第一章　命题逻辑

习题 1.1 **1．**解　**(1)不是陈述句，所以不是命题。**

(2)x取值不确定，所以不是命题。

(3)问句，不是陈述句，所以不是命题。

(4)惊叹句，不是陈述句，所以不是命题。

(5)是命题，真值由具体情况确定。

(6)是命题，真值由具体情况确定。

(7)是真命题。

(8)是悖论，所以不是命题。

(9)是假命题。

2．**解**　(1)是复合命题。设p：他们明天去百货公司；q：他们后天去百货公司。命题符号化为$p\vee q$。

(2)是疑问句，所以不是命题。

(3)是悖论，所以不是命题。

(4)是原子命题。

(5)是复合命题。设p：王海在学习；q：李春在学习。命题符号化为$p\wedge q$。

(6)是复合命题。设p：你努力学习；q：你一定能取得优异成绩。$p\rightarrow q$。

(7)不是命题。

(8)不是命题

(9)。是复合命题。设p：王海是女孩子。命题符号化为：$\neg p$。

3．**解**　(1)如果李春迟到了，那么他错过考试。

(2)要么李春迟到了，要么李春错过了考试，要么李春通过了考试。

(3)李春错过考试当且仅当他迟到了。

(4)如果李春迟到了并且错过了考试，那么他没有通过考试。

4．解　(1)$\neg p\rightarrow(q\vee r)$。(2)$p\rightarrow q$。(3)$q\rightarrow p$。(4)$q\rightarrow p$。

习题 1.2

1．**解**　(1)是 1 层公式。

(2)不是公式。

(3)一层：　$p\vee q$，$\neg p$

二层：$\neg p\leftrightarrow q$

所以，$(p\vee q)\rightarrow(\neg p\leftrightarrow q)$是 3 层公式。

(4)不是公式。

(5)$(p\rightarrow q)\wedge\neg(\neg q\leftrightarrow(q\rightarrow\neg r))$是 5 层公式，这是因为

一层：$p\rightarrow q$，$\neg q$，$\neg r$

二层：$q\rightarrow\neg r$

三层：$\neg q\leftrightarrow(q\rightarrow\neg r)$

四层：$\neg(\neg q\leftrightarrow(q\rightarrow\neg r))$

2．**解**　(1)$A=(p\vee q)\wedge q$是 2 层公式。真值表如表 2-1 所示：

表 2-1

p	q	$p\vee q$	A
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

(2) $A=q\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow p$是 3 层公式。真值表如表 2-2 所示：

表 2-2

p	q	$p\to q$	$q\wedge(p\to q)$	A
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

(3) $A=(p\wedge q\wedge r)\to(p\vee q)$ 是 3 层公式。真值表如表 2-3 所示：

表 2-3

p	q	r	$p\wedge q$	$p\wedge q\wedge r$	$p\vee q$	A
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

(4) $A=(p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)\wedge(q\vee r)$ 是 4 层公式。真值表如表 2-4 所示：

3. **解** (1) $A=(\neg p\wedge\neg q)\vee p$ 真值表如表 2-5 所示：

表 2-5

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\wedge\neg q$	A
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

所以其成真赋值为：00，10，11；其成假赋值为 01。

(2) $A=r\to(p\wedge q)$ 真值表如表 2-6 所示：

表 2-6

p	q	r	$p\wedge q$	A
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

所以其成真赋值为：000，010，100，110，111；其成假赋值为 001，011，101。

(3) $A=(p\to q)\leftrightarrow(p\vee\neg q)$ 真值表如表 2-7 所示，所以其成真赋值为：00，11；成假赋值为：01，10，。

4. **解** (1)设 $A=p\vee\neg(p\wedge q)$，其真值表如表 2-8 所示：

表 2-8

p	q	$p\wedge q$	$\neg(p\wedge q)$	A
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

故 $A=p\vee\neg(p\wedge q)$ 为重言式。

(2)设 $A=(p\wedge q)\wedge\neg(p\vee q)$，其真值表如表 2-9 所示：

表 2-9

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$	A
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

故 $A=(p\wedge q)\wedge\neg(p\vee q)$为矛盾式。

(3)设 $A=(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow q)$，其真值表如表 2-10 所示：

表 2-10

p	q	$\neg p$	$\neg p\leftrightarrow q$	$p\to q$	A
0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0

故 $A=(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\leftrightarrow q)$为可满足式。

(4)设 $A=((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$，其真值表如表 2-11 所示：

表 2-11

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$p\to r$	A
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1

1	1	1	1	1	1	1	1

故 $A=((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$ 为重言式。

习题 1.3

1．**解** ⑴真值表如表 2-12 所示：

表 2-12

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\wedge\neg q$	$p\vee q$	$\neg(p\vee q)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

由真值表可以看出 $\neg(p\vee q)$ 和 $\neg p\wedge\neg q$ 所在的列相应填入值相同，故等值。

⑵真值表如表 2-13 所示：

表 2-13

p	q	$\neg q$	$p\wedge q$	$p\wedge\neg q$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1

由真值表可以看出 p 和 $(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$ 所在的列相应填入值相同，故等值。

⑶真值表如表 2-14 所示：

表 2-14

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\to q$	$p\to\neg q$	$(p\to q)\wedge(p\to\neg q)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0

由真值表可以看出 $\neg p$ 和 $(p\to q)\wedge(p\to\neg q)$ 所在的列相应填入值相同，故等值。

⑷真值表如表 2-15 所示：

p	q	r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\to r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

1	1	1	1	1	1	1

表 2-15

由真值表可以看出 $p\to(q\to r)$ 和 $(p\wedge q)\to r$ 所在的列相应填入值相同，故等值。

2．证明 (1)$(p\wedge q)\vee\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow p\wedge(q\vee\neg q)\Leftrightarrow p$。

(2) $(p\to q)\wedge(q\to p)\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee p)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge p)\vee(q\wedge\neg q)\vee(q\wedge p)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$。

(3)由(2)可得，$\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow\neg((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow(q\to\neg p)\wedge(\neg p\to q)\Leftrightarrow\neg p\leftrightarrow q$。

(4)$p\to(q\to r)\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow\neg q\vee(\neg p\vee r)\Leftrightarrow q\to(p\to r)$。

(5) $p\to(q\vee r)\Leftrightarrow\neg p\vee(q\vee r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\vee r\Leftrightarrow\neg(p\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\to r$

(6) $(p\to q)\wedge(r\to q)\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg r\vee q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg r)\vee q\Leftrightarrow(p\vee r)\to q$

3．解 (1)$\neg(p\to\neg q)\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee\neg q)\Leftrightarrow p\wedge q$

(2)$\neg(\neg p\to\neg q)\Leftrightarrow\neg(p\vee\neg q)\Leftrightarrow\neg p\wedge q$

(3)$\neg(p\leftrightarrow\neg q)\Leftrightarrow\neg((p\to\neg q)\wedge(\neg q\to p))\Leftrightarrow\neg(p\to\neg q)\vee\neg(\neg q\to p)$

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\Leftrightarrow p\leftrightarrow q$。

(4)同理可证$\neg(\neg p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow p\leftrightarrow q$。

4．**解** (1)与习题 2.2 第 4（4）相同。

(2)真值表如表 2-16 所示：

表 2-16

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\to q$	$\neg q\to\neg p$	A
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

所以公式是重言式。

(3)真值表如表 2-17 所示，所以公式是矛盾式。

表 2-17

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\vee q$	$p\wedge\neg q$	A
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0

1	1	0	0	1	0	0

⑷真值表如表 2-18 所示，所以公式是重言式。

表 2-18

p	q	r	$p\wedge q$	$p\wedge q\wedge r$	A
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

⑸真值表如表 2-19 所示，所以公式仅为可满足式。

表 2-19

p	q	$\neg p$	$\neg p\to q$	$\neg(\neg p\to q)$	A
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0

⑹真值表如表 2-20 所示，所以公式是重言式。

表 2-20

p	q	r	$p\to q$	$r\to q$	$p\wedge r$	$(p\to q)\wedge(r\to q)$	$(p\wedge r)\to q$	A
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

5．**解**　⑴设 p：他努力学习；q：他会通过考试。则命题符号化 $p\to q$。

其否定$\neg(p\to q)\Leftrightarrow p\wedge\neg q$。

所以语句的否定：他学习很努力但没有通过考试。

⑵设 p：水温暖；q：他游泳。则命题符号化 $p\leftrightarrow q$。

其否定$\neg(p\leftrightarrow q)\Leftrightarrow p\leftrightarrow\neg q$。

所以语句的否定：当且仅当水不温暖时他游泳。

⑶设 p：天冷；q：他穿外套；r：他穿衬衫。则命题符号化 $p\to(q\wedge\neg r)$

其否定$\neg(p\to(q\wedge\neg r))\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee(q\wedge\neg r))$

$\Leftrightarrow p\wedge\neg(q\wedge\neg r)\Leftrightarrow p\wedge(\neg q\vee r)$

所以语句的否定：天冷并且他不穿外套或者穿衬衫。

⑷设 p：他学习；q：他将上清华大学；r：他将上北京大学。则命题符号化 $p\to(q\vee r)$

其否定 $\neg(p \to (q \vee r)) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge \neg r$

所以语句的否定：他努力学习，但是没有上清华大学，也没有上北京大学。

6．**解**　设 p：张三说真话；q：李四说真话；r：王五说真话。

则：$p\leftrightarrow\neg q$, $q\leftrightarrow\neg r(\Leftrightarrow\neg q\leftrightarrow r)$, $r\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$ 为真,

因此 $p\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\Leftrightarrow(p\wedge\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge(p\vee q))\Leftrightarrow\neg p\wedge q$ 为真。

因此，p 为假，q 为真，所以 r 为假。

故张三说谎，李四说真话，王五说谎。

7．**解**　设 p：甲得冠军；q：乙得亚军；r：丙得亚军；s：丁得亚军。

前提：$p\to(q\vee r)$，$q\to\neg p$，$s\to\neg r$，p

结论：$\neg s$

证明　$p\to(q\vee r)$为真，其前件 p 为真，所以 $q\vee r$ 为真，

又 $q\to\neg p$ 为真，其后件$\neg p$ 为假，所以要求 q 为假，所以 r 为真。

又 $s\to\neg r$ 为真，其后件$\neg r$ 为假，所以要求 s 为假，故$\neg s$ 为真。

习题 1.4

1．**解**　⑴设 p：明天下雨；q：后天下雨。命题符号化 $p \vee q$。

⑵设 p：明天我将去北京；q：明天我将去上海。命题符号化 $p \overline{\vee} q$。

2．**解**　⑴ $(p \to q) \overline{\vee} p$

$\Leftrightarrow ((p \to q) \wedge \neg p) \vee (\neg(p \to q) \wedge p)$

$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee (\neg(\neg p \vee q) \wedge p)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (p \wedge \neg q \wedge p) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

⑵ $p \downarrow (q \overline{\vee} p) \Leftrightarrow \neg(p \vee (q \overline{\vee} p))$

$\Leftrightarrow \neg(p \vee (q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge p))$

$\Leftrightarrow \neg(p \vee (q \wedge \neg p))$

$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

⑶ $(p \uparrow q) \downarrow r$

$\Leftrightarrow \neg((p \uparrow q) \vee r) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q) \vee r)$

$\Leftrightarrow p \wedge q \wedge \neg r$

3．**证明**　因为，$\{\neg,\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}$是功能完备联结词集，所以，含有$\{\neg,\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}$外的其他联结词的公式均可以转换为仅含$\{\neg,\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}$中的联结词的公式。

又因为 $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

即含有 $\rightarrow,\leftrightarrow$ 的公式均可以转换为仅含{ $\neg,\vee,\wedge$ }中的联结词的公式。因此，含{ $\neg,\vee,\wedge$ }外其他联结词的公式均可以转换为仅含{ $\neg,\vee,\wedge$ }中的联结词的公式。

故{ $\neg,\vee,\wedge$ }是功能完备联结词集。

4. **证明** $\{\neg,\wedge\}$ 是极小功能完备集，因而只需证明 $\{\neg,\wedge\}$ 中的每个联结词都可以用 $\uparrow$ 表示，就说明 $\{\uparrow\}$ 是功能完备集。只有一个联结词，自然是极小功能完备集。事实上，

$\neg p\Leftrightarrow\neg(p\wedge p)\Leftrightarrow p\uparrow p$,

$p\wedge q\Leftrightarrow\neg\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow\neg(p\uparrow q)\Leftrightarrow(p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$。

对于证明 $\{\downarrow\}$ 是极小功能完备集，可类似证明。

习题1.5

1. **解** (1) $\neg(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$;

(2) $(p\wedge(\neg(q\vee r)\vee(p\wedge\neg r))\vee\neg p$

2. 解 (1) $(p\rightarrow q)\rightarrow(r\rightarrow s)\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee(\neg r\vee s)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee\neg r\vee s$ 即为其析取范式。

$(p\rightarrow q)\rightarrow(r\rightarrow s)\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee\neg r\vee s$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg r\vee s)\wedge(\neg q\vee\neg r\vee s)$ 即为其合取范式。

(2) $\neg p\wedge(q\leftrightarrow r)\Leftrightarrow\neg p\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee q)$ 即为其合取范式。

$\neg p\wedge(q\leftrightarrow r)\Leftrightarrow\neg p\wedge((q\wedge r)\vee(\neg q\wedge\neg r))$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ 即为其析取范式。

(3) $(p\vee q)\wedge\neg r$ 即为其合取范式。

$(p\vee q)\wedge\neg r\Leftrightarrow(p\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg r)$ 为其析取范式。

(4) $p\rightarrow(q\rightarrow r)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r$ 即为其析取范式和合取范式。

3. **解** (1) $p\wedge(\neg p\vee q)\Leftrightarrow(p\vee(\neg q\wedge q))\wedge(\neg p\vee q)$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg q)\wedge(p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)\Leftrightarrow\prod(0,1,2)$ 即为其主合取范式。

其主析取范式为 $\sum 3\Leftrightarrow p\wedge q$。

(2) $(\neg p\rightarrow q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\Leftrightarrow(p\vee q)\vee\neg(p\vee q)\Leftrightarrow 1$。

故其主析取范式为 $\sum(0,1,2,3)=(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$。

(3) $((p\vee q)\rightarrow r)\rightarrow p\Leftrightarrow\neg(\neg(p\vee q)\vee r)\vee p$

$\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge\neg r)\vee p\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow ((p\vee q)\vee(r\wedge\neg r))\wedge((p\vee\neg r)\vee(q\wedge\neg q))$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow \prod(0,1,3)$ 即为其主合取范式。

其主析取范式为$\sum(2,4,5,6,7)\Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$。

(4) $(p\to q)\to(r\to s)\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee(\neg r\vee s)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(\neg r\vee s)\Leftrightarrow(p\vee\neg r\vee s)\wedge(\neg q\vee\neg r\vee s)$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee\neg r\vee s)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r\vee s)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r\vee s)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r\vee s)$

$\Leftrightarrow \prod(2,6,14)$ 即为其主合取范式。

其主析取范式为$\sum(0,1,3,4,5,7,8,9,10,11,12,13,15)$。

4．**解** (1)真值表如表 2-21 所示，所以其极小项是 $p\wedge\neg q$，极大项为 $p\vee q$，$p\vee\neg q$，$\neg p\vee\neg q$。

表 2-21

p	q	$p\to q$	$\neg(p\to q)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

其主析取范式是：$p\wedge\neg q$，主合取范式为：$(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$。

(2)真值表如表 2-222 所示，所以其极小项是$\neg p\wedge q, p\wedge\neg q, p\wedge q$，极大项为 $p\vee q$。

表 2-22

p	q	$p\vee q$	$p\to q$	$\neg(p\to q)$	$\neg(p\to q)\vee(p\vee q)$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1

其主析取范式是：$(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$，主合取范式为：$p\vee q$。

(3)真值表如表 2-23 所示，所以其极小项是$\neg p\wedge q\wedge r, p\wedge\neg q\wedge\neg r, p\wedge\neg q\wedge r, p\wedge q\wedge\neg r, p\wedge q\wedge r$,

表 2-23

p	q	r	$\neg p$	$\neg p\wedge q\wedge r$	$p\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1

1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

极大项为 $p\vee q\vee r$，$p\vee q\vee\neg r$，$p\vee\neg q\vee r$。其主析取范式是：$(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$，主合取范式为：$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$ 。

⑷真值表如表 2-24 所示,所以其极小项为$\neg p\wedge\neg q\wedge r,\neg p\wedge q\wedge r,p\wedge\neg q\wedge\neg r,p\wedge\neg q\wedge r,p\wedge q\wedge r$,而极大项分为 $p\vee q\vee r$，$p\vee\neg q\vee r$，$\neg p\vee\neg q\vee r$.主合取范式为$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$,主析取范式为$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r,)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$。

表 2-24

p	q	r	$p\to q$	$(p\to q)\to r$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

5. 解　⑴ $(\neg p\vee q)\wedge(\neg(\neg p\wedge\neg q))\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q)$

$\Leftrightarrow q\Leftrightarrow(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)$,

故⑴为可满足式。

⑵ $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$

$$\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r)$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg r)\vee(\neg p\vee r)$$

$$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

$$\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$$

$$\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$$

$$\Leftrightarrow\sum(0,1,2,3,4,5,6,7)$$

故⑵为重言式。

⑶ $\neg(p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))\Leftrightarrow\neg(p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow(p\vee(q\wedge r))$

$\Leftrightarrow(p\vee(q\wedge r))\vee(p\vee(q\wedge r))\wedge\neg(p\vee(q\wedge r))\vee\neg(p\vee(q\wedge r))$

$\Leftrightarrow(p\vee(q\wedge r))\wedge\neg(p\vee(q\wedge r))$

$\Leftrightarrow(p\vee(q\wedge r))\wedge\neg p\wedge\neg(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\Leftrightarrow 0$。

故⑶为矛盾式。

⑷ $((p\to q)\vee(r\to s))\to((p\vee r)\to(q\vee s))$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \vee q) \wedge \neg(\neg r \vee s)) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee q \vee s$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \wedge (r \wedge \neg s)) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee q \vee s$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s)$$

$$\vee(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge s)$$

$$\vee(p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s)$$

$$\vee(\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s)$$

$$\vee(\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \vee s)$$

$$\vee(p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$$

$$\vee(\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s)$$

$$\Leftrightarrow \sum(0,1,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15)$$

故仅为可满足式。

6. 证明 (1)右边已经是主合取范式。而左边主合取范式已是$\neg p\wedge\neg q$，因此，$\neg(p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\wedge\neg q$，证毕。

(2)右边$(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$已经是主合取范式。$p\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$。因此，$p \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$。

(3)左边$p\to(q\to r)\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r$，而右边$(p \wedge q) \to r\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r$，因此，$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$。

习题 1.6

1. 解 设p：这里有演出；q：这里通行是困难的；r：他们按照指定时间到达。

前提：$p\to q, r\to\neg q, r$

结论：$\neg p$

证明

①r	P
②$r\to\neg q$	P
③$\neg q$	T①②假言推理
④$p\to q$	P
⑤$\neg p$	T③④拒取式

2. (1)**证明**

①s	P
②$s\to p$	P
③p	T①②假言推理
④$p\to q$	P
⑤q	T③④假言推理

(2)**证明**

①r P 附加前提引入
②$r\to q$ P
③q T①②假言推理
④$p\to\neg q$ P
⑤$\neg p$ T③④拒取式
⑥$\neg p\to s$ P
⑦s T⑤⑥假言推理
⑧$r\to s$ T①⑦CP

(3)**证明**

①p P 否定结论引入
②$p\to q$ P
③q T①②假言推理
④$q\to r$ P
⑤r T③④假言推理
⑥$\neg r\wedge s$ P
⑦$\neg r$ T⑥化简
⑧$r\wedge\neg r$ T⑤⑦合取

(4)**证明**

①p P 附加前提引入
②$\neg p\vee q$ P
③q ①②析取三段论
④$r\to\neg q$ P
⑤$\neg r$ ③④拒取式
⑥$p\to\neg r$ ①⑥CP

(5)**证明**

①p P 附加前提引入
②$p\to(q\to r)$ P
③$q\to r$ T①②假言推理
④q P 附加前提引入
⑤r T③④假言推理
⑥$(r\wedge s)\to t$ P
⑦$\neg r\vee\neg s\vee t$ T⑥蕴涵等价式
⑧$\neg s\vee t$ T⑤⑦析取三段论
⑨$\neg h\to(s\wedge\neg t)$ P
⑩$\neg s\vee t\to h$ T⑨假言易位
11. h T⑧⑩假言推理
12. $q\to h$ T④11.CP
13. $p\to(q\to h)$ T①12.CP

3．**解** 推理不正确。在①到②化简时，只能对整个公式进行而不是子公式。

4．**解** 正确。

(1)P，(2)P 附加前提引入；

(3)T①②析取三段论；

(4)P；

(5)T③④假言推理；

⑹P；
⑺T⑤⑥假言推理；
⑻T②⑦CP。

5．**解** 设p：张三努力工作，q：李四高兴，r：王五高兴，s：刘六高兴

前提：$p\to(q\vee r)$，$q\to\neg p$，$s\to\neg r$

结论：$p\to\neg s$

证明：①p P附加前提引入
②$p\to(q\vee r)$ P
③$q\vee r$ T①②假言推理
④$q\to\neg p$ P
⑤$\neg q$ T①④拒取式
⑥r T③⑤析取三段论
⑦$s\to\neg r$ P
⑧$\neg s$ T⑥⑦拒取式
⑨$p\to\neg s$ T①⑧CP

6．**解** 设：p：天下雪；q：马路结冰；r：汽车开得快；s：马路塞车。

前提：$p\to q$，$q\to\neg r$，$\neg r\to s$，$\neg s$

结论：$\neg p$

证明

①$p\to q$ P
②$q\to\neg r$ P
③$p\to\neg r$ ①②推理三段论
④$\neg r\to s$ P
⑤$p\to s$ ③④推理三段论
⑥$\neg s$ P
⑦$\neg p$ ⑤⑥拒取式

复习题1

1．**解** ⑴ 设p：3是偶数，q：中国人的母语是汉语。命题符号化$p\to q$。

⑵ 设p：你抽烟，q：你很容易得病。命题符号化$p\to q$。

⑶ 设p：今天是星期一，q：明天才是星期二。命题符号化$\mathrm{q}\to\mathrm{p}$。

⑷ 设p：李春这个学期《离散数学》考了100分。q：李春这个学期《数据结构》考了100分。命题符号化$p\wedge q$。

⑸ 设p：下雪路滑，q：他迟到了。命题符号化$\mathrm{q}\to\mathrm{p}$。

⑹ 设p：经一事，q：长一智。命题符号化$p\to q$。

⑺ 设p：一朝被蛇咬，q：十年怕井绳。命题符号化$p\to q$。

⑻ 设p：以物喜，q：以己悲。命题符号化$\neg p\wedge\neg q$。

2． 解 命题中的“或”是不可兼或，因此，可以直接用“$p\overline{\vee}q$”符号化；根据联结词的性质及其之间的转换关系，可知命题“李春生于1979年或生于1980年”的本意是“李春生于1979年（但不能生于1980年）或生于1980年（但不能生于1979年）”，因此，也可以转化为“$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$”对其进行符号化。

3．解 设p：李刚会拳击，q：李春会唱歌。命题符号化$(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg(p\to q)$。而

$(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg(p\to q)\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge p\wedge\neg q\Leftrightarrow p\wedge\neg q$

因此，李刚会拳击并且李春不会唱歌。

4. **解** ⑴A 的极小项对应于其真值表中的成真赋值 0001，0110，1000，1001，1010，1100，1101，1111。成真赋值对应二进制数转化为十进制数就是 A 的极小项的下标。由此可得，A 的极小项为：

$m_1 = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s$；$m_6 = \neg p \wedge q \wedge r \wedge s$；$m_8 = p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s$；

$m_9 = p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s$；$m_{10} = p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$；$m_{12} = p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s$；

$m_{13} = p \wedge q \wedge \neg r \wedge s$；$m_{15} = p \wedge q \wedge r \wedge s$。

相应的，A 的极大项对应于其真值表中的成假赋值，成假赋值对应二进制数转化为十进制数就是 A 的极大项的下标。由此可得，A 的极大项为：

$M_0 = p \vee q \vee r \vee s$；$M_2 = p \vee q \vee \neg r \vee s$；$M_3 = p \vee q \vee \neg r \vee \neg s$；

$M_4 = p \vee \neg q \vee r \vee s$；$M_5 = p \vee \neg q \vee r \vee \neg s$；$M_7 = p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s$；

$M_{11} = \neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg s$；$M_{14} = \neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$。

⑵由问题⑴得到了 A 的极小项和极大项，于是与 A 等值的主析取范式和主合取范式可以直接得到，分别为：$\sum(1,6,8,9,10,12,13,15)$；$\prod(0,2,3,4,5,7,11,14)$。

⑶从 A 的主析取范式出发，进行等值演算化简，可得析取范式的最简形式：

$(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge s)\vee(\neg p\wedge q\wedge r\wedge s)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge\neg s)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge s)$

