

课后答案网，用心为你服务！



[大学答案](#) --- [中学答案](#) --- [考研答案](#) --- [考试答案](#)

最全最多的课后习题参考答案，尽在课后答案网（www.khdaw.com）！

Khdaw团队一直秉承用心为大家服务的宗旨，以关注学生的学习生活为出发点，

旨在为广大学生朋友的自主学习提供一个分享和交流的平台。

爱校园（www.aixiaoyuan.com） 课后答案网（www.khdaw.com） 淘答案（www.taodaan.com）

第一章 绪论

1. 设 $x > 0$, x 的相对误差为 δ , 求 $\ln x$ 的误差。

解: 近似值 x^* 的相对误差为 $\delta = e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$

而 $\ln x$ 的误差为 $e(\ln x^*) = \ln x^* - \ln x \approx \frac{1}{x^*} e^*$

进而有 $\varepsilon(\ln x^*) \approx \delta$

2. 设 x 的相对误差为 2%, 求 x^n 的相对误差。

解: 设 $f(x) = x^n$, 则函数的条件数为 $C_p = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|$

又 $\because f'(x) = nx^{n-1}$, $\therefore C_p = \left| \frac{x \cdot nx^{n-1}}{x^n} \right| = n$

又 $\because \varepsilon_r((x^*)^n) \approx C_p \cdot \varepsilon_r(x^*)$

且 $e_r(x^*)$ 为 2

$\therefore \varepsilon_r((x^*)^n) \approx 0.02n$

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数, 即误差限不超过最后一位的半个单位, 试指出它们是几位有效数字: $x_1^* = 1.1021$, $x_2^* = 0.031$, $x_3^* = 385.6$,

$x_4^* = 56.430$, $x_5^* = 7 \times 1.0$.

解: $x_1^* = 1.1021$ 是五位有效数字;

$x_2^* = 0.031$ 是二位有效数字;

$x_3^* = 385.6$ 是四位有效数字;

$x_4^* = 56.430$ 是五位有效数字;

$x_5^* = 7 \times 1.0$ 是二位有效数字。

4. 利用公式(2.3)求下列各近似值的误差限: (1) $x_1^* + x_2^* + x_4^*$, (2) $x_1^* x_2^* x_3^*$, (3) x_2^* / x_4^* .

其中 $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ 均为第 3 题所给的数。

解:

$$\varepsilon(x_1^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon(x_2^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon(x_3^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$$

$$\varepsilon(x_4^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon(x_5^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$$

$$(1) \varepsilon(x_1^* + x_2^* + x_4^*)$$

$$= \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*) + \varepsilon(x_4^*)$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^{-4} + \frac{1}{2} \times 10^{-3} + \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$= 1.05 \times 10^{-3}$$

$$(2) \varepsilon(x_1^* x_2^* x_3^*)$$

$$= |x_1^* x_2^*| \varepsilon(x_3^*) + |x_2^* x_3^*| \varepsilon(x_1^*) + |x_1^* x_3^*| \varepsilon(x_2^*)$$

$$= |1.1021 \times 0.031| \times \frac{1}{2} \times 10^{-1} + |0.031 \times 385.6| \times \frac{1}{2} \times 10^{-4} + |1.1021 \times 385.6| \times \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\approx 0.215$$

$$(3) \varepsilon(x_2^* / x_4^*)$$

$$\approx \frac{|x_2^*| \varepsilon(x_4^*) + |x_4^*| \varepsilon(x_2^*)}{|x_4^*|^2}$$

$$= \frac{0.031 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 56.430 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3}}{56.430 \times 56.430}$$

$$= 10^{-5}$$

5 计算球体积要使相对误差限为 1，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

$$\text{解：球体体积为 } V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

则何种函数的条件数为

$$C_p = \left| \frac{R \cdot V'}{V} \right| = \left| \frac{R \cdot 4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right| = 3$$

$$\therefore \varepsilon_r(V^*) \approx C_p \cdot \varepsilon_r(R^*) = 3\varepsilon_r(R^*)$$

$$\text{又 } \because \varepsilon_r(V^*) = 1$$

故度量半径 R 时允许的相对误差限为 $\varepsilon_r(R^*) = \frac{1}{3} \times 1 \approx 0.33$

6. 设 $Y_0 = 28$, 按递推公式 $Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$ ($n=1,2,\dots$)

计算到 Y_{100} 。若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$ (5 位有效数字), 试问计算 Y_{100} 将有多大误差?

$$\text{解: } \because Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$$

$$\therefore Y_{100} = Y_{99} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$$

$$Y_{99} = Y_{98} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$$

$$Y_{98} = Y_{97} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$$

.....

$$Y_1 = Y_0 - \frac{1}{100}\sqrt{783}$$

$$\text{依次代入后, 有 } Y_{100} = Y_0 - 100 \times \frac{1}{100}\sqrt{783}$$

$$\text{即 } Y_{100} = Y_0 - \sqrt{783},$$

$$\text{若取 } \sqrt{783} \approx 27.982, \therefore Y_{100} = Y_0 - 27.982$$

$$\therefore \varepsilon(Y_{100}^*) = \varepsilon(Y_0) + \varepsilon(27.982) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$\therefore Y_{100} \text{ 的误差限为 } \frac{1}{2} \times 10^{-3}.$$

7. 求方程 $x^2 - 56x + 1 = 0$ 的两个根, 使它至少具有 4 位有效数字 ($\sqrt{783} = 27.982$)。

$$\text{解: } x^2 - 56x + 1 = 0,$$

$$\text{故方程的根应为 } x_{1,2} = 28 \pm \sqrt{783}$$

$$\text{故 } x_1 = 28 + \sqrt{783} \approx 28 + 27.982 = 55.982$$

$\therefore x_1$ 具有 5 位有效数字

$$x_2 = 28 - \sqrt{783} = \frac{1}{28 + \sqrt{783}} \approx \frac{1}{28 + 27.982} = \frac{1}{55.982} \approx 0.017863$$

x_2 具有 5 位有效数字

8. 当 N 充分大时, 怎样求 $\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} dx$?

解 $\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(N+1) - \arctan N$

设 $\alpha = \arctan(N+1), \beta = \arctan N$ 。

则 $\tan \alpha = N+1, \tan \beta = N$ 。

$$\begin{aligned} & \int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \alpha - \beta \\ &= \arctan(\tan(\alpha - \beta)) \\ &= \arctan \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\ &= \arctan \frac{N+1 - N}{1 + (N+1)N} \\ &= \arctan \frac{1}{N^2 + N + 1} \end{aligned}$$

9. 正方形的边长大约为了 100cm, 应怎样测量才能使其面积误差不超过 1cm^2 ?

解: 正方形的面积函数为 $A(x) = x^2$

$$\therefore \varepsilon(A^*) = 2A^* \cdot \varepsilon(x^*).$$

当 $x^* = 100$ 时, 若 $\varepsilon(A^*) \leq 1$,

$$\text{则 } \varepsilon(x^*) \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

故测量中边长误差限不超过 0.005cm 时, 才能使其面积误差不超过 1cm^2

10. 设 $S = \frac{1}{2}gt^2$, 假定 g 是准确的, 而对 t 的测量有 ± 0.1 秒的误差, 证明当 t 增加时 S 的绝对误差增加, 而相对误差却减少。

解: $\because S = \frac{1}{2}gt^2, t > 0$

$$\therefore \varepsilon(S^*) = gt^2 \cdot \varepsilon(t^*)$$

当 t^* 增加时, S^* 的绝对误差增加

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(S^*) &= \frac{\varepsilon(S^*)}{|S^*|} \\ &= \frac{gt^2 \cdot \varepsilon(t^*)}{\frac{1}{2}g(t^*)^2} \\ &= 2 \frac{\varepsilon(t^*)}{t^*} \end{aligned}$$

当 t^* 增加时, $\varepsilon(t^*)$ 保持不变, 则 S^* 的相对误差减少。

11. 序列 $\{y_n\}$ 满足递推关系 $y_n = 10y_{n-1} - 1$ ($n=1,2,\dots$),

若 $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$ (三位有效数字), 计算到 y_{10} 时误差有多大? 这个计算过程稳定吗?

解: $\because y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$

$$\therefore \varepsilon(y_0^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$\text{又} \because y_n = 10y_{n-1} - 1$$

$$\therefore y_1 = 10y_0 - 1$$

$$\therefore \varepsilon(y_1^*) = 10\varepsilon(y_0^*)$$

$$\text{又} \because y_2 = 10y_1 - 1$$

$$\therefore \varepsilon(y_2^*) = 10\varepsilon(y_1^*)$$

$$\therefore \varepsilon(y_2^*) = 10^2 \varepsilon(y_0^*)$$

.....

$$\therefore \varepsilon(y_{10}^*) = 10^{10} \varepsilon(y_0^*)$$

$$= 10^{10} \times \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^8$$

计算到 y_{10} 时误差为 $\frac{1}{2} \times 10^8$, 这个计算过程不稳定。

12. 计算 $f = (\sqrt{2} - 1)^6$, 取 $\sqrt{2} \approx 1.4$, 利用下列等式计算, 哪一个得到的结果最好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}, \quad (3-2\sqrt{2})^3, \quad \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}, \quad 99-70\sqrt{2}.$$

解: 设 $y = (x-1)^6$,

若 $x = \sqrt{2}$, $x^* = 1.4$, 则 $\varepsilon(x^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}$ 。

若通过 $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$ 计算 y 值, 则

$$\begin{aligned}\varepsilon(y^*) &= \left| -6 \times \frac{1}{(x^*+1)^7} \right| \cdot \varepsilon(x^*) \\ &= \frac{6}{(x^*+1)^7} y^* \varepsilon(x^*) \\ &= 2.53 y^* \varepsilon(x^*)\end{aligned}$$

若通过 $(3-2\sqrt{2})^3$ 计算 y 值, 则

$$\begin{aligned}\varepsilon(y^*) &= \left| -3 \times 2 \times (3-2x^*)^2 \right| \cdot \varepsilon(x^*) \\ &= \frac{6}{3-2x^*} y^* \cdot \varepsilon(x^*) \\ &= 30 y^* \varepsilon(x^*)\end{aligned}$$

若通过 $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 计算 y 值, 则

$$\begin{aligned}\varepsilon(y^*) &= \left| -3 \times \frac{1}{(3+2x^*)^4} \right| \cdot \varepsilon(x^*) \\ &= 6 \times \frac{1}{(3+2x^*)^7} y^* \varepsilon(x^*) \\ &= 1.0345 y^* \varepsilon(x^*)\end{aligned}$$

通过 $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 计算后得到的结果最好。

13. $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, 求 $f(30)$ 的值。若开平方用 6 位函数表, 问求对数时误差有多

大? 若改用另一等价公式 $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

计算, 求对数时误差有多大?

解

$$\because f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), \therefore f(30) = \ln(30 - \sqrt{899})$$

$$\text{设 } u = \sqrt{899}, y = f(30)$$

$$\text{则 } u^* = 29.9833$$

$$\therefore \varepsilon(u^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

故

课后答案网 www.khdaw.com

$$\begin{aligned}\varepsilon(y^*) &\approx -\frac{1}{|30-u^*|} \varepsilon(u^*) \\ &= \frac{1}{0.0167} \cdot \varepsilon(u^*) \\ &\approx 3 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

若改用等价公式

$$\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\text{则 } f(30) = -\ln(30 + \sqrt{899})$$

此时,

$$\begin{aligned}\varepsilon(y^*) &= \left| -\frac{1}{30+u^*} \right| \varepsilon(u^*) \\ &= \frac{1}{59.9833} \cdot \varepsilon(u^*) \\ &\approx 8 \times 10^{-7}\end{aligned}$$

第二章 插值法

1. 当 $x=1, -1, 2$ 时, $f(x)=0, -3, 4$, 求 $f(x)$ 的二次插值多项式。

解:

$$x_0=1, x_1=-1, x_2=2,$$

$$f(x_0)=0, f(x_1)=-3, f(x_2)=4;$$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{1}{6}(x-1)(x-2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{3}(x-1)(x+1)$$

则二次拉格朗日插值多项式为

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \sum_{k=0}^2 y_k l_k(x) \\ &= -3l_0(x) + 4l_2(x) \\ &= -\frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \frac{4}{3}(x-1)(x+1) \\ &= \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

2. 给出 $f(x) = \ln x$ 的数值表

X	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
lnx	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.356675	-0.223144

用线性插值及二次插值计算 $\ln 0.54$ 的近似值。

解: 由表格知,

$$x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=0.6, x_3=0.7, x_4=0.8;$$

$$f(x_0)=-0.916291, f(x_1)=-0.693147$$

$$f(x_2)=-0.510826, f(x_3)=-0.356675$$

$$f(x_4)=-0.223144$$

若采用线性插值法计算 $\ln 0.54$ 即 $f(0.54)$,

则 $0.5 < 0.54 < 0.6$

$$l_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = -10(x-0.6)$$

$$l_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = -10(x-0.5)$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) \\ &= 6.93147(x-0.6) - 5.10826(x-0.5) \end{aligned}$$

$$\therefore L_1(0.54) = -0.6202186 \approx -0.620219$$

若采用二次插值法计算 $\ln 0.54$ 时,

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = 50(x-0.5)(x-0.6)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -100(x-0.4)(x-0.6)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 50(x-0.4)(x-0.5)$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) \\ &= -50 \times 0.916291(x-0.5)(x-0.6) + 69.3147(x-0.4)(x-0.6) - 0.510826 \times 50(x-0.4)(x-0.5) \end{aligned}$$

$$\therefore L_2(0.54) = -0.61531984 \approx -0.615320$$

3. 给全 $\cos x, 0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ 的函数表, 步长 $h = l' = (1/60)^\circ$, 若函数表具有 5 位有效数字, 研

究用线性插值求 $\cos x$ 近似值时的总误差界。

解: 求解 $\cos x$ 近似值时, 误差可以分为两个部分, 一方面, x 是近似值, 具有 5 位有效数字, 在此后的计算过程中产生一定的误差传播; 另一方面, 利用插值法求函数 $\cos x$ 的近似值时, 采用的线性插值法插值余项不为 0, 也会有一定的误差。因此, 总误差界的计算应综合以上两方面的因素。

当 $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ 时,

$$\text{令 } f(x) = \cos x$$

$$\text{取 } x_0 = 0, h = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{10800}$$

$$\text{令 } x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, 5400$$

$$\text{则 } x_{5400} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时, 线性插值多项式为

$$L_1(x) = f(x_k) \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1}) \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

插值余项为

$$R(x) = |\cos x - L_1(x)| = \left| \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_k)(x - x_{k+1}) \right|$$

又 $\because$ 在建立函数表时,表中数据具有5位有效数字,且 $\cos x \in [0,1]$,故计算中有误差传播过程。

$$\therefore \varepsilon(f^*(x_k)) = \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$R_2(x) = \left| \varepsilon(f^*(x_k)) \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right| + \left| \varepsilon(f^*(x_{k+1})) \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right|$$

$$\leq \varepsilon(f^*(x_k)) \left(\left| \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right| + \left| \frac{x - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k} \right| \right)$$

$$= \varepsilon(f^*(x_k)) \frac{1}{h} (x_{k+1} - x + x - x_k)$$

$$= \varepsilon(f^*(x_k))$$

$\therefore$ 总误差界为

$$R = R_1(x) + R_2(x)$$

$$= \left| \frac{1}{2} (-\cos \xi)(x - x_k)(x - x_{k+1}) \right| + \varepsilon(f^*(x_k))$$

$$\leq \frac{1}{2} \times (x - x_k)(x_{k+1} - x) + \varepsilon(f^*(x_k))$$

$$\leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}h\right)^2 + \varepsilon(f^*(x_k))$$

$$= 1.06 \times 10^{-8} + \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$= 0.50106 \times 10^{-5}$$

4. 设为互异节点, 求证:

$$(1) \sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x) \equiv x^k \quad (k=0,1,\cdots,n);$$

$$(2) \sum_{j=0}^n (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0 \quad (k=0,1,\cdots,n);$$

证明

$$(1) \quad \text{令 } f(x) = x^k$$

若插值节点为 $x_j, j=0,1,\dots,n$, 则函数 $f(x)$ 的 n 次插值多项式为 $L_n(x) = \sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x)$ 。

$$\text{插值余项为 } R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

又 $\because k \leq n$,

$$\therefore f^{(n+1)}(\xi) = 0$$

$$\therefore R_n(x) = 0$$

$$\therefore \sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x) = x^k \quad (k=0,1,\dots,n);$$

$$\begin{aligned} (2) & \sum_{j=0}^n (x_j - x)^k l_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^n C_k^i x_j^i (-x)^{k-i} \right) l_j(x) \\ &= \sum_{i=0}^n C_k^i (-x)^{k-i} \left(\sum_{j=0}^n x_j^i l_j(x) \right) \end{aligned}$$

又 $\because 0 \leq i \leq n$ 由上题结论可知

$$\sum_{j=0}^n x_j^i l_j(x) = x^i$$

$$\therefore \text{原式} = \sum_{i=0}^n C_k^i (-x)^{k-i} x^i$$

$$= (x-x)^k$$

$$= 0$$

$\therefore$ 得证。

5 设 $f(x) \in C^2[a, b]$ 且 $f(a) = f(b) = 0$, 求证:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8} (b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

解: 令 $x_0 = a, x_1 = b$, 以此为插值节点, 则线性插值多项式为

$$\begin{aligned} L_1(x) &= f(x_0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1) \frac{x-x_0}{x-x_0} \\ &= f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{x-a} \end{aligned}$$

$$\text{又} \because f(a) = f(b) = 0$$

$$\therefore L_1(x) = 0$$

$$\text{插值余项为 } R(x) = f(x) - L_1(x) = \frac{1}{2} f''(x)(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} f''(x)(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\text{又} \because |(x-x_0)(x-x_1)|$$

$$\leq \left\{ \frac{1}{2} [(x-x_0) + (x_1-x)] \right\}^2$$

$$= \frac{1}{4} (x_1 - x_0)^2$$

$$= \frac{1}{4} (b-a)^2$$

$$\therefore \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{1}{8} (b-a)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

6. 在 $-4 \leq x \leq 4$ 上给出 $f(x) = e^x$ 的等距节点函数表, 若用二次插值求 e^x 的近似值, 要使

截断误差不超过 10^{-6} , 问使用函数表的步长 h 应取多少?

解: 若插值节点为 x_{i-1}, x_i 和 x_{i+1} , 则分段二次插值多项式的插值余项为

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi)(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$$

$$\therefore |R_2(x)| \leq \frac{1}{6} (x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1}) \max_{-4 \leq x \leq 4} |f'''(x)|$$

设步长为 h , 即 $x_{i-1} = x_i - h, x_{i+1} = x_i + h$

$$\therefore |R_2(x)| \leq \frac{1}{6} e^4 \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}} h^3 = \frac{\sqrt{3}}{27} e^4 h^3.$$

若截断误差不超过 10^{-6} , 则

$$|R_2(x)| \leq 10^{-6}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{27} e^4 h^3 \leq 10^{-6}$$

$$\therefore h \leq 0.0065.$$

7. 若 $y_n = 2^n$, 求 $\Delta^4 y_n$ 及 $\delta^4 y_n$,

解: 根据向前差分算子和中心差分算子的定义进行求解。

$$y_n = 2^n$$

$$\begin{aligned}
 \Delta^4 y_n &= (E-1)^4 y_n \\
 &= \sum_{j=0}^4 (-1)^j \binom{4}{j} E^{4-j} y_n \\
 &= \sum_{j=0}^4 (-1)^j \binom{4}{j} y_{4+n-j} \\
 &= \sum_{j=0}^4 (-1)^j \binom{4}{j} 2^{4-j} \cdot y_n \\
 &= (2-1)^4 y_n \\
 &= y_n \\
 &= 2^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta^4 y_n &= (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})^4 y_n \\
 &= (E^{\frac{1}{2}})^4 (E-1)^4 y_n \\
 &= E^{-2} \Delta^4 y_n \\
 &= y_{n-2} \\
 &= 2^{n-2}
 \end{aligned}$$

8. 如果 $f(x)$ 是 m 次多项式, 记 $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$, 证明 $f(x)$ 的 k 阶差分

$\Delta^k f(x) (0 \leq k \leq m)$ 是 $m-k$ 次多项式, 并且 $\Delta^{m+1} f(x) = 0$ (l 为正整数)。

解: 函数 $f(x)$ 的 *Taylor* 展式为

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(x)h^m + \frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\xi)h^{m+1}$$

其中 $\xi \in (x, x+h)$

又 $\because f(x)$ 是次数为 m 的多项式

$$\therefore f^{(m+1)}(\xi) = 0$$

$$\therefore \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$= f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(x)h^m$$

$\therefore \Delta f(x)$ 为 $m-1$ 阶多项式

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x))$$

$\therefore \Delta^2 f(x)$ 为 $m-2$ 阶多项式

依此过程递推，得 $\Delta^k f(x)$ 是 $m-k$ 次多项式

$\therefore \Delta^m f(x)$ 是常数

$\therefore$ 当 l 为正整数时，

$$\Delta^{m+1} f(x) = 0$$

9. 证明 $\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$

证明

$$\begin{aligned} \Delta(f_k g_k) &= f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k \\ &= f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_{k+1} + f_k g_{k+1} - f_k g_k \\ &= g_{k+1} (f_{k+1} - f_k) + f_k (g_{k+1} - g_k) \\ &= g_{k+1} \Delta f_k + f_k \Delta g_k \\ &= f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k \end{aligned}$$

$\therefore$ 得证

10. 证明 $\sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k$

证明：由上题结论可知

$$f_k \Delta g_k = \Delta(f_k g_k) - g_{k+1} \Delta f_k$$

$$\begin{aligned} &\therefore \sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta(f_k g_k) - g_{k+1} \Delta f_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(f_k g_k) - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k \\ &\because \Delta(f_k g_k) = f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k \\ &\therefore \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(f_k g_k) \\ &= (f_1 g_1 - f_0 g_0) + (f_2 g_2 - f_1 g_1) + \cdots + (f_n g_n - f_{n-1} g_{n-1}) \\ &= f_n g_n - f_0 g_0 \\ &\therefore \sum_{k=0}^{n-1} f_k \Delta g_k = f_n g_n - f_0 g_0 - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} \Delta f_k \end{aligned}$$

得证。

11. 证明 $\sum_{j=0}^{n-1} \Delta^2 y_j = \Delta y_n - \Delta y_0$

$$\begin{aligned}\text{证明 } \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^2 y_j &= \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta y_{j+1} - \Delta y_j) \\ &= (\Delta y_1 - \Delta y_0) + (\Delta y_2 - \Delta y_1) + \cdots + (\Delta y_n - \Delta y_{n-1}) \\ &= \Delta y_n - \Delta y_0\end{aligned}$$

得证。

12. 若 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ 有 n 个不同实根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,

$$\text{证明: } \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, 0 \leq k \leq n-2; \\ n_0^{-1}, k = n-1 \end{cases}$$

