

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

课后答案网
www.hackshp.cn

1

自动控制原理习题集

李亨元

课后答案网

www.hackshp.cn

中南民族大学

2009年2月13日

前言

编写这本习题集的目的是为了配合自动控制原理课程教学，便于学生自主学习和自由发展。并且按照课程的要求和习题难易程度，将每章习题分为：基础练习题（下标为 a），本章概念直接应用；难题（下标为 b），要求将本章概念加以扩展；设计题（下标为 c），要求学生应用学过的控制系统理论求解控制工程实际问题；MATLAB 题，应用 MATLAB 语言及相应的工具箱进行控制系统分析和设计等几个层次；逐步提高学生解决问题的能力。

课后答案网
www.hackshp.cn

第一章 控制系统导论

1-1a 电冰箱制冷原理如图 1-1 所示, 简述系统工作原理, 指出被控对象, 被控量和给定量, 并画出系统方框图。

解: 被控对象是看得见的实体, 不能与物理量相混淆。被控制量则是被控对象中表征被控制对象工作状态的物理量。确定控制对象要看控制的目的与任务。

控制的任务是保持冰箱内的温度 T_c 等于设定的温度 T_r , 冰箱的箱体是被控对象, 箱内温度是被控量。由控制器旋钮设定出电位器输出电压 (与希望温度 T_r 值对应) 是给定量。

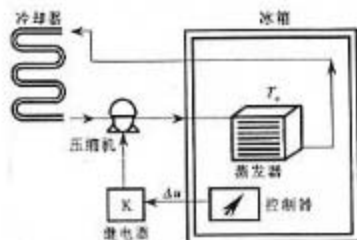


图 1-1 电冰箱制冷系统原理图

温度控制器中的双金属温度传感器 (测量元件) 感受冰箱内的温度, 并把它转换为电压信号, 与控制器旋钮设定出电位器输出电压 (对应于与希望温度 T_r) 相比较, 利用偏差电压 Δu (表征实际温度和希望温度的偏差) 控制继电器。当 Δu 大到一定的值时, 继电器接通压缩机启动将蒸发器中的高温低压气态制冷剂送到冷凝器散热。降温后流出的低温低压制冷剂被压缩成低温高压液态进入蒸发器急速降压扩散成气体, 吸收箱体内部的热量, 使箱体内温度降低, 而高温低压制冷剂又被吸入冷凝器。如此循环, 使冰箱达到制冷效果。继电器, 压缩机, 蒸发器和冷凝器组成系统的执行机构, 完成降温功能。冰箱制冷系统方框图如图 1-2 所示。



图 1-2 冰箱制冷系统方框图

1-2a 图 1-3 为液位控制系统的示意图, 试说明其工作原理并绘制系统的方框图。

说明 液位控制系统是一典型的过程控制系统。控制的任务是: 在各种扰动的作用下尽可能保持液面高度在期望的位置上。故它属于恒值调节系统。现以水位控制系统为例分析如下。

解 分析图 1-3 可以看到: 被控量为水位高度 h (而不是水流量 Q_2 或进水流量 Q_1); 受控对象为水箱; 使水位发生变化的主要原因是用水流量 Q_2 , 故它为系统的负载扰动; 而进水流量 Q_1 是用以补偿用水流量的改变, 使水箱的水位保持在期望的位置上的。

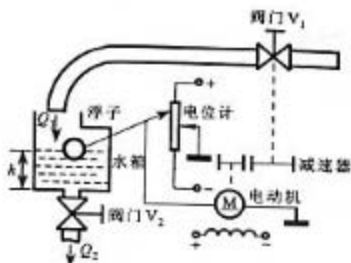


图 1-3 液位控制系统示意图

控制作用：控制进水流量的使由电动机驱动的阀门 V_1 ，故电动机-减速器-阀门 V_1 一起构成系统的执行机构；而电动机的供电电压 u_d 取决于电位器动触点与接零点之间的电位差，若记接零点与电位参考点之间的电压为 u_0 ，则它便是系统的给定信号，记动触点与电位参考点之间的电压为 u_1 ，而 $u_d = u_0 - u_1$ ，故 u_1 为负反馈信号。于是可绘制系统方框图，如图 1-4 所示。



图 1-4 液位控制系统方框图

系统的调节过程如下：调整系统和进水管 V_1 的开度使系统处于平衡状态，这时进水量 Q_1 和额定的用水量 Q_2 保持动态平衡，液面的高度恰好在期望的位置上，而与浮子杠杆相联接的电位器动触点正好在电位器中点（即接零点）上，从而 $u_d = 0$ 电动机停止不动；当用水量发生变化时，比如用水量增大使得液面下降，于是浮子也跟着下降，通过杠杆作用带动电位器的动触点往上移，从而给电动机电枢提供一定的电压，设其极性为正的（即 $u_d > 0$ ），于是电动机正转，通过减速器驱动阀门 V_1 增大其开度。

1-3b 图 1-5 是烤面包机的原理图。面包的烘烤质量烤箱内的温度及烘烤时间决定。（1）试说明传动带速度自动控制的工作原理，并绘制相应的原理方框图。（2）绘制烤面包机的方框图。

解 （1）传送带

由电动机和减速器驱动，传送带的线速度与电动机及减速器的角速度是固定比例关系，因此控制电动机减速器的角速度就控制了传送器的线速度。传送器的希望速度与温度有关，温度高，要求速度快，温度低要求速度慢。

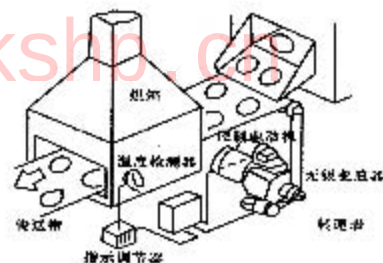


图 1-5 烤面包机

烤箱内温度检测器测出烤箱内的温度，传给指示调节器。指示调节

器根据预先规定的函数关系求出希望的速度，并变成相应的电信号作为调速系统的控制输入加到控制器上。控制器带动电动机，减速器驱动传送带运动。转速表测出减速器的实际速度，反馈到控制器，若与要求转速不等，则产生偏差信号。通过控制器控制电动机加速或减速，使速度趋于希望的速度。该调速系统的方框图如图 1-6 所示。

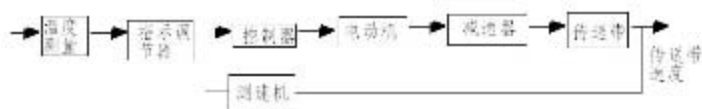


图 1-6 调速系统方框图

（2）面包的烘烤质量与烤箱温度与面包在烤箱内的时间有关，而烘烤时间又与传送带的速度有关。在该烤面包机中，只控制烘烤时间而未控制烘烤温度。但希

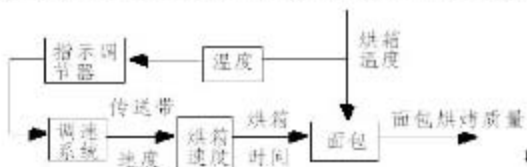


图 1-7 烤面包机方框图

望的烘烤时间又与温度有关。该系统可以看作一个按扰动补偿的开环控制系统，温度就是扰动量，方框图如图 1-7 所示。

1-4c 一晶体管稳压电源如图 1-8 所示。试画出其方框图，并说明在该电路图中哪些元件起着测量、放大、执行的作用，以及系统的干扰量和给定值是什么？

说明 在抽象闭环系统方框图时，首先要抓住比较点，搞清比较的时什么量；对于恒值控制系统，要明确基准是什么量？还应当清楚输入和输出量是什么？

解 本题直流稳压电源的基准是稳压管的电压 U_w ，输出电压 U_2 通过电阻 R_3 和 R_4 分压后与稳压管电压 U_w 比较，如果输出电压偏高，则经过 R_3 和 R_4 分压后电压也偏高，使与之相连的晶体管基极电流增大，集电极电流也随之增大，使在 R_1 两端电压也增大，于是输出电压就减小。相反，如果输出电压偏低，则通过类似过程使输出电压增大，以达到稳压的目的，可画出方块图如图 1-9 所示。

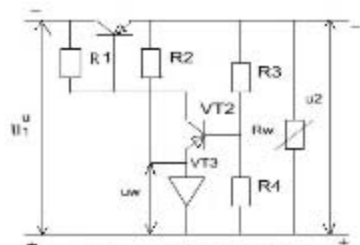


图 1-8 晶体管稳压电路

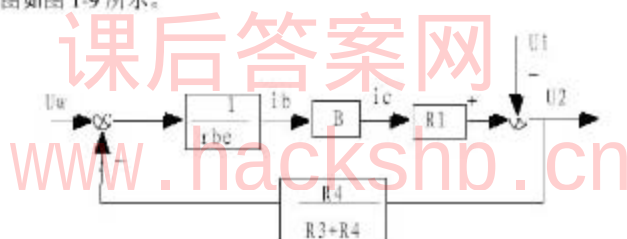


图 1-9 晶体管稳压电路方框图

第二章 控制系统的数学模型

2-1a 试证明图 2-1(a)所示电气网络与图 2-1(b)所示的机械系统具有相同的传递函数。

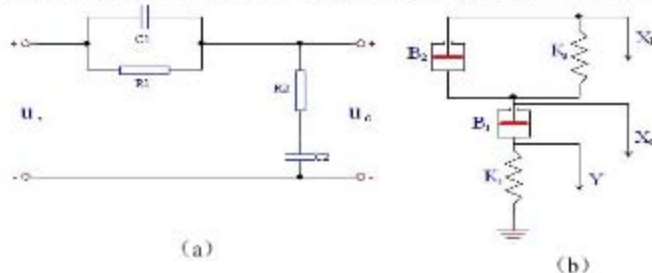


图 2-1

解：对于图 (a) 所示的电气网络，其传递函数 $U_c(s)/U_i(s)$ ，可以求得为

$$\frac{U_c(s)}{U_i(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s} + R_2 + \frac{1}{C_2 s}} = \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)s + 1} \quad (1)$$

而图(b)所示的机械系统的运动方程

$$b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_c) + k_2(x_1 - x_c) = b_1(\dot{x}_c - \dot{y}) \quad (2)$$

$$b_2(\dot{x}_c - \dot{y}) = k_1 y \quad (3)$$

假设初始条件为零 对上述二个微分方程进行拉氏变换得到

$$b_2[sX_1(s) - sX_c(s)] + k_2[X_1(s) - X_c(s)] = b_1[X_c(s) - sY(s)] \quad (4)$$

$$b_1[X_c(s) - sY(s)] = K_1 Y(s) \quad (5)$$

从(4)(5)两个方程中消去 $Y(s)$ 得到

$$\text{即 } (b_2 s + k_2)x_1(s) = (b_2 s + k_2 + b_1 s - \frac{b_1 s}{b_1 s + k_1})x_c(s) \quad (6)$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{X_c(s)}{X_1(s)} &= \frac{B_1 B_2 s^2 + (k_1 B_2 + k_2 B_1)s + k_1 k_2}{B_1 B_2 s^2 + (k_1 B_2 + k_2 B_1 + k_1 B_1)s + k_1 k_2} \\ &= \frac{B_1 B_2 \frac{1}{k_1 k_2} s^2 + (\frac{1}{k_2} B_2 + \frac{1}{k_1} B_1)s + 1}{B_1 B_2 \frac{1}{k_1 k_2} s^2 + (\frac{1}{k_2} B_2 + \frac{1}{k_1} B_1 + \frac{1}{k_2} B_1)s + 1}\end{aligned}\quad (7)$$

比较式 (1) 与式 (7) 可知，两个系统传递函数相同，且两系统变量间有如下相似对应关系

电压 u	对应	位移 x
电阻 R	对应	粘滞阻尼系数 B
电容 C	对应	弹性系数得倒数 $1/k$

2-2a 试分别写出图 2-2 中各有源网络的传递函数 $U_c(s)/U_r(s)$ 。

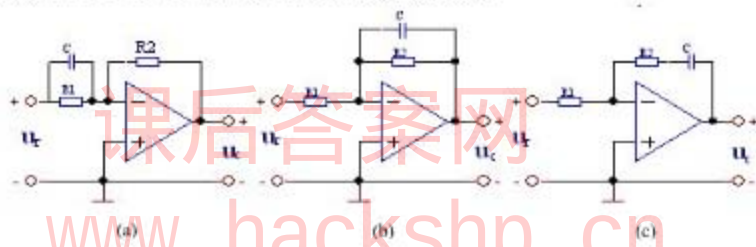


图 2-2

解：图 2-2 (a) 所示的有源网络传递函数 $U_c(s)/U_r(s)$ 可以求得为，

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{R_2}{\frac{1}{cs} // R_1} = \frac{R_2}{\frac{1}{\frac{cs}{1} * R_1}} = \frac{R_2 cs + 1}{R_1 / R_2}$$

图 2-2 (b) 示的有源网络传递函数 $U_c(s)/U_r(s)$ 可以求得为，

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{\frac{1}{cs} // R_2}{R_1} = \frac{\frac{1}{cs} + R_2}{R_1} = \frac{R_2 / R_1}{R_2 cs + 1}$$

图 2-2 (c) 所示的有源网络传递函数 $U_c(s)/U_r(s)$ 可以求得为，

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{\frac{1}{cs} + R_2}{R_1} = \frac{R_1 cs + 1}{R_1 cs}$$

2-3a 图 2-3 是一个转速控制系统，输入量是电压 U ，输出量是负载的转速 ω ，画出系统结构图，并写出输入输出间的数学表达式。

解： 1 列出各部分的微分方程

$$1) R i_a + L \frac{di_a}{dt} + e_b = U$$

$$2) e_b = K_e \omega$$

$$3) M_d = K_m i_a$$

$$4) J \frac{d\omega}{dt} + B\omega = M_d - M_l, \quad M_d, M_l \text{ 为电磁力矩与负载力矩}$$

2 对上面的方程组进行拉氏变换，并画出系统结构图如图 2-4 所示

$$1) I_a(s) = \frac{u(s) - E_b(s)}{L_a(s) + b}$$

$$2) E_b(s) = K_e \omega(s)$$

$$3) M_d(s) = K_m i_a(s)$$

$$4) \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{M_d(s) - M_l(s)}{Js + B}$$

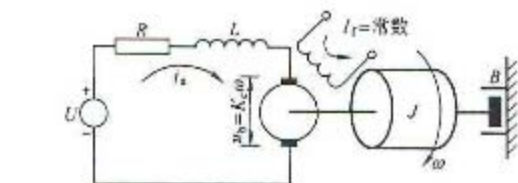


图 2-3

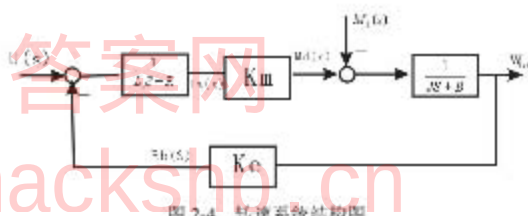


图 2-4 转速系统结构图

3 消除中间变量 $I_a(s)$ ，得到系统传递函数：

$$\frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_m}{JL_a}}{s^2 + \left(\frac{R}{L_a} + \frac{B}{J}\right)s + \frac{K_m K_e}{JL_a}}$$

2-4b 图 2-5 是一个模拟控制器的电路示意图。1) 写出输入 U_r 与输出 U_c 之间的微分方程；

2) 建立该控制器的结构图；3) 求闭环传递函数 $U_c(s)/U_r(s)$ ；4) 当 $R_1=R_2=R_3=R_4=100K\Omega$ ；

$R_5=1M\Omega$ ； $C_1=C_2=10\mu f$ ；输入 $u_r=1(t)$ ，求 $U_c(t)$ 的稳态输出。

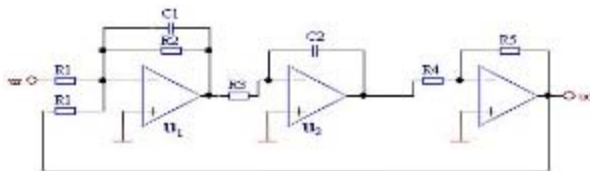


图 2-5

解： (1) 列出输入 U_r 与输出 U_c 之间的微分方程

$$\begin{aligned} -\frac{u_1(t)}{R_2} + \frac{cd(-u_1(t))}{dt} &= \frac{u_r(t)}{R_1} + \frac{u_c(t)}{R_1} \\ -\frac{cd u_1(t)}{dt} &= \frac{u_1(t)}{R_3} \\ -\frac{u_r(t)}{R_5} &= \frac{u_2(t)}{R_4} \end{aligned}$$

(2) 将上式两边拉氏变换并画出系统结构图如图 2-6 所示。

$$U_1(s) = \frac{-R_2}{R_1(1+R_2C_1S)} [U_r(s) + U_c(s)]$$

$$U_2(s) = \frac{-1}{R_3C_2S} U_1(s)$$

$$U_c(s) = \frac{-R_5}{R_4} U_2(s)$$

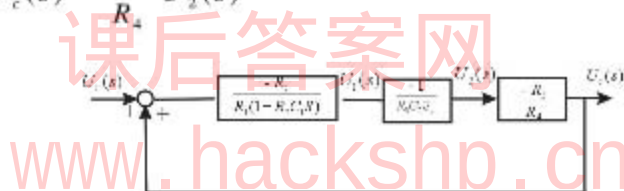


图 2-6

(3) 求闭环传递函数 $U_c(s)/U_r(s)$

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{\frac{-R_2}{R_1(1+R_2C_1S)} \cdot \frac{1}{R_3C_2S} \cdot \frac{R_5}{R_4}}{1 + \frac{-R_2R_5}{R_1R_3R_4C_2S(1+R_2C_1S)}} = \frac{-1}{\frac{R_1R_3R_4}{R_5} C_1C_2S^2 + \frac{R_1R_3R_4C_2S}{R_2R_5} + 1}$$

(4) 当 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 100K\Omega$; $R_5 = 1M\Omega$; $C_1 = C_2 = 10\mu f$

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{-1}{\frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{10}s + 1} \quad U_r(s) = \frac{1}{s}$$

$$U_c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-1}{\frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{10}s + 1} \cdot \frac{1}{s} = -1(V)$$

2-5b 天线方位角位置随动系统建模系统的原理图如图 2-7 所示, 其方块图如图 2-8 所示。系统的任务是使输出的天线方位角 $\theta_o(t)$ 跟踪输入方位角 $\theta_d(t)$ 的变化, 试建立该系统的数学模型。系统的参数值如下: 电源电压 $V=10v$; 功率放大器的增益和时间常数 $K_1=1$, $T_1=0.01s$;

伺服电动机的电枢回路电阻 $R_a = 8 \Omega$, 转动惯量 $J_a = 0.02 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$, 粘性摩擦系数 $f_a = 0.01 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$, 反电势系数 $C_e = 0.5 \text{ V} \cdot \text{s/rad}$, 转矩系数 $C_m = 0.5 \text{ N} \cdot \text{m/A}$; 减速器各齿轮的齿数为 $Z_1 = 25$, $Z_2 = Z_3 = 250$; 负载端的转动惯量 $J_L = 1 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ 粘性摩擦系数 $f_L = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$ 。

解: 采用组合系统建模法, 根据原理图 2-7 可以将系统划分为六个环节: 输入电位器, 差分放大器, 功率放大器, 电动机, 减速器和输出电位器。首先建立各个环节的数学模型, 然后将它们组合起来则可得系统的数学模型。

1 环节的数学模型

(1) 输入电位器与输出电位器

由于输入电位器与输出电位器的线路和电位器的结构均相同, 故这两个环节的传递函数是一样的。对电位器环节的输出电压与输入角位移的特性进行线性化处理则可视为一比例环节。由图 2-7 可知: 当动触头位于电位器中心时其输出电压为零; 朝前或朝后转动 5 圈其输出电压变化均为 10V。于是可得它们的传递函数为

$$\frac{u_i(s)}{\theta_i(s)} = k_{pot} = \frac{10}{5 \times 2\pi} = 0.318 \text{ v/rad} = \frac{u_o(s)}{\theta_o(s)}$$

(2) 差分放大器与功率放大器

放大器通常工作在放大状态, 可不考虑饱和的影响。差分放大器的时间常数比起功率放大器以及系统的其他环节的时间常数要小得多, 可以忽视不计。故这两个环节的输入输出传递函数分别为

$$\text{差分放大器} \quad \frac{U_c(s)}{U_e(s)} = K_c$$

$$\text{功率放大器} \quad \frac{u_{ds}(s)}{u_c(s)} = \frac{k_1}{T_1 s + 1} = \frac{1}{0.01 s + 1}$$

(3) 电动机

在小功率伺服系统中直流电动机的结构图中, 由于电动机的电枢回路电感很小, 可以忽略不计。图中的 J 与 f 为折算至电动机轴上系统转动部分的等效转动惯量和等效粘性摩擦系数, 其值分别为

$$J = J_a + J_L (Z_1 / Z_2)^2 = 0.02 + 1 \times (25 / 250)^2 = 0.03$$

$$f = f_a + f_L (Z_1 / Z_2)^2 = 0.01 + 1 \times (25 / 250)^2 = 0.02$$

将具体参数值代入, 于是可求得电动机的电枢(空载)电压与转子角位移之间的传递函数为

$$\frac{\theta_o(s)}{u_{ds}(s)} = \frac{C_m}{s[R_a(J_a + f) + C_e C_m]} = \frac{C_m / J R_a}{s[s + 1/J(f + C_e C_m / R_a)]} = \frac{2.083}{s(s + 1.708)}$$

(4) 减速器

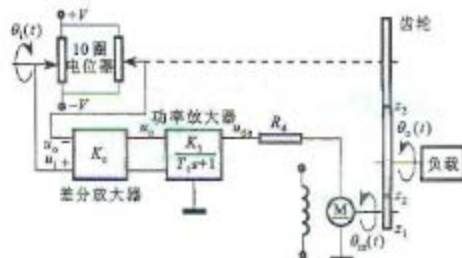


图 2-7 天线方位角位置随动系统原理图

齿轮减速器的传动比为 $i = z_2 / z_1 = 250 / 25 = 10$, 于是减速器的传递函数为

$$\frac{\theta_n(s)}{\theta_m(s)} = 1 / i = 0.1$$

2 系统的输入输出模型

将各个环节的数学模型按照信号的传递关系组合起来, 则可绘制系统的结构图如图 2-8 所示。应用梅森公式或结构图化简, 由图则可求得系统的传递函数为

$$\frac{\theta_n(s)}{\theta_i(s)} = \frac{6.62k_c}{s^3 + 101.71s^2 + 170.8s + 6.62k_c}$$



图 2-8 天线方位角位置随动系统结构图

2-6c 图 2-9 所示为装在小车上的倒立摆系统。该系统与空间飞行器在发射过程中空间助推器姿态控制的模型一致。姿态控制的任务是, 保持空间助推器在垂直位置。这和杂技表演中艺人顶立杆的平衡系统是相类似的。显然若不外施控制, 该系统是不稳定的, 倒立的摆随时都可能倒下来。为了简化讨论, 假设摆的质量 m 集中在杆顶 (摆杆无质量), 而且只作为二维问题来处理, 即摆只在图示的平面上运动。小车质量为 M , 作用在小车上的外施控制力为 u , 试求该系统的数学模型。

解 系统的运动方程

设摆杆偏离垂直直线的角度为 θ , 由于要求倒立摆保持在垂直位置上故可认为 θ 角很小。取坐标系如图所示, 于是质量 m 的重心坐标为

$$\text{横坐标 } z_m = z + l \sin \theta \quad \text{纵坐标 } v_m = l \cos \theta$$

根据牛顿第二定律, 则可列写系统在 z 方向的运动方程为

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + m \frac{d^2}{dt^2} (z + l \sin \theta) = u \quad (2-1)$$

质量 m 绕 p 点转动的运动方程为

$$m \frac{d^2 z_m}{dt^2} l \cos \theta - m \frac{d^2 v_m}{dt^2} l \sin \theta = mgl v_m \sin \theta$$

$$\text{即} \quad [m \frac{d^2}{dt^2} (z + l \sin \theta)] l \cos \theta - [m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta)] l \sin \theta = mgl \sin \theta \quad (2-2)$$

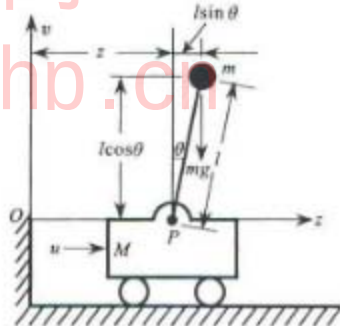


图 2-9 倒立摆系统示意图

式中 $g=9.81 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, L 摆杆长度。而

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \theta = \frac{d}{dt} [\cos \theta * \dot{\theta}] = -\sin \theta * \dot{\theta}^2 + \cos \theta * \ddot{\theta}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos \theta = \frac{d}{dt} [-\sin \theta * \dot{\theta}] = -\cos \theta * \dot{\theta}^2 - \sin \theta * \ddot{\theta}$$

于是 (2-1) 和 (2-2) 可分别改写为

$$(M+m)\ddot{Z} - ml \sin \theta * \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta * \ddot{\theta} = u \quad (2-3)$$

和

$$m[\ddot{Z} - l \sin \theta * \dot{\theta}^2 + l \cos \theta * \ddot{\theta}] \cos \theta - ml[-\cos \theta * \dot{\theta}^2 - \sin \theta * \ddot{\theta}] \sin \theta = mg \sin \theta$$

上式可进一步化简为

$$m\ddot{Z} \cos \theta + ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta \quad (2-4)$$