$\vee(p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg s)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge r\wedge s)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge s)\vee(q\wedge r\wedge s)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg s)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r\wedge s)\vee(q\wedge r\wedge s)\vee(p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg s)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge\neg r\wedge s)\vee(q\wedge r\wedge s)\vee(p\wedge\neg q\wedge r\wedge\neg s)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge\neg r\wedge s)\vee(q\wedge r\wedge s)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg s)$

5. **证明** ⑴ $(p \to q) \wedge (r \to q)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg r) \vee q$

$\Leftrightarrow \neg(p \vee r) \vee q \Leftrightarrow (p \vee r) \to q$

⑵ $p \to (q \to r) \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$

$\Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee r) \Leftrightarrow q \to (p \to r)$

⑶ $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee (p \wedge q))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$

⑷ $(p \wedge q \wedge r \to s) \wedge (r \to p \vee q \vee s)$

$\Leftrightarrow (\neg(p \wedge q \wedge r) \vee s) \wedge (\neg r \vee (p \vee q \vee s))$

$\Leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee p \vee q)) \vee s$

$\Leftrightarrow (\neg r \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q))) \vee s$

$\Leftrightarrow \neg(r \wedge \neg((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q))) \vee s$

$\Leftrightarrow \neg(r \wedge ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))) \vee s$

$\Leftrightarrow (r \wedge (p \leftrightarrow q)) \rightarrow s$

6．**解** ⑴公式的真值表如表 2-27 所示：

表 2-27

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0

从真值表可见，公式所在列的填入值有 1 也有 0，故仅为可满足式。

$(p\rightarrow\neg q)\wedge(\neg q\rightarrow\neg p)\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg p)\Leftrightarrow\prod(2,3)$为其主合取范式，可见公式仅为可满足式。

⑵公式真值表如表 2-28 所示：

表 2-28

p	q	r	$p \vee q \vee r$	$p \rightarrow (p \vee q \vee r)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$p\rightarrow(p\vee q\vee r)\Leftrightarrow\neg p\vee p\vee q\vee r\Leftrightarrow 1\Leftrightarrow\sum(0,1,2,3,4,5,6,7)$

从真值表可见，公式所在的列的填入值均为 1，等值演算，以及求出的主析取范式均说明公式是重言式。

⑶$A=((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$真值表见习题 2.2 第 4(4)题。

$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$

$\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg r))\vee\neg p\vee r$

$\Leftrightarrow 1.$

从真值表可见，公式所在的列的填入值均为 1，由等值演算，以及求出的主析取范式均说明公式是重言式。

7．⑴**证明**

①p　　　　P 附加前提引入

②$p\to(q\to r)$ P

③$q\to r$ T①②假言推理

④q P 附加前提引入

⑤$q\to(r\to s)$ P

⑥$r\to s$ T④⑤假言推理

⑦$q\to s$ T③⑥假言三段论

⑧$p\to(q\to s)$ T①⑦CP

(2)**证明**

①$\neg w$ P

②$u\to w$ P

③$\neg u$ T①②拒取式

④$\neg s\vee u$ P

⑤$\neg s$ T③④析取三段论

⑥$\neg r\vee s$ P

⑦$\neg r$ T⑤⑥析取三段论

⑧$(p\vee q)\to r$ P

⑨$\neg(p\vee q)$ T⑦⑧拒取式

⑩$\neg p\wedge\neg q)$ T⑨德·摩根律

(3)**证明**

①p P 附加前提引入

②$p\to q\vee r$ P

③$q\vee r$ T①②假言推理

④$q\to\neg p$ P

⑤$\neg q$ T①④拒取式

⑥r T③⑤析取三段论

⑦$s\to\neg r$ P

⑧$\neg s$ T⑥⑦拒取式

⑨$p\to\neg s$ T①⑧CP

8．解

①$p\wedge r$ P

②p T①化简

③$p\to q$ P

④q T②③假言推理

⑤$\neg(q\vee s)$ P

⑥$\neg q\wedge\neg s$ T⑤德·摩根律

⑦$\neg q$ T⑥化简

⑧$\neg q\wedge q$ T④⑦合取

由⑧得到矛盾，可见$p\to q$，$\neg(q\vee s)$，$p\wedge r$不能同时成立。

9．解 设p：小王曾经到过受害人的房间，q：小王 11 点以前离开，r：小王犯了谋杀罪，s：看门人看到小王。符号化：$(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(q\to s)\wedge\neg s)\Rightarrow r$。

(1)形式构造推理证明

前提：$(p\wedge\neg q)\to r$，p，$q\to s$，$\neg s$

结论：r

证明

①$\neg s$ P

②$q\to s$ P

③$\neg q$ T①②拒取式

④p P

⑤$p\wedge\neg q$ T③④合取

⑥$(p\wedge\neg q)\to r$ P

⑦r T⑤⑥假言推理

⑵真值表技术：真值表如表 2-30 所示，设 $A=(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(q\to s)\wedge\neg s)$。

表 2-29

p	q	r	s	$\neg q$	$\neg s$	$p\wedge\neg q$	$(p\wedge\neg q)\to r$	$q\to s$	A
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1

由真值表可以看出：$(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(q\to s)\wedge\neg s)\Leftrightarrow r$，所以，$(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(q\to s)\wedge\neg s)\Rightarrow r$ 成立。

⑶等值演算方法

$(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(q\to s)\wedge\neg s)\to r$

$\Leftrightarrow\neg((\neg(p\wedge\neg q)\vee r)\wedge p\wedge(\neg q\vee s)\wedge\neg s)\vee r$

$\Leftrightarrow\neg((\neg(p\wedge\neg q)\vee r)\wedge p\wedge(\neg q\wedge\neg s))\vee r$

$\Leftrightarrow(\neg(\neg(p\wedge\neg q)\vee r)\vee\neg p\vee\neg(\neg q\wedge\neg s))\vee r$

$\Leftrightarrow((p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee\neg(p\wedge\neg q\wedge\neg s))\vee r$

$\Leftrightarrow 1$。

由此可以说明$(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(q\to s)\wedge\neg s)\to r$ 为重言式，即$(((p\wedge\neg q)\to r)\wedge p\wedge(q\to s)\wedge\neg s)\Rightarrow r$ 成立。

10. **解** 逻辑学家手指 A 门问旁边的一名强盗（A）说："这扇门是生门，他（指强盗 B）将回答'是'，他的回答对吗？"

设 p：强盗 A 回答"对"；q：强盗 B 回答"对"；r：这扇门（A）是生门。因为，两个强盗一个总说真话，而另一个强盗一个总说假话，因此该问题符号化为：$(\neg p\leftrightarrow q)\wedge r$。

$(\neg p\leftrightarrow q)\wedge r\Leftrightarrow((\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r\Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)$

逻辑学家的提问可知，r 和 q 都为真，由公式可以看出这时$\neg p$ 为真，即 p 为假。所以，当被问强盗 A 回答"否"，则逻辑学家开启所指的门从容离去。当被问强盗 A 回答"对"，则逻辑学家开启另一扇门从容

离去。

第二章　谓词逻辑

习题2.1

1．**解**　⑴个体：离散数学；谓词：…是一门计算机基础课程。

⑵个体：田亮；谓词：…是一名优秀的跳水运动员。

⑶个体：大学生；谓词：…要好好学习计算机课程；量词：所有。

⑷个体：推理；谓词：…是能够由计算机来完成的；量词：一切。

2．**解**　⑴设 $F(x)$：x是舞蹈演员；a：小芳。命题符号化：$F(a)$。

⑵设 $F(x)$：x是一位有名的哲学家；a：苏格拉底。命题符号化：$F(a)$。

⑶设 $F(x)$：x作完了他的作业家；a：张三。命题符号化：$F(a)$。

⑷设 $F(x)$：x身体很好；a：我。命题符号化：$F(a)$。

3．**解**　⑴选取个体域为整数集合。设 $F(x)$：x的平方是奇数；$G(x)$：x是奇数。命题符号化：

$F(x)\to G(x)$。

⑵选取个体域为所有国家的集合。设 $F(x)$：x在南半球；$G(x)$：x在北半球。命题符号化：

$\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)$。

⑶选取个体域为所有人的集合。设 $F(x)$：x在中国居住；$G(x)$：x是中国人。命题符号化：

$\neg\forall x(\neg F(x)\to\neg G(x))$

⑷选取个体域为所有人的集合。设 $M(x)$：x是艺术家；$F(x)$：x是导演；$G(x)$：x是演员。命题符号化：$\exists x(M(x)\wedge F(x)\wedge G(x))$。

⑸选取个体域为所有猫的集合。设 $M(x)$：x是好猫；$F(x)$：x捉耗子。命题符号化：$\exists x\neg M(x)\wedge\forall x(F(x)\to M(x))$。

4．**解**　⑴①设 $F(x)$：x喜欢开汽车；$G(x)$：x喜欢骑自行车。命题符号化：

$\exists xF(x)\wedge\exists xG(x)$。

②设 $F(x)$：x喜欢开汽车；$G(x)$：x喜欢骑自行车；$M(x)$：x是人。命题符号化：

$\exists x(M(x)\wedge F(x))\wedge\exists x(M(x)\wedge G(x))$。

⑵①设 $F(x)$：x必须学好数学。命题符号化：$\forall xF(x)$。

②设 $F(x)$：x必须学好数学；$M(x)$：x是学生。命题符号化：$\forall x(M(x)\to F(x))$。

⑶①设 $F(x)$：x 的平方是质数；$M(x)$：x 是质数。命题符号化：$\forall x(M(x)\to\neg F(x))$。

②同①。

③设 $F(x)$：x 的平方是质数。命题符号化：$\forall x(\neg F(x))$。

习题 2.2

1．**解** ⑴$\forall x$ 的辖域为 $P(x)\to Q(x)$，个体变元 x 是约束变元。

⑵$\forall x$ 的辖域为 $P(x)\to\exists yQ(x,y)$，$\exists y$ 的辖域为 $Q(x,y)$，个体变元 x 是约束变元，个体变元 y 是约束变元。

⑶$\forall x$ 的辖域为 $F(x,y)$，其中个体变元 x 是约束变元，个体变元 y 是自由变元；$\exists$ 的辖域为 $Q(x,y)$，其中个体变元 x 是自由变元，个体变元 y 是约束变元。

2．**解** ⑴ $\forall s\exists t(P(s,z)\to Q(t))\leftrightarrow S(x,y)$。

⑵ $M(x,y)\to\forall s(P(s,y)\vee\forall zQ(s,z))$。

3．解 ⑴ $(\forall xP(x)\wedge\exists yQ(x))\to F(s,z)$；

⑵$\exists y(P(s,y)\to(\forall zQ(s,z)\wedge R(s,y,v)))\wedge\forall x\exists rS(x,t,r)$。

4．**解** ⑴ $S(x),\exists xS(x),S(x)\wedge\exists xS(x)$ 的真值分别为：0，1，0。

⑵ $S(x),\exists xS(x),S(x)\wedge\exists xS(x)$ 的真值分别为：0，1，0。

⑶ $S(x),\exists xS(x),S(x)\wedge\exists xS(x)$ 的真值分别为：1，1，1。

⑷ $S(x),\exists xS(x),S(x)\wedge\exists xS(x)$ 的真值分别为：0，0，0。

5．**解** ⑴0。 ⑵1。 ⑶0。

6．**解** ⑴设 I 为任意解释，其个体域为 D，若$\exists xP(x)$为真，即$\neg\exists xP(x)$为假，则$\neg\exists xP(x)\to\forall xP(x)$为真；若$\exists xP(x)$为假，即$\neg\exists xP(x)$为真，则就是说在个体域中不存在使得 $P(x)$为真的个体，故$\forall xP(x)$为假，即$\neg\exists xP(x)\to\forall xP(x)$为假。因此$\neg\exists xP(x)\to\forall xP(x)$仅为可满足式。

⑵设 I 为任意解释，其个体域为 D，若$\neg\forall xA(x)$为假，则$\forall xA(x)$为真，就是说对于个体域中任意一个个体 $A(x)$均为真，那么$\neg A(x)$必为假，所以$\exists x(\neg A(x))$必为假；若$\neg\forall xA(x)$为真，即$\forall xA(x)$为假，则就是说对于个体域中至少存在一个体使 $A(x)$均为假，那么对于个体域中至少存在一个个体使$\neg A(x)$为真，所以$\exists x(\neg A(x))$必为真，总之$\neg\forall xA(x)\leftrightarrow\exists x(\neg A(x))$对于个体域中任意一个个体必为真，即其为逻辑有效式。

⑶设 I 为任意解释，其个体域为 D，若$\exists x(P(x)\wedge Q(x))$为真，即是说在个体域中至少存在一个个体使得$P(x)$和 $Q(x)$同时为真，此时$\exists x(P(x)\to\neg Q(x))$可真可假，所以，$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\to\exists x(P(x)\to\neg Q(x))$可真可假。因此，$(\exists x(P(x)\wedge Q(x)))\to(\exists xP(x)\to\neg Q(x))$ 仅为可满足式。

习题 2.3

1．解 ⑴$\neg(\exists xA(x)\to\forall xB(x))\Leftrightarrow\neg(\neg\exists xA(x)\vee\forall xB(x))$

$\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge\neg\forall xB(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge\exists x\neg B(x))$

⑵ $\neg(\forall xA(x)\wedge B(x)\vee\exists xC(x))\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\neg B(x)\wedge\neg\exists xC(x)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\neg B(x)\wedge\forall x\neg C(x)$

⑶ $\neg((\exists xA(x)\leftrightarrow\forall xB(x))\wedge\forall xC(x))$

$$\Leftrightarrow\neg((\neg\exists xA(x)\vee\forall xB(x))\wedge(\exists xA(x)\vee\neg\forall xB(x)))\vee\neg\forall xC(x)$$

$\Leftrightarrow(\exists xA(x)\wedge\exists x\neg B(x))\vee(\forall x\neg A(x)\wedge\forall xB(x))\vee\exists x\neg C(x)$。

2．证明 ⑴$\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$

$\Leftrightarrow\neg\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))\vee(\neg\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))\Leftrightarrow\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))\vee\forall x\neg P(x)\vee\exists xQ(x)$

$\Leftrightarrow((P(1)\wedge\neg Q(1))\vee((P(2)\wedge\neg Q(2))\vee((P(3)\wedge\neg Q(3)))\vee(\neg P(1)\wedge\neg P(2)\wedge\neg P(3))$

$\vee Q(1)\vee Q(2)\vee Q(3)$

$\Leftrightarrow((P(1)\vee Q(1))\vee((P(2)\vee Q(2))\vee((P(3)\vee Q(3)))\vee(\neg P(1)\wedge\neg P(2)\wedge\neg P(3))$

$\Leftrightarrow(P(1)\vee P(2)\vee P(3))\vee(Q(1)\vee Q(2)\vee Q(3))\vee\neg(P(1)\vee P(2)\vee P(3))$

$\Leftrightarrow 1$。

故$\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$为逻辑有效式。

⑵$(\exists xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x))\Leftrightarrow\neg(\neg\exists xP(x)\vee\forall xQ(x))\vee\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow(\exists xP(x)\wedge\exists x\neg Q(x))\vee\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow((P(1)\vee P(2)\vee P(3))\wedge(\neg Q(1)\vee\neg Q(2)\vee\neg Q(3))$

$\vee((\neg P(1)\vee Q(1))\wedge\neg P(2)\vee Q(2))\wedge\neg P(2)\vee Q(2)))$

$\Leftrightarrow[(P(1)\wedge\neg Q(1))\vee(P(2)\wedge\neg Q(2))\vee(P(3)\wedge\neg Q(3))\vee(P(1)\wedge\neg Q(2))\ldots]$

$\vee(\neg(P(1)\wedge Q(1))\wedge\neg(P(2)\wedge\neg Q(2))\wedge\neg(P(1)\wedge\neg Q(1)))$

$\Leftrightarrow(\neg(P(1)\wedge Q(1))\vee(P(1)\wedge\neg Q(1))\vee(P(2)\wedge\neg Q(2))\vee(P(3)\wedge\neg Q(3))\vee(P(1)\wedge\neg Q(2))\ldots)$

$\wedge(\neg(P(2)\wedge\neg Q(2))\vee(P(1)\wedge\neg Q(1))\vee(P(2)\wedge\neg Q(2))\vee(P(3)\wedge\neg Q(3))\vee(P(1)\wedge\neg Q(2))\ldots)$

$\wedge(\neg(P(1)\wedge\neg Q(1))\vee(P(1)\wedge\neg Q(1))\vee(P(2)\wedge\neg Q(2))\vee(P(3)\wedge\neg Q(3))\vee(P(1)\wedge\neg Q(2))\ldots)$

$\Leftrightarrow 1\wedge 1\wedge 1$。

⑶ $\forall x(A(x)\wedge B(x))\leftrightarrow(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x))$

$\Leftrightarrow((A(1)\wedge B(1))\wedge(A(2)\wedge B(2))\wedge(A(3)\wedge B(3)))$

$\leftrightarrow((A(1)\wedge A(2)\wedge A(3))\wedge(B(1)\wedge B(2)\wedge B(3)))$

$\Leftrightarrow 1$

习题 2.4

1．**解** ⑴④错。在一个逻辑推理过程中，若同时用到 ES 和 US，并且选用代替的个体变元相同时应先用 ES，再用 US。

⑵②错，在用 UG 规则时，引入的个体变元在原来的公式中不能自由出现过。③错。

⑶④错，在用两次 ES 规则时，引入的个体常元不能是一样的。

2．⑴**证明**

①$\forall x\neg Q(x)$	P
②$\neg Q(y)$	T①US
③$\forall x(\neg P(x)\to Q(x))$	P
④$\neg P(y)\to Q(y)$	T③US
⑤$P(y)$	T②④拒取式
⑥$\exists xP(x)$	T⑤EG

⑵**证明**

①$\forall xP(x)$	P 附加前提引入
②$P(c)$	T①US
③$\forall x(P(x)\to Q(x))$	P
④$P(c)\to Q(c)$	T③US
⑤$Q(c)$	T②④假言推理
⑥$\forall xQ(x)$	T⑤UG
⑦$\forall xP(x)\to\forall xQ(x)$	T①⑥CP

⑶**证明**

①$\neg\forall x(P(x)\vee Q(x))$	P
②$\exists x(\neg P(x)\wedge\neg Q(x))$	T①量词否定，德·摩根律

③$\neg P(c)\wedge\neg Q(c)$ T②ES
④$\forall xQ(x)$ P 否定结论引入
⑤$Q(c)$ T④US
⑥$\neg Q(c)$ T③化简
⑦$Q(c)\wedge\neg Q(c)$ T⑤⑥合取

由⑦得到矛盾，由间接证明原理，原命题得证明。

3\. **解** ⑴设 $M(x)$：x 是鸟；$M(x)$：x 是猴子，$F(x)$：x 会飞。

前提：$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$，$\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

结论：$\forall x(M(x)\rightarrow\neg M(x))$

证明

①$\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$ P
②$M(y)\rightarrow\neg F(y)$ T①US
③$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$ P
④$M(y)\rightarrow F(y)$ T③US
⑤$\neg F(y)\rightarrow\neg M(y)$ T④假言易位
⑥$M(y)\rightarrow\neg M(y)$ T②⑤假言三段论
⑦$\forall x(M(x)\rightarrow\neg M(x))$ T⑥UG

⑵设 $M(x)$：x 是学生；$M(x)$：x 是教师；$F(x)$：x 是骗子；$R(x,y)$：x 相信 y。

前提：$\exists x(M(x)\wedge\forall y(M(y)\rightarrow R(x,y)))$，$\forall x(M(x)\rightarrow\forall y(F(y)\rightarrow\neg R(x,y)))$

结论：$\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$

证明

①$\exists x(M(x)\wedge\forall y(M(y)\rightarrow R(x,y)))$ P
②$M(c)\wedge\forall y(M(y)\rightarrow R(c,y))$ T①ES
③$M(c)$ T②化简
④$\forall x(M(x)\rightarrow\forall y(F(y)\rightarrow\neg R(x,y)))$ P
⑤$M(c)\rightarrow\forall y(F(y)\rightarrow\neg R(c,y))$ T④US
⑥$\forall y(F(y)\rightarrow\neg R(c,y))$ T③⑤假言推理
⑦$F(d)\rightarrow\neg R(c,d)$ T⑥US
⑧$\forall y(M(y)\rightarrow R(c,y))$ T②化简
⑨$M(d)\rightarrow R(c,d)$ T⑧US
⑩$R(c,d)\rightarrow\neg F(d)$ T⑦假言易位
⑾$M(d)\rightarrow\neg F(d)$ T⑨⑩假言三段论
⑿$\forall x(M(x)\rightarrow\neg F(x))$ T⑾UG

⑶设 $M(x)$：x 是学术会成员；$M(x)$：x 是工人；$R(x)$：x 是专家；$Q(x)$：x 是青年人。

前提：$\forall x(M(x)\rightarrow(M(x)\wedge R(x)))$，$\exists x(M(x)\wedge Q(x))$

结论：$\exists x(M(x)\wedge Q(x)\wedge R(x))$

证明

①$\exists x(M(x)\wedge Q(x))$ P
②$M(c)\wedge Q(c)$ T①ES
③$\forall x(M(x)\rightarrow(M(x)\wedge R(x)))$ P
④$M(c)\rightarrow(M(c)\wedge R(c))$ T③US
⑤$M(c)$ T②化简
⑥$M(c)\wedge R(c)$ T④⑤假言推理
⑦$R(c)$ T⑥化简

⑧$M(c)\wedge Q(c)\wedge R(c)$　　T②⑦合取

⑨$\exists x(M(x)\wedge Q(x)\wedge R(x))$　　T⑧EG

复习题2

1. 解　(1)设个体域是整数集合 I，$F(x)$：x是最大的整数，命题符号化为$\neg\exists xF(x)$。

(2)设 $M(x)$：x 是学生，$F(x)$：x 要好好学习。命题符号化$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$。

(3)设 $M(x)$：x 是液体，$F(x)$：x 能溶于水。命题符号化$\neg\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$。

(4)设 $M(x)$：x 是人，$F(x, y)$：x 与 y 一样高。命题符号化$\neg\forall x((M(x)\wedge M(y))\rightarrow F(x, y))$。

(5)设 $M(x)$：x 是数，$F(x)$：x 是实数，$G(x)$：x 是复数。命题符号化$\forall x(M(x)\rightarrow(F(x)\vee G(x)))$。

(6)设 $M(x)$：x 是数，$F(x)$：x 是奇数，$G(x)$：x 是偶数，$H(x)$：x 是 2。命题符号化

$\forall x(M(x)\rightarrow((F(x)\wedge G(x))\leftrightarrow H(x)))$。

(7)设 $M(x)$：x 不是地球，$F(x)$：x 上有人，c：金星。命题符号化

$\exists x(M(x)\wedge F(x))\rightarrow F(c)$。

2. 解　(1)$\exists x(A(x)\wedge B(x))$

$\Leftrightarrow(A(1)\wedge B(1))\vee(A(2)\wedge B(2))\vee(A(3)\wedge B(3))$

$\Leftrightarrow 0\vee 0\vee 0\Leftrightarrow 0$。

(2)$\forall x(A(x)\rightarrow\neg(x\leq 2))$

$\Leftrightarrow(A(1)\rightarrow\neg(1\leq 2))\wedge(A(2)\rightarrow\neg(2\leq 2))\wedge(A(3)\rightarrow\neg(3\leq 2))$

$\Leftrightarrow 1\wedge 0\wedge 1\Leftrightarrow 0$。

3. 解　(1)$\forall x$ 的辖域 $P(x)\wedge Q(y)$，其中 x 是约束变元，y 是自由变元；$\exists y$ 的辖域 $M(x,y)$，其中 x 是自由变元，y 是约束变元。

(2)$\exists x$ 的辖域 $P(x)$，$\forall x$ 的辖域 $M(x)$，其中 x 在两个量词的不同辖域中都是约束变元，y 是自由变元。

(3)$\forall x$ 的辖域 $P(x,y)$，其中 x 是约束变元，y 是自由变元；$\exists y$ 的辖域 $Q(y)$，其中 y 是约束变元。

(4)$\forall x$ 的辖域$\exists yP(x,y)$，$\exists y$ 的辖域 $P(x,y)$，整个公式中 x 是约束变元，y 约束变元 1 次，自由变元 1 次。

4．解　$\exists!xP(x)\Leftrightarrow\exists x(P(x)\wedge\forall y(P(y)\rightarrow(y=x)))$。

5. 解　(1)$\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$

$\Leftrightarrow P(a)\wedge P(b)\wedge P(c)\wedge Q(a)\wedge Q(b)\wedge Q(c)$

(2)$\exists x(P(x)\rightarrow\forall xQ(x))\Leftrightarrow$

$(P(a)\rightarrow(Q(a)\wedge Q(b)\wedge Q(c)))\vee(P(b)\rightarrow(Q(a)\wedge Q(b)\wedge Q(c)))\vee(P(c)\rightarrow(Q(a)\wedge Q(b)\wedge Q(c)))$

