	19
4	0	2	2	20
4	2	2	0	18
6	0	0	2	25
6	0	2	0	24
6	2	0	0	23
8	0	0	0	24

故最优解为 $x_1=0, x_2=0, x_3=x_4=4$

则 max Z=44

8.9 有一个车队总共有车辆 100 辆，分别送两批货物去 A、B 两地，运到 A 地去的利润与车辆数目满足关系 100x ，x 为车辆数，车辆抛锚率为 30%，运到 B 地的利润与车辆数 y 关系为 80y，车辆抛锚率为 20%，总共往返 3 轮。请设计使总利润最高的车辆分配方案。

【解】动态规划求解过程如下。

阶段 k：共往数 k=1,2,3,4，k=1 表示第一趟初，k=4 表示第三趟末（即第六年初）；

状态变量 s_k：第 k 趟初完好的车辆数（k=1,2,3,4），也是第 $k-1$ 趟末完好的车辆数，其中 s_4 表示第三趟末的完好车辆数。

决策变量 x_k：第 k 年初投入高负荷运行的机器数；
状态转移方程：$s_{k+1}=0.7x_k+0.8(s_k-x_k)$
决策允许集合：$D_k(s_k)=\{x_k|0\le x_k\le s_k\}$
阶段指标：$v_k(s_k,x_k)=100x_k+80(s_k-x_k)$
终端条件：$f_4(s_4)=0$
递推方程：

$$f_k(s_k)=\max_{x_k\in D_k(s_k)}\{v_k(s_k,x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\}$$

$$=\max_{0\le x_k\le s_k}\{100x_k+80(s_k-x_k)+f_{k+1}[0.7x_k+0.8(s_k-x_k)]\}$$

$f_k(x_k)$表示第 k 趟初分配 x_k 辆车到 A 地，到第 3 趟末的最大总运价为

$$f_3(s_3)=\max_{0\le x_3\le s_3}\{100x_3+80(s_3-x_3)+f_4(s_4)\}$$

$$=\max_{0\le x_3\le s_3}\{20x_3+80s_3\}=100s_3 \qquad x_3^*=s_3\text{最优}$$

$$f_2(s_2)=\max_{0\le x_2\le s_2}\{100x_2+80(s_2-x_2)+f_3(s_3)\}$$

$$=\max_{0\le x_2\le s_2}\{10x_2+160s_2\}=170s_2 \qquad x_2^*=s_2\text{最优}$$

$$f_1(s_1)=\max_{0\le x_1\le s_1}\{100x_1+80(s_1-x_1)+f_2(s_2)\}$$

$$=\max_{0\le x_1\le s_1}\{3x_1+216s_1\}=219s_1 \qquad x_1^*=s_1\text{最优}$$

因为 $s_1=100$，最大总运价 $f_1(s_1)=21900$ 元

8.10 系统可靠性问题。一个工作系统由 n 个部件串联组成，见图 8-5。只要有一个部件失灵，整个系统就不能工作。为提高系统的可靠性，可以增加部件的备用件。例如，用 5 个部件 1 并联起来作为一个部件与部件 2 串联，如果其中一个部件失灵其它 4 个部件仍能正常工作。由于系统成本（或重量、体积）的限制，应如何选择各个部件的备件数，使整个系统的可靠性最大。

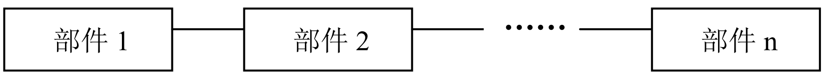


图 8-5

假设部件 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 上装有 x_i 个备用件，该部件正常工作的概率为 $p_i(x_i)$。设装一个部件 i 的备用件的成本为 c_i，要求备件的总费用为 C。那么该问题模型为：

$$\max P=\prod_{i=1}^{n}p_i(x_i)$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\le C\\ x_j\ge 0\text{并且为整数，}i=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{8.8}$$

同理，如果一个复杂的工作系统由 n 个部件并联组成的，只有当 n 个部件都失灵，整个系统就不能工作，见图 8-6。

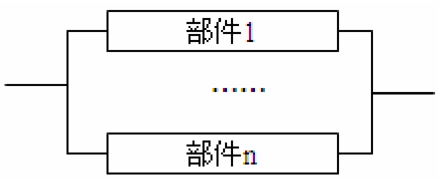


图 8-6

假设 $p_i(x_i)$ 为第 i 个部件失灵的概率，为提高系统的可靠性，可以增加部件的备用件。由于系统成本（或重量、体积）的限制，应如何选择各个部件的备件数，使整个系统的可靠性最大。系统的可靠性为 $1-\prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$，则该问题的数学模型归结为

$$\min P=\prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le C \\ x_j \ge 0\text{并且为整数}，\ i=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{8.9}$$

利用式(8.8)或（8.9）求解下列问题。

（1）工厂设计的一种电子设备，其中有一系统由三个电子元件串联组成。已知这三个元件的价格和可靠性如表 8-27 所示，要求在设计中所使用元件的费用不超过 200 元，试问应如何设计使设备的可靠性达到最大。

表 8-27

元件	单价	可靠性
1	40	0.95
2	35	0.8
3	20	0.6

（2）公司计划在 4 周内必须采购一批原料，而估计在未来的 4 周内价格有波动，其浮动价格和概率根据市场调查和预测得出，如表 8-28 所示，试求在哪一周以什么价格购入，使其采购价格的期望最小，并求出期望值。

表 8-28

周	单　价	概　率
1	550	0．1
2	650	0．25
3	800	0．3
4	900	0．35

【解】（1）数学模型为

$$\max Z=(1-0.05^{x_1})(1-0.2^{x_2})(1-0.4^{x_3})$$

$$\begin{cases}40x_1+35x_2+20x_3\le 200\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\text{并且为整数}\end{cases}$$

最优解 X=(1，2，4)；可靠性 Z=0.888653，总费用 190。

（2）

习题九

9.1 某蛋糕店有一服务员，顾客到达服从 λ=30 人/小时的 Poisson 分布，当店里只有一个顾客时，平均服务时间为 1.5 分钟，当店里有 2 个或 2 个以上顾客时，平均服务时间缩减至 1 分钟。两种服务时间均服从负指数分布。试求：

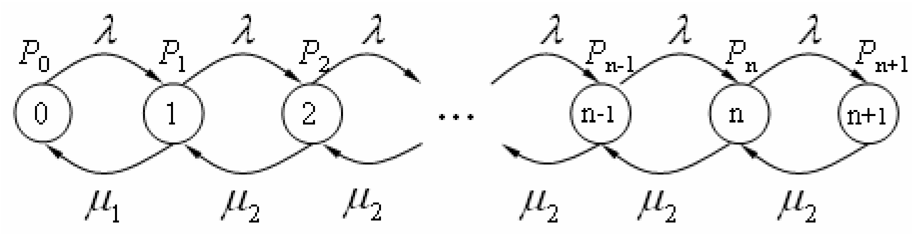
（1）此排队系统的状态转移图；

（2）稳态下的概率转移平衡方程组；

（3）店内有 2 个顾客的概率；

（4）该系统的其它数量指标。

【解】（1）此系统为 $[M/M/1]:[\infty/\infty/FCFS]$ 排队模型，该系统的状态转移图如下：



（2）由转移图可得稳态下的差分方程组如下：

$$\begin{cases}\lambda P_0 = \mu_1 P_1 \\ \lambda P_0 + \mu_2 P_2 = (\mu_1 + \lambda) P_1 \\ \lambda P_1 + \mu_2 P_3 = (\mu_2 + \lambda) P_2 \\ \lambda P_{n-1} + \mu_2 P_{n+1} = (\mu_2 + \lambda) P_n \end{cases}$$

$$\therefore P_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} P_0 \qquad P_2 = \frac{\lambda^2}{\mu_1 \mu_2} P_0 \qquad P_3 = \frac{\lambda^3}{\mu_1 \mu_2^2} P_0 \qquad P_n = \frac{\lambda^n}{\mu_1 \mu_2^{n-1}} P_0$$