非线性模型的线性化 式 (2-3) 和 (2-4) 是描述倒立摆系统运动的非线性微分方程。

由于控制的目的在于保持倒立摆在垂直位置上, 故可假设 $\theta(t)$ 和 $\dot{\theta}(t)$ 均较小。于是

$\sin \theta = \theta, \cos \theta = 1, \dot{\theta}^2 = 0$, 从而可将系统的非线性模型 (2-3) 和 (2-4) 线性化为

$$(M+m)\ddot{Z} + ml\ddot{\theta} = u$$

$$m\ddot{Z} + ml\ddot{\theta} = mg\theta$$

或者由上面两个式子分别消去 $\ddot{\theta}$ 或 $\ddot{Z}$, 则可将线性化模型进一步改写为

$$m\ddot{Z} = u - mg\theta$$

$$ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u \quad (2-5)$$

其中 θ 表示摆杆绕 p 点转动的情况, z 表示小车的位置。它们都是易于测量的, 若取为系统的输出量, 并对式 (2-5) 取拉氏变换, 则可求得倒立摆系统的复域模型为

$$Ms^2 Z(s) = U(s) - mg\theta(s)$$

$$[Mls^2 - (M+m)g]\theta(s) = -U(s)$$

系统的传递函数 由上式即可导出倒立摆系统的输入输出 (复域) 模型为

$$Y(s) = \begin{pmatrix} \theta(s) \\ Z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Mls^2 - (M+m)g} \\ \frac{ls^2 - g}{s^2 [Mls^2 - (M+m)g]} \end{pmatrix} u(s) = G(s)U(s)$$

2-7c 设系统处于静止状态, 当输入单位阶跃函数时其输出响应为

$$y(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t} \quad t > 0$$

试求该系统的传递函数。

解 由题意可知: 系统的初始条件为零, $r(t) = 1(t)$ 于是 $R(s) = \mathcal{L}[1(t)] = 1/s$ 。对上述响应表达式两边取拉氏变换, 则有

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s+2)(s+1)}$$

令 $Y(s) = G(s)R(s) = G(s)/s$, 由上式便可求得系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s+2)(s+1)}$$

讨论 传递函数是线性定常单变量系统常用的输入输出模型, 是经典控制理论的重要基础。求取传递函数的常用方法有下列四种: (1) 根据系统的工作原理绘制结构图 (或信号流程图) 来求取; (2) 由系统的微分方程 (或微分方程组) 通过拉氏变换来导出; (3) 根据系统响应表达式来推导, 如本例; (4) 由系统的状态空间表达式转换而得。

2-8a 系统的结构图如图 2-10 所示, 试求该系统的输入输出传递函数。

说明 由结构图求系统的传递函数既可通过结构图化简也可以用梅森公式来计算, 所得结果 (即传递函数) 是唯一的, 但是结构图等效变换的方案则不是唯一的。而且等效性只保证总的输入输出关系 (即传递函数) 不变, 而结构图内部则不等效, 本题就是对此的一个实例说明。

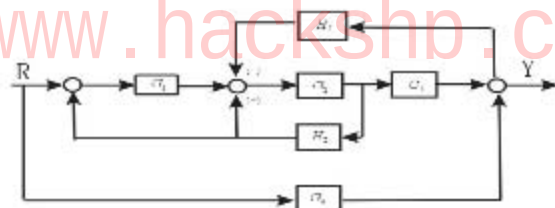
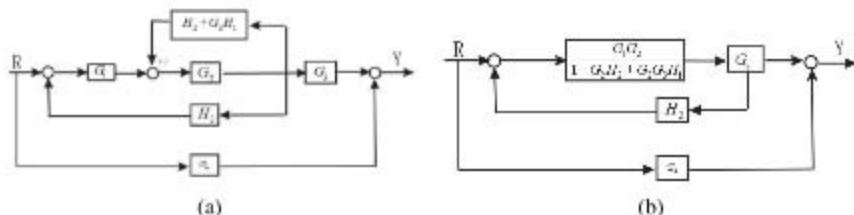


图 2-10 系统结构图

(简记 $G_1(s) = G_1$, $H_1(s) = H_1$, $R(s) = R$, $Y(s) = Y$)

解 (1) 结构图化简方案 1

将 G_1 环节输出端的引出点前移并合并局部反馈环节, 如图 2-11 (a) 所示; 然后进行串联和反馈的等效变换, 如图 2-11 (b) 和 (c) 所示; 由图 2-11 (c) 通过并联的等效变换, 则可求得系统的传递函数为



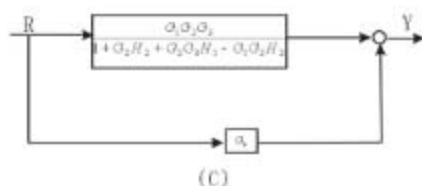


图 2-11 系统结构图化简方案 1

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_4 + \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 - G_1 G_2 H_2}$$

(2) 结构图化简方案 2

将 G_2 环节输出端的引出点后移，合并局部反馈环节并作串联等效变换，如图 2-12(a) 所示。然后进行反馈和串联的等效变换，如图 2-12(b) 所示。再通过反馈变换则可化成图 2-11(c) 所示的形式，从而可导出与方案 1 相同的传递函数。

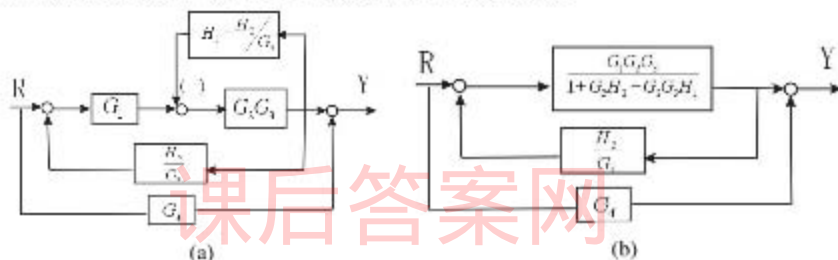


图 2-12 系统结构图化简方案 2

(3) 结构图化简方案 3

将 G_2 环节输出端的引出点后移，把中间的相加点前移和左端的相加点合并并作串联等效变换，如图 2-13(a) 所示。然后合并局部反馈环节，如图 2-12(b) 所示。再通过反馈变换则可化成图 2-11(c) 所示的形式，同样可导出与前两个方案相同的传递函数。

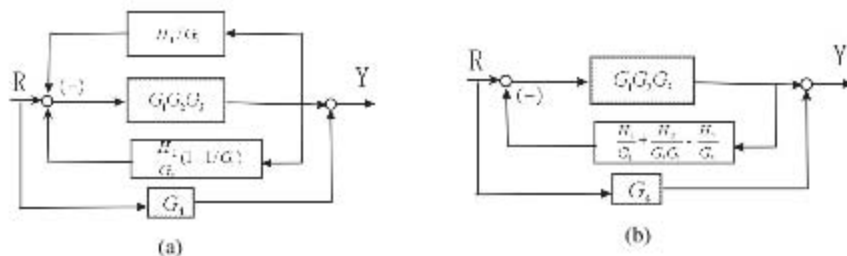


图 2-13 系统结构图化简方案 3

(4) 应用梅森公式求解

为了便于观察，先把结构图改画成信号流程图。改画过程如下：将结构图 2-10 上用符号“ $\circ$ ”标出各信号在信号流程图上设置相应的节点，则可将结构图改画成图 2-14 所示的信号流程图。

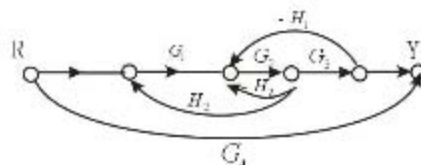


图 2-14 系统信号流程图

山图可知：它有 3 个单独的回路，其回路增益分别为

$$L_1 = -G_2H_2 \quad L_2 = G_1G_2H_2 \quad L_3 = -G_2G_3H_1$$

没有互不接触的回路，故信号流图的特征式为

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) = 1 + G_2H_2 + G_2G_3H_1 - G_1G_2H_2$$

从输入到输出的前向通道有 2 条，它们的增益及相应得余因子式分别为

$$P_1 = G_1G_2G_3 \quad \Delta_1 = 1 \quad P_2 = G_4 \quad \Delta_2 = \Delta$$

于是根据梅森公式，则可求得该系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^2 P_i \Delta_i = G_4 + \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2H_2 + G_2G_3H_1 - G_1G_2H_2}$$

所得结果与结构图化简的结构相同。

讨论 (1) 结构图简化虽然方案较多，但所得的结果（即传递函数）是唯一的。化简的基本思路是：解除交叉，由里往外逐步地化简；相邻的相加点之间或相邻的引出点之间可互换位置，但是相邻的相加点与引出点之间一般不能简单地互换位置，若需要互换则必须保证其输入输出关系的等效性；对于多输入或多输出的复杂性系统，则应用叠加原理以简化求传递函数的复杂性。

(2) 对于复杂的结构图，应用梅森公式可不必进行繁杂的结构图化简工作。为了便于观察往往先将结构图改画成信号流图，应用梅森公式解题的关键是要细心观察，把所有的各种类型的回路，通向通道增益及其余因子式，一个不漏且一个也不多的找出来，谨防粗心出错。

2-9a 试化简图 2-15 所示的系统结构图，求传递函数，并试用梅逊公式求解。

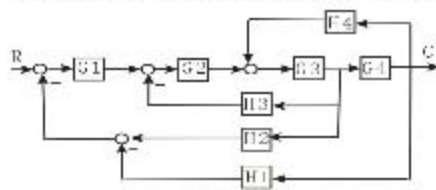


图 2-15

解：1 将 G_4 前输出移到 G_3 后输出消除交叉，得到多回路结构的等效框图如图 2-16 所示：

$$G_5 = \frac{G_1G_4}{1 + G_2G_4}$$

$$G_6 = \frac{G_2G_5}{1 + G_2G_5 \frac{H_3}{G_4}} = \frac{G_2G_3G_4}{1 + G_2G_4H_3 + G_2G_3H_1}$$

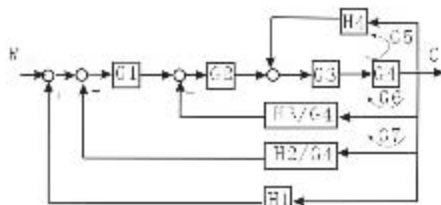


图 2-16

$$G_7 = \frac{G_1 G_6}{1 + G_1 G_6 \frac{H_2}{G_4}} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_4 H_4 + G_2 G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

2 由内到外进行反馈连接的等效变换, 直到变换为一个等效方框, 即得到所求的传递函数。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_7}{1 - G_7 H_1} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_4 H_4 + G_2 G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 G_3 G_4 H_1}$$

3 试用梅逊公式求解

将系统结构图转换成信号流图

如图 2-17 所示:

一条前向通路

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 \quad \Delta_1 = 1$$

回路有四个:

$$L_1 = -G_2 G_4 H_4; \quad L_2 = -G_2 G_3 H_3;$$

$$L_3 = -G_1 G_2 G_3 H_2; \quad L_4 = G_1 G_2 G_3 G_4 H_1$$

$$\Delta = 1 + G_1 G_2 G_3 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_2 G_4 H_4 - G_1 G_2 G_3 G_4 H_1$$

则用梅逊公式可求得系统传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{\Delta} P_1 \Delta_1 = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2 G_3 H_2 + G_2 G_3 H_3 + G_2 G_4 H_4 - G_1 G_2 G_3 G_4 H_1}$$

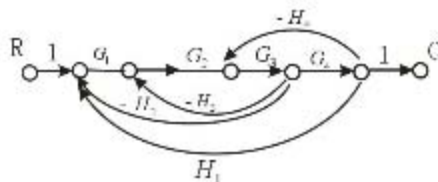


图 2-17

2-10a 系统的信号流图如图 2-18 所示, 试求 $C(S)/R(S)$

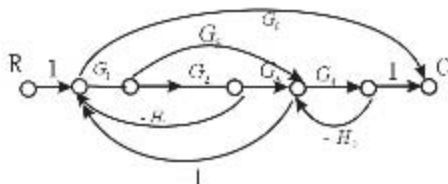


图 2-18

解: $\sum L_i = -G_1 G_2 H_1 - G_1 G_2 G_3 - G_4 H_2 - G_1 G_3$

$$\sum L_i L_j = (-G_1 G_2 H_1)(-G_4 H_2) = G_1 G_2 G_4 H_1 H_2$$

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_1 G_4 G_3 \quad \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = G_6 \quad \Delta_3 = 1 + G_4 H_2$$

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 + G_4 H_2 + G_1 G_5 + G_1 G_2 G_4 H_1 H_2$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_4 G_5 + G_6 (1 + G_4 H_2)}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 + G_4 H_2 + G_1 G_5 + G_1 G_2 G_4 H_1 H_2}$$

2-11b 试求图 2-19 所示结构图的传递函数 $C(S)/R(S)$ 。

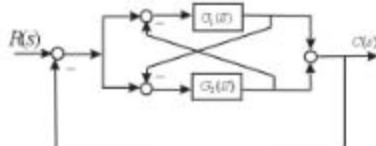


图 2-19

解: 解法 (1) 应用梅逊公式求解, 先将结构图 2-19 转化成信号流图如图 2-20 所示:

$$\sum L_i = -G_1; -G_2; G_1 G_2; G_1 G_2; G_1 G_2;$$

$$\Delta = 1 - \sum L_i = 1 + G_1 + G_2 - 3G_1 G_2$$

$$P_1 = -G_1 G_2 \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = -G_1 G_2 \quad \Delta_2 = 1$$

$$P_3 = G_1 \quad \Delta_3 = 1$$

$$P_4 = G_2 \quad \Delta_4 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{G_1 + G_2 - 2G_1 G_2}{1 + G_1 + G_2 - 3G_1 G_2}$$

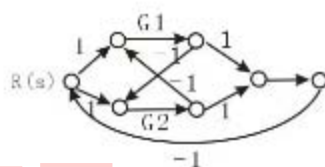


图 2-20

解法 (2) 用解析法求 $C(S)/R(S)$,
如图 2-21

$$E(S) = R(S) - C(S)$$

$$y_1(s) = [E(s) - y_2(s)]G_1(s)$$

$$y_2(s) = [E(s) - y_1(s)]G_2(s)$$

分析求得:

$$\frac{y_1(s)}{E(s)} = \frac{G_1(s)[1 - G_2(s)]}{1 - G_1(s)G_2(s)}$$

$$\frac{y_2(s)}{E(s)} = \frac{G_2(s)[1 - G_1(s)]}{1 - G_1(s)G_2(s)}$$

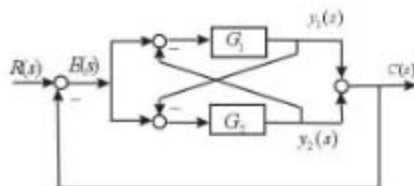


图 2-21

$$\frac{C(s)}{E(s)} = \frac{y_1(s)}{E(s)} + \frac{y_2(s)}{E(s)} = \frac{G_1(s) + G_2(s) - 2G_1(s)G_2(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} = G_a(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s) + G_2(s) - 2G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s) - 3G_1(s)G_2(s)} = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)}$$

2-12b 已知系统结构如图 2-22 所示。

1) 求传递函数 $C(s)/R(s)$ 和 $C(s)/N(s)$ 。

2) 若要消除干扰对输出的影响

(即 $C(s)/N(s)=0$)，问 $G_0(s)=?$

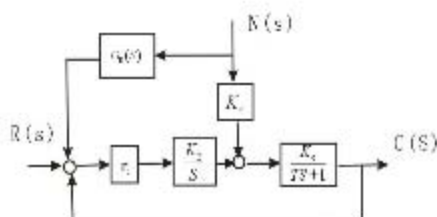


图 2-22

解: 1) 令 $N(s)=0$, 求 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2 K_3}{TS^2 + S + K_1 K_2 K_3}$

令 $R(s)=0$, 求 $\frac{C(s)}{N(s)}$ 先作等效变换框图, 如图 2-23 所示。

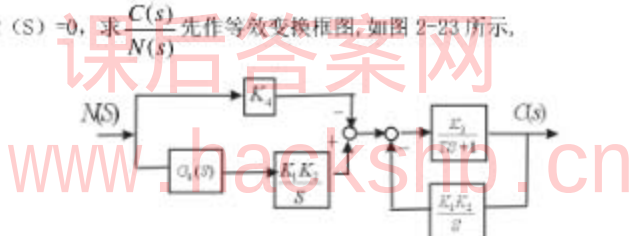


图 2-23

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{(\frac{G_0 K_1 K_2}{S} - K_4) \frac{K_3}{TS+1}}{1 + \frac{K_3}{TS+1} \frac{G_0 K_1 K_2}{S}} = \frac{K_3 (G_0 K_1 K_2 - K_4 S)}{S(TS+1) + K_1 K_2 K_3}$$

2) 要使 $\frac{C(s)}{N(s)}=0$, 则须 $K_3 (G_0 K_1 K_2 - K_4 S) = 0$

$$\text{求得 } G_0(s) = \frac{K_4 S}{K_1 K_2}$$

2-13d 考虑图 2-24 所示的反馈系统。

1) 利用函数 series 与 cloop 函数, 计算闭环传递函数, 并用 printsys 函数显示结果;

2) 用 step 函数求取闭环系统的单位阶跃响应, 并验证输出终值为 2/5。

解: MATLAB 文本如下:

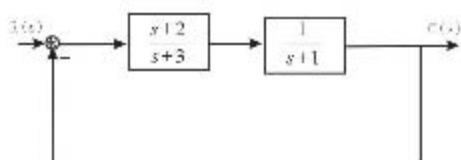


图 2-24

```
numg=[1];deng=[1 1];
numc=[1 2];denc=[1 3];
[num1,den1]=series(numc,denc,numg,deng);
[num,den]=cloop(num1,den1,-1)
Printsys(num,den)
```

//其结果为: $\frac{s+2}{s^2+5s+5}$

Step(num,den),grid

//其闭环系统的单位阶跃响应如图 2-25 所示。

t=[0:0.1:10];

[y,x,t]=step(num,den,t);

Plot(t,y),grid

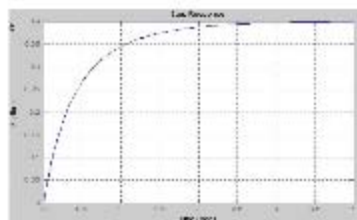


图 2-25

2-14d 考虑图 2-26 所示的方框图。

1) 用 MATLAB 化简方框图, 并计算系统的闭环传递函数;

2) 利用 pzmap 函数绘制闭环传递函数的零极点图;

3) 用 roots 函数计算闭环传递函数的零点和极点, 并与 2) 的结果比较。

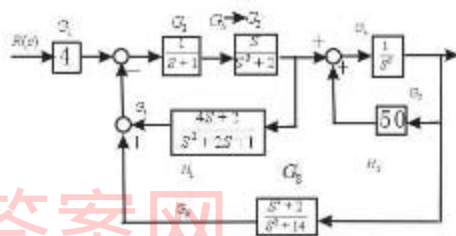


图 2-26

解 MATLAB 文本如下:

```
nG1=[4];dG1=[1]; nG2=[1];dG2=[1 1];
nG3=[1,0];dG3=[1,0,2]; nG4=[1];dG4=[1,0,0];
nh1=[4,2];dh1=[1,2,1];nh2=[50];dh2=[1];nh3=[1,0,2];dh3=[1,0,0,14];
[nG5,dG5]=series(nG2,dG2,nG3,dG3);
```

Printsys(nG5,dG5) //其结果为: $\frac{s}{s^3+s^2+2s+2}$

[nG6,dG6]=feedback(nG5,dG5,nh1,dh1,-1)

Printsys(nG6,dG6) //其结果为: $\frac{s^3+2s^2+s}{s^5+3s^4+5s^3+11s^2+8s+2}$

[nG7,dG7]=feedback(nG4,dG4,nh2,dh2,+1);

Printsys(nG7,dG7) //其结果为: $\frac{1}{s^2-50}$

[nG8,dG8]=series(nG6,dG6,nG7,dG7);

Printsys(nG8,dG8)

//其结果为: $\frac{s^3+2s^2+s}{s^7+3s^6-45s^5-139s^4-242s^3-548s^2-400s-100}$

[nG9,dG9]=feedback(nG8,dG8,nh3,dh3,+1);

Printsys(nG9,dG9)

//其结果为:

```


$$\frac{s^6 + 2s^5 + s^4 + 14s^3 + 28s^2 + 14s}{s^{10} + 3s^9 - 45s^8 - 125s^7 - 200s^6 - 1179s^5 - 2348s^4 - 3491s^3 - 7676s^2 - 5602s - 1400}$$

[num,den]= series(nG1,dG1, nG9, dG9);
Printsys(num,den)
//其结果为:

$$\frac{4s^6 + 8s^5 + 4s^4 + 56s^3 + 112s^2 + 56s}{s^{10} + 3s^9 - 45s^8 - 125s^7 - 200s^6 - 1179s^5 - 2348s^4 - 3491s^3 - 7676s^2 - 5602s - 1400}$$

pzmap(num,den) //其闭环传递函数的零极点图如图 2-27 所示。
Z=roots(num)
P=roots(den) //计算所得的闭环传递函数的零点和极点结果为:

```

Z =

```

0
1.2051 + 2.0872i
1.2051 - 2.0872i
-2.4101
-1.0000
-1.0000

```

P =

```

7.0712
-7.0708
1.2050 + 2.0882i
1.2050 - 2.0882i
0.1223 + 1.8387i
0.1223 - 1.8387i
-2.4225
-2.3056
-0.4635 + 0.1993i
-0.4635 - 0.1993i

```

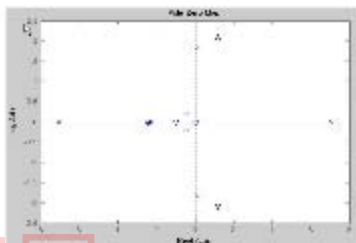


图 2-27

由以上分析可见，利用 pzmap 函数绘制闭环传递函数的零极点图所得结果与用 roots 函数计算的闭环传递函数零点和极点的结果是相同的。

www.hackshp.cn

第三章 控制系统时域分析

3-1a 系统结构图如图 3-1 所示。

- (1) 当 $r(t)=t$, $n(t)=t$ 时, 试求系统总稳态误差;
(2) 当 $r(t)=1(t)$, $n(t)=0$ 时, 试求 σ_p , t_p 。

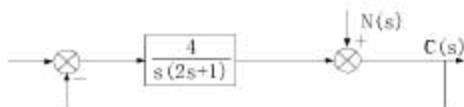


图3-1

解: 1. 令

$$N(s)=0 \quad R(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\frac{E_1(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$

$$E_1(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s)$$

$$e_{ss1} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{s(2s+1)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(2s+1)}{s(2s+1)+4} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{4}$$

$$R(s)=0 \quad N(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\frac{E_2(s)}{R(s)} = \frac{-1}{1+G(s)}$$

$$e_{ss2} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-1}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{4}$$

$$e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = 0$$

2.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{4}{s(2s+1)+4} = \frac{2}{s^2 + \frac{s}{2} + 2} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{2}$$

$$\zeta = \frac{\frac{1}{2}}{2\omega_n} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = 0.177$$

$$\delta\% = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100\% = 56.8\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 2.26(s)$$

3-2a 试选择 K_1 和 K_2 的值, 使图 3-2 所示系统阶跃响应的峰值时间为 0.5s, 超调量可以忽略

不计 (即 $0.5\% < \text{超调量} < 2.0\%$)。

解 取

$$\delta\% = 0.5\% \quad \xi = 0.9$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} = 0.5 \quad \text{求得 } \omega_n = 14.3$$

$$\frac{R(s)}{C(s)} = \frac{K_1}{s^2 + (1 + K_1 K_2)s + K_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$K_1 = \omega_n^2 = 204.5$$

$$1 + K_1 K_2 = 2\xi\omega_n$$

$$K_2 = \frac{2\xi\omega_n - 1}{K_1} = 0.12$$

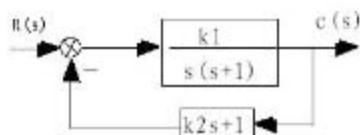


图 3-2

3-3b 3 个二阶系统的闭环传递函数的形式都是 $\Phi(s) = C(s)/R(s) = \omega_n^2 / (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)$, 它们的单位阶跃响应曲线如图 3-3 中的曲线 1、2、3。其中 t_{d1} , t_{d2} 是系统 1、2 的调整时间, t_{p1} , t_{p2} 是峰值时间。在同一 $[s]$ 平面内画出 3 个系统的闭环极点的相对位置, 并说明理由。

解: 设三个系统对应的闭环极点分别是 $S_1, S_1^*, S_2, S_2^*, S_3, S_3^*$ 。

由图知 $\sigma_{p1} = \sigma_{p2}$, 故 $\xi_1 = \xi_2$, 且 $\theta_1 = \theta_2$ (3-1)

S_1, S_2 在同一阻尼比线上。因 $t_{d1} < t_{d2}$, 故有

$$\xi_1 \omega_{n1} > \xi_2 \omega_{n2} \quad (3-2)$$

可见 S_1 离虚轴比 S_2 远。由式 (3-1), (3-2) 可给出 S_1, S_1^*, S_2, S_2^* 的相对位置, 如例图 3-4 所示。

因 $t_{p1} = t_{p2}$, 故有

$$\omega_{d1} = \omega_{d2} \quad (3-3)$$

S_2 与 S_3 的虚部相同。因 $\sigma_{p3} > \sigma_{p2}$, 故 $\xi_3 < \xi_2$, 且

$$\theta_3 > \theta_2 \quad (3-4)$$

根据式 (3-3), (3-4) 可绘出 S_3, S_3^* , 如例图 3-4 所示

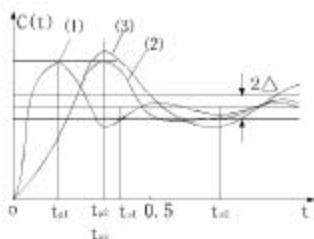


图 3-3

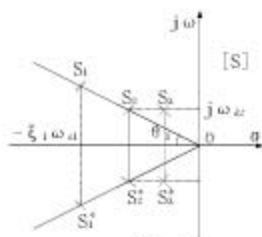


图 3-4

3-4a 某控制系统如图 3-5 所示。其中控制器采用增益为 K_p 的比例控制器, 即

$$G_c(s) = K_p$$

试确定使系统稳定的 K_p 值范围。



图3-5

解: 系统的闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)}{s(0.1s+1)(0.2s+1) + G_c(s)}$$

系统的闭环特征方程为

$$\begin{aligned} D(s) &= s(0.1s+1)(0.2s+1) + Kp \\ &= 2s^3 + 30s^2 + 100s + 100Kp \end{aligned}$$

列劳斯列阵

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 2 & 100 \\ s^2 & 30 & 100Kp \\ s & \frac{30 \times 100 - 2 \times 100Kp}{30} & \\ s^0 & 100Kp & \end{array}$$

若要使系统稳定, 其充要条件是劳斯列表的第一列均为正数, 得稳定条件为 $100Kp > 0$

$$\frac{30 \times 100 - 2 \times 100Kp}{30} > 0$$

求得 Kp 取值范围: $0 < Kp < 15$

3-5a 某系统结构如图 3-6 所示,

作为近似, 令 $G(s) = K_2$ 。

(1) 计算系统对 K_2 的灵敏度:

(2) 计算干扰 $N(s)$ 对输出 $C(s)$ 的影响:

(3) 为了使干扰对系统的影响最小, 应怎样选择 K_1 的取值。

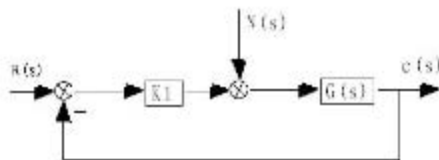


图 3-6

解 (1) 系统闭环传递函数 $G_B(s)$ 为

$$G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2}{1 + K_1 K_2}$$

系统对 K_2 的灵敏度为

$$S_{K_2} = \frac{\partial G_B(s)}{\partial K_2} \cdot \frac{K_2}{G_B(s)} = \frac{1}{1 + K_1 K_2}$$

(2) 令 $R(s)$ 为零, 求 $C(s)/N(s)$, 如图 3-7 所示

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{K_2}{1 + K_1 K_2}$$

$$C(s) = \frac{K_2}{1 + K_1 K_2} N(s)$$

(3) 为了使干扰对系统影响的最小

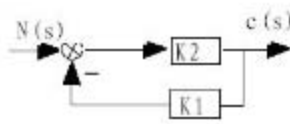


图 3-7

即 $N(s) \uparrow \quad C(s) \rightarrow 0$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{K_2}{1 + K_1 K_2} = \frac{1}{K_1}$$

应该增大 K_1 。

3-6b 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(\frac{s}{3}+1)(\frac{s}{6}+1)}$, 若要求闭环特征方程根的

实部均小于 -1, 试问 K 应在什么范围取值? 如果要求实部均小于 -2, 情况又如何?