(3)$\forall x\exists yR(x,y)\Leftrightarrow\exists yR(a,y)\wedge\exists yR(b,y)\wedge\exists yR(c,y)$

$\Leftrightarrow(R(a,a)\vee R(a,b)\vee R(a,c))\wedge(R(b,a)\vee R(b,b)\vee R(b,c))\wedge(R(c,a)\vee R(c,b)\vee R(c,c))$

6. 解　(1)设个体域为 $D=\{a，b\}$，令 $P(a)=1$；$P(b)=0$；$Q(a)=0$；$Q(b)=1$。则$\forall xP(x)$为假，$\forall xQ(x)$为假，从而$\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)$为真。由于 $P(a)\rightarrow Q(a)$为假，所以$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$也为假，此时公式为假。因此，公式不是逻辑有效式。

(2) 设 $D=\{a\}$，若 $R(a)=1$，$P(a)=0$，$Q(a)=1$，则$\exists x(P(x)\leftrightarrow Q(x))$为假，而$\forall x((P(x)\vee R(x))\leftrightarrow(Q(x)\vee R(x)))$为真，因此原公式为假。因此，公式不是逻辑有效式。

(3)设个体域 $D=\{a，b\}$，$Q(a)=Q(b)=0$，取 $P(a)=1$，$P(b)=0$。则$\exists x(P(x)\rightarrow Q(y))$为真，而$(\exists xP(x)\rightarrow Q(y))$为假。因此，原公式不是逻辑有效式。

(4)$\exists x\exists y(P(x)\rightarrow Q(y))\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg P(x)\vee Q(y))\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x)\vee\exists yQ(y))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)\vee\exists y\,Q(y)\Leftrightarrow\neg\forall xP(x)\vee\exists yQ(y)\Leftrightarrow\forall xP(x)\rightarrow\exists yQ(y)$

因此，原公式为逻辑有效式。

7．(1)**证明**　$\exists x(A(x)\rightarrow B(x))$

$\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\exists x\,B(x))$

$\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\exists x\,B(x))$

$\Leftrightarrow\forall xA(x)\rightarrow\exists x\ B(x))$

(2)**证明** $\exists xP(x)\rightarrow\forall yQ(y)$

$\Leftrightarrow\neg\exists xP(x)\vee\forall yQ(y)$

$\Leftrightarrow\forall x\neg P(x)\vee\forall yQ(y)$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg P(x)\vee Q(y))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(P(x)\rightarrow Q(y))$

9．(1)**证明**

①$\exists xF(x)$	P
②$F(c)$	T①ES
③$\forall xF(x)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$	P
④$F(c)\rightarrow\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$	T③US
⑤$\forall y((F(y)\vee G(y))\rightarrow R(y))$	T②④假言推理
⑥$(F(c)\vee G(c))\rightarrow R(c)$	T⑤US
⑦$F(c)\vee G(c)$	T⑥附加
⑧$R(c)$	T⑤⑦假言推理
⑨$F(c)\wedge R(c)$	T⑥⑧合取
⑩$\exists x(F(x)\wedge R(x))$	T⑨EG

(2)**证明**

①$\forall x(C(x)\rightarrow\neg B(x))$	P
②$C(y)\rightarrow\neg B(y)$	T②US
③$\forall x(A(x)\rightarrow B(x))$	P
④$A(y)\rightarrow B(y)$	T③US
⑤$\neg B(y)\rightarrow\neg A(y)$	T④假言易位
⑥$C(y)\rightarrow\neg A(y)$	T②⑤假言三段论
⑦$\forall x(C(x)\rightarrow\neg A(x))$	T⑧UG

$\forall x(H(x))\rightarrow A(x))\Rightarrow\forall x\forall y((H(y)\wedge N(x,y))\rightarrow\exists y(A(y)\wedge N(x,y))$

(3)**证明**

①$\forall x\forall y((H(y)\wedge N(x,y))$	P 附加前提引入
②$\forall y((H(y)\wedge N(x,y))$	T①US
③$H(v)\wedge N(x,v)$	T②US
④$\forall x(H(x))\rightarrow A(x))$	P
⑤$H(v)\rightarrow A(v)$	T④US
⑥$H(v)$	T③化简
⑥$A(v)$	T⑤⑥假言推理
⑦$N(x,v)$	T③化简
⑧$A(v)\wedge N(x,v)$	T⑥⑦合取
⑨$\exists y(A(y)\wedge N(x,y))$	T⑧EG
⑩$\forall x\forall y((H(y)\wedge N(x,y))\rightarrow\exists y(A(y)\wedge N(x,y))$	T①⑨CP

10．**解** (1)设 $M(x)$：x 是航海家，$F(x)$：x 教育自己的孩子成为航海家，$G(x)$：x 教育他的孩子去做飞行家。

前提：$\forall x(M(x)\rightarrow F(x))$，$\forall x(G(x)\rightarrow\neg F(x))$，$\exists xG(x)$

结论：$\exists x\neg M(x)$

证明

①$\exists xG(x)$	P

②$G(c)$　　T①ES

③$\forall x(G(x)\to\neg F(x))$　　P

④$G(c)\to\neg F(c)$　　T③US

⑤$\neg F(c)$　　T②④假言推理

⑥$\forall x(M(x)\to F(x))$　　P

⑦$M(c)\to F(c)$　　T⑥US

⑧$\neg M(c)$　　T⑤⑦拒取式

⑨$\exists x\neg M(x)$　　T⑨UG

(2)设 $M(x)$：x 是哺乳动物，$N(x)$：x 是脊椎动物，$F(x)$：x 是胎生动物。

前提：$\forall x(M(x)\to N(x))$，$\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$.

结论：$\exists x(N(x)\wedge\neg F(x))$

证明

①$\exists x(M(x)\wedge\neg F(x))$　　P

②$M(c)\wedge\neg F(c)$　　T①ES

③$\forall x(M(x)\to N(x))$　　P

④$M(c)\to N(c)$　　T③US

⑤$M(c)$　　T②化简

⑥$N(c)$　　T④⑤假言推理

⑦$\neg F(c)$　　T②化简

⑧$N(c)\wedge\neg F(c)$　　T⑥⑦合取

⑨$\exists x(N(x)\wedge\neg F(x))$　　T⑧EG

(3)设 $F(x)$：x 是有理数，$G(x)$：x 是无理数，$M(x)$：x 是实数，$N(x)$：x 是虚数。

前提：$\forall x(F(x)\to M(x))$，$\forall x(G(x)\to M(x))$，$\forall x(N(x)\to\neg M(x))$

结论：$\forall x(N(x)\to(\neg F(x)\ \ \neg G(x)))$

证明

①$\forall x(N(x)\to\neg M(x))$　　P

②$N(y)\to\neg M(y)$　　T①US

③$\forall x(F(x)\to M(x))$　　P

④$F(y)\to M(y)$　　T③US

⑤$\neg M(y)\to\neg F(y)$　　T②④假言易位

⑥$N(y)\to\neg F(y)$　　T②⑤假言三段论

⑦$\forall x(G(x)\to M(x))$　　P

⑧$G(y)\to M(y)$　　T⑦US

⑨$\neg M(y)\to\neg G(y)$　　T⑦假言易位

⑩$N(y)\to\neg G(y)$　　T②⑨假言三段论

⑾$(N(y)\to\neg F(y))\wedge(N(y)\to\neg G(y))$　　T⑥⑩合取

⑿$N(y)\to(\neg F(y)\wedge\neg G(y))$　　T⑾蕴涵等价式，分配律

⒀$\forall x(N(x)\to(\neg F(x)\ \ \neg G(x)))$　　T⑿UG

第三章　基础知识

习题3.1

1. 解　(1)：$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$；

(2)：$B=\{a, e, i, m, n, o, r, t, u\}$；

(3)：$C=\{-3,2\}$。

2. 解　(1) $A=\{x|1\le x\le 79, x\in N\}$；

⑵ $B=\{x|\ x=2k+1,\ k\in N\}$；

⑶ $C=\{x|\ x=5n,\ n\in I\}$。

3. 解 ⑴：1，2，3，4，6，9，12，18，36；

⑵：a，b；

⑶：1，$\{3\}$，$\{\{a\}\}$。

习题3.2

1. 解 互不相同。⑴是不包含任何元素的空集，⑵是以空集ϕ为元素的单元素集合，⑶是以 0 为元素的单元素集合，但和⑵的集合中的元素不同。

2. **证明** 若 $a=c,b=d$，则 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$；

反之，若 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$，则 $\{a\}=\{c\}$，$\{a,b\}=\{c,d\}$，

因此，$a=c,b=d$。

3. **解** ⑴设 $A=\{\phi\}$，则 $P(A)=\{\phi,\{\phi\}\}$；

⑵设 $B=\{\phi,\{\phi\}\}$，则 $P(B)=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$；

⑶设 $C=\{\{\phi,a\},\{a\}\}$，则 $P(C)=\{\phi,\{\{\phi,a\}\},\{\{a\}\},\{\{\phi,a\},\{a\}\}\}$；

⑷设 $D=\{\{a,b\},\{a,a,b\},\{b,a,b\}\}=\{\{a,b\}\}$，则 $P(D)=\{\phi,\{\{a,b\}\}\}$。

4. **解** ⑴$M\subseteq T$；⑵$N\subseteq P$；⑶$P\cap T=\phi$。

5. **解** 由题意可得：$A=\{1,2,7,8\}$；$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$；$C=\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$；$D=\{1,2,4,8,16,32,64\}$。

⑴$A\cup(B\cup(C\cup D))=A\cup B\cup C\cup D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16,18,21,24,27,30,32,64\}$；

⑵$A\cap(B\cap(C\cap D))=\phi$；

⑶因为，$A\cap C=\{0,1,2,3,6,7,8,9,12,15,18,21,24,27,30\}$,所以，$B-A\cap C=\{4,5\}$；

⑷ $\overline{A}\cap B=B-A=\{0,3,4,5,6\}$，$(\overline{A}\cap B)\cup D=\{0,2,3,4,5,6,8,16,32,64\}$；

6. 解 ⑴、⑵的文氏图如图 1-1 所示，图中阴影部分表示所求集合。

7. 解 ⑴所求集合的集合成员表如表 1-1 所示。

表 1-1

A	B	$A\cap B$	$(A\cap B)-A$	$((A\cap B)-A)\cup A$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	0	1

⑵所求集合的成员表如表 1-2 所示。

表 1-2

A	B	C	$A\cup B$	$(A\cup B)\cap C$	$(A\cup B)\cap C-A$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

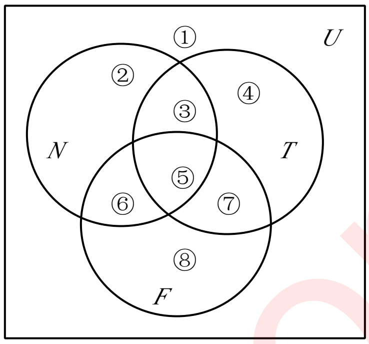


图 1-3（原教材图 1-4）

8. **证明** (1) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B}) = A\cup\left(B\cap\overline{B}\right) = A\cup\phi = A$

(2) $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) = A\cap\left(B\cup\overline{B}\right) = A\cap U = A$

(3) $A-(B\cap C) = A\cap\overline{(B\cup C)} = A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

$=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C}) = (A-B)\cap(A-C)$

9. **证明** (1)$\Rightarrow$(2)。因为，$A\subseteq B$，则$\overline{B}\subseteq\overline{A}$，

所以，$\overline{A}\cup B\supseteq\overline{B}\cup B = U$，因此，$\overline{A}\cup B = U$。

(2)$\Rightarrow$(3)。$\overline{A}\cup B = U$ ，$A\cap\overline{B} = \overline{\overline{A}\cup B} = \overline{U} = \phi$。

(3)$\Rightarrow$(1)。因为，$A\cap\overline{B} = \phi$，所以，

$$B=\phi\cup B=(A\cap\overline{B})\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)$$

$$=(A\cup B)\cap U = A\cup B$$

因此 $A\subseteq B$。

习题3.3

1. **解** (1) $|\phi|=0$; (2) $|\{\phi\}|=1$; (3) $|\{1,2,\{3,\{2,1\}\}\}|$ 3; (4) $|\{1,2,1\}|=2$。

2. 解 (1)①8，②8，③8，④10，⑤3，⑥6，⑦5，⑧12。

(2)因为，$|\overline{N\cup T\cup F}| = |U|-|N|-|T|-|F|+|N\cap T|+|N\cap F|+|T\cap F|-|N\cap T\cap F|$，

所以 $|N\cap T\cap F| = |U|-|N|-|T|-|F|+|N\cap T|+|N\cap F|+|T\cap F|-|\overline{N\cup T\cup F}|$

=60-25-26-26+9+11+8-8=3

(3) $|(N\cap\overline{T}\cap\overline{F})\cup(\overline{N}\cap T\cap\overline{F})\cup(\overline{N}\cap\overline{T}\cap F)|$

$=|N\cup T\cup F|-|N\cap T|-|N\cap F|-|T\cap F|+2\times|N\cap T\cap F|$

=52-11-9-8+3×2=30

3. 解 设$A=\{x|x\in N, 1\le x\le 100, x$能被 5 整除$\}$，$B=\{x|x\in N, 1\le x\le 100, x$能被 4 整除$\}$，$C=\{x|x\in N, 1\le x\le 100, x$能被 6 整除$\}$，则$|A\cap B\cap C| = \left\lfloor\frac{100}{(5,4,6)}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{100}{60}\right\rfloor = 1$，$|A| = \left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor = 20$，因此，

$|A\cap\overline{B\cap C}| = |A|-|A\cap B\cap C|$=20-1=19。

习题3.4

1. **解** (1)20=2×7+6；

(2)58=2×27+4；

(3)3=0×8+3；

(4)57=3×19+0。

2. 解 ⑴因为 $35 = 2\times14+7$, $14 = 2\times7$ 。所以，14 和 35 的最大公因数为 7，即 GCD(14,35)=7，且由以上两式可推得 7=1×35-2×14。

⑵因为 58=1×34+24,34=1×24+10,24=2×10+4,10=2×4+2,4=2×2。

所以 34 和 58 的最大公因数为 2，即 GCD(34,58)=2，且由以上各式可推得 2=12×34-7×58。

⑶因为 $252 = 1\times180+72$ ， $180 = 2\times72+36$ ， $72 = 2\times36$ 。所以，180 和 252 的最大公因数为 36，即 GCD(180,252)=36，且由以上各式可推得 36=3×180-2×252。

⑷因为 $128 = 1\times77+51$ ， $77 = 1\times51+26$ ， $51 = 1\times26+25$ ， $26 = 1\times25+1$ 。所以 128 和 77 互素，即 GCD(128,77)=1，且由以上各式可推得 1=5×77-3×128。

3. 解 ⑴因为 $108 = 1\times72+36$ ， $72 = 2\times36$ ，所以 GCD(108,72)=36，因此 LCM(108,72)=108×72/36=216。

⑵因为 $245 = 1\times175+70$ ， $175 = 2\times70+35$ ， $70 = 2\times35$ ，所以 GCD(245,175)=35，因此 LCM(245,175)=245×175/35=1225。

⑶因为 $252 = 1\times180+72$ ， $180 = 2\times72+36$ ， $72 = 2\times36$ ，所以 GCD(252,180)=36，因此 LCM(252,180)=252×180/36=1260。

⑷因为 $81 = 1\times64+15$ ， $64 = 4\times15+4$ ， $15 = 3\times4+3$ ， $3 = 1\times3+1$ ， $1 = 1\times1$ ，所以 GCD(64,81)=1，因此 LCM(64,81)=64×81=5184。

4．**证明** ⑴设 $GCD(a,bc)=d_1$ ，则存在整数 s_1 、 t_1 ，使得 $s_1a+t_1bc=d_1$ ，因为 d 是 a 、 b 的最大公因数，所以， $d\,|\,a$ 、 $d\,|\,b$ 。因此，

$$d\,|\,d_1 \qquad ①$$

另一方面，因为 d_1 是 a 、 bc 的最大公因数，所以 $d_1\,|\,a$ 、 $d_1\,|\,bc$ ，因此， d_1 与 c 互素，否则 d_1 与 c 有大于 1 的公因数 d_2 ，则 $d_2|\,c$， $d_2|\,d_1$，又 $d_1\,|\,a$ ，由整除的传递性，所以， $d_2\,|\,a$ 。因此， a 与 c 有大于 1 的因数 d_2 ，这与 GCD(a,c)=1 矛盾。

由于 d_1 与 c 互素，且 $d_1\,|\,bc$ ，由定理 6，则 $d_1\,|\,b$ ，又 $d_1\,|\,a$ ，因此

$$d_1\,|\,d \qquad ②$$

由于 d 、 d_1 都是正整数，由①②可得 $d_1=d$ 。

⑵因为 b,c 都和 a 互素，则 GCD(a,b)=1，GCD(a,c)=1，由⑴则有 GCD(a, bc)=1，即 bc 也和 a 互素。

5. 证明 设 GCD(a,b)=d，则 $d|\,a$，$d|\,b$。因为 c>0，所以，$cd|\,ac$，$cd|\,bc$。

另一方面，因为 GCD(a,b)=d，所以存在 $s,t\in I$,使得 $sa+tb=d$，此式两边同乘 c 得

$$sac+tbc=cd$$

因此，对于任何的正整数 e, 若 $e|\,ac$，$e|\,bc$，则 $e|\,cd$。又因为 cd>0，故 cd 是 ac 和 bc 的最大公因数，即 GCD(ac,bc)= cd= c·GCD(a,b)。

6.**证明** 因为 $a|\,m$，所以存在整数 q ，使得

$$m = aq$$

又 $b|\,m$，即 $b\,|\,aq$ ，而 a 、 b 互素，由定理 6，则有 $b\,|\,q$ 。

因此，存在整数 q_1，使得

$$q = bq_1,$$

代入既可得 $$m = abq_1$$

即 $ab\,|\,m$。

7.证明 设 $k = mq+r$ （ $0\le r<m$ ），

由 $a\,|\,k$ ， $a\,|\,m$ ，则 $a\,|\,r$ 。同理，由 $b\,|\,k$ ， $b\,|\,m$ ，则 $b\,|\,r$ 。即 r 为 a 、 b 的公倍数，又 m 是 a 、

b 的最小公倍数，因此，$r=0$，即 $k=mq$，所以 $m|k$。

复习题3

1. **解** (1)S_5={3，5}，$X\cap S_5=\phi$，所以，X 中不含元素 3,5。故 $X=S_2$。

(2)因为 $X-S_3=\phi$，所以 $X\subseteq S_3$，因此 $X=S_3$ 或 S_5。

(3)因为，$X\cup S_2=S_1$，所以，S_1-$S_2\subseteq X$，因此，$X=S_3$ 或 S_1。

(4)S_2={2，4，6，8}，$X\cap S_2=\phi$，所以 X 中不含元素 2,4,6,8,所以 $X=S_3$ 或 S_5，但 $X\subseteq S_4$，故 $X=S_5$。

(5)因为 $X\subseteq S_1$，所以，$X=S_2, S_3, S_4, S_5$，而 $X\cap S_3=\phi$，即 X 中无奇数，所以，$X=S_2$。

2.**解** $A\subseteq B$ 并且 $A\in B$ 是可以作到的。

如 $B=\{a,\{a\}\}$，$A=\{a\}$，则 $A\subseteq B$ 并且 $A\in B$.

3.**解** (1) $A_1=\{1,2,3\}$，则 $P(A_1)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$；

(2) $A_2=\{\{1,\{2,3\}\}$，则 $P(A_2)=\{\phi,\{\{1,\{2,3\}\}\}$；

(3) $A_3=\{1,\{2,3\}\}$，则 $P(A_3)=\{\phi,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$；

(4) $A_4=\{\{1,2\},\{2,1,1\},\{2,1,2,1\}\}$ ={{1，2}}，则 $P(A_4)=\{\phi,\{\{1,2\}\}\}$。

4.**证明** 对于任意的 $X\in P(B)$，则 $X\subseteq B$，又 $B\subseteq A$，$X\subseteq A$，所以 $X\in P(A)$，

由 X 的任意性可知，$P(B)\subseteq P(A)$.

5.**解** (1)可构成 2^{101} 个子集。

(2)其中有 $\dfrac{2^{101}}{2}=2^{100}$ 个子集中元素个数为奇数。

6.(1)**证明** 左边$=(A-B)-C=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=A\cap(\overline{B\cup C})$

$=A-(B\cup C)$=右边,故原题得证.

(2)**证明** $(A-B)-C=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

$=A\cap\overline{C}\cap\overline{B}=(A-C)-B$

7.**解** (1) $\phi\cap\{\phi\}=\phi$；

(2) $\{\phi\}\cap\{\phi\}=\{\phi\}$；

(3) $\{\phi,\{\phi\}\}-\phi=\{\phi,\{\phi\}\}$；

(4) $\{\phi,\{\phi\}\}-\{\phi\}=\{\{\phi\}\}$；

(5) $\{\phi,\{\phi\}\}-\{\{\phi\}\}=\{\phi\}$。

8. **证明** 若 $A\oplus B=A\oplus C$，对于任意的 $x\in B$，

(1)若 $x\in A$，则 $x\in A\cap B$，所以，$x\notin A\oplus B$，则 $x\notin A\oplus C$，

由 $x\in A$ 可得 $x\in A\cup C$，而 $x\notin A\oplus C$，则 $x\in A\cap C$，所以 $x\in C$；

因此，$B\subseteq C$。

(2)若 $x\notin A$，则 $x\notin A\cap B$，又 $x\in B$，所以，$x\in A\cup B$，

由 $x\notin A\cap B$ 且 $x\in A\cup B$，可得，$x\in A\oplus B$，因此，$x\in A\oplus C$，

但 $x\notin A$ 且 $x\in A\oplus C$，所以，$x\in C$，因此，$B\subseteq C$。

采用同样的方法可证 $C\subseteq B$。

故 $B=C$。

9.方法⑴**证明** 对于任意的 $x\in(A-B)\cup(B-A)$，则 $x\in A-B$ 或 $x\in B-A$，即有 $x\in A$ 且 $x\notin B$,或者 $x\in B$ 且 $x\notin A$；

当 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 时, $x\in A\bigcup B$ 且 $x\notin A\bigcap B$,

当 $x\in B$ 且 $x\notin A$ 时,亦有 $x\in A\bigcup B$ 且 $x\notin A\bigcap B$,

故有 $x\in((A\bigcup B)-(A\bigcap B))$ 。

因此，$(A-B)\bigcup(B-A)\subseteq(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$

同理可证 $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)\subseteq(A-B)\bigcup(B-A)$

综上知，$(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=(A-B)\bigcup(B-A)$

方法⑵作**集合成员表**如表 1-4 所示

可见 $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$ 与 $(A-B)\bigcup(B-A)$ 对应填入值相同

故 $(A\bigcup B)-(A\bigcap B)=(A-B)\bigcup(B-A)$.