（3）已知$\lambda = 30$（人/小时）$\mu_1 = \frac{1}{\frac{1.5}{60}} = 40$（人/小时）$\mu_2 = \frac{1}{\frac{1}{60}} = 60$（人/小时）

由$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$得

$$P_0[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu_1 \mu_2^{n-1}}] = 1$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\frac{\lambda}{\mu_1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu_2}} \right]^{-1}$$

令 $\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}, \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$，有

$$P_0 = [1 + \frac{\rho_1}{1 - \rho_2}]^{-1} = [1 + \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2}}]^{-1} = 0.4$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu_1 \mu_2^{n-1}} p_0 = \rho_1 \rho_2^{n-1} p_0$$

则 $P_2 = \rho_1 \rho_2 P_0 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times 0.4 = 0.15$

（4）系统中的平均顾客数（队长期望值）

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho_1 \rho_2^{n-1} P_0 = \rho_1 P_0 (1 + 2\rho_2 + 3\rho_3 + ...)$$

$$= \rho_1 P_0 \frac{1}{(1 - \rho_2)^2} = \frac{3}{4} \times 0.4 \times \frac{1}{(1 - 0.5)^2} = 1.2(\text{人})$$

在队列中等待的平均顾客数（队列长期望值）

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n-\sum_{n=1}^{\infty}P_n$$

$$=L-\rho_1P_0(1+\rho_2+\rho_2^2+...+\rho_2^{n-1}+...)=L-\frac{\rho_1p_0}{1-\rho_2}$$

$$=1.2-\frac{\frac{3}{4}\times 0.4}{1-\frac{1}{2}}=0.4(\text{人})$$

系统中顾客逗留时间

$$W=\frac{L}{\lambda}=\frac{1.2}{30}=0.04(\text{小时})$$

系统中顾客等待时间

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{0.4}{30}=0.013(\text{小时})$$

9.2 某商店每天开 10 个小时，一天平均有 90 个顾客到达商店，商店的服务平均速度是每小时服务 10 个，若假定顾客到达的规律是服从 Poisson 分布，商店服务时间服从负指数分布，试求：

（1）在商店前等待服务的顾客平均数。

（2）在队长中多于 2 个人的概率。

（3）在商店中平均有顾客的人数。

（4）若希望商店平均顾客只有 2 人，平均服务速度应提高到多少。

【**解**】此题是属于$[M/M/1]:[\infty/\infty/FCFS]$系统，其中：

λ=9（个/小时）　μ=10(个/小时)　$\rho=\lambda/\mu$=9/10

(1) $L_q=\rho^2/(1-\rho)=8.1$（个）

(2) $P(N>2)=\rho^3=0.729$

(3) $L=\rho/(1-\rho)=9$（个）

(4) $L=\lambda/(\mu-\lambda)=2$

$$\mu=\frac{\lambda+2\lambda}{2}=\frac{9+18}{2}=13.5(\text{个/小时})$$

9.3 为开办一个小型理发店，目前只招聘了一个服务员，需要决定等待理发的顾客的位子应设立多少。假设需要理发的顾客到来的规律服从泊松流，平均每 4 分钟来一个，而理发的时间服从指数分布，平均每 3 分钟 1 人。如果要求理发的顾客因没有等待的位子而转向其他理发店的人数占要理发的人数比例为 7%时，应该安放几个位子供顾客等待？

【**解**】此题属于$[M/M/1]:[N/\infty/FCFS]$模型,依题意知：

λ＝1/4，μ=1/3，$\rho=\lambda/\mu$=3/4

解出L及L_q的含N的表达式，令

$L/L_q=7\%$

解得$N\approx$1.67

9.4 某服务部平均每小时有 4 个人到达，平均服务时间为 6 分钟。到达服从 Poisson 流，服务时间为负指数分布。由于场地受限制，服务部最多不能超过 3 人，求：

（1）服务部没有人到达的概率；

（2）服务部的平均人数；

（3）等待服务的平均人数；
（4）顾客在服务部平均花费的时间；
（5）顾客平均排队的时间。

【解】依题意，这是$[M/M/1]:[N/\infty/FCFS]$排队系统。其中：

N=3，λ=4，μ=10，$\rho=\lambda/\mu$=0.4

（1）$P_0=\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$=（1-0.4）/[1-（0.4）^{4}]=0.6158

（2）$L=0.5616$（人）

（3）$L_q=0.1616$（人）

（4）$W=0.1404$（小时）

（5）$W_q=0.0404$（小时）

9.5 某车间有 5 台机器，每台机器连续运转时间服从负指数分布，平均连续运转时间为 15 分钟。有一个修理工，每次修理时间服从负指数分布，平均每次 12 分钟。求该排队系统的数量指标，P_0，L_q，L，W_q，W 和 P_5。

【解】由题意知，每台机器每小时出故障的平均次数服从泊松分布，故该排队系统为$[M/M/1]:[\infty/m/FCFS]$系统，其中：

λ=1/15，m=5，μ=1/12，$\rho=\lambda/\mu$=0.8

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{5}\frac{5!}{(5-k)!}\rho^k\right]^{-1}=0.0073$$

$$L_q=5-\frac{1/15+1/12}{1/15}(1-0.0073)=2.766\text{（台）}$$

$$L=L_q+(1-P_0)=3.759\text{（台）}$$

$$W_q=\frac{L_q}{(5-L)\lambda}=33.43\text{（分钟）}$$

$$W=W_q+\frac{1}{\mu}=45.43\text{（分钟）}$$

$$P_5=\frac{m!}{(m-5)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5P_0=\frac{5!}{0!}(0.8)^5(0.0073)=0.287$$

9.6 证明：一个$[M/M/2]:[\infty/\infty/FCFS]$的排队系统要比两个$[M/M/1]:[\infty/\infty/FCFS]$的排队系统优越。试从队长$L$这个指标证明。

【证】设$[M/M/1]:[\infty/\infty/FCFS]$的服务强度为$\rho$，则$[M/M/2]:[\infty/\infty/FCFS]$服务强度为$2\rho$。则

两个单服务台的系统 $L_1=\dfrac{\rho}{1-\rho}=\dfrac{2\rho}{1-\rho}$

两个服务台的系统 $P_0=\dfrac{1}{1+2\rho+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\rho}\times(2\rho)^2}=\dfrac{1-\rho}{1+\rho}$

队长 $L_2=2\rho+\dfrac{(2\rho)^2\times\rho}{2\times(1-\rho)^2}\times\dfrac{1-\rho}{1+\rho}=\dfrac{2\rho}{1-\rho^2}$

由于$0<\rho<1$，$\therefore L_1=\dfrac{2\rho}{1-\rho}>L_2=\dfrac{2\rho}{1-\rho^2}$

即系统 1 的队长大于系统 2 的队长，故单队 2 服务台的系统优于 2 队单服务对的系统。

9.7 某博物馆有 4 个大小一致的展厅。来到该博物馆参观的观众服从泊松分布，平均 96 人/小时。观众大致平均分散于各展厅，且在各展厅停留的时间服从$1/\mu=15$分钟的负指数分布，在参观完 4 个展厅后离去。问该博物馆的每个展厅应按多大容量设计，使在任何时间内观众超员的概率小于 5%。

【解】此问题中服务员数量$s=\infty$，属于$M/M/\infty$系统，每个展厅内：

$\lambda=\dfrac{96}{4}=24$人/小时，$\mu=\dfrac{60}{15}=4$人/小时，$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=6$

$$P_i=\frac{\rho^i}{i!}e^{-\rho} \qquad (i=0,1,2,\Lambda)$$

要确定展厅的容量n，使观众超过n的概率小于 0.05，即有

$$\sum_{i=n}^{\infty}\frac{6^i}{i!}e^{-6}\le 0.05$$

由泊松累积分布表查得$n\ge 10$。

故每个展厅应至少容纳 10 人，使在任何时间内观众超员的概率小于 5%。

9.8 两个技术程度相同的工人共同照管 5 台自动机床，每台机床平均每小时需照管一次，每次需一个工人照管的平均时间为 15 分钟。每次照管时间及每相继两次照管间隔都相互独立且为负指数分布。试求每人平均空闲时间，系统四项主要指标和机床利用率。