证明: $\because f(x)$ 有个不同实根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$\text{且 } f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$\therefore f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$\text{令 } \omega_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$\text{则 } \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{a_n \omega'_n(x_j)}$$

$$\begin{aligned}\text{而 } \omega'_n(x) &= (x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) \\ &\quad + \cdots + (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

$$\therefore \omega'_n(x_j) = (x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)$$

$$\text{令 } g(x) = x^k,$$

$$g[x_1, x_2, \cdots, x_n] = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{\omega'_n(x_j)}$$

$$\text{则 } g[x_1, x_2, \cdots, x_n] = \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{\omega'_n(x_j)}$$

$$\text{又 } \therefore \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \frac{1}{a_n} g[x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

$$\therefore \sum_{j=1}^n \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, 0 \leq k \leq n-2; \\ n_0^{-1}, k = n-1 \end{cases}$$

$\therefore$ 得证。

13. 证明 n 阶均差有下列性质:

(1) 若 $F(x) = \mathcal{C}f(x)$, 则 $F[x_0, x_1, \dots, x_n] = \mathcal{C}f[x_0, x_1, \dots, x_n]$;

(2) 若 $F(x) = f(x) + g(x)$, 则 $F[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] + g[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

证明:

$$\begin{aligned} (1) \because f[x_1, x_2, \dots, x_n] &= \sum_{j=0}^n \frac{f(x^j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\ F[x_1, x_2, \dots, x_n] &= \sum_{j=0}^n \frac{F(x^j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{\mathcal{C}f(x^j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\ &= \mathcal{C} \left(\sum_{j=0}^n \frac{f(x^j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \right) \\ &= \mathcal{C}f[x_0, x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

$\therefore$ 得证。

(2) $\because F(x) = f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned} \therefore F[x_0, \dots, x_n] &= \sum_{j=0}^n \frac{F(x^j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{f(x^j) + g(x^j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{f(x^j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \frac{g(x^j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)} \\ &= f[x_0, \dots, x_n] + g[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

$\therefore$ 得证。

14. $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$, 求 $F[2^0, 2^1, \dots, 2^7]$ 及 $F[2^0, 2^1, \dots, 2^8]$ 。

解: $\because f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$

若 $x_i = 2^i, i=0, 1, \dots, 8$

$$\text{则 } f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$\therefore f[x_0, x_1, \dots, x_7] = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} = \frac{7!}{7!} = 1$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_8] = \frac{f^{(8)}(\xi)}{8!} = 0$$

15. 证明两点三次埃尔米特插值余项是

$$R_3(x) = f^{(4)}(\xi)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2/4!, \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

解:

若 $x \in [x_k, x_{k+1}]$, 且插值多项式满足条件

$$H_3(x_k) = f(x_k), H_3'(x_k) = f'(x_k)$$

$$H_3(x_{k+1}) = f(x_{k+1}), H_3'(x_{k+1}) = f'(x_{k+1})$$

插值余项为 $R(x) = f(x) - H_3(x)$

由插值条件可知 $R(x_k) = R(x_{k+1}) = 0$

且 $R'(x_k) = R'(x_{k+1}) = 0$

$\therefore R(x)$ 可写成 $R(x) = g(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2$

其中 $g(x)$ 是关于 x 的待定函数,

现把 x 看成 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的一个固定点, 作函数

$$\varphi(t) = f(t) - H_3(t) - g(x)(t-x_k)^2(t-x_{k+1})^2$$

根据余项性质, 有

$$\varphi(x_k) = 0, \varphi(x_{k+1}) = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) - H_3(x) - g(x)(x-x_k)^2(x-x_{k+1})^2 \\ &= f(x) - H_3(x) - R(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = f'(t) - H_3'(t) - g(x)[2(t-x_k)(t-x_{k+1})^2 + 2(t-x_{k+1})(t-x_k)^2]$$

$$\therefore \varphi'(x_k) = 0$$

$$\varphi'(x_{k+1}) = 0$$

由罗尔定理可知, 存在 $\xi \in (x_k, x)$ 和 $\xi \in (x, x_{k+1})$, 使

$$\varphi'(\xi_1) = 0, \varphi'(\xi_2) = 0$$

即 $\varphi'(x)$ 在 $[x_k, x_{k+1}]$ 上有四个互异零点。

根据罗尔定理, $\varphi''(t)$ 在 $\varphi'(t)$ 的两个零点间至少有一个零点,

故 $\varphi''(t)$ 在 (x_k, x_{k+1}) 内至少有三个互异零点,

依此类推, $\varphi^{(4)}(t)$ 在 (x_k, x_{k+1}) 内至少有一个零点。

记为 $\xi \in (x_k, x_{k+1})$ 使

$$\varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - H_3^{(4)}(\xi) - 4!g(x) = 0$$

$$\text{又} \because H_3^{(4)}(t) = 0$$

$$\therefore g(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}, \xi \in (x_k, x_{k+1})$$

其中 ξ 依赖于 x

$$\therefore R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2$$

分段三次埃尔米特插值时, 若节点为 $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$, 设步长为 h , 即

$x_k = x_0 + kh, k = 0, 1, \dots, n$ 在小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2$$

$$\therefore |R(x)| = \frac{1}{4!} |f^{(4)}(\xi)| (x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{4!} (x-x_k)^2 (x_{k+1}-x)^2 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \\
 &\leq \frac{1}{4!} \left[\left(\frac{x-x_k + x_{k+1}-x}{2} \right)^2 \right]^2 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \\
 &= \frac{1}{4!} \times \frac{1}{2^4} h^4 \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \\
 &= \frac{h^4}{384} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|
 \end{aligned}$$

16. 求一个次数不高于 4 次的多项式 $P(x)$ ，使它满足 $P(0)=P'(0)=0, P(1)=P'(1)=0, P(2)=0$

解：利用埃米尔特插值可得到次数不高于 4 的多项式

$$x_0=0, x_1=1$$

$$y_0=0, y_1=1$$

$$m_0=0, m_1=1$$

$$H_3(x) = \sum_{j=0}^1 y_j \alpha_j(x) + \sum_{j=0}^1 m_j \beta_j(x)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_0(x) &= \left(1 - 2 \frac{x-x_0}{x_0-x_1}\right) \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 \\
 &= (1+2x)(x-1)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(x) &= \left(1 - 2 \frac{x-x_1}{x_1-x_0}\right) \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 \\
 &= (3-2x)x^2
 \end{aligned}$$

$$\beta_0(x) = x(x-1)^2$$

$$\beta_1(x) = (x-1)x^2$$

$$\therefore H_3(x) = (3-2x)x^2 + (x-1)x^2 = -x^3 + 2x^2$$

$$\text{设 } P(x) = H_3(x) + A(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

其中，A 为待定常数

$$\therefore P(2)=1$$

$$\therefore P(x) = -x^3 + 2x^2 + Ax^2(x-1)^2$$

$$\therefore A = \frac{1}{4}$$

$$\text{从而 } P(x) = \frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$

17. 设 $f(x) = 1/(1+x^2)$ ，在 $-5 \leq x \leq 5$ 上取 $n=10$ ，按等距节点求分段线性插值函数

$I_h(x)$, 计算各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 值, 并估计误差。

解:

若 $x_0 = -5, x_{10} = 5$

则步长 $h = 1$,

$x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, 10$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, 分段线性插值函数为

$$\begin{aligned} I_h(x) &= \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}) \\ &= (x_{i+1} - x) \frac{1}{1+x_i^2} + (x - x_i) \frac{1}{1+x_{i+1}^2} \end{aligned}$$

各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 的值为

当 $x = \pm 4.5$ 时, $f(x) = 0.0471, I_h(x) = 0.0486$

当 $x = \pm 3.5$ 时, $f(x) = 0.0755, I_h(x) = 0.0794$

当 $x = \pm 2.5$ 时, $f(x) = 0.1379, I_h(x) = 0.1500$

当 $x = \pm 1.5$ 时, $f(x) = 0.3077, I_h(x) = 0.3500$

当 $x = \pm 0.5$ 时, $f(x) = 0.8000, I_h(x) = 0.7500$

误差

$$\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{-5 \leq x \leq 5} |f''(\xi)|$$

$$\text{又} \because f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{24x - 24x^3}{(1+x^2)^4}$$

$$\text{令 } f'''(x) = 0$$

得 $f''(x)$ 的驻点为 $x_{1,2} = \pm 1$ 和 $x_3 = 0$

$$f''(x_{1,2}) = \frac{1}{2}, f''(x_3) = -2$$

$$\therefore \max_{-5 \leq x \leq 5} |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{1}{4}$$

18. 求 $f(x) = x^2$ 在 $[a, b]$ 上分段线性插值函数 $I_h(x)$, 并估计误差。

解:

在区间 $[a, b]$ 上, $x_0 = a, x_n = b, h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, \dots, n-1$,

$$h = \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i$$

$$\because f(x) = x^2$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上分段线性插值函数为

$$I_h(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1})$$

$$= \frac{1}{h_i} [x_i^2 (x_{i+1} - x) + x_{i+1}^2 (x - x_i)]$$

误差为

$$\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{a \leq \xi \leq b} |f''(\xi)| \cdot h_i^2$$

$$\because f(x) = x^2$$

$$\therefore f'(x) = 2x, f''(x) = 2$$

$$\therefore \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - I_h(x)| \leq \frac{h^2}{4}$$

19. 求 $f(x) = x^4$ 在 $[a, b]$ 上分段埃尔米特插值, 并估计误差。

解:

在 $[a, b]$ 区间上, $x_0 = a, x_n = b, h_i = x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, \dots, n-1$,

$$\text{令 } h = \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i$$

$$\because f(x) = x^4, f'(x) = 4x^3$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的分段埃尔米特插值函数为

$$\begin{aligned}
 I_h(x) &= \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 \left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right) f(x_i) \\
 &+ \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 \left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right) f(x_{i+1}) \\
 &+ \left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 (x-x_i) f'(x_i) \\
 &+ \left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 (x-x_{i+1}) f'(x_{i+1}) \\
 &= \frac{x_i^4}{h_i^3} (x-x_{i+1})^2 (h_i+2x-2x_i) \\
 &+ \frac{x_{i+1}^4}{h_i^3} (x-x_i)^2 (h_i-2x+2x_{i+1}) \\
 &+ \frac{4x_i^3}{h_i^2} (x-x_{i+1})^2 (x-x_i) \\
 &+ \frac{4x_{i+1}^3}{h_i^2} (x-x_i)^2 (x-x_{i+1})
 \end{aligned}$$

误差为

$$\begin{aligned}
 &|f(x) - I_h(x)| \\
 &= \frac{1}{4!} |f^{(4)}(\xi)| (x-x_i)^2 (x-x_{i+1})^2 \\
 &\leq \frac{1}{24} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(\xi)| \left(\frac{h_i}{2}\right)^4
 \end{aligned}$$

又 $\because f(x) = x^4$

$$\therefore f^{(4)}(x) = 4! = 24$$

$$\therefore \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - I_h(x)| \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} \frac{h_i^4}{16} \leq \frac{h^4}{16}$$

20. 给定数据表如下:

X_j	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
Y_j	0.5000	0.5477	0.6245	0.6708	0.7280

试求三次样条插值, 并满足条件:

$$(1) S'(0.25) = 1.0000, S'(0.53) = 0.6868;$$

$$(2) S''(0.25) = S''(0.53) = 0.$$

解:

$$h_0 = x_1 - x_0 = 0.05$$

$$h_1 = x_2 - x_1 = 0.09$$

$$h_2 = x_3 - x_2 = 0.06$$

$$h_3 = x_4 - x_3 = 0.08$$

$$\therefore \mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} - h_j}, \lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1} - h_j}$$

$$\therefore \mu_1 = \frac{5}{14}, \mu_2 = \frac{3}{5}, \mu_3 = \frac{3}{7}, \mu_4 = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{9}{14}, \lambda_2 = \frac{2}{5}, \lambda_3 = \frac{4}{7}, \lambda_0 = 1$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0.9540$$

$$f[x_1, x_2] = 0.8533$$

$$f[x_2, x_3] = 0.7717$$

$$f[x_3, x_4] = 0.7150$$

$$(1) S'(x_0) = 1.0000, S'(x_4) = 0.6868$$

$$d_0 = \frac{6}{h_0} (f[x_1, x_2] - f'_0) = -5.5200$$

$$d_1 = 6 \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{h_0 + h_1} = -4.3157$$

$$d_2 = 6 \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{h_1 + h_2} = -3.2640$$

$$d_3 = 6 \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{h_2 + h_3} = -2.4300$$

$$d_4 = \frac{6}{h_3} (f'_4 - f[x_3, x_4]) = -2.1150$$

由此得矩阵形式的方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ \frac{5}{14} & 2 & \frac{9}{14} & & \\ & \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} & \\ & & \frac{3}{7} & 2 & \frac{4}{7} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.5200 \\ -4.3157 \\ -3.2640 \\ -2.4300 \\ -2.1150 \end{pmatrix}$$

求解此方程组得

$$M_0 = -2.0278, M_1 = -1.4643$$

$$M_2 = -1.0313, M_3 = -0.8070, M_4 = -0.6539$$

∴ 三次样条表达式为

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + \left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}\right) \frac{x - x_j}{h_j} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$$

∴ 将 M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 代入得

$$S(x) = \begin{cases} -6.7593(0.30 - x)^3 - 4.8810(x - 0.25)^3 + 10.0169(0.30 - x) + 10.9662(x - 0.25) & x \in [0.25, 0.30] \\ -2.7117(0.39 - x)^3 - 1.9098(x - 0.30)^3 + 6.1075(0.39 - x) + 6.9544(x - 0.30) & x \in [0.30, 0.39] \\ -2.8647(0.45 - x)^3 - 2.2422(x - 0.39)^3 + 10.4186(0.45 - x) + 10.9662(x - 0.39) & x \in [0.39, 0.45] \\ -1.6817(0.53 - x)^3 - 1.3623(x - 0.45)^3 + 8.3958(0.53 - x) + 9.1087(x - 0.45) & x \in [0.45, 0.53] \end{cases}$$

$$(2) S''(x_0) = 0, S''(x_4) = 0$$

$$d_0 = 2f_0'' = 0, d_1 = -4.3157, d_2 = -3.2640$$

$$d_3 = -2.4300, d_4 = 2f_4'' = 0$$

$$\lambda_0 = \mu_4 = 0$$

由此得矩阵开工的方程组为

$$M_0 = M_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{9}{14} & 0 \\ \frac{3}{5} & 2 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{7} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.3157 \\ -3.2640 \\ -2.4300 \end{pmatrix}$$

求解此方程组，得

$$M_0 = 0, M_1 = -1.8809$$

$$M_2 = -0.8616, M_3 = -1.0304, M_4 = 0$$

又∴ 三次样条表达式为

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} \\ + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right) \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + \left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6}\right) \frac{x - x_j}{h_j}$$

将 M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 代入得

$$\therefore S(x) = \begin{cases} -6.2697(x-0.25)^3 + 10(0.3-x) + 10.9697(x-0.25) & x \in [0.25, 0.30] \\ -3.4831(0.39-x)^3 - 1.5956(x-0.3)^3 + 6.1138(0.39-x) + 6.9518(x-0.30) & x \in [0.30, 0.39] \\ -2.3933(0.45-x)^3 - 2.8622(x-0.39)^3 + 10.4186(0.45-x) + 11.1903(x-0.39) & x \in [0.39, 0.45] \\ -2.1467(0.53-x)^3 + 8.3987(0.53-x) + 9.1(x-0.45) & x \in [0.45, 0.53] \end{cases}$$

21. 若 $f(x) \in C^2[a, b]$, $S(x)$ 是三次样条函数, 证明:

$$(1) \int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [S''(x)]^2 dx \\ = \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx + 2 \int_a^b S''(x) [f''(x) - S''(x)] dx$$

(2) 若 $f(x_i) = S(x_i) (i = 0, 1, \dots, n)$, 式中 x_i 为插值节点, 且 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, 则

$$\int_a^b S''(x) [f''(x) - S''(x)] dx \\ = S''(b) [f'(b) - S'(b)] - S''(a) [f'(a) - S'(a)]$$

证明:

$$(1) \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx \\ = \int_a^b [f''(x)]^2 dx + \int_a^b [S''(x)]^2 dx - 2 \int_a^b f''(x) S''(x) dx \\ = \int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [S''(x)]^2 dx - 2 \int_a^b S''(x) [f''(x) - S''(x)] dx$$

从而有

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [S''(x)]^2 dx \\ = \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx + 2 \int_a^b S''(x) [f''(x) - S''(x)] dx$$

课后答案网 www.khdaw.com

$$\begin{aligned} & (2) \int_a^b S''(x) [f''(x) - S''(x)] dx \\ &= \int_a^b S''(x) d[f'(x) - S'(x)] \\ &= S''(x) [f'(x) - S'(x)] \Big|_a^b - \int_a^b [f'(x) - S'(x)] d[S''(x)] \\ &= S''(b) [f'(b) - S'(b)] - S''(a) [f'(a) - S'(a)] - \int_a^b S'''(x) [f'(x) - S'(x)] dx \\ &= S''(b) [f'(b) - S'(b)] - S''(a) [f'(a) - S'(a)] - \sum_{k=0}^{n-1} S'''(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}) \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f'(x) - S'(x)] dx \\ &= S''(b) [f'(b) - S'(b)] - S''(a) [f'(a) - S'(a)] - \sum_{k=0}^{n-1} S'''(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}) [f(x) - S(x)] \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} \\ &= S''(b) [f'(b) - S'(b)] - S''(a) [f'(a) - S'(a)] \end{aligned}$$

第三章 函数逼近与曲线拟合

1. $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$, 给出 $[0,1]$ 上的伯恩斯坦多项式 $B_1(f, x)$ 及 $B_3(f, x)$ 。

解:

$$\because f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x, x \in [0,1]$$

伯恩斯坦多项式为

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P_k(x)$$

$$\text{其中 } P_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

当 $n=1$ 时,

$$P_0(x) = \binom{1}{0} (1-x)$$

$$P_1(x) = x$$

$$\therefore B_1(f, x) = f(0)P_0(x) + f(1)P_1(x)$$

$$= \binom{1}{0} (1-x) \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 0\right) + x \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= x$$

当 $n=3$ 时,

$$P_0(x) = \binom{3}{0} (1-x)^3$$

$$P_1(x) = \binom{3}{1} x(1-x)^2 = 3x(1-x)^2$$

$$P_2(x) = \binom{3}{2} x^2(1-x) = 3x^2(1-x)$$

$$P_3(x) = \binom{3}{3} x^3 = x^3$$

$$\begin{aligned}
 \therefore B_3(f, x) &= \sum_{k=0}^3 f\left(\frac{k}{n}\right) P_k(x) \\
 &= 0 + 3x(1-x)^2 \sin \frac{\pi}{6} + 3x^2(1-x) \sin \frac{\pi}{3} + x^3 \sin \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{3}{2}x(1-x)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2(1-x) + x^3 \\
 &= \frac{5-3\sqrt{3}}{2}x^3 + \frac{3\sqrt{3}-6}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \\
 &\approx 1.5x - 0.402x^2 - 0.098x^3
 \end{aligned}$$

2. 当 $f(x) = x$ 时, 求证 $B_n(f, x) = x$

证明:

若 $f(x) = x$, 则

$$\begin{aligned}
 B_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P_k(x) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)\cdots[(n-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\
 &= x[x + (1-x)]^{n-1} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

3. 证明函数 $1, x, \cdots, x^n$ 线性无关

证明:

$$\text{若 } a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0, \forall x \in R$$

分别取 $x^k (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$, 对上式两端在 $[0, 1]$ 上作带权 $\rho(x) \equiv 1$ 的内积, 得

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

∴ 此方程组的系数矩阵为希尔伯特矩阵，对称正定非奇异，

∴ 只有零解 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 。

∴ 函数 $1, x, \cdots, x^n$ 线性无关。

4. 计算下列函数 $f(x)$ 关于 $C[0,1]$ 的 $\|f\|_\infty, \|f\|_1$ 与 $\|f\|_2$:

$$(1) f(x) = (x-1)^3, x \in [0,1]$$

$$(2) f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|,$$

$$(3) f(x) = x^m(1-x)^n, m \text{ 与 } n \text{ 为正整数},$$

$$(4) f(x) = (x+1)^{10} e^{-x}$$

解:

$$(1) \text{ 若 } f(x) = (x-1)^3, x \in [0,1], \text{ 则}$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$$

∴ $f(x) = (x-1)^3$ 在 $(0,1)$ 内单调递增

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \\ &= \max \{ |f(0)|, |f(1)| \} \\ &= \max \{ 0, 1 \} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \\ &= \max \{ |f(0)|, |f(1)| \} \\ &= \max \{ 0, 1 \} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \left(\int_0^1 (1-x)^6 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{1}{7} (1-x)^7 \right]_0^1^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

(2) 若 $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|, x \in [0, 1]$, 则

$$\|f\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \frac{1}{2}$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$$

$$= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(3) 若 $f(x) = x^m(1-x)^n$, m 与 n 为正整数

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) \geq 0$

$$f'(x) = mx^{m-1}(1-x)^n + x^m n(1-x)^{n-1}(-1)$$

$$= x^{m-1}(1-x)^{n-1} m \left(1 - \frac{n+m}{m} x\right)$$

当 $x \in \left(0, \frac{m}{n+m}\right)$ 时, $f'(x) > 0$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{m}{n+m}\right)$ 内单调递增

当 $x \in \left(\frac{m}{n+m}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{m}{n+m}, 1\right)$ 内单调递减。

$x \in \left(\frac{m}{n+m}, 1\right), f'(x) < 0$

$$\|f\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| =$$

$$= \max \left\{ |f(0)|, \left| f\left(\frac{m}{n+m}\right) \right| \right\}$$

$$= \frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= \int_0^1 |f(x)| dx \\&= \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)^m (1-\sin^2 t)^n d\sin^2 t \\&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} t \cos^{2n} t \cos t \cdot 2 \sin t dt \\&= \frac{n! m!}{(n+m+1)!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f\|_2 &= \left[\int_0^1 x^{2m} (1-x)^{2n} dx \right]^{\frac{1}{2}} \\&= \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{4m} t \cos^{4n} t d(\sin^2 t) \right]^{\frac{1}{2}} \\&= \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^{4m+1} t \cos^{4n+1} t dt \right]^{\frac{1}{2}} \\&= \sqrt{\frac{(2n)!(2m)!}{[2(n+m)+1]!}}\end{aligned}$$

(4) 若 $f(x) = (x+1)^{10} e^{-x}$

当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) > 0$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 10(x+1)^9 e^{-x} + (x+1)^{10} (-e^{-x}) \\&= (x+1)^9 e^{-x} (9-x) \\&> 0\end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内单调递减。

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{\infty} &= \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| = \\
 &= \max \{|f(0)|, |f(1)|\} \\
 &= \frac{2^{10}}{e} \\
 \|f\|_1 &= \int_0^1 |f(x)| dx \\
 &= \int_0^1 (x+1)^{10} e^{-x} dx \\
 &= -(x+1)^{10} e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 10(x+1)^9 e^{-x} dx \\
 &= 5 - \frac{10}{e} \\
 \|f\|_2 &= \left[\int_0^1 (x+1)^{20} e^{-2x} dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= 7 \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{e^2} \right)
 \end{aligned}$$

5. 证明 $\|f-g\| \geq \|f\| - \|g\|$

证明:

$$\begin{aligned}
 &\|f\| \\
 &= \|(f-g) + g\| \\
 &\leq \|f-g\| + \|g\| \\
 \therefore \|f-g\| &\geq \|f\| - \|g\|
 \end{aligned}$$

6. 对 $f(x), g(x) \in C^1[a, b]$, 定义

$$\begin{aligned}
 (1) (f, g) &= \int_a^b f'(x) g'(x) dx \\
 (2) (f, g) &= \int_a^b f'(x) g'(x) dx + f(a) g(a)
 \end{aligned}$$

问它们是否构成内积。

解:

(1) 令 $f(x) \equiv C$ (C 为常数, 且 $C \neq 0$)

则 $f'(x) = 0$

$$\text{而 } (f, f) = \int_a^b f'(x) f'(x) dx$$

这与当且仅当 $f \equiv 0$ 时, $(f, f) = 0$ 矛盾

$\therefore$ 不能构成 $C^1[a, b]$ 上的内积。

(2) 若 $(f, g) = \int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a)$, 则

$$(g, f) = \int_a^b g'(x)f'(x)dx + g(a)f(a) = (f, g), \forall \alpha \in K$$

$$(\alpha f, g) = \int_a^b [\alpha f'(x)]' g'(x)dx + \alpha f(a)g(a)$$

$$= \alpha \left[\int_a^b f'(x)g'(x)dx + f(a)g(a) \right]$$

$$= \alpha (f, g)$$

$\forall h \in C^1[a, b]$, 则

$$(f + g, h) = \int_a^b [f'(x) + g'(x)]' h'(x)dx + [f(a)g(a)]h(a)$$

$$= \int_a^b f'(x)h'(x)dx + f(a)h(a) + \int_a^b g'(x)h'(x)dx + g(a)h(a)$$

$$= (f, h) + (h, g)$$

$$(f, f) = \int_a^b [f'(x)]^2 dx + f^2(a) \geq 0$$

若 $(f, f) = 0$, 则

$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx = 0, \text{ 且 } f^2(a) = 0$$

$$\therefore f'(x) \equiv 0, f(a) = 0$$

$$\therefore f(x) \equiv 0$$

即当且仅当 $f=0$ 时, $(f, f)=0$.