解 系统的闭环传递函数 $G_B(s)$:

$$G_B(s) = \frac{K}{s(\frac{s}{3}+1)(\frac{s}{6}+1) + K}$$

系统的闭环特征方程为

$$\begin{aligned} D(s) &= s(\frac{s}{3}+1)(\frac{s}{6}+1) + K \\ &= s^3 + 9s^2 + 18s + 18K = 0 \end{aligned}$$

1) 要求 $\text{Re}(s_i) < -1$ 求 K 取值范围, 令 $s=Z-1$ 代入特征方程

$$(Z-1)^3 + 9(Z-1)^2 + 18(Z-1) + 18K = 0$$

$$Z^3 + 6Z^2 + 3Z + 18K - 10 = 0$$

显然, 若新的特征方程的实部小于 0, 则特征方程的实部小于 -1。

劳斯列阵:

$$\begin{array}{ccc} Z^3 & 1 & 3 \\ Z^2 & 6 & 18K - 10 \\ Z & \frac{28 - 18K}{6} & \\ Z^0 & 18K - 10 & \end{array}$$

要求 $\text{Re}(s_i) < -1$ 根据劳斯判据, 令劳斯列表的第一列为正数, 则有

$$18K - 10 > 0 \quad \therefore K > \frac{5}{9}$$

$$\frac{28 - 18K}{6} > 0 \quad \therefore K < \frac{14}{9}$$

所以要求 $\text{Re}(s_i) < -1$, $\frac{5}{9} < K < \frac{14}{9}$

2) 求 $\text{Re}(s_i) < -2$, 令 $s=Z-2$ 代入特征方程

$$\begin{aligned} (Z-2)^3 + 9(Z-2)^2 + 18(Z-2) + 18K \\ = Z^3 + 3Z^2 - 6Z + 18K - 8 = 0 \end{aligned}$$

劳斯列阵:

$$\begin{aligned} Z^1 &= 1 & -6 \\ Z^2 &= 3 & 18K-8 \\ Z &= \frac{-18K-10}{3} \\ Z^0 &= 18K-8 \end{aligned}$$

$\therefore K > \frac{8}{18}$ ，有 2 根在新虚轴-2 的右边，即稳定裕度不到 2。

3-7b 某控制系统的结构如图 3-8 所示，试确定闭环系统对 b 的灵敏度，并在 $1 \leq K \leq 50$ 范围内，确定 K 的最佳取值，使得干扰对系统的影响和系统对 b 的灵敏度为最小。

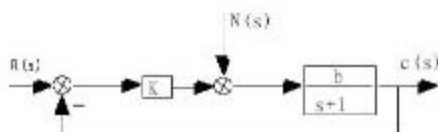


图 3-8

解 系统的闭环传递函数

$$\begin{aligned} G_k(s) &= \frac{kb}{s+1} = \frac{kb}{1 + \frac{s}{kb}} \\ S_{G_k(s)}^{G_k(s)} &= \frac{\partial G_k(s)}{\partial b} \cdot \frac{b}{G_k(s)} = \frac{(s+1+kb) \cdot k - kb \cdot k}{(s+kb+1)^2} \cdot \frac{b}{kb} \\ &= \frac{s+1}{s+1+kb} \end{aligned}$$

求干扰对系统的影响

令 $R(s) = 0$ ，求 $E(s)/N(s)$ ，如图 3-9 所示

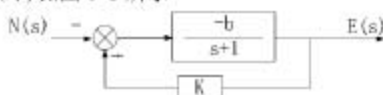


图 3-9

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{b}{s+1} = \frac{b}{1 + \frac{s}{kb}}$$

$$\therefore N(s) = 1(t) \quad e_{ss} = \frac{b}{1+kb} \quad \therefore k \uparrow \quad e_{ss} \rightarrow 0$$

从上可见，使干扰对系统的影响和系统对 b 的灵敏度为最小，在 $1 \leq K \leq 50$ 范围内， K 为 50 是最佳值。

3-8b 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K(s+1)}{s(Ts+1)(2s+1)}$ ，试确定参数 K 和 T 的稳定域。

定域。

解 由 $1+G(s)=0$ 可得系统的特征方程为 $2Ts^3 + (T+2)s^2 + (1+K)s + K = 0$

于是可构造劳斯列阵如下

$$\begin{array}{rcl} S^3 & 2T & 1+K \\ S^2 & T+2 & K \\ S & \frac{T+2-K(T-2)}{T+2} & \\ S^0 & K & \end{array}$$

根据劳斯判据，要使系统稳定其劳斯表的第一列元素必须全为正的，即

$$T > 0 \quad K > 0 \quad T+2-K(T-2) > 0$$

故系统稳定时参数 K 和 T 的取值范围为

$$0 < K < \frac{T+2}{T-2} \quad T > 2$$

相应的 K 和 T 的稳定域，如图 3-10 所示。

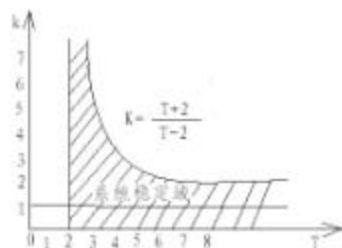


图 3-10

3-9b 控制系统的结构图如图 3-11 所示，若系统以频率 $\omega=2\text{rad/s}$ 持续振荡，试确定相应的参数 K 和 τ 的值

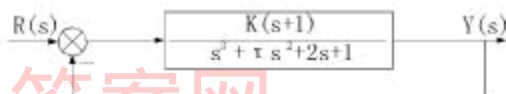


图 3-11

解：由结构图可得系统的特征方程为

$$s^3 + \tau s^2 + (2+K)s + 1+K = 0$$

于是可构造劳斯表如下：

$$\begin{array}{rcl} S^3 & 1 & 2+K \\ S^2 & \tau & 1+K \\ S & 2+k - \frac{1+k}{\tau} & \\ S^0 & 1+k & \end{array}$$

根据题意，闭环系统存在一对共轭纯虚根 $p_{1,2} = \pm 2j$ 。这意味着劳斯表的 S^1 行全为零元素，

即 $2+k - \frac{1+k}{\tau} = 0$ 。由辅助方程

$$A(s) = \tau S^2 + 1+k = 0$$

解得一对共轭纯虚根为 $p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{1+k}{\tau}} = \pm 2j$

联立求解下列方程组

$$\begin{cases} 2+k - \frac{1+k}{\tau} = 0 \\ \sqrt{\frac{1+k}{\tau}} = 2 \end{cases}$$

则可求对系统产生 $\omega = 2\text{rad/s}$ 的持续振荡时，参数 K 和 T 的取值为

$$\tau = 0.75 \quad K=2$$

3-10b 系统方框图如图 3-12 所示。希望所有特征根位于 s 平面上 $s=-2+j\omega$ 的左侧，且 $\xi \geq 0.5$ 。用阴影线表示出特征根在 s 平面上的分布范围，并求出相对应的 K 、 T 取值范围。

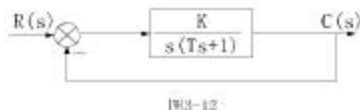


图3-12

解：令 $\xi = 0.5$ ，则 $\arctan(\sqrt{1-\xi^2})/\xi = \arctan\sqrt{3} = 60^\circ$ 。

特征根的分布范围见例图 3-13。

$$\Phi(s) = C(s)/R(s) = K/(Ts^2 + s + K) = (K/T)/(s^2 + s/T + K/T)$$

可得

$$\omega_n = \sqrt{K/T}$$

$$\xi = 1/2 \sqrt{K/T}$$

令 $\xi \geq 0.5$ ，得

$$KT \leq 1 \quad K \leq 1/T \quad (3-5)$$

由特征方程 $Ts^2 + s + K = 0$ 知，系统稳定的条件是

$$K > 0 \quad T > 0 \quad (3-6)$$

特征根的实部是 $-1/(2T)$ ，令 $-1/(2T) < -2$ ，得

$$T < 1/4 \quad (3-7)$$

由式 (3-5-3-7) 可给出所要求的参数范围，如例图 3-14 所示。

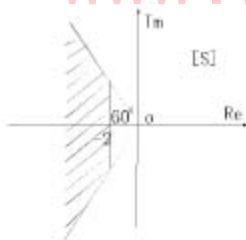


图3-13

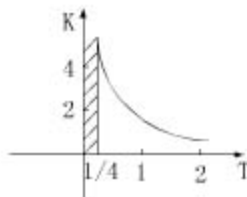


图3-14

3-11b 设控制系统的结构图如图

3-15 所示，其输入信号为单位斜坡函数（即 $r(t)=t$ ），要求：（1）当

$\tau=0$ 和 $K_1=1$ 时，计算系统的暂

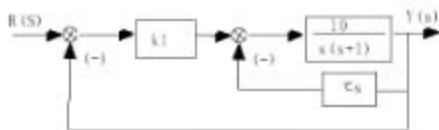


图 3-15

态性能（超调量 σ_p 和调节时间 t_s ）

以及稳态误差；（2）若要求系统的单位阶跃相应的超调量 $\sigma_p\% = 16.3$ ，峰值时间 $t_p = 1\text{s}$ ，

求参数 K_1 和 τ 的值。以及这时系统的跟踪稳态误差；（3）若要求超调量 $\sigma_p = 16.3\%$ 和当输

入信号以 1.5 度/秒均匀变化时跟踪稳态误差 $e_{ss} = 0.1$ 度, 系统参数 K_1 和 τ 的值应如何调整?

解: 由结构图可得, 系统的开, 闭环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{10K_1}{s(s+1+10\tau)} = \frac{10K_1}{s[\frac{s}{1+10\tau} + 1]}$$

$$\phi(s) = \frac{G_k(s)}{1+G_k(s)} = \frac{10K_1}{s^2 + (1+10\tau)s + 10K_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-8)$$

可见它是一个二阶规范系统, 系统的开环增益为 $K=K_v = \frac{10K_1}{1+10\tau}$

(1) 当 $K_1=0$ 和 $\tau=0$ (即局部反馈回路断开) 时 由 3-8 式可得这时系统的闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{\omega_{n1}^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2}$$

式中 $\omega_{n1} = \sqrt{10} = 3.16 \text{ rad/s}$ $\zeta_1 = 1/(2\omega_{n1}) = 0.16$ 。于是由二阶系统性能指标表达式, 则可求得系统的性能为

$$\sigma_{p1} = e^{-\pi\zeta_1/\sqrt{1-\zeta_1^2}} \times 100\% = 60.1\% \quad t_{s1} = \frac{3}{\omega_{n1}\zeta_1} = 6s \quad e_{ss1} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{10K_1} = 0.1$$

(2) 当 $\sigma_p\% = 16.3$ 和 $t_p = 1s$ 时 由二阶规范系统的暂态性能指标表达式可得

$$\begin{cases} \sigma_p = e^{-\pi\zeta_2/\sqrt{1-\zeta_2^2}} = 0.163 \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_{n2}\sqrt{1-\zeta_2^2}} = 1 \end{cases} \quad \text{从而解得} \quad \begin{cases} \zeta_2 = \frac{\ln(1/\sigma_p)}{\sqrt{\pi^2 + [\ln(1/\sigma_p)]^2}} = 0.5 \\ \omega_{n2} = 3.628 \end{cases}$$

而由 (式 3-8) 得

$$10K_1 = \omega_{n2}^2 = 13.16 \quad 1+10\tau = 2\zeta_2\omega_{n2} = 3.628$$

从而可得系统的参数为

$$K_1 = 1.316 \quad \tau = 0.263$$

系统跟踪单位斜坡输入信号的稳态误差为

$$e_{ss2} = 1/K_v = 1/K = (1+10\tau)/(10K_1) = 0.28$$

(3) 当 $\sigma_p = 16.3\%$ 和 $e_{ss} = 0.1$ 度时, 由超调量 $\sigma_p = 16.3\%$ 可求得对应的阻尼比为 $\zeta_3 = 0.5$,

根据题意 $r(t) = 1.5t$ 。于是由式 3-8 和应用误差系数法可得

$$\begin{aligned} \omega_{n3}^2 &= 10K_1 \\ 2\zeta_3\omega_{n3} &= 1+10\tau \\ e_{ss3} &= 1.5/K_v = 1.5(1+10\tau)/(10K_1) = 0.1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1+10\tau = \omega_{n3} = \sqrt{10K_1} \\ 1.5(1+10\tau) = K_1 \end{cases}$$

联立求解, 则可求得这时参数的值为: $K_1 = 22.5 \quad \tau = 1.4$

3-12b 图 3-16 所示的位置随动系数为 1 型的，当输入信号为斜坡函数时存在稳态误差。为了使该系统跟踪斜坡信号无稳态误差，可采用复合控制的方式，如图 3-17 所示。试确定其前馈补偿装置的传递函数 $G_c(s)$ 。

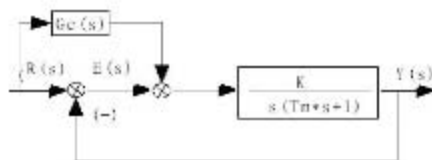


图 3-17

解 由结构图可得，系统的误差传递函数为（缺图 3-16）

$$\phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 - \frac{K}{s(T_m s + 1)} G_c(s)}{1 + \frac{K}{s(T_m s + 1)}} = \frac{s(T_m s + 1) - K G_c(s)}{s(T_m s + 1) + K}$$

于是在斜坡输入信号 $r(t)=Rt$ 作用下，系统的跟踪稳态误差为

$$e_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \phi_e(s) \cdot R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(T_m s + 1) - K G_c(s)}{s(T_m s + 1) + K} \cdot \frac{R}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2} (1 - K \frac{G_c(s)}{s})$$

令 $e_{st}=0$ 则可求得跟踪斜坡信号无稳态误差时，所应引入的前馈补偿装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{s}{K}$$

3-13b 系统如图 3-18 所示，其中扰动信号 $n(t)=1(t)$ 。仅仅改变 K_1 的值，能否使系统在扰动信号作用下的误差终值为 -0.099？

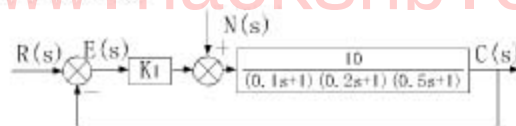


图3-18

解:
$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-10}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1)+10K_1}$$

若 $N(s)=1/s$ ，则由终值定理知，若系统稳定，则稳态误差终值为

$$e_{ss}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-10}{(0.1s+1)(0.2s+1)(0.5s+1)+10K_1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{-10}{1+10K_1}$$

设 $e_{ss}(\infty)=-0.099$ ，可得 $K_1=10$ 。

系统的特征方程式是

$$s^3 + 17s^2 + 80s + 100 + 1000K_1 = 0$$

列劳斯表

s^3	1	80
s^2	17	100+1000K ₁
s^1	$\frac{1360-100-1000K_1}{17}$	

$$s^0 \quad 100+1000K_1$$

系统稳定的条件是 $-0.1 < K_1 < 1.26$ 。

当 $K_1=10$ 时, 系统不稳定, 可见仅改变 K_1 值, 不能使误差终值为 -0.099 。

3-14b 已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$, 试求: (1) 闭环

极点的分布并判断系统是否存在主导极点; (2) 估算系统的暂态性能, 并分析说明主导极点法的工程实用意义。

解 (1) 闭环极点的分布 系统的闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{10}{s^3 + 7s^2 + 10s + 10} = \frac{10}{(s+5.515)(s^2+1.485s+1.81)}$$

于是可得闭环极点的分布 $p_{1,2} = -0.743 \pm j1.12$, $p_3 = -5.515$ 。这些极点的实部之比为

$$\beta = \frac{R_e(p_3)}{R_e(p_1)} = \frac{-5.515}{-0.743} = 7.42$$

可见在三个极点中 P_3 远离虚轴, 故 $P_{1,2}$ 可视为系统的一对闭环主导极点。

(2) 系统暂态性能的估算 忽略非主导极点 P_3 的影响, 于是系统的闭环传递函数可简化为

$$\phi(s) = \frac{1.81}{(s/5.515+1)(s^2+1.485s+1.81)} \approx \frac{1.81}{s^2+1.485s+1.81} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

式中 $\omega_n = \sqrt{1.81} = 1.35 \text{ rad/s}$, $\zeta = 1.485/(2\omega_n) = 0.55$, 根据二阶规范系统的暂态性能指标表达式, 则可估算系统的暂态性能如下:

$$\text{上升时间 } t_r = \frac{\pi - \arccos \zeta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 1.91 \text{ s} \quad \text{峰值时间 } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 2.79 \text{ s}$$

$$\text{超调量 } \sigma_p = e^{-\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2}} = 12.63\% \quad \text{调节时间 } t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = 4.04 \text{ s} \quad (\text{取 } \Delta = 5\%)$$

(3) 主导极点法的工程实用意义 对高阶系统进行初步分析或设计时, 应用主导极点法将系统简化为与主导极点相对应的低阶系统来处理, 这在工程上是很有实用的价值。一般说来, 主导极点的主导性越强, 近似所造成的误差就越小。以本题为例, 将系统的闭环传递函数改写成下列一般的形式:

$$\phi(s) = \frac{-\omega_n^2 p_3}{(s-p_3)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)} = \frac{-1.81 p_3}{(s-p_3)(s^2+1.485s+1.81)}$$

则可求得系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = L^{-1}[\phi(s) * \frac{1}{s}] = 1 + a_3 e^{p_3 t} + A e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \varphi)$$

应用主导极点法近似时, 其误差主要表现在将上式右边的第 2 项 ($a_3 e^{p_3 t}$) 忽略掉。若以

$t=t_p$ 时刻为代表, 计算系统响应的误差。当非主导极点 P_3 的分布不同 (即 B 为不同值) 时,

则系统的单位阶跃响应特性及近似所造成的误差如下表所列。

非主导极点 P_3 的分布	$\beta = \frac{R_c(p_3)}{R_c(p_1)}$	系统的单位阶跃响应特性	近似所造成的误差 Δ	
			$\Delta = a_3 e^{p_3 t}$	$\frac{\Delta}{y(t_p)} \times 100\%$
-3	4.04	$1 - 0.285e^{-3t} + 1.128e^{-0.743t} \sin(1.127t - 2.616)$	6.6×10^{-5}	0.0062%
-2	2.69	$1 - 0.637e^{-2t} + 1.129e^{-0.743t} \sin(1.127t - 2.885)$	2.4×10^{-3}	0.23%

由表可见: 当 $\beta \geq 3$ 时忽略非主导极点所造成的误差很小, 在工程的容许范围内, 而分析计算则十分地简单方便, 故主导极点法在工程上得到了广泛的应用。

3-15c 图 3-19 所示的为工业上广泛使用的 KZ-D 双闭环调速系统, 其电流环子系统的简化结构图。已知电动机的额定电压 $U_n = 220V$, 额定电流 $I_n = 136A$, 系统的其他参数如图中所列。电流调节器采用 PI 调节器并取 $T_i = T_n = 0.03s$ 。试问: 若要求电流环子系统的跟踪性能指标为超调量 $\sigma_p < 5\%$, 调节时间 $t_s < 0.025s$ (取 $\Delta = 5\%$), 电流调节器的增益 K_i 应取为多大?

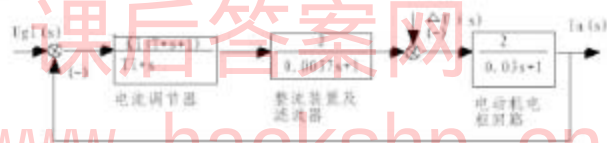


图 3-19 KZ-D 双闭环调速系统电流子系统的结构图

解 (1) 根据跟踪暂态性能指标要求, 确定电流调节器的增益 K_i 。

由结构图可见: 由于 $T_i = 0.03$ 电流调节器传递函数分子的因子 “ $T_i s + 1$ ”, 将与电动机电枢回路传递函数分母的因子 “ $0.03s + 1$ ” 产生相消, 故可得电流环子系统的开环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{4K_i}{T_i(0.0037s+1)} = \frac{133.33K_i}{s(0.0037s+1)} = \frac{K}{s(Ts+1)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

式中 $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}$, $\xi = \frac{1}{2\sqrt{KT}}$, $\xi\omega_n = \frac{1}{2T}$, $T = 0.0037$ 。上式为二阶规范系统的典型表达式。根据跟踪暂态性能指标的要求, 于是有

$$\begin{cases} \sigma_p = e^{-\xi\omega_n t_s / \sqrt{1-\xi^2}} < 0.05 \\ t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} < 0.025 \end{cases} \quad \text{从而解得} \quad \begin{cases} \xi > \frac{\ln(1/0.05)}{\sqrt{\pi^2 + [\ln(1/0.05)]^2}} = 0.69 \\ \omega_n > 3/(0.025\xi) \end{cases}$$

若取 $\xi = 0.707$, 由 $\xi = \frac{1}{2\sqrt{KT}} = \frac{1}{2\sqrt{0.0037K}} = 0.707$, 则可得

$$K = \frac{1}{(2 \times 0.707)^2 \times 0.0037} = 135.14 = 133.33K_i$$

故可求得电流调节器的增益为

$$K_i = 135.14 / 133.33 = 1.01$$

相应的电流环子系统的跟踪暂态性能为

$$\sigma_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} * 100\% = 4.3\% < 5\% \quad t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 0.022s < 0.025s$$

它们均满足暂态性能指标的要求。

3-16c (天线方位角位置控制系统的时域分析) 在 2-5b 已建立该系统的数学模型, 其结构如图 2-7 所示, 若系统采用比例控制 (即其前置放大器的增益 K_c 是可调的), 试求 (1) 当 $K_c = 1000$ 时系统的时间响应特性; (2) 若要求超调量 $\sigma_p = 20\%$, K_c 应调整为何值? 并分别应用 MATLAB 和近似估算的方法求系统的暂态性能, 说明近似估算的适用条件。

解: (1) 增益 K_c 的稳定取值范围

由系统的传递函数 $\frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{6.62K_c}{s^3 + 101.71s^2 + 170.8s + 6.62K_c}$, 可得系统的特征方程为

$$\det(sI - A) = s^3 + 101.71s^2 + 170.8s + 6.62K_c = 0$$

于是可构造劳斯表如下:

s^3	1	170.8
s^2	101.71	6.62 K_c
s	17372.07 - 6.62 K_c	0
s^0	6.62 K_c	

根据劳斯判据, 为确保系统稳定必须使劳斯表第一列的元素不变号, 即

$$17372.07 - 6.62K_c > 0 \quad 6.62K_c > 0$$

故可求得系统在比例控制时, 放大器增益的稳定取值范围为 $0 < K_c < 2624.18$ 。

(2) 当 $K_c = 1000$ 时系统暂态特性的分析

由题 2-5b 系统结构图 2-7 可得, 系统的开、闭环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{0.0662K_c}{s(0.01s+1)(s+1.708)} = \frac{0.0388K_c}{s(0.01s+1)(0.59s+1)}$$

$$\phi(s) = \frac{\theta_o(s)}{\theta_i(s)} = \frac{6.62K_c}{s^3 + 101.71s^2 + 170.8s + 6.62K_c}$$

由于 K_c 远低于其临界值 ($K_{cr} = 2624.18$), 在系统的 3 个开环极点中功率放大器的极点 $P_{03} = -1/0.01 = -100$ 远离虚轴 (相应的时间常数 $T_3 = 0.01$ 很小) 可忽略不计, 故系统的开、闭环传递函数可简化为

$$G_k(s) = \frac{0.0662K_c}{s(0.01s+1)(s+1.708)} \approx \frac{0.0662K_c}{s(s+1.708)} \approx \frac{0.0662}{s(s+1.708)} = G_k'(s) \quad (3-9)$$

$$\phi(s) = \phi'(s) = \frac{G_k'(s)}{1+G_k'(s)} = \frac{66.2}{s^2+1.708s+66.2} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

式中 $\omega_n = \sqrt{66.2} = 8.14 \text{ rad/s}$, $\xi = 1.708/(2\omega_n) = 0.105$ 。于是可按二阶规范系统的表达式, 估算系统的暂态性能如下:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0.39s \quad \sigma_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} * 100\% = 71.77\% \quad t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4.68s$$