【解】由题意可知，该系统为$[M/M/s]:[\infty/m/FCFS]$系统，且：

$s=2$，$m=5$，$\lambda=1$台/小时，$\mu=60/15=4$台/小时，$s\rho/m=\lambda/\mu=1/4$，$\rho/m=\lambda/\mu s=1/8$。

工人空闲率：

$$P_0=\left(1+5\times0.25+5\times4/2\times0.25^2+5!\times0.125^3+5!\times2\times0.125^4+5!\times2\times0.125^5\right)^{-1}$$
$$=0.316$$

$$P_n=\begin{cases}\dfrac{m!}{(m-n)!n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0(0\le n\le 2)\\ \dfrac{m!}{(m-n)!s!s^{n-s}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0(3\le n\le 5)\end{cases}$$

计算得：

$$L_s=P_1+2P_2+3P_3+4P_4+5P_5\approx 1.092\text{台}$$
$$L_q=P_3+2P_4+3P_5\approx 0.116\text{台}$$

工人平均空闲时间：$1/2\sum_{n=0}^{1}(2-n)P_n=1/2(2P_0+P_1)=0.5119$

$\lambda_c=1\times(5-1.092)=3.908$

$W_s=L_s/\lambda_c=\dfrac{1.092}{3.908}=0.279$（小时）=16.8（分钟）

$W_q=L_q/\lambda_c=\dfrac{0.116}{3.908}=0.029$（小时）=1.8（分钟）

机床利用率：$1-L_s/m=1-1.092/5=78.016\%$

9.9 某储蓄所有一个服务窗口，顾客按泊松分布平均每小时到达 10 人，为任一顾客办理存款、取款等业务的时间T服从N～$(0.05,0.01^2)$的正态分布。试求储蓄所空闲的概率及其主要工作指标。

【解】 这是一个$[M/G/1]:[\infty/\infty/FCFS]$排队系统。由题意知：

$\lambda=10$人/小时，$\mu=20$人/小时，$\rho=\lambda/\mu=0.5$，$E(T)=0.05$，$Var(T)=0.01^2$

储蓄所空闲的概率及其主要工作指标为：

$$P_0=1-\rho=0.5$$

$$L_q=\frac{0.5^2+10^2\times0.01^2}{2(1-0.5)}=0.26\text{（人）}$$

$$L=L_q+\rho=0.76\text{（人）}$$

$$W=\frac{L}{\lambda}=\frac{0.76}{10}h\approx5\text{（分钟）}$$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{0.26}{10}h\approx2\text{（分钟）}$$

9.10 某检测站有一台自动检测机器性能的仪器，检测每台机器都需 6 分钟。送检机器按泊松分布到达，平均每小时 4 台。试求该系统的主要工作指标。

解：这是一个$[M/D/1]:[\infty/\infty/FCFS]$系统，且：

$\lambda=4$台/小时，$1/\mu=6$分钟/台，$\rho=\lambda/\mu=0.4$ $Var(T)=0$

各主要工作指标为：

$$L_q=\frac{0.4^2}{2(1-0.4)}=\frac{2}{15}\text{（台）}$$

$$L=L_q+\rho=\frac{8}{15}\text{（台）}$$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{1}{30}h=2\text{（分钟）}$$

$$W=W_q+\frac{1}{\mu}=8\text{（分钟）}$$

9.11 一个电话间的顾客按泊松流到达，平均每小时到达 6 人，平均通话时间为 8 分钟，方差为 8 分钟，直观上估计通话时间服从爱尔朗分布，管理人员想知道平均列队长度和顾客平均等待时间是多少。

解：该系统为$[M/E_k/1]:[\infty/\infty/FCFS]$排队系统，其中：

$$k=\frac{[E(T)]^2}{Var(T)}=\frac{8^2}{16}=4,\quad \rho=6\times\frac{8}{60}=0.8$$

$$L_q=\frac{0.8^2\times(4+1)}{2\times4(1-0.8)}=2\text{（人）}$$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{2}{6}h=20\text{（分钟）}$$

9.12 对某服务台进行实测，得到如下数据：

系统中的顾客数（n）	0	1	2	3
记录到的次数(m_n)	161	97	53	34

平均服务时间为 10 分钟，服务一个顾客的收益为 2 元，服务机构运行单位时间成本为 1 元，问服务率为多少时可使单位时间平均总收益最大。

【解】该系统为$[M/M/1]:[3/\infty/FCFS]$系统，首先通过实测数据估计平均到达率λ：

因为 $\frac{P_n}{P_{n-1}}=\rho$

可以用下式来估计ρ

$$\hat{\rho}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{3}\frac{m_n}{m_{n-1}}=\frac{1}{3}(0.6+0.55+0.64)=0.6$$

由$\mu=6$/小时，可得λ的估计值为：

$$\hat{\lambda}=\hat{\rho}\mu=0.6\times6=3.6\text{ 人/小时}$$

为求最优服务率，根据公式 9.6.5，取：

$N=3$，$\frac{c_s}{G}=\frac{1}{2}=0.5$

可得

$$\rho^*=1.21$$

故

$$\mu^*=\frac{\hat{\lambda}}{\rho^*}=\frac{3.6}{1.21}=3$$

当$\mu=6$人/小时时，总收益为：

$$z=2\times3.6\times\frac{1-0.6^3}{1-0.6^4}-1\times6=0.485\text{（元/小时）}$$

当$\mu=3$人/小时时，总收益为：

$$z=2\times3.6\times\frac{1-1.21^3}{1-1.21^4}-1\times6=1.858\text{（元/小时）}$$

单位时间内平均收益可增加 1.373 元。

9.13 某检验中心为各工厂服务，要求进行检验的工厂（顾客）的到来服从$Poisson$流，平均到达率为$\lambda=48$（次/天）；工厂每次来检验由于停工造成损失 6 元；服务（检验）时间服务负指数分布，平均服务率为$\mu=25$（次/天）；每设置一个检验员的服务成本为每天 4 元，其他条件均适合$[M/M/s]:[\infty/\infty/FCFS]$系统。问应设几个检验员可使总费用的平均值最少。

【解】已知$c_s=4$，$c_w=6$，$\lambda=48$，$\mu=25$，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=1.92$，设检验员数为$s$，则：

$$P_0=\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{1.92^n}{n!}+\frac{1.92^s}{(s-1)!(s-1.92)}\right]^{-1}$$

$$L=L_q+\rho=\frac{P_0 1.92^{s+1}}{(s-1)!(s-1.92)^2}+1.92$$

将$s=1,2,3,4,5$依次代入，得到下表。由于$c_s/c_w=0.67$落在区间(0.583,21.845)之间，故$s^*=3$，即当设 3 个检验员时可使总费用z最小，最小值为：

$z(s^*)=z(3)=27.87$（元）

检验员数 s	平均顾客数 L(s)	L(s)-L(s+1)～L(s-1)-L(s)	总费用（元）z(s)
1	∞		∞
2	24.49	21.845～∞	154.94
3	2.645	0.582～21.845	27.87

4	2.063	0.111～0.582	28.38
5	1.952		31.71

习题十

10.1 某产品每月用量为 50 件，每次生产准备成本为 40 元，存储费为 10 元/（月·件），求最优生产批量及生产周期。

【解】模型 4。D=50，A=40，H=10

$$
\begin{aligned}
&Q=\sqrt{\frac{2AD}{H}}=\sqrt{\frac{2\times40\times50}{10}}=20(件)\\
&t=Q/D=0.4(月)\\
&f=\sqrt{2HAD}=\sqrt{2\times10\times40\times50}=25200(元)
\end{aligned}
$$

则每隔 0.4 月生产一次，每次生产量为 20 件。

10.2 某化工厂每年需要甘油 100 吨，订货的固定成本为 100 元，甘油单价为 7800 元/吨，每吨年保管费为 32 元，求：（1）最优订货批量；（2）年订货次数；（3）总成本。