故可以构成 $C^1[a, b]$ 上的内积。

7. 令 $T_n^*(x) = T_n(2x-1), x \in [0, 1]$, 试证 $\{T_n^*(x)\}$ 是在 $[0, 1]$ 上带权 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交

多项式, 并求 $T_0^*(x), T_1^*(x), T_2^*(x), T_3^*(x)$ 。

解:

若 $T_n^*(x) = T_n(2x-1), x \in [0, 1]$, 则

$$\int_0^1 T_n^*(x) T_m^*(x) \rho(x) dx$$

$$= \int_0^1 T_n(2x-1) T_m(2x-1) \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$$

令 $t = (2x-1)$, 则 $t \in [-1, 1]$, 且 $x = \frac{t+1}{2}$, 故

$$\begin{aligned} & \int_0^1 T_n^*(x) T_m^*(x) \rho(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 T_n(t) T_m(t) \frac{1}{\sqrt{\frac{t+1}{2} - (\frac{t+1}{2})^2}} d(\frac{t+1}{2}) \\ &= \int_{-1}^1 T_n(t) T_m(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned}$$

又 $\because$ 切比雪夫多项式 $\{T_k^*(x)\}$ 在区间 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交, 且

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) d\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, n = m \neq 0 \\ \pi, n = m = 0 \end{cases}$$

$\therefore \{T_n^*(x)\}$ 是在 $[0,1]$ 上带权 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的正交多项式。

又 $\because T_0(x) = 1, x \in [-1,1]$

$$\therefore T_0^*(x) = T_0(2x-1) = 1, x \in [0,1]$$

$$\because T_1(x) = x, x \in [-1,1]$$

$$\therefore T_1^*(x) = T_1(2x-1) = 2x-1, x \in [0,1]$$

$$\because T_2(x) = 2x^2 - 1, x \in [-1,1]$$

$$\therefore T_2^*(x) = T_2(2x-1)$$

$$= 2(2x-1)^2 - 1$$

$$= 8x^2 - 8x - 1, x \in [0,1]$$

$$\because T_3(x) = 4x^3 - 3x, x \in [-1,1]$$

$$\therefore T_3^*(x) = T_3(2x-1)$$

$$= 4(2x-1)^3 - 3(2x-1)$$

$$= 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1, x \in [0,1]$$

8. 对权函数 $\rho(x) = 1-x^2$, 区间 $[-1,1]$, 试求首项系数为 1 的正交多项式

$$\varphi_n(x), n = 0, 1, 2, 3.$$

解:

若 $\rho(x) = 1-x^2$, 则区间 $[-1,1]$ 上内积为

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\rho(x)dx$$

定义 $\varphi_0(x) = 1$ ，则

$$\varphi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\varphi_n(x) - \beta_n\varphi_{n-1}(x)$$

其中

$$\alpha_n = (x\varphi_n(x), \varphi_n(x)) / (\varphi_n(x), \varphi_n(x))$$

$$\beta_n = (\varphi_n(x), \varphi_n(x)) / (\varphi_{n-1}(x), \varphi_{n-1}(x))$$

$$\therefore \alpha_0 = (x, 1) / (1, 1)$$

$$= \frac{\int_{-1}^1 x(1+x^2)dx}{\int_{-1}^1 (1+x^2)dx}$$

$$= 0$$

$$\therefore \varphi_1(x) = x$$

$$\alpha_1 = (x^2, x) / (x, x)$$

$$= \frac{\int_{-1}^1 x^3(1+x^2)dx}{\int_{-1}^1 x^2(1+x^2)dx}$$

$$= 0$$

$$\beta_1 = (x, x) / (1, 1)$$

$$= \frac{\int_{-1}^1 x^2(1+x^2)dx}{\int_{-1}^1 (1+x^2)dx}$$

$$= \frac{\frac{16}{15}}{\frac{8}{3}} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \varphi_2(x) = x^2 - \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= (x^3 - \frac{2}{5}x, x^2 - \frac{2}{5}) / (x^2 - \frac{2}{5}, x^2 - \frac{2}{5}) \\ &= \frac{\int_{-1}^1 (x^3 - \frac{2}{5}x)(x^2 - \frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{2}{5})(x^2 - \frac{2}{5})(1+x^2)dx} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_2 &= (x^2 - \frac{2}{5}, x^2 - \frac{2}{5}) / (x, x) \\ &= \frac{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{2}{5})(x^2 - \frac{2}{5})(1+x^2)dx}{\int_{-1}^1 x^2(1+x^2)dx} \\ &= \frac{136}{525} = \frac{17}{70} \\ &= \frac{17}{15}\end{aligned}$$

$$\therefore \varphi_3(x) = x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{17}{70}x = x^3 - \frac{9}{14}x$$

9. 试证明由教材式 (2.14) 给出的第二类切比雪夫多项式族 $\{u_n(x)\}$ 是 $[0,1]$ 上带权

$\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$ 的正交多项式。

证明:

$$\text{若 } U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

令 $x = \cos \theta$, 可得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1 U_m(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\sin[(m+1)\arccos x] \sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{\pi}^0 \frac{\sin[(m+1)\theta] \sin[(n+1)\theta]}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} d\theta\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi} \sin[(m+1)\theta] \sin[(n+1)\theta] d\theta$$

当 $m = n$ 时,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} \sin^2[(m+1)\theta] d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos[2(m+1)\theta]}{2} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

当 $m \neq n$ 时,

$$\begin{aligned}& \int_0^\pi \sin[(m+1)\theta] \sin[(n+1)\theta] d\theta \\&= \int_0^\pi \sin[(m+1)\theta] d\left\{\frac{1}{n+1} \cos(n+1)\theta\right\} \\&= \int_0^\pi \frac{1}{n+1} \cos(n+1)\theta d\{\sin[(m+1)\theta]\} \\&= \int_0^\pi -\frac{m+1}{n+1} \cos(n+1)\theta \cos(m+1)\theta d\theta \\&= -\int_0^\pi \frac{m+1}{n+1} \cos[(m+1)\theta] d\left\{\frac{1}{n+1} \sin[(n+1)\theta]\right\} \\&= -\int_0^\pi \frac{m+1}{(n+1)^2} \sin[(n+1)\theta] d\{\cos[(m+1)\theta]\} \\&= \int_0^\pi \left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2 \sin[(n+1)\theta] \sin[(m+1)\theta] d\theta \\&= 0 \\&\therefore \left[1 - \left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2\right] \int_0^\pi \sin[(n+1)\theta] \sin[(m+1)\theta] d\theta = 0 \\&\text{又} \because m \neq n, \text{ 故 } \left(\frac{m+1}{n+1}\right)^2 \neq 1\end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^\pi \sin[(n+1)\theta] \sin[(m+1)\theta] d\theta = 0$$

得证。

10. 证明切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 满足微分方程

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

证明:

切比雪夫多项式为

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), |x| \leq 1$$

从而有

$$\begin{aligned}
 T'_n(x) &= -\sin(n \arccos x) \cdot n \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\
 &= \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x) \\
 T''_n(x) &= \frac{n}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(n \arccos x) - \frac{n^2}{1-x^2} \cos(n \arccos x) \\
 \therefore (1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2 T_n(x) \\
 &= \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x) - n^2 \cos(n \arccos x) \\
 &\quad - \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x) + n^2 \cos(n \arccos x) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

得证。

11. 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 求 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式?

解:

$\because f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续

$\therefore$ 存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 使

$$f(x_1) = \min_{a \leq x \leq b} f(x),$$

$$f(x_2) = \max_{a \leq x \leq b} f(x),$$

$$\text{取 } P = \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

则 x_1 和 x_2 是 $[a, b]$ 上的 2 个轮流为“正”、“负”的偏差点。

由切比雪夫定理知

P 为 $f(x)$ 的零次最佳一致逼近多项式。

12. 选取常数 a , 使 $\max_{0 \leq x \leq 1} |x^3 - ax|$ 达到极小, 又问这个解是否唯一?

解:

$$\text{令 } f(x) = x^3 - ax$$

则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为奇函数

$$\begin{aligned}
 \therefore \max_{0 \leq x \leq 1} |x^3 - ax| \\
 &= \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^3 - ax| \\
 &= \|f\|_{\infty}
 \end{aligned}$$

又 $\because f(x)$ 的最高次项系数为 1, 且为 3 次多项式。

$\therefore \omega_3(x) = \frac{1}{2^3} T_3(x)$ 与 0 的偏差最小。

$$\omega_3(x) = \frac{1}{4} T_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$$

$$\text{从而有 } a = \frac{3}{4}$$

13. 求 $f(x) = \sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最佳一次逼近多项式, 并估计误差。

解:

$$\because f(x) = \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x \leq 0$$

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{2}{\pi},$$

$$\cos x_2 = \frac{2}{\pi},$$

$$\therefore x_2 = \arccos \frac{2}{\pi} \approx 0.88069$$

$$f(x_2) = 0.77118$$

$$a_0 = \frac{f(a) + f(x_2)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{a + x_2}{2}$$

$$= 0.10526$$

于是得 $f(x)$ 的最佳一次逼近多项式为

$$P_1(x) = 0.10526 + \frac{2}{\pi}x$$

即

$$\sin x \approx 0.10526 + \frac{2}{\pi}x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

误差限为

$$\|\sin x - P_1(x)\|_{\infty}$$

$$= |\sin 0 - P_1(0)|$$

$$= 0.10526$$

14. 求 $f(x) = e^x$ 在 $[0, 1]$ 上的最佳一次逼近多项式。

解:

$$\because f(x) = e^x, x \in [0, 1]$$

$$\therefore f'(x) = e^x,$$

$$f''(x) = e^x > 0$$

$$a_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = e - 1$$

$$e^{x_2} = e - 1$$

$$x_2 = \ln(e - 1)$$

$$f(x_2) = e^{x_2} = e - 1$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{f(a) + f(x_2)}{2} - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{a + x_2}{2} \\ &= \frac{1 + (e - 1)}{2} - (e - 1) \frac{\ln(e - 1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(e - 1) \end{aligned}$$

于是得 $f(x)$ 的最佳一次逼近多项式为

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{e}{2} + (e - 1) \left[x - \frac{1}{2} \ln(e - 1) \right] \\ &= (e - 1)x + \frac{1}{2} [e - (e - 1) \ln(e - 1)] \end{aligned}$$

15. 求 $f(x) = x^4 + 3x^3 - 1$ 在区间 $[0, 1]$ 上的三次最佳一致逼近多项式。

解:

$$\because f(x) = x^4 + 3x^3 - 1, x \in [0, 1]$$

$$\text{令 } t = 2\left(x - \frac{1}{2}\right), \text{ 则 } t \in [-1, 1]$$

$$\text{且 } x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(t) &= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)^3 - 1 \\ &= \frac{1}{16}(t^4 + 10t^3 + 24t^2 + 22t - 9) \end{aligned}$$

$$\text{令 } g(t) = 16f(t), \text{ 则 } g(t) = t^4 + 10t^3 + 24t^2 + 22t - 9$$

若 $g(t)$ 为区间 $[-1, 1]$ 上的最佳三次逼近多项式 $P_3^*(t)$ 应满足

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |g(t) - P_3^*(t)| = \min$$

$$\text{当 } g(t) - P_3^*(t) = \frac{1}{2^3} T_4(t) = \frac{1}{8}(8t^4 - 8t^2 + 1)$$

时, 多项式 $g(t) - P_3^*(t)$ 与零偏差最小, 故

$$\begin{aligned} {}_3^*(t) &= g(t) - \frac{1}{2^3} T_4(t) \\ &= 10t^3 + 25t^2 + 22t - \frac{73}{8} \end{aligned}$$

进而, $f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式为 $\frac{1}{16} P_3^*(t)$, 则 $f(x)$ 的三次最佳一致逼近多项式为

$$\begin{aligned} P_3^*(t) &= \frac{1}{16} [10(2x-1)^3 + 25(2x-1)^2 + 22(2x-1) - \frac{73}{8}] \\ &= 5x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{129}{128} \end{aligned}$$

16. $f(x) = |x|$, 在 $[-1, 1]$ 上求关于 $\Phi = \text{span}\{1, x^2, x^4\}$ 的最佳平方逼近多项式。

解:

$$\because f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$$

$$\text{若 } (f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x^2, \varphi_2 = x^4$, 则

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 2, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{2}{5}, \|\varphi_2\|_2^2 = \frac{2}{9},$$

$$(f, \varphi_0) = 1, (f, \varphi_1) = \frac{1}{2}, (f, \varphi_2) = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{2}{5}, (\varphi_0, \varphi_2) = \frac{2}{7}, (\varphi_1, \varphi_2) = \frac{2}{9},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{5} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

解得

$$\begin{cases} a_0 = 0.1171875 \\ a_1 = 1.640625 \\ a_2 = -0.8203125 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = \text{span}\{1, x^2, x^4\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$\begin{aligned} S^*(x) &= a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 \\ &= 0.1171875 + 1.640625x^2 - 0.8203125x^4 \end{aligned}$$

17. 求函数 $f(x)$ 在指定区间上对于 $\Phi = \text{span}\{1, x\}$ 的最佳逼近多项式:

$$(1) f(x) = \frac{1}{x}, [1, 3]; (2) f(x) = e^x, [0, 1];$$

$$(3) f(x) = \cos \pi x, [0, 1]; (4) f(x) = \ln x, [1, 2];$$

解:

$$(1) \because f(x) = \frac{1}{x}, [1, 3];$$

$$\text{若 } (f, g) = \int_1^3 f(x)g(x)dx$$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$, 则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 2, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{26}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = 4,$$

$$(f, \varphi_0) = \ln 3, (f, \varphi_1) = 2,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & \frac{26}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 1.1410 \\ a_1 = -0.2958 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = \text{span}\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$\begin{aligned} S^*(x) &= a_0 + a_1 x \\ &= 1.1410 - 0.2958x \end{aligned}$$

$$(2) \because f(x) = e^x, [0, 1]$$

$$\text{若 } (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$, 则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = e-1, (f, \varphi_1) = 1,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 0.1878 \\ a_1 = 1.6244 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = \text{span}\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$\begin{aligned} S^*(x) &= a_0 + a_1 x \\ &= 0.1878 + 1.6244x \end{aligned}$$

$$(3) \because f(x) = \cos \pi x, x \in [0, 1]$$

$$\text{若 } (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$, 则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{1}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = 0, (f, \varphi_1) = -\frac{2}{\pi^2},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\pi^2} \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = 1.2159 \\ a_1 = -0.24317 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = \text{span}\{1, x\}$ 的最佳平方逼近多项式为

$$\begin{aligned} S^*(x) &= a_0 + a_1 x \\ &= 1.2159 - 0.24317x \end{aligned}$$

$$(4) \because f(x) = \ln x, x \in [1, 2]$$

$$\text{若 } (f, g) = \int_1^2 f(x)g(x)dx$$

且 $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = x$, 则有

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 1, \|\varphi_1\|_2^2 = \frac{7}{3},$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{3}{2},$$

$$(f, \varphi_0) = 2 \ln 2 - 1, (f, \varphi_1) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4},$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \ln 2 - 1 \\ 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a_0 = -0.6371 \\ a_1 = 0.6822 \end{cases}$$

故 $f(x)$ 关于 $\Phi = \text{span}\{1, x\}$ 最佳平方逼近多项式为

$$\begin{aligned} S^*(x) &= a_0 + a_1 x \\ &= -0.6371 + 0.6822x \end{aligned}$$

18. $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$, 在 $[-1, 1]$ 上按勒让德多项式展开求三次最佳平方逼近多项式。

解:

$$\because f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x, x \in [-1, 1]$$

按勒让德多项式 $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ 展开

$$(f(x), P_0(x)) = \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi}{2} x dx = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$(f(x), P_1(x)) = \int_{-1}^1 x \sin \frac{\pi}{2} x dx = \frac{8}{\pi^2}$$

$$(f(x), P_2(x)) = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2} x dx = 0$$

$$(f(x), P_3(x)) = \int_{-1}^1 \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) \sin \frac{\pi}{2} x dx = \frac{48(\pi^2 - 10)}{\pi^4}$$

则

$$a_0^* = (f(x), P_0(x)) / 2 = 0$$

$$a_1^* = 3(f(x), P_1(x)) / 2 = \frac{12}{\pi^2}$$

$$a_2^* = 5(f(x), P_2(x)) / 2 = 0$$

$$a_3^* = 7(f(x), P_3(x)) / 2 = \frac{168(\pi^2 - 10)}{\pi^4}$$

从而 $f(x)$ 的三次最佳平方逼近多项式为

$$S_3^*(x) = a_0^* P_0(x) + a_1^* P_1(x) + a_2^* P_2(x) + a_3^* P_3(x)$$

$$= \frac{12}{\pi^2} x + \frac{168(\pi^2 - 10)}{\pi^4} \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)$$

$$= \frac{420(\pi^2 - 10)}{\pi^4} x^3 + \frac{120(21 - 2\pi^2)}{\pi^4}$$

$$\approx 1.5531913x - 0.5622285x^3$$

19. 观测物体的直线运动，得出以下数据：

时间 t(s)	0	0.9	1.9	3.0	3.9	5.0
距离 s(m)	0	10	30	50	80	110

求运动方程。

解：

被观测物体的运动距离与运动时间大体为线性函数关系，从而选择线性方程

$$s = a + bt$$

$$\text{令 } \Phi = \text{span}\{1, t\}$$

则

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 6, \|\varphi_1\|_2^2 = 53.63,$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = 14.7,$$

$$(\varphi_0, s) = 280, (\varphi_1, s) = 1078,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 6 & 14.7 \\ 14.7 & 53.63 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 1078 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a = -7.855048 \\ b = 22.25376 \end{cases}$$

故物体运动方程为

$$S = 22.25376t - 7.855048$$

20. 已知实验数据如下:

x_i	19	25	31	38	44
y_j	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $s = a + bx^2$ 的经验公式, 并计算均方误差。

解:

若 $s = a + bx^2$, 则

$$\Phi = \text{span}\{1, x^2\}$$

则

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 5, \|\varphi_1\|_2^2 = 7277699,$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = 5327,$$

$$(f, \varphi_0) = 271.4, (f, \varphi_1) = 369321.5,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a = 0.9726046 \\ b = 0.0500351 \end{cases}$$

$$\text{故 } y = 0.9726046 + 0.0500351x^2$$

$$\text{均方误差为 } \delta = \left[\sum_{j=0}^4 (y(x_j) - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0.1226$$

21. 在某佛堂反应中, 由实验得分解物浓度与时间关系如下:

时间 t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
浓 度	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64
$y(\times 10^{-4})$												

用最小二乘法求 $y = f(t)$ 。

解:

观察所给数据的特点, 采用方程

$$y = ae^{\frac{-b}{t}}, (a, b > 0)$$

两边同时取对数, 则

$$\ln y = \ln a - \frac{b}{t}$$

$$\text{取 } \Phi = \text{span}\left\{1, -\frac{1}{t}\right\}, S = \ln y, x = -\frac{1}{t}$$

$$\text{则 } S = a^* + b^* x$$

$$\|\varphi_0\|_2^2 = 11, \|\varphi_1\|_2^2 = 0.062321,$$

$$(\varphi_0, \varphi_1) = -0.603975,$$

$$(\varphi_0, f) = -87.674095, (\varphi_1, f) = 5.032489,$$

则法方程组为

$$\begin{pmatrix} 11 & -0.603975 \\ -0.603975 & 0.062321 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -87.674095 \\ 5.032489 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} a^* = -7.5587812 \\ b^* = 7.4961692 \end{cases}$$

因此

$$a = e^{a^*} = 5.2151048$$

$$b = b^* = 7.4961692$$

$$\therefore y = 5.2151048 e^{-\frac{7.4961692}{t}}$$

22. 给出一张记录 $\{f_k\} = (4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3)$, 用 FFT 算法求 $\{c_k\}$ 的离散谱。

解:

$$\{f_k\} = (4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3),$$

$$\text{则 } k = 0, 1, \dots, 7, N = 8$$

$$\omega^0 = \omega^4 = 1,$$

$$\omega^1 = \omega^5 = e^{-\frac{\pi}{4}i},$$

$$\omega^2 = \omega^6 = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i,$$

$$\omega^3 = \omega^7 = e^{-\frac{3\pi}{4}i},$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	4	3	2	1	0	1	2	3
A_1	4	4	4	2ω	4	0	4	$-2\omega^3$
A_2	8	4	0	4	8	$2\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{2}$
C_j	16	$4+2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4-2\sqrt{2}$	0	$4+2\sqrt{2}$