(3) 当要求超调量 $\sigma_p = 20\%$ 时系统暂态特性的分析

(a) 暂态性能的估算 由于系统响应的超调量远低于第(2)项的相应值(71.77%), 可以预计这时的增益 $K_c \ll 1000$, 故开环时间常数 $T_3 = 0.01$ 可忽略不计。于是系统的开环传递函数可简化为 $G_k(s) = 0.0662K_c/[s(s+1.708)]$, 从而系统的闭环传递函数可近似为

$$\phi(s) = \frac{G_k(s)}{1+G_k(s)} = \frac{66.2K_c}{s^2+1.708s+66.2K_c} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad (3-10)$$

根据对超调量的要求 $\sigma_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} * 100\% = 0.2$, 则可得系统的阻尼比为

$$\xi = \frac{\ln(1/\sigma_p)}{\sqrt{\pi^2 + [\ln(1/\sigma_p)]^2}} = 0.4558$$

而 $2\xi\omega_n = 1.708$, $\omega_n^2 = 0.0662K_c$ 。故可求得 $\omega_n = 1.708/(2\xi) = 1.8736 \text{ rad/s}$,

$K_c = \omega_n^2/0.0662 = 53.03$ 。于是根据二阶规范系统的性能指标表达式, 则可估算系统的暂态性能如下:

$$t_p' = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 1.88s \quad \sigma_p' = 20\% \quad t_s' = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4.68s$$

(b) 应用 MATLAB 进行时域分析
山式(3-9)和(3-10)应用 MATLAB 程序 A3.1, 则可求得系统的实际暂态性能
为 $t_p = 1.9s$, $\sigma_p = 20.8546\%$, $t_s = 4.4$

(s); 并绘制系统的单位阶跃响应曲线, 如图 3-20 所示。图中实线为按式(3-9)求得的准确响应曲线, 用“.”标出数据点的为按式(3-10)将系统视为二阶系统的近似响应曲线。山图中可见: 当 K_c 远比其临界值小得多时, 忽略小环节时间

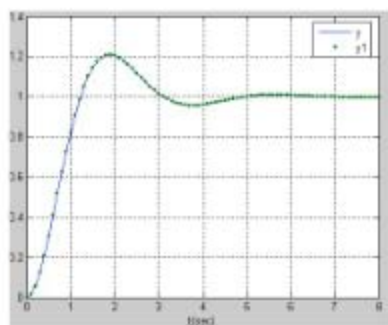


图 3-20 $K_c=53.03$ 时系统的单位阶跃响应

常数的影响并进行近似估算，在工程上是可行的。

MATLAB 程序 A3.1

```
G1=tf(0.0662*53.03,[1,1.708,0.0662*53.03]);
G=tf(6.62*53.03,[1,101.71,170.8,6.62*53.03]);
T=0:0.1:8;y=step(G1);y1=step(G1,t);plot(t,y,'-',t,y1,'-'),grid
xlabel('t(sec)')
legend('y','y1')
Y=dcgain(G);[yp,p]=max(y);peaktime=t(p)
Percentovershoot=100*(yp-Y)/Y
K=length(t);while(y(k)>0.98*Y&(y(k)<1.02*Y),k=k-1;end
Settingtime=t(k)
```

(4) 稳态特性分析

由式 (3-9) 可知：系统为 I 型的，且开环增益 $K=0.0388K_c=38.8$ (当 $K_c=1000$ 时) 或 2.06 (当 $K_c=53.03$)。于是系统的误差系数为 $K_p=\infty$ $K_v=K$ $K_a=0$ 。因此该系统跟踪阶跃输入信号没有稳态误差；跟踪单位斜坡输入信号的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K} = \begin{cases} 1/38.8 = 0.026 & \text{当 } K_c=1000 \text{ 时} \\ 1/2.06 = 0.485 & \text{当 } K_c=53.03 \text{ 时} \end{cases}$$

但无法跟踪抛物线函数或其它变化更快的输入信号，若勉强使用则跟踪误差将随时间而不断地增大，当 $t \rightarrow \infty$ 时其终值误差将趋于无穷大。

3-17d 在为焊接机器人设计手臂位置控制系统时，需要仔细选择系统参数。机械臂控制系统的结构图如图 3-21 所示，其中 $\xi=0.2$ ，增益 K 和固有频率 ω_n 为待定参数。

- (1) 确定 K 和 ω_n 的取值，使得系统单位阶跃响应的峰值时间不超过 1s，且超调量小于 5%；(提示：先考虑 $1 < K/\omega_n < 0.3$)
- (2) 画出 (1) 中所得系统的阶跃响应曲线。

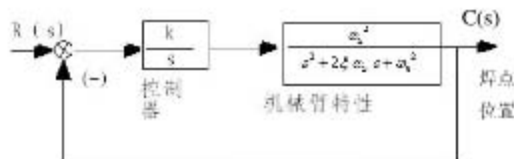


图 3-21

解 求系统的闭环传递函数

$$G_b(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) + K\omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{s^3 + s^2 2\xi\omega_n + \omega_n^2 s + K\omega_n^2} = \frac{K1}{s^3 + bs^2 + cs + d}$$

MATLAB 程序 A3.2，并绘制系统的单位阶跃响应曲线，如图 3-22 所示。

MATLAB 程序 A3.2

$$K1=K*\omega_n^2 \quad K=\omega_n^2 m$$

$$b=0.4*\omega_n$$

```
c=omega_n^2
d=K*omega_n^2
num=[K1]
den=[1 b c d]
[Wc,x,t]=step(num,den);
plot(t,Wc),grid
```

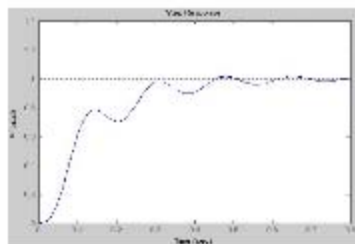


图 3-22

求得使 $t_p < 1s$, $\sigma\%$ 的 $m = K/\omega_n = 0.2$ 和 $\omega_n = 3$ $K = \omega_n \cdot m = 7.4$

3-18d 为了保持飞机的航向和飞行高度, 人们设计了如图 3-23 所示的飞机自动驾驶仪



图 3-23 飞机自动驾驶仪结构图

(1) 假定结构图中的控制器是固定增益的比例控制器, 即 $G_c(s) = 2$, 输入为斜坡信号 $\theta_d(t) = at, a = 0.5^\circ/s$, 利用 `lsim` 函数计算并以曲线显示系统的斜坡响应, 求出 10s 后的航向角误差;

(2) 为了减小稳态误差, 可以采用比例积分控制器 (PI), 即 $G_c(s) = K1 + \frac{K2}{s} = 2 + \frac{1}{s}$

试重复 (1) 中的仿真计算, 并比较这两种情况下的稳态误差。

解: (1) MATLAB 程序 A3.3, 并绘制系统的斜坡响应曲线, 如图 3-24 所示。

```
num1=[20];den1=[1 10]
num2=[1 5];den2=[1 3.5 6]
numg=conv(num1,num2);
deng=conv(den1,den2);
[num,den]=cloop(numg,deng,-1)
printsys(num,den)
t=0:0.1:10 u=0.5*t
yl=lsim(num,den,u,t)
y(length(t))
```

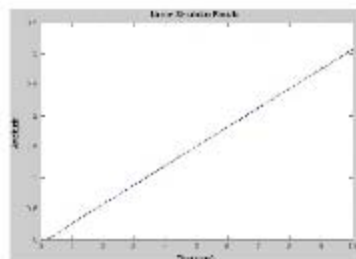


图 3-24

从图中求得 10s 后的航向角误差

$$y = 3.0684 \quad u = 0.5 \times 10 = 5 \quad e_{ss} = 5 - 3.0684 = 2$$

(2) MATLAB 程序 A3.4, 并绘制系统的斜坡响应曲线, 如图 3-25 所示。

$$(G_c(s) = K1 + \frac{K2}{s} = \frac{2s+1}{s})$$

```
num1=[2 1];den1=[1 0];
num2=[10];den2=[1 10];
```

```
num3=[1 5];den3=[1 3.5 6];  
numg=conv(num1,conv(num2,num3));  
deng=conv(den1,conv(den2,den3));  
[num den]=cloop(numg,deng,-1);  
t=0:0.1:10;u=0.5*t;  
y=lsim(num,den,u,t)  
plot(t,y),grid  
y(length(t))
```

从图中求得稳态误差

$$y=4.4198 \quad u=0.5 \times 10=5 \quad e_{ss}=u-y=5-4.4198=0.58$$

比较以上两种情况,可以看出采用比例积分控制器,比仅仅采用比例控制器的稳态误差小很多。

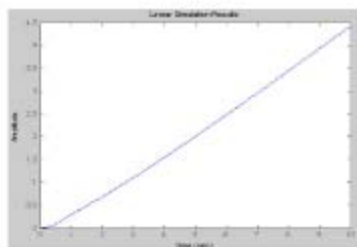


图 3-25

课后答案网
www.hackshp.cn

第四章 根轨迹法

4-1a 绘制下列开环传递函数的负反馈系统的根轨迹图, $G(s)H(s) = \frac{K^*(s+0.1)}{s^2(s+1)}$

解: 1. $D(s) = s^2(s+1) + K^*(s+0.1) = 0$

∴ 根轨迹有三条分支

开环三个极点分别为: $P_1 = P_2 = 0, P_3 = -1$

开环一个零点 $Z_1 = -0.1$

2. 实轴上根轨迹为 $[-1, -0.1]$

3. 渐近线 $\sigma_a = \frac{-1 - (-0.1)}{2} = -0.45$ $\varphi_a = \frac{(2k+1) \cdot 180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$

4. 分离点: $\frac{1}{d+0.1} = \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d}$

求得 $d_1 = -1/4 = -0.25$ $d_2 = -2/5 = -0.4$

作出根轨迹如图 4-1 所示

MATLAB 文本 A4.1

```
num=[1 0.1];
den=[1 1 0 0];
rlocus(num,den)
[K,P]=rlocfind(num,den)
```

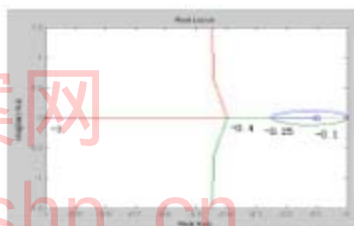


图 4-1

4-2a 已知系统的特征方程为 $(s+1)(s+1.5)(s+2) + K^* = 0$ 试绘制以 K^* 为参数的根轨迹

解: 1. 开环极点为 $P_1 = -1; P_2 = -1.5; P_3 = -2$, 有三条从开环极点到 ∞ 的根轨迹分支

2. 实轴上根轨迹为 $[-1, -1.5], [-2, -\infty]$

3. 渐近线: $\sigma_a = (-1-1.5-2)/3 = -1.5$ $\varphi_a = (2k+1) \cdot 180^\circ/3 = \pm 60^\circ, 180^\circ$

4. 实轴上分离点: $\frac{dK^*}{ds} = \frac{-ds^3 + 4.5s^2 + 6.5s + 3}{ds} = 3s^2 + 9s + 6.5s = 0$

$s_1 = -1.211; s_2 = -1.789$ (不在实轴根轨迹上舍去)

5. 与虚轴交点:

特征方程中 $s \rightarrow j\omega$ 代入

$$(j\omega)^3 + 4.5(j\omega)^2 + 6.5(j\omega) + 3 + K^* = 0$$

$$-4.5\omega^2 + 3 + K^* = 0 \text{ 及 } -\omega^3 + 6.5\omega = 0$$

$$\omega = \pm\sqrt{6.2} = \pm 2.55$$

$$K^* = 26.25$$

作根轨迹如图 4-2 所示

MATLAB 文本 A4.2

num=[1];

den=[1 4.5 6.5 3];

rlocus(num,den)

[K,P]=rlocfind(num,den)

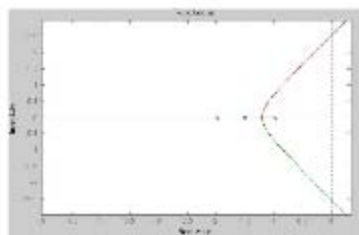


图 4-2

4-3a 设负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K}{s(0.01s+1)(0.02s+1)}$, ①作出系统准

确的根轨迹; ②确定使系统临界稳定的开环增益 K_c ; ③确定与系统临界阻尼比相应的开环增益 K 。

解: (1) 作出系统准确的根轨迹: $G(s)H(s) = \frac{K \times 100 \times 50}{s(s+100)(s+50)}$; $K^* = K \times 100 \times 50$

1). 开环极点: $P_1=0; P_2=-100; P_3=-50$

2). 实轴上根轨迹 $[0, -50], [-100, -\infty]$

3) 渐进线: $\sigma_a = (-150)/3 = -50$ $\varphi_a = (2k+1)\pi/3 = \pm 60^\circ, 180^\circ$

4) 分离点: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+100} + \frac{1}{d+50} = 0$

$$3d^2 + 300d + 5000 = 0$$

$$d_1 = -21.13$$

$$d_2 = -78.82 \quad (\text{舍去})$$

5) 与虚轴交点:

$$D(s) = 0.0002s^3 + 0.03s^2 + s + K = 0$$

s^3	0.0002	1
s^2	0.03	K
s^1	1-K/150	0
s^0	K	

根据劳斯判据: $1 - \frac{K}{150} > 0, K > 0 \quad \therefore 0 < K < 150$

作根轨迹如图 4-3 所示。

(2) 即临界稳定的 $K_c = 150$

与虚轴交点由辅助方程 $0.03s^2 + 150 = 0$ 求得 $s_1 = \pm j70.71$

(3) 将分离点 $s_1 = -21.13$ 代入幅值条件:

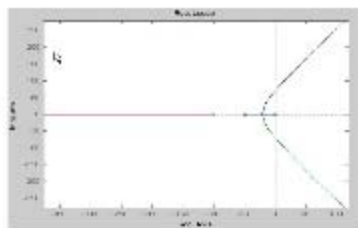


图 4-3

$$K^* \frac{\prod_{j=1}^n (s - Z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - P_i)} = -1$$

$$\therefore K^* = \prod_{i=1}^n |s - P_i| = |s_1| |s_1 + 50| |s_1 + 100| = K \times 100 \times 50$$

求出临界阻尼比相应的开环增益: $K^* = \frac{21.13 \times 28.87 \times 78.87}{50 \times 100} = 9.62$

4-4a 单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+z)}{s^2(s+10)(s+20)}$, 试绘制系统的根轨迹

图, 并确定产生纯虚根 $\pm j1$ 时的 z 值和 K^* 值。

解 法 1 系统特征方程 $s^2(s+10)(s+20) + K^*(s+z) = 0$

以 $s = \pm j1$ 代入

$$-199 - 30j + K^*(j+z) \Rightarrow z = 6.63$$

$$-199 + 30j + K^*(-j+z) \quad K^* = 30$$

作根轨迹:

(1) 开环极点和零点

$$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = -10, P_4 = -20, Z_1 = -6.63$$

$$(2) \text{渐近线: } \sigma_a = (-30 + 6.63)/(4-1) = -7.79 \quad \varphi_a = (2k+1)^\circ 180^\circ/3 = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

作根轨迹如图 4-4 所示。

解法 2 $D(s) = s^2(s+10)(s+20) + K^*(s+z) = s^4 + 30s^3 + 200s^2 + K^*s + K^*z = 0$

劳斯列表

s^4	1	200	K^*z
s^3	30	K^*	
s^2	$200 - K^*/30$	K^*z	
s^1	$K^* - \frac{30K^*z}{200 - \frac{K^*}{30}}$		
s^0	K^*z		

$$\text{令 } 200 - \frac{K^*}{30} = 0, \quad K^* - \frac{30K^*z}{200 - \frac{K^*}{30}} = 0$$

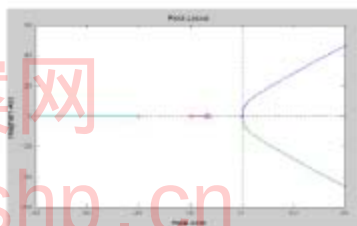


图 4-4

$$\text{得: } 6000 - K^* - 900z = 0, \quad K^* = 6000 - 900z \quad (4-1)$$

$$\text{辅助方程 } (200 - \frac{K^*}{30})s^2 + K^*z = 0, \quad s = \pm j \quad \text{则 } K^* = \frac{30 \times 200}{1 + 30z} \quad (4-2)$$

解 (4-1), (4-2) 式求出 $z=6.633$, $K^*=30$

4-5a 已知非最小相位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K^*(1-0.5s)}{s(s+1)}$, 试绘制该系统的根轨迹图。

$$\text{解: 将开环传递函数化为零极点形式 } G(s)H(s) = \frac{K^*(1-0.5s)}{s(s+1)}$$

∴ 按正反馈系统根轨迹画法根轨迹

1) 开环极点: $p_1=0, p_2=-1$, 开环零点: $z_1=2$

2) 实轴上根轨迹 $[2, \infty); [-1, 0]$

$$3) \text{ 根轨迹与实轴交点 } \frac{1}{d-2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+1}$$

$$\text{整理得 } d^2 - 4d - 2 = 0$$

$$\therefore d_1 = -0.45, d_2 = 4.45$$

4) 根轨迹与虚轴交点

用 $s \rightarrow j\omega$ 代入特征方程

$$j\omega(j\omega+1) + K^*(1-0.5j\omega) = 0$$

$$\text{得到 } \begin{cases} K^* - \omega^2 = 0 \\ 1 - 0.5K^* = 0 \end{cases} \quad \text{求得 } \begin{cases} K^* = 2 \\ \omega = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

可知 S 平面上根轨迹为: 圆心+2, 半径 2.45 的圆, 根轨迹如图 4-5 所示。

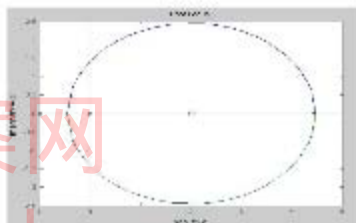


图 4-5

$$4-6a \text{ 设负反馈控制系统的开环传递函数为 } G(s)H(s) = \frac{K^*(s+5)}{(s+1)(s+3)}, \text{ 证明系统的根轨迹}$$

含有圆弧的分支。

解: 1) 开环极点 $p_1=-1, p_2=-3$, 开环零点: $z_1=-5$

2) 实轴上根轨迹: $[-3, -1]; [-5, -\infty]$

$$3) \text{ 与实轴交点 } \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+3} = \frac{1}{d+5} \quad \text{整理得 } d^2 + 10d + 17 = 0$$

$$\therefore d_1 = -2.172, d_2 = -7.828$$

证明: 根据根轨迹相角条件: $\angle(s+5) - \angle(s+1) - \angle(s+3) = 180^\circ$

$s \rightarrow \sigma + j\omega$ 代入

$$\begin{aligned} \lg^{-1} \frac{\omega}{\sigma+5} - \lg \frac{\omega}{\sigma+1} &= 180^\circ + \lg^{-1} \frac{\omega}{\sigma+3} \\ \text{应用 } \lg^{-1} \frac{\frac{\omega}{\sigma+5}}{1 + \frac{\omega}{\sigma+5} \cdot \frac{\omega}{\sigma+1}} &= \lg^{-1} \frac{\omega}{\sigma+3} \\ \therefore \frac{\frac{\omega}{\sigma+5}}{1 + \frac{\omega}{\sigma+5} \cdot \frac{\omega}{\sigma+1}} &= \frac{\omega}{\sigma+3} \Rightarrow (\sigma+5)^2 + \omega^2 = 2.83^2 \end{aligned}$$

上式为圆方程: 圆心为 $(-5, 0)$, 半径 $R=2.83$
证明根轨迹含有圆弧分支, 根轨迹如图 4-6 所示。

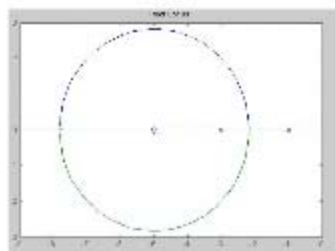


图 4-6

4-7a 设负反馈系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K^*}{(s+3)(s+2)}$, 试绘制系统根轨迹的大

致图形。若系统: ①增加一个 $z=-5$ 的零点; ②增加一个 $z=-2.5$ 的零点; ③增加一个 $z=-0.5$ 的零点。试绘制增加零点后系统的根轨迹, 并分析增加开环零点对根轨迹的变化规律和对系统性能的影响。

解: 1. 原系统根轨迹: 从开环极点 $p_1=-2, p_2=-3$ 出发在 $s=-2.5$ 处汇合后分离沿与虚轴平行趋向 $\pm\infty$, 根轨迹如图 4-7(a) 所示。

2. 增加开环零点 $z=-5$: 根轨迹与平面上是一个圆 $(\sigma+5)^2 + \omega^2 = (\sqrt{6})^2$ 圆心 $(5, 0)$, 半径 $R=2.45$, 根轨迹如图 4-7(b) 所示。

3. 增加一个开环零点 $z=-2.5$: 其根轨迹如图 4-7(c) 所示。

4. 增加一个开环零点 $z=-0.5$: 其根轨迹如图 4-7(d) 所示。

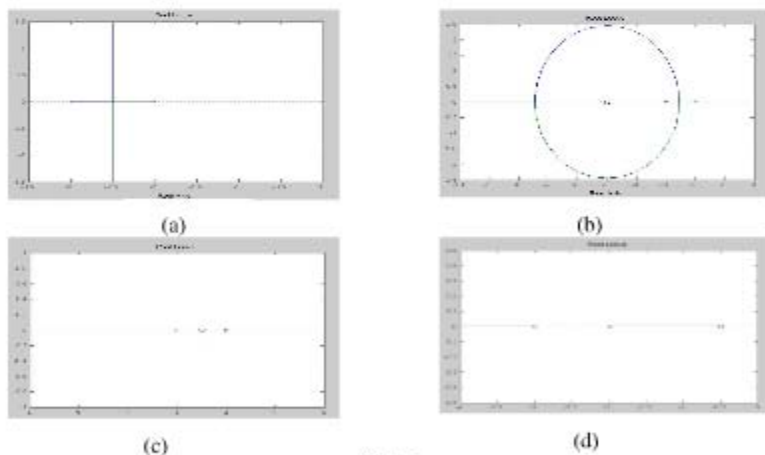


图 4-7

原系统随 $K \uparrow$, 系统是衰减振荡且整定时间 t_s 随 K 增大而增大, 增加零点后, 系统随 $K \uparrow$, 由衰减振荡变为不振荡, 可近似为一个负实数主导极点的惯性环节, 且主导极点逐渐靠近开环零点, $\therefore$ 无超调量, 且调整时间 $\downarrow$, 快速性 $\uparrow$ 。

4-8a 设单位负反馈的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10(1-s)}{(0.5s+3)(Ts+1)}$, 要求: (1) 绘制 T 变化

时系统的根轨迹; (2) 确定系统临界稳定和临界阻尼时 T 的取值各为多大? (3) 求 $T=20$ 时系统的单位阶跃响应。

说明 由 $G(s)$ 可知: 该系统为非最小相位的, 其分子的 s 最高幂次项的系数为负的, 应采用零度根轨迹法来绘制; 而且可变参数是时间常数又属于参数根轨迹。故本应按零度根轨迹的参数根轨迹问题来处理。

解: (1) 按参数根轨迹的预处理法确定系统的等效开环传递函数并绘制根轨迹

由 $1+G(s)=0$ 可得系统的特征方程为

$$(0.5s+1)(Ts+1)+10(1-s)=-9.5s+11+Ts(0.5s+1)=0$$

对上式进行预处理, 则可得系统的等效开环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{Ts(0.5s+1)}{-9.5s+11} = \frac{-Ts(s+2)}{s-1.16}$$

其中 $T = 0.5T/9.5 = 0.053T > 0$ 。由于可变参数 “ $-T$ ” 为负的, 故应采用零度根轨迹法来绘制。

- (a) 实轴上根轨迹: $[-2, 0]$; $[1.16, \infty]$
(b) 复平面上的根轨迹, 令 $s = \sigma + j\omega$ 代入幅角条件, 于是有

$$\angle(\sigma + j\omega) + \angle(\sigma + 2 + j\omega) - \angle(\sigma - 1.16 + j\omega) = 2k\pi$$

对上式两边取正切, 经化简和整理后可得 $(\sigma - 1.16)^2 + \omega^2 = 1.91^2$ 。

上式表明: 复平面上的根轨迹是以开环极点 $p_1 = 1.16$ 为圆心, 以 1.91 为半径的圆。

根据以上信息则可绘制系统的准确根轨迹, 如图 4-8 所示。

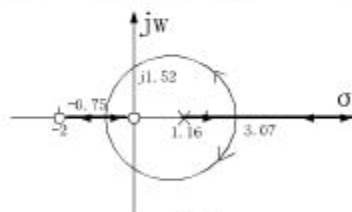


图 4-8

(2) 临界稳定和临界阻尼时 T 的取值

系统为二阶的, 临界稳定时闭环系统有一对纯虚根, 设为 $p_{1,2} = \pm j\omega$ 。由图 4-8 可求

得该 ω 值为 $\omega = \sqrt{1.91^2 - 1.16^2} = 1.52$

于是由幅值条件则可求得, 临界稳定时 T 的取值为

$$T = 2 \times 9.51 \left. \frac{s-1.16}{s(s+2)} \right|_{s=j1.52} = \frac{19 \times 1.91}{1.52 \times 2.51} = 9.51(s)$$

由根轨迹图可见, 只有当 $T > 9.51$ 时系统才是稳定的。

临界阻尼时闭环极点为一对负实重根。由图 4-8 可求得这对闭环极点为 $p_{1,2} = -(1.91 - 1.16) = -0.75$ 。于是由幅值条件则可求得, 临界阻尼时 T 的取值为

$$T = 2 \times 9.51 \frac{s - 1.16}{s(s + 2)} \Big|_{s=-0.75} = \frac{19 \times 1.91}{0.75 \times 1.25} = 38.71(s)$$

(3) $T=20$ 时系统的单位阶跃响应

当 $T=20$ 时系统的闭环传递函数

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1 - s}{s^2 + 1.05s + 1.1} = \frac{1 - s}{(s + 0.525)^2 + 0.908^2}$$