【解】模型 4。D=100，A=100，H=32，C=7800

$$
\begin{aligned}
&Q=\sqrt{\frac{2AD}{H}}=\sqrt{\frac{2\times100\times100}{32}}=25(件)\\
&n=D/Q=4(次)\\
&f=\sqrt{2HAD}+CD=\sqrt{2\times32\times100\times100}+7800\times100=780800(元)
\end{aligned}
$$

则（1）最优订货批量为 25 件；（2）年订货 4 次；（3）总成本为 780800 元。

10.3 工厂每月需要甲零件 3000 件，每件零件 120 元，月存储费率为 1.5%，每批订货费为 150 元，求经济订货批量及订货周期。

【解】模型 4。D=3000，A=150，H=120×0.015＝1.8，C=120

$$
\begin{aligned}
&Q=\sqrt{\frac{2AD}{H}}=\sqrt{\frac{2\times150\times3000}{1.8}}\approx707(件)\\
&t=Q/D=0.24(月)\\
&f=\sqrt{2HAD}+CD=\sqrt{2\times1.8\times150\times3000}+120\times3000=361272.79(元)
\end{aligned}
$$

则经济订货批量为 707 件，订货周期为 0.24 月。

10.4 某公司预计年销售计算机 2000 台，每次订货费为 500 元，存储费为 32 元/（年·台），缺货费为 100 元/年·台。

试求：（1）提前期为零时的最优订货批量及最大缺货量；（2）提前期为 10 天时的订货点及最大存储量。

【解】模型 3。D=2000，A=500，H=32，B=100, L=0.0274(年)

$$
Q=\sqrt{\frac{2AD}{H}}\sqrt{\frac{H+B}{B}}=\sqrt{\frac{2\times500\times2000}{32}}\sqrt{\frac{32+100}{100}}\approx287(台)
$$

$$
S=\sqrt{\frac{2AD}{B}}\sqrt{\frac{H}{H+B}}=\sqrt{\frac{2\times500\times2000}{100}}\sqrt{\frac{32}{32+100}}\approx69(台)
$$

$$Q_1=\sqrt{\frac{2AD}{H}}\sqrt{\frac{B}{H+B}}=\sqrt{\frac{2\times500\times2000}{32}}\sqrt{\frac{100}{32+100}}\approx218(台)$$

R＝LD－S＝0.0274×2000－69＝55－69＝－14（件）

(1)最优订货批量为 287 台，最大缺货量为 69 台；(2)再订货点为－14 台，最大存储量为 218 台。

10.5 将式（10.22）化为 t 的函数 $f(t)$，推导出最优解 Q^*及 t^*。

10.6 求图 10-1 缺货周期内的生产时间 t_2。

【解】因为

$$S=(P-D)t_2=\frac{D(P-D)(t-t_3)}{P}=\sqrt{\frac{2HAD}{B(H+B)}}\sqrt{\frac{P-D}{P}}$$

所以

$$t_2=\frac{S}{P-D}=\sqrt{\frac{2HAD}{B(H+B)}}\sqrt{\frac{1}{P(P-D)}}$$

10.7 证明模型 3 的存储费小于模型 4 的存储费，并验证当题 10.2 的缺货费为 100 元时的情形。

【证】由模型 3：$Q_1^*=\sqrt{\frac{2AD}{H}}\sqrt{\frac{B}{H+B}},t^*=\sqrt{\frac{2A}{HD}}\sqrt{\frac{H+B}{B}}$；存储费

$$\begin{aligned}\frac{1}{2Dt}HQ_1^2&=\frac{1}{2Dt}H\frac{2AD}{H}\frac{B}{H+B}\\&=\sqrt{\frac{HDB}{2A(H+B)}}\frac{AB}{(H+B)}\\&\le\sqrt{\frac{ADH}{2}}\end{aligned}$$

由模型 4 $,Q^*=\sqrt{\frac{2AD}{H}}$，存储费为

$$\frac{HQ}{2}=\frac{H}{2}\sqrt{\frac{2AD}{H}}=\sqrt{\frac{ADH}{2}}$$

证毕。

题 10.2 中，D=100，A=100，H=32，C=7800，B=100 时，允许缺货的存储费为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2Dt}HQ_1^2&=\sqrt{\frac{HDB}{2A(H+B)}}\frac{AB}{(H+B)}\\&=\sqrt{\frac{32\times100\times100}{2\times100\times(32+100)}}\frac{100\times100}{32+100}=263.75\end{aligned}$$

不允许缺货的存储费为

$$\sqrt{\frac{ADH}{2}}=\sqrt{\frac{100\times100\times32}{2}}=400>263.75$$

10.8 将式(10.15)表达为（Q，S）的函数，推导出最优订货量和订货周期。

10.9 某产品月需要量为 500 件，若要订货，可以以每天 50 件的速率供应。存储费为 5 元/（月·件），订货手续费为 100 元，求最优订货批量及订货周期。

【解】模型 2。D=500，P=30×50＝1500，H＝5，A＝100

$$Q^*=\sqrt{\frac{2AD}{H}}\sqrt{\frac{P}{P-D}}=\sqrt{\frac{2\times100\times500\times1500}{5\times(1500-500)}}=173.21(\text{件})$$

$$t^*=\frac{Q^*}{D}=\frac{173.21}{500}=0.346(\text{月})$$

最优订货批量约为 173 件，约 11 天订货一次。

10.10 某企业每月甲零件的生产量为 800 件，该零件月需求量为 500 件，每次准备成本 50 元，每件月存储费为 10 元，缺货费 8 元，求最优生产批量及生产周期。

【解】模型 1。D=500，P=800，H＝10，A＝50，B＝8

$$Q^*=\sqrt{\frac{2AD}{H}}\sqrt{\frac{H+B}{B}}\sqrt{\frac{P}{P-D}}=\sqrt{\frac{2\times50\times(10+8)\times800}{10\times8\times(800-500)}}=173.21$$

$$t^*=\frac{Q^*}{D}=\frac{173.21}{500}=0.346(\text{月})$$

最优订货批量约为 173 件，约 11 天订货一次。

10.11 求模型 1 的缺货周期。

【解】缺货周期为 $t-t_3$，由习题 10.6

$$t_2=\frac{S}{P-D}=\sqrt{\frac{2HAD}{B(H+B)}}\sqrt{\frac{1}{P(P-D)}}$$

及 $D(t-t_3)=Pt_2$，有

$$\begin{aligned}t-t_3&=\frac{Pt_2}{D}\\&=\frac{P}{D}\sqrt{\frac{2HAD}{B(H+B)}}\sqrt{\frac{1}{P(P-D)}}\\&=\sqrt{\frac{2HAP}{DB(H+B)}}\sqrt{\frac{1}{(P-D)}}\end{aligned}$$

10.12 将式(10.1)表达为（Q，S）的函数，推导出最优订货量和订货周期。

10.13 证明：在模型 4 中，当 Q^*在 14%范围内变化为 Q 时，总成本约增加 1%。

【证】由 $Q=(1+\delta)Q^*$, $\delta=\pm0.14$ 及式(10.29)，则当 $\delta_1=0.14$ 及 $\delta_1=-0.14$ 时

$$i_1=\frac{f(Q)-f(Q^*)}{f(Q^*)}=\frac{0.14^2}{2(1+0.14)}=0.0089\approx1\%$$

$$i_2=\frac{f(Q)-f(Q^*)}{f(Q^*)}=\frac{(-0.14)^2}{2(1-0.14)}=0.0114\approx1\%$$

证毕。

10.14 在题 2 中，假定工厂考虑流动资金问题，决定宁可使总成本超过最小成本 5%作存储策略，求此时的订货批量。

【解】引用例 10.7 的结果：i=0.05 时 δ_1=0.37 及 δ_2=－0.27，当 δ_1=0.37 时，由题 2 的结果有

$$Q=(1+0.37)Q^{*}=1.37\times25=34.25(件)$$

当 δ_1=－0.27 时

$$Q=(1-0.27)Q^{*}=0.73\times25=18.25(件)$$

订货量约为 34 件或 18 件。

10.15 假定题 1 中的需求现在是 200 件，存储费和准备费不变，问现在的经济订货批量和订货周期各是原来的多少倍。

【解】$D'=200, D=50, D'=4D, \delta=4, \sqrt{\delta}=\sqrt{4}=2$

D=50，A=40，H=10

$$t=\frac{Q}{D'}=\sqrt{\frac{2A}{H\delta D}}=\sqrt{\frac{2A}{HD}}\sqrt{\frac{1}{4}}=0.5t^{*}$$