表 1-4

A	B	A-B	B-A	$(A-B)\bigcup(B-A)$	$A\bigcup B$	$A\bigcap B$	$(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0

方法(3) **证明** $(A-B)\bigcup(B-A)=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

$=(A\cup\overline{A})\cap(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup B)=U\cap(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}\cap U$

$=(A\bigcup B)\bigcap(\overline{A\bigcap B})=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$

10.**解** 设 A、B、C 分别表示选修法、德、俄语的学生的集合

则 $|A|=260$，$|B|=208$，$|C|=160$，$|A\cap B|=76$ ，$|A\cap C|=48$，$|B\cap C|=62$，

$|A\cap B\cap C|=30$，$|\overline{A\cup B\cup C}|=|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}|$=150。

$|U|=|\overline{A\cup B\cup C}|+|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

=150+260+208+160-76-48-62+30=622

(2) $|A\cap B\cap\overline{C}|=|A\cap B|-|A\cap B\cap C|$=76-30=46;

(3)同理 $|\overline{A}\cap B\cap C|=|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$=62-30=32;

(4) $|A\cap\overline{B}\cap\overline{C}|=|A\cap\overline{B\cup C}|=|A|-|A\cap(B\cup C)|$

$=\left|A\right|-\left|(A\cap B)\cup(A\cap C)\right|=\left|A\right|-\left|A\cap B\right|-\left|A\cap C\right|+\left|A\cap B\cap C\right|$

=260-76-48+30=166；

(5)同理 $\left|\overline{A}\cap B\cap\overline{C}\right|=100$。

11.**解** $|P(B)|=64\Rightarrow|B|=6$；
又 $|P(A\cup B)|=256\Rightarrow|A\cup B|=8$；

$\left|A\cup B\right|=\left|A\right|+\left|B\right|-\left|A\cap B\right|$，则 $|A\cap B|=6+3-8=1$，所以 $|A-B|=|A|-|A\cap B|=3-1=2$；

$|A\oplus B|=\left|A\cup B\right|-\left|A\cap B\right|=8-2=6$。

12.**证明** 因为 GCD(a，b)=d，则存在整数 s、t，使得

$$sa+tb=d$$

又因为 a，b 不全为 0，所以 GCD(a，b)=$d\neq 0$，因此，$d\,|\,a$、$d\,|\,b$

所以，$\dfrac{a}{d}$、$\dfrac{b}{d}$ 都是整数，由此可得

$$s\cdot\frac{a}{d}+t\cdot\frac{b}{d}=1$$

所以，对于任意的正整数 c，若 $c\left|\frac{a}{d},c\right|\frac{b}{d}$，则 $c|1$，因此 GCD$(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$。

反之，因为 d 是 a，b 的正因数，所以 $\dfrac{a}{d}$、$\dfrac{b}{d}$ 都是整数，又 GCD$(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$，则存在整数 s、t，使得

$$s\cdot\frac{a}{d}+t\cdot\frac{b}{d}=1$$

两边乘以 d 得

$$sa+tb=d$$

因此，对于任何的正整数 c，若 $c|a$，$c|b$，则 $c|d$，故 GCD（a，b）=d。

第四章 关系

习题 4.1

1.解 $A\times B$={(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),({a,b},1),({a,b},2)}，
$B\times A$={(1,a), (1,b), (1, {a,b}),(2, a), (2, b), (2, {a,b})}，
B × B={(1,2),(1,2),(2,1),(2,2)} ，
B^3={(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2), (2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)} 。

2.解 $P(A)=\{\phi,\{x\},\{y\},\{x,y\}\}$，因此，$P(A)\times A=\{<\phi,x>,<\phi,y>,<\{x\},x>,$
$<\{x\},y>,<\{y\},x>,<\{y\},y>,<\{x,y\},x>,<\{x,y\},y>\}$。

3.解 (1)不正确。例如令 $A=\phi$，$B=\{1，2\}$，$C=\{x\}$，则 $A\times B=A\times C=\phi$

(2)正确。因为，$\forall<x, y>\in(A-B)\times C\Rightarrow x\in(A-B)\wedge y\in C\Rightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge y\in C$
$\Rightarrow x\in A\wedge y\in C\wedge x\notin B\wedge y\in C\Rightarrow<x, y>\in A\times C\wedge<x, y>\notin B\times C$
$\Rightarrow<x, y>\in(A\times C-B\times C)$ 。所以，$(A-B)\times C\subseteq(A\times C-B\times C)$ 。
又因为，$\forall<x, y>\in(A\times C-B\times C)\Rightarrow<x, y>\in A\times C\wedge<x, y>\notin B\times C$

$\Rightarrow (x\in A\wedge y\in C)\wedge[(x\notin B\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\notin C)\vee(x\notin B\wedge y\notin C)]$

$\Rightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge y\in C)\Rightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge y\in C\Rightarrow x\in(A-B)\wedge y\in C$

$\Rightarrow<x, y>\in(A-B)\times C$。所以，$(A\times C-B\times C)\subseteq(A-B)\times C$。

综上所述，$(A-B)\times C=(A\times C-B\times C)$。

⑶正确。例如 $A=\phi$，$A\times A=\phi$，显然 $A\subseteq A\times A$。但是当 $A\neq\phi$ 时，因为 $A\times A$ 是由集合 A 中的两个元素的序偶组成的集合，所以 $A\subseteq A\times A$ 一般不成立。

4.证明 (1)$\forall<x, y>\in A\times(B\cup C)\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in(B\cup C))$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C))\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow(<x, y>\in A\times B)\ \vee(<x, y>\in A\times C)\Leftrightarrow<x, y>\in((A\times B)\ \cup(A\times C))$

因此 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$。

同理可证(2)。

5.证明 ⑴$\forall<x, y>\in(A\times C)\cup(B\times D)\Leftrightarrow<x, y>\in(A\times C)\vee<x, y>\in(B\times D)$

$\Leftrightarrow<x, y>\in(A\times C)\vee<x, y>\in(B\times D)\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee y\in D)\wedge(y\in C\vee x\in B)\wedge(y\in C\vee y\in D)$

$\Rightarrow(x\in A\vee x\in B)\wedge(y\in C\vee y\in D)\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\wedge y\in(C\cup D)$

$\Leftrightarrow<x, y>\in(A\cup B)\times(C\cup D)$。

因此，$(A\times C)\cup(B\times D)\subseteq(A\cup B)\times(C\cup D)$。

⑵设$\forall x\in A$，若$<x, x>\in A\times A$，而$A\times A=B\times B$，所以，$<x, x>\in B\times B$，即 $x\in B$，因此 $A\subseteq B$；同理可证 $B\subseteq A$；故 $A=B$。

习题 4.2

1.解 因为，$A\times B=\{(1, a), (2, a), (3, a)\}$，所以，$R_1=\phi$、$R_2=\{<1, a>\}$、$R_3=\{<2, a>\}$、$R_4=\{<3, a>\}$、$R_5=\{<1, a>, <2, a>\}$、$R_6=\{<1, a>, <3, a>\}$、$R_7=\{<2, a>, <3, a>\}$、$R_8=\{<1, a>, <2, a>, <3, a>\}$。

2.解 $L=\{<1, 1>, <2, 1>, <2, 2>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>, <4, 1>, <4, 2>, <4, 3>, <4, 4>, <8, 1>, <8, 2>, <8, 3>, <8, 4>, <8, 8>, <9, 1>, <9, 2>, <9, 3>, <9, 4>, <9, 8>, <9, 9>\}$；

$D=\{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 8>, <1, 9>, <2, 2>, <2, 4>, <2, 8>, <3, 3>, <3, 9>, <4, 4>, <4, 8>, <8, 8>, <9, 9>\}$

$L\cap D=\{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <8, 8>, <9, 9>\}$

$L\cup D=\{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 8>, <1, 9>, <2, 1>, <2, 2>, <2, 4>, <2, 8>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>, <3, 9>, <4, 1>, <4, 2>, <4, 3>, <4, 4>, <4, 8>, <8, 1>, <8, 2>, <8, 3>, <8, 4>, <8, 8>, <9, 1>, <9, 2>, <9, 3>, <9, 4>, <9, 8>, <9, 9>\}$

$L-D=\{<2, 1>, <3, 1>, <3, 2>, <4, 1>, <4, 2>, <4, 3>, <8, 1>, <8, 2>, <8, 3>, <8, 4>, <9, 1>, <9, 2>, <9, 3>, <9, 4>, <9, 8>\}$

3.解 $X\cup Y=\{a, b, c, d\}$，则 $X\cup Y$ 上的全域关系 U、恒等关系 I 分别为

$U=\{<a, a>, <a, b>, <a, c>, <a, d>, <b, a>, <b, b>, <b, c>, <b, d>, <c, a>, <c, b>, <c, c>, <c, d>, <d, a>, <d, b>, <d, c>, <d, d>\}$；

$I=\{<a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>\}$。

4.解 $P\cap Q=\{<1, 2>, <2, 3>\}$；

$P\cup Q=\{<1, 2>, <1, 4>, <2, 3>, <4, 4>, <4, 2>\}$；

$\mathrm{dom}P=\{1, 2, 4\}$，$\mathrm{ran}P=\{2, 3, 4\}$；

$\mathrm{dom}Q=\{1, 2, 4\}$，$\mathrm{ran}\,Q=\{2, 3\}$；

$\mathrm{dom}(P\cup Q)=\{1, 2, 4\}$，$\mathrm{ran}(P\cup Q)=\{2, 3, 4\}$。

5.证明 (1)对于任意元素 $x\in A$，

$x\in \mathrm{dom}(R_1\cup R_2)\Leftrightarrow\exists y(<x, y>\in R_1\cup R_2)$

$\Leftrightarrow\exists y(<x, y>\in R_1\vee<x, y>\in R_2)$

$\Leftrightarrow x\in \mathrm{dom}(R_1)\vee x\in \mathrm{dom}(R_2)$

$\Leftrightarrow x\in (\mathrm{dom}(R_1)\cup \mathrm{dom}(R_2))$

故 $\mathrm{dom}(R_1\cup R_2)=\mathrm{dom}R_1\cup \mathrm{dom}R_2$

(2)对于任意元素 $y\in B$

$y\in \mathrm{ran}(R_1\cap R_2)\Leftrightarrow\exists x(<x, y>\in R_1\cap R_2)\Leftrightarrow\exists x(<x, y>\in R_1\wedge<x, y>\in R_2)$

$\Rightarrow\exists x(<x, y>\in R_1)\wedge\exists x(<x, y>\in R_2)\Leftrightarrow y\in \mathrm{ran}R_1\wedge y\in \mathrm{ran}R_2$

$\Leftrightarrow y\in (\mathrm{ran}R_1\cap \mathrm{ran}R_2)$。

故 $\mathrm{ran}(R_1\cap R_2)\subseteq \mathrm{ran}R_1\cap \mathrm{ran}R_2$

6.解 R_1={<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>}；R_2={<2, 3>, <4, 1>}；

R_3={<0, 0>, <0, 1>, <0, 2>, <0, 4>,<0, 6>,<0, 8>, <1, 1>, <2, 2>, <4, 4>, <6, 6>,<8, 8>}；

R_4={<0,1>,<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2, 1>,<2, 3>, <4, 1>,<4, 3>, <6, 1>,<8, 1>,<8, 3>}

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M_{R_2}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M_{R_3}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad M_{R_4}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}。$$

关系图如下：

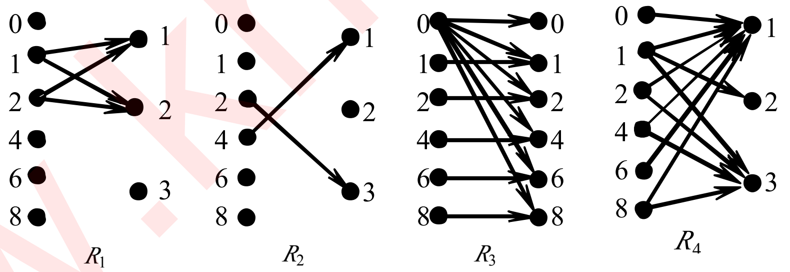


图 4-1

习题 4.3

1.解 从关系复合的定义来求：

$R_1\cdot R_2$={<1, 4>, <1, 3>, <3, 2>, <4, 2>}；

$R_2\cdot R_1$={<1, 3>, <2, 3>}；

$R_1^2=R_1\cdot R_1$={<1, 1>, <1, 2>, <3, 3>, <4, 3>}；

$R_2^2=R_2\cdot R_2$={<2, 2>, <3, 3>, <3, 4>}。

2.解 $\mathrm{dom}(R_1\cdot R_2)\subseteq A$；$\mathrm{ran}(R_1\cdot R_2)\subseteq C$。

3.解 (1)利用定义求解，

R_1={<1, 1>, <1, 2>,<1, 3>,<2, 1>,<2, 2>,<2, 3>,<3, 1>,<3, 3>}；

R_2={<3, 1>}；

$R_1\cdot R_2$={<1, 1>, <2, 1>,<3, 1>}；

$R_1\cdot R_2\cdot R_1$={<1, 1>,<1, 2>,<1, 3>,<2, 1>,<2, 2>,<2, 3>,<3, 1>, <3, 2>, <3, 3> }；

R_1^{-1}={<1, 1>,<1, 2>,<1, 3>,<2, 1>,<2, 2>,<3, 1>, <3, 2>, <3, 3>}；

(2)利用矩阵求解，

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}；\quad M_{R_2}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}；$$

$$M_{R_1\cdot R_2}=M_{R_1}\circ M_{R_2}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}；$$

$$M_{R_1\cdot R_2\cdot R_1}=M_{R_1\cdot R_2}\circ M_{R_1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}；$$

$$M_{R_1^{-1}}=M_{R_1}^T=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}。$$

关系图如图 4-2：

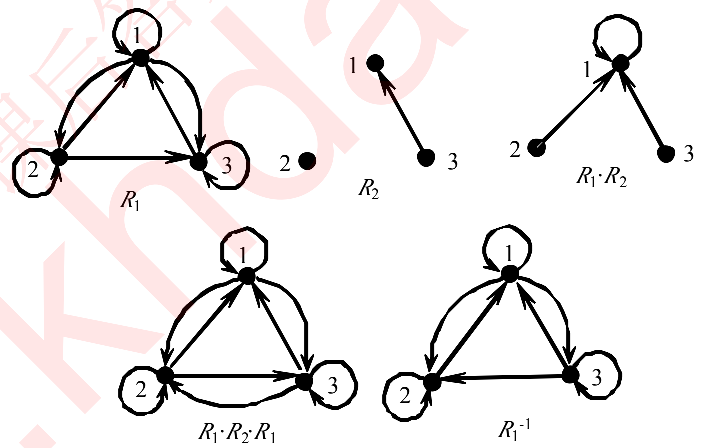


图 4-2

4.解 $R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 4\rangle\}$，

$R^2=\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle,\}$，

$R^3=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 4\rangle\}$，

$R^4=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle\}$，

$R^5=\{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 4\rangle\}$，

$R^6=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5,5\rangle\}$，

$R^7=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 4\rangle\}= R^1$。

所以，$m=1$、$n=7$ 可使得 $R^1=R^7$。

5.解 $$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^2}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M_{R^3}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^4}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$=M_{R^2}$，

因此，$M_{R^5}=M_{R^4}\circ M_R=M_{R^2}\circ M_R=M_{R^3}$，

一般地，$R^{2k}=R^2,\qquad R^{2k+1}=R^3,\qquad (k\geq 1)$。

6.证明 ⑴对于任意的$<a,b>\in(R-S)^{-1}$，则$<b,a>\in R-S$，所以，$<b,a>\in R$，但$<b,a>\notin S$，因此，再由逆关系的定义有，$<a,b>\in R^{-1}$，而$<a,b>\notin S^{-1}$，故$<a,b>\in R^{-1}-S^{-1}$。即$(R-S)^{-1}\subseteq R^{-1}-S^{-1}$。

同理可证 $R^{-1}-S^{-1}\subseteq(R-S)^{-1}$。

综合可得$(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$。

⑵由集合的笛卡尔积和逆关系的定义，因为，对于任意的 $a\in A,b\in B$ 都有，$<b, a>\in B\times A$，则$<a,b>\in A\times B$，所以，$<b, a>\in(A\times B)^{-1}$，即 $B\times A\subseteq(A\times B)^{-1}$，

另一方面，因为，对于任意的 $a\in A,b\in B$ 都有，$<b,a>\in(A\times B)^{-1}$，所以，则$<a,b>\in A\times B$，所以，$<b, a>\in B\times A$，即$(A\times B)^{-1}\subseteq B\times A$。

综合上述有，$(A\times B)^{-1}=B\times A$。

⑶用反证法证明$\phi^{-1}=\phi$，假设存在 $a\in A,b\in B$ 使得，$<b,a>\in\phi^{-1}$，则$<a,b>\in\phi$，这与ϕ是空集矛盾。

⑷先证明 $R\subseteq S\Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$。对于任意的 $a\in A,b\in B$，若$<b,a>\in R^{-1}$，由逆关系的定义则$<a,b>\in R$，而 $R\subseteq S$，所以，$<a,b>\in S$，因此，$<b,a>\in S^{-1}$，即 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$。

再证明 $R^{-1}\subseteq S^{-1}\Rightarrow R\subseteq S$。若$<a,b>\in R$，则$<b,a>\in R^{-1}$，而 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$，所以，$<b,a>\in S^{-1}$，因此，$<a,b>\in S$，即$R\subseteq S$。

习题 4.4

1.解 如表 4-2

关系	自反的	反自反的	对称的	反对称的	传递的
R_1	*N*	*N*	*Y*	*N*	*Y*
R_2	*N*	*Y*	*Y*	*N*	*N*

R_3	N	Y	N	Y	N

表 4-2

2.解 ⑴R 具有自反性，因为对于任意的 $x \in I$，$x(x-1)=x(x-1)$，即$<x, x> \in R$，所以 R 具有自反性；

⑵因为 R 具有自反性，所以 R 不具有反自反性；

⑶R 具有对称性，因为对于任意的 $x, y \in I$，若$<x, y> \in R$，则 $x(x-1)=y(y-1)$，所以 $y(y-1)=x(x-1)$，即$<y, x> \in R$，因此 R 具有对称性；

⑷显然 R 不具有反对称性；

⑸R 具有传递性，设$<x, y> \in R$，$<y, z> \in R$，即 $x(x-1)=y(y-1)$，$y(y-1)=z(z-1)$，显然有 $x(x-1)=z(z-1)$，即$<x, z> \in R$，所以 R 具有传递性。

3.解 (1)$R=\{<0, 0>, <0, 1>, <0, 2>, <0, 4>, <1, 0>, <1, 1>, <1, 2>, <1, 4>, <2, 0>, <2, 1>, <2, 2>, <4, 0>, <4, 1>\}$，关系图如图 4-3。

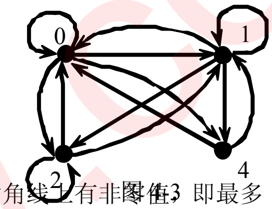


图 4-3

⑵R 具有对称性。

4.解 若 A 上关系 R 是反对称的，则 $R \cap R^{-1}$ 关系矩阵 $M_{R \cap R^{-1}}$ 中最多只有主对角线上有非零值，即最多只有|A|个非零值。

5.解 答案可以有很多组，下面给出一组答案如下。

(1)$R=\{<1, 1>\}$；

(2)$R=\{<1, 2>, <2, 1>, <3, 1>\}$；

(3)$R=\{<2, 2>, <3, 3>\}$；

(4)$R=\{<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>\}$。

6.证明 因为，R_1，R_2 为集合 A 上的自反关系，则对于任意的 $x \in A$，有 $<x, x> \in R_1$，且$<x, x> \in R_2$，因此，$<x, x> \in R_1 \cdot R_2$，故 $R_1 \cdot R_2$ 是 A 上的自反关系。

习题 4.5

1.解 $r(R_1)=R_1 \cup I_A=\{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <b, c>, <c, c>\}$；

$s(R_1)=R_1 \cup R_1^{-1}=\{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, b>\}$；

$t(R_1)=\{<a, b>, <a, c>, <b, c>\}$；

$r(R_2)=R_2 \cup I_A=\{<a, a>, <a, b>, <b, b>, <b, c>, <c, a>, <c, c>\}$

$s(R_2)=R_2 \cup R_2^{-1}=\{<a, a>, <a, b>, <a, c>, <b, a>, <b, c>, <c, a>, <c, b>\}$

$t(R_2)=\{<a, a>, <a, b>, <a, c>, <b, a>, <b, b>, <b, c>, <c, a>, <c, b>, <c, c>\}$

关系矩阵如下：

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M_{r(R_1)}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad M_{s(R_1)}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad M_{t(R_1)}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M_{R_2}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\quad M_{r(R_2)}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix},\quad M_{s(R_2)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\quad M_{t(R_2)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}。$$

关系图如图 4-4：

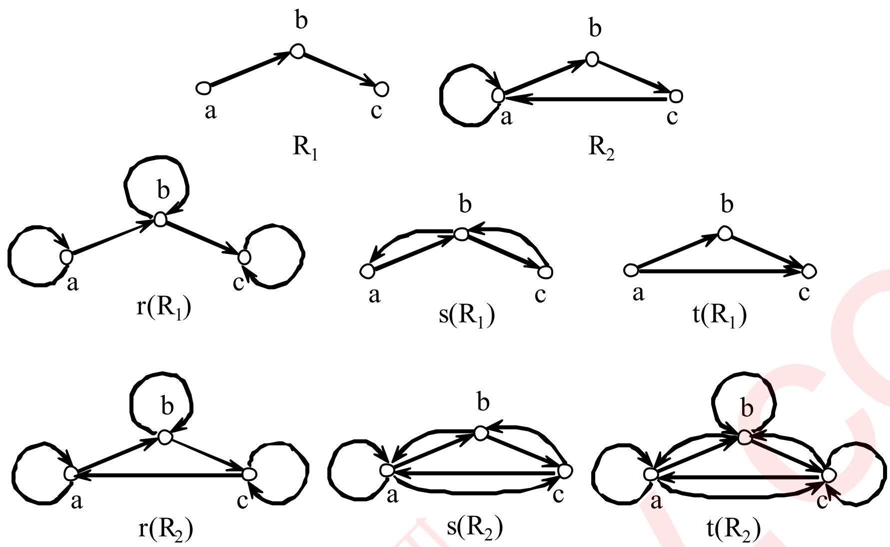


图 4-4

2.解 $M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，$M_{I_A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$M_{R^{-1}}=M_R^T=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

则 $M_{r(R)}=M_R\vee M_{I_A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$；$M_{s(R)}=M_R\vee M_{R^{-1}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$；

$$M_{R^2}=M_R\circ M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix},$$

$$M_{R^3}=M_{R^2}\circ M_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$M_{R^4}=M_{R^3}\circ M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=M_{R^2},$$

$$M_{t(R)}=M_R\vee M_{R^2}\vee M_{R^3}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix};$$

$$M_{rs(R)}=M_I\vee M_{s(R)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix};$$

$$M_{sr(R)}=M_{r(R)}\vee M_{(r(R))^{-1}}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\vee\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}。$$

3.证明 ⑴因为，$R_1\subseteq R_2$，所以，$I_A\cup R_1\subseteq I_A\cup R_2$，即 $r(R_1)\subseteq r(R_2)$。

⑵因为，$R_1\subseteq R_2$，由习题 4.3 第 6⑷题可得 $R_1^{-1}\subseteq R_2^{-1}$，所以，$R_1\cup R_1^{-1}\subseteq R_2\cup R_2^{-1}$，即 $s(R_1)\subseteq s(R_2)$。

⑶因为，$R_1\subseteq R_2$，所以，$R_1^2\subseteq R_2^2, R_1^3\subseteq R_2^3,\cdots,R_1^n\subseteq R_2^n(n\in I^+),\cdots$，则

$R_1\cup R_1^2\cup R_1^3\cup\cdots\cup R_1^n\cup\cdots\subseteq R_2\cup R_2^2\cup R_2^3\cup\cdots\cup R_2^n\cup\cdots$，即

$t(R_1)\subseteq t(R_2)$。

4.证明 ⑴由自反闭包的定义又 $r(R_1)=I_A\cup R_1\subseteq I_A\cup R_1\cup R_2=r(R_1\cup R_2)$，

同理有 $r(R_2)=I_A\cup R_2\subseteq I_A\cup R_1\cup R_2=r(R_1\cup R_2)$，

所以有 $r(R_1)\cup r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$；

另一方面，$\forall<a,b>\in r(R_1\cup R_2)=I_A\cup R_1\cup R_2$，下面分两种情况来证明 $<a,b>\in r(R_1)\cup r(R_2)$。

①如果 $a=b$，则 $<a,b>\in I_A$，所以 $<a,b>\in r(R_1)\cup r(R_2)$；

②如果 $a\neq b$，则 $<a,b>\in R_1\cup R_2$，因此，$<a,b>\in R_1$或 $<a,b>R_2$，若 $<a,b>\in R_1$，则 $<a,b>\in r(R_1)$，所以，$<a,b>\in r(R_1)\cup r(R_2)$，同理，若 $<a,b>\in R_2$，则 $<a,b>\in r(R_2)$，所以，$<a,b>\in r(R_1)\cup r(R_2)$。

故 $r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$。

综上所述，$r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$。

⑵因为 $R_1\subseteq R_1\cup R_2$，且 $R_2\subseteq R_1\cup R_2$，所以由第 3 题有

$s(R_1)\subseteq s(R_1\cup R_2)$ ，且 $s(R_2)\subseteq s(R_1\cup R_2)$，因此，$s(R_1)\cup s(R_2)\subseteq s(R_1\cup R_2)$；

另一方面，$\forall<a,b>\in s(R_1\cup R_2)=(R_1\cup R_2)\cup(R_1\cup R_2)^{-1}$，则 $<a,b>\in(R_1\cup R_2)$或 $<a,b>\in(R_1\cup R_2)^{-1}$，①若 $<a,b>\in(R_1\cup R_2)$，则 $<a,b>\in R_1$ 或 $<a,b>\in R_2$，所以，$<a,b>\in s(R_1)$或 $<a,b>\in s(R_2)$，因此，$<a,b>\in s(R_1)\cup s(R_2)$；②若 $<a,b>\in(R_1\cup R_2)^{-1}$，则 $<b,a>\in(R_1\cup R_2)$，所以，$<b,a>\in R_1$或 $<b,a>\in R_2$，因此，$<a,b>\in R_1^{-1}$或 $<a,b>\in R_2^{-1}$，所以，$<a,b>\in s(R_1)$或 $<a,b>\in s(R_2)$，因此，$<a,b>\in s(R_1)\cup s(R_2)$。

故 $s(R_1\cup R_2)\subseteq s(R_1)\cup s(R_2)$。

综上所述，$s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$。

(3)对于任取的$\langle a, b\rangle\in t(R_1)\cup t(R_2)$，则$\langle a, b\rangle\in t(R_1)$或$\langle a, b\rangle\in t(R_2)$。若$\langle a, b\rangle\in t(R_1)$，则存在正整数 m 使得$<a,b>\in R_1^m$，因此$<a,b>\in(R_1\cup R_2)^m$，所以，$\langle a, b\rangle\in t(R_1\cup R_2)$；同理若$\langle a, b\rangle\in t(R_2)$，可证$\langle a, b\rangle\in t(R_1\cup R_2)$。