23. 用辗转相除法将 $R_{22}(x) = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 + 6x + 6}$ 化为连分式。

解

$$\begin{aligned}
 R_{22}(x) &= \frac{3x^2 + 6x}{x^2 + 6x + 6} \\
 &= 3 - \frac{12x + 18}{x^2 + 6x + 6} \\
 &= 3 - \frac{12}{x + \frac{9}{2} - \frac{\frac{3}{4}}{x + \frac{3}{2}}} \\
 &= 3 - \frac{12}{x + 4.5} - \frac{0.75}{x + 1.5}
 \end{aligned}$$

24. 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的 (3,3) 阶帕德逼近 $R_{33}(x)$ 。

解:

由 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

得 $C_0 = 0$,

$$C_1 = 1,$$

$$C_2 = 0,$$

$$C_3 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6},$$

$$C_4 = 0,$$

$$C_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120},$$

$$C_6 = 0,$$

从而

$$-C_1b_3 - C_2b_2 - C_3b_1 = C_4$$

$$-C_2b_3 - C_3b_2 - C_4b_1 = C_5$$

$$-C_3b_3 - C_4b_2 - C_5b_1 = C_6$$

即

$$-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{120} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{120} \\ 0 \end{pmatrix}$$

从而解得

$$\begin{cases} b_3 = 0 \\ b_2 = \frac{1}{20} \\ b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{又} \because a_k = \sum_{j=0}^{k-1} C_j b_{k-j} + C_k \quad (k=0,1,2,3)$$

则

$$a_0 = C_0 = 0$$

$$a_1 = C_0b_1 + C_1 = 0$$

$$a_2 = C_0b_2 + C_1b_1 = 0$$

$$a_3 = C_0b_3 + C_1b_2 + C_2b_1 + C_3 = -\frac{7}{60}$$

故

$$\begin{aligned} R_{33}(x) &= \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{1 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3} \\ &= \frac{x - \frac{7}{60}x^3}{1 + \frac{1}{20}x^2} \\ &= \frac{60x - 7x^3}{60 + 3x^3} \end{aligned}$$

25. 求 $f(x) = e^x$ 在 $x=0$ 处的 $(2,1)$ 阶帕德逼近 $R_{21}(x)$ 。

解:

由 $f(x) = e^x$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

得

$$C_0 = 1,$$

$$C_1 = 1,$$

$$C_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2},$$

$$C_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6},$$

从而

$$-C_2b_1 = C_3$$

即

$$-\frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{6}$$

解得

$$b_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\text{又} \because a_k = \sum_{j=0}^{k-1} C_j b_{k-j} + C_k \quad (k=0,1,2)$$

则

$$a_0 = C_0 = 1$$

$$a_1 = C_0b_1 + C_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = C_1b_1 + C_2 = \frac{1}{6}$$

课后答案网 www.khdaw.com

故

$$\begin{aligned} R_{21}(x) &= \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{1 + b_1x} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2}{1 - \frac{1}{3}x} \\ &= \frac{6 + 4x + x^2}{6 - 2x} \end{aligned}$$

第四章 数值积分与数值微分

1. 确定下列求积公式中的特定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：

$$(1) \int_{-h}^h f(x) dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h);$$

$$(2) \int_{-2h}^{2h} f(x) dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h);$$

$$(3) \int_{-1}^1 f(x) dx \approx [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3;$$

$$(4) \int_0^h f(x) dx \approx A_1f(0) + A_2f(h)/2 + ah[f'(0) - f'(h)];$$

解：

求解求积公式的代数精度时，应根据代数精度的定义，即求积公式对于次数不超过 m 的多项式均能准确地成立，但对于 $m+1$ 次多项式就不准确成立，进行验证性求解。

$$(1) \text{ 若 } (1) \int_{-h}^h f(x) dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$$

令 $f(x) = 1$ ，则

$$2h = A_{-1} + A_0 + A_1$$

令 $f(x) = x$ ，则

$$0 = -A_{-1}h + A_1h$$

令 $f(x) = x^2$ ，则

$$\frac{2}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1$$

从而解得

$$\begin{cases} A_0 = \frac{4}{3}h \\ A_{-1} = \frac{1}{3}h \\ A_1 = \frac{1}{3}h \end{cases}$$

令 $f(x) = x^3$ ，则

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \int_{-h}^h x^3 dx = 0$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h) = 0$$

故 $\int_{-h}^h f(x) dx = A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$ 成立。

令 $f(x) = x^4$ ，则

$$\int_{-h}^h f(x) dx = \int_{-h}^h x^4 dx = \frac{2}{5} h^5$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h) = \frac{2}{3} h^5$$

故此时,

$$\int_{-h}^h f(x) dx \neq A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$$

$$\text{故 } \int_{-h}^h f(x) dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$$

具有 3 次代数精度。

$$(2) \text{ 若 } \int_{-2h}^{2h} f(x) dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$$

令 $f(x) = 1$, 则

$$4h = A_{-1} + A_0 + A_1$$

令 $f(x) = x$, 则

$$0 = -A_{-1}h + A_1h$$

令 $f(x) = x^2$, 则

$$\frac{16}{3} h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1$$

从而解得

$$\begin{cases} A_0 = -\frac{4}{3}h \\ A_1 = \frac{8}{3}h \\ A_{-1} = \frac{8}{3}h \end{cases}$$

令 $f(x) = x^3$, 则

$$\int_{-2h}^{2h} f(x) dx = \int_{-2h}^{2h} x^3 dx = 0$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h) = 0$$

故 $\int_{-2h}^{2h} f(x) dx = A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$ 成立。

令 $f(x) = x^4$, 则

$$\int_{-2h}^{2h} f(x) dx = \int_{-2h}^{2h} x^4 dx = \frac{64}{5} h^5$$

$$A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h) = \frac{16}{3} h^5$$

故此时,

$$\int_{-2h}^{2h} f(x) dx \neq A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$$

因此,

$$\int_{-2h}^{2h} f(x) dx \approx A_{-1}f(-h) + A_0f(0) + A_1f(h)$$

具有 3 次代数精度。

$$(3) \text{ 若 } \int_{-1}^1 f(x) dx \approx [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$$

令 $f(x) = 1$, 则

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 = [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$$

令 $f(x) = x$, 则

$$0 = -1 + 2x_1 + 3x_2$$

令 $f(x) = x^2$, 则

$$2 = 1 + 2x_1^2 + 3x_2^2$$

从而解得

$$\begin{cases} x_1 = -0.2899 \\ x_2 = 0.5266 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_1 = 0.6899 \\ x_2 = 0.1266 \end{cases}$$

令 $f(x) = x^3$, 则

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

$$[f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3 \neq 0$$

故 $\int_{-1}^1 f(x) dx = [f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)]/3$ 不成立。

因此, 原求积公式具有 2 次代数精度。

$$(4) \text{ 若 } \int_0^h f(x) dx \approx h[f(0) + f(h)]/2 + ah^2[f'(0) - f'(h)]$$

令 $f(x) = 1$, 则

$$\int_0^h f(x) dx = h,$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=h$$

令 $f(x)=x$ ，则

$$\int_0^h f(x)dx = \int_0^h xdx = \frac{1}{2}h^2$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^2$$

令 $f(x)=x^2$ ，则

$$\int_0^h f(x)dx = \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3}h^3$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+ah^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^3-2ah^2$$

故有

$$\frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{2}h^3 - 2ah^2$$

$$a = \frac{1}{12}$$

令 $f(x)=x^3$ ，则

$$\int_0^h f(x)dx = \int_0^h x^3 dx = \frac{1}{4}h^4$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^4-\frac{1}{4}h^4=\frac{1}{4}h^4$$

令 $f(x)=x^4$ ，则

$$\int_0^h f(x)dx = \int_0^h x^4 dx = \frac{1}{5}h^5$$

$$h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]=\frac{1}{2}h^5-\frac{1}{3}h^5=\frac{1}{6}h^5$$

故此时，

$$\int_0^h f(x)dx \neq h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)],$$

$$\text{因此，} \int_0^h f(x)dx \approx h[f(0)+f(h)]/2+\frac{1}{12}h^2[f'(0)-f'(h)]$$

具有 3 次代数精度。

2. 分别用梯形公式和辛普森公式计算下列积分：

$$(1) \int_0^1 \frac{x}{4+x^2} dx, n=8;$$

$$(2) \int_0^1 \frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x} dx, n=10;$$

$$(3) \int_1^9 \sqrt{x} dx, n=4;$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-\sin^2 \varphi} d\varphi, n=6;$$

解:

$$(1) n=8, a=0, b=1, h=\frac{1}{8}, f(x)=\frac{x}{4+x^2}$$

复化梯形公式为

$$T_8 = \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{k=1}^7 f(x_k) + f(b)] = 0.11140$$

复化辛普森公式为

$$S_8 = \frac{h}{6} [f(a) + 4 \sum_{k=0}^7 f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{k=1}^7 f(x_k) + f(b)] = 0.11157$$

$$(2) n=10, a=0, b=1, h=\frac{1}{10}, f(x)=\frac{(1-e^{-x})^{\frac{1}{2}}}{x}$$

复化梯形公式为

$$T_{10} = \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{k=1}^9 f(x_k) + f(b)] = 1.39148$$

复化辛普森公式为

$$S_{10} = \frac{h}{6} [f(a) + 4 \sum_{k=0}^9 f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{k=1}^9 f(x_k) + f(b)] = 1.45471$$

$$(3) n=4, a=1, b=9, h=2, f(x)=\sqrt{x},$$

复化梯形公式为

$$T_4 = \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{k=1}^3 f(x_k) + f(b)] = 17.22774$$

复化辛普森公式为

$$S_4 = \frac{h}{6} [f(a) + 4 \sum_{k=0}^3 f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{k=1}^3 f(x_k) + f(b)] = 17.32222$$

$$(4) n=6, a=0, b=\frac{\pi}{6}, h=\frac{\pi}{36}, f(x)=\sqrt{4-\sin^2 \varphi}$$

复化梯形公式为

$$T_6 = \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{k=1}^5 f(x_k) + f(b)] = 1.03562$$

复化辛普森公式为

$$S_6 = \frac{h}{6} [f(a) + 4 \sum_{k=0}^5 f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2 \sum_{k=1}^5 f(x_k) + f(b)] = 1.03577$$

3. 直接验证柯特斯教材公式 (2.4) 具有 5 交代数精度。

证明:

柯特斯公式为

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

令 $f(x) = 1$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{90}$$

$$\frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] = b-a$$

令 $f(x) = x$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x dx = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

$$\frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$$

令 $f(x) = x^2$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

$$\frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)$$

令 $f(x) = x^3$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x^3 dx = \frac{1}{4} (b^4 - a^4)$$

$$\frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] = \frac{1}{4} (b^4 - a^4)$$

令 $f(x) = x^4$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^4 dx = \frac{1}{5}(b^5 - a^5)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] = \frac{1}{5}(b^5 - a^5)$$

令 $f(x) = x^5$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x^5 dx = \frac{1}{6}(b^6 - a^6)$$

$$\frac{b-a}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] = \frac{1}{6}(b^6 - a^6)$$

令 $f(x) = x^6$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \neq \frac{b-a}{90}[7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

因此, 该柯特斯公式具有 5 次代数精度。

4. 用辛普森公式求积分 $\int_0^1 e^{-x} dx$ 并估计误差。

解:

辛普森公式为

$$S = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

此时,

$$a=0, b=1, f(x)=e^{-x},$$

从而有

$$S = \frac{1}{6}(1 + 4e^{-\frac{1}{2}} + e^{-1}) = 0.63233$$

误差为

$$\begin{aligned} |R(f)| &= \left| -\frac{b-a}{180} \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta) \right| \\ &\leq \frac{1}{180} \times \frac{1}{2^4} \times e^0 = 0.00035, \eta \in (0,1) \end{aligned}$$

5. 推导下列三种矩形求积公式:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3;$$

证明:

$$(1) \because f(x) = f(a) + f'(\eta)(x-a), \eta \in (a, b)$$

两边同时在 $[a, b]$ 上积分, 得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(a) + f'(\eta) \int_a^b (x-a) dx$$

即

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$$(2) \because f(x) = f(b) - f'(\eta)(b-x), \eta \in (a, b)$$

两边同时在 $[a, b]$ 上积分, 得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(b) - f'(\eta) \int_a^b (b-x) dx$$

即

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(b) - \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

$$(3) \because f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2, \eta \in (a, b)$$

两连边同时在 $[a, b]$ 上积分, 得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx$$

即

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3;$$

6. 若用复化梯形公式计算积分 $I = \int_0^1 e^x dx$, 问区间 $[0, 1]$ 应分多少等分才能使截断误差不超

过 $\frac{1}{2} \times 10^{-5}$? 若改用复化辛普森公式, 要达到同样精度区间 $[0, 1]$ 应分多少等分?

解:

采用复化梯形公式时, 余项为

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta), \eta \in (a, b)$$

$$\text{又} \because I = \int_0^1 e^x dx$$

$$\text{故} f(x) = e^x, f''(x) = e^x, a = 0, b = 1.$$

$$\therefore |R_n(f)| = \frac{1}{12} h^2 |f''(\eta)| \leq \frac{e}{12} h^2$$

若 $|R_n(f)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$, 则

$$h^2 \leq \frac{6}{e} \times 10^{-5}$$

当对区间 $[0,1]$ 进行等分时,

$$h = \frac{1}{n},$$

故有

$$n \geq \sqrt{\frac{e}{6} \times 10^{-5}} = 212.85$$

因此, 将区间 213 等分时可以满足误差要求
采用复化辛普森公式时, 余项为

$$R_n(f) = -\frac{b-a}{180} \left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta), \eta \in (a,b)$$

又 $\because f(x) = e^x$,

$$\therefore f^{(4)}(x) = e^x,$$

$$\therefore |R_n(f)| = -\frac{1}{2880} h^4 |f^{(4)}(\eta)| \leq \frac{e}{2880} h^4$$

若 $|R_n(f)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5}$, 则

$$h^4 \leq \frac{1440}{e} \times 10^{-5}$$

当对区间 $[0,1]$ 进行等分时

$$n = \frac{1}{h}$$

故有

$$n \geq \left(\frac{1440}{e} \times 10^{-5}\right)^{\frac{1}{4}} = 3.71$$

因此, 将区间 8 等分时可以满足误差要求。

7. 如果 $f''(x) > 0$, 证明用梯形公式计算积分 $I = \int_a^b f(x) dx$ 所得结果比准确值 I 大, 并说明其几何意义。

解: 采用梯形公式计算积分时, 余项为

$$R_T = -\frac{f''(\eta)}{12} (b-a)^3, \eta \in [a,b]$$

又 $\because f''(x) > 0$ 且 $b > a$

$$\therefore R_T < 0$$

又 $\because R_T = 1 - T$

$\therefore I < T$

即计算值比准确值大。

其几何意义为, $f''(x) > 0$ 为下凸函数, 梯形面积大于曲边梯形面积。

8. 用龙贝格求积方法计算下列积分, 使误差不超过 10^{-5} .

$$(1) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$(2) \int_0^{2\pi} x \sin x dx$$

$$(3) \int_0^3 x \sqrt{1+x^2} dx.$$

解:

$$(1) I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x} dx$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$
0	0.7717433			
1	0.7280699	0.7135121		
2	0.7169828	0.7132870	0.7132720	
3	0.7142002	0.7132726	0.7132717	0.7132717

因此 $I = 0.713727$

$$(2) I = \int_0^{2\pi} x \sin x dx$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$
0	3.451313×10^{-6}	
1	8.628283×10^{-7}	$-4.446923 \times 10^{-21}$

因此 $I \approx 0$

$$(3) I = \int_0^3 x \sqrt{1+x^2} dx$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$	$T_5^{(k)}$
0	14.2302495					
1	11.1713699	10.1517434				
2	10.4437969	10.2012725	10.2045744			
3	10.2663672	10.2072240	10.2076207	10.2076691		
4	10.2222702	10.2075712	10.2075943	10.2075939	10.2075936	
5	10.2112607	10.2075909	10.2075922	10.2075922	10.2075922	10.2075922

因此 $I \approx 10.2075922$

9. 用 $n=2,3$ 的高斯-勒让德公式计算积分

$$\int_1^3 e^x \sin x dx.$$

解:

$$I = \int_1^3 e^x \sin x dx.$$

$\because x \in [1,3]$, 令 $t = x - 2$, 则 $t \in [-1,1]$

用 $n=2$ 的高斯-勒让德公式计算积分

$$I \approx 0.5555556 \times [f(-0.7745967) + f(0.7745967)] + 0.8888889 \times f(0) \\ \approx 10.9484$$

用 $n=3$ 的高斯-勒让德公式计算积分

$$I \approx 0.3478548 \times [f(-0.8611363) + f(0.8611363)] \\ + 0.6521452 \times [f(-0.3399810) + f(0.3399810)] \\ \approx 10.95014$$

10 地球卫星轨道是一个椭圆, 椭圆周长的计算公式是

$$S = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

这是 a 是椭圆的半径轴, c 是地球中心与轨道中心(椭圆中心)的距离, 记 h 为近地点距离, H 为远地点距离, $R=6371$ (km) 为地球半径, 则

$$a = (2R + H + h) / 2, c = (H - h) / 2.$$

我国第一颗地球卫星近地点距离 $h=439$ (km), 远地点距离 $H=2384$ (km)。试求卫星轨道的周长。

解:

$$\because R = 6371, h = 439, H = 2384$$

从而有。

$$a = (2R + H + h) / 2 = 7782.5$$

$$c = (H - h) / 2 = 972.5$$

$$S = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$
0	1.564640		
1	1.564646	1.564648	
2	1.564646	1.564646	1.564646

$$I \approx 1.564646$$

$$S \approx 48708(km)$$

即人造卫星轨道的周长为 48708km

11. 证明等式

$$n \sin \frac{\pi}{n} = \pi - \frac{\pi^3}{3!n^2} + \frac{\pi^5}{5!n^4} - \dots$$

试依据 $n \sin(\frac{\pi}{n}) (n=3, 6, 12)$ 的值, 用外推算法求 π 的近似值。

解

$$\text{若 } f(n) = n \sin \frac{\pi}{n},$$

$$\text{又 } \because \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

$\therefore$ 此函数的泰勒展式为

$$f(n) = n \sin \frac{\pi}{n}$$

$$= n \left[\frac{\pi}{n} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{n} \right)^5 - \dots \right]$$

$$= \pi - \frac{\pi^3}{3!n^2} + \frac{\pi^5}{5!n^4} - \dots$$

$$T_n^{(k)} \approx \pi$$

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } n \sin \frac{\pi}{n} = 2.598076$$

$$\text{当 } n=6 \text{ 时, } n \sin \frac{\pi}{n} = 3$$

$$\text{当 } n=12 \text{ 时, } n \sin \frac{\pi}{n} = 3.105829$$

由外推法可得

n	$T_0^{(n)}$	$T_1^{(n)}$	$T_2^{(n)}$
3	2.598076		
6	3.000000	3.133975	
9	3.105829	3.141105	3.141580

故 $\pi \approx 3.14158$

12. 用下列方法计算积分 $\int_1^3 \frac{dy}{y}$, 并比较结果。

(1) 龙贝格方法;

(2) 三点及五点高斯公式;

(3)将积分区间分为四等分，用复化两点高斯公式。

解

$$I = \int_1^3 \frac{dy}{y}$$

(1)采用龙贝格方法可得

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k)}$	$T_2^{(k)}$	$T_3^{(k)}$	$T_4^{(k)}$
0	1.333333				
1	1.166667	1.099259			
2	1.116667	1.100000	1.099259		
3	1.103211	1.098726	1.098641	1.098613	
4	1.099768	1.098620	1.098613	1.098613	1.098613

故有 $I \approx 1.098613$

(2)采用高斯公式时

$$I = \int_1^3 \frac{dy}{y}$$

此时 $y \in [1, 3]$,

令 $x = y - z$, 则 $x \in [-1, 1]$,

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{x+2},$$

利用三点高斯公式，则

$$I = 0.5555556 \times [f(-0.7745967) + f(0.7745967)] + 0.8888889 \times f(0) \\ \approx 1.098039$$

利用五点高斯公式，则

$$I \approx 0.2369239 \times [f(-0.9061798) + f(0.9061798)] \\ + 0.4786287 \times [f(-0.5384693) + f(0.5384693)] + 0.5688889 \times f(0) \\ \approx 1.098609$$

(3)采用复化两点高斯公式

将区间 $[1, 3]$ 四等分，得

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ = \int_1^{1.5} \frac{dy}{y} + \int_{1.5}^2 \frac{dy}{y} + \int_2^{2.5} \frac{dy}{y} + \int_{2.5}^3 \frac{dy}{y}$$

作变换 $y = \frac{x+5}{4}$, 则

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x+5} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{x+5},$$

$$I_1 \approx f(-0.5773503) + f(0.5773503) \approx 0.4054054$$

作变换 $y = \frac{x+7}{4}$, 则

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x+7} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{x+7},$$

$$I_2 \approx f(-0.5773503) + f(0.5773503) \approx 0.2876712$$

作变换 $y = \frac{x+9}{4}$, 则

$$I_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x+9} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{x+9},$$

$$I_3 \approx f(-0.5773503) + f(0.5773503) \approx 0.2231405$$

作变换 $y = \frac{x+11}{4}$, 则

$$I_4 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x+11} dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{x+11},$$

$$I_4 \approx f(-0.5773503) + f(0.5773503) \approx 0.1823204$$

因此, 有

$$I \approx 1.098538$$

13. 用三点公式和积分公式求 $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x=1.0, 1.1$, 和 1.2 处的导数值, 并估计误差。

$f(x)$ 的值由下表给出:

x	1.0	1.1	1.2
F(x)	0.2500	0.2268	0.2066

解:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

由带余项的三点求导公式可知

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi)$$

$$\text{又} \because f(x_0) = 0.2500, f(x_1) = 0.2268, f(x_2) = 0.2066,$$

$$\therefore f'(x_0) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] = 0.247$$

$$f'(x_1) \approx \frac{1}{2h}[-f(x_0) + f(x_2)] = -0.217$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}[f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] = -0.187$$

$$\text{又} \because f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\therefore f'''(x) = \frac{-24}{(1+x)^5}$$

$$\text{又} \because x \in [1.0, 1.2]$$

$$\therefore |f'''(\xi)| \leq 0.75$$

故误差分别为

$$|R(x_0)| = \left| \frac{h^2}{3} f'''(\xi) \right| \leq 2.5 \times 10^{-3}$$

$$|R(x_1)| = \left| \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \right| \leq 1.25 \times 10^{-3}$$

$$|R(x_2)| = \left| \frac{h^2}{3} f'''(\xi) \right| \leq 2.5 \times 10^{-3}$$

利用数值积分求导,

$$\text{设 } \varphi(x) = f'(x)$$

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx$$

由梯形求积公式得

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx = \frac{h}{2} [\varphi(x_k) + \varphi(x_{k+1})]$$

从而有

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \frac{h}{2}[\varphi(x_k) + \varphi(x_{k+1})]$$

故

$$\varphi(x_0) + \varphi(x_1) = \frac{2}{h}[f(x_1) - f(x_0)]$$

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \frac{2}{h}[f(x_2) - f(x_1)]$$

$$\text{又} \because f(x_{k+1}) = f(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx$$

$$\text{且} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx = h[\varphi(x_{k-1}) + \varphi(x_{k+1})]$$

从而有

$$f(x_{k+1}) = f(x_{k-1}) + h[\varphi(x_{k-1}) + \varphi(x_{k+1})]$$

$$\text{故} \varphi(x_0) + \varphi(x_2) = \frac{1}{h}[f(x_2) - f(x_0)]$$

即

$$\begin{cases} \varphi(x_0) + \varphi(x_1) = -0.464 \\ \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = -0.404 \\ \varphi(x_0) + \varphi(x_2) = -0.434 \end{cases}$$

解方程组可得

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = -0.247 \\ \varphi(x_1) = -0.217 \\ \varphi(x_2) = -0.187 \end{cases}$$

第5章 数值分析课后习题全解

第5章：解线性方程组的直接方法

1. 证明：由消元公式及 A 的对称性得

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} a_{j1} = - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{(2)}, i, j = 2, 3, \dots, n$$

故 A_2 对称

2. 证明：(1) 因 A 对称正定，故

$$a_{ii} = (A e_i, e_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$$

其中 $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ 为第 i 个单位向量.