则现在的经济订货批量和订货周期各是原来的 2 倍和 0.5 倍。

10.16 证明：在模型 3 中，当订货费、存储费和缺货费同时增加 δ 倍时，经济订货批量不变。

【证】由式(10.18)知

$$Q=\sqrt{\frac{2\delta AD}{\delta H}}\sqrt{\frac{\delta H+\delta B}{\delta B}}=Q^{*}$$

10.17 商店出售某商品，预计年销售量为 5000 件，商品的价格为 $k(t)$=50t（单位：元）。每次订货费为 100 元，每件商品年保管费为 50 元，求最优存储策略。

【解】D=5000，$C(t)$=50t，A=100，H＝50，C_0=50，由式（10.33）及（10.34）

$$t^*=\sqrt{\frac{2\times100}{5000\times(50+2\times50)}}=\sqrt{\frac{200}{750000}}=0.016$$

$$Q^*=5000t^*=5000\times0.016=81.65$$

订货周期约 6 天，订货量约为 82 件。

10.18 假定在题 17 中，商品单价函数为 $k(t)$=50t^{-1},求最优存储策略。

【解】由公式

$$t^*=\sqrt{\frac{2(A+C_0D)}{HD}},Q^*=\sqrt{\frac{2D(A+C_0D)}{H}}$$

得 t＝1.414，Q=5000，此时应一次订购一年的需要量。

10.19 商店拟定在第二、三季度采购一批空调。预计销售量的概率见表 10.16。

表 10.16

需求量 x_i（百台）	0	1	2	3	4	5
概率 p_i	0.01	0.15	0.25	0.30	0.20	0.09

已知每销售 100 台空调可获利润 1000 元，如果当年未售完，就要转到下一年度销售，每一百台的存储费为 450 元，问商店应采购多少台空调最佳。

【解】P－C＝1000，H=450，B=0，C－S=0，

C_o＝C－S＋H＝450，C_u=P－C＋B＝1000

$$SL=\frac{C_u}{C_u+C_o}=\frac{1000}{1450}=0.689$$

$$\sum_{i=0}^{3}p_i=0.01+0.15+0.25+0.3=0.71$$

商店最佳订货量为 300 台。

10.20 由于电脑不但价格变化快而且更新快，某电脑商尽量缩短订货周期，计划 10 天订货一次。某周期内每台电脑可获得进价 15％的利润，如果这期没有售完，则他只能按进价的 90％出售并且可以售完。到了下一期电脑商发现一种新产品上市了，价格上涨了 10％，他的利润率只有 10％，，如果没有售完，则他可以按进价的 95％出售并且可以售完。假设市场需求量的概率不变。问电脑商的订货量是否发生变化，为什么。

【解】（1）设初期价格为 C，C_u=0.15C，C_O＝0.1C，则

$$SL_1=\frac{C_u}{C_u+C_o}=0.6$$

（2）设单价为 C，C_u =0.1×1.1C，C_O =0.05×1.1C，则

$$SL_2=\frac{C_u}{C_u+C_o}=0.666$$

因为 $SL_2>SL_1$,所以应增加订货量。

10.21 鲜花商店准备在 9 月 10 日教师节到来之前比以往多订购一批鲜花，用来制作“园丁颂”的花篮。每只花篮的材料、保养及制作成本是 60 元，售价为 120 元/只。9 月 10 日过后只能按 20 元/只出售。据历年经验，其销售量服从期望值为 200、均方差为 150 的正态分布。该商店应准备制作多少花篮使利润最大，期望利润是多少。

【解】P＝120，C＝60，S=20，B＝H＝0

C_o＝C－S＋H＝40，C_u=P－C＋B＝60

$$SL=\frac{C_u}{C_u+C_o}=\frac{60}{100}=0.6$$

$$F_0\left(\frac{Q-200}{150}\right)=0.6$$

查正态分布表得到 $\frac{Q-200}{150}=0.25$，则 Q=150×0.25+200＝238（件）。期望利润为 6204.85 元。

10.22 某涂料工厂每月需要某种化工原料的概率服从 75 吨至 100 吨之间的均匀分布，原料单价为 4000 元/吨，每批订货的固定成本为 5000 元，每月仓库存储一吨的保管费为 60 元，每吨缺货费为 4300 元，求缺货补充的（s，Q）存储策略。

【解】该题增加条件 L=6 天。C＝4000，A=5000，H＝60，B=4300，p=100，q＝0；均匀分布（Uniform)：a=75，b=100，L＝0.2 月，平均需求量（100+75）/2＝87.5。提前期内的平均需求量为 87.5×0.2＝17.5，分布参数为 100*0.2－75*0.2＝5。迭代过程见下表。

数据	订货量 Q(i)	不缺货的概率 F(s)	再订货点 s(i)	安全存量 SS(i)

H=	60	Q(1)=	120.7615	F(1)=	0.9807	s(1)=	4.90	SS(1)=	-12.60
D=	87.5	Q(2)=	120.8096	F(2)=	0.9807	s(2)=	4.90	SS(2)=	-12.60
A=	5000	Q(3)=	120.8096	F(3)=	0.9807	s(3)=	4.90	SS(3)=	-12.60
B=	4300	Q(4)=	120.8096	F(4)=	0.9807	s(4)=	4.90	SS(4)=	-12.60
q=	0	Q(5)=	120.8096	F(5)=	0.9807	s(5)=	4.90	SS(5)=	-12.60
a=	5								
q=0时：		Q*=	120.80965	s*=	4.9037				

公式： Q(1)= SQRT(2*C5*C4/C3)

Q(2)= SQRT((2*$C$5*$C$4+$C$4*$C$6*$C$8+$C$4*$C$6*J3^2/$C$8-2*$C$4*$C$6*J3)/$C$3)

F(1)=1-$C$3*F3/($C$7*$C$3*F3+$C$6*$C$4)

s(1)=$C$8*H3

SS(1)= J3-17.5

Q*=SQRT(C5*C4*2/C3)*SQRT(C4*C6/(C4*C6-C3*C8))

s*=C8*(1-C3*F9/(C6*C4))

其余单元格用上一步迭代公式复制即可。

最优存储策略为：再订货点 s＝5，订货量 Q＝121。结果显示，安全存量为负数，一次订货量是一个月平均需求量的 1.37 倍，这是因为一次订购成本很大、持有成本较小引起的。

10.23 若 H=0.15，B=1，A=100，L=1/10（年）,在 L 这段时间内的需求量服从 μ=1000，σ^2=625 的正态分布，年平均需要量 D=10000 件，求缺货补充的（s，Q）存储策略。

【解】迭代过程见下表。

数据		订货量 Q(i)		不缺货的概率 F(s)		(s-μ)/σ(查表)
H=	0.15	Q(1)=	3651.4837	F(1)=	0.9452	1.6000
D=	10000	Q(2)=	3638.1334	F(2)=	0.9454	1.6000
A=	100	Q(3)=	3644.4866	F(3)=	0.9453	1.6000
B=	1	Q(4)=	3643.2734	F(4)=	0.9454	1.6000
q=	0	Q(5)=	3640.9071	F(5)=	0.9454	1.6000
μ=	1000	Q(6)=	3640.4113	F(6)=	0.9454	1.6000
σ =	25					

s(i)		*f*((s-μ)/σ)	G((s-μ)/σ)	b(i)	安全存量 SS(i)	
s(1)=	1040.0000	0.0584	0.0548	-0.7299	SS(1)=	40.00
s(2)=	1040.0000	0.0720	0.0546	-0.3829	SS(2)=	40.00
s(3)=	1040.0000	0.0695	0.0547	-0.4492	SS(3)=	40.00
s(4)=	1040.0000	0.0643	0.0546	-0.5785	SS(4)=	40.00
s(5)=	1040.0000	0.0632	0.0546	-0.6055	SS(5)=	40.00
s(6)=	1040.0000	0.0632	0.0546	-0.6052	SS(6)=	40.00