综上所述，$t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$。

5.解 $R=\{\langle x, y\rangle\}$是集合 $A=\{x, y\}$上的二元关系，则 $st(R)=\{\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle\}$，而 $ts(R)=\{\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle\}$。因此 $st(R)\neq ts(R)$。

6.证明 $rt(R)=r(R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n\cup\cdots)=I_A\cup R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n\cup\cdots$

$=(I_A\cup R)\cup(I_A\cup R^2)\cup\cdots\cup(I_A\cup R^n)\cup\cdots$

$\subseteq(I_A\cup R)\cup(I_A\cup R)^2\cup\cdots\cup(I_A\cup R)^n\cup\cdots=tr(R)$。

反之，对于任意的$\langle a, b\rangle\in tr(R)$，则存在正整数 n，使得$\langle a, b\rangle\in(I_A\cup R)^n$，即$\langle a, b\rangle\in I_A\cup R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$，亦即$\langle a, b\rangle\in rt(R)$，所以，$tr(R)\subseteq rt(R)$。

综上所述，$tr(R)=rt(R)$。

习题 4.6

1.解 A 上共有 15 个等价关系。由等价关系和划分是一一对应关系，而 A 共有如下的 15 个划分：
$\pi_1=\{\{1,2,3,4\}\}$，$\pi_2=\{\{1\},\{1,2,3,4\}\}$，$\pi_3=\{\{2\},\{1,3,4\}\}$，$\pi_4=\{\{3\},\{1,2,4\}\}$，$\pi_5=\{\{4\},\{1,2,3\}\}$，$\pi_6=\{\{1,2\},\{3,4\}\}$，$\pi_7=\{\{1,3\},\{2,4\}\}$，$\pi_8=\{\{1,4\},\{2,3\}\}$，$\pi_9=\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$，$\pi_{10}=\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$，$\pi_{11}=\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$，$\pi_{12}=\{\{2,3\},\{1\},\{4\}\}$，$\pi_{13}=\{\{2,4\},\{1\},\{3\}\}$，$\pi_{14}=\{\{3,4\},\{1\},\{2\}\}$，$\pi_{15}=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$。

与每个划分对应的等价关系由读者自行给出。

2.证明 要证明 R 是 A 上的等价关系，只需证明 R 是 A 上的自反关系。事实上，因为，$\forall a\in A$，总存在一个元素 $b\in A$，使$\langle a, b\rangle\in R$，而 R 是集合 A 中的对称关系，所以$\langle b, a\rangle\in R$，又因为 R 是 A 上的传递关系，有$\langle a, b\rangle\in R$ 且$\langle b, a\rangle\in R$ 时，可得$\langle a, a\rangle\in R$，即 R 是集合 A 中的自反关系。故 R 是等价关系。

3.解 (1)$R=\{a, d, e\}\times\{a, d, e\}\cup\{b, c\}\times\{b, c\}=\{\langle a, a\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, a\rangle, \langle e, d\rangle, \langle e, e\rangle\}\cup\{\langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$

(2)关系图如图 4-5。

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\1&0&0&1&1\\1&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

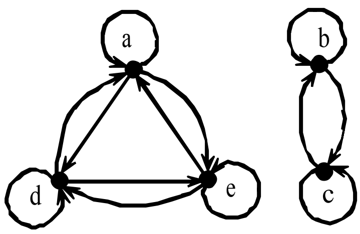


图 4-5

4.解 (1)不是等价关系。例如设 $A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，而显然 $A^2-R_1=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$不是等价关系；

(2)不是等价关系。例如 $A=\{1,2,3\}$，$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，而显然 $R_1-R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$不是等价关系；

(3)不是等价关系，令 $A=\{1, 2, 3\}$，$R_1=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

$R_1-R_2=\{\langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$，

$r(R_1-R_2)=(R_1-R_2)\cup I_A=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$，

因为$\langle 1, 3\rangle\in R_1-R_2$，$\langle 3, 2\rangle\in R_1-R_2$，但$\langle 1, 2\rangle\notin R_1-R_2$，显然 R_1-R_2 不具有传递性，所以 R_1-R_2 不是等价关系。

(4)不是等价关系，令 $A=\{1, 2, 3\}$，$R_1=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$，

$R_2=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$，

$R_1 \cdot R_2$={<1, 1>, <1, 2>, <2, 2>, <2, 1>, <3, 3>, <2, 3>, <3, 1>, <3, 2>}，

因为<3, 1>∈$R_1 \cdot R_2$，但<1, 3>∉$R_1 \cdot R_2$，所以 $R_1 \cdot R_2$ 不是等价关系。

(5)不是等价关系，令 A={1, 2, 3}，R_1={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>, <2, 1>}，

R_2={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <2, 3>, <3, 2>}

$R_1 \cup R_2$={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 3>, <3, 2>}，

因为<1, 2>∈R_1，<2, 3>∈R_2，但<1, 3>∉$R_1 \cdot R_2$，显然 $R_1 \cup R_2$ 不具有传递性，所以 $R_1 \cup R_2$ 不是等价关系。

5.解 (1)若$\pi_1=\pi_2$，则$\pi_1 \cup \pi_2$是集合 A 的划分，其它情况$\pi_1 \cup \pi_2$不是集合 A 的划分；例如设 A={1,2,3}，π_1={{1},{2,3}},π_2={{1,2},{3}}，而$\pi_1 \cup \pi_2$={{1},{1,2},{2,3},{3}}不是划分。

(2)若$\pi_1=\pi_2$，则$\pi_1 \cap \pi_2$是集合 A 的划分，其它情况$\pi_1 \cap \pi_2$不是集合 A 的划分，例如设 A={1,2,3}，π_1={{1},{2,3}},π_2={{1},{2},{3}}，而$\pi_1 \cup \pi_2$={{1}}不是集合 A 的划分；

(3)若$\pi_1 \cap \pi_2=\phi$，则$\pi_1-\pi_2$是集合 A 的划分，其它情况$\pi_1-\pi_2$不是集合 A 的划分，例如设 A={1,2,3}，π_1={{1},{2,3}},π_2={{1},{2},{3}}，而$\pi_1-\pi_2$={{2,3}}不是集合 A 的划分；

(4)因为$(\pi_1 \cap (\pi_2-\pi_1)) \cup \pi_1=\pi_1$，所以$(\pi_1 \cap (\pi_2-\pi_1)) \cup \pi_1$是集合 A 的划分。

6.证明 (1)①对任意的 x∈I，$x^2=x^2$，即<x, x>∈R，所以 R 是自反的；

②对任意的<x, y>∈R，即 $x^2=y^2$，则 $y^2=x^2$，即<y, x>∈R，所以 R 是对称的；

③对任意的<x, y>∈R，<y, z>∈R,即 $x^2=y^2$，$y^2=z^2$，显然 $x^2=z^2$，亦即<x, z>∈R，所以 R 是传递的；

综合①、②、③可知 R 是等价关系。

(2)R 的等价类可以分为{[0], [1], [2], …},其中 [0]={0}，[1]=[-1]={1, -1}，[2]=[-2]={2, -2}，…，[n]=[-n]={n, -n}，…。

习题 4.7

1.证明 (1)自反性。因为对任意的 x∈X，<x, x>∈I_X，所以<x, x>∈$I_X \cup R \cup R^{-1}$=R，即 R 是自反的；

(2)对称性。对于任意的<x, y>∈$I_X \cup R \cup R^{-1}$，且 x≠y，显然<x, y>∈$R \cup R^{-1}$，则<x, y>∈R，或<x, y>∈R^{-1}，因此，<x, y>∈R^{-1}，或<x, y>∈R，从而有<y, x>∈$R \cup R^{-1}$，所以<y, x>∈$I_X \cup R \cup R^{-1}$=R，即 R 是对称的；

综上所述，R 是 X 上的相容关系。

2.证**明** (1)对任意的 x∈A，有<x, x>∈R，所以 R 是自反的；

(2) 设任意的<x, y>∈R，且 x≠y，都有<y, x>R，即 R 是对称的；

综上所述，R 是 A 上的相容关系。

R 的关系矩阵如下，关系图如图 4-6：

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&1&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

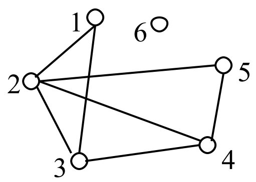


图 4-6

最大相容类为：{1,2,3},{2,3,4},{2,4,5},{6}。

习题 4.8

1.解 从 R 的定义中，显见 R 具有自反性、反对称性、传递性，所以 R 是 A 上的偏序关系，即<A, R>是偏序集。

COVA={<1, 2>, <1, 3>, <2, 4>, <3, 5, >, <4, 5>}

2.解 (1)从哈斯图可以看出 aRb，dRa，cRd，cRb，bRc，aRa，eRa

(2)R 的关系图如图 4-9：

(3)A 的最大元为 a，无最小元，极大元为 a，极小元为 d，e；

(4)出集合 A 及其子集 B_1={c, d, e}，B_2={b, c,d}，B_3={a, c, d, e}的上界，下界，上确界，下确界如表 1。

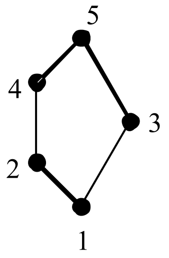


图 4-7

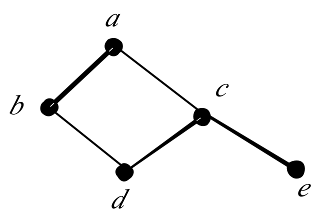


图 4-8

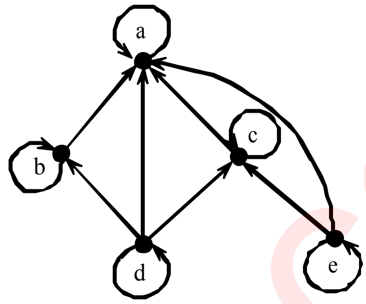


图 4-9

	上界	下界	上确界	下确界
A={a, b, c, d, e}	a	无	a	无
B_1={c, d, e}	c, a	无	c	无
B_2={b, c, d}	a	d	a	d
B_3={a, c, d, e}	a	无	a	无

表 1

3.填写表 2，区分偏序集<*A*，≤>的子集 *B* 上的最大(小)元，极大(小)元，上(下)界，上(下)确界。

b 是 B 的…	定　义	b∊B 否	存在性	唯一性
最大元素	b∊B 且 b 大于 B 中其它每个元素	是	不一定存在	存在则唯一
最小元素	b∊B 且 b 小于 B 中其它每个元素	是	不一定存在	存在则唯一
极大元素	b∊B 且 b 不小于 B 中其它每个元素	是	不一定存在	不一定唯一
极小元素	b∊B 且 b 不大于 B 中其它每个元素	是	不一定存在	不一定唯一
上界	b∊A 且 b 大于 B 中每个元素	不一定	不一定存在	不一定唯一
下界	b∊A 且 b 小于 B 中每个元素	不一定	不一定存在	不一定唯一
上确界	B 的上界中的最小者	不一定	不一定存在	存在则唯一
下确界	B 的下界中的最大者	不一定	不一定存在	存在则唯一

表 2

4. 解 ⑴是偏序集，不是其它集合；

⑵是拟序集，不是其它集合；

⑶是偏序集、全序集、良序集，不是拟序集；

⑷是偏序集、全序集、良序集，不是拟序集；

复习题四

1. 证明 对于任意的 b∈B，因为 A 非空，所以存在 a∈A，且<a, b>∈A×B，因为 A×B=A×C，所以<a, b>∈A×C，从而 b∈C，因此 B⊆C。

同理可证 C$\subseteq$B。故 B=C。

2. 证明 利用集合相等的定义去证，即分别证明 $I_A \cdot R \subseteq R$，$R \subseteq I_A \cdot R$；

⑴对于任意的$<x, y> \in I_A \cdot R$，必存在 z，满足$<x, z> \in I_A$，$<z, y> \in R$，而$<x, z> \in I_A \Leftrightarrow x=z$，所以$<z, y> \in R$，即 $I_A \cdot R \subseteq R$；

⑵对于任意的$<x, y> \in R$，因为$<x, x> \in I_A$，所以$<x, y> \in I_A \cdot R$，即 $R \subseteq I_A \cdot R$；

综上所述，$I_A \cdot R=R$。

4. 解 ①R不具有自反性，因为$\phi \in (A)$，但$\phi \cap \phi=\phi$，所以$<\phi, \phi> \notin R$，故 R 不具有自反性。

②R不具有反自反性，因为$\{1\} \in P(A)$且$\{1\} \cap \{1\}=\{1\} \neq \phi$，所以$<\{1\}, \{1\}> \in R$，故 R 不具有反自反性。

③R具有对称性，$\forall x,y \in P(A)$，若$<x, y> \in R$，则 $x \cap y \neq \phi$，所以 $y \cap x \neq \phi$，因此$<y, x> \in R$，故 R 具有对称性。

④R不具有反对称性，设 $x=\{1, 2\}$，$y=\{1, 3\}$，则 $x \cap y=y \cap x=\{1\} \neq \phi$，由 R 的定义易知，$<x, y> \in R$ 且$<y, x> \in R$，但 $x \neq y$，故 R 不具有反对称性。

⑤R不具有传递性，设 $x=\{1\}$，$y=\{1, 2\}$，$z=\{2\}$，则有 $x \cap y=\{1\} \neq \phi$ 且 $y \cap z=\{2\} \neq \phi$，所以$<x, y> \in R$ 且$<y, z> \in R$，但 $x \cap z=\phi$，所以$<x, z> \notin R$，故 R 不具有传递性。

5. 证明 设 R 是集合 X 上的一个自反关系，如果 R 是 X 上对称和传递的，则对于任意 $a,b,c \in X$，若有$<a, b> \in R \wedge <a, c> \in R$，则$<b, a> \in R \wedge <a, c> \in R$，故得
$<b, c>R$

反之，若$<a, b> \in R$，$<a, c> \in R$，必有$<b, c> \in R$，则对任意 $a,b \in X$，若$<a, b> \in R$，而因为 R 是自反关系，所以$<a, a> \in R$)，故$<b, a> \in R$，即 R 是对称的。

若$<a, b> \in R \wedge <b, c> \in R$，则$<b, a> \in R \wedge <b, c> \in R$，所以$<a, c> \in R$，即 R 是可传递的。

6. 证明 (1)因为 $R^+=t(R)$是传递的，所以，$(R^+)^+=t(R^+)=t(t(R))=t(R)=R^+$

(2)因为 $R^*=I_A \cup R^+=I_A \cup (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots)$

$R \cdot R^*=R \cdot (I_A \cup (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots))=R \cdot I_A \cup R \cdot R \cup R \cdot R^2 \cup \cdots=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots=R^+$

同理可证，$R^* \cdot R=R^+$。

(3)$(R^*)^*=(R^*)^+ \cup I_A=t(R^*) \cup I_A=R^* \cup I_A$(因为 R^*是传递的)$=R^*$

7. 证明 (1)自反性。对于任意的$\forall x \in A, \forall y \in B$，若$<x, y> \in A \times B$，因为 R_1 和 R_2 分别是 A 和 B 上的等价关系，所以有$<x, x> \in R_1$，$<y, y> \in R_2$，因此根据 R_3 的定义有$<<x, y>, <x, y>> \in R_3$，即 R_3 是自反的;

(2)对称性。设任意的$<<x_1, y_1>, <x_2, y_2>> \in R_3$，根据 R_3 的定义有$<x_1, x_2> \in R_1$ 且$<y_1, y_2> \in R_2$，而因为 R_1 和 R_2 都具有对称性，所以$<x_2, x_1> \in R_1$ 且$<y_2, y_1> \in R_2$，因此$<<x_2, y_2>, <x_1, y_1>> \in R_3$，即 R_3 是对称的;

(3)传递性。设任意$<<x_1, y_1>, <x_2, y_2>> \in R_3$，$<<x_2, y_2>, <x_2, y_2>> \in R_3$，根据 R_3 的定义有$<x_1, x_2> \in R_1$ 且$<y_1, y_2> \in R_2$，$<x_2, x_3> \in R_1$ 且$<y_2, y_3> \in R_2$，因为 R_1 和 R_2 都具有传递性，所以$<x_1, x_3> \in R_1$ 且$<y_1, y_3> \in R_2$，因此$<<x_1, y_1>, <x_3, y_3>> \in R_3$，即 R_3 是传递的。

综上所述，R_3 是 $A \times B$ 上的等价关系。

8. 解 (1) E=rts(R)。

(2)要证明 E=rts(R)是等价关系，只要证明 ts(R)具有对称性即可，对任意的$<x, y> \in ts(R)$，则存在正整数 k 使得$<x, y> \in (s(R))^k$，存在 $z_1, z_2, \cdots, z_k \in A$，满足$<x, z_1> \in s(R)$, $<x, z_2> \in s(R)$, $\cdots$, $<x, z_k> \in s(R)$，因为 s(R)是对称的，所以$<z_1, x> \in s(R)$, $<z_2, x> \in s(R)$, $\cdots$, $<z_k, x> \in s(R)$，因此$<y, x> \in (s(R))^k$，即$<y, x> \in ts(R)$，亦即 ts(R)

是对称的。

(3) 因为 R={<1, 2>, <1, 3>, <4, 4>, <4, 5>}，则

s(R)={<1, 2>, <1, 3>,<2,1> ,<3,1>,<4, 4>, <4, 5>,<5,4>}，

ts(R)={<1,1>,<1, 2>, <1, 3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,<3,3>,<4, 4>, <4, 5>,<5,4>,<5,5>}，

显然 rts(R)= ts(R)是等价关系。

9．证明 (1)①必要性。若 R 是一偏序关系，则 R 是自反的、反对称的和传递的，。而又 R 是传递的，可得 $R=t(R)$；又因为 R 是自反的，所以 $I_A\subseteq R$，因而 $R=rt(R)$。

若 R 是偏序关系，则 R^{-1} 也是偏序关系，所以 $I_A\subseteq R^{-1}$。所以 $I_A\subseteq R^{-1}\cap R$。

又<x, y>∈$R^{-1}\cap R$⇔<x, y>∈R^{-1}∧<x, y>∈R⇔<y,x> ∈R∧<x, y>∈R，由 R 的反对称性，所以 x=y，即<x, y>∈I_A。因而 $R^{-1}\cap R\subseteq I_A$。故 $I_A= R^{-1}\cap R$

②充分性。若 $R^{-1}\cap R=I_A$ 且 $R=t(R)$，则 R 是自反的、传递的。下面证明 R 是反对称的，若<x, y>∈R，<y, x> ∈R，则<x, y> ∈R 且<x, y>∈R^{-1}，所以<x, y>∈$R\cap R^{-1}=I_A$，即 x=y。因而 R 是反对称的。故 R 是偏序关系。

(2)①必要性。若 R 是拟序关系，则 R 是反自反的、反对称的和传递的，因为 R 是传递的，所以 $R=t(R)$。

下面再用反证法证明 $R^{-1}\cap R=\phi$；

假设 $R\cap R^{-1}\neq\phi$，则存在某一<x, y>∈$R^{-1}\cap R$⇔<x, y>∈R^{-1}∧<x, y>∈R⇔<y,x> ∈R∧<x, y>∈R，由 R 的传递性可知，<x, x> ∈R，这与 R 的反自反性矛盾，所以 $R\cap R^{-1}=\phi$。

②充分性。若 $R=t(R)$，可得 R 是传递的。若 R 不是反自反的，则存在某一 x ∈A，使得<x, x> ∈R，所以<x, x> ∈R^{-1}，这与 $R^{-1}\cap R=\phi$ 矛盾，因此 R 是反对称的。故 R 是拟序关系。

第五章　函　　数

习 题 5.1

1．解 （1）是 X 到 Y 的函数，其定义域为 domf=A={1,2,3},其值域为 ranf={a,c}.

（2）是 X 到 Y 的函数，其定义域为 domf=A={1,2,3},其值域为 ranf=B={a,b,c}.

（3）不是 X 到 Y 的函数，∵存在 1fb 和 1fc 与函数定义矛盾。

（4）是 X 到 Y 的函数，其定义域为 domf=A={1,2,3},其值域为 ranf={b}.

2．解 因为，f: I→I^+,由 f(x)= |x| +2 给出，，即 x∈ I ,|x|≥0,则 f(x)=|x|+2≥2 故它的值域为 ranf=N-{0,1}.

3．解 （1）f(A)=f({5})={<5,6>}, f^{-1}(B)=f^{-1}({<2，3>})={2};

(2) f(A)=f({2,3})={5,7}, f^{-1}(B)= f^{-1}({1，3})={0,1};

(3) f(A)=f((0,1))=(1/4,3/4), f^{-1}(B)= f^{-1}([1/4,1/2])=[0,1/2];

(4) f(A)=f({0,1/2})={1,2/3}, f^{-1}(B)= f^{-1}({1/2})={1}.

4．解 ∵|A|=3,|B|=2,∴$|B^A|$=8.即 A→B 的函数有 8 个，具体如下：

f_1={<x,a>,<y,a>,<z,a>}，　f_2={<x,a>,<y,a>,<z,b>}，　f_3={<x,a>,<y,b>,<z,a>}，

f_4={<x,a>,<y,b>,<z,b>}，　f_5={<x,b>,<y,a>,<z,a>}，　f_6={<x,b>,<y,a>,<z,b>}，

f_7={<x,b>,<y,b>,<z,a>}，　f_8={<x,b>,<y,b>,<z,b>}.

因此，B^A={f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8}。

习 题 5.2

1．解 （1）是单射但不是满射；

（2）既不是单射也不是满射；

（3）是满射；

（4）是满射，单射，双射。

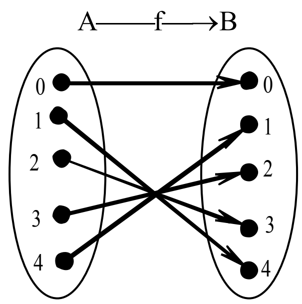
2. 解 （1）f：$I\to I$, $f(x)= x^3$;

(2) $f: N\to\{0,1\}, f(n)=\begin{cases}1, & 当n是奇数\\ 0, & 当n是偶数\end{cases}$;

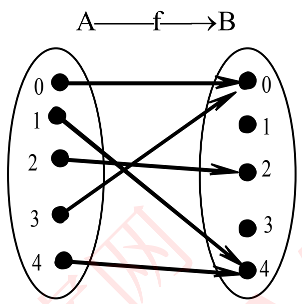
(3) f：$R\to R$, $f(x)= x^2+1$;

(4) f：$I\to I$, $f(x)= x+1$.

3. 解 （1）f={<0,0>,<1,4>,<2,3>,<3,2>,<4,1>},如图显然可知，是双射。



图：3（1）的示意图



图：3（2）的示意图

(2) f={<0,0>,<1,4>,<2,2>,<3,0>,<4,4>}，由图可知，f 即不是单射也不是满射。

4. 解 f_1={<a,0>,<b,0>}, f_2={<a,0>,<b,1>}, f_3={<a,1>,<b,0>}, f_4={<a,1>,<b,1>}.

其中 f_2，f_3 是双射，而 f_1，f_4 既不是满射也不是单射。

5. 证明 设任意 n∈N,则至少<n,0>∈N×N 则 f(n,1)=n∈N，g(n,1)=n∈N 故 f,g 是满射.