故系统的单位阶跃响应为 $Y(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1 - s}{(s + 0.525)^2 + 0.908^2} \cdot \frac{1}{s}$

或 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{10}{11} + 1.86e^{-0.525t} \cos(0.908t - 240^\circ)$

4-9b 设某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{80(s+2)}{s(s+0.1)(s+20)}$, 试求该系统的暂态

特性和跟踪输入信号 $r(t) = 2.73 + t$ 的稳态误差。

说明 本题是已知系统的结构和参数值, 要求系统的响应特性。用根轨迹法求解这类问题的基本思路是: 首先将增益视为可变参数, 于是可按常规方法绘制系统的根轨迹; 然后应用根轨迹法, 根据已知的增益值则可求得系统的时间响应特性。

解 (1) 绘制根轨迹 由开环传递函数

$$G(s) = \frac{80(s+2)}{s(s+0.1)(s+20)} = \frac{80(0.5s+1)}{s(10s+1)(0.05s+1)}$$

可知: 系统为 I 型的; 开环根轨迹增益与开环增益相等且为 $K_a = K = 80$ 。若视 K 为可变参数, 则可绘制系统的根轨迹, 如图 4-9(a)所示。

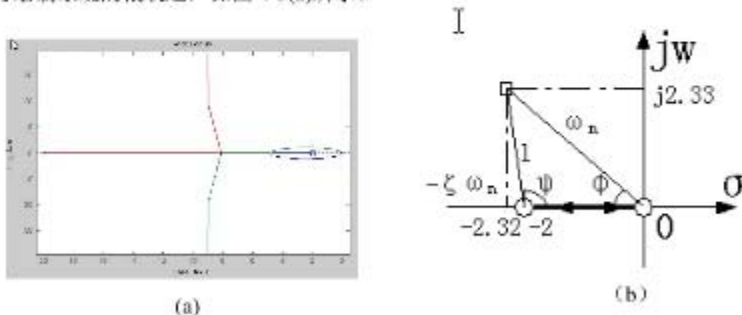


图 4-9

(2) 系统的暂态性能 当 $K=80$ 时, 由幅值条件可确定位于实轴的根轨迹分支上的闭环极点为 $p_1 = -15.465$ 。然后根据根轨迹绘制规则: 根之和, 于是有

$$\begin{cases} \Sigma p_i = \Sigma p_{oi} \\ \Pi p_i = (-1)^{n-m} K_g \Pi z_{oi} \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} p_1 + p_2 - 15.465 = -20.1 \\ -15.465 p_1 p_2 = 80(-2) \end{cases}$$

联立求解上式方程组, 则可求得系统的另两个闭环极点为 $p_{1,2} = -2.318 \pm j2.23$ 。而系统的开环零点 $z_0 = -2$, 也是闭环零点。故系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{80(s+2)}{(s+15.465)[(s+2.318)^2 + 2.23^2]}$$

由于实极点 (p_3) 与共轭复极点 (p_1 和 p_2) 的实部之比为 $R_e(p_3)/R_e(p_1) = 6.67$, 故可将 p_1 与 p_2 视为系统的闭环主导极点。若略去 p_3 的影响, 则上式可简化为

$$\Phi(s) = \frac{80(s+2)/15.465}{(s/15.465+1)(s^2+4.636s+10.346)} = \frac{5.17(s+2)}{s^2+4.636s+10.346} = \frac{5.17(s-z)}{s^2+2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

式中: $\omega_n = \sqrt{10.346} = 3.217$, $\xi = 4.636/(2\omega_n) = 0.72$, $z = -2$ 。应用主导极点分析法, 该系统可简化为带有零点的二阶系统来处理。于是由二阶系统性能指标公式, 则可估算系统的暂态性能如下 (参见图 4-9(b)):

$$\begin{aligned} t_{pc} &= \frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 0.641s \quad \text{其中 } \phi = \arctan \frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{-z - \xi\omega_n} = 1.712rad \\ \sigma_{pc} &= \frac{-1}{z} e^{-\xi\omega_n t_{pc}} 100\% = 25.5\% \quad \text{其中 } l = \sqrt{(-z - \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \xi^2)} = 2.253 \\ t_r &= \frac{1}{\xi\omega_n} \left[4 + \ln \frac{l}{(-z)} \right] = \frac{1}{2.318} \left(4 + \ln \frac{2.253}{2} \right) = 1.78s \end{aligned}$$

(3) 系统的稳态性能 由系统的开环传递函数可知: $\nu = 1, K_p = \infty, K_p = K = 80$ 。故系统跟踪输入信号 $r(t) = 2.73 + t(t \geq 0)$ 的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{2.73}{1 + K_p} + \frac{1}{K} = \frac{1}{80} = 0.0125$$

4-10c 设某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = K \frac{2}{s(s+a)(s+5)}$, 试求: (1) 当 K 和 a 均可变时系统的根轨迹; (2) 当放大器增益 $K=5$, 若要求系统的超调量 $\sigma_p \leq 4.3\%$, 调节时间 $t_s \leq 5s$ (取 $\Delta = 5\%$), 由单位斜坡输入信号所引起的稳态误差尽可能地小时, 参数 a 应取为何值?

解 (1) 绘制系统的根轨迹族 由 $1 + G(s) = 0$ 可得系统的特征方程为

$$s(s+a)(s+5) + 2K = s^2(s+5) + as(s+5) + 2K = 0 \quad (4-3)$$

(a) 令 $\alpha=0$ 只考虑可变参数 K , 由式 (4-3) 可得简化系统的等效开环传递函数为

$$G_{k2}(s) = \frac{2K}{s^2(s+5)}$$

于是可绘制简化系统的根轨迹, 如图 4-10 (a) 所示。

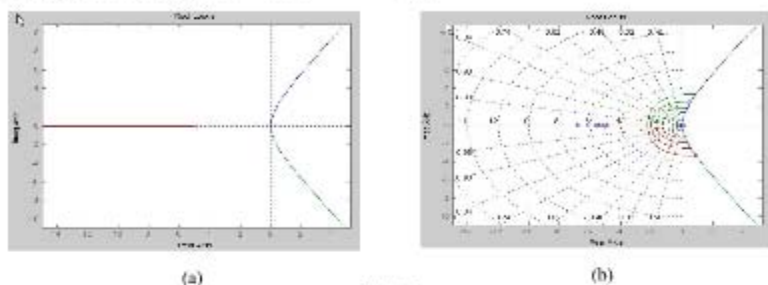


图 4-10

(b) 恢复 α 且以它为可变参数, 于是由式 (4-3) 可得系统的等效开环传递函数为

$$G_{k2}(s) = \frac{\alpha s(s+5)}{s^2(s+5)+2K}$$

当 K 取不同值时, 相应的开环极点将分布在简化系统根轨迹的不同位置上 (如图 4-10 (b) 的虚线所示)。例如取 $K=5$ 时, 由简化系统根轨迹可得这三个开环极点为 $-5.35, 0.18 \pm j1.36$, 相应的等效开环传递函数为

$$G_{k2}(s) = \frac{\alpha s(s+5)}{(s+5.35)(s-0.18-j1.36)(s-0.18+j1.36)}$$

于是可绘制 $K=5$ 时系统的根轨迹, 如图 4-10 (b) 的粗实线所示。故当 K 和 α 均为可变时系统的根轨迹, 是起始于简化系统根轨迹上不同点的一族根轨迹曲线, 如图 (b) 的粗实线所示。

(2) 当 $K=5$ 时根据性能指标要求选取 α 值

根据对超调量的要求 $\sigma_p = \exp \frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} 100\% \leq 4.3\%$, 可求得 $\xi \geq 0.707$, 在图中作 $\xi = 0.707$ 的等阻尼比线, 它与根轨迹相交于 s_1 点 ($s_1 = -0.97 + j0.97$)。由幅值条件则可求得, 与 s_1 点对应的 α 值为

$$\alpha_1 = \frac{(s+5.35)(s-0.18-j1.36)(s-0.18+j1.36)}{s(s+5)} \Big|_{s=s_1} = 2.48$$

由图可见, 只要闭环极点位于这两条等阻尼比线所限定的左边扇形域内 (即 $\alpha \geq \alpha_1$) 就能满足对超调量的要求。

根据对调节时间的要求 $t_s = \frac{4}{(\xi \omega_n)} \leq 5$, 可求得 $\xi \omega_n \geq 0.8$ 。在图上作 $\sigma = -0.8$ 的垂直线, 它与根轨迹相交于点 s_2 和 s_3 。设与交点 s_2 和 s_3 对应的 α 值分别为 α_2 和 α_3 , 其中 $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3$, 而 α_3 的值可根据幅值条件确定如下:

$$\alpha_3 = \left| \frac{(s+5.35)(s-0.18-j1.36)(s-0.18+j1.36)}{s(s+5)} \right|_{\sigma=-0.8} = 3.82$$

由图可见: 只要系统的闭环极点位于垂直线 $\sigma = -0.8$ 的左侧 (即 $\alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3$), 就可满足对调节时间的要求。故当 $\alpha \geq \max\{\alpha_1, \alpha_2\} = \alpha_1$ 和 $\alpha \leq \alpha_3$, 即 $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_3$ 时, 则可同时满足对超调量和调节时间的要求。

由系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{10}{s(s+\alpha)(s+5)} = \frac{2/\alpha}{s(s/\alpha+1)(0.2s+1)}$$

可得: 系统为 1 型的, 且开环增益 $K_v = 2/\alpha$ 。于是由单位斜坡输入信号所引起的稳态误差为 $e_{ss} = 1/K_v = \alpha/2$ 。因此当 $K=5$ 时, 既要满足对超调量和调节时间的要求又要使稳态误差尽可能地小, 则应选取 $\alpha = \alpha_1 = 2.48$ 。

4-11c 有闭环控制系统如图 4-11 所示, 其中校正环节传递函数为 $G_c(s) = K_p + K_D s$, $K=10$ 时, 要求校正后闭环系统的超调量 $\sigma_p = 16\%$, 调节时间 $t_s = 4s$ (2% 的允许误差)。(1) 试用根轨迹确定校正参数 K_p 和 K_D 。

(2) 确定 K_p 、 K_D 后, 绘制 K 从 $0 \rightarrow +\infty$ 的根轨迹。

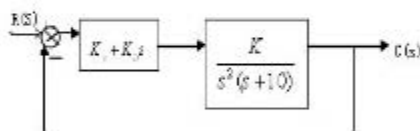


图 4-11

解 (1) 由 $\sigma_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} 100\% = 16\%$ 得 $\xi = 0.5$

由 $t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4$, 得 $\xi\omega_n = 1$

所以 $\omega_n = 2$

由 $-\xi\omega_n = -1$, $\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 1.73$

得闭环主导极点为 $s_{1,2} = -1 \pm j1.73$ 见图 4-12 所示。

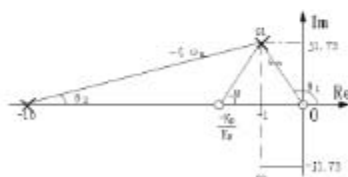


图 4-12

$\therefore \arctan \xi = 30^\circ \therefore \theta_1 = 120^\circ$

$$\theta_2 = \arctan \frac{1.73}{10-1} = 10.88^\circ$$

校正网络应提供的相角为 $\varphi = 2 \times 120^\circ + 10.88^\circ - 180^\circ = 70.88^\circ$

$$\therefore \tan \varphi = 2.88 = \frac{1.73}{\frac{K_p}{K_D} - 1} \therefore \frac{K_p}{K_D} = 1.6$$

$$\text{山幅值条件} \quad \left. \frac{s_1 + 1 \frac{K_p}{K_D} \times 10K}{|s_1^2| \cdot |s_1 + 10|} \right|_{s_1 = -1 \pm j1.73} = 1 \quad \text{得 } K_D = 2$$

$$\therefore K_p = 1.6K_D = 3.2$$

K_p 、 K_D 确定后，必须校核 S_1 、 S_2 是否为闭环主导极点。

设第三个根为 s_3 ，山特定方程 $s^3 + 10s^2 + 10K_D s + K_p = 0$ ，得 $\sum_{i=1}^3 s_i = -10$

将 $s_{1,2} = -1 \pm j1.73$ 代入上式，得 $s_3 = -8$

因此， $s_{1,2}$ 是系统的闭环主导极点。

(2) 渐近线与实轴正方向的夹角为 $\pm \frac{\pi}{2}$

分离点与会合点：

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{s^2(s+10)}{s + \frac{K_p}{K_D}} \right] = \frac{2s^2 + 24.8s + 32}{(s+1.6)^2} = 0$$

即 $2s^2 + 24.8s + 32 = 0$ ，该方程无实根，故没有分离点和会合点，根轨迹如图 4-13 所示。

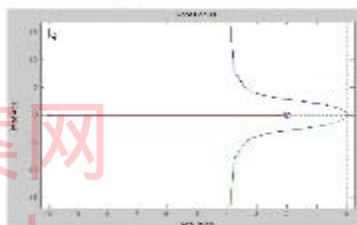


图 4-13

4-12c 考虑下图所示的宇宙飞船控制系统

模型。设计一个超前校正装置 $G_c(s)$ 使得

主导闭环极点的阻尼比 ξ 和无阻尼自然频率

ω_n 分别为 0.5 和 2 rad/s 。

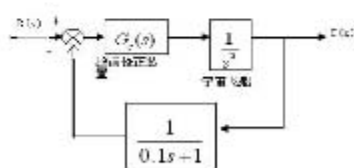


图 4-14 宇宙飞船控制系统

解：假设超前校正装置 $G_c(s)$ 为

$$G_c(s) = K_c \left[\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{aT}} \right] \quad 0 < a < 1$$

根据给定的性能指标 $\xi=0.5$ 和 $\omega_n=2\text{rad/s}$ ，主导闭环极点必须位于 $s=-1\pm j\sqrt{3}$

首先计算在这个闭环极点上的幅角缺额（即应提供的超前角）

$$\text{幅角缺额} = -120^\circ - 120^\circ - 10.8934^\circ + 180^\circ = -70.8934^\circ$$

该幅角缺额必须由超前校正装置产生。但一般一级超前校正网络提供超前角 $>60^\circ$ ， $\therefore$ 采用两个超前网络。每个网络产生一半必需的超前角即 $70.8934^\circ/2=35.4467^\circ$ ，我们把零点位置选在 $s=-3$ （这种选择是任意的）。一旦选定二个零点位于 $s=-3$ ，必需的极点位置就确定下来。如图 4-15 所示。

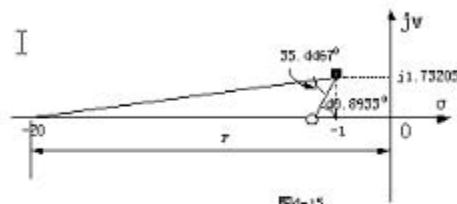


图 4-15

$$\text{即 } \frac{1.7305}{y-1} = \tan(40.8933^\circ - 35.4467^\circ) = \tan 5.4466^\circ = 0.09535$$

$$\text{由此得到 } y = \frac{1+1.73205}{0.09535} = 19.1652$$

因此超前装置具有下列传递函数 $G_c(s) = K_c \left(\frac{s+3}{s+19.1652} \right)^2$

$$K_c \text{ 必须根据幅值确定如下 } \left| K_c \left(\frac{s+3}{s+19.1652} \right)^2 \frac{1}{s^2} \frac{1}{0.1s+1} \right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1 \quad \text{即 } K_c = 174.3864$$

于是，所设计的超前校正装置为 $G_c(s) = 174.3864 \left(\frac{s+3}{s+19.1652} \right)^2$

$$\text{开环传递函数为 } G_c(s)G(s)H(s) = 174.3864 \left(\frac{s+3}{s+19.1652} \right)^2 \frac{1}{s^2} \frac{1}{0.1s+1}$$

已校正系统的根轨迹如图 4-16 所示。

系统的闭环传递函数为：

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{174.3864(s+3)^2(0.1s+1)}{(s+19.1652)^2 s^2 (0.1s+1) + 174.3864(s+3)^2}$$

闭环极点求得如下

$$s = -1 \pm j1.73205$$

$$s = -9.1847 \pm j7.4814$$

$$s = -27.9606$$

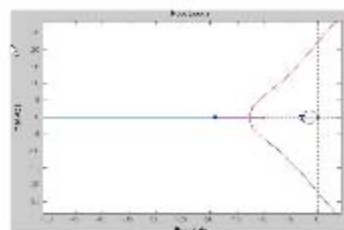


图 4-16

图 4-17 和图 4-18 分别示出已校正系统的单位阶跃响应和单位斜坡响应，单位阶跃响应是比较好的，单位斜坡响应也可以接受，输出量的一个微小量超前于输入量。这是因为系

统具有反馈传递函数 $\frac{1}{0.1s+1}$

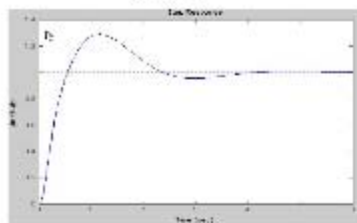


图 4-17 已校正系统的单位阶跃响应

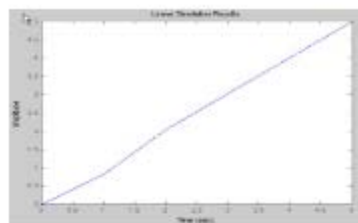


图 4-18 已校正系统的单位斜坡响应

4-13d 已知负反馈系统的传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s^2(s+1)}$, $H(s) = s+a$ ①利用 Matlab 有关函数

作出 $0 \leq a < 1$ 时系统的根轨迹和单位阶跃响应曲线;②讨论 a 值变化对系统动态性能及稳定性的影响($0 \leq a < 1$)。

解 ① (a) 取 $a = 0.1, K = 1$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+1)} = \frac{K(s+0.1)}{s^3+s^2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{s^3+s^2+s+0.1}$$

Matlab 文本 A4.3

```
p=[1 0 1];
q=[1 1 0 0];
rlocus(p,q)
num=[1];
den=[1 1 1 0.1];
step(num,den)
```

系统的根轨迹如图 4-19 所示和单位阶跃响应曲线如图 4-20 所示。

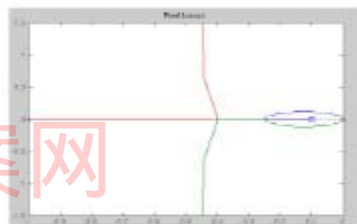


图 4-19

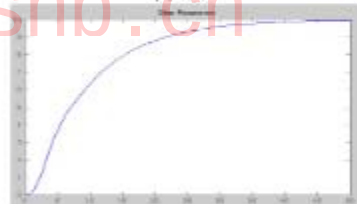


图 4-20

(b) 取 $a = 0.5, K = 1$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+0.5)}{s^3+s^2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3+s^2+s+0.5}$$

Matlab 文本 A4.4

```
p=[1 0.5];
q=[1 1 0 0];
rlocus(p,q)
num=[1];
den=[1 1 1 0.5];
step(num,den)
```

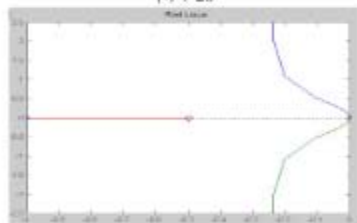


图 4-21

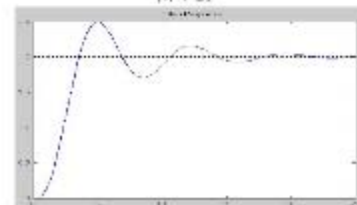


图 4-22

系统的根轨迹如图 4-21 所示和单位阶跃响应曲线如图 4-22 所示。

(c) 取 $a=0.9, K=1$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+0.9)}{s^3 + s^2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + s + 0.9}$$

Matlab 文本 A4.5

```
p=[1 0.9];
q=[1 1 0 0];
rlocus(p,q)
num=[1];
den=[1 1 1 0.9];
step(num,den)
```



图 4-23

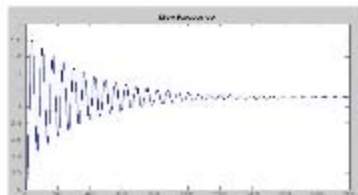


图 4-24

系统的根轨迹如图 4-23 所示和单位阶跃响应曲线如图 4-24 所示。

随 a 值减少，主导极点由一对共轭复数的二阶衰减振荡系统变成一个负实数的一阶系统，对系统动态性能和稳定性都有利。

4-18d 控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)}$ ，用 Matlab 函数绘制 K 和 T

同时变化的根轨迹，并分析微分控制作用对根轨迹的影响。

解 系统特征方程

$$s(s+1)(s+2) + K(1+Ts) = 0$$

(1) 先考虑 K

令 $T=0$ ，系统特征方程 $s(s+1)(s+2)+K=0$

简化系统的等效开环传递函数

$$G_{01}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

其根轨迹如图 4-25 所示。

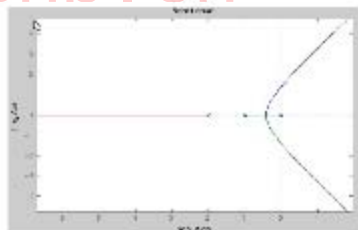


图 4-25

(2) 以 T 为参变量得到等效开环传递函数 $G_{02}(s) = T \frac{Ks}{s(s+1)(s+2)+K}$ ，比较 $G_{01}(s)$ 与 $G_{02}(s)$

可知 $G_{02}(s)$ 的开环极点就是 $G_{01}(s)$ 对应的闭环极点， $\therefore G_{02}(s)$ 对应的根轨迹起始点都在 $G_{01}(s)$ 对应的根轨迹上，通常先令 K 为某值，然后根据 $G_{02}(s)$ 零极点分布，作出参量 T 由 $0 \rightarrow \infty$ 的根轨迹，当 K 取不同值，而 T 由 $0 \rightarrow \infty$ ，则系统的根轨迹是嵌入在简化系统根轨迹上的曲线族。系统的根轨迹曲线族如图 4-26 所示。

有二条趋向 ∞ ，渐近线： $\sigma_a = (-3-2)/2 = -1.5$ $\varphi_a = \pm (2k+1)^* 180^\circ/3 = \pm 90^\circ$

Matlab 文本 A4.6

```
num1=[0, 0, 3, 0];
```

```
den1=[1, 3, 2, 3];  
num2=[0, 0, 6, 0];  
den2=[1, 3, 2, 6];  
num3=[0, 0, 20, 0];  
den3=[1, 3, 2, 20];  
rlocus(num1,den1)  
hold on  
rlocus(num2,den2)  
rlocus(num3,den3)  
grid
```

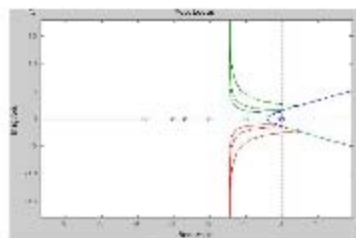


图 4-26

课后答案网
www.hackshp.cn

第五章 线性系统的频域分析

5-1a 已知单位负反馈系统的开环传递函数如下, 试绘制其开环频率特性的极坐标图。

$$\textcircled{1} G(s) = \frac{1}{s(1+s)}; \quad \textcircled{2} G(s) = \frac{1}{s^2(1+s)(1+2s)};$$

解 1) $G(s) = \frac{1}{s(1+s)}$ $s \rightarrow j\omega$ 得频率特性 $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)}$,

其幅频特性 $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$ 相频特性 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \tan^{-1}\omega$

$$\omega=0 \quad G(j0) = \infty \angle -90^\circ$$

$$\omega=\infty \quad G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{\omega^2+1} - j \frac{1}{\omega(\omega^2+1)} \right] = -1$$

作 Nyquist 图如图 5-1 所示。

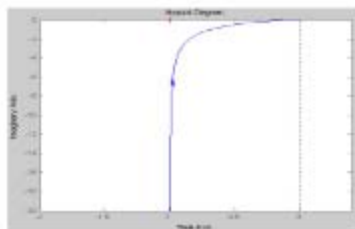


图 5-1

2) $G(s) = \frac{1}{s^2(1+s)(1+2s)}$ $s \rightarrow j\omega$ 得频率特性

幅频特性 $|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega^2 \sqrt{\omega^2+1} \sqrt{(2\omega)^2+1}}$

相频特性 $\angle G(j\omega) = -180^\circ - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}2\omega$

$$\omega=0 \quad G(j0) = \infty \angle -180^\circ$$

$$\omega=\infty \quad G(j\infty) = 0 \angle -360^\circ$$

与虚轴交点

$$G(j\omega) = \frac{(1-j\omega)(1-j2\omega)}{-\omega^2(1+\omega^2)(1+4\omega^2)} = \frac{1-2\omega^2}{-\omega^2(1+\omega^2)(1+4\omega^2)} + j \frac{3}{-\omega^2(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$\text{Re}(G(j\omega)) = 0$ 得 $\omega = 0.707$ 代入 $I_m(G(j\omega))$ 得 $I_m = G(j0.707) = 0.942$

作 Nyquist 图如图 5-2 所示。

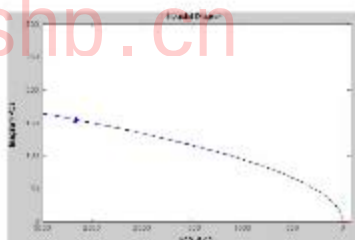


图 5-2

5-2a 绘制下列传递函数的 Bode 图:

$$(1) \frac{100}{(s+1)(3s+1)(7s+1)}$$

$$(2) G(s) = \frac{2000(s+6)}{s(s^2+4s+20)}$$

解: (1) $\frac{100}{(s+1)(3s+1)(7s+1)}$

$20\lg K = 40\text{dB}$ $\omega_1 = \frac{1}{7} = 0.143$ $\omega_2 = \frac{1}{3} = 0.33$ $\omega_3 = 1$

幅频特性作法, 在 40dB 作与横轴平行线, 与 ω_1 相交点作 -20dB/dec 斜线, 与 ω_2 相交作 -40dB/dec 斜线, 与 ω_3 相交作 -60dB/dec 斜线, 作 bode 图如图 5-3 所示。