公式： Q(1)= SQRT(2*C5*C4/C3)

Q(2)= SQRT((2*$C$4*($C$5+$C$6*N3)/$C$3))

F(1)=1-$C$3*F3/($C$7*$C$3*F3+$C$6*$C$4)

s(1)=I3*$C$9+$C$8

G=1-H3

b(1)= $C$9*L3+($C$8-K3)*M3

其余单元格用上一步迭代公式复制即可。

(s-μ)/σ、*f*((s-μ)/σ)查表得到

最优存储策略为：再订货点 s＝1040，订货量 Q＝3640。

习题十一

11.1 某地方书店希望订购最新出版的图书．根据以往经验，新书的销售量可能为 50，100，150 或 200 本．假定每本新书的订购价为 4 元，销售价为 6 元，剩书的处理价为每本 2 元．要求：（1）建立损益矩阵；（2）分别用悲观法、乐观法及等可能法决策该书店应订购的新书数字 ；（3）建立后悔矩阵，并用后悔值法决定书店应订购的新书数．（4）书店据以往统计资料新书销售量的规律见表 11－13，分别用期望值法和后悔值法决定订购数量；（5）如某市场调查部门能帮助书店调查销售量的确切数字，该书店愿意付出多大的调查费用。

表 11－13

需求数	50	100	150	200
比例（%）	20	40	30	10

【解】 （1）损益矩阵如表 11.1－1 所示。

表 11.1－1

销售 / 订购	E_1	E_2	E_3	E_4
	50	100	150	200
S_1 50	100	100	100	100
S_2 100	0	200	200	200
S_3 150	-100	100	300	300
S_4 200	-200	0	200	400

（2）悲观法：S_1　　乐观法：S_4　　等可能法：S_2 或 S_3。

（3）后悔矩阵如表 11.1－2 所示。

表 11.1－2

	E_1	E_2	E_3	E_4	最大后悔值
S_1	0	100	200	300	300
S_2	100	0	100	200	200
S_3	200	100	0	100	200
S_4	300	200	100	0	300

按后悔值法决策为：S_2 或 S_3

（4）按期望值法和后悔值法决策，书店订购新书的数量都是 100 本。

（5）如书店能知道确切销售数字，则可能获取的利润为 $\sum_i x_i p(x_i)$，书店没有调查费用时的利润为：50×0.2+100×0.4+150×0.3+200×0.1=115 元，则书店愿意付出的最大的调查费用为

$$\sum_i x_i p(x_i) - 115$$

11.2 某非确定型决策问题的决策矩阵如表 11－14 所示：

表 11－14

事件 方案	E_1	E_2	E_3	E_4
S_1	4	16	8	1
S_2	4	5	12	14
S_3	15	19	14	13
S_4	2	17	8	17

（1）若乐观系数α =0.4，矩阵中的数字是利润，请用非确定型决策的各种决策准则分别确定出相应的最优方案.

（2）若表 11－14 中的数字为成本，问对应于上述决策准则所选择的方案有何变化？

【解】（1）悲观主义准则：S_3 ； 乐观主义准则：S_3 ； Lapalace 准则：S_3 ；Savage 准则：S_1 ；折衷主义准则：S_3。

（2）悲观主义准则：S_2 ； 乐观主义准则：S_3 ； Lapalace 准则：S_1 ；Savage 准则：S_1 ；折衷主义准则：S_1 或 S_2。

11.3 在一台机器上加工制造一批零件共 10 000 个，如加工完后逐个进行修整，则全部可以合格，但需修整费 300 元．如不进行修理数据以往资料统计，次品率情况见表 11－15．

表 11－15

次品率（E）	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
概率 P（E）	0.20	0.40	0.25	0.10	0.05

一旦装配中发现次品时，需返工修理费为每个零件 0.50．要求：

（1）用期望值决定这批零件要不要整修；

（2）为了获得这批零件中次品率的正确资料，在刚加工完的一批 10000 件中随机抽取 130 个样品，发现其中有 9 件次品，试修正先验概率，并重新按期望值决定这批零件要不要整修．

【解】（1）先列出损益矩阵见表 11-19

表 11-19

E	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	EMV
P（E）	0.2	0.4	0.25	0.10	0.05	
S_1：零件修正	-300	-300	-300	-300	-300	-300
S_1：不修正	-100	-200	-300	-400	-500	-240

故按期望值法决策，零件不需修正。

（2）修正先验概率见表 11-20

表 11-20

E	P（E）	P（T|E）	P（T，E）	P（E|T）
0.02	0.2	0.001	0.000 20	0.0 032
0.04	0.4	0.042	0.016 80	0.269 0
0.06	0.25	0.121	0.030 25	0.484 4
0.08	0.1	0.119	0.011 90	0.190 6
0.10	0.05	0.066	0.003 30	0.052 8
			P(T)=0.062 45	1.000 0

根据修正后的概率再列出损益矩阵如表 11-21 所示。

表 11-21

E	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	EMV
P（E）	0.003 2	0.269 0	0.484 4	0.190 6	0.052 8	

S_1：修正	-300	-300	-300	-300	-300	-300
S_1：不修正	-100	-200	-300	-400	-500	-302.08

故按期望值法决策时，采用修正零件的方案。

11.4 某工厂正在考虑是现在还是明年扩大生产规模问题. 由于可能出现的市场需求情况不一样，预期利润也不同. 已知市场需求高（E_1）、中（E_2）、低（E_3）的概率及不同方案时的预期利润，如表 11－16 所示.

表 11－16(单位：万元)

事件 / 概率 / 方案	E_1	E_2	E_3
	P（E_1）=0.2	P（E_2）=0.5	P（E_3）=0.3
现在扩大	10	8	-1
明年扩大	8	6	1

对该厂来说损失 1 万元效用值 0，获利 10 万元效用值为 100，对以下事件效用值无差别：①肯定得 8 万元或 0.9 概率得 10 万和 0.1 概率失去 1 万；②肯定得 6 万元或 0.8 概率得 10 万和 0.2 概率失去 1 万；③肯定得 1 万元或 0.25 概率得 10 万和 0.75 概率失去 1 万。

求：（a）建立效用值表；

（b）分别根据实际盈利额和效用值按期值法确定最优决策.

【解】 （1）见表 11.4－1

表 11.4－1

M	U（M）
-1	0
1	0.25
6	0.8
8	0.9
10	1

（2）画出决策树见图 11.4－1，图中括孤内数字为效用值。

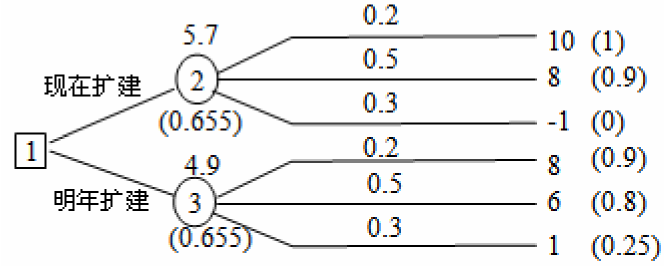
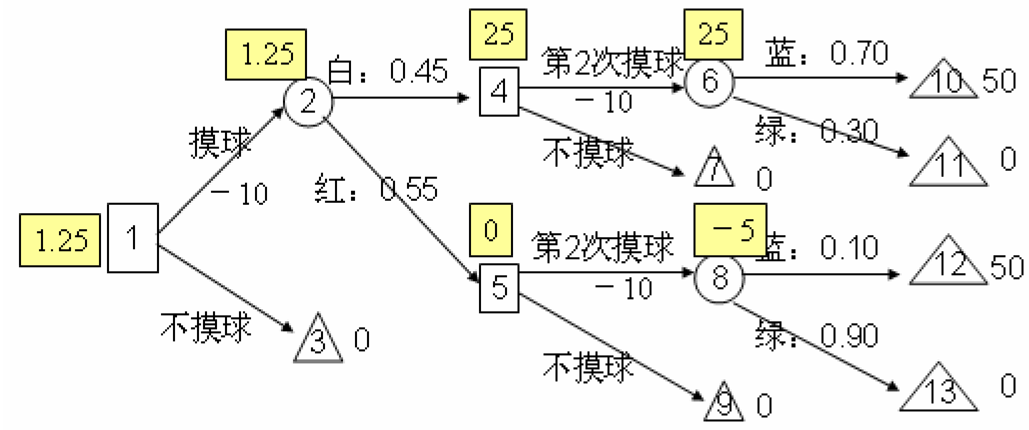