但 f,g 都不是单射，如 f(2,2)=4=f(3,1),g(3,4)=g(2,6)=12。

6. 证明 （1）对于<x,y>,<u,v>∈R×R，设 f(<x,y>)=f(<u,v>)，即<(x+y)/2, (x-y)/2>=<(u+v)/2, (u-v)/2>，亦即(x+y)/2 =(u+v)/2，(x-y)/2=(u-v)/2，解得

x=u,y=v，故<x,y>=<u,v>，因此，f 是单射；

(2)证 f 是满射，既任意<u,v>∈R×R,令 f(<x,y>)=<u,v>，则有<(x+y)/2, (x-y)/2>=<u,v>,既有

(x+y)/2 =u，(x-y)/2= v

只要取 x =u+v，y =u-v,就可使上式成立，且因为<u,v>∈R×R，所以，<x,y>∈R×R。

故 f 是满射。综合上述 f 是双射。

7. 解 $\psi_A(1)=\psi_A(2)=1;\ \psi_A(3)=\psi_A(4)=0;$

$\Psi_B(1)=1;\ \psi_B(2)=\psi_B(3)=\psi_B(4)=0;$

$\Psi_C(1)=\psi_C(2)=\psi_C(3)=\psi_C(4)=0;$

$\Psi_M(1)=\psi_M(2)=\psi_M(3)=\psi_M(4)=1$。

8. 证明（1）①x∈A 且 x∈B，则 x∈A∪B，因此，$\psi_{A\cup B}(x)=1$, $\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_A(x)\psi_B(x)=1+1-1\times1=1$,

所以，$\psi_{A\cup B}(x)=\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_A(x)\psi_B(x)$;

② x∈A，x∉B，则 x∈A∪B，因此，$\psi_{A\cup B}(x)=1$, $\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_A(x)\psi_B(x)=1+0-1\times0=1$,

所以，$\psi_{A\cup B}(x)=\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_A(x)\psi_B(x)$;

③ x∉A，x∈B，同②可证$\psi_{A\cup B}(x)=\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_A(x)\psi_B(x)$;

④ x∉A，x∉B，则 x∉A∪B，因此，$\psi_{A\cup B}(x)=0$, $\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_A(x)\psi_B(x)=0+0-0\times0=0$,

所以，$\psi_{A\cup B}(x)=\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_A(x)\psi_B(x)$。

综合①②③④，对所有 x∈U，都有$\psi_{A\cup B}(x)=\psi_A(x)+\psi_B(x)-\psi_A(x)\psi_B(x)$。

（2）若 x∈A 则 x∉$\overline{A}$，所以，$\psi_{\overline{A}}(x)=0=1-1=1-\psi_A(x)$；

若 x∉A 则 x∈ $\overline{A}$，因此，$\psi_{\overline{A}}(x)=1=1-0=1-\psi_A(x)$。

（3）①$x \notin A$，则 $x \notin A-B$，所以，$\psi_{A-B}(x)=0$，$\psi_A(x)=0$，故 $\psi_A(x)(1-\psi_B(x))=0\times(1-\psi_B(x))=0=\psi_{A-B}(x)$；

②$x\in A$ 且 $x\in B$，则 $x \notin A-B$，所以，$\psi_{A-B}(x)=0$，$\psi_A(x)=1$，$\psi_B(x)=1$，故 $\psi_A(x)(1-\psi_B(x))=1\times(1-1)=0=\psi_{A-B}(x)$；

③$x\in A$，$x\notin B$，则 $x\in A-B$，所以，$\psi_{A-B}(x)=1$，$\psi_A(x)=1$，$\psi_B(x)=0$，故 $\psi_A(x)(1-\psi_B(x))=1\times(1-0)=1=\psi_{A-B}(x)$。

习题 5.3

1. 解 对于任意 $b\in B$，因为 f：$A\to B$ 是双射，即 f：$A\to B$ 是满射，则存在 $a\in A$ 使 $<a,b>\in f$，由逆关系定义有 $<b,a>\in f^{-1}$；若 $<y,x>\in f^{-1}$ 且 $<y,x_1>\in f^{-1}$，则又由逆关系定义得 $<x,y>\in f$ 且 $<x_1,y>\in f$，又因为 f: $A\to B$ 是单射故 $x=x_1$。综上所述由函数定义知 f^{-1} 是 B 到 A 的函数。

2. 解 没有，因为 f 不是双射函数。若将函数 f 的定义域和值域分别改为 $[0,\pi]$ 和 $[-1,1]$，则 f 有逆函数。

3. 解 $g\cdot f(x)=g(f(x))=g(2x+5)=(2x+5)+7=2x+12$；

$f\cdot g(x)=f(g(x))=f(x+7)=2(x+7)+5=2x+19$;

$f\cdot f(x)=f(f(x))=f(2x+5)=2(2x+5)+5=4x+15$;

$g\cdot g(x)=g(g(x))==g(x+7)=(x+7)+7=x+14$;

$f\cdot k(x)=f(k(x))=f(x-4)=2(x-4)+5=2x-3$;

$g\cdot h(x)=g(h(x))=g(x/3)=x/3+7$.

4. 解 $f\cdot f=\{<a,b>,<b,a>,<c,a>\}\cdot\{<a,b>,<b,a>,<c,a>\}=\{<a,a>,<b,b>,<c,b>\}$;

$f\cdot f\cdot f= f\cdot(f\cdot f)= \{<a,b>,<b,a>,<c,a>\}\cdot\{<a,a>,<b,b>,<c,b>\}=\{<a,b>,<b,a>,<c,a>\}$。

5. 解 （1）$g\cdot f(x)=g(f(x))=g(x^2-2)= (x^2-2)+4= x^2+2$;

$f\cdot g(x)=f(g(x))=f(x+4)=(x+4)^2-2= x^2+8x+14$.

(2) $g\cdot f(x)=x^2+2$,不是单射，也不是满射和双射；

$f\cdot g(x)= x^2+8x+14$ 也不是单射，满射和双射。

6. 证明 （1）因为 $g\cdot f$: $A\to C$ 是双射，则 $g\cdot f$: $A\to C$ 是单射。假设 $a_1,a_2\in A$ 且 $a_1\neq a_2$，$f(a_1)= f(a_2)$，而 g：$B\to C$ 是函数，则 $g\cdot f(a_1)=g\cdot f(a_2)$，这与 $g\cdot f$: $A\to C$ 是单射矛盾，故 f 是单射;

(2) 因为 $g\cdot f$: $A\to C$ 是双射，则 $g\cdot f$: $A\to C$ 是满射。所以，对于任意 $c\in C$,存在 $a\in A$,使 $g\cdot f(a)=c$ 即 $g(f(a))=c$,又因为 f: $A\to B$ 是函数，故存在 $b=f(a)\in B$，因此，存在 $b\in B$ 使得 $g(b))=c$，故 g 是满射.

7. 证明 因为，f: $A\to B$ 是双射，由定理 2 知 f^{-1}:B→A 是双射，故 f^{-1} 也存在逆函数 $(f^{-1})^{-1}$：A→B，故对任意 $a\in A$，设 $f(a)=b$，则 $f^{-1}(b)=a$，因此有 $(f^{-1})^{-1}(a)=b$，于是 $f(a)=(f^{-1})^{-1}(a)$，由 a 的任意性可知 $f=(f^{-1})^{-1}$。

习题 5.4

1. 证明 要证 $A\approx N$,只须证明存在 N 到 A 的双射函数即可。设 f：$N\to A$，$f(n)=11n+3$,对与任意 $n\in N$，显然，f：$N\to A$ 是单射。下面证明 f：$N\to A$ 是满射。

事实上，任取 $a\in A$，由 A 中元素的形式，则存在 $x\in N$,使得 $a=11x+3$,且 $f(x)=11x+3=a$,故 f 是满射,即 f 是双射。

综合上述，$A\approx N$.

2. 解 $A=\{2n|n\in N\}$,$B=\{2n+1|n\in N\}$,$C=\{3n|n\in N\}$，A,B,C 这三个集合均是 N 的子集且都 N 等势。事实上，可以作如下的三个函数。

$f:N\to A,f(n)=2n,n\in N$;

$g:N\to B,g(n)=2n+1,n\in N$

$h:N\to C,h(n)=3n,n\in N$

容易证明这三个都是双射函数。

3. 证明 作函数 f：$[0,1]\to[2,3]$，$f(x)=x+2,x\in[0,1]$。因为，f 是严格单调的函数，所以，f 是单射，又任意 $x\in[2,3]$，则 $x-2\in[0,1]$，且 $f(x-2)=(x-2)+2=x$，故 f 是满射，故 $[2,3]\approx[0,1]$

4. 解 （1）作恒等函数任意 a∈，$I_A(a)=a$，显然 I_A 是 A 上的双射函数，故 A≈A

（2）若 A≈B，则存在双射函数 f：A→B，由 5.3 节定理 1 和定理 2 知 f：A→B 存在逆函数，且 f^{-1} :B→A 也是双射双射，故 B≈A。

（3）因为，A≈B,B≈C，则存在双射函数 f:A→B 和 g:B→C，则 f 和 g 的复合函数 g・f：A→C 也是双射（5.3 节定理 5）即 A≈C。

5. 证明 因为 A≈C,B≈D，则存在双射函数 f:A→C 和 g:B→D。由此可定义函数 h:A×B→C×D，对于任意<a,b>∈A×C，h(a,b)=<c,d>,其中 c=f(a),d=g(b)。下面证明：h:A×B→C×D 是单射。

对$<a_1,b_1>,<a_2,b_2>$∈A×B.若 $h(a_1,b_1)=h(a_2,b_2)=<c,d>$，即 $f(a_1)=f(a_2)=c,g(b_1)=g(b_2)=d$,而 f 和 g 都是单射，所以有 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$，即$<a_1,b_1>=<a_2,b_2>$。

再证明 h:A×B→C×D 是满射。事实上对任意的<c,d>∈C×D,则 c∈C,d∈D,由于 f,g 都是满射，所以存在 a∈A,b∈B 使得 f(a)=c,g(b)=d。

即存在<a,b>∈A×B，使得 h(a,b)= <c,d>，故 h 是 A×B 到 C×D 的满射。

因此，h 是 A×B 到 C×D 的双射，故 A×B≈C×D。

复习题五

1. 解 （1）是函数，定义域是{1,2,3,4}，值域是{x, y, z}，非满射，也非单射；

(2) 不是函数；

(3) 是函数，定义域是{1,2,3,4}，值域是{x, y, z, w},是双射，故有逆函数，则逆函数是{<z,1>,<w,2>,<x,3>,<y,4>},则定义域{x, y, z, w}，值域{1,2,3,4}；

(4) 不是函数；

(5) 是函数，定义域是{1,2,3,4}，值域是{y},单射，非满射，更不是双射。

2. 解 因为 S=(A∩(B∪C))∪(B∩C)，所以

$\psi_S(x)=\psi_{A\cap(B\cup C)}(x)+\psi_{B\cap C}(x)-\psi_{A\cap(B\cup C)\cap B\cap C}(x)$

$=\psi_A(x)\cdot\psi_{B\cup C}(x)+\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)-\psi_{A\cap B\cap C}(x)$

$=\psi_A(x)(\psi_B(x)+\psi_C(x)-\psi_{B\cap C}(x))+\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)-\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)$

$=\psi_A(x)\psi_B(x)+\psi_A(x)\psi_C(x)-\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)+\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)-\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)$

$=\psi_A(x)\psi_B(x)+\psi_A(x)\psi_C(x)+\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)-2\psi_A(x)\cdot\psi_B(x)\cdot\psi_C(x)$。

3. 解 使 f 是双射，需要满足的条件是 m 和 n 互素。这是因为要使 f 是双射，需要 f 是单射，因此，需要当 x≠y 时，f(x)≠f(y)，而

$$nx=mk+r_1,\quad ny=ml+r_2,\quad (r_1\le r_2)$$

这里 f(x)≠f(y)就是 $r_1\ne r_2$，$r_2-r_1\ne 0$，即 $m(r_2-r_1)$而由上式可得

$$r_2-r_1=n(y-x)+m(k-l)$$

要 m ⌐(r_2-r_1)，需要 m ⌐ n(y-x) ，因此需要 m 和 n 互素。

4. 证明 因为 f 是 A 到 B 的满射，所以，对于任何的 b∈B，都存在 a∈A 使得 f(a)=b，因此，$f^{-1}(\{b\})$非空；

对于任何的 b_1, b_2∈B, $b_1\ne b_2$，则 $f^{-1}(\{b_1\})\cap f^{-1}(\{b_2\})=\phi$。若不然,，则存在 $a\in f^{-1}(\{b_1\})\cap f^{-1}(\{b_2\})$，即 $a\in f^{-1}(\{b_1\})$且 $a\in f^{-1}(\{b_2\})$，亦即有 $f(a)=b_1$，$f(a)=b_2$，这与 f 是函数矛盾。下面证明$\bigcup_{b\in B} f^{-1}(\{b\})=A$。

对于任何的 b∈B，显然有 $f^{-1}(\{b\})\subseteq A$，所以

$$\bigcup_{b\in B} f^{-1}(\{b\})\subseteq A \qquad ①$$

另一方面，由于 f 是 A 到 B 的函数，则对于任意的 a∈A，都有 b∈B 使得 f(a)=b，即 $a\in f^{-1}(\{b\})$，因此

$$A\subseteq\bigcup_{b\in B} f^{-1}(\{b\}) \qquad ②$$

由①②可得$\bigcup_{b\in B} f^{-1}(\{b\}) = A$。

综上所述，φ={$f^{-1}(\{b\})$|b∈B}是 A 的一个划分。产生这个划分的等价关系 R 描述为：

aRb 当且仅当 f(a)=f(b)

5. 证明 对于任何的[a]∈B，都有 a∈A 使得 g(a)=[a]，即 g 是满射；

对于任何的 a,b∈A，若要 g(a)=g(b)，即要[a]=[b]，由等价类的性质，即需要 aRb。

6. 解 （1）假。例如，设A={a,b,c}, B={x,y}, C={1,2,3}, 尽管 f={<x, 1>,<y, 2>}是单射，若 g={<a, x>,<b, x>,<c, y>},但 f・g={<a, 1>,<b, 1>,<c, 2>}不是单射；

（2）假。例如，设 A={a,b,c}, B={x,y}, C={1,2}, 若设 g={<a, x>,<b, x>,<c, x>}, 尽管 f={<x, 1>,<y, 2>}是满射,但 f・g={<a, 1>,<b, 1>,<c, 1>}不是满射；

（3）假。例如，设 A={a,b,c}, B={x,y,z,w}, C={1,2,3}，若设 g={<a, x>,<b, y>,<c, z>}, f={<x, 1>,<y, 2>,<z, 3>,<w, 2>}, 虽然 f・g={<a, 1>,<b, 2>,<c, 3>}是单射，但 f 不是单射；

（4）证明 用反正法。设有 a_1, a_2∈A 且 a_1≠a_2 但 g(a_1)=g(a_2)，而 f:B→C 是函数，所以 f・g(a_1)= f・g(a_2)，这与 f・g：A→C 是单射矛盾。故 g 是单射。

（5）证明 因为，f・g 是满射，所以，对于任意的 c∈C,存在 a∈A，使得 f・g(a)=c，即 f(g(a))=c。又因为 g:A→B 是函数，所以有 b=g(a)∈B，使得 f(b)=c，因此 f 是满射。

（6）证明 因为，f・g 是双射，所以，f・g 既是满射，又是是单射，由（4）、（5）可知 f 是满射，g 是单射。

7. ⑴**证明** 因为 f 是从 A 到 B 的一个函数，所以 f(a)=f(a)，因此 aRa，既 R 是自反的；对于任意的 a,b∈A，若 aRb，则 f(a)=f(b)，所以 f(b)= f(a)，因此 bRa，即 R 是对称的；对于任意的 a,b,c∈A，若 aRb，bRc，则 f(a)=f(b), f(b)=f(c)，所以 f(a)=f(c)，即 aRc，因此 R 是传递的。

⑵等价类是$\{A, \overline{A}\}$。

8. 证明 设 f:A×B→B×A，f(a,b)=<b,a>，对任意<a,b>∈A×B。则任意 a_1,a_2∈A,b_1,b_2∈B,则由函数 f:A×B→B×A 得，f(a_1,b_1)=<b_1,a_1>,f(a_2,b_2)=<b_2,a_2>,若 f(a_1,b_1)＝f(a_2,b_2)，则<b_1,a_1>＝<b_2,a_2>，因此，b_1=b_2, a_1=a_2，所以<a_1,b_1>=<a_2,b_2>，故 f 是单射。

若任意<b,a>∈B×A,这里 b∈B,a∈A，根据定义可知：<b,a>的原象是<a,b>∈A×B,则满足满射函数的定义，故 f 是满射函数。

9. 解 对于任意的 y∈f(X∩Y)，则存在 x∈X∩Y 使得 y=f(x)，这时因为 x∈X∩Y，则 x∈X 且 x∈Y，因此，

f(x)∈f(X)，f(x)∈f(Y)，所以，f(x)∈f(X)∩f(Y)，即 f(X∩Y)⊆f(X)∩f(Y)。

任取 u∈f(X)∩f(Y)，则 u∈f(X)，u∈f(Y)，因此，存在 x∈X 且 y∈Y，使得 u=f(x), u=f(y)，即 f(x)=f(y)，而因为 f:A→B 是单射，所以有 x=y，故 x∈X∩Y，因此，f(x)∈f(X∩Y)，即 f(X)∩f(Y)⊆f(X∩Y)。

综上所述：f(X∩Y)=f(X)∩f(Y)。

第六章

习题6.1

1. 解 图 G 的图形如图 6-1(a)，图 H 的图形如图 6-1(b).

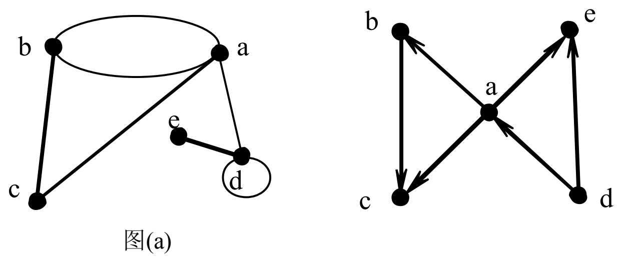


图 6-1

2. 解 ⑴、⑵、⑶、⑸能构成无向图的度序列，其中⑴、⑵、⑶能构成无向简单图的度序列。

3. 解 由握手定理可知，图 *G* 中所有结点度数之和 $3\times3+2\times2+3\times1=16$，所以 *G* 应该有 8 条边。

4. 解 由握手定理可知，图 *G* 中所有结点度数之和为 24，三个 4 度接点的度数之和为 12，则其余度数的和也是 12，而其余结点的度均为 3，所以 3 度接点应该有 4 个，因此，图 *G* 有 7 个结点。

5. 解 图中 $G_1\cong G_2$。结点之间的对应关系为φ: V(G_1)→V(G_2): φ(g)=1, φ(a)=8, φ(h)=2, φ(b)=7, φ(i)=10, φ(c)=4, φ(j)=3, φ(d)=9, φ(f)=6, φ(e)=5。

6. 解 $G_1\cong G_2$。因为 G_1 与 G_2 的结点间存在一一对应关系，边的方向一致，其对应关系为：f: V(G_1)→V(G_2)，f(a)=2, f(b)=5, f(c)=1, f(d)=4, f(e)=3。

习题 6.2

1. 解 ⑴ 从 a 到 f 的链有：abcf，abef，abcef，abecf，adef，adecf，adebcf，adecbef，*adebcef*，共 9 条。

⑵ 从 a 到 f 的路有：abcf, abef，abcef，abecf，adef, adecf, adebcf，共 7 条。

⑶ 从 *a* 到 *f* 的短程线有: *abcf, abef, adef*，共 3 条。距离为 3。

⑷ 所有从 a 出发的圈有：abeda， abceda， abcfeda。

2. ⑴ **证明** 设 *G* 中的两个奇度结点分别为 *u* 和 *v*，若 *u* 与 *v* 不连通，即他们之间无通路，则 *G* 至少有两个连通分支。记一个连通分支 G_1，G_2=*G*- G_1，这时 *u*、*v* 分别属于 G_1 和 G_2，于是 *G* 的子图 G_1 和 G_2 各含有一个奇度结点，这与握手定理的推断是矛盾的，因此 *u* 与 *v* 一定是连通的。

⑵ **解** 若有向图 *G* 中只有两个奇度结点 *u* 和 *v*，*u* 与 *v* 不一定互相可达，也不一定一个可达另一个。例如：图 *G*=<*V*, *E*> (其中 *V*={*u*, *v*, *w*}，*E*={(*u*, *w*),(*v*, *w*)})中，结点 *u*、*v* 的度数均为 1，*w* 度数为 2，但 *u* 不可达 *v*，*v* 也不可达 *u*。

3. 解 图 6-5 所示的 4 个图中，(a) 是强连通图,(a)、(b)、(d) 是单向连通图, (a)、(b)、(c)、(d) 是弱连通图。

4. 证 必要性（$\Rightarrow$）。用反证法, 假设 e 在某个圈 C 上,则 G-e 的连通分支与 G 的连通分支相同,这与 e 是割边矛盾.

充分性（$\Leftarrow$）。用反证法， 假设 e=(u,v)不是割边,则在图 G-e 中 u,v 仍连通, 即在图 G-e 中有 u 到v 路 P,则图 G 有圈 P+e, 这与 e 不在任何圈上矛盾。

5. 证 必要性（$\Rightarrow$）。设 *u* 是连通图 *G* 的割点，则 *G*-*u* 至少有两个连通分支，设 G_1，G_2 是它的两个不同的连通分支，则存在 $v\in G_1, w\in G_2$，使得 *v* 到 *w* 的每一条路都经过 *u*。

充分性（$\Leftarrow$）。若存在 *v*，*w*∈*V*，使得 *v* 到 *w* 的每一条路都经过 *u*，则 *u* 是图 *G* 的割点。若不然，则 *G*-*u* 中任何两个点都是连通的，即 *G*-*u* 连通，亦即图 *G* 中任何有别于点 *u* 的两个点 *v*、*w*，都有一条路不经过 *u*，这与题设矛盾。

习题 6.3

1. 解 由图 *G* 的邻接矩阵作出其图如图 6-6。.

⑴ d（v_1）=2 d（v_2）= 3。

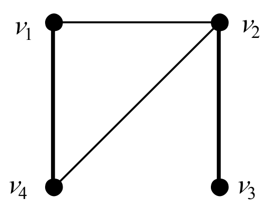


图 6-6

⑵ 图 G 不是完全图。

⑶因为 $A^3=\begin{bmatrix}2&4&1&3\\4&2&3&4\\1&3&0&1\\3&4&1&2\end{bmatrix}$,而 $a_{12}^{(3)}=4$,所以,从 v_1 到 v_2 长为 3 的路有 4 条。

⑷从 v_1 到 v_2 长为 3 的 4 条路分别为：$v_1v_2\,v_1v_2$，$v_1v_2v_3v_2$，$v_1v_2v_4\,v_2$，$v_1v_4v_1v_2$。

2. **解** 邻接矩阵为 A 的无向图 G 的图形如图 6-7 所示：

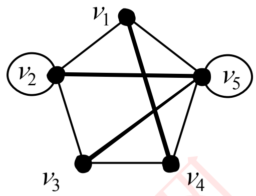


图 6-7

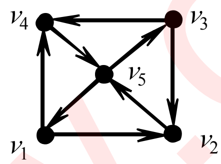


图 6-8

3. 解 ⑴ 图 G 的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

⑵ 为了求 G 中长度为 3 的通路的数目，就要计算 A^3，为此先计算 A^2。

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&2\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&2\\1&0&1&0&0\\0&2&0&2&0\end{bmatrix},\qquad A^3=\begin{bmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

因 $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}a_{ij}^{(3)}=20$， 故 G 中长度为 3 的通路有 20 条。因为 A^3 的主对角线上的元素的和为 12，所以 G 中长度为 3 的回路有 12 条。

⑶ 因为

$$A^{(2)}=A\wedge A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix},\quad A^{(3)}=A\wedge A^{(2)}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^{(4)}=A\wedge A^{(3)}=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{bmatrix},\ A^{(5)}=A\wedge A^{(4)}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

所以 G 的可达性矩阵为

$$P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}\vee A^{(5)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

因为 P 中的每个元素都是 1，所以 G 是强连通的，当然也是单向连通的。

4. 解 图 6-9、图 6-10 的关联矩阵分别为

$$M_5=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix},\ M_6=\begin{bmatrix}-1&1&0&0&0\\1&-1&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&-1&-1&-1\end{bmatrix},$$

5. 解 图 6-9、图 6-10 的邻接矩阵分别为：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}。$$

习题 6.4

1. 解 图(a)既是 Euler 图又是 Hamilton 图，(b)是 Euler 图但不是 Hamilton 图，图(c)是 Hamilton 图但不是 Euler 图， (d) 既不是 Euler 图又不是 Hamilton 图。

2. 解 当 $n=2k+1$（$k\in N,k\neq 0$）时，K_n 是 Euler 图. 当 $n=2$ 时, K_n 仅存在 Euler 链而不存在 Euler 回路.

3. 解 图 6-12 中的图 (2)、(3)、(4)中有 Hamilton 圈，(1) 、(5) 中只有 Hamilton 路而没有 Hamilton 圈。(1)中的路为 *abcdejhgig*；(2)中的圈为 *afidejhcbga*；(3)中的圈为 *agkfeicbhdja*；(4)中的圈为 *abrfgcdihja*；(5) 中的路为 *jabihfgkdec*。

4. 证明 设 $V_1=\{a,c,e,h,j,l,p\}$，则有 $\omega(G-V_1)=9>7=|V_1|$，所以它不是 Hamilton 图。

5. 解 我们分别用 *a, b, c, d, e, f, g* 七个结点表示七个人，若两人能交谈（会讲同一种语言），就在代表它们的结点之间连一条无向边，所得无向图如图 6-14(a)。此图存在一条 Hamilton 圈：*abdfgeca*，于是按图6-14(b)所示是顺序安排座位即可。

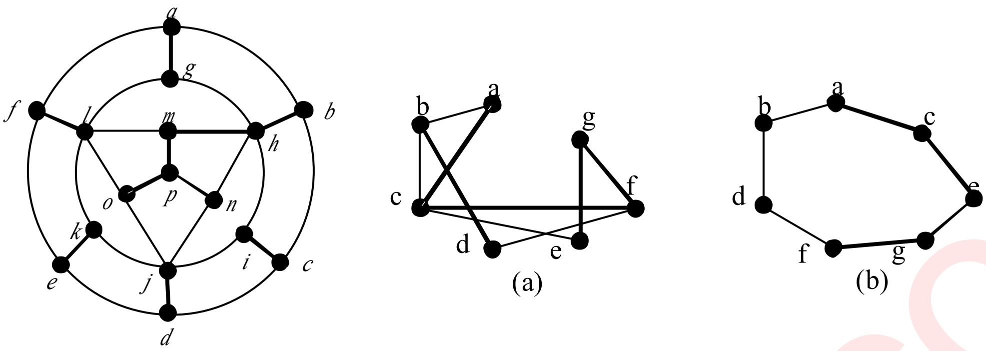


图 6-13

习题 6.5

1. 解 如图 6-16,求得 v_1 到 v_8 的最短路是 $v_1v_3v_6v_7v_8$,其总长度为 13.