MATLAB 文本 A5.1

```
Mun=[100]
Den=[21 31 11 1]
Bode(num,den)
Margin(mag,phacs)
```

$$(2) G(s) = \frac{2000(s+6)}{s(s^2+4s+20)}$$

$$= \frac{600(\frac{1}{6}s+1)}{s(\frac{1}{20}s^2+\frac{1}{5}s+1)}$$

$20L_0 600 = 56\text{dB}$

$\omega_1 = 4.47, \omega_2 = 6$

作 bode 图如图 5-4 所示。

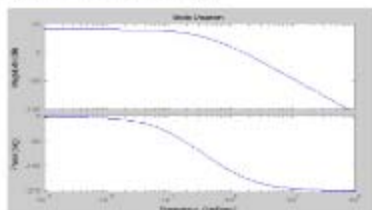


图 5-3

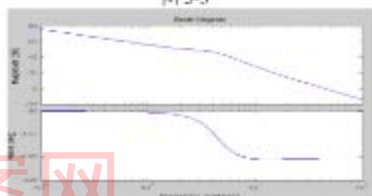


图 5-4

5-3a 已知开环传递函数 $G(s)H(s)$ 在 S 平面的右半平面的右半部无极点, 试根据图 5-5 所示开环频率特性曲线分析相应的系统的稳定性。

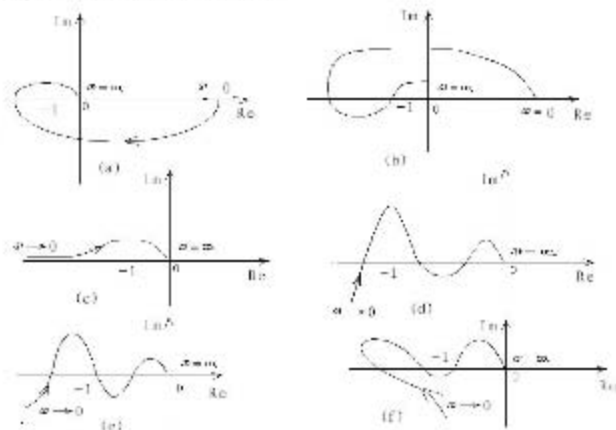


图 5-5

解 奈奎斯特稳定判据: $Z = P - N$

- | | | | | | | | |
|-----------|--------|-------|-----|-----------|-----------|-------|-----|
| (a) $P=0$ | $N=-2$ | $Z=2$ | 不稳定 | (b) $P=0$ | $N=1-1=0$ | $Z=0$ | 稳定 |
| (c) $P=0$ | $N=-2$ | $Z=2$ | 不稳定 | (d) $P=0$ | $N=-2$ | $Z=2$ | 不稳定 |
| (e) $P=0$ | $N=-2$ | $Z=2$ | 不稳定 | (f) $P=0$ | $N=1-1=0$ | $Z=0$ | 稳定 |

5-4a 系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$ 其中, $K = 86\text{s}^{-1}$ $T_1 = 0.02\text{s}$,

$T_2 = 0.03s$ 。(1) 试用奈氏判据分析闭环系统的稳定性;(2) 若要系统稳定, K 和 T_1, T_2 之间应保持怎样的解析关系。

解:

$$G(s) = \frac{86}{s(1+0.02s)(1+0.03s)}$$

$$s \rightarrow j\omega$$

$$G(j\omega) = \frac{86}{j\omega(1+0.02j\omega)(1+0.03j\omega)} = \frac{-43\omega + j86(0.006\omega^2 - 1)}{\omega[1+(0.02\omega)^2][1+(0.03\omega)^2]}$$

与实轴交点

$$0.006\omega^2 - 1 = 0 \quad \omega = 40.825$$

$$G(j40.8) = -1.032 < -1$$

作极坐标图如图 5-6 所示。

$\therefore N = -2$, 奈奎斯特稳定判据: $Z = P - N = 0 - (-2) = 2 \therefore$ 系统不稳定。

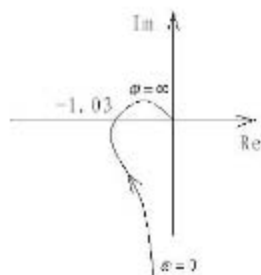


图 5-6

$$(2) \quad G(j\omega) = \frac{-Kj(1-j\omega T_1)(1-j\omega T_2)}{\omega(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)} = \frac{-K\omega(T_1+T_2) + jK(T_1 T_2 \omega^2 - 1)}{\omega(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)}$$

令 $K(T_1 T_2 \omega^2 - 1) = 0$ 求得 $\omega^2 = \frac{1}{T_1 T_2}$ 代入实部, 使其小于 -1

$$\frac{K(T_1+T_2)}{(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)} < 1$$

求得系统稳定 K 和 T_1, T_2 应保持下式关系如下: $\frac{KT_1 T_2}{(T_1+T_2)} < 1$

5-5a 反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{10(1+Ts)}{s(s-10)}$ ($T > 0$), (1) 画出系统开环

幅相曲线大致的形状, 并分别标出系统

稳定和不稳定时 $(-1, j0)$ 点的位置;

(2) 由频率特性计算出闭环系统稳定时 T 的临界值。

解:

$$s \rightarrow j\omega$$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10(1+jT\omega)}{j\omega(j\omega-10)}$$

$$A(\omega) = \frac{10\sqrt{1+T^2\omega^2}}{\omega\sqrt{10+\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 180^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \tan^{-1} \frac{\omega}{10})$$

$$\omega = 0, G(j0) = \infty \angle -270^\circ$$

$$\omega = \infty, G(j\infty) = 0 \angle -90^\circ$$

$\therefore (-1, j0)$ 在曲线内稳定 $(-1, j0)$ 在曲线外不稳定

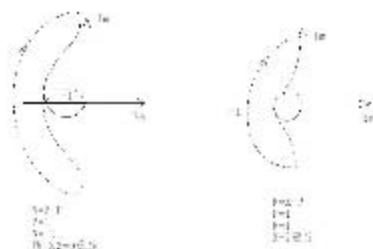


图 5-7

(2)

$$\begin{aligned} G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{10(1+Tj\omega)}{j\omega(j\omega-10)} = \frac{-10\omega^2(10T+1)}{\omega^2(100+\omega^2)} + j\frac{10\omega(10-\omega^2T)}{\omega^2(100+\omega^2)} \\ &= \frac{-10(10T+1)}{100+\omega^2} + j\frac{10(10-\omega^2T)}{\omega(100+\omega^2)} \end{aligned}$$

临界稳定即开环幅相曲线经过 $(-1, j0)$ 点, 即

$$\begin{cases} \frac{-10(10T+1)}{(100+\omega^2)} = -1 \\ \frac{10(10-\omega^2T)}{\omega(100+\omega^2)} = 0 \end{cases} \quad \text{求得 } \omega^2 = \frac{10}{T} \quad T=1 \text{ 或 } T=-\frac{1}{10} \text{ (舍去)}$$

5-6a 已知最小相位系统的渐近线幅频特性如图所示, 试求取各系统的开环传递函数。

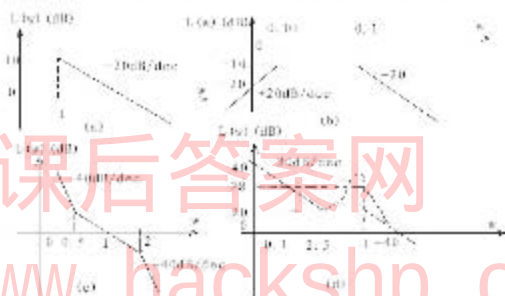


图 5-8

解: (1)

$$G(s) = \frac{K}{s+1}$$

$$20 \lg K = 10, \therefore K = \sqrt{10} = 3.16$$

(2)

$$G(s) = \frac{Ks}{(\frac{s}{0.01}+1)(\frac{s}{0.1}+1)}$$

$$\therefore 20 \lg K \omega |_{\omega=0.01} = -10 \therefore K \omega |_{\omega=0.01} = 10^{-\frac{1}{2}} \therefore K = 31.6$$

$$(3) \quad G(s) = \frac{K(\frac{s}{0.5}+1)}{s^2(\frac{s}{2}+1)}$$

$$L_1(\omega) = 20 \lg \frac{K}{\omega^2} = 20 \lg K - 20 \lg \omega^2$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg \frac{K_1}{\omega} = 20 \lg K_1 - 20 \lg \omega$$

在 $\omega=1$ 处求得 $K_1=1$;

在 $\omega = 0.5$ 处 $20\lg K - 20\lg 0.5^2 = \lg 1 - \lg 0.5$

$$\therefore K = 0.5$$

$$(4) \quad G(s) = \frac{K(s+1)}{s(\frac{1}{2.5}s^2 + 2\frac{\xi}{2.5}s + 1)}$$

在 $C=1$ $20\lg K=20$ $\therefore K=10$

$$\therefore 20\lg A(\omega_n) = 20\lg \frac{1}{2\xi} = 8\text{dB}$$

$$\therefore \frac{1}{2\xi} = 10^{\frac{8}{20}} = 2.5 \quad \text{求出 } \xi = 0.2$$

将 $K=10$, $\xi=0.2$ 代入 $G(s)$ 得 $\therefore G(s) = \frac{10(s+1)}{s(0.16s^2 + 0.16s + 1)}$

5-7a 已知某负反馈系统的开环对数幅频特性如图 5-9 所示。 $\omega=0.1$ 处的幅值为

40dB, $\omega_2 = 5$ 。(1) 证明 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_3}{\omega_1}$;

(2) 求系统的开环放大系数 K ; (3) 设系统为最小相位系统, 求相角裕度 γ 。

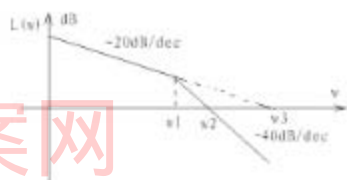


图 5-9

解 (1) 证明 $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_3}{\omega_1}$

$$\text{令 } L_1(\omega) = 20\lg \frac{K}{\omega} \quad \text{在 } \omega = \omega_3 \text{ 处, } \frac{K}{\omega_3} = 1 \quad \therefore K = \omega_3$$

$$L_2(\omega) = 20\lg \frac{K}{\omega^2} \quad \text{在 } \omega = \omega_2 \text{ 处, } \frac{K}{\omega_2^2} = 1 \quad \therefore K_1 = \omega_2^2$$

在 $\omega = \omega_1$ 处:

$$20\lg \frac{K}{\omega_1} = 20\lg \frac{K_1}{\omega_1^2} \quad \text{即 } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_3}{\omega_1^2}$$

$$\text{上式二边同乘 } \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{得 } \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2} \quad \text{即 } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \quad (\text{证明完毕})$$

(2) 已知 $20\lg \frac{K}{\omega_1} = 40$ 求出系统开环放大系数: $K=10$; $\therefore \omega_3=10$

(3) 可求出 $\omega = \frac{\omega_2^2}{\omega_1} = \frac{25}{10} = 2.5$; $\omega_c = \omega_1 = 5$

系统开环频率特性:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\frac{\omega}{2.5} + 1)}$$

$$\text{相角特性: } \angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^\circ - \lg^{-1} 0.4\omega$$

$$\text{相角裕度为: } \gamma = \varphi(\omega_c) + 180^\circ = 180^\circ - 90^\circ - \lg^{-1}(0.4 \times 5) = 27^\circ$$

5-8a 已知某最小相位系统的对数渐近幅频曲线如图 5-10 所示，试确定该系统的传递函数。

解 由图可得：幅频曲线的低频渐近线的斜率为 $-20\text{v}=0(\text{dB}/\text{dec})$ ，故系统为 0 型的（即 $v=0$ ）；低频渐近线的高度为 $20\lg K=30\text{dB}$ 。

$$\text{故系统的增益 } K = 10^{\frac{30}{20}} = 31.62。$$

根据对数渐近幅频曲线的转折频率和经转折频率后曲线斜率的变化情况，则可确定对应的零极点和环节传递函数如下表所列：

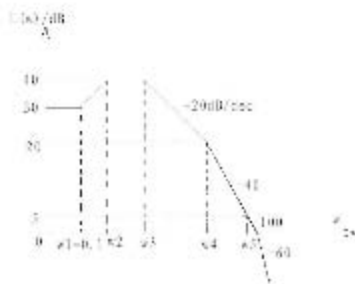


图 5-10

转折频率 ω_i (rad/s)	$\omega_1=0.1$	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
经转折频率后曲线斜率的变化量 (dB/dec)	-20	-20	-20	-20	-20
对应的零极点	$Z=-0.1$	$P_1=-\omega_2$	$P_2=-\omega_3$	$P_3=-\omega_4$	$P_4=-\omega_5$
对应的环节传递函数	$\frac{s}{0.1} + 1$	$\frac{1}{s/\omega_2 + 1}$	$\frac{1}{s/\omega_3 + 1}$	$\frac{1}{s/\omega_4 + 1}$	$\frac{1}{s/\omega_5 + 1}$

对数渐近幅频曲线是由若干直线段构成的折线，其中每一直线段的方程如式 5-1 所示，

$$\text{即 } L(\omega_a) - L(\omega_b) = K(\lg \omega_a - \lg \omega_b) \text{ 或 } \omega_a = \omega_b \times 10^{(L(\omega_a) - L(\omega_b))/K} \quad 5-1$$

于是可确定各待定的转折频率值如下：

$$\text{取 } \omega_a = \omega_2, \omega_b = 0.1, \text{ 由图得 } L(\omega_2) = 40, L(0.1) = 30, K = 20, \text{ 则可求得}$$

$$\omega_2 = 0.1 \times 10^{(40-30)/20} = 0.316 \text{ rad/s}$$

$$\text{取 } \omega_a = \omega_5, \omega_b = 100, \text{ 由图得 } L(\omega_5) = 5, L(100) = 0, K = -60, \text{ 则可求得}$$

$$\omega_5 = 100 \times 10^{(5-0)/(-60)} = 82.54 \text{ rad/s}$$

$$\text{取 } \omega_a = \omega_4, \omega_b = \omega_5, \text{ 由图得 } L(\omega_4) = 20, K = -40, \text{ 则}$$

$$\omega_4 = 82.54 \times 10^{(20-5)/(-40)} = 34.81 \text{ rad/s}$$

$$\text{取 } \omega_a = \omega_3, \omega_b = \omega_4, \text{ 由图得 } L(\omega_3) = 40, K = -20 \text{ 则}$$

$$\omega_3 = 34.81 \times 10^{(40-20)(1-20)} = 3.48 \text{ rad/s}$$

$$\text{故所求系统的传递函数为 } G(s) = \frac{31.62(s/0.1+1)}{(s/0.316+1)(s/3.48+1)(s/82.54+1)}$$

$$\text{5-9b 已知反馈控制系统的开环传递函数为 (1) } G_k(s) = \frac{1600s^3}{s(s+4)(s+16)(s+1.25)}; \quad (2)$$

$$G(s)H(s) = \frac{125(-s+2)}{s(s+10)(-s+5)}, \text{ 试分别求各系统的稳定裕量并判断其稳定性。}$$

说明 求系统的稳定裕量并判断其稳定性, 既可应用 MATLAB 求解, 也可应用开环对数频率特性进行估算。估算的核心在于, 计算幅穿频率 ω_c 和相穿频率 ω_g 。 ω_c 的常用计算方法由下列三种: (1) 直接在开环伯德图上利用作图法确定, 或应用式 (5-1) 进行估算; (2) 根据 ω_c 处开环频率特性的幅值 $|G_k(j\omega)|=1$ 进行求解; (3) 利用开环对数渐近幅频曲线为分段直线的特点, 求解开环对数渐近幅频特性方程来确定。其求解过程如下: 设系统的开环对数渐近幅频曲线由 m 段直线所组成的, 其第 i 段的渐近线方程为

$$L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega) \quad \omega_{i-1} \leq \omega \leq \omega_i \quad i=1, 2, 3, \dots, m$$

式中 ω_{i-1} 和 ω_i 为该段渐近幅频曲线两端的转折频率, 按 i 从小到大递增的次序, 令 $A_i(\omega) = 1$ (即 $L_i(\omega) = 0$) 求得解为 ω^* , 若 ω^* 在该段的频率区间内 (即 $\omega_{i-1} < \omega^* < \omega_i$) 则 $\omega_c = \omega^*$, 若不在则舍去, 直至渐近幅频曲线各段均已检验完为止。

确定相穿频率的常用方法也由三种, 详情见题 5-10b。

解 (1) 对于 $G_k(s)$ 系统 首先将开环传递函数改写乘下列时间常数的表示形式:

$$G_k(s) = \frac{20s^3}{s(0.25s+1)(0.0625s+1)(0.8s+1)}$$

于是可得系统的开环频率特性为

$$G_k(j\omega) = G_k(s)|_{s=j\omega} = \frac{20(j\omega)^2}{(0.25j\omega+1)(0.0625j\omega+1)(0.8j\omega+1)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = 2 \times 90^\circ - \arctan 0.25\omega - \arctan 0.0625\omega - \arctan 0.8\omega$$

下面应用开环对数渐近幅频特性估算系统的相角裕度。估算的核心工作在与计算 ω_c , 常用的计算方法有:

(a) 应用式 (5-1) 进行估算 由 $G_k(s)$ 可绘制系统的开环对数渐近幅频曲线, 如图 5-11 所示。令 $\lim_{\omega \rightarrow 0} |G_k(j\omega)| = 20\omega^2 = 1$, 则可求得开环对数幅频曲线的低频渐近线穿过 0 分

贝线的交点频率为: $\omega = \sqrt{1/20} = 0.224 \text{ rad/s}$, 这个频率也式 ω_c 的第一个值, 即

$\omega_{c1} = 0.224 \text{ rad/s}$ 。然后反复应用式 (5-1) 即: $L(\omega_a) - L(\omega_b) = K(\lg \omega_a - \lg \omega_b)$ 或

$$\omega_a = \omega_b \times 10^{[L(\omega_a) - L(\omega_b)] / K}$$

便可由开环伯德图求得另一个幅穿频率 ω_{c2} 的值如下:

取 $\omega_a = 1.25$, $\omega_b = 0.224$, 而 $L(\omega_b) = 0$, 则可得

$$L(\omega_a) = L(1.25) = 40 \lg 1.25 / 0.224 = 29.87 \text{ dB}$$

取 $\omega_a = 4$, $\omega_b = 1.25$, $L(1.25) = 29.87$,

则可求得 $L(4) = L(1.25) + 20 \lg 4 / 1.25 = 39.97 \text{ dB}$

取 $\omega_a = \omega_{c2}$, $\omega_b = 16$, 而 $L(16) = L(4)$, $L(\omega_{c2}) = 0$,

则可求得 $\omega_{c2} = 16 \times 10^{-39.97/20} = 1594.48 \text{ rad/s}$

(b) 根据在 ω_c 处开环频率特性的幅值

$$|G_k(j\omega)| = \frac{20\omega^2}{\sqrt{1+(\omega/4)^2} \sqrt{1+(\omega/16)^2} \sqrt{1+(\omega/1.25)^2}} = 1$$

进行求解。求解的方法由准确的和近似估算两种。一般来说: 准确的求解只适用与求低阶系统的 ω_c ; 对于高阶系统, 将涉及高阶代数方程的求根问题较为麻烦, 工程上往往采用近似估算的方法。以本题为例, 估算的具体做法如下: 对于低频段的 ω_{c1} , 由于 $\omega_{c1}/\omega_i \ll 1$ (其中 ω_i 为与开环有限极点相对应的转折频率, 即 $\omega_1 = 1.25$, $\omega_2 = 4$, $\omega_3 = 16$), 近似取 $\omega_{c1}/\omega_i \approx 0$, 则可得 $|G_k(j\omega_{c1})| \approx 20\omega_{c1}^2 = 1$, 从而解的 $\omega_{c1} = \sqrt{1/20} = 0.224 (\text{rad/s})$; 对于高频段

的 ω_{c2} , 由于 $\omega_{c2}/\omega_i \gg 1$, 近似取 $1 + \omega_{c2}/\omega_i \approx (\omega_{c2}/\omega_i)^2$, 于是可得

$$|G_k(j\omega_{c2})| \approx \frac{20\omega_{c2}^2}{(\omega_{c2}/4)(\omega_{c2}/16)(\omega_{c2}/1.25)} = 1$$

从而解的 $\omega_{c2} = 20 \times 4 \times 16 \times 1.25 = 1600 \text{ rad/s}$ 。由求解过程可见: 虽然可以使用这种方法近似估算高阶系统的 ω_c , 但是必须事先知道它的取值区段。这是估算方法的不足之处。

(c) 求解开环对数渐近幅频特性方程来确定 由 $G_k(s)$ 可列写系统的开环对数渐近幅频特性方

$$\text{程为 } L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg A_1(\omega) = 20 \lg 20\omega^2; \omega < 1.25 \\ 20 \lg A_2(\omega) = 20 \lg [20\omega^2 / (0.8\omega)]; 1.25 \leq \omega < 4 \\ 20 \lg A_3(\omega) = 20 \lg [20\omega^2 / (0.8\omega \times 0.25\omega)]; 4 \leq \omega < 16 \\ 20 \lg A_4(\omega) = 20 \lg [20\omega^2 / (0.8 \times 0.25 \times 0.0625\omega^3)]; \omega \geq 16 \end{cases}$$

令 $A_1(\omega) = 20\omega^2$, 可解的 $\omega_1^* = \sqrt{1/20} = 0.224$, 它在该段渐近线的频率区间内 (即 $\omega_1^* < 1.25$)

故可得 $\omega_{c1} = 0.224 (\text{rad/s})$; 令 $A_2(\omega) = 1$ 和 $A_3(\omega) = 1$, 求得的解均不在该段的频率范围内,

即对应的幅频曲线段与零分贝线不相交; 令

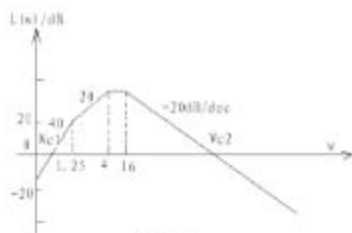


图 5-11

$$A_1(\omega) = 20\omega^2 / (0.8 \times 0.25 \times 0.0625\omega^3) = 1,$$

可解得 $\omega_1^* = 20 / (0.8 \times 0.25 \times 0.0625) = 1600$, 它在该段渐近线的频率区间内 (即 $\omega_1^* > 16$)

故可得 $\omega_c = 1600 \text{ rad/s}$

根据所得的 ω_c 值, 则可求得系统的相角裕量为

$$\gamma(\omega_{c1}) = 180^\circ + \varphi(\omega_{c1}) = 360^\circ - \arctan 0.25\omega_{c1} - \arctan 0.0625\omega_{c1} - \arctan 0.8\omega_{c1} = 346.1^\circ$$

$$\gamma(\omega_{c2}) = 180^\circ + \varphi(\omega_{c2}) = 90.75^\circ$$

由相频特性表达式可见, 当 ω 从 0 变化到 ∞ 时 $\varphi(\omega) > -180^\circ$, 故可得系统的增益裕

量为 $g_m = 20 \lg 1 / |G_k(j\omega_g)| = \infty$ 由 $G_k(s)$ 可知, 该系统为最小相位的。而 $\gamma > 0, g_m > 0$, 故闭环系统为稳定的。

(2) 对于 $G(s)H(s)$ 系统 首先将开环传递函数改写成下列时间常数的表示形式:

$$G(s)H(s) = \frac{5(1-0.5s)}{s(1+0.1s)(1-0.2s)}$$

于是可得系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{5(1-0.5j\omega)}{j\omega(1+0.1j\omega)(1-0.2j\omega)} = \frac{-\omega(2+0.05\omega^2) - j(5+0.35\omega^2)}{\omega(1+0.01\omega^2)(1+0.04\omega^2)}$$

相应地可求得开环对数渐近幅频特性方程为

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg 5 / \omega, & \omega < 2 \\ 20 \lg 5 \times 0.5 \omega / \omega, & 2 \leq \omega < 5 \\ 20 \lg 5 \times 0.5 \omega / (\omega \times 0.2 \omega); & 5 \leq \omega < 10 \\ 20 \lg 5 \times 0.5 \omega / (\omega \times 0.2 \omega \times 0.1 \omega); & \omega \geq 10 \end{cases}$$

分析上式可以看到: ω_c 落在 $\omega \geq 10$ 的频率区间上; 令 $5 \times 0.5 \omega / (\omega \times 0.2 \omega \times 0.1 \omega) = 1$, 可

解得 $\omega_c = 11.18 \text{ (rad/s)}$ 。于是可求得方程的相角裕量为

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - \arctan 0.5\omega_c - 90^\circ - \arctan 0.1\omega_c + \arctan 0.2\omega_c = 27.85^\circ$$

由 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的表达式可见: $G(j0_+)H(j0_+) = \infty \angle -90^\circ$; $G(j\infty)H(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$ 当 ω

为正的时 $\text{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] < 0$, $\text{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] < 0$, 这说明开环幅相曲线位于第三象限内且与负实轴无非零的交点。故系统的增益裕量 $g_m = 20 \lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| = \infty$ 。

虽然 $\gamma > 0$ 和 $g_m > 0$ (即开环负相曲线不包围临界点), 但由于系统在右半 S 平面上有一个开环极点, 故根据奈氏判据确定该闭环系统为不稳定的。

5-10b 设反馈控制系统的开环传递函数为 $G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)(s+10)}$, 试求: (1) 当开环增益等于 1 时系统的增益裕量和相角裕量; (2) 使系统稳定时开环增益的临界值。

说明 在开环增益的临界值下, 闭环系统将处于临界稳定状态。其特点时: 系统的开环频率特性曲线将通过临界点 $(-1, j0)$, 或系统的稳定裕量 $\gamma=0$ 和 $g_m=0$ 。因此求临界开环增益的常用方法有下列两种: (1) 解析的方法, (在极坐标图上) 令开环频率特性曲线 $G_k(j\omega)$ 通过临界点 $(-1, j0)$ 来求解。其具体做法是: 令 $G_k(j\omega)$ 的相角 $\varphi(\omega) = -180^\circ$ (或

虚部 $\text{Im}[G_k(j\omega)] = 0$) 求得相角频率 ω_g ; 将所得 ω_g 值代入 $G_k(j\omega)$ 中便可求得开环频率特性曲线与负实轴交点的横坐标 $G_k(j\omega_g)$; 然后令 $G_k(j\omega_g) = -1$ 则可求得系统的临界开环增益值。