(2) 由 A 的对称性及消元公式得

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} =$$

$$a_{ji} - \frac{a_{j1}}{a_{11}} a_{1i} = a_{ji}^{(2)}, i, j=2, \dots, n$$

故 A_2 也对称.

又

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = L_1 A A_1^T$$

其中

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

显然 L_1 非奇异, 从而对任意的 $x \neq 0$, 有

$$L_1^T X \neq 0, (x, L_1 A A_1^T X) = (L_1^T x, A L_1^T X) > 0 \quad (\text{由 } A \text{ 的正定性})$$

故 $L_1 A A_1^T$ 正定.

又 $L_1 A L_1^T = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, 而 $a_{11} > 0$, 故 A_2 正定.

3. 证明 由矩阵乘法简单运算即得证.

4. 解 设有分解

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & \\ 3 & -2 & 1 & \\ & 2 & 5 & 3 \\ & & -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ 3 & \alpha_2 & 1 & \\ & 2 & \alpha_3 & 3 \\ & & -1 & \alpha_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \beta_2 & \\ & & 1 & \beta_3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

由公式

$$\begin{cases} b_1 = a_{11} c_1 = \alpha_1 \beta_1 \\ b_i = \alpha_i \beta_{i-1} + \alpha_i, i = 2, 3, \dots, n \\ c_i = \alpha_i \beta_i, i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases}$$

其中 b_i, α_i, c_i 分别是系数矩阵的主对角线元素及下边和上边的次对角线元素. 故有

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4, \beta_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = -\frac{7}{2}, \beta_2 = -\frac{2}{7} \\ \alpha_3 = \frac{39}{7}, \beta_3 = \frac{7}{13} \\ \alpha_4 = \frac{85}{13} \end{cases}$$

从而有

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & \\ 3 & -2 & 1 & \\ & 2 & 5 & 3 \\ & & -1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ 3 & -\frac{7}{2} & & \\ & 2 & \frac{39}{7} & \\ & & -1 & \frac{85}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & -\frac{2}{7} & \\ & & 1 & \frac{7}{13} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } y_1 &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, & y_2 &= \frac{2-3y_1}{-\frac{7}{2}} = \frac{5}{7} \\ y_3 &= \frac{10-2y_2}{\frac{39}{7}} = \frac{20}{13}, & y_4 &= \frac{5+y_3}{\frac{85}{13}} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{故 } x_4=1, x_3=\frac{20}{13}-\frac{7}{13}x_4=1, x_2=\frac{5}{7}+\frac{2}{7}x_3=1, x_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_2=1$$

5. 解 (1) 设 U 为上三角阵

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\text{因 } u_{nn}x_n = d_n, \text{ 故 } x_n = \frac{d_n}{u_{nn}}.$$

$$\text{因 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & -3 \\ & \vdots & 0 & -2 & 1 & 7 \\ & & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} u_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j = d_i, \text{ 故}$$

$$x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j}{u_{ii}}, i=n-1, n-2, \dots, 1$$

当 U 为下三角阵时

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{21} & u_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$\text{得, } x_1 = \frac{d_1}{u_{11}}, \quad x_i = \frac{d_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ij}x_j}{u_{ii}}, i=2, 3, \dots, n.$$

(2) 除法次数为 n, 乘法次数为

$$1+2+\dots+(n-1)=n(n-1)/2$$

故总的乘法次数为 $n+n(n-1)/2=n(n+1)/2$.

(3) 设 U 为上三角阵, $U^{-1}=S$, 则 S 也是上三角阵. 由

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & s_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{得 } s_{ii} = \frac{1}{u_{ii}}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$s_{ij} = -\frac{\sum_{k=i+1}^j u_{ik}s_{kj}}{u_{ii}}, j=i+1, i+2, \dots, n; i=n-1, n-2, \dots, 1$$

当 U 为下三角阵时, 由

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & & \\ d_{21} & d_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} & s_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

得
$$s_{ii} = \frac{1}{u_{ii}}, i=1, 2, \dots, n$$

$$s_{ij} = -\frac{\sum_{k=1}^{i-1} u_{ik}s_{kj}}{u_{ii}}, i=2, 3, \dots, n; j=1, 2, \dots, i-1$$

6. 证明 (1) 因 A 是对称正定阵, 故存在唯一的分解 $A=L L^T$, 其中 L 是具有正对角元素的下三角阵. 从而

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (L L^T)^{-1} = (L^T)^{-1} L^{-1} = (L^{-1})^T L^{-1} \\ (A^{-1})^T &= \left[(L^{-1})^T L^{-1} \right]^T = (L^{-1})^T L^{-1} = A^{-1} \end{aligned}$$

故 A^{-1} 是对称矩阵.

又 L^{-1} 非奇异, 故对任意的 $x \neq 0$, 有 $L^{-1}x \neq 0$, 故

$$x^T A^{-1} x = x^T (L^{-1})^T L^{-1} x = (L^{-1}x)^T (L^{-1}x) > 0$$

故 A^{-1} 是对称正定矩阵, 即 A^{-1} 也对称正定.

(2) 由 A 对称正定, 故 A 的所有顺序主子式均不为零, 从而 A 有唯一的

Doolittle 分解 $A = \bar{L} U$. 又

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} = D U_0$$

其中 D 为对三角阵, U_0 为单位上三角阵, 于是

$$A = U \bar{L} = D \bar{L} U_0$$

又

$$A = A^T = U_O^T D \bar{L}^T$$

由分解的唯一性即得

$$U_O^T = \bar{L}$$

从而有

$$A = D \bar{L} \bar{L}^T$$

又由 A 的对称正定性知

$$d_1 = D_1 > 0, \quad d_i = \frac{D_i}{D_{i-1}} > 0 \quad (i=2,3,\dots,n)$$

$$\text{故 } D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & & \\ & \sqrt{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix} = D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{故 } A = \bar{L} D \bar{L}^T = \bar{L} D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} \bar{L}^T = (\bar{L} D^{\frac{1}{2}})(\bar{L} D^{\frac{1}{2}})^T = LL^T$$

其中 $L = \bar{L} D^{\frac{1}{2}}$ 为三角元为正的下三角矩阵.

$$\begin{aligned} 7. \text{ 解 } [A|I] &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -11 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -8 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 19 & 0 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{19}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{85}{3} & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{25}{3} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{85} & \frac{10}{17} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{19}{85} & \frac{15}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{85} & \frac{10}{17} & -\frac{23}{85} & -\frac{16}{17} \\ \frac{33}{85} & -\frac{6}{17} & \frac{41}{85} & \frac{13}{17} \\ \frac{19}{85} & \frac{15}{17} & -\frac{3}{85} & -\frac{8}{17} \\ \frac{3}{85} & -\frac{1}{17} & \frac{4}{85} & \frac{5}{17} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.0470589 & 0.5882353 & -0.2705882 & -0.9411765 \\ 0.3882353 & -0.3529412 & 0.4823529 & 0.7647059 \\ -0.2235294 & 0.2941176 & -0.0352941 & -0.4705882 \\ -0.0352941 & -0.0588235 & 0.0470589 & 0.2941176 \end{bmatrix}$$

8. 解 设有分解

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ -1 & \alpha_2 & & & \\ & -1 & \alpha_3 & & \\ & & -1 & \alpha_4 & \\ & & & -1 & \alpha_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & \\ 1 & \beta_2 & & & \\ & 1 & \beta_3 & & \\ & & 1 & \beta_4 & \\ & & & 1 & \beta_5 \end{bmatrix}$$

由公式

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1 c_1 = \alpha_1 \beta_1 \\ b_i = \alpha_i \beta_{i-1} + \alpha_i, (i=2,3,4,5) \\ c_i = \alpha_i \beta_i, (i=2,3,4) \end{cases}$$

其中 b_i , a_i , c_i 分别是系数矩阵的主角线元素及其下边和上边的次对角线元素, 则有

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{4}{3}, \quad \alpha_4 = \frac{5}{4}, \quad \alpha_5 = \frac{6}{5}$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{2}{3}, \quad \beta_3 = -\frac{3}{4}, \quad \beta_4 = -\frac{4}{5}$$

由

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & \\ -1 & \frac{3}{2} & & & \\ & -1 & \frac{4}{3} & & \\ & & -1 & \frac{5}{4} & \\ & & & -1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{得 } y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad y_3 = \frac{1}{4}, \quad y_4 = \frac{1}{5}, \quad y_5 = \frac{1}{6}$$

由

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & & \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \\ & & & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\text{得 } x_5 = \frac{1}{6}, \quad x_4 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_1 = \frac{5}{6}$$

9. 解 设

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{21} & l_{31} \\ & 1 & l_{32} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法得

$$d_1=2, \quad l_{21}=-\frac{1}{2}, \quad l_{31}=\frac{1}{2}$$

$$d_2=-\frac{5}{2}, \quad l_{32}=-\frac{7}{5}$$

$$d_3=\frac{27}{5}$$

由

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

得

$$y_1=4, \quad y_2=7, \quad y_3=\frac{69}{5}$$

由

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & \frac{27}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{7}{5} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{5} \end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{7}{5} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -\frac{5}{2} & \\ & & \frac{27}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ \frac{69}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ & -\frac{14}{5} \\ & & \frac{23}{9} \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } x_3 = \frac{23}{9} = 2.555\ 555\ 6, \quad x_2 = \frac{7}{9} = 0.777\ 777\ 8, \quad x_1 = \frac{10}{9} = 1.111\ 111\ 1$$

10. 解 A 中 $\Delta_2=0$, 故不能分解。但 $\det(A)=-10 \neq 0$, 故若将 A 中第一行与第三行交换, 则可以分解, 且分解唯一。

B 中, $\Delta_2=\Delta_3=0$, 但它仍可以分解为

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & l_{32} & -2 \end{bmatrix}$$

其中 l_{32} 为一任意常数, 且 U 奇异, 故分解且分解不唯一,

对 C , $\Delta_i \neq 0, i=1,2,3$, 故 C 可分解且分解唯一。

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

11. 解

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1.1$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = 0.8$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.71} = 0.842 \ 615 \ 0$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.33 \\ 0.33 & 0.34 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max}(A^T A) = 0.685 \ 340 \ 7$$

故 $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = 0.827 \ 853 \ 1$

12. 证明 (1) 有定义知

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| =$$

$$\|x\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = \sum_{i=1}^n \|x\|_{\infty} = n \|x\|_{\infty}$$

故 $\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_{\infty}$

(2) 由范数定义, 有

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A) \leq$$

$$\lambda_1(A^T A) + \lambda_2(A^T A) + \cdots + \lambda_n(A^T A) = \text{tr}(A^T A) =$$

$$\sum_{i=1}^n a_{i1}^2 + \sum_{i=1}^n a_{i2}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^n a_{in}^2 =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = \|A\|_F^2$$

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A) \geq$$

$$\frac{1}{n} [\lambda_1(A^T A) + \lambda_2(A^T A) + \cdots + \lambda_n(A^T A)] =$$

$$\frac{1}{n} \|A\|_F^2$$

故

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F$$

13. 证明 (1) 因 P 非奇异, 故对任意的 $x \neq 0$, 有 $P_x \neq 0$, 故 $\|x\|_p = \|P_x\| \geq 0$,

当且仅当 $x=0$ 时, 有 $\|x\|_p = \|P_x\| = 0$ 成立。

(2) 对任意 $\alpha \in R^1$, 有

$$\|\alpha x\|_p = \|P_{\alpha x}\| = |\alpha| \|P_x\| = |\alpha| \|x\|_p$$

$$(3) \|x+y\|_p = \|P_{(x+y)}\| = \|P_x + P_y\| \leq$$

$$\|P_x\| + \|P_y\| = \|x\|_p + \|y\|_p$$

故 $\|x\|_p$ 是 R^n 上的一种向量范数。

14. 证明 (1) 因 A 正定对称, 故当 $x=0$ 时, $\|x\|_A=0$, 而当 $x \neq 0$ 时, $\|x\|_A$
 $= (x^T A x)^{\frac{1}{2}} > 0$ 。

(2) 对任意实数 c , 有

$$\|cx\|_A = \sqrt{(cx)^T A (cx)} = |c| \sqrt{x^T A x} = |c| \|x\|_A$$

(3) 因 A 正定, 故有分解 $A=L L^T$, 则

$$\|x\|_A = (x^T A x)^{\frac{1}{2}} = (x^T L L^T x)^{\frac{1}{2}} = ((L^T x)^T (L^T x))^{\frac{1}{2}} = \|L^T x\|_2$$

故对任意向量 x 和 y , 总有

$$\|x+y\|_A = \|L^T (x+y)\|_2 = \|L^T x + L^T y\|_2 \leq$$

$$\|L^T x\|_2 + \|L^T y\|_2 = \|x\|_A + \|y\|_A$$

综上所述, $\|x\|_A = (x^T A x)^{\frac{1}{2}}$ 是一种向量范数。

15. 证明 因为

$$\|A\|_s = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}$$

由向量范数的等价性知, 存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使对任意 x , 有

$$C_1 \|Ax\|_s \leq \|Ax\|_l \leq C_2 \|Ax\|_s$$

$$C_1 \|x\|_s \leq \|x\|_l \leq C_2 \|x\|_s$$

故

$$\frac{C_1 \|x\|_s}{C_2 \|x\|_s} \leq \frac{\|Ax\|_l}{\|x\|_l} \leq \frac{C_2 \|Ax\|_s}{C_1 \|x\|_s}$$

令 $\frac{C_1}{C_2} = C_1, \frac{C_2}{C_1} = C_2$, 则有

$$C_1 \frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s} \leq \frac{\|Ax\|_l}{\|x\|_l} \leq C_2 \frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}$$

$$C_1 \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_l}{\|x\|_l} \leq C_2 \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_s}{\|x\|_s}$$

即

$$C_1 \|A\|_s \leq \|A\|_l \leq C_2 \|A\|_s$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \stackrel{A^{-1}x=y}{=} \max_{y \neq 0} \frac{\|y\|_\infty}{\|Ay\|_\infty} =$$

$$16. \text{ 证明 } \|A^{-1}\|_2^2 \|A\|_2^2 = \text{Cond}[(A_2)^2] \max_{y \neq 0} \frac{1}{\frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}}$$

故

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|_\infty} = \min_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty}$$

17. 证明 设 $\lambda \neq 0$, 则

$$\|A\|_\infty = \begin{cases} 3|\lambda|, & |\lambda| \geq \frac{2}{3} \\ 2, & |\lambda| \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

又
$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ -1 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \frac{2|\lambda|+1}{|\lambda|}$$

故

$$\text{Cond}(A)_{\infty} = \|A^{-1}\|_{\infty} \|A\|_{\infty} = \begin{cases} 6|\lambda|+3, & |\lambda| \geq \frac{2}{3} \\ 2(2+\frac{1}{|\lambda|}), & |\lambda| \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

从而当 $|\lambda| = \frac{2}{3}$ 时, 即 $|\lambda| = \pm \frac{2}{3}$ 时, $\text{Cond}(A)_{\infty}$ 有最小值, 且

$$\min \text{Cond}(A)_{\infty} = 7$$

18. 解 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -98 & 99 \\ 99 & 98 \end{bmatrix}, \|A\|_{\infty} = 199, \|A^{-1}\|_{\infty} = 199$

$$\text{Cond}(A)_2 = \|A^{-1}\|_{\infty} \|A\|_{\infty} = 39601$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 19801 & 19602 \\ 19602 & 19405 \end{bmatrix}$$

故 $\text{Cond}(A)_2 = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 =$

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}} = 39\ 205.9745$$

19. 证明 因 A 正交, 故 $A^T A = A A^T = I, A^{-1} = A^T$, 从而有

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(I)} = 1$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \|A^T\|_2 = \sqrt{\rho(A A^T)} = \sqrt{\rho(I)} = 1$$

故

$$\text{Cond}(A)_2 = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = 1$$

20. 证明 $\text{Cond}(AB) = \|(AB)^{-1}\| \|AB\| \leq \|A^{-1}\| \|B^{-1}\| \|A\| \|B\| =$

$$\|A^{-1}\| \|A\| \|B^{-1}\| \|B\| = \text{Cond}(A) \text{Cond}(B)$$

21. 证明 (1) $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$

课后答案网 www.khdaw.com

故 $A^T A$ 为对称矩阵。

又 A 非奇异，故对任意向量 $x \neq 0$ ，有 $Ax \neq 0$ ，从而有

$$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) > 0$$

即 $A^T A$ 为对称正定矩阵。

$$(2) \quad \text{Cond}(A^T A)_2 = \|(A^T A)^{-1}\|_2 \|A^T A\|_2 =$$

$$\sqrt{\lambda_{\max} [((A^T A)^{-1})^T (A^T A)^{-1}]} \sqrt{\lambda_{\max} [(A^T A)^T (A^T A)]} =$$

$$\sqrt{\lambda_{\max} [((A^T A)^{-1})^2]} \sqrt{\lambda_{\max} [(A^T A)^2]} =$$

$$\sqrt{\lambda_{\max}^2 (A^T A)^{-1}} \sqrt{\lambda_{\max}^2 (A^T A)} =$$

$$[\sqrt{\lambda_{\max} (A^T A)^{-1}}]^2 [\sqrt{\lambda_{\max} (A^T A)}]^2 =$$

$$\|A^{-1}\|_2^2 \|A\|_2^2 = [\text{Cond}(A)_2]^2$$

第六章课后习题解答

1.解：(a) 因系数矩阵按行严格对角占优，故雅可比法与高斯-塞德尔法均收敛。

(b) 雅可比法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{3}{10}x_2^{(k)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ ，迭代到17次达到精度要求

$$x^{(17)} = (-4.0000186, 2.9999915, 2.0000012)^T$$

高斯-塞德尔法的迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

取 $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ ，迭代到8次达到精度要求

$$x^{(8)} = (-4.0000186, 2.9999915, 2.0000012)^T$$

2 : 解 (a) 雅可比法的迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|I - B_J| = (1 - 0.8)(1^2 + 0.81 - 0.32)$$

$$\rho(B_J) = 1.0928203 > 1, \text{故雅可比迭代法不收敛}$$

高斯-塞德尔法迭代矩阵

$$B_S = (D - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{pmatrix}$$

$$\rho(B_S) = \|B_S\|_\infty = 0.8 < 1$$

故高斯-塞德尔迭代法收敛。

(b) 雅可比法的迭代矩阵

$$B_J = D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|I - B_J| = I^3, \quad \rho(B_J) = 0 < 1$$

故雅可比迭代法收敛。

高斯-塞德尔法的迭代矩阵

$$B_S = (D - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3: 证明

必要条件: 由 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$, 知 $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$, 从而有 $\|A - A_k\| \rightarrow 0$ (K)

故对任意的 x , 有 $\|A_k x - Ax\| \leq \|A_k - A\| \|x\| \rightarrow 0$ (k)

即 $A_k x \rightarrow Ax$, $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k x = Ax$.

充分条件: 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $A_k x \rightarrow Ax$ (k), 取 $x = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)^T$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$A_k x_i = (a_{1i}^{(k)}, a_{2i}^{(k)}, \dots, a_{ni}^{(k)})^T = A x_i (k \rightarrow \infty)$$

$$A x_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})^T$$

故 $a_{ji}^{(k)} \rightarrow a_{ji}$ ($j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, n$)

即 $A_k \rightarrow A$, $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$.

4.解: 不一定, 因其谱半径 $\rho(B)$ 不一定小于 1。

对习题 2(a), A 对称, $\lambda_1 = 1 > \lambda_2 = 0.84 > \lambda_3 = -0.296$

5. 解答见例 6-4

6. 解：

SOR 迭代格式为

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} + w \left(-\frac{12}{5} - x_1^{(k)} - \frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} \right) \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} + w \left(5 + \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - x_2^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} \right) \\ x_3^{(k+1)} &= x_3^{(k)} + w \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_2^{(k+1)} - x_3^{(k)} \right) \end{aligned}$$

取初始值 $x^0 = (1, 1, 1)^T$, 计算如表.

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	-2.6000000	3.5650000	1.8005500
2	-4.0274990	3.1400652	2.0228224
3	-4.0572814	2.9908481	2.0101219
4	-4.0042554	2.9935725	2.0000427
5	-3.9981193	2.9997612	1.9996013
6	-3.9996542	3.0002334	1.9999609
7	-4.0000424	3.0000314	2.0000122
8	-4.0000177	2.9999937	2.0000027

$$\text{因 } \|x^{(8)} - x^{(7)}\|_{\infty} = 0.000377 < 10^{-4},$$

课后答案网 www.khdaw.com

由 $|m| < 1, |1 - wI(A)| < 1$ 得

$$0 < w < \frac{2}{I(A)}$$

故当 $0 < w < \frac{2}{b}$ 时更有 $w < \frac{2}{I(A)}$, 从而 $|m| < 1, I(B) < 1$

8.证明: 当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时由

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1 - a^2 > 0, \det(A) = (1 - a)^2(1 + 2a) > 0$$

故A是正定的又雅可比法迭代矩阵

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ a & 0 & -a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(I - B_J) = \det \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} = 1^3 - 3a^2 + 2a^3 = (1 - a)^2(1 + 2a)$$

故 $\rho(B_J) = |2a|$, 故当 $\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ 时雅可比迭代法收敛

9.证明: G相似与它的若当标准行J, 即存在可逆阵P, 使 $PG=P$

由于G的特征值全为零, 故J一定有如下形式

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad \sum_{i=1}^r n_i = n$$

方程组 $x = Gx + g$ 等价于 $(I - G)x = g$ 由 $\rho(G) = 0$, 故 $I - G = I - 0 = I$

从而 $I - G$ 非奇异, 即 $(I - G)x = g$ 有唯一解 于是

$$x^* = Gx^* + g$$

与上述迭代格式相减 $x^{(k+1)} - x^* = G(x^{(k)} - x^*)$

$$\text{故 } x^{(n)} - x^* = G^n(x^{(0)} - x^*)$$

$$\forall C^n = D^{-1}I^nD = 0$$

课后答案网 www.khdaw.com

www.khdaw.com

第七章非线性方程求根

一、重点内容提要

(一) 问题简介

求单变量函数方程

$$f(x) = 0 \quad (7.1)$$

的根是指求 x^* (实数或复数), 使得 $f(x^*) = 0$. 称 x^* 为方程(7.1)的根, 也称 x^* 为函数 $f(x)$

的零点. 若 $f(x)$ 可以分解为 $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$

其中 m 为正整数, $g(x)$ 满足 $g(x) \neq 0$, 则 x^* 是方程(7.1)的根. 当 $m=1$ 时, 称 x^* 为单根; 当 $m>1$

时, 称 x^* 为 m 重根. 若 $g(x)$ 充分光滑, x^* 是方程(7.1)的 m 重根, 则有

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a)f(b) < 0$, 则方程(7.1)在 (a, b) 内至少有一个实根, 称 $[a, b]$ 为方程(7.1)的有根区间. 有根区间可通过函数作图法或逐次搜索法求得.