图 11.4－1

结论：按实际盈利额选现在扩建的方案；如按效用值选明年扩建的方案。

11.5 有一种游戏分两阶段进行. 第一阶段，参加者需先付 10 元，然后从含 45%白球和 55%红球的罐中任摸一球，并决定是否继续第二阶段. 如继续需再付 10 元，根据第一阶段摸到的球的颜色的相同颜色罐子中再摸一球. 已知白色罐子中含 70%蓝球和 30%绿球，红色罐子中含 10%的蓝球和 90%的绿球. 当第二阶段摸到为蓝色球时，参加者可得 50 元，如摸到的绿球，或不参加第二阶段游戏的均无所得. 试用决策树法确定参加者的最优策略.

【解】 决策树为：



E(6)=50×0.7+0×0.3－10=25
E(7)=0
E(8)=50×0.1+0×0.9－10=－5
E(9)=0
E(2)=25×0.0.45+0×0.55－10=1.25

最优策略是应参加第一次摸球。当摸到的白球，继续摸第二次；如摸到的红球，则不摸第二次。

11.6 某投资商有一笔投资，如投资于 A 项目，一年后能肯定得到一笔收益 C；如投资于 B 项目，一年后或以概率 P 得到的收益 C_1，或以概率（1－P）得到收益 C_2，已知 $C_1<C<C_2$. 试依据 EMV 原则讨论 P 为何值时，投资商将分别投资于 A，B，或两者收益相等.

【解】 由 $C = pC_1 + (-p)C$，得

$p = \dfrac{C - C_2}{C_1 - C_2}$ 时，投资项目 A 或 B 收益相等；

$p < \dfrac{C - C_2}{C_1 - C_2}$ 时，投资项目 A，反之投资项目 B

11.7 A 和 B 两家厂商生产同一种日用品．B 估计 A 厂商对该日用品定价为 6,8，10 元的概率分别为 0.25,0.50 和 0.25．若 A 的定价为 P_1，则 B 预测自己定价为 P_2 时它下一月度的销售额为 1 000+250（P_2-P_1）元．B 生产该日用品的每件成本为 4 元，试帮助其决策当将每件日用品分别定价为 6，7，8，9 元时的各自期望收益值，按 EMV 准则选哪种定价为最优.

【解】 分别计算 B 厂商不同定价时的 EMV 值。例如当定价为 6 元时，期望盈利值为
2×{0.25[1 000+250(6-6)]+0.5[1 000+250(8-6)]+0.25[1 000-250(10-6)]} =3000
继续算出定价为 7，8，9 元时，其期望盈利值分别为 3 750，4 000 和 3 750。故定价 8 元时，期望的盈利值为最大。

11.8 假设今天下雨明天仍为雨天的概率为 0.6，今天不下雨明天也不下雨的概率为 0.9。

(1) 求天气变化过程 Markov 链的一步转移矩阵；

(2) 若今天不下雨，求后天不下雨的概率；

(3) 求稳定状态概率。

【解】 （1）$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$ （2）0.85 （3）（0.2，0.8）

11.9 某超市销售三种品牌的牛奶 A、B 及 C，已知各顾客在三种品牌之间转移关系为下列矩阵

$$P=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(1)有一顾客每天购买一次，今天购买了品牌 A，求两天后仍然购买品牌 A 的概率。
(2)就长期而言，购买各品牌的顾客比例是多少。
【解】（1）0.5625　　(2) (0.2857，0.4286,0.2857)

11.10 某企业生产并销售一种产品．把月初销售状况分成好、中、差三个档次，企业可以根据月初销售情况采取不做广告或做广告两种措施。取状态空间 E＝{1，2，3}，表示月初的销售状况为好、中、差，对每一状态 $i(i=1，2，3)$，均有策略集{1，2}，策略 1 表示不做广告，策略 2 表示做广告．由历史资料知，不做广告和做广告的转移概率矩阵分别为

$$P(1)=\begin{bmatrix}0.2 & 0.5 & 0.3\\ 0 & 0.2 & 0.8\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}，P(2)=\begin{bmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1\\ 0.1 & 0.6 & 0.3\\ 0.05 & 0.4 & 0.55\end{bmatrix}$$

不做广告时 3 种状态的利润向量为 $r(1)=(7，5，-1)^T$，

做广告时的利润向量为 $r(2)=(5，4，2)^T$。

假设商品的营销周期仅为三个月．该企业在每个月初应如何根据当时的销售情况确定该月是否要做广告，以使这三个月内尽可能多获利。

【解】状态转移概率表 11.10-1

表 11.10-1 状态转移概率

状态（i）	策略	转移概率			利润
		j=1	j=2	j=3	
1	1 2	0.2 0.5	0.5 0.4	0.3 0.1	7 5
2	1 2	0 0.1	0.2 0.6	0.8 0.3	5 4
3	1 2	0 0.05	0 0.4	1 0.55	-1 4

3 个月的最优策略表 11.10-2：

初始状态	策　略			期望利润
	f_0	f_1	f_2	
1	1	1	1	15.085
2	2	2	1	11.765
3	2	2	2	8.893

表 11.10-2 的销售策略是：
如果期初销售状态为好，第 1 个月不做广告，如果期初销售状态为中或差，第 1 个月做广告；如果第 1 个月的销售状态好，第 2 个月不做广告，如果销售状态为中或差，第 2 个月做广告；如果第 2 个月的销售状态好或中，第 3 个月不做广告，如果销售状态为差，第 3 个月做广告。

习题十二

12.1 证明本章中的定理 4

12.2 求出下列得益矩阵中所表示的对策中的混合策略纳什均衡.

	L	R
L	2，1	0，2
R	1，2	3，0

【解】设局中人 1 分别以 x_1和x_2 的概率选择 L 和 R 策略，局中人 2 分别以 y_1和y_2 的概率选择 L 和 R 策略，用方程组方法，则可得到：

$$\begin{cases} x_1+2x_2=2x_1+0x_2 \\ x_1+x_2\ =1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y_1+0y_2=1y_1+3y_2 \\ y_1+y_2\ =1 \end{cases}$$

解出：$x_1=2/3, x_2=1/3$， $y_1=3/4, y_2=1/4$。混合策略纳什均衡为：G=(x^*, y^*)

其中： $x^*=(2/3\quad ,1/3)^T, y^*=(3/4\quad ,1/4)^T$

12.3 求解下列矩阵对策，其中赢得矩阵 A 分别为

$$(1)\begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 \\ -2 & 3 & -5 \\ 4 & 8 & 10 \end{bmatrix},\quad (2)\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix},\quad (3)\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 & 10 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

【解】（1）有鞍点。最优解(α_1,β_3)，V_G=5

(2) 有鞍点。最优解(α_1,β_1)，V_G=2

(3) 有鞍点。最优解(α_1,β_2)及(α_5,β_2)，V_G=5

12.4 利用优超原则求解下列矩阵对策

$$（1）A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix},\quad (2)\ A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & -3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & 4 & 6 & -4 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

【解】（1）

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

由公式（12.19）～（12.23）得

$$(a_{11}+a_{22})-(a_{12}+a_{21})=-15$$

$$X^*=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\quad Y^*=\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6},0,0\right);\quad V_G=\frac{5}{2}$$