(2) 在开环伯德图上垂直移动开环对数幅频曲线, 使之 $\omega = \omega_g$ 时穿过 0dB 线来求解。在伯德图上开环频率特性乘以 K 倍, 并不改变开环对数频率特性曲线的形状而只是使开环对数幅频曲线垂直上移 $20\lg K(\text{dB})$ 的距离。

设原系统的开环增益为 K_0 , 如果将开环对数幅频曲线垂直上移使得 $\omega = \omega_g$ 时穿过 0dB 线 (即移动后系统 $\omega_g = \omega_c$, $\gamma=0$ 和 $g_m=0$, 因而系统处于临界稳定状态), 那么由垂直上移的距离 (设为 $20\lg K_1$) 便可求得开环增益的临界值为 $K_c = K_0 K_1$ 。

解 (1) 当 $K=1$ 时系统的稳定裕量
将 $G_k(s)$ 改写成时间常数的表示形式并求得系统的开环频率特性为

$$\begin{aligned} G_k(j\omega) &= \frac{K}{s(s+1)(0.2s+1)(0.1s+1)} \Big|_{s=j\omega} \\ &= \frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.04\omega^2}\sqrt{1+0.01\omega^2}} e^{j\varphi(\omega)} \quad 5-2 \\ &= \frac{K[0.02\omega^2 - 1.3] + j(0.32\omega^2 - 1)}{\omega(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)(1+0.01\omega^2)} \end{aligned}$$

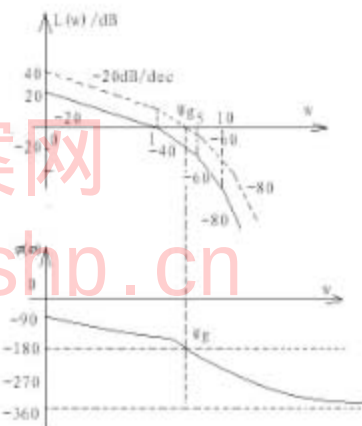


图 5-12

式中: 系统的开环相频特性为 $\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan 0.2\omega - \arctan 0.1\omega$; 系统的开环增益为 $K=0.02K_g$, 其中 K_g 为系统的开环根轨迹增益, 于是可绘制 $K=1$ 时系统的开环对数频率特性曲线, 如图 A5-12 的实线所示。

由开环对数频率特性求系统的增益裕量, 其核心在于计算相角频率 ω_g 。确定 ω_g 的常用方法有下列三种:

(a) 直接在开环伯德图上读取。由图 A5-12 可得: $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$, $\omega_g = 1.77 \text{ rad/s}$ 。

(b) 令在 ω_g 处开环频率特性的虚部 $\text{Im}[G_k(j\omega)] = 0$, 即 $0.32\omega^2 - 1 = 0$, 则可求得相角频率为

$$\omega_g = \sqrt{1/0.32} = 1.77 \text{ rad/s}$$

(c) 令在 ω_g 处开环频率特性的相角 $\phi(\omega) = -180^\circ$, 即

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan 0.2\omega - \arctan 0.1\omega = -180^\circ$$

或 $\arctan \omega + \arctan 0.2\omega + \arctan 0.1\omega = 90^\circ$

对上式的两边取正切并应用三角函数公式

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \beta \tan \gamma - \tan \alpha \tan \gamma},$$

于是有

$$\frac{\omega + 0.2\omega + 0.1\omega - 0.02\omega^3}{1 - 0.2\omega^2 - 0.02\omega^2 - 0.1\omega^2} = \infty$$

这意味着 $1 - 0.2\omega^2 - 0.02\omega^2 - 0.1\omega^2 = 1 - 0.32\omega^2 = 0$, 故可求得相穿频率为

$$\omega_g = \sqrt{1/0.32} = 1.77 \text{ rad/s}$$

将 ω_g 值代入 $G_k(j\omega)$ 中, 便可求得系统的增益裕量为

$$g_{\infty} = -20 \lg |G_k(j\omega)| = 20 \lg \omega_g + 20 \lg \sqrt{1 + \omega_g^2} + 20 \lg \sqrt{1 + 0.04\omega_g^2} + 20 \lg \sqrt{1 + 0.01\omega_g^2} = 11.76 \text{ dB}$$

$$\text{或 } |G_k(j\omega_g)| = 10^{-\frac{g_{\infty}}{20}} = 0.26$$

由图 A5-12 可得 $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$, 于是可求得系统的相角裕量为

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan 1 - \arctan 0.2 - \arctan 0.1 = 27.98^\circ$$

该系统为最小相位的, 而 $\gamma > 0$ 和 $g_{\infty} > 0$, 故闭环系统是稳定的。

(2) 系统开环增益的临界值 求解的方法有些列两种:

(a) 令开环频率特性通过临界点来求解。由式 5-2 可得当 $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$ 时, $G_k(j\omega)$ 曲线与负实轴交点的横坐标为

$$G_k(j\omega_g) = \frac{K\omega(0.02\omega^2 - 1.3)}{\omega(1 + \omega^2)(1 + 0.04\omega^2)(1 + 0.01\omega^2)} \Big|_{\omega=1.77} = -0.26K$$

令 $G_k(j\omega_g) = -0.26K = -1$, 则可求得系统的临界开环增益为 $K_{cr} = 1/0.26 = 3.85$

相应的临界开环根轨迹增益为 $K_{p,cr} = K_{cr}/0.02 = 192.5$ 。

(b) 直接在开环伯德图上求解。将开环对数渐近幅频曲线垂直上移 11.76dB (如图 5-12 的虚线所示), 使得上移后系统 $\omega_c = \omega_g$, $\gamma = 0$, $g_{\infty} = 0$, 从而系统处于临界稳定的状态。而原系统的开环增益等于 1, 故可求得系统的临界开环增益 K_{cr} 为

$$20 \lg K_{cr} = 11.76 \text{ dB} \quad \text{即} \quad K_{cr} = 10^{11.76/20} = 3.87$$

所得结果与解法(a)的结果是一致的。

5-11c 图 5-13 所示的某宇宙飞船控制系统的简化结构图。为使该系统具有相

角裕量 $\gamma = 50^\circ$, 系统的开环增益应调

整为何值, 并求这时的增益裕量。

解 由结构图可得, 系统的开环频率特性为



图 5-13

$$G(j\omega) = K_c \frac{(s+2)}{s^2} \Big|_{s=j\omega} = K \frac{s/2+1}{s^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{K\sqrt{1+0.25\omega^2}}{\omega^2} e^{j\varphi(\omega)}$$

式中： $K = 2K_c$ 为系统的开环增益； $\varphi(\omega) = -180^\circ + \arctan \omega/2$ 为系统的开环相频特性。

为使 $\gamma = 50^\circ$ ，这意味着

$$\varphi(\omega_c) = -180^\circ + \arctan \omega_c/2 = \gamma - 180^\circ = -130^\circ \text{ 即 } \arctan \omega_c/2 = 50^\circ$$

于是可求得

$$\omega_c = 2 \tan 50^\circ = 2.38 \text{ rad/s}$$

当 $\omega = \omega_c$ 时 $G(\omega_c)$ 的幅值等于 1，即

$$K\sqrt{1+0.25\omega_c^2} / \omega_c^2 = 1$$

故可求得系统的开环增益为

$$K = \omega_c^2 / \sqrt{1+0.25\omega_c^2} = 2.38^2 / \sqrt{1+0.25 \times 2.38^2} = 3.64$$

相应的 $K_c = K/2 = 1.82$ 。由相频特性可知：当 ω 为正的任何值时 $\varphi(\omega) > -180^\circ$ ，即相频曲线与 -180° 线不相交。故系统的增益裕量为 $\infty \text{ dB}$ 。

5-12c 图 5-14 所示为一个宇宙飞船控制系统的方块图。为了使相位裕量等于 50° ，试确定增益 K 。在这种情况下，增益裕量是多大？

解 因为

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+2)}{(j\omega)^2}$$

我们得到

$$\angle G(j\omega) = \angle j\omega + 2 - 2\angle j\omega = \tan^{-1} \frac{\omega}{2} - 180^\circ$$

要求相位裕量为 50° ，意味着 $\angle G(j\omega_c)$ 必须等于 -130° ，其中 ω_c 为增益交界频率，

$$\text{即 } \angle G(j\omega_c) = -130^\circ$$

因此，设

$$\tan^{-1} \frac{\omega_c}{2} = 50^\circ$$

由此得到

$$\omega_c = 2.3835 \text{ 弧度/秒}$$

因为相位曲线永远不和 -180° 线相交，所以增益裕量为 $+\infty$ 分贝。当 $\omega = 2.3835$ 时，

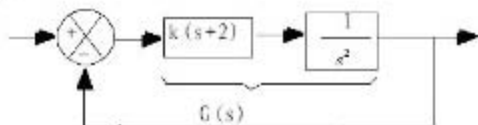


图 5-14

$G(j\omega)$ 的幅值必须等于 0 分贝, 所以

$$\left| \frac{K(j\omega+2)}{(j\omega)^2} \right|_{\omega=2.3835} = 1$$

由此得到

$$K = \frac{2.3835^2}{\sqrt{2^2 + 2.3835^2}} = 1.8259$$

这个 K 值将产生相位裕量 50° 。

5-13d 已知闭环系统如图 5-15 所示。试画出该系统中开环传递函数 $G(s)$ 的伯德图, 并确定系统的相位裕量和增益裕量。

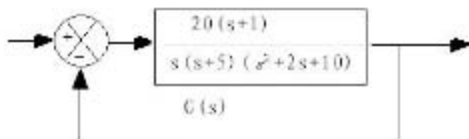


图 5-15

解: 注意到

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{20(j\omega+1)}{j\omega(j\omega+5)[(j\omega)^2+2j\omega+10]} \\ &= \frac{0.4(j\omega+1)}{j\omega(0.2j\omega+1)[(\frac{j\omega}{\sqrt{10}})^2+\frac{2}{10}j\omega+1]} \end{aligned}$$

分母中的二阶项具有转角频率 $\sqrt{10}$ 弧度/秒, 阻尼比 ξ 为 0.3162, 即

$$\omega_n = \sqrt{10}, \quad \xi = 0.3162$$

$G(j\omega)$ 的伯德图如图 5-16 所示。由该图求得相位裕量为 100° , 增益裕量为 +13.3 分贝。

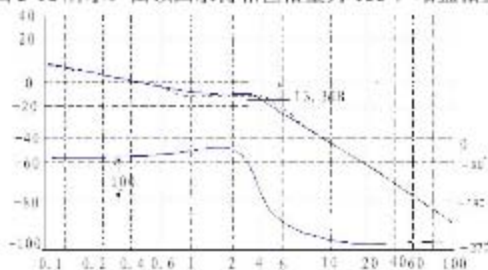


图 5-16

5-14d 系统的开环传递函数如下

$$(1) \quad G(s)H(s) = \frac{8(s+1)}{s^2(s+15)(s^2+6s+10)}; \quad (2) \quad G(s)H(s) = \frac{7.5(0.2s+1)(s+1)}{s(s^2+16s+100)}$$

用 MATLAB 函数绘制系统的 Bode 图, Nyquist 图及 Nichols 图。

$$\text{解} \quad (1) \quad G(s)H(s) = \frac{8(s+1)}{s^2(s+15)(s^2+6s+10)} = \frac{8s+8}{s^5+21s^4+100s^3+150s^2}$$

```
num=[8 8];den=[1 21 100 150 0 0]
[mag,phase,w]=bode(num,den)
[re,Im,w]=nyquist(num,den)
[mag,phase,w]=Nichols(num,den)
margin(num,den)
```

系统的 Bode 图, Nyquist 图和 Nichols 图分别如图 5-17、5-18、5-19 所示。

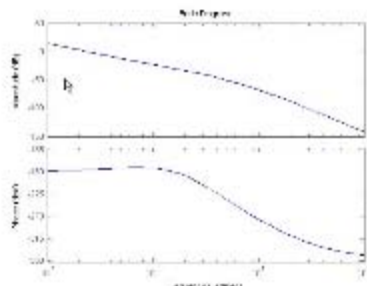


图 5-17

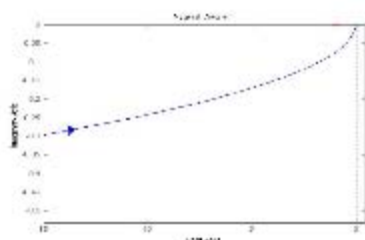


图 5-18

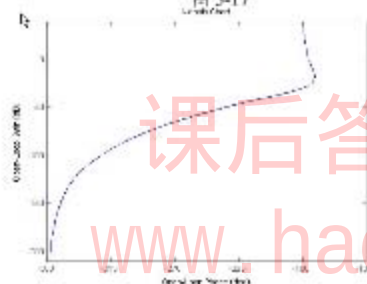


图 5-19

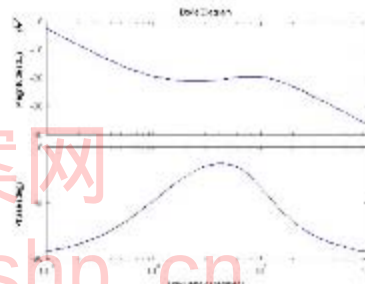


图 5-20

$$(2) G(s)H(s) = \frac{7.5(0.2s+1)(s+1)}{s(s^2+16s+100)} = \frac{1.5s^2+9s+7.5}{s^3+16s^2+100s}$$

```
num=[1.5 9 7.5];den=[1 16 100 0]
bode(num,den)
nyquist(num,den)
Nichols(num,den)
margin(num,den)
```

系统的 Bode 图, Nyquist 图和 Nichols 图分别如图 5-20、5-21、5-22 所示。

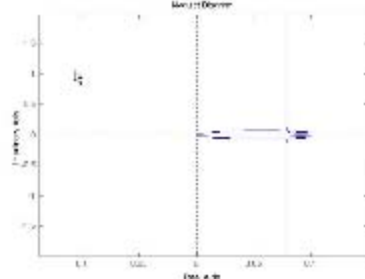


图 5-21

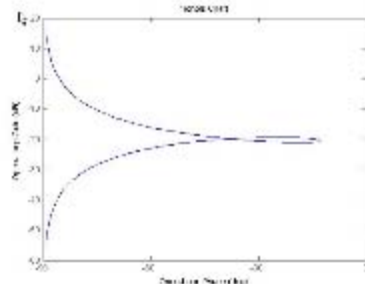


图 5-22

第六章 线性系统的校正方法

6-1c 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}$, 设计一校正装置, 使静态速度误差系数 $K_v=80$, 并使闭环主导极点位于 $s=-2 \pm j23$ 。

解 (1) 作 $G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+8)}$ 的根轨迹图如图 6-1 所示。

$\therefore -2 \pm j23$ 在根轨迹右边

$\therefore$ 要加超前校正

(2) 确定串联超前校正装置的参数

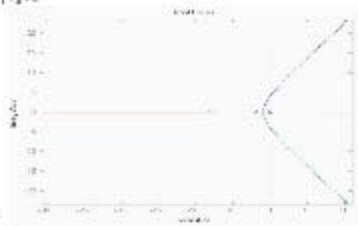


图 6-1

$$\arg G(s) \big|_{s=-2 \pm j23} = -\arg s - \arg(s+2) - \arg(s+8)$$

$$= -95^\circ - 90^\circ - 75.4^\circ = -260.4^\circ$$

要使校正后根轨迹经过 S_1 点, 加入超前角 φ

$$\varphi = -180 + 260.4 = 79.6^\circ > 60^\circ$$

$\therefore$ 要采用二级串联超前网络, 每级提供 $\frac{\varphi}{2} = 39.8^\circ$ 超前角

用作图法确定 $Z_c = -2, P_c = 23$, 如图 6-2 所示。

$$\therefore G_{c1}(s) = \frac{(s+2)^2}{(s+23)^2}$$

(3) 静态性能分析

求出根轨迹在 S_1 处增益

$$K^* = \frac{\prod_{i=1}^n |S - P_i|}{\prod_{j=1}^m |S - Z_j|} \bigg|_{s=S_1} = 25247.068$$

$$K_O = K^* \frac{\prod (-Z_j)}{\prod (-P_i)} = 11.93 < 80$$

$\therefore$ 要增加串联滞后校正。

(5) 确定串联滞后校正装置参数

$\therefore K_v=80 \quad \therefore$ 要提高 7 倍

既增加的串联滞后装置的零点与极点之比 $\frac{Z_i}{P_i} = 7$ 。

为了要减小对主导极点的影响, 使滞后装置尽量靠近原点, 取 $P_i = -0.01, Z_i = 0.07$

$$\therefore G_{c2}(s) = \frac{s+0.07}{s+0.01}$$

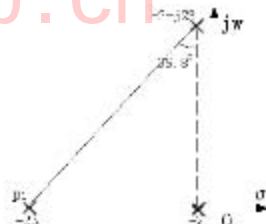


图 6-2

由于 P_i 及 Z_i 在 S_1 点引入滞后角 $<1^\circ$, $\therefore$ 可认为对主导极点的位置和增益没影响。校正后系统开环传递函数:

$$\begin{aligned} G_{c1}(s)G_{c2}(s)G_o(s) &= \frac{25247(s+2)^2(s+0.07)}{s(s+2)(s+8)(s+23)^2(s+0.01)} \\ &= \frac{83.5(0.5s+1)(14.3s+1)}{s(0.125s+1)(\frac{1}{23}s+1)(100s+1)} \end{aligned}$$

(6) 校验

$$K_0 = K_v = 83.5 > 80$$

系统除了一对主导极点 $-2 \pm 23j$ 还有三个极点 -1.8 、 -0.07 、 -48.2 ; $\therefore -0.07$ 与闭环零点 0 及 -1.8 与闭环零点 -2 形成二对偶极子, 另一极点 -48.2 可以忽略, $\therefore -2 \pm 23j$ 是系统主导极点。

6-2c 已知一单位反馈系统如图 6-3 所示。(1) 绘制系统的根轨迹; (2) 确定闭环主导极点的阻尼比 $\xi = 0.5$ 时的 K 值; (3) 求闭环极点。

解: 开环极点为 $s_1 = 0, s_{2,3} = -2 \pm j1$ 。

据此, 画出以 K 为变量的根轨迹, 如图 6-4 所示。在 S 平面上, 阻尼比

$\xi = 0.5$ 相当于同负实轴成 60° 角的直

线。此直线同两条根轨迹分支的交点,

就是所求的一对复数闭环极点 $s_{1,2} = -0.63 \pm j1.09$ 。

由根轨迹的幅值条件, 求得相应的 K 值为

$$K = |s(s+2+j1)(s+2-j1)|_{s=-0.63 \pm j1.09} = 4.32$$

因为本例符合 $n-m \geq 2$, 所以系统第三个闭环极点可用根轨迹的根与系数的性质求得。闭环系统的特征方程为

$$s^3 + 4s^2 + 5s + 4.32 = 0$$

则有

$$s_1 + s_2 + s_3 = -4$$

即

$$-0.63 + j1.09 - 0.63 - j1.09 + s_3 = -4$$

$$s_3 = -2.74$$

6-3c 系统如图 6-5 所示, 其中 R_1 , R_2 和 C 组成校正网络。要求校正后系统的稳态误差为 $e_{ss} = 0.01$, 相角裕度 $\gamma \geq 60^\circ$, 试确定 K , R_1 , R_2 和 C 的参数。

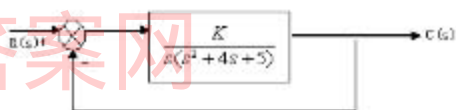


图 6-3

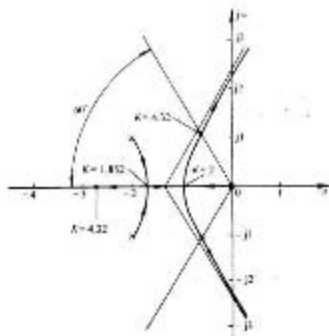


图 6-4

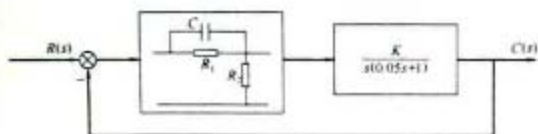


图 6-5

解：(1) 根据稳态误差要求确定系统的开环增益 K

$$\because e_{ss} = 0.01 \therefore k_v \geq 100$$

$$\therefore \text{取 } k_s = k_v = 100$$

作 $G_0(s) = \frac{100}{s(0.05s+1)}$ 的 Bode 图如图 6-6 所示。

(2) 求剪切频率 w_c

a) 从 Bode 图上读取 $w_c = 44$

b) 用计算法求

$$L_1 = 20 \lg \frac{k}{w} \quad K_0 = 100$$

$$L_2 = 20 \lg \frac{k}{w^2} \quad \text{当 } w = w_c \text{ 求得 } k_1 = w_c^2$$

在转折频率 $w_1 = 20$ 处

$$20 \lg \frac{100}{w_1} = \frac{w_c^2}{w_1^2} \therefore w_c = \sqrt{\frac{100 \times 20^2}{20}} = 44.7$$

计算相角裕度 γ_0

$$\gamma_0 = 180^\circ + (-90^\circ - 0.05 \times w_c) = 25^\circ$$

确定引入超前角：

$$\therefore \phi_m = \gamma - \gamma_0 + \phi = 60^\circ - 25^\circ + 10^\circ = 45^\circ$$

$$\text{求超前网络 } \alpha = \frac{1 + \sin \phi_m}{1 - \sin \phi_m} = 5.8$$

为了使 w_m 与校正后的 w'_c 重合， $\therefore 10 \lg \alpha = 7.6 \text{ dB}$ ，在原系统为 -7.6 dB 求得

$$w_m = w'_c = 68 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{1}{w_c \sqrt{2}} = \frac{1}{68 \sqrt{5.8}} = \frac{1}{164} = 0.006$$

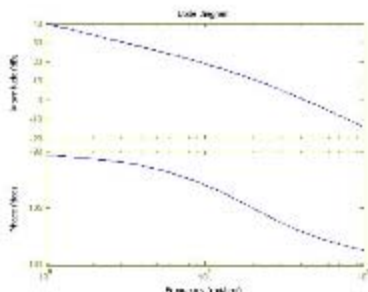
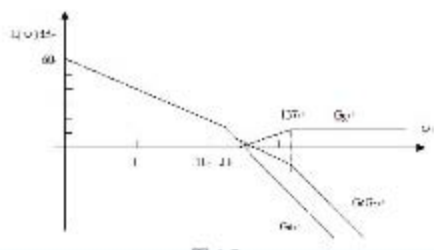


图 6-6



$$\alpha T = 0.0354$$

$$\therefore G_c(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} = \frac{0.0354s + 1}{5.8(0.006s + 1)}$$

$$\therefore T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C; \quad \text{取 } C_1 = 1\mu f \quad R_1 = 35.4K\Omega \quad \text{取 } R_1 \text{ 为 } 36K\Omega$$

$$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R}; \quad R_2 = \frac{R_1}{\alpha - 1} = \frac{36}{4.8} = 7.5K\Omega \quad \alpha T = R_1 C:$$

为了补偿超前网络带来增益衰减, 开环增益为 $K=2$ $K_0 = 5.8 \times 100 = 580$

校验: 作校正后系统 Bode 图如图 6-7 所示。

$$G_v(s)G_n(s) = \frac{5.8 \times 100(0.0354s + 1)}{5.8s(0.05s)(0.006s + 1)}$$

$$\text{求得 } \omega_c^* = 68 \text{ rad/s} \quad \psi(\omega_c^*) = -118.80^\circ$$

$$\text{计算校正后系统相角裕量 } \gamma = 180^\circ + \psi(\omega_c^*) = 180^\circ - 118.8^\circ = 61.2^\circ > 60^\circ$$

6.4c 设单位反馈系统原有部分的开环传递函数 $G(s) = \frac{20}{s(2s+1)(0.2s+1)}$, 试设计串联无源

校正装置, 使系统满足 $K_g \geq 15 \text{ dB}$, $\gamma \geq 40^\circ$, $\omega_c \geq 1.5 \text{ s}^{-1}$ 。

解: 方法一: (1) 绘制系统原有部分的对数幅频特性图, 并计算系统的有关性能指标。
系统校正前的开环频率特性的对数幅频特性图如图 6-8 中虚线所示。

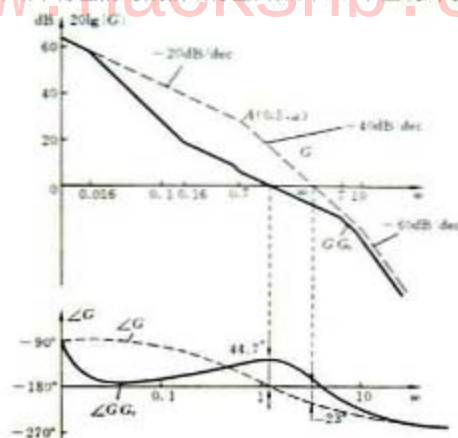


图 6-8

设 A 点的坐标为 $(0.5, a)$, 剪切频率为 ω_c , 则有 $\frac{a}{\lg 20 - \lg 0.5} = -20 \text{ dB}$, 且

$$\frac{a}{\lg \omega_c - \lg 0.5} = -40 \text{ dB}.$$

解得

$$\omega_c = 3.16$$

现求未校正系统的相位裕度 γ 。

因为其开环频率特性为 $G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(2j\omega+1)(0.2j\omega+1)}$

相频特性为 $\angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan 2\omega - \arctan 0.2\omega$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan(2 \times 3.16) - \arctan(0.2 \times 3.16) = -23.3^\circ$$

因此未校正的系统不稳定。

(2) 现采用相位超前校正, 但若单纯采用相位超前校正, 则低频段衰减太大; 若附加增益 K_1 , 则剪切频率右移, ω_c 仍可能位于相位交接频率 ω_g 的右边, 系统仍不稳定。因此, 在此基础上需再采用滞后校正, 以利于 ω_c 左移。

选用校正前的相位交接频率 $\omega_g = 1.6 \text{ s}^{-1}$ 为新系统的剪切频率, 取相位裕度 $\gamma = 40^\circ + 10^\circ = 50^\circ$ 。