2. 解 首先观察图中的奇数度结点，此图中只有两个奇数度结点 E 和 F。用标号法求 E 到 F 的最短路径，容易算出 E 到 F 的最短路径为 EGF，其权为 28。然后将最短路径上的边均重复依次（如图 6-17(b)中虚线）。于是得欧拉图 G^*。求从 D 点出发的一条欧拉回路，如 $DEGFGEBACBDCFD$，其权为 281。

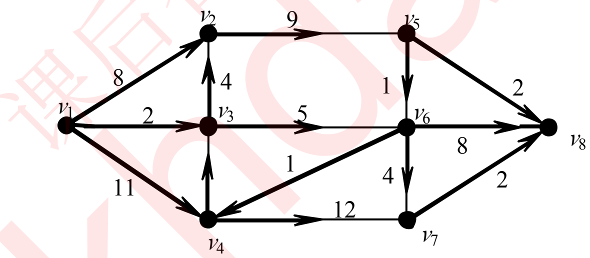


图 6-15

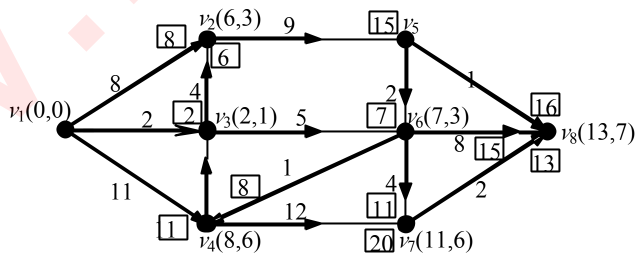


图 6-16

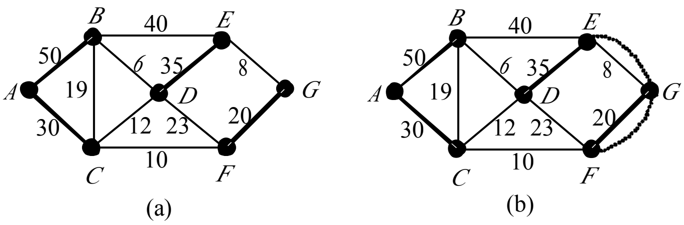


图 6-17

3. 解 从 a 开始，可得哈密尔顿回路，如图（b），长度 37，而最短哈密尔顿回路如（c）长度 36。

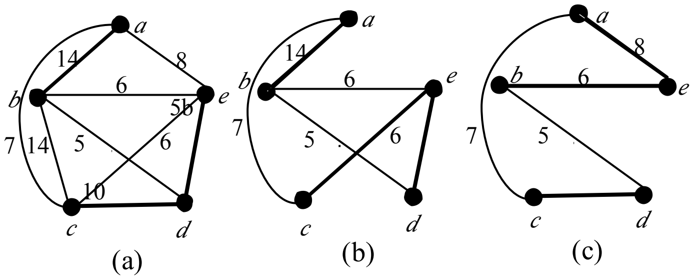


图 6-18

复习题 6

1. 解 因为 G 中有 6 个 3 度结点，其度数和为 18，由握手定理可知，所有结点度数的和为 24，所以其余结点的度数和为 6，而其度数均小于 3，因此最大只能为 2，则其余结点至少有 3 个，故 G 中至少有 9 个结点。

2. 解 因为 n 是奇数，所以 K_n 中每个结点均为偶度，因此 G 中每个奇度结点在补图 $\overline{G}$ 中仍为奇度结点，故 G 的补图 $\overline{G}$ 中有 r 个奇度结点。

3. **证明** 用结点 $v_1, v_2, \cdots, v_6$ 分别表示 6 个人。若 v_i 与 v_j 彼此认识（$i \neq j$）就在 v_i 与 v_j 之间连边 (v_i, v_j) 于是构成无向简单图 $G=<V, E>$。在 $\overline{G}$ 中，若 v_i 与 v_j 之间有边 (v_i, v_j)，说明 v_i，v_j 所代表的人彼此不认识。有了图论模型, 要证明命题,就是要证明, 要么在图 G 中有三角形, 要么在图 $\overline{G}$ 中有三角形。

设在 G 中 v_1 与三个以上的结点相邻, 不妨 v_1 与 v_2, v_3, v_4 相邻,如图 6-19 G,

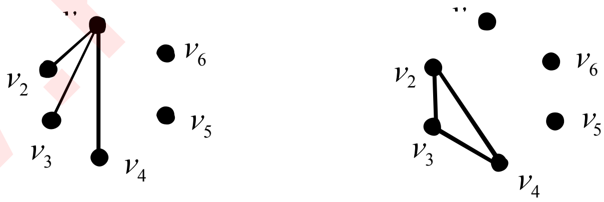


图 G　　　　图 $\overline{G}$

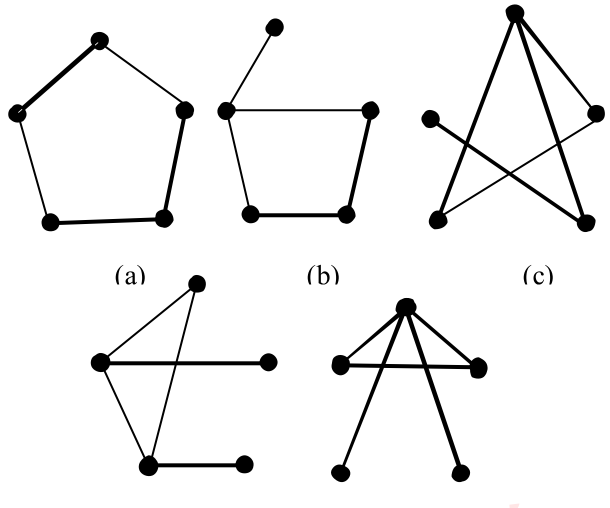
图 6-19

这时若 v_2, v_3, v_4 中有某两个相邻，则在 G 中存在三角形，若 v_2, v_3, v_4 中任何两个都不相邻，则在 $\overline{G}$ 中 v_2, v_3, v_4 构成三角形。

若在 G 中 v_1 与三个以下的结点相邻，则可先在 $\overline{G}$ 中作类似的证明。

4. 解 K_4 的所有非同构的子图如图 6-20 共 18 个，其中有 11 个是生成子图，生成子图中有 6 个是连通图。

5. 解 图 1 同构于图 2。只要作映射 $f: u_1 \to v_1, u_2 \to v_2, u_3 \to v_3, u_4 \to v_4, u_5 \to v_5, u_6 \to v_6$ 即可.



(a) (b) (c)

(d)

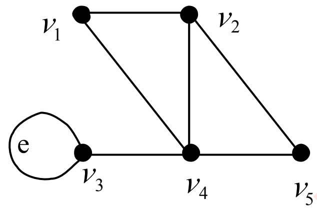


图 6-23

6. 解 首先要注意 5 阶自补图的边数应该是 K_5 的边数的一半,而 K_5 有 10 条边,所以 5 阶自补图应该有 5 条边;其次,不连通图的补图是连通的,因此, 自补图是连通的.由以上分析,应先画出 K_5 的全部 5 条边的连通生成子图，再利用同构的性质来判断哪些是自补图。K_5 的全部 5 条边的连通生成子图如图 6-22。其中，(a)与(a)自身互为补图，(b)与(c)互为补图，(d)与(d)互为补图。从而可得(a)和(d)为自补图。

7. 解 图 6-23 中的路有：v_1v_2, v_1v_4, $v_1v_2v_4$, $v_1v_4v_2$, $v_1v_2v_5$, $v_1v_4v_3$, $v_1v_4v_5$, $v_1v_2v_4v_3$, $v_1v_2v_4v_5$, $v_1v_2v_5v_4$, $v_1v_4v_5v_2$, $v_1v_4v_2v_5$, $v_1v_2v_5v_4v_3$, v_2v_4, v_2v_5, $v_2v_1v_4$, $v_2v_4v_3$, $v_2v_4v_5$, $v_2v_5v_4$, $v_2v_1v_4v_3$, $v_2v_1v_4v_5$, $v_2v_5v_4v_3$, v_3v_4, $v_3v_4v_5$, $v_3v_4v_2v_5$, $v_3v_4v_1v_2v_5$, v_4v_5, $v_4v_2v_5$, $v_4v_1v_2v_5$ 共 29 条。

图 6-23 中的 4 个圈分别为：v_3ev_3，$v_1v_2v_4v_1$, $v_2v_4v_5v_2$, $v_1v_2v_5v_4v_1$。

8. 证明 用反证法。假设 G 不连通，则 G 至少有两个连通分支 G_1 、G_2，设连通分支 G_1 中有 n_1 个结点，G_2 中有 n_2 个结点，且 $n_1+n_2\leqslant n$。分别从 G_1 和 G_2 中任取一个结点 u 和 v，由于 G 是简单图，从而 G_1 和 G_2 也是简单图。所以，$\deg(u)\leqslant n_1-1$, $\deg(v)\leqslant n_2-1$,故 $\deg(u)+\deg(v)\leqslant n_1+n_2-2\leqslant n-2$，这与 G 中每对结点度数之和均大于等于 $n-1$ 相矛盾。因此，G 是连通图。

9. 解 图 6-24 中的图 D_1,D_2,D_3 就是符合题意的 3 个 4 阶有向简单图。

10. 解 图 6-25 的关联矩阵 M 和邻接矩阵 A 分别为如下的矩阵：

$$M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

11. 解 (1)其邻接矩阵为：$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(2) $A^{(2)}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}, A^{(3)}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}, A^{(4)}=\begin{bmatrix}0 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$

由 $A, A^{(2)}$ ， $A^{(3)}$， $A^{(4)}$ 可知从 v_1 到 v_4 长度为 1，2，3，4 的路径分别有 1，1，2，3 条。

(3) $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, AA^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

AA^T 中第（2，3）个元素为 1，说明从 v_2 到 v_3 引出的边能共同终止于同一结点的只有一个，v_4。

AA^T 中第（2，2）个元素为 2，说明 v_2 的引出度数为 2。 $A^T A$ 中第（2，3）个元素为 0，说明没有结点引出的边同时终止于 v_2 和 v_3。 $A^T A$ 中第（2，2）个元素为 3，说明 v_2 的引如度数为 3。

(4) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$， $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P = A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(5) $P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P \wedge P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$。所以，强连通子图的顶点集为：$\{v_1\},\{v_2, v_3, v_4\}$。

12. 解：不存在。因为 G 为欧拉图，因而 G 是连通图。若 G 中存在割边 $e=(u, v)$，则 u，v 分别属于 G-e 的两个连通分支 G_1 与 G_2。设 w 为 G_1 中的一个结点，可从 w 出发走一条欧拉回路 C：从 w 开始，一旦行到 u，沿割边到达 v，则在 G_2 中行遍后无法回到 G_1 达到 w，这于 G 是欧拉图矛盾。故 G 中无割边。

13. 解 abjibcdlchdefghfihbka 是图 6-27 中的一条 Euler 回路

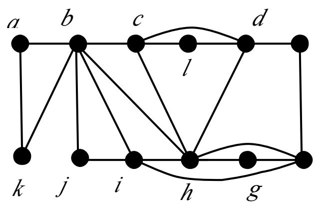


图 6-27

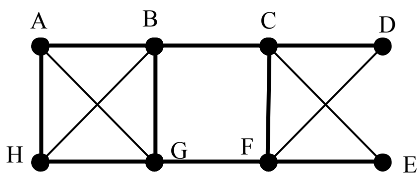


图 6-28

14. 解 ABCDFCEFGAHGBH 是图 9 中找出一条 Euler 路。

15. 解 在图 6-29 中⑴与⑷两图为哈密尔顿图，⑵，⑶为半哈密尔顿图。在⑴中，*abcdefghija* 为一条哈密尔顿回路。在⑷中 *abcdefghija* 为一条哈密尔顿回路。在⑶中 *abcdefghij* 为一条哈密尔顿通路。在⑵中，*abcdefghijk* 为一条哈密尔顿通路。

16. 解 图 6-30 中的图(*a*)、(*b*)、(*c*)、(*d*)分别是⑴、⑵、⑶、⑷题要求的实例。

17. 解 图 6-31 中的图(*a*)、(*b*) 能够一笔画出，但图(*c*) 不能够一笔画出。图(*a*)的具体画法是：$v_1\, v_8\, v_9\, v_3\, v_{10}\, v_{11}\, v_5\, v_{12}\, v_7\, v_2\, v_9\, v_{10}\, v_4\, v_{11}\, v_{12}\, v_6\, v_7\, v_1$。图(*b*)的具体画法是：

1,2,3,4,5,6,7,2,8,9,10,11,12,13,8,14,15,16,17,18,19,14,17,11,5,20。

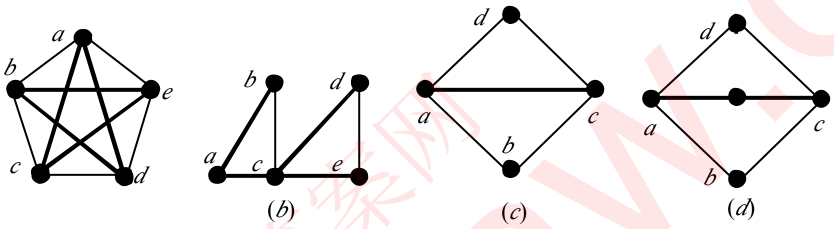


图 6-30

第七章　特 殊 图 类

习题 7.1

1. 解 因 m=n-1,这里 m=6,所以 n=6+1=7.

2. 解 不正确。K_3 与平凡图构成的非连通图中有 4 个结点 3 条边，但是它不是树。

3. 证明 必要性。因为 G 中有 n 个结点，边数 m=n-1，又因为 G 是连通的，由本节定理 1 可知，G 为树，因而 G 中无回路。

再证充分性。因为 G 中无回路，又因为边数 m=n-1，由本节定理 1，可知 G 为树，所以 G 是连通的。

4. 解 因 m=n-r,这里 n=15,r=3,所以 m=15-3=12，即 G 有 12 条边。

5. 解 6 个结点的所有不同构的树如图 7-1 所示。

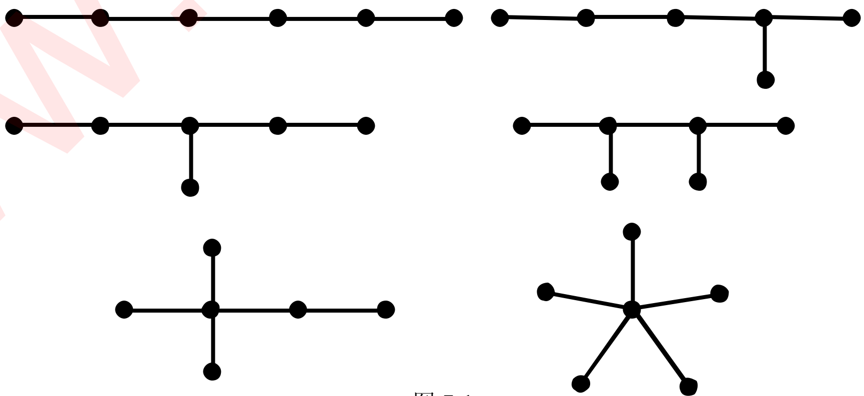


图 7-1

6. 证明 由定理 1，在任意的 (n,m) 树中，边数 $m=n-1$；所以，由握手定理得

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m = 2(n-1) \quad ①$$

⑴若 T 没有树叶，则由于 T 是连通图，所以 T 中任一结点均有 $d(v_i) \geq 2$，从而

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq 2n \qquad ②$$

则①与②矛盾。

⑵若树 T 仅有 1 片树叶，则其余 $n-1$ 个结点的度数不小于 2，于是

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq 2(n-1)+1 = 2n-1 \qquad ③$$

从而①、③相矛盾。

综合⑴，⑵得知 T 中至少有两片树叶。

7. 解 图 7-2⑴中共有两棵非同构的生成树（如图 7-3⑴，⑵）。 图 7-2⑵中共有 3 棵非同构的生成树（如图 7-3⑶，⑷，⑸）。

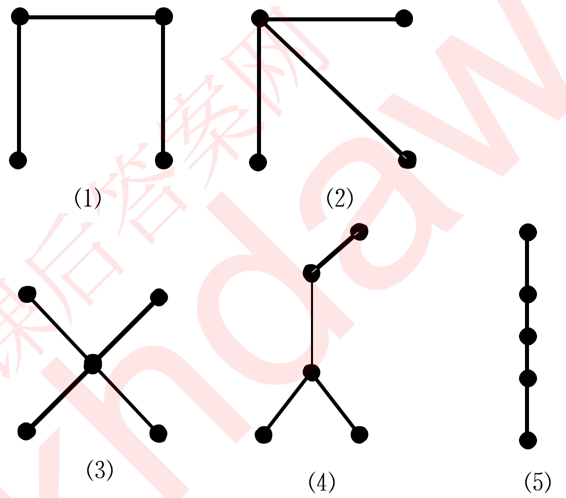


图 7-3

8. 解 在图 7-4 中共有 8 棵生成树，如图 7-5⑴～⑻所示，第 i 生成树用 $T_i(i=1,2,\cdots,8)$ 表示。

$W(T_1)=W(T_6)=8$，$W(T_2)=W(T_5)=6$，$W(T_3)=W(T_7)=W(T_8)=7$，

$W(T_4)=9$。其中 T_2，T_5 是图中的最小生成树。

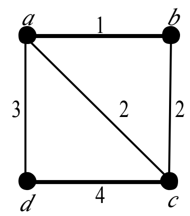


图 7-4

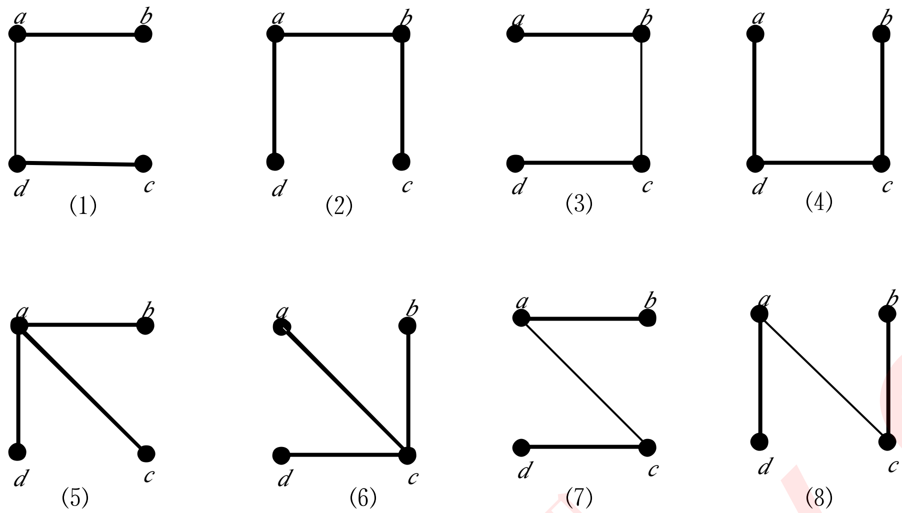


图 7-5

9. 解 最小生成树 T 如图 7-7 所示，W（T）=18。

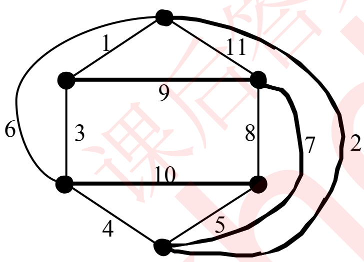


图 7-6

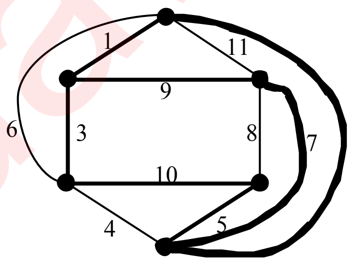
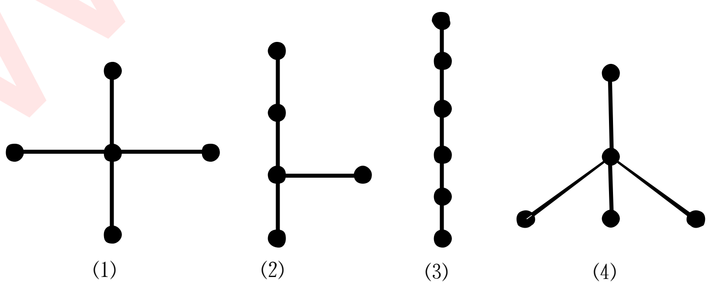


图 7-7

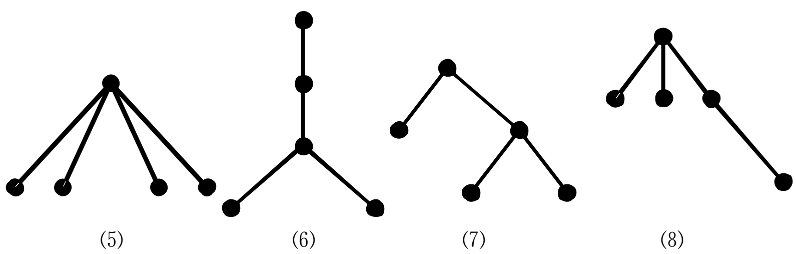
习题 7.2

1. 解 不一定是。如图 7-8 就不是根树.