(2)
$$A=\begin{bmatrix}2&3&-4&-3&5\\6&4&1&-3&2\\4&2&-1&4&-5\\7&3&4&6&-4\\5&4&1&2&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&1&-3&2\\2&-1&4&-5\\3&4&6&-4\\4&1&2&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&1&-3&2\\3&4&6&-4\\4&1&2&6\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}3&4&6&-4\\4&1&2&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&4&-4\\4&1&6\end{bmatrix}$$

第 2 列与第 3 列的凸组合(如：0.5(4,1)+0.5(-4,6)<(3,4))优超于第 1 列

$$\begin{bmatrix}4&-4\\1&6\end{bmatrix}$$

最优解：

$$X=\left(0,0,0,\frac{5}{13},\frac{8}{13}\right);Y=\left(0,0,\frac{10}{13},0\frac{3}{13}\right);V_G=\frac{28}{13}$$

12.5 用线性规划法求解矩阵对策

$$A=\begin{bmatrix}7&3&2\\6&4&-5\\-3&0&7\end{bmatrix}$$

【解】局中人 I：

$$\begin{cases}\min z=x_1+x_2+x_3\\7x_1+6x_2-3x_3\ge 1\\3x_1+4x_2\qquad\ \ \ge 1\\2x_1-5x_2+7x_3\ge 1\\x_{1,}x_{2,}x_3\ge 0\end{cases}$$

局中人 II：

$$\begin{cases}\max w=y_1+y_2+y_3\\7y_1+3y_2+2y_3\le 1\\6y_1+4y_2-5y_3\le 1\\-3y_1+\qquad 7y_3\le 1\\y_1,y_{2,}y_3\ge 0\end{cases}$$

模型 II 的最优表：

C(j)	1	1	1	0	0	0	b

Basis	C(i)	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	
Y2	1	2.619	1	0	0.333	0	-0.0952	0.2381
Y5	0	-6.619	0	0	-1.33	1	1.0952	0.7619
Y3	1	-0.4286	0	1	0	0	0.1429	0.1429
C(j)-Z(j)		-1.1905	0	0	-0.3333	0	-0.0476	0.381

线性规划的最优解：Y=(0，0.2381，0.1429)，X=(0.3333，0，0.0476)；w=0.381
作变换得到对策的解：X^*=（0.8748，0，0.1251），Y^*=(0，0.6249，0.3751)；V_G=2.6247

12.6 若二人零和对策的赢得矩阵为

$$(1)\ A=\begin{bmatrix}2&4\\5&3\end{bmatrix};\quad (2)\ A=\begin{bmatrix}2&3&6\\2&4&4\\5&3&5\end{bmatrix};\quad (3)\ A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix},a,b,c>0$$

求混合策略纳什均衡.

【解】（1）列方程组。混合策略纳什均衡：X＝(0.5，0.5)，Y＝(0.25，0.75)；V_G＝3.5
（2）用优超法。混合策略纳什均衡：X＝(0，0.5，0.5)，Y＝(0.25，0.75，0)；V_G＝3.5
（3）原题有误，改为

$$\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix},a,b,c>0$$

列方程组：

$$\begin{cases}ax_1=V\\bx_2=V\\cx_3=V\\x_1+x_2+x_3=1\end{cases},\quad \begin{cases}ay_1=V\\by_2=V\\cy_3=V\\y_1+y_2+y_3=1\end{cases}$$

求解得到混合策略纳什均衡：

$$x_1=\frac{bc}{bc+ac+ab},x_2=\frac{ac}{bc+ac+ab},x_3=\frac{ab}{bc+ac+ab}$$
$$y_1=\frac{bc}{bc+ac+ab},y_2=\frac{ac}{bc+ac+ab},y_3=\frac{ab}{bc+ac+ab}$$
$$V=\frac{abc}{bc+ac+ab}$$

12.7 求下列二人非零和非合作型对策的纳什均衡.

$$（1）\begin{bmatrix}(2,2)&(3,3)\\(1,1)&(4,4)\end{bmatrix};\qquad （2）\begin{bmatrix}(2,1)&(4,2)\\(6,2)&(3,1)\end{bmatrix}$$

【解】(1)划线法：有纯策略纳什均衡，双方都取策略 2。

$$\begin{bmatrix}(\underline{2},2)&(3,\underline{3})\\(1,1)&(\underline{4},\underline{4})\end{bmatrix}$$

(2)划线法失效。用方程组方法。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 = 6y_1 + 3y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

得到混合策略纳什均衡 $X^* = (1/2 \quad ,1/2)^T, y^* = (1/5 \quad ,4/5)^T$

12.8 某空调生产厂家要决定夏季空调产量问题．已知在正常的夏季气温条件下该空调可卖出 12 万台，在较热与降雨量较大的条件下市场需求为 15 万台和 10 万台．假定该空调价格虽天气程度有所变化，在雨量较大、正常、较热的气候条件下空调价格分别为 1300 元、1400 元和 1500 元，已知每台空调成本为 1100 元．如果夏季没有售完每台空调损失 300 元。在没有关于气温准确预报的条件下，生产多少空调能使该厂家收益最大？

【解】原题有误，1400 元和 300 元改为 1400 元和 1500 元。

将生产厂家看作是局中人 1，策略有生产 10、12 和 15 万台 3 种，夏季气候看作局中人 2，策略是需要量为 10、12 和 15 万台 3 种。在雨量较大、正常、较热的气候条件下每台空调利润分别是 200、300 和 400 元。3 种策略与 3 种气候状态对应的利润表如下。

	10	12	15
10	2000	3000	4000
12	1400	3600	4800
15	500	2700	6000

有鞍点，应生产 10 万台。

12.9 设古诺模型的双寡头竞争中，厂家一和厂家二的决策产量分别为 q_1 和 q_2，市场出清价格为市场总产量的函数 P=P(Q)=12-Q,假如两厂家单位产量的边际成本分别为 $C_1=3$ 和 $C_2=2$．试用反应函数法求解该对策中的纳什均衡．

【解】

$$\max h_1 = q_1(12 - q_1 - q_2) - 3q_1 = 9q_1 - q_1^2 - q_1 q_2$$
$$\max h_2 = q_2(12 - q_1 - q_2) - 2q_2 = 10q_2 - q_2^2 - q_1 q_2$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial q_1} = 9 - 2q_1 - q_2 = 0$$
$$\frac{\partial h_2}{\partial q_2} = 10 - 2q_2 - q_1 = 0$$

$$q_1 = \frac{8}{3},\ q_2 = \frac{11}{3}$$

得到纳什均衡：$q_1 = \frac{8}{3}; q_2 = \frac{11}{3}$

12.10 已知一个地区选民的观点标准分布于$[0,1]$上，竞选一个公职的每个候选人同时宣布他们的竞选立场，即选择 0-1 之间的一个点，选民将根据观察候选人的立场，然后将选票投给立场与自己观点最接近的候选人．假设有两个候选人，宣布的立场分别为 $x_1=0.4$ 和 $x_2=0.8$，那么观点在 0.6 左边的人都会投候选人一的票，反之就投候选人二的票，候选人一将以 60%的选票获胜．如果候选人立场相同则用跑硬币的方式决定谁当选．假设候选人关心的只是能否当选，若有两个候选人竞争，试用对策论相关知识分析其纳什均衡．

【解】设 x_1 和 x_2 分别为候选人 1、2 宣布的观点，候选人 1 的得票为

$$z_1=\begin{cases}x_1+\dfrac{x_2-x_1}{2}=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2) & x_1\le x_2\\ 1-x_1+\dfrac{x_1-x_2}{2}=1-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2) & x_1>x_2\end{cases}$$

候选人 1 的得票为

$$h_2=\begin{cases}x_2+\dfrac{x_1-x_2}{2} & x_2\le x_1\\ 1-x_2+\dfrac{x_2-x_1}{2} & x_2>x_1\end{cases}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x_1\le x_2\\ -\dfrac{1}{2} & x_1>x_2\end{cases}$$

TOP