(二) 方程求根的几种常用方法

1. 二分法

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a)f(b) < 0$, 则 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内有根 x^* . 再设 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内

仅有一个根. 令 $a_0 = a, b_0 = b$, 计算 $x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ 和 $f(x_0)$. 若 $f(x_0) = 0$ 则 $x^* = x_0$, 结束计

算; 若 $f(a_0)f(x_0) > 0$, 则令 $a_1 = x_0, b_1 = b$, 得新的有根区间 $[a_1, b_1]$; 若 $f(a_0)f(x_0) < 0$, 则令

$a_1 = a_0, b_1 = x_0$, 得新的有根区间 $[a_1, b_1]$. $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1]$, $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$. 再令

$x_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ 计算 $f(x_1)$, 同上法得出新的有根区间 $[a_2, b_2]$, 如此反复进行, 可得一有根区

间套

$$\dots \subset [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \dots \subset [a_0, b_0]$$

且 $a_n < x^* < b_n, n = 0, 1, 2, \dots, b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \dots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(a_n + b_n) = x^*$

因此, $x_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ 可作为 $f(x) = 0$ 的近似根,且有误差估计

$$|x_n - x^*| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \quad (7.2)$$

2.迭代法

将方程式(7.1)等价变形为 $x = \varphi(x)$ (7.3)

若要求 x^* 满足 $f(x^*) = 0$ 则 $x^* = \varphi(x^*)$; 反之亦然. 称 x^* 为函数 $\varphi(x)$ 的一个不动点. 求方程

(7.1)的根等价于求 $\varphi(x)$ 的不动点由式(7.3)产生的不动点迭代关系式(也称简单迭代法)为

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

函数 $\varphi(x)$ 称为迭代函数. 如果对任意 $x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 0, 1, 2, \dots$, 由式(7.4)产生的序列 $\{x_k\}$ 有

极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$

则称不动点迭代法(7.4)收敛.

定理 7.1(不动点存在性定理)设 $\varphi(x) \in C[a, b]$ 满足以下两个条件:

1. 对任意 $x \in [a, b]$ 有 $a \leq \varphi(x) \leq b$;

2. 存在正常数 $L < 1$, 使对任意 $x, y \in [a, b]$, 都有 $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|$ (7.5)

则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在惟一的不动点 x^* .

定理 7.2(不动点迭代法的全局收敛性定理)设 $\varphi(x) \in C[a, b]$ 满足定理 7.1 中的两个条件, 则对

任意 $x_0 \in [a, b]$, 由(7.4)式得到的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点, 并有误差估计式

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}| \quad (7.6)$$

和

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_k - x_{k-1}| \quad (7.7)$$

定理 7.3(不动点迭代法的局部收敛性定理)设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点, $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域连

续, 且 $|\varphi'(x)| < 1$, 则迭代法(7.4)局部收敛.

收敛阶的概念 设迭代过程 (7.4) 收敛于方程 $x = \varphi(x)$ 的根 x^* , 如果迭代误差

$e_k = x_k - x^*$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时成产下列渐近关系式

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} \rightarrow C (\text{常数 } C \neq 0) \quad (7.8)$$

则称该迭代过程是 p 阶收敛的. 特别地, $p=1$ 时称线性收敛, $p>1$ 时称超线性收敛, $p=2$ 时称平方收敛.

定理 7.4(收敛阶定理) 对于迭代过程(7.4), 如果 $\varphi^{(k)}(x)$ 在所求根 x^* 的邻近连续, 并且

$$\begin{aligned} \varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) &= 0 \\ \varphi^{(p)}(x^*) &\neq 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

则该迭代过程在点 x^* 的邻近是收敛的, 并有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(x^*) \quad (7.10)$$

斯蒂芬森(Steffensen)迭代法 当不动点迭代法(7.4)只有线性收敛阶, 甚至于不收敛时, 可用斯蒂芬森迭代法进行加速. 具体公式为

$$\begin{aligned} y_k &= \varphi(x_k), z_k = \varphi(y_k) \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.11)$$

此法也可写成如下不动点迭代式

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \psi(x_k), k = 0, 1, 2, \dots \\ \psi(x) &= x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x} \end{aligned} \quad (7.12)$$

定理 7.5(斯蒂芬森迭代收敛定理) 设 x^* 为式(7.12)中 $\psi(x)$ 的不动点, 则 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点;

设 $\varphi''(x)$ 存在, $\varphi'(x^*) \neq 1$, 则 x^* 是 $\psi(x)$ 的不动点, 则斯蒂芬森迭代法(7.11)是 2 阶收敛的.

3. 牛顿迭代法

牛顿迭代法是一种特殊的不动点迭代法, 其计算公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

其迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

牛顿迭代法的收敛速度 当 $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0, f''(x^*) \neq 0$ 时, 容易证

明, $f'(x^*) \neq 0$, $\varphi''(x^*) = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \neq 0$, 由定理 7.4 知, 牛顿迭代法是平方收敛的, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \quad (7.14)$$

重根情形的牛顿迭代法 当 x^* 是 $f(x)=0$ 的 m 重根 ($m \geq 2$) 时, 迭代函数 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

在 x^* 处的导数 $\varphi'(x^*) = 1 - \frac{1}{m} \neq 0$, 且 $|\varphi'(x^*)| < 1$. 所以牛顿迭代法求重根只是线性收敛. 若

x^* 的重数 m 知道, 则迭代式

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k=0, 1, 2, \dots \quad (7.15)$$

求重根二阶收敛. 当 m 未知时, x^* 一定是函数 $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ 的单重零点, 此时迭代式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\mu(x_k)}{\mu'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)} \quad (7.16)$$

也是二阶收敛的.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, k=0, 1, 2, \dots$$

简化牛顿法 如下迭代法

称为简化牛顿法或平行弦法.

牛顿下山法 为防止迭代不收敛, 可采用牛顿下山法. 具体方法见教材.

4. 弦截法

将牛顿迭代法(7.13)中的 $f'(x_k)$ 用 $f(x)$ 在 x_{k-1}, x_k 处的一阶差商来代替, 即可得弦截法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1}) \quad (7.17)$$

定理 7.6 假设 $f(x)$ 在其零点 x^* 的邻域 $\Delta: |x - x^*| \leq \delta$ 内具有二阶连续导数, 且对任意 $x \in \Delta$

有 $f'(x) \neq 0$, 又初值 $x_0, x_1 \in \Delta$, 则当邻域 Δ 充分小时, 弦截法 (7.17) 将按阶

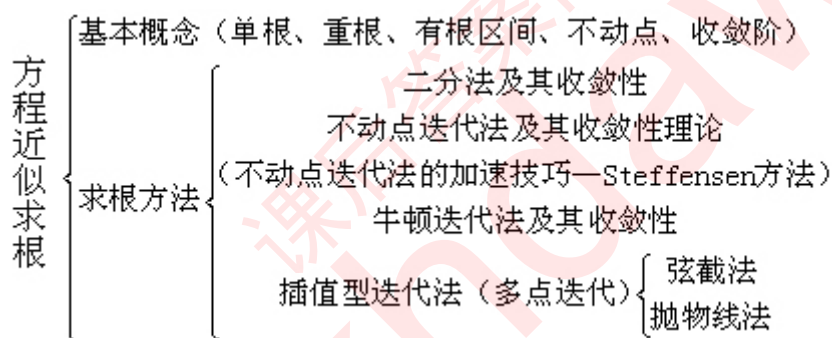
$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ 收敛到 x^* . 这里 p 是方程 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ 的正根.

5. 抛物线法

弦截法可以理解为用过 $(x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_k, f(x_k))$ 两点的直线方程的根近似替 $f(x)=0$ 的根. 若已知 $f(x)=0$ 的三个近似根 x_k, x_{k-1}, x_{k-2} 用过 $(x_k, f(x_k)), (x_{k-1}, f(x_{k-1})), (x_{k-2}, f(x_{k-2}))$ 的抛物线方程的根近似代替 $f(x)=0$ 的根, 所得的迭代法称为抛物线法, 也称密勒(Muller)法.

当 $f(x)$ 在 x^* 的邻近有三阶连续导数, $f'(x^*) \neq 0$, 则抛物线法局部收敛, 且收敛阶为 $p=1.839 \approx 1.84$.

二、知识结构图



三、常考题型及典型题精解

例7-1 证明方程 $x^3 - x - 1 = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有一个实根 x^* , 并用二分法求这个根, 要求 $|x_k - x^*| \leq 10^{-3}$. 若要求 $|x_k - x^*| \leq 10^{-6}$, 需二分区间 $[1, 2]$ 多少次?

解 设 $f(x) = x^3 - x - 1$, 则 $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$, 故方程 $f(x) = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有根 x^* . 又因 $f'(x) = 3x^2 - 1$, 所以当 $x \in [1, 2]$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x) = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有惟一实根 x^* . 用二分法计算结果如表7-1所示.

表 7-1

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号
0	1	2	1.5	+
1	1	1.5	1.25	-
2	1.25	1.5	1.375	+
3	1.25	1.375	1.3125	-
4	1.3125	1.375	1.3438	+
5	1.3125	1.13438	1.3282	+
6	1.3125	1.3282	1.3204	-
7	1.3204	1.3282	1.3243	-
8	1.3243	1.3282	1.3263	+

9	1.3243	1.3263	1.3253	+
---	--------	--------	--------	---

此时 $x_9=1.3253$ 满足 $|x_9-x^*| \leq \frac{1}{2^{10}} \leq 0.977 \times 10^{-3} \leq 10^{-3}$, 可以作为 x^* 的近似值.

若要求 $|x_k-x^*| \leq 10^{-6}$, 只需 $|x_k-x^*| \leq \frac{1}{2^{k+1}} \leq 10^{-6}$ 即可, 解得 $k+1 \geq 19.932$, 即只需把 $[1, 2]$ 二分20次就能满足精度要求.

例7-2 已知函数方程 $(x-2)e^x=1$, (1)确定有根区间 $[a, b]$; (2)构造不动点迭代公式使之对任意初始近似 $x_0 \in [a, b]$, 迭代方法均收敛; (3)用所构造的公式计算根的近似值, 要求 $|x_k-x_{k-1}| < 10^{-3}$.

解 (1) 令 $f(x)=(x-2)e^x-1$, 由于 $f(2)=-1 < 0$, $f(3)=e^3-1 > 0$, 因此区间 $[2, 3]$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个有根区间. 又因 $f'(x)=(x-1)e^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=-1$, $f'(1)=-e^{-1} < 0$, 当 $x > 1$ 时 $f(x)$ 单增, $x < 1$ 时 $f(x)$ 单减, 故 $f(x)=0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有且仅有一根 x^* , 即 $x^* \in [2, 3]$.

(2) 将 $(x-2)e^x=1$ 等价变形为 $x=2+e^{-x}$, $x \in [2, 3]$. 则 $\varphi(x)=2+e^{-x}$. 由于当 $x \in [2, 3]$ 时 $2 \leq \varphi(x) \leq 3$, $|\varphi'(x)| = |-e^{-x}| \leq e^{-2} < 1$

故不动点迭代法 $x_{k+1}=2+e^{-x_k}$, $k=0, 1, 2, \dots$, 对 $\forall x_0 \in [2, 3]$ 均收敛.

(3) 取 $x_0=2.5$, 利用 $x_{k+1}=2+e^{-x_k}$ 进行迭代计算, 结果如表7-2所示.

表 7-2

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	2.5	
1	2.082084999	0.417915001
2	2.124670004	0.042585005
3	2.119472387	0.0005197617
4	2.120094976	0.000622589

此时 x_4 已满足误差要求, 即 $x^* \approx x_4 = 2.120094976$.

例7-3 考虑求解方程 $2\cos x - 3x + 12 = 0$ 的迭代公式

$$x_{k+1} = 4 + \frac{2}{3} \cos x_k, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

(1) 试证: 对任意初始近似 $x_0 \in \mathbb{R}$, 该方法收敛;

(2) 取 $x_0=4$, 求根的近似值 x_{k+1} , 要求 $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-3}$;

(3) 所给方法的收敛阶是多少?

解 (1) 由迭代公式知, 迭代函数 $\varphi(x) = 4 + \frac{2}{3} \cos x$,

$x \in (-\infty, +\infty)$. 由于 $\varphi(x)$ 的值域介于 $(4 - \frac{2}{3})$ 与 $(4 + \frac{2}{3})$ 之间, 且

$$|\varphi'(x)| = |-\frac{2}{3} \sin x| \leq \frac{2}{3} < 1$$

故根据定理7.1, 7.2知, $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内存在惟一的不动点 x^* , 且对 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 迭代公式得到的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^* .

(2) 取 $x_0=4$, 迭代计算结果如表7-3所示.

表 7-3

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	4	
1	3.564237587	0.435762413
2	3.391995168	0.172242419
3	3.354124827	0.037870341
4	3.348333384	0.005791443
5	3.347529903	0.000803481

此时 x_5 已满足误差要求, 即 $x^* \approx x_5 = 3.347529903$

(3) 由于 $\varphi'(x^*) \approx 0.136323129 \neq 0$, 故根据定理7.4知方法是线性收敛的, 并且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \varphi'(x^*)$$

例 7-4 对于迭代函数 $\varphi(x) = x + C(x^2 - 2)$, 试讨论:

(1) 当 C 为何值时, $x_{k+1} = \varphi(x_k) (k=0, 1, 2, \dots)$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $\sqrt{2}$;

(2) C 为何值时收敛最快?

(3) 分别取 $C = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, 计算 $\varphi(x)$ 的不动点 $\sqrt{2}$, 要求

$$|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$$

解: (1) $\varphi(x) = x + C(x^2 - 2)$, $\varphi'(x) = 1 + 2Cx$, 根据定理 7.3, 当

$$|\varphi'(\sqrt{2})| = |1 + 2\sqrt{2}C| < 1, \text{ 亦即 } -\frac{1}{\sqrt{2}} < C < 0 \text{ 时迭代收敛。}$$

(2) 由定理 7.4 知, 当 $\varphi'(\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}C = 0$, 即 $C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 时迭代至少是二阶收敛的, 收敛最快。

(3) 分别取 $C = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, 并取 $x_0 = 1.2$, 迭代计算结果如表 7-4 所示。

表 7-4

k	$x_k (C = -\frac{1}{2})$	k	$x_k (C = -\frac{1}{2\sqrt{2}})$
0	1.2	0	1.2
1	1.48	1	1.397989899
6	1.413369586	2	1.414120505
12	1.414209303	3	1.414213559
13	1.414215327	4	1.414213562

此时都达到 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$. 事实上 $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$,

例 7-5 给定初值 $x_0 \neq 0, \frac{2}{a}$ 以及迭代公式

$$x_{k+1} = x_k(2 - ax_k), k = 0, 1, 2, \dots, \text{常数 } a \neq 0$$

证明: (1) 该迭代函数是二阶收敛的; (2) 该迭代产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛的充要条件是 $|1 - ax_0| < 1$.

解: (1) 显然, 迭代函数为 $\varphi(x) = x(2 - ax)$, 且 $\varphi(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a}$, 即 $\frac{1}{a}$ 是 $\varphi(x)$ 的不动点. 又

$\varphi'(x) = 2(1 - ax), \varphi''(x) = -2a$, 所以 $\varphi'(\frac{1}{a}) = 0, \varphi''(\frac{1}{a}) = -2a \neq 0$, 由定理 7.4 知,

迭代是二阶收敛的, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2} \varphi''(\frac{1}{a}) = -a$.

(2) 因 $e_k = x_k - \frac{1}{a} = \frac{1}{a}(ax_k - 1)$, 令 $r_k = ax_k - 1$, 则

$$x_{k+1} = x_k(1 - r_k), e_k = \frac{1}{a}r_k$$

然而

$$\begin{aligned} r_k &= ax_k - 1 = ax_{k-1}(1 - r_{k-1}) - 1 \\ &= (r_{k-1} + 1)(1 - r_{k-1}) - 1 = -r_{k-1}^2 \end{aligned}$$

故

$$r_k = -r_{k-1}^2 = -r_{k-2}^4 = \dots = -r_0^{2^k}$$

$$e_k = \frac{1}{a}r_k = -\frac{1}{a}r_0^{2^k}$$

由此可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$ 等价于 $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$, 而 $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$ 又等价于 $|r_0| < 1$, 即 $|1 - ax_0| < 1$.

注 (1) 的结论也可以直接用二阶收敛函数的定义去证明. 另外, 本题迭代式实际上

是对 $f(x) = a - \frac{1}{x}$ 使用牛顿迭代法而得.

例 7-6 对 $\varphi(x) = x + x^3, x = 0$ 为 $\varphi(x)$ 的一个不动点, 验证迭代 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 对任意 $x_0 \neq 0$ 不

收敛, 但改用斯蒂芬森迭代却是收敛的, 并说明斯蒂芬森迭代计算 $\varphi(x)$ 的不动点 $x = 0$ 时的收敛阶.

解 由于 $\varphi'(x) = 1 + 3x^2$, 当 $x \neq 0$ 时 $|\varphi'(x)| > 1$, 且有

$$|x_{k+1} - 0| = |\varphi(x_k) - 0| = |\varphi'(\xi)(x_k - 0)|, \xi \text{ 介于 } x_k \text{ 与 } 0 \text{ 之间, 若 } x_0 \neq 0, L > 1, \text{ 迭代不收敛.}$$

若改用斯蒂芬森迭代(7.12), 可得

$$x_{k+1} = \psi(x_k), \psi(x) = x - \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 3}$$

$$\psi'(0) = \frac{2}{3}, \text{ 根据定理 7.3, 斯蒂芬森迭代法收敛.}$$

由于 $\psi'(0) = \frac{2}{3} \neq 0$, 故用斯蒂芬森迭代计算不动点 $x = 0$ 时, 收敛阶 $p = 1$. (请读者注意, 这一结论与定理 7.5 的结论是否矛盾?)

例 7-7 当 R 取适当值时, 曲线 $y = x^2$ 与 $y^2 + (x-8)^2 = R^2$ 相切, 试用迭法求切点横坐标的近似值, 要求不少于四位有效数字, 且不必求 R .

解 $y = x^2$ 的导数 $y' = 2x$, 由 $y^2 + (x-8)^2 = R^2$ 确定的函数 y 的导数满足

$2xy' + 2(x-8) = 0$, 由两曲线相切的条件, 可得

$$2 \times x^2 \times 2x + 2(x-8) = 0$$

$$\text{即 } 2x^3 - x - 8 = 0$$

令 $f(x) = 2x^3 - x - 8$, 则 $f(1) < 0, f(2) > 0, f(x) = 0$ 在 $(1, 2)$ 内有实根. 又

$f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$, 故 $f(x) = 0$ 仅有一个根, 构造迭代公式

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \varphi(x) = \left(\frac{8-x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, x \in (1, 2)$$

则当 $x \in [1, 2]$ 时, $1 \leq \varphi(x) \leq 2$.

$$|\varphi'(x)| = \left| -\frac{1}{6} \left(\frac{8-x}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \right| \leq L = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} < 1$$

故迭代收敛. 取 $x_0 = 1.5$, 计算结果如表 7-5 所示.

表 7-5

k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $	k	x_k	$ x_k - x_{k-1} $
0	1.5	0.018752	2	1.482671	0.001423
1	1.481248		3	1.482563	$0.000108 < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$

由于 $|x_3 - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_3 - x_2| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, 故可取 $x^* \approx x_3 = 1.483$, 即可保证两曲线切点的横坐标的近似值具有四位有效数字.

例 7-8 曲线 $y = x^3 - 0.51x + 1$ 与 $y = 2.4x^2 - 1.89$ 在点 $(1.6, 1)$ 附近相切, 试用牛顿迭代法求

切点的横坐标的近似值 x_{k+1} , 使 $|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-5}$.

解 两曲线的导数分别为 $y' = 3x^2 - 0.51$ 和 $y' = 4.8x$, 两曲线相切, 导数相等, 故有

$$3x^2 - 4.8x - 0.51 = 0$$

令 $f(x) = 3x^2 - 4.8x - 0.51$, 则 $f(1) < 0, f(2) > 0$, 故区间 $[1, 2]$ 是 $f(x) = 0$ 的有根区间. 又

当 $x \in [1, 2]$ 时, $f'(x) = 6x - 4.8 > 0$, 因此 $f(x) = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有惟一实根 x^* . 对 $f(x)$ 应用牛顿迭代法, 得计算公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{3x_k^2 - 4.8x_k - 0.51}{6x_k - 4.8}, k = 0, 1, 2, \dots$$

由于 $f''(x) = 6 > 0$, 故取 $x_0 = 2$ 迭代计算一定收敛, 计算结果如表 7-6 所示.

表 7-6

k	x_k	k	x_k
0	2.0	3	1.706815287
1	2.293055556	4	1.700025611
2	1.817783592	5	1.7

继续计算仍得 $x_6 = 1.7$, 故 $x^* = 1.7$.

注 本题也可令 $x^3 - 0.51x + 1 = 2.4x^2 - 1.89$, 解得切点横坐标满足方程

$$f(x) = x^3 - 2.4x^2 - 51x + 2.89 = 0, \text{ 用有重根时的牛顿迭代法(7.15)式计算, 此时 } m = 2. \text{ 仍}$$

取 $x_0 = 2$, 经四步可得 $x^* = 1.7$.

例 7-9(牛顿迭代法收敛定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶连续导数, 且满足条件

$$(1) f(a)f(b) < 0;$$

$$(2) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上 } f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0;$$

$$(3) x_0 \in [a, b] \text{ 满足 } f(x_0)f''(x_0) > 0.$$

则由牛顿迭代法产生的序列 $\{x_k\}$ 单调收敛于 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内的惟一实根 x^* , 并且是平方收敛的.