选滞后部分的零点转折频率远低于 $\omega_g = 1.6 \text{ s}^{-1}$,

$$\text{即 } \omega_{T_1} = \frac{1.6}{10} = 0.16 \text{ s}^{-1} \quad T_2 = \frac{1}{0.16} = 6.2 \text{ s}$$

选 $\beta = 10$, 则极点转折频率为 $\omega_{T_2} = \frac{1}{\beta T_2} = 0.016 \text{ s}^{-1}$ 。因此, 滞后部分的频率特性为

$$\frac{1+jT_2\omega}{1+j\beta T_2\omega} = \frac{1+j6.2\omega}{1+j62\omega}$$

当 $\omega = 1.6 \text{ s}^{-1}$ 时, 其幅值为 -12 dB 。因为这点正是校正后的剪切频率, 因此校正环节在 $\omega = 1.6 \text{ s}^{-1}$ 处应产生 -12 dB 的增益。过点 $(1.6 \text{ s}^{-1}, -12 \text{ dB})$ 作斜率为 -20 dB/dec 的斜线, 它和零分贝线及 -20 dB 线的交点就是超前部分的极点和零点转折频率。因此, 超前部分的零点转折频率为 $\omega_{T_1} = 0.7 \text{ s}^{-1}$, $T_1 = \frac{1}{\omega_{T_1}} = \frac{1}{0.7} \text{ s}$, 极点转折频率为 7 s^{-1} , 因此, 超前部分的频率特性为

$$\frac{1+jT_1\omega}{1+jT_1\omega/\beta} = \frac{1+j1.43\omega}{1+j0.143\omega}$$

故, 校正环节的传递函数为 $\frac{6.2s+1}{62s+1} \approx \frac{1.43s+1}{0.143s+1}$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 校验校正后系统传递函数为 } G_K(s) &= \frac{20}{s(2s+1)(0.2s+1)} \cdot \frac{(6.2s+1)}{(62s+1)} \cdot \frac{(1.43s+1)}{(0.143s+1)} \\ &= \frac{20(6.2s+1)(1.43s+1)}{s(2s+1)(62s+1)(0.2s+1)(0.143s+1)} \end{aligned}$$

可知系统的相位裕度为

$$\gamma = 44.7^\circ \quad (\omega_c = 1.6 \text{ s}^{-1})$$

方法二: 应用绘制期望频率特性的方法设计串联滞后—超前校正环节。

- (1) 系统校正前的开环频率特性的对数幅频特性图如图 6-9 中是实线所示。
- (2) 绘制系统期望频率特性的对数幅频特性。

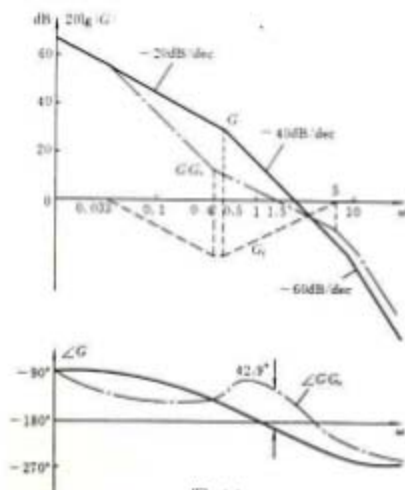


图 6-9

根据给定的要求, 选期望特性的剪切频率 $\omega_c = 1.5 \text{ s}^{-1}$, 过 ω_c 作斜率为 -20dB/dec 的直线作为期望频率特性的中频段。

为使校正后系统的开环增益不小于 20dB , 期望频率特性的低频段应与校正系统的一致。因此在期望频率特性的中频段与低频段之间应有一条斜率为 -40dB/dec 的直线为使系统有足够的相位裕度, 应使转折频率 ω_2 远离 ω_c , 现取 $\omega_2 = \omega_c/3.75 = 0.4 \text{ s}^{-1}$ 。

低频段的另一转折频率 ω_1 可通过计算求得。

$$\omega_1 = 0.033 \text{ s}^{-1}$$

为避免校正装置过于复杂, 期望特性的高频段应与未校正系统的特性一致, 同时考虑到保证系统足够的相位裕度, 中频段 -20dB/dec 直线应保持一定的长度, 故选 $\omega_4 = 5 \text{ s}^{-1}$ 。于是得到期望的系统的频率特性如图 6-9 中的点划线所示。

(3) 确定串联校正装置的传递函数。在图 6-9 中, 求出校正环节的对数幅频特性曲线如图中虚线所示。据此得到校正装置的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{(2.5s+1)(2s+1)}{(30.3s+1)(0.2s+1)}$$

(4) 校验校正后系统的性能。

$$\begin{aligned} \text{因为系统的开环传递函数为 } G_K(s) &= \frac{20}{s(2s+1)(0.2s+1)} \cdot \frac{(2.5s+1)(2s+1)}{(30.3s+1)(0.2s+1)} \\ &= \frac{20(2.5s+1)(2s+1)}{s(2s+1)(30.3s+1)(0.2s+1)} \end{aligned}$$

可知系统的相位裕度为 $\gamma = 42.9^\circ$ ($\omega_c = 1.5 \text{ s}^{-1}$)

因此, 系统的性能全部满足要求。

6-5c 设系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)}$, 试用比例-微分装置进行校正, 使系统

$K \geq 200$, $\tau \geq 50$, 并确定校正装置的传递函数。

解 取 $K=K_c=200$, 作校正前的系统对数频率特性图如图 6-10 中虚线所示。此时, 其剪切频率为 $\omega_c=44.7$, 相位裕度为 $\gamma=12.6^\circ$ 。显然, 不满足系统的要求, 现取串联 PD 校正装置

$G_c=1+\tau s$ 。其中, τ 的选取应使 $1/\tau$ 接近 ω_c ,

以提高其相位裕度。现取 $\tau=1/4 \text{ s}^{-1}$, 则已校正系统的开环频率特征为

$$G(j\omega) = \frac{200(1+j\omega/40)}{j\omega(j0.1\omega+1)}$$

由 $|G(j\omega)|=1$, 求得 $\omega'_c=50 \text{ s}^{-1}$, 算得

相位裕度 $\gamma = 90^\circ + \arctan \frac{\omega'_c}{40} - \arctan \frac{\omega'_c}{10} = 62.6^\circ$ 满足要求。校正后系统的对数频率特征如图 6-10 中实线所示。

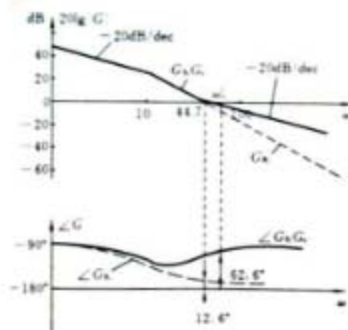


图 6-10

6-6c 设一单位反馈控制系统如图 6-11 所示, 试设计一超前校正装置, 使校正后系统的相位裕量为 50° 和增益裕量不小于 10dB , 并要求闭环系统的带宽为 $1\sim 2 \text{ s}^{-1}$ 。假设校正装置的传递函数为 $G_c(s) = K_c \alpha \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}$ 。

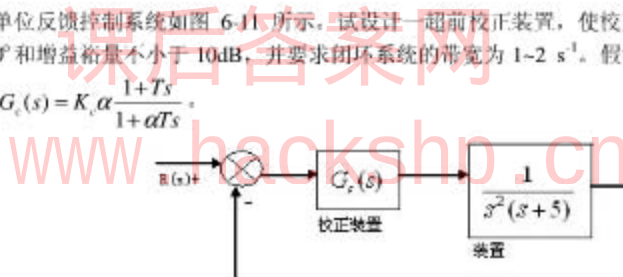


图 6-11 反馈控制系统的框图

解 (1) 作出未校正系统的伯德图, 如图 6-12 所示。基于闭环系统的带宽近似等于剪切频率 ω_c , 故选取 $\omega_c=1 \text{ s}^{-1}$ 。由图可见, 在 $\omega=1$ 处, $\angle G(j\omega) = -191.31^\circ$, 因此超前校正装置在该频率处需提供 $\phi_m = 50^\circ + 191.31^\circ = 61.31^\circ$ 的超前角。

(2) 计算 α 值。根据公式 $\alpha = \frac{1 - \sin \phi_m}{1 + \sin \phi_m}$

求得 $\alpha=0.06541$ 。产生最大超前角 ϕ_m 的频率为

$$\omega_i = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{0.06541T}} = \frac{3.91}{T} = 1$$

(3) 计算超前校正装置的两个转折频率

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \frac{1}{3.910} = 0.2558 \\ \frac{1}{\alpha T} &= \frac{0.2558}{0.06541} = 3.910 \end{aligned}$$

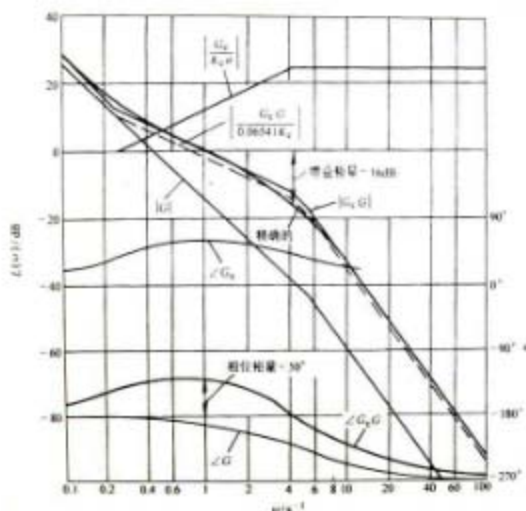


图 6-12

(4) 作出校正后系统的伯德图

校正后系统的开环频率特征

$$G_c(j\omega)G(j\omega) = 0.06541K_c \frac{0.2}{(j\omega)^2(1+0.2j\omega)} \frac{1+3.910j\omega}{1+0.2558j\omega}$$

或写作

$$\frac{G_c(j\omega)G(j\omega)}{0.06541K_c} = \frac{0.2}{(j\omega)^2(1+0.2j\omega)} \frac{1+3.910j\omega}{1+0.2558j\omega}$$

$\frac{G_c(j\omega)G(j\omega)}{0.06541K_c}$ 的伯德图如图 6-12 中的虚线所示。通过简单的计算，求出 $\omega=1$ 处的幅频值为

-2.306dB。为使开环对数幅频特征在 $\omega=1$ 处为 0dB，则要求

$$20\lg 0.06541K_c = 2.306$$

即 $K_c=19.4$ 。由校正后系统的幅频和相频曲线可知，相位裕量为 50° ，增益裕量为 16dB，均已达到设计的要求。

6-7c 图 6-13 为一位置随动系统。该系统的一对闭环主导极点为 $s=-3.60 \pm j4.80$ ，相应的阻尼比 $\zeta=0.6$ ，静态速度误差系数 $K_v=4.1 \text{ s}^{-1}$ 。试设计一校正装置，使校正后系统的 $K_v=41 \text{ s}^{-1}$ ，闭环主导极点的阻尼比 ζ 仍为 0.6，允许校正后闭环主导极点的无阻尼自然频率 ω_n 比较正前有微小的变化。

解 未校正系统的闭环特征方程式为

$$s^3 + 30s^2 + 200s + 820 = 0$$

它的三个根为 $s_{1,2} = -3.60 \pm j4.80$ ，

$s_3 = -22.8$ 。主导极点对应的无阻尼自然

频率 $\omega_n = \sqrt{3.60^2 + 4.80^2} = 6 \text{ s}^{-1}$ 。考虑到静态速度误差系数 K_v 由 4.1 提高到 41，且使校正后系统的闭环主导极点不发生明显的变化，故可采用滞后校正。

滞后校正装置的零、极点必须紧靠坐标原点，令

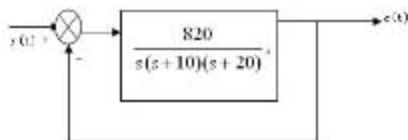


图 6-13 随动系统方框图

$$G_c(s) = 10 \frac{Ts+1}{10Ts+1}$$

若取 $T=4$ ，则

$$G_c(s) = 10 \frac{4s+1}{40s+1} = \frac{s+0.25}{s+0.025}$$

$G_c(s)$ 在 $s=-3.60+j4.80$ 处产生 -1.77° 的迟后角，这是允许的。

校正后系统的开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{s+0.25}{s+0.025} \frac{820}{s(s+10)(s+20)} = \frac{820(s+0.25)}{s(s+0.025)(s+10)(s+20)}$$

由上式求得校正后系统的速度误差系数为

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s)G(s) = 41 s^{-1}$$

校正后系统的闭环特征方程为

$$s(s+0.025)(s+10)(s+20) + 820(s+0.25) = 0$$

即

$$s^4 + 30.025s^3 + 200.75s^2 + 820s + 205 = 0$$

它的一对主导极点可由根轨迹与 $\zeta=0.6$ 直线的交点求得

$$s_{1,2} = -3.4868 \pm j4.6697$$

另外二个实数极点 $s_3 = -0.2648$ ， $s_4 = -22.787$ 。由于极点 s_3 十分靠近闭环零点，因而相应瞬态分量的幅值很小；而 $s_4 = -22.787$ 远离 s 平面的虚轴，故它对系统瞬态响应的影响亦很小。由此可知， $s_{1,2} = -3.4868 \pm j4.6697$ 确是系统的一对主导极点。相应主导极点的无阻尼自然频率为 $\omega_n = \sqrt{3.4868^2 + 4.6697^2} = 5.828 < 6$ ，校正后系统的无阻尼自然频率比未校正系统只减少了 3%，这是完全允许的。

6-8c 已知一单位反馈控制系统如图 6-14 所示。试设计一串联校正装置 $G_c(s)$ ，使校正后的系统同时满足下列的性能要求：(1) 跟踪输入 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ 时的稳态误差为 0.1；(2) 相位裕量 $\gamma = 45^\circ$ 。

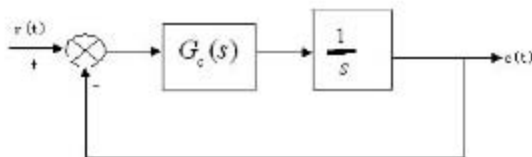


图 6-14 单位反馈控制系统

解 由于 II 型系统才能跟踪等加速度信号，为此假设校正装置为 PI 调节器，其传递函数为

$$G_c(s) = \frac{K(1+\tau s)}{s}$$

校正后系统的开环传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{K(1+\tau s)}{s^2}$$

根据对稳态误差的要求，可知 $K_v = K = 10$ 。

由开环传递函数得

$$\phi(\omega_c) = -180^\circ + \arctan \tau \omega_c = -135^\circ$$

即

$$\arctan \tau \omega_c = 45^\circ, \tau \omega_c = 1$$

而

$$\frac{10\sqrt{1+(\tau\omega_c)^2}}{\omega_c^2} = \frac{10\sqrt{2}}{\omega_c^2} = 1$$

解之, 求得 $\omega_c = 3.76s^{-1}$, $\tau = 1/3.76 = 0.266s$ 。所求 PI 调节器的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{10(1+0.266s)}{s}$$

6-9c 已知一控制系统如图 6-15 所示, 其中 $G_c(s)$ 为 PID 调节器, 它的传递函数为要求校正后系统的闭环极点为 $-10 \pm j10$ 和 -100 , 试确定 PID 调节器的参数 K_p 、 K_i 和 K_d 。

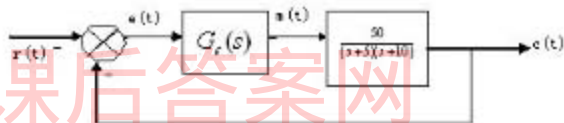


图 6-15 控制系统

解: 希望的闭环特征多项式为

$$F^*(s) = (s+10-j10)(s+10+j10)(s+100)$$

$$= s^3 + 120s^2 + 2200s + 2000$$

校正后系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s(s+5)(s+10) + 50(K_d s^2 + K_p s + K_i)}$$

相应的闭环特征多项式为

$$F(s) = s(s+5)(s+10) + 50(K_d s^2 + K_p s + K_i)$$

$$= s^3 + (15+50K_d)s^2 + 50(1+K_p)s + 50K_i$$

令 $F^*(s) = F(s)$, 则得

$$15+50K_d = 120$$

$$50(1+K_p) = 2200$$

$$50K_i = 2000$$

解方程组得, $K_i = 400$, $K_p = 43$, $K_d = 2.1$ 。由此可见微分系统 K_d 远小于 K_p 和 K_i , 这种情

况在实际应用中经常会碰到，尤其是在过程控制系统中。因此，在许多场合用 PI 调节器就能满足系统性能的要求。

6-10c 设复合校正随动系统如图 6-16 所示。试选择前馈补偿方案和参数，使复合控制系统等效为 II 型或 III 型系统。

解 前馈补偿方案及其参数选择，可按如下几步讨论：

1) 选择 $G_r(s) = \lambda_1 s$ 。在图 6-16 中，

$$\text{令 } G_1(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{K_2}{T_2 s + 1}$$

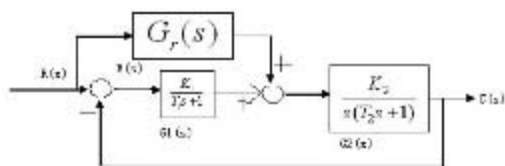


图 6-16 复合校正随动系统

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{K_1 K_2}{s[T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1]}$$

易知：未补偿系统为 I 型系统，且 $a_3 = T_1 T_2, a_2 = T_1 + T_2, a_1 = 1$ 。等效系统的误差传递函数

$$\phi_e(s) = \frac{1 - G_r(s)G_2(s)}{1 + G_r(s)G_2(s)} = \frac{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2 - \lambda_1 K_2 T_1)s^2 + (1 - \lambda_1 K_2)s}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_1 K_2}$$

显然，若选

$$\lambda_1 = \frac{1}{K_2}$$

则复合控制系统等效为 II 型系统，在斜坡函数输入时的稳态误差为零。实质上，取 $\lambda_1 = \frac{1}{K_2}$ ，只是一种部分补偿。

2) 选择 $G_r(s) = \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s$ 。不难求得等效系统的闭环传递函数

$$\phi_e(s) = \frac{K_1 K_2 + K_2 (\lambda_2 s^2 + \lambda_1 s)(T_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_1 K_2}$$

以及等效误差传递函数

$$\phi_e(s) = \frac{(T_1 T_2 - K_2 T_1 \lambda_2)s^3 + (T_1 + T_2 - K_2 T_1 \lambda_1 - K_2 \lambda_2)s^2 + (1 - K_2 \lambda_1)s}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K_1 K_2}$$

若选

$$\lambda_1 = \frac{1}{K_2}, \quad \lambda_2 = \frac{T_1}{K_2}$$

可使 $\phi_e(s) \equiv 0$ 。此时，由于满足误差全补偿条件 $G_r(s) = 1/G_2(s)$ ，故复合校正系统对任何形式的输入信号均不产生误差。但是 $G_r(s) = \frac{s(T_2 s + 1)}{K_2}$ 的形式是难以准确实现的，只能在对系统性能起主要影响的频段范围内近似实现。

3) 选择 $G_r(s) = \frac{\lambda_2 s^2 + \lambda_1 s}{T s + 1}$ 。不难证明，当取 $\lambda_1 = \frac{1}{K_2}$ ， $\lambda_2 = \frac{T_2 + T}{K_2}$ 复合校正系统等效为 III

型系统, 在加速度函数输入作用下, 系统的稳态误差为零。在物理装置上, 可考虑采用测速发电机与无源网络的组合线路近似实现上述补偿方案。

6-11c 某单位负反馈系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{1}{(s/3.6+1)(0.01s+1)}$, 要使系统的速度误差系数 $K_v=10$, 相位裕量 $\gamma \geq 25^\circ$ 。试设计一个最简单形式的校正装置 (其传递函数用 $G_c(s)$ 表示) 以满足性能指标 (作对数幅频特性曲线, 用渐近线表示)。

解
$$G(s) = \frac{1}{(s/3.6+1)(s/100+1)}$$

要求 $K_v=10$, 在原系统中串联校正装置

$$G_c(s) = \frac{10}{s}$$

得到校正后系统截止频率

$$\omega_c = 5.5$$

得到相位裕量

$$\gamma = 30^\circ$$

满足题目要求。

6-12c 在图 6-17 所示系统中, 当 $K=10$, $T=0.1$ 时, 截止频率 $\omega_c=5$ 。若要求 ω_c 不变, 问如何选择 K , T 值才能使系统相位裕量提高 45° ?

解 当 $K=10, T=0.1$ 时, 系统截止频率 $\omega_c=5$, 可知 $G_c(s) = \frac{10(0.1s+1)}{s+1}$

因而

$$\varphi_{G_c}(j\omega_c) = \arctan(0.1\omega_c) - \arctan \omega_c$$

$$L_{G_c}(j\omega_c) = 20 \lg \left| \frac{10(0.5j+1)}{1+5j} \right|$$

若要重新选择 K , T 值, 则使 γ 提高 45° 。

设
$$G_{c1}(s) = \frac{K_1(T_1s+1)}{s+1}$$

当 $\omega_c=5$ 时

$$\varphi_{G_{c1}}(j\omega_c) = \arctan(T_1\omega_c) - \arctan \omega_c$$

$$L_{G_{c1}}(j\omega_c) = 20 \lg \left| \frac{K_1(jT_1\omega_c+1)}{(j\omega_c+1)} \right|$$

由
$$\varphi_{G_{c1}}(j\omega_c) = \arctan(0.1\omega_c) + 45^\circ$$

可得
$$\arctan(T_1\omega_c) = \arctan(0.1\omega_c) + 45^\circ$$

即
$$T_1=0.6$$

另外, 在增大 γ 的同时, 要保持 $G_c(s)|_{s=j\omega_c}$ 的幅值不变, 才能不改变系统截止频率, 因此

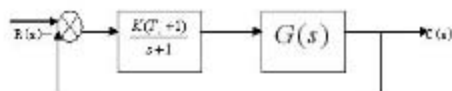


图 6-17 系统结构图

$$L_{\omega_1}(j\omega_1) = L_{\omega_2}(j\omega_2)$$

$$20 \lg \left| \frac{10(0.5j+1)}{1+5j} \right| = 20 \lg \left| \frac{K_1(3j+1)}{(1+5j)} \right|$$

从而解出 $K_1=3.54$

6-13c 设复合控制系统如图 6-18(a)所示。图中, $G_n(s)$ 为顺馈装置传递函数; $G_c(s)=K_1s$, 为测速发电机及分压器的传递函数; $G_1(s)=K_1$; $G_2(s)=1/s^2$ 。试确定 K_1 、 $G_n(s)$ 及 $G_c(s)$, 使系统输出量完全不受扰动 $n(t)$ 的影响, 且单位阶跃响应超调量 $\sigma\% = 25\%$, 峰值时间 $t_p = 2(s)$ 。

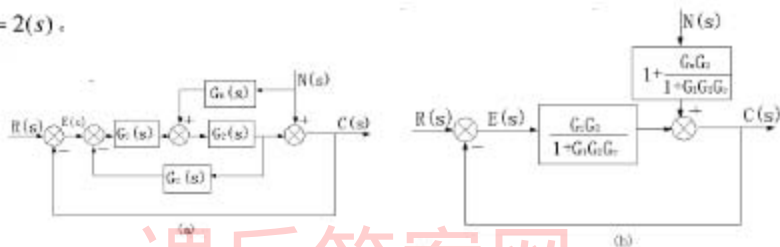


图 6-18 复合控制系统

解 将图 6-18(a)等效变换为图 6-18(b)。由图 6-18(b)可见, 为使系统输出完全不受扰动影响, 应使

$$1 + \frac{G_n G_2}{1 + G_1 G_2 G_c} = 0$$

于是得

$$G_n = -\frac{1 + G_1 G_2 G_c}{G_2} = -s(s + K_1 K_1)$$

系统对输入的闭环传递函数为:

$$G(s) = -\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_c + G_c} = \frac{K_1}{s(s + K_1 K_1)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

按题意要求

$$\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.25 \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 2$$

解得

$$\zeta = \frac{\ln 4}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 4)^2}} = 0.404 \quad \omega_n = \frac{\pi}{2\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.717$$

因而

$$K_1 = \omega_n^2 = 2.948, K_1 = \frac{2\zeta\omega_n}{K_1} = 0.471$$

于是

$$G_c(s) = K_I s = 0.471s$$

$$G_c(s) = -s(s + K_I K_T) = -s(s + 1.387)$$

6-14d 控制系统如图 6-19 所示。 $G_1(s) = \frac{6}{1+0.25s}$, $G_2(s) = \frac{4}{s(1+s)(1+0.5s)}$, 引入反馈校正

$$G_c(s) = \frac{8s^2}{1+2s}, \text{ 试确定校正后系统的相角裕度。}$$

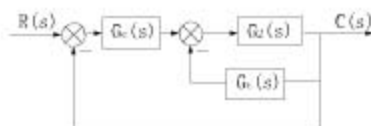


图 6-19

$$\text{解 } G_h(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)G_c(s)} = \frac{4(2s+1)}{s(1+s)(1+0.5s)(1+2s)+32s^2} = \frac{4(2s+1)}{s^4+3.5s^3+35.5s^2+s}$$

$$G_0(s) = G_1(s)G_h(s) = \frac{24(2s+1)}{(1+0.25s)(s^4+3.5s^3+35.5s^2+s)}$$

$$= \frac{48s+24}{0.25s^5+1.875s^4+12.375s^3+35.75s^2+s}$$

Matlab 文本

```
num=[48 24];
den=[0.25 1.875 12.375 35.75 1 0];
[gm,pm,wcg,wcp]=margin(num,den)
gm=2.8494    pm=43.792
wcg=4.1121    wcp=1.4207
```

系统 Bode 图如图 6-20 所示。

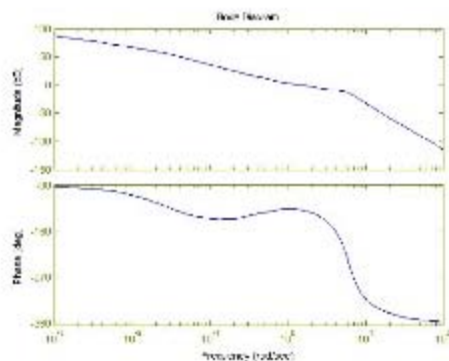


图 6-20