证明 因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由条件(1)知, 方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内有根 x^* . 又由于条件(2)

知 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒正或恒负, 所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调, 因而 x^* 是 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内的惟一实根.

条件(1),(2)共有四种情形:

$$(1) f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0, \forall x \in [a, b];$$

$$(2) f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0, \forall x \in [a, b];$$

$$(3) f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0, \forall x \in [a, b];$$

$$(4) f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0, \forall x \in [a, b].$$

仅就(1)进行定理证明,其余三种情况的证明方法是类似的.

由 $x_0 \in [a, b], f(x_0)f''(x_0) > 0$ 可知 $f(x_0) > 0$, 再由 $f'(x) > 0$ 知 $f(x)$ 单增且 $x_0 > x^*$. 又由牛顿迭代法知

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$$

又台劳展开得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)(x - x_0)^2$$

其中 ξ_0 介于 x 与 x_0 之间. 利用 $f(x^*) = 0$, 得

$$\begin{aligned} f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi_0^*)(x^* - x_0)^2 &= 0 \\ x^* &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_0^*)}{f'(x_0)} (x^* - x_0)^2 = \\ &= x_1 - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_0^*)}{f'(x_0)} (x^* - x_0)^2 \end{aligned}$$

由 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ 以及前面证明的 $x_1 < x_0$, 有

$$x^* < x_1 < x_0$$

一般地, 设 $x^* < x_k < x_{k-1}$, 则必有 $f(x_k) > 0$ 且

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k$$

同样由台劳公式

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2!} f''(\xi_k)(x - x_k)^2$$

及 $f(x^*) = 0$, 得

$$\begin{aligned} f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k^*)(x^* - x_k)^2 &= 0 \\ x^* &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k^*)}{f'(x_k)} (x^* - x_k)^2 = \\ &= x_{k+1} - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k^*)}{f'(x_k)} (x^* - x_k)^2 < x_{k+1} < x_k \end{aligned}$$

根据归纳法原理知, 数列 $\{x_k\}$ 单调下降有下界 x^* , 因此有极限. 设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l$. 对迭代式

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 两端取 $k \rightarrow \infty$ 的极限, 并利用 $f(x)$ 、 $f'(x)$ 的连续性知 $f(l) = 0$, 即

$$l = x^*.$$

由上述证明知, 有关系式 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$, 即对于单根, 牛顿迭代法是平方收敛的.

例 7-10 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0, f''(x^*) \neq 0, \{x_k\}$ 是由牛顿迭代法产生的序列, 证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x_k}{(x_k - x_{k-1})^2} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

解 牛顿迭代法为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1} - x_k}{(x_k - x_{k-1})^2} &= -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left[\frac{f'(x_{k-1})}{f(x_{k-1})} \right]^2 = \\ &= -\frac{f(x_k) - f(x^*)}{[f(x_{k-1}) - f(x^*)]^2} \frac{[f'(x_{k-1})]^2}{f'(x_k)} = \\ &= -\frac{f'(\xi_k)[f'(x_{k-1})]^2}{f'(x_k)[f'(\xi_{k-1})]^2} \frac{(x_k - x^*)}{(x_{k-1} - x^*)^2} \end{aligned}$$

其中 ξ_k 介于 x_k 与 x^* 之间, ξ_{k-1} 介于 x_{k-1} 与 x^* 之间, 根据式(7.14)得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x_k}{(x_k - x_{k-1})^2} &= -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_k)[f'(x_{k-1})]^2}{f'(x_k)[f'(\xi_{k-1})]^2} \frac{x_k - x^*}{(x_{k-1} - x^*)^2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \end{aligned}$$

例 7-11 设 $f(x)$ 具有连续的 m 阶导数, x^* 是 $f(x) = 0$ 的 m 重根 ($m \geq 2$), $\{x_k\}$ 是由牛顿迭代法产生的序列, 证明

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = 1 - \frac{1}{m};$$

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} = 1 - \frac{1}{m};$$

$$(3) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k-1} - x_k}{x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}} = m$$

证明 (1)因 x^* 是 $f(x)=0$ 的 m 重根,则 $f(x)$ 可以表示成

$$f(x) = (x - x^*)^m h(x), h(x) \neq 0$$

所以

$$f'(x) = m(x - x^*)^{m-1} h(x) + (x - x^*)^m h'(x) = (x - x^*)^{m-1} [mh(x) + (x - x^*)h'(x)]$$

由牛顿迭代法 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 得

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{(x_k - x^*)^m h(x_k)}{(x_k - x^*)^{m-1} [mh(x_k) + (x_k - x^*)h'(x_k)]} = (x_k - x^*) \left[1 - \frac{h(x_k)}{mh(x_k) + (x_k - x^*)h'(x_k)} \right]$$

故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = 1 - \frac{1}{m}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} &= \frac{f(x_k)f'(x_{k-1})}{f(x_{k-1})f'(x_k)} = \\ &= \frac{(x_k - x^*)^m h(x_k)(x_{k-1} - x^*)^{m-1} [mh(x_{k-1}) + (x_{k-1} - x^*)h'(x_{k-1})]}{(x_{k-1} - x^*)^m h(x_{k-1})(x_k - x^*)^{m-1} [mh(x_k) + (x_k - x^*)h'(x_k)]} = \\ &= \left(\frac{x_k - x^*}{x_{k-1} - x^*} \right) \left(\frac{h(x_k)}{h(x_{k-1})} \right) \frac{mh(x_{k-1}) + (x_{k-1} - x^*)h'(x_{k-1})}{mh(x_k) + (x_k - x^*)h'(x_k)} \end{aligned}$$

利用 $h(x^*) \neq 0$ 及(1)的结论得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} = 1 - \frac{1}{m};$$

(3)先证明牛顿迭代函数 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 的导函数

$$\varphi'(x) \rightarrow 1 - \frac{1}{m} (x \rightarrow x^*)$$

因 x^* 是 $f(x)$ 的 m 重零点,则由假设, $f(x)$ 具有 m 阶连续导数,得

$$f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

且

$$f(x) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi_1)(x-x^*)^m$$

$$f'(x) = \frac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_2)(x-x^*)^{m-1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(m-2)!} f^{(m)}(\xi_3)(x-x^*)^{m-2}$$

其中 ξ_1, ξ_2, ξ_3 介于 x 与 x^* 之间, 故有

$$\varphi'(x^*) = \lim_{n \rightarrow x^*} \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \lim_{n \rightarrow x^*} \frac{m-1}{m} \frac{f^{(m)}(\xi_1)f^{(m)}(\xi_3)}{[f^{(m)}(\xi_2)]^2} = 1 - \frac{1}{m}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{x_{k-1} - x_k}{x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}} &= \frac{x_{k-1} - x_k}{(x_{k-1} - x_k) - (x_k - x_{k+1})} = \\ &= \frac{x_{k-1} - x_k}{x_{k-1} - x_k + \varphi'(\xi_k)(x_{k-1} - x_k)} = \frac{1}{1 - \varphi'(\xi_k)} \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k-1} - x_k}{x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \varphi'(\xi_k)} = \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{m})} = m$$

注 结论(1)和 $\varphi'(x^*) = 1 - \frac{1}{m}$ 都表明牛顿迭代法求重根时仅为线性收敛. 结论(3)可以用来计算重根数 m .

例 7-12 考虑下列修正的牛顿公式(单点斯蒂芬森方法)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f^2(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$$

设 $f(x)$ 有二阶连续导数, $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$, 试证明该方法是二阶收敛的.

证明 将 $f(x_k + f(x_k))$ 在 x_k 处作台劳展开, 得

$$f(x_k + f(x_k)) = f(x_k) + f'(x_k)f(x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_k)$$

其中 ξ 介于 x_k 与 $x_k + f(x_k)$ 之间, 于是

$$f(x_k + f(x_k)) - f(x_k) = f'(x_k)f(x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)f^2(x_k)$$

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x_k)}$$

由于 x^* 是 $f(x) = 0$ 的单根, 故

$$f(x) = (x - x^*)h(x), h(x^*) \neq 0$$

所以

$$\begin{aligned} f'(x_k) &= h(x_k) + (x_k - x^*)h'(x_k) \\ x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* - \frac{(x_k - x^*)h(x_k)}{h(x_k) + (x_k - x^*)h'(x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x_k)} = \\ &= \frac{(x_k - x^*) \left[1 - \frac{h(x_k)}{h(x_k) + (x_k - x^*)h'(x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x_k)} \right]}{h(x_k) + (x_k - x^*)h'(x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)f(x_k)} = \\ &= \frac{(x_k - x^*)^2 \left[h'(x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)h(x_k) \right]}{h(x_k) + (x_k - x^*) \left[h'(x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi)h(x_k) \right]} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{h'(x^*) + \frac{1}{2}h''(x^*)}{h(x^*)}$$

即迭代法是二阶收敛的.

四、学习效果测试题及答案

1、证明方程 $e^x + 10x - 2 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有一个实根 x^* , 并用二分法求这个根. 若要求

$|x_n - x^*| < 10^{-6}$, 需二分区间 $[0, 1]$ 多少次?

(答案: 当 $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ 时 $x^* \approx x_9 = 0.090820313$ 对分次数 $k+1 \geq 20$.)

2、对方程 $3x^2 - e^x = 0$, 确定 $[a, b]$ 及 $\varphi(x)$, 使 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 对任意 $x_0 \in [a, b]$ 均收敛, 并求出

方程的各个根, 误差不超过 10^{-4} .

(答

案

$$[a, b] = [-1, 0], \varphi(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{x}{2}}, x^* \approx -0.458962267$$

(1) ;(2)

$$[a, b] = [1, 0], \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{x}{2}}, x^* \approx 0.910007572$$

;(3)

$$[a, b] = [3, 4], \varphi(x) = \ln(3x^2), x^* \approx 3.733079028$$

3、建立一个迭代公式计算 $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$, 分析迭代的收敛性, 取 $x_0 = 0$, 计算 x_6 .

(答案: $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}, k = 0, 1, 2, \dots, x_6 = 1.999397637$.)

4、试分别采用 $\varphi_1(x) = 2 + \ln x$ 和 $\varphi_2(x) = e^{x-2}$ 的斯蒂芬森迭代法求方程 $x - \ln x = 2$ 在区间

$(2, +\infty)$ 内的根 x^* , 要求 $\left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \right| \leq 10^{-8}$.

(答案: 取 $x_0 = 3$, 其解分别为 $x_4 \approx 3.146193220$ 和 $x_5 = 3.146193262$.)

5、由方程 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ 求二重根 $x^* = \sqrt{2}$, 试用牛顿法(7.13), 有重根时的牛顿法

(7.15), (7.16) 计算 x^* , 要求 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-8}$.

(答案: 三种方法均取 $x_0 = 1.5$, 分别得

$$x_{24} = 1.414213568, x_3 = 1.414213562, x_3 = 1.414213562.)$$

6、用弦切法求 *Leonardo* 方程 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ 的根, 要求 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$.

(答案: 取 $x_0 = 1, x_2 = 2$, 用式(7.17)得 $x_5 = 1.368808108$.)

7、用抛物线法求解方程 $x^3 - 3x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 2$ 附近的根, 要求 $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$.

(答案: 取 $x_0 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2.5, x^* \approx x_6 = 1.879385242$.)

8、试构造一个求方程 $e^x + x = 2$ 根的收敛的迭代格式, 要求说明收敛理由, 并求根的近似值 x_k ,

使 $|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3}$.

(答案: 有根区间 $[0, 1]$, 不动点迭代式 $x_{k+1} = \varphi(x_k) = \ln(2 - x_k)$, 取

$$x_0 = 0.5, x^* \approx x_{14} = 0.442671724. \text{ 另外, 也可用牛顿迭代法求解得 } x^* \approx x_3 = 0.442854401.)$$

9、试确定常数 p, q, r , 使迭代公式

$$x_{k+1} = px_k + q \frac{a^2}{x_k^5}$$

产生的序列收敛到 $\sqrt[3]{a}$, 并使其收敛阶尽可能高.

(答案: 利用定理 7.4 可得 $p = q = \frac{5}{9}, r = -\frac{1}{9}$, 且 $\varphi'''(\sqrt[3]{a}) \neq 0$, 此时迭代法三阶收敛.)

10、 $\varphi(x) = x - p(x)f(x) - q(x)f^2(x)$, 试确定函数 $p(x)$ 和 $q(x)$, 使求解 $f(x) = 0$ 且以 $\varphi(x)$ 为迭代函数的迭代法至少三阶收敛.

(答案: 利用定理(7.4)可得 $p(x) = \frac{1}{f'(x)}, q(x) = \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$.)

五、课后习题全解

1、用二分法求方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的正根, 要求误差小于 0.05.

解 设 $f(x) = x^2 - x - 1, f(1) = -1 < 0, f(2) = 1 > 0$, 故 $[1, 2]$ 为 $f(x)$ 的有根区间. 又

$f'(x) = 2x - 1$, 故当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 单增, 当 $x > \frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 单增. 而

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}, f(0) = -1$, 由单调性知 $f(x) = 0$ 的惟一正根 $x^* \in (1, 2)$. 根据二分法的误差估

计式(7.2)知要求误差小于 0.05, 只需 $\frac{1}{2^{k+1}} < 0.05$, 解得 $k+1 > 5.322$, 故至少应二分 6 次. 具体计算结果见表 7-7.

表 7-7

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号
0	1	2	1.5	-
1	1.5	2	1.75	+
2	1.5	1.75	1.625	+
3	1.5	1.625	1.5625	-
4	1.5625	1.625	1.59375	-
5	1.59375	1.625	1.609375	-

即 $x^* \approx x_5 = 1.609375$.

2、为求 $x^3 - x^2 - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近的一个根, 设将方程改写成下列等价形式, 并建立相应的迭代公式:

(1) $x = 1 + \frac{1}{x^2}$, 迭代公式 $x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$;

(2) $x^3 = 1 + x^2$, 迭代公式 $x_{k+1} = (1 + x_k^2)^{\frac{1}{3}}$;

(3) $x^2 = \frac{1}{x-1}$, 迭代公式 $x_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$.

试分析每种迭代公式的收敛性, 并选取一种公式求出具有四位有效数字的近似根.

解 取 $x_0 = 1.5$ 的邻域 $[1.3, 1.6]$ 来考察.

(1) 当 $x \in [1.3, 1.6]$ 时, $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \in [1.3, 1.6]$, $|\varphi'(x)| = \left| -\frac{2}{x^3} \right| \leq \frac{2}{1.3^3} = L < 1$, 故迭代公式

$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{x_k^2}$ 在 $[1.3, 1.6]$ 上整体收敛.

(2) 当 $x \in [1.3, 1.6]$ 时

$$\varphi(x) = (1 + x^2)^{1/3} \in [1.3, 1.6]$$

$$|\varphi'(x)| = \frac{2}{3} \left| \frac{x}{(1+x^2)^{2/3}} \right| < \frac{2}{3} \frac{1.6}{(1+1.3^2)^{2/3}} \leq L = 0.522 < 1$$

故 $x_{k+1} = (1 + x_k^2)^{1/3}$ 在 $[1.3, 1.6]$ 上整体收敛.

(3) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $|\varphi'(x)| = \left| \frac{-1}{2(x-1)^{3/2}} \right| > \frac{1}{2(1.6-1)} > 1$ 故 $x_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$ 发散.

由于(2)的 L 叫小, 故取(2)中迭代式计算. 要求结果具有四位有效数字, 只需

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

即

$$|x_k - x_{k-1}| < \frac{1-L}{L} \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} < 0.5 \times 10^{-3}$$

取 $x_0 = 1.5$ 计算结果见表 7-8.

表 7-8

k	x_k	k	x_k
1	1.481248034	4	1.467047973
2	1.472705730	5	1.466243010
3	1.468817314	6	1.465876820

由于 $|x_6 - x_5| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, 故可取 $x^* \approx x_6 = 1.466$.

3、比较求 $e^x + 10x - 2 = 0$ 的根到三位小数所需的计算量:

(1) 在区间 $[0, 1]$ 内用二分法;

(2) 用迭代法 $x_{k+1} = \frac{2 - e^{x_k}}{10}$, 取初值 $x_0 = 0$.

解 (1) 因 $x^* \in [0, 1]$, $f(0) < 0$, $f(1) > 0$, 故 $0 < x^* < 1$, 用二分法计算结果见表 7-9.

表 7-9

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号	$\frac{1}{2^{k+1}}$
0	0	1	0.5	+	0.5
1	0	0.5	0.25	+	0.25
2	0	0.25	0.125	+	0.125
3	0	0.125	0.0625	-	0.0625
4	0.0625	0.125	0.09375	+	0.03125
5	0.0625	0.09375	0.078125	-	0.015625
6	0.078125	0.09375	0.0859375	-	0.0078125
7	0.0859375	0.09375	0.08984375	-	0.00390625
8	0.08984375	0.09375	0.091796875	+	0.001953125
9	0.08984375	0.091796875	0.090820312	+	0.000976562
10	0.08984375	0.090820312	0.090332031	-	0.000488281
11	0.090332031	0.090820312	0.090576171	+	0.00024414
12	0.090332031	0.090576171	0.090454101	-	0.00012207
13	0.090454101	0.090576171	0.090515136	-	0.000061035
14	0.090515136	0.090576171	0.090545653	+	0.000030517

此时 $|x_{14} - x^*| \leq \frac{1}{2^{15}} = 0.000030517 < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$, $x^* \approx x_{14}$ 具有三位有效数字.

(2) 当 $x \in [0, 0.5]$ 时, $\varphi(x) \in [0, 0.5]$, $|\varphi'(x)| = \frac{1}{10} |-e^x| \leq L = 0.825$, 故迭代式

$x_{k+1} = \frac{1}{10}(2 - e^{x_k})$ 在 $[0, 0.5]$ 上整体收敛. 取 $x_0 = 0$, 迭代计算结果如表 7-10 所示.

表 7-10

k	x_k	k	x_k
1	0.1	4	0.090512616

2	0.089482908	5	0.090526468
3	0.090639135	6	0.090524951

此时 $|x_6 - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_6 - x_5| \leq 0.00000720 < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$, 故 $x^* \approx x_6$ 精确到三位小数.

4、给定函数 $f(x)$, 设对一切 x , $f'(x)$ 存在且 $0 < m \leq f'(x) \leq M$, 证明对于范围 $0 < \lambda < \frac{2}{M}$

内的任意定数 λ , 迭代过程 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)$ 均收敛于 $f(x) = 0$ 的根 x^* .

证明 由于 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为单增函数, 故方程 $f(x) = 0$ 的根 x^* 是惟一的 (假定方程有根

x^*). 迭代函数 $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$, $|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)|$, 由 $0 < m \leq f'(x) \leq M$ 及

$0 < \lambda < \frac{2}{M}$ 得, $0 < \lambda m \leq \lambda f'(x) \leq \lambda M < 2$, $-1 < 1 - \lambda M \leq 1 - \lambda f'(x) \leq 1 - \lambda m < 1$, 故

$|\varphi'(x)| \leq L = \max\{|1 - \lambda m|, |1 - \lambda M|\} < 1$, 由此可得

$|x_k - x^*| \leq L |x_{k-1} - x^*| \leq \dots \leq L^k |x_0 - x^*| \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$

即 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.

5、用斯蒂芬森迭代法计算第 2 题中(2)的近似根, 精确到 10^{-5} .

解 记第 2 题中(2)的迭代函数 $\varphi_2(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, (3)的迭代函数为 $\varphi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, 利用迭代式(7.11), 计算结果见表 7-11.

表 7-11

k	加速 $\varphi_2(x)$ 的结果 x_k	k	加速 $\varphi_3(x)$ 的结果 x_k
0	1.5	0	1.5
1	1.465558485	1	1.467342286
2	1.465571233	2	1.465576085
3	1.465571232	3	1.465571232
		4	1.465571232

6、设 $\varphi(x) = x - p(x)f(x) - q(x)f^2(x)$, 试确定函数 $p(x)$ 和 $q(x)$, 使求解 $f(x) = 0$ 且以 $\varphi(x)$ 为迭代函数的迭代法至少三阶收敛.

解 要求 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 三阶收敛到 $f(x) = 0$ 的根 x^* , 根据定理 7.4, 应有

$\varphi(x^*) = x^*, \varphi'(x^*) = 0, \varphi''(x^*) = 0$. 于是由

$$x^* = x^* - p(x^*)f(x^*) - q(x^*)f^2(x^*) = x^*$$

$$\varphi'(x^*) = 1 - p(x^*)f'(x^*) = 0$$

$$\varphi''(x^*) = -2p'(x^*)f'(x^*) - p(x^*)f''(x^*) - 2q(x^*)[f'(x^*)]^2 = 0$$

得

$$p(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)}, q(x^*) = \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{[f'(x^*)]^3}$$

故取

$$p(x) = \frac{1}{f'(x)}, q(x) = \frac{1}{2} \frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

即迭代至少三阶收敛.

7、用下列方法求 $f(x) = x^3 - 3x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 2$ 附近的根. 根的准确值 $x^* = 1.87938524\dots$, 要求计算结果准确到四位有效数字.

(1)用牛顿法;

(2)用弦截法, 取 $x_0 = 2, x_1 = 1.9$;

(3)用抛物线法, 取 $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$.

解 $f(1) < 0, f(2) > 0, f(x) = x^3 - 3x - 1 = 3(x^2 - 1) \geq 0, f''(x) = 6x > 0, \forall x \in [1, 2]$.

(1)取 $x_0 = 2$, 用牛顿迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k - 1}{3x_k^2 - 3} = \frac{2x_k^3 + 1}{3(x_k^2 - 1)}$$

计算得 $x_1 = 1.888888889, x_2 = 1.879451567, |x_2 - x^*| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, 故

$$x^* \approx x_2 = 1.879451567$$

(2)取 $x_2 = 2, x_1 = 1.9$, 利用弦截法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

得, $x_2 = 1.981093936, x_3 = 1.880840630, x_4 = 1.879489903, |x_4 - x^*| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$, 故取

$$x^* \approx x_4 = 1.879489903$$

(3) $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$. 抛物线法的迭代式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{w + \text{sign}(w)\sqrt{w^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}$$

$$w = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$$

迭代结果为: $x_3 = 1.953967549, x_4 = 1.87801539, x_5 = 1.879386866$ 已达四位有效数字.

8、分别用二分法和牛顿迭代法求 $x - \tan x = 0$ 的最小正根.

解 显然 $x^* = 0$ 满足 $x - \tan x = 0$. 另外当 $|x|$ 较小时, $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots$, 故

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\tan x > x$, 因此, 方程 $x - \tan x = 0$ 的最小正根应在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 内.

记 $f(x) = x - \tan x, x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 容易算得 $f(4) = 2.842... > 0, f(4.6) = -4.26... < 0$, 因此

$[4, 4.6]$ 是 $f(x) = 0$ 的有限区间.

对于二分法, 计算结果见表 7-12.

表 7-12

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$ 的符号
0	4.0	4.6	4.3	+
1	4.3	4.6	4.45	+
2	4.45	4.6	4.525	-
3	4.45	4.525	4.4875	+
4	4.4875	4.525	4.50625	-
5	4.4875	4.50625	4.496875	-
6	4.4875	4.496875	4.4921875	+
7	4.4921875	4.496875	4.49453125	-
8	4.4921875	4.49453125	4.493359375	+
9	4.493359375	4.49453125	4.493445313	-

此时 $|x_9 - x^*| < \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < 10^{-3}$.

若用牛顿迭代法求解, 由于 $f'(x) = -(\tan x)^2 < 0$, $f''(x) = -2 \tan x \frac{1}{\cos^2 x} < 0$, 故取 $x_0 = 4.6$, 迭代计算结果如表 7-13 所示.

表 7-13

k	x_k	k	x_k
1	4.545732122	4	4.493412197
2	4.506145588	5	4.493409458
3	4.49417163	6	4.493409458

所以 $x - \tan x = 0$ 的最小正根为 $x^* \approx 4.493409458$.

9、研究求 $\sqrt{a}$ 的牛顿公式

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right), x_0 > 0$$

证明对一切 k 且序列是递减的.

证法一 用数列的办法, 因 $x_0 > 0$ 由 $x_k = \frac{1}{2} \left(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}} \right)$ 知 $x_k > 0$, 且

$$x_k = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x_{k-1}} + \sqrt{\frac{a}{x_{k-1}}} \right)^2 + \sqrt{a}, k = 1, 2, 3, \dots$$

. 又由

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2x_k^2} = 1, \forall k \geq 1$$

故 $x_{k+1} \leq x_k$, 即 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单减有下界 $\sqrt{a}$. 根据单调原理知, $\{x_k\}$ 有极限. 易证起极限为 $\sqrt{a}$.

证法二 设 $f(x) = x^2 - a (a > 0)$. 易知 $f(x) = 0$ 在 $[0, +\infty)$ 内有惟一实根 $x^* = \sqrt{a}$. 对 $f(x)$ 应用牛顿迭代法, 得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right), k = 0, 1, 2, \dots$$

利用例 7-9 的结论知, 当 $x_0 > \sqrt{a}$ 时, $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 单减有下界 $\sqrt{a}$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \sqrt{a}$. 当 $x_0 \in (0, \sqrt{a})$ 时,

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0}) = \frac{1}{2}[\sqrt{x_0} - \frac{a}{\sqrt{x_0}}]^2 + \sqrt{a} > \sqrt{a}$$

此时,从 x_1 起, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单减有下界 $\sqrt{a}$, 且极限为 $\sqrt{a}$.

10、对于 $f(x)=0$ 的牛顿公式 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, 证明

$$R_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1} - x_{k-2})^2}$$

收敛到 $-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$, 这里 x^* 为 $f(x)=0$ 的根.

证明见例 7-10.

11、用牛顿迭代法和求重根的牛顿迭代法(7.15)和(7.16)(书中式(4.13),(4.14))计算方程

$$f(x) = (\sin x - \frac{x}{2})^2 = 0 \quad \text{的一个近似根, 准确到 } 10^{-5}, \text{ 初始值 } x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

解 $f(x) = (\sin x - \frac{x}{2})^2$ 的根 x^* 为 2 重根, 即

$$f'(x) = 2(\sin x - \frac{x}{2})(\cos x - \frac{1}{2})$$

用牛顿法迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\sin x_k - \frac{x_k}{2})^2}{2(\sin x_k - \frac{x_k}{2})(\cos x_k - \frac{1}{2})} =$$

$$x_k - \frac{\sin x_k - \frac{x_k}{2}}{2 \cos x_k - 1}, k = 0, 1, 3, \dots$$

令 $x_0 = \frac{\pi}{2}$, 则 $x_1 = 1.785398, x_2 = 1.844562, \dots$, 迭代到

$$x_{20} = 1.895494, |x^* - 1.89549| < 10^{-5}.$$

用求重根的迭代公式(7.15), 迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sin x_k - \frac{x_k}{2}}{\cos x_k - \frac{1}{2}}, k = 0, 1, 2, \dots$$

取 $x_0 = \frac{\pi}{2}$, 则 $x_1 = 2.000000, x_2 = 1.900996, x_3 = 1.895512, x_4 = 1.895494, x_5 = 1.895494$.

四次迭代达到上面 x_{20} 的结果.

若用公式(7.16),则有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

将 $f(x), f'(x)$ 及 $f''(x) = 2(\cos x - \frac{1}{2})^2 - 2\sin x(\sin x - \frac{1}{2})$ 代入上述迭代公式,得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(\sin x_k - \frac{x_k}{2})(\cos x_k - \frac{1}{2})}{(\cos x_k - \frac{1}{2})^2 + \sin x_k(\sin x_k - \frac{x_k}{2})}$$

取 $x_0 = \frac{\pi}{2}$, 得 $x_1 = 1.801749, x_2 = 1.889630, x_3 = 1.895474, x_4 = 1.895494, x_5 = 1.895494$.

结果与公式(7.15)的相同.

12、应用牛顿迭代法于方程 $x^3 - a = 0$, 导出求立方根 $\sqrt[3]{a}$ 的迭代公式, 并讨论其收敛性.

解 设 $f(x) = x^3 - a, f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$, 牛顿迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2} = \frac{2x_k^3 + a}{3x_k^2}, k = 0, 1, 2, \dots$$

当 $x > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0, f''(x) < 0$, 因此, 对于 $a > 0$, 当

$x_0 > \sqrt[3]{a}$ 时 $f(x_0)f''(x_0) > 0$, 根据例 7-9 的结论知, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$. 当 $x_0 \in (0, \sqrt[3]{a})$ 时,

$$x_1 - \sqrt[3]{a} = \frac{2x_0^3 + a}{3x_0^2} - \sqrt[3]{a} = \frac{(\sqrt[3]{a} - x_0)^2}{3x_0^2}(\sqrt[3]{a} + 2x_0) > 0, x_1 > \sqrt[3]{a}$$

从 x_1 起, 牛顿序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\sqrt[3]{a}$.

对于 $a < 0$, 当 $x_0 < \sqrt[3]{a} < 0$ 时 $f(x_0)f''(x_0) > 0$, 由牛顿法产生的序列 $\{x_k\}$ 单增趋于 $\sqrt[3]{a}$. 当 $x_0 \in (\sqrt[3]{a}, 0)$ 时,

$$x_1 - \sqrt[3]{a} = \frac{(\sqrt[3]{a} - x_0)^2}{3x_0^2}(\sqrt[3]{a} + 2x_0) < 0, x_1 < \sqrt[3]{a}$$

之后迭代也收敛.

当 $a = 0$ 时, 迭代式变为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3}{3x_k^2} = \frac{2}{3}x_k$$

该迭代对任何 $x_0 \in R$ 均收敛,但收敛速度是线性的.

13、应用牛顿法于方程 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = 0$, 导出求 $\sqrt{a}$ 的迭代公式,并用此公式求 $\sqrt{115}$ 的值.

解 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^2}, f'(x) = \frac{2a}{x^3}, x \neq 0$, 所以牛顿迭代公式有

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1 - \frac{a}{x_k^2}}{\frac{2a}{x_k^3}} = \frac{1}{2}x_k \left(3 - \frac{x_k^2}{a}\right), k = 0, 1, 2, \dots$$

易知 $f''(x) = \frac{6a}{x^4} < 0$. 故取 $x_0 \in (0, \sqrt{a})$ 时, 迭代收敛.

对于 $\sqrt{115}$, 取 $x_0 = 9$, 迭代计算, 得

$$x_1 = 10.33043478, x_2 = 10.70242553, x_3 = 10.7237414, \\ x_4 = 10.72380529, x_5 = 10.72380529$$

故 $\sqrt{115} \approx 10.72380529$.

14、应用牛顿法于方程 $f(x) = x^n - a = 0$ 和 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^n} = 0$, 分别导出求 $\sqrt[n]{a}$ 的迭代公式,

并求

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2}$$

解 对于 $f(x) = x^n - a, f'(x) = nx^{n-1}$, 因此牛顿迭代法为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}} = \frac{1}{n}[(n-1)x_k + \frac{a}{x_k^{n-1}}], k = 0, 1, 2, \dots$$

根据定理 7.4 知

$$(\varphi^n(\sqrt[n]{a}) = \frac{n-1}{\sqrt[n]{a}})$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{a} - x_{k+1})}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = -\frac{1}{2} \frac{n-1}{\sqrt[n]{a}}$$

对于 $f(x) = 1 - \frac{a}{x^n}, f'(x) = \frac{na}{x^{n+1}}$, 牛顿法公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{x_k}{n} \left[(n+1) - \frac{x_k^n}{a} \right], k=0, 1, 2, \dots$$

根据定理 7.4 知

$$\begin{aligned} (\varphi^n(\sqrt[n]{a}) &= -\frac{n+1}{\sqrt[n]{a}}) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} &= \frac{1}{2} \frac{n+1}{\sqrt[n]{a}} \end{aligned}$$

15、证明迭代公式

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}$$

是计算 $\sqrt{a}$ 的三阶方法. 假定初值 x_0 充分靠近根 $x^* = \sqrt{a}$, 求

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a} - x_{k+1}}{(\sqrt{a} - x_k)^2}$$

证明 记 $\varphi(x) = \frac{x(x^2 + 3a)}{3x^2 + a}$, 则迭代式为 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 且 $\varphi(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.

由 $\varphi(x)$ 的定义, 有

$$(3x^2 + a)\varphi(x) = x(x^2 + 3a)$$

对上式两端连续求导三次, 得

$$6x\varphi(x) + (3x^2 + a)\varphi'(x) = 3x^2 + 3a$$

$$6\varphi(x) + 12x\varphi'(x) + (3x^2 + a)\varphi''(x) = 6x$$

$$18\varphi'(x) + 18x\varphi''(x) + (3x^2 + a)\varphi'''(x) = 6$$

代 $x = \sqrt{a}$ 依次入上三式, 并利用 $\varphi(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$, 得

$$\varphi'(\sqrt{a}) = 0, \varphi''(\sqrt{a}) = 0, \varphi'''(\sqrt{a}) = \frac{3}{2a} \neq 0$$

所以由定理 7.4 知, 迭代公式是求 $\sqrt{a}$ 的三阶方法且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a} - x_{k+1}}{(\sqrt{a} - x_k)^2} = \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{2a} = \frac{1}{4a}$$

16、用牛顿法解方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$$

取 $(x^{(0)}, y^{(0)})^T = (1.6, 1.2)^T$.

解 记 $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4, f_2(x, y) = x^2 - y^2 - 1$, 则

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}, [F'(x, y)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4y} & -\frac{1}{4y} \end{bmatrix}$$

牛顿迭代法为

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} - [F'(x^{(k)}, y^{(k)})]^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) \\ f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) \end{pmatrix}$$

代入初值 $(x^{(0)}, y^{(0)})^T = (1.6, 1.2)^T$, 迭代计算, 得

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.581250000 \\ 1.225000000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.58113834 \\ 1.224744898 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^{(3)} \\ y^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.581138830 \\ 1.224744871 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{(4)} \\ y^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.581138830 \\ 1.224744871 \end{pmatrix}$$

第八章 常微分方程初值问题数值解法

1、解：欧拉法公式为

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(x_n^2 + 100y_n^2), n=0,1,2$$

代 $y_0=0$ 入上式，计算结果为

$$y(0.1) \approx y_1 = 0.0, y(0.2) \approx y_2 = 0.0010, y(0.3) \approx y_3 = 0.00501$$

2、解：改进的欧拉法为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

将 $f(x, y) = x^2 + x - y$ 代入上式，得

$$y_{n+1} = (1-h+\frac{h^2}{2})y_n + \frac{h}{2}[(1-h)x_n(1+x_n) + (1+x_{n+1})x_{n+1}]$$

同理，梯形法公式为

$$y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h}y_n + \frac{h}{2+h}[x_n(1+x_n) + x_{n+1}(1+x_{n+1})]$$

将 $y_0 = 0, h = 0.1$ 代入上二式，，计算结果见表 9—5

表 9—5

x_n	改进欧拉 y_n	$ y(x_n) - y_n $	梯形法 y_n	$ y(x_n) - y_n $
0. 1	0. 005500	$0.337418036 \times 10^{-3}$	0. 005238095	$0.755132781 \times 10^{-4}$
0. 2	0. 021927500		0. 021405896	

0. 3	0. 050144388		0. 049367239	$0.136648778 \times 10^{-3}$
0. 4	0. 090930671	$0.658253078 \times 10^{-3}$	0. 089903692	
0. 5	0. 144992257	$0.962608182 \times 10^{-3}$	0. 143722388	$0.185459653 \times 10^{-3}$
		$0.125071672 \times 10^{-2}$		$0.223738443 \times 10^{-3}$
		$0.152291668 \times 10^{-2}$		$0.253048087 \times 10^{-3}$

可见梯形方法比改进的欧拉法精确。

3、证明：梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

代 $f(x, y) = -y$ 入上式，得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[-y_n - y_{n+1}]$$

解得

$$y_{n+1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-1} = \dots = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1} y_0$$

因为 $y_0 = 1$ ，故

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

对 $\forall x > 0$, 以 h 为步长经 n 步运算可求得 $y(x)$ 的近似值 y_n ,

故 $x = nh, n = \frac{x}{h}$, 代入上式有

$$y_n = \left(\frac{2-h}{2+h} \right)^{\frac{x}{h}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_n = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2-h}{2+h} \right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2h}{2+h} \right)^{\frac{x}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\left(1 - \frac{2h}{2+h} \right)^{\frac{2+h}{2h}} \right]^{\frac{2hx}{2+h}} = e^{-x}$$

4、解：令 $y(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, 则有初值问题

$$y' = e^{x^2}, y(0) = 0$$

对上述问题应用欧拉法, 取 $h=0.5$, 计算公式为

$$y_{n+1} = y_n + 0.5e^{x_n^2}, n = 0, 1, 2, 3$$

由 $y(0) = y_0 = 0$, 得

$$y(0.5) \approx y_1 = 0.5, y(1.0) \approx y_2 = 1.142012708$$

$$y(1.5) \approx y_3 = 2.501153623, y(2.0) \approx y_4 = 7.245021541$$

5、解：四阶经典龙格-库塔方法计算公式见式 (9.7)。对于问题 (1),

$f(x, y) = x + y$; 对于问题 (2), $f(x, y) = \frac{3y}{1+x}$ 。取

$h=0.2, y_0 = y(0) = 1$, 分别计算两问题的近似解见表 9-6。

表 9-6

x_n	(1) 的解 y_n	(2) 的解 y_n
0.2	1.242800000	1.727548209
0.4	1.583635920	2.742951299
0.6	2.044212913	4.094181355
0.8	2.651041652	5.829210728
1.0	3.436502273	7.996012143

6、证明： 根据定义 9.2，只要证明 $T_{n+1} = o(h^3)$ 即可。而

$$T_{n+1} = y(x+h) - y(x) - h\varphi(x, y, h)$$

$$\varphi(x, y, h) = \frac{1}{2} [f(x+th, y+thy'(x)) + f(x+(1-t)h, y+(1-t)hy'(x))]$$

因此只须将 $y(x+h)$ 和 $\varphi(x, y, h)$ 都在 x 处展开即可得到余项表达式：

$$f(x+th, y+thy'(x)) = f(x, y) + th \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + thy'(x) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + o(h)$$

$$f(x+(1-t)h, y+(1-t)hy'(x)) = f(x, y) + (1-t)h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$+ (1-t)hy'(x) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + o(h^2)$$

所以

$$T_{n+1} = y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2}h^2 y''(x) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(\xi) - y(x) - \frac{1}{2}h[2f(x, y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + hy'(x)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + o(h^2)] = o(h^3)$$

故对任意参数 t ，题中方法是二阶的。

7、解：

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n + \frac{h}{2}, y(x_n) + \frac{h}{2}y'(x_n)) = \\ &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_n) + o(h^4) - \\ &= y(x_n) - h\{f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2}\frac{\partial f(x_n, y(x_n))}{\partial x} + \\ &\quad \frac{1}{2!}[(\frac{h}{2})^2\frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial x^2} + \frac{h}{2}\frac{h}{2}y'(x_n)\frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial x\partial y} + \\ &\quad (\frac{h}{2}y'(x_n))^2\frac{\partial^2 f(x_n, y(x_n))}{\partial y^2}] + o(h^3)\} = \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) - \\ &\quad \frac{h}{8}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + (y'(x))^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}]_{(x_n, y(x_n))} + o(h^4) = o(h^3) \end{aligned}$$

因此，中点公式是二阶的。

对模型方程 $y' = \lambda y (\operatorname{Re}(\lambda) < 0)$ 使用中点公式求解，得

$$y_{n+1} = [1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2]y_n$$

易知，当 $|1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2| \leq 1$ 时，中点公式绝对稳定。特别当 λ

为实数且 $\lambda < 0$ 时，上不等式的解为

$$-2 \leq \lambda \leq -\frac{1}{2}$$

8. 解: (1) 用欧拉法求解题中初值问题, 当 $\lambda h = -100h$ 满足

$$|1 + (-100h)| \leq 1$$

时绝对稳定, 即当 $0 < h \leq 0.2$ 时欧拉法绝对稳定。

(2) 当 $\lambda h = -100h$ 满足不等

$$|1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda h)^3 + \frac{1}{4!}(\lambda h)^4| \leq 1$$

时, 四阶龙格-库塔法绝对稳定, 也即当 λh 满足

$$-2.785 \leq \lambda h < 0, 0 < h \leq \frac{-2.785}{\lambda} = 0.02785 \text{ 时绝对稳定。}$$

(3) 对于梯形公式, 当 $\lambda h = -100h \in (-\infty, 0)$ 时, 绝对稳定, 此条件对 $\forall h \in (0, +\infty)$ 都成立, 即梯形法对 h 无限制。

9、解: 二阶阿达姆斯显式和隐式方法分别为

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

将 $f = 1 - y$ 代入上二式, 化简得

$$\text{显式方法} \quad y_{n+2} = (1 - \frac{3}{2}h)y_{n+1} + \frac{h}{2}y_n + h$$

$$\text{隐式方法} \quad y_{n+1} = \frac{2-h}{2+h}y_n + \frac{2h}{2+h}$$

取 $h = 0.2, y_0 = 0, y_1 = 0.181$, 计算结果如表 9-7 所示

表 9-7

x_n	显式 y_n	$ y(x_n) - y_n $	隐式 y_n	$ y(x_n) - y_n $
-------	----------	------------------	----------	------------------

0.4	0.3267	0.2979953×10^{-2}	0.32990909	0.229136×10^{-3}
0.6	0.44679		0.451743801	0.555437×10^{-3}
0.8	0.545423	0.4398363×10^{-2}	0.551426746	0.755710×10^{-3}
1.0	0.6264751		0.63298552	0.864961×10^{-3}
		0.5248035×10^{-2}		
		0.5645458×10^{-2}		

可见，隐式方法比显式方法精确。

10. 证明：根据局部截断误差的定义知

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} &= y(x_n + h) - \frac{1}{2}(y(x_n) + y(x_n - h)) - \\
 &\frac{1}{4}h[4y'(x_n + h) - y'(x_n) + 3y'(x_n - h)] = \\
 &y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_n) + o(h^4) - \frac{1}{2}y(x_n) - \\
 &\frac{1}{2}[y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2y''(x_n) - \frac{1}{3!}h^3y'''(x_n) + o(h^4)] - \\
 &\frac{h}{4}[4(y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{1}{2}h^2y'''(x_n) + o(h^3)) - y'(x_n) + \\
 &3(y'(x_n) - hy''(x_n) + \frac{1}{2}h^2y'''(x_n) + o(h^3))] = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2})y(x_n) + \\
 &(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4})h^2y''(x_n) + (\frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{2} - \frac{3}{8})h^3y'''(x_n) + o(h^4) = \\
 &-\frac{5}{8}h^3y'''(x_n) + o(h^4)
 \end{aligned}$$

故方法是二阶的，局部截断误差的主项为 $-\frac{5}{8}h^3y'''(x_n)$ 。

11. 解 由局部截断误差的定义知

$$\begin{aligned}
 T_{n+2} &= y(x_n + 2h) + (b - 1)y(x_n + h) - by(x_n) - \\
 &\frac{h}{4}[(b + 3)y'(x_n + 2h) + (3b + 1)y'(x_n)] = \\
 &y(x_n) + 2hy'(x_n) + \frac{1}{2}(2h)^2 y''(x_n) + \frac{1}{3!}(2h)^3 y'''(x_n) + \\
 &\frac{1}{4!}(2h)^4 y^{(4)}(x_n) + o(h^5) + (b - 1)[y(x_n) + hy'(x_n) + \\
 &\frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(x_n) + \frac{1}{4!}h^4 y^{(4)}(x_n) + o(h^5)] - \\
 &by(x_n) - \frac{h}{4}(b + 3)[y'(x_n) + 2hy''(x_n) + \frac{1}{2!}(2h)^2 y'''(x_n) + \\
 &\frac{1}{3!}(2h)^3 y^{(4)}(x_n) + o(h^5)] - \frac{h}{4}(3b + 1)y'(x_n) = \\
 &(1 + b - 1 - b)y(x_n) + \\
 &[2 + b - 1 - \frac{1}{4}(b + 3) - \frac{1}{4}(3b + 1)]hy'(x_n) + \\
 &[2 + \frac{1}{2}(b - 1) - \frac{1}{2}(b + 3)]h^2 y''(x_n) + \\
 &[\frac{4}{3} + \frac{1}{6}(b - 1) - \frac{1}{2}(b + 3)]h^3 y'''(x_n) + \\
 &[\frac{2}{3} + \frac{1}{24}(b - 1) - \frac{1}{3}(b + 3)]h^4 y^{(4)}(x_n) + o(h^5) = \\
 &-\frac{1}{3}(b + 1)h^3 y'''(x_n) - (\frac{3}{8} - \frac{7}{24}b)h^4 y^{(4)}(x_n) + o(h^5)
 \end{aligned}$$

所以当 $b \neq -1$ 时

$$T_{n+2} = -\frac{1}{3}(b + 1)h^3 y'''(x_n) + o(h^4)$$

方法为二阶；当 $b = -1$ 时

$$T_{n+1} = -(\frac{3}{8} - \frac{7}{24}b)h^4 y^{(4)}(x_n) + o(h^5)$$

方法为三阶。

12、解： 根据刚性比的定义，若方程组的矩阵 $A = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ 10 & -11 \end{bmatrix}$ 的

特征值 λ_j 满足条件 $\text{Re}(\lambda_j) < 0 (j = 1, 2)$, 则

$$s = \frac{\max_{1 \leq j \leq 2} |\text{Re}(\lambda_j)|}{\min_{1 \leq j \leq 2} |\text{Re}(\lambda_j)|}$$

称为刚性比，易知 A 的两个特征值为

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -20$$

所以刚性比 $s=20$ 。

当 $\lambda h \in [-2.78, 0)$ 时，数值稳定。因此当

$$0 < h \leq \frac{-2.78}{-20} = 0.139 \text{ 时才能保证数值稳定。}$$