2. 解 五个结点可形成 3 棵非同构的无向树，如图 7-9⑴，⑵，⑶所示。由⑴可生成 2 棵非同构的根树，如图 7-9⑷，⑸所示。⑷为 3 元树，⑸为 4 元树。由⑵可生成 4 棵非同构的根树，如图 7-9⑹，⑺，⑻，⑼所示。⑹为 2 元树，⑺为 2 元树，⑻为 3 元树，⑼为 2 元树。由⑶可生成 3 棵非同构的根树，如图 7-9⑽，



⑾，⑿所



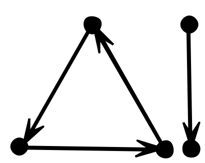


图 7-8

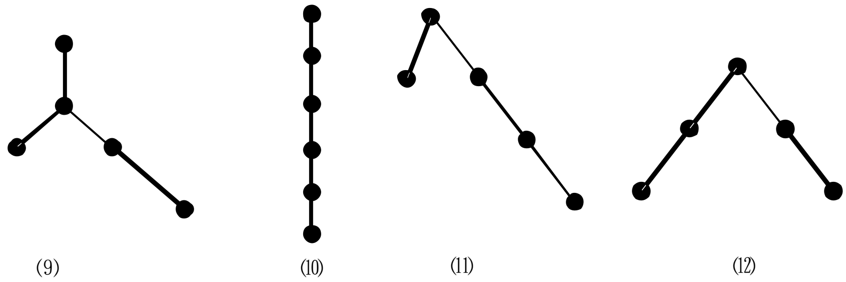


图 7-9

示。(10)为 1 元树，(11)，(12)为 2 元树。

由此可知，五个结点共形成 9 棵非同构的根树。

3. 解 不是。根树中最长路径的端点一个是树根，另一个是树叶，因为根树的高等于最长路径的长度，应从树根开始。

4. 证明 设完全二元树 T 有 n_0 个叶结点，n_2 分支结点，则 T 的结点数为 $n = n_0+n_2$，边数 $m=2n_2$，有握手定理可得：$2n_2=n_0+n_2-1$，所以，$n_2=n_0-1$，因此，$n=n_0+n_2=2n_0-1$。即二元树有奇数个结点。

5. 解 先根遍历：abdfgechi

中根遍历：fdgbeahci

后根遍历：fgdebhica

6．解：

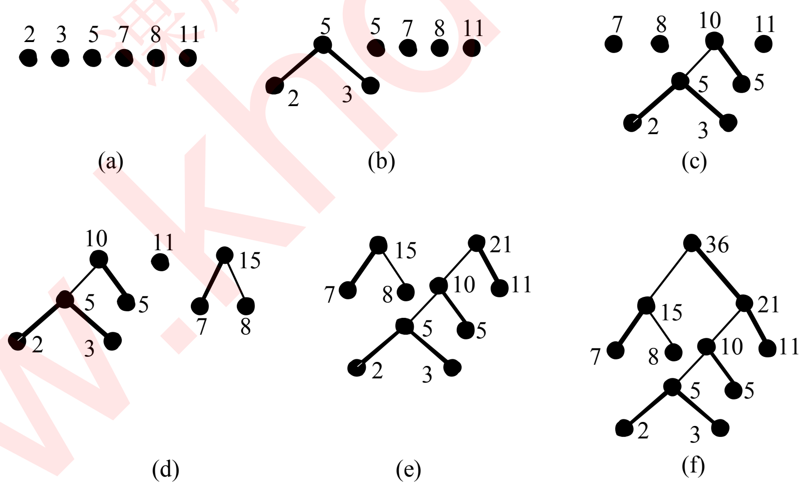


图 7-11

习题 7.3

1. 解 图(1)是偶图，互补结点子集为：$V_1=\{a,d,e,f\},V_2=\{b,c,g\}$；图(2)是偶图，互补结点子集为：$V_1=\{a,c,f\},V_2=\{b,d,e,g\}$；图(3)不是偶图。

2. 证明 设 G=<V, E>是一棵树，任选 $v_0\in V$，定义 V 的两个子集如下：

$$V_1=\{v \mid d(v,v_0)\text{为偶数}\},\ V_2=V-V_1。$$

现证明 V_1 中任二结点之间无边存在。若存在一条边$(u,v)\in E$，$u,v\in V_1$,由于树中任意两个结点之间仅存在惟一一条路，设v_0到 u 的路为 $v_0v_1v_2\cdots v_ku$，则$v_0v_1v_2\cdots v_ku$ 的长度为偶数，因$(u,v)\in E$，所以 $v_0v_1v_2\cdots v_kuv$ 是 v_0到 v 的一条通路，且该通路的长度 k+2 为奇数，从而 $v_0v_1v_2\cdots v_kuv$ 不是路，因此 v 必与某个 v_i(i=0, 1, 2,⋯, k)相同，从而 $vv_{i+1}v_{i+2}\cdots v_k uv$ 是 G 中的一个圈，这与 G 是树矛盾。

同理可证，V_2 中任意两个结点之间无边存在。

故 G 中的每条边$(u,v)\in E$，必有 $u\in V_1$，$v\in V_2$ 或 $u\in V_2$，$v\in V_1$，因此 G 是具有互补结点子集 V_1 和 V_2 的偶图。

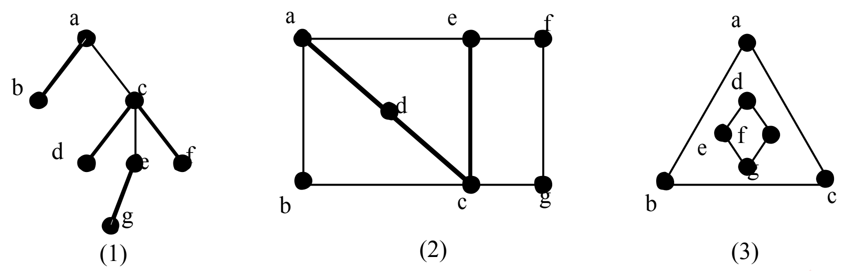


图 7-12

3. 解 将 n 位男士和 n 位女士分别用结点表示，若某位男士认识某位女士，则在代表他们的结点之间连一条线，得到一个偶图 G，它的互补结点子集 V_1 和 V_2 分别表示 n 位男士和 n 位女士，由题可知，V_1 中的每个结点度数至少为 2，而 V_2 中的每个结点度数至多为 2，从而它满足 t 条件（t=2），因此存在从 V_1 到 V_2 的匹配，故可将男士和女士分配为 n 对，使得每对中的男士和女士彼此都认识。

4. 解 不能。用结点表示五位教师（V_1）和五门课（V_2），在教师和他熟悉的课程之间连一条线，得到一个偶图 G，其中，V_1 中的孙、李、周三个结点只与数学、物理两个结点相邻接，故不满足相异性条件，因此不存在从 V_1 到 V_2 的匹配，故不能按题设要求的安排。

习题 7.4

1. 证明 将图 7-13 所示的两个图改画为图 7-14 所示的两个图,可以看出图(1),(2)任何两边除在结点处相交外，无其它交叉点即可。因此, 图 7-13 所示的两个图都是平面图.

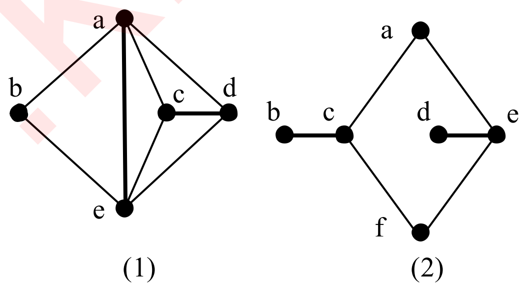


图 7-15

2. 解 图 7-15⑴中有五个面，分别为 F_1:abea, F_2:acea, F_3:acda, F_4:cdec, F_5:abeda。它们的秩分别为 $r(F_1)=r(F_2)=r(F_3)=r(F_4)=3$, $r(F_5)=4$。

图 7-15⑵有两个面，其中有限面为 F_1:acfedea, 无限面 F_2: acbcfea。它们的秩 $r(F_1)=r(F_2)=6$。

3. 证明 设该连通简单图的面数为 r，由 Euler 公式可得，6-12+r=2，所以 r=8，其 8 个面分别设为 r_i(i=1,2,---,8)。因是简单图，故每个面至少由 3 条边围成。即 $\sum_{i=1}^{8} D(r_i) \ge 3\times 8 = 24$ 。而由本届定理 1 知，

$\sum_{i=1}^{8} D(r_i) = 2m = 2\times 12 = 24$ 。因此每个面只能由 3 条边围成。

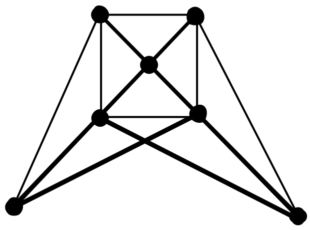
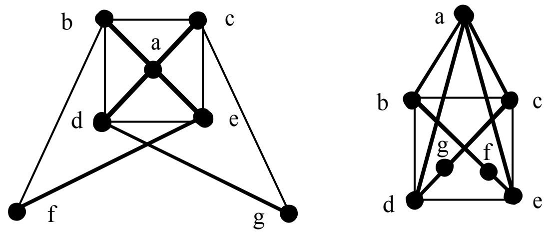


图 7-16



(1) (2)

图 7-17

4. 解 去掉图 7-16 中的两条边，并给结点表上名称的图 7-17(1)，在将图 7-17(1)改画图 7-17(2)，而显然图 7-17(2)与 K_5 是同胚的，由库拉图斯基定理知，图 7-16 所示的图为非面图。

5. 证明 若 G 中无圈,则 G 为森林,结论显然成立,若 G 中有圈,假设 G 中有 n 个结点, m 条边,并假设 G 的所有连通分支为 $G_1, G_2, \cdots, G_k$,每个 G_i 有 n_i 个结点, m_i 条边,则有

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n, \quad \sum_{i=1}^{k} m_i = m$$

由于 G 是简单图,所以每个 G_i 也是简单图,由本节定理 2 的推论可知 $m_i \leqslant 3n_i - 6$, i=1, 2, …,k。从而有

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i \leq \sum_{i=1}^{k} (3n_i - 6) = 3\sum_{i=1}^{k} n_i - 6k = 3n - 6k \leq 3n - 6$$

所以 m≤3n-6。再用反证法证明，简单平面图 G 中至少有一个度数小于等于 5 的结点。

如果 G 中每个结点的度数均大于等于 6,由握手定理可知 $2m = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) \geq 6n$,因此 $n \leq \frac{1}{3}m$,

代入 m≤3n-6 得 m≤m-6,这显然的矛盾的。故 G 中至少有一个度数小于等于 5 的结点。

6. 证明 设 G 是连通平面图。

假设 G 中每一结点 v 都有 deg(v)≥5。因为 2m≥5n,所以 n≤2m/5。于是，m≤3n-6≤6m/5-6 ，即 5m≤6m-30。因此，m≥30，与题设 m<30 矛盾。所以 G 中必有一个结点的度小于或等于 4。

复习题 7

1. 解 假设 T 有 m 条边，x 个 1 度结点，则有：

m=5+3+4+2+x-1

2m=5×2+3×3+4×4+2×5+x

解得：x=19,m=32，即 T 有 19 个 1 度结点。

2. 证明 因为，图 G 是连通图，所以，由本节定理 2 知图 G 存在生成树 T，而生成树 T 的边数 n -1 是不超过图 G 的边数 m 的，即 m≥n -1。

3. 证明 设 G 的 p 个连通分支分别为 $\langle n_1, m_1\rangle$，$\langle n_2, m_2\rangle$，---，$\langle n_p, m_p\rangle$，由于森林的每个连通分支都是树，因此，有：

$$m_1 = n_1 - 1,\ m_2 = n_2 - 1,\ \cdots,\ m_p = n_p - 1 \qquad (1)$$

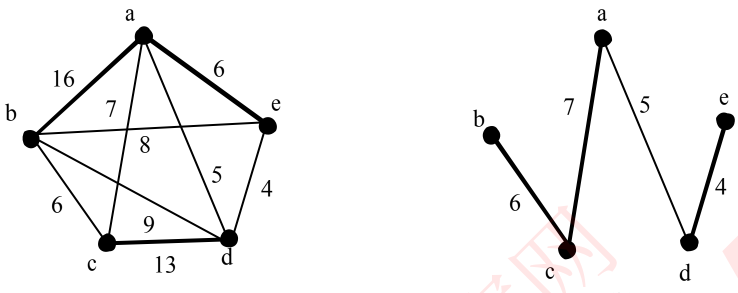
又 $$m_1 + m_2 + \cdots + m_p = m\ ;\ n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n \qquad (2)$$

由（1），（2）得：m=n-p。

4. 证明 因为，a 是在 T_1 中但不在 T_2 中的一条边，所以，$T_2 \cup \{a\}$ 有惟一的圈 C，而 T_1 是树，则圈 C 上一定有一边 b 不在 T_1 中。因此，$(T_2-\{b\}) \cup \{a\} = T_2 \cup \{a\} - \{b\}$ 是 G 的生成树。下面证明，$(T_1-\{a\}) \cup \{b\} = T_1 \cup \{b\} - \{a\}$ 也是 G 的生成树，事实上，因为 T_1 是树，所以 T_1 中的边 a 是 T_1 的割边，因此 T_1 去掉边 a 后可得两个连同分支，设为 T_{11} 和 T_{12}。又 b 不在 T_1 中，所以 $T_1 \cup \{b\}$ 有惟一的圈 C_1，

5. 解 设 G 中的 k 个连通分支为 $T_1,T_2,\cdots,T_k$，设结点 $v_i\in T_i, i=1,2,\cdots,k$。在 G 中添加边 $(v_i,v_{i+1}), i=1,2,\cdots,k-1$，设所得新图为 T，则 T 连通且无回路，因此 T 是树。所加边的条数 k-1 是使得 G 为树的最小数目。

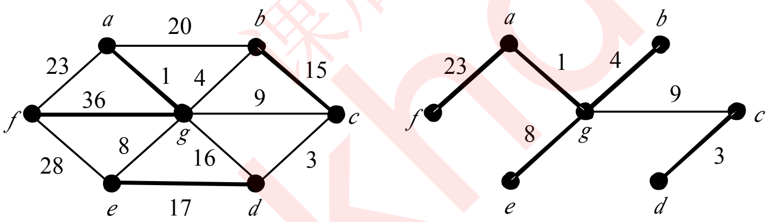
6. 解 取图 7-18(a)中最小权的边为 e_1=(d,e); 再在 E-{ e_1}取中权最小的边 e_2=(d,a); 在 E-{ e_1, e_2}中权最小的边有两条(a,e)和(b,c) 但若选(a,e)就会有圈,因此取 e_3=(b,c)；最后取 e_4=(b,c)，则得最小树如图 7-18 (b)，最小生成树的权为 W=4+5+6+7=22。



(a) (b)

图 7-18

7．解 题目就是求图 7-19⑴的最小生成树问题。因此，图 7-19⑴的最小生成树为图 7-19⑵所示，即是所求的通讯线路图。其权即是最小总造价，其权为：$w(T)=1+3+4+8+9+23=48$。



⑴ ⑵

图 7-19

8. 解 高为 2 的所有不同构的二元树有 7 棵，如图 7-20 所示。其中有 2 棵完全二元树，图 7-20 中的⑸和⑺所示，有 1 棵满二元树，图 7-20 中⑺所示。

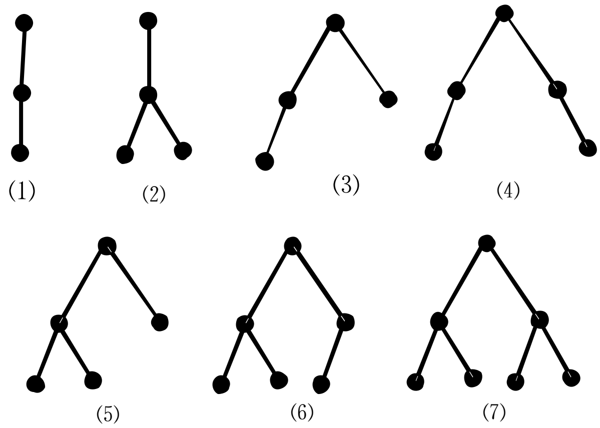


图 7-20

9. 证明 方法 1：设 T 结点数为 n，分支点数为 i。根据完全二元树的定义，可知下面等式均成立：

$$n=i+t \tag{1}$$

$$m = 2i \tag{2}$$

$$m = n - 1 \tag{3}$$

由式(1)，(2)，(3)易知 $m = 2t - 2$ 。

方法 2：在完全二元树中，除树叶外，每个结点的出度为 2。除树根外，每个结点的入度为 1。由握手定理知

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) + \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) \\ &= 2(n-t) + n - 1 = 3n - 2t - 1 \\ &= 3(m+1) - 2t - 1 \end{aligned}$$

解得：$m = 2t - 2$ 。

10．证明 设完全二元树 T 有 i 个分支点，t 片树叶，由 T 为完全二元树，则由 7.2 节定理 3 有 $i = t - 1$ 。又结点数 $n = i + t$，所以 $t = (n+1)/2$ 为 T 的树叶数。

11．解 对于图 7-21 所示的二元树，三种遍历方法的结果如下：

先根遍历：$v_0 v_1 v_3 v_4 v_6 v_2 v_5 v_7 v_8 v_9$

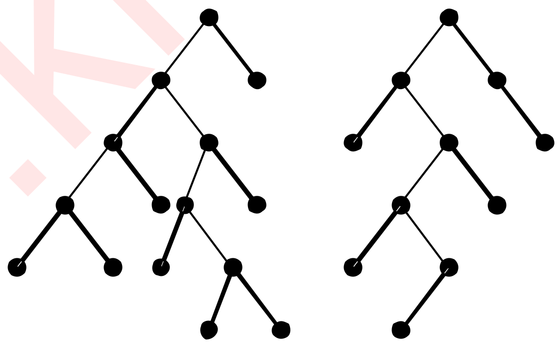
中根遍历：$v_3 v_1 v_6 v_4 v_0 v_5 v_8 v_7 v_9 v_2$

后根遍历：$v_3 v_6 v_4 v_1 v_8 v_9 v_7 v_5 v_2 v_0$

12．解 设图 7-22⑴所示的树为 T_1，T_1 是完全二元树。在每个分支结点引出的两条边上分别标上 0（左）和 1（右），则得如图 7-23⑴的树，将树根到每片树叶的通路上所标的数字构成的符号串组成集合 $B_1 = \{0000, 0001, 001, 0100, 01010, 01011, 011, 1\}$，则 B_1 为前缀码。

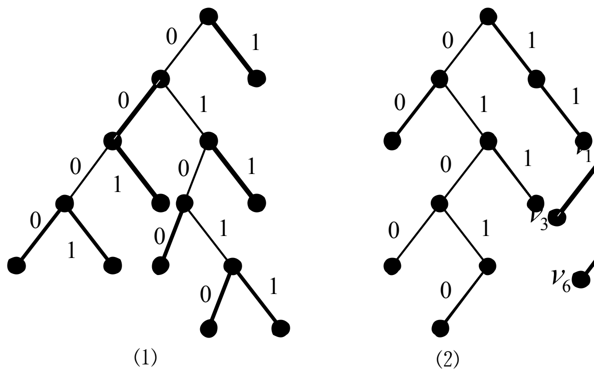
设图 7-22⑵中所示的树为 T_2，T_2 是二元树，但不是完全二元树。对于有一个儿子的分支结点引出的边可随便标上 0 或 1；有两个儿子的分支点标法同 T_1，则得如图 7-23⑵的树，所得前缀码为 B_2。

$B_2 = \{00, 0100, 01010, 011, 11\}$



(1)　　(2)

图 7-22



(1)　　(2)

图 7-23

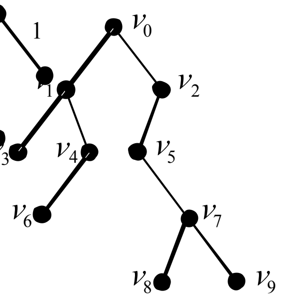


图 7-21

13．解：其实，$W(T)$ 等于 T 的各分支点的权之和，即 $W(T)=5+10+15+25=55$。

⑵ 由 T 形成的二元前缀码为 $B=\{000,001,01,10,11\}$。

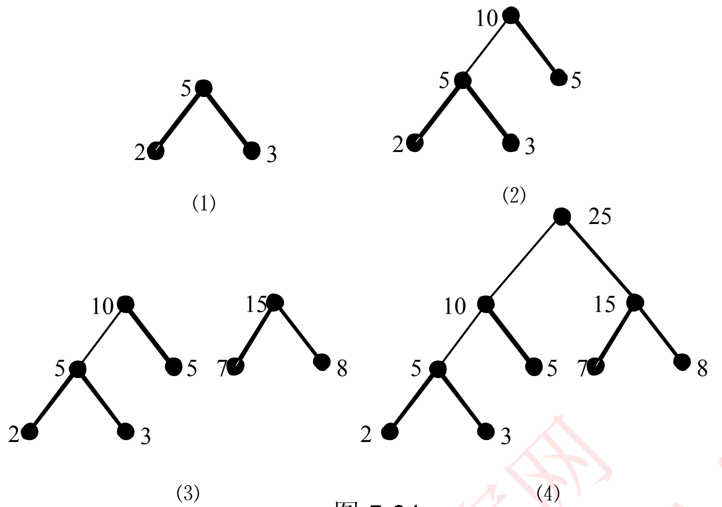


图 7-24

14．解 应该用较短的符号串传输出现频率高的数字，因而可用 100 乘各数字出现的频率作为权，求最优二元树，然后用这样的二元树产生前缀码传输上面给定的数字。具体做法如下：用 100 乘各频率得权 $w_0=30, w_1=20, w_2=15, w_3=10, \ w_4=10, w_5=6, w_6=5, w_7=4$。将这些权由小到大排列得到 4，5，6，10，10，15，20，30。

⑴ 所求最优二元树如图 7-25 所示。

⑵ 用所求的最优二元树产生二元前缀码如图 7-25 所示。带权为 w_i 的树叶对应的符号串就为传输 i 的符号串。数字 0,1,2,3,4,5,6,7 对应的符号串分别为

01，11，001，100，101，0001，00000，00001.

⑶用这样的符号串传输按上述比例出现的数字最少。

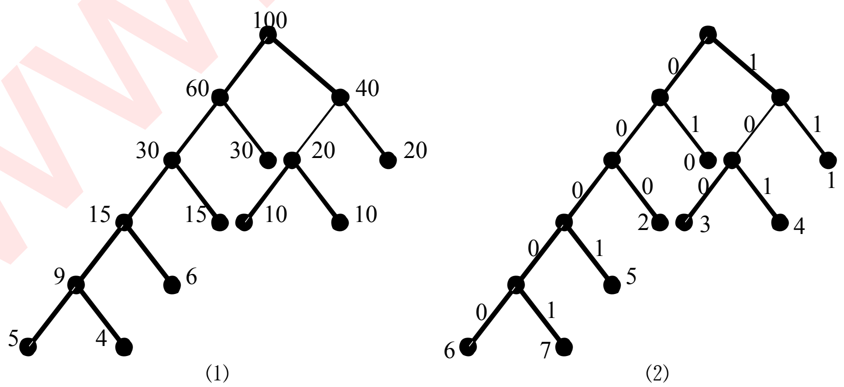


图 7-25

$$10^4\times0.3\times2+10^4\times0.2\times2+10^4\times0.15\times3+10^4\times0.1\times3+10^4\times0.1\times3$$

$$+10^4\times0.1\times3+10^4\times0.06\times4+10^4\times0.05\times5+10^4\times0.04\times5=27400$$

所以传输 10000 个上述比例出现的数字至少要用 27400 个二进制数字。

15. 证明 设二部图 G 的互补结点子集为 V_1、V_2，则 $m=|V_1|\cdot|V_2|$且$|V_1|+|V_2|=n$，我们知道两个数的和一定，只有当它们相等时积最大，即当$|V_1|=|V_2|=n/2$ 时，积$|V_1|\cdot|V_2|$最大为 $n^2/4$，亦即 $m\le n^2/4$。

16. 解 令 $V_1=\{P_1, P_2, \cdots, P_7\}$，$V_2=\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}$，以 V_1 和 V_2 的元素作结点，若 P_i 是 a_j 的合格工作岗位，则在 P_i 和 a_j 之间连一边，因此，可得二部图如图 7-26。

去掉图 7-26 边(P_1,a_4), (P_1,a_8), (P_3,a_7), (P_1,a_1) ,(P_2,a_2) ,(P_5,a_1) ,(P_6,a_2), (P_6,a_5)，则图7-26 的子图如图 7-27。而图 7-27 满足 t(t=1)条件，所以，存在 V_1 到 V_2 的匹配 $M=\{(P_1,a_9), (P_2,a_7), (P_3,a_6), (P_4,a_3), (P_5,a_{10}), (P_6,a_1), (P_7,a_2)\}$，因此，图 7-26 中也存在 V_1 到 V_2 的匹配 $M=\{(P_1,a_9), (P_2,a_7), (P_3,a_6), (P_4,a_3), (P_5,a_{10}), (P_6,a_1), (P_7,a_2)\}$。这样安排使得所有的人都有工作。

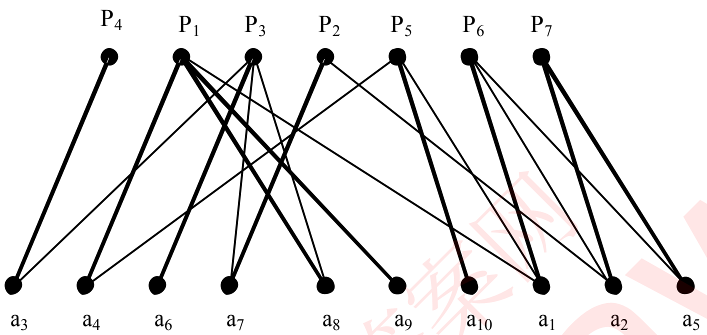


图 7-26

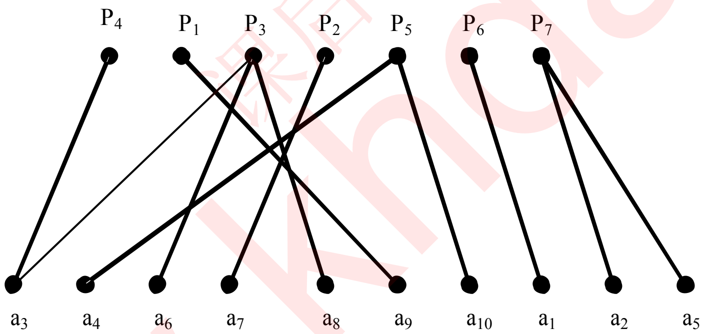


图 7-27

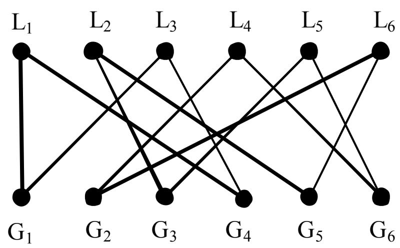


图 7-28

17. 解 以 $V_1=\{L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6\}$, $V_2=\{G_1,G_2,G_3,G_4,G_5,G_6\}$作为互补结点集，若 L_i 和 G_j 互相满意对方，则在 L_i 和 G_j 之间连一边，这样得到一个二部图如图 7-28，由图 7-28 可以看出，此图满足满足 t(t=2)条件，所以，存在 V_1 到 V_2 的匹配，因此，可使得每一个青年男女都能够找到自己满意的对象，其中一个分配方法是 $M=\{(L_1,G_1), (L_2,G_3), (L_3,G_4), (L_4,G_2), (L_5,G_6), (L_6,G_5)\}$。

第八章　代数系统

习题 8.1

1. 解 ⑴是，⑵不是，⑶是，⑷不是。

2. 解 若 * 对 ∘ 是可分配的，则有任意 $a,b,c\in I^*$,均有

$$a * (b \circ c)=(a * b)\circ(a * c)= a^b \circ a^c =(a^b\cdot a^c)= a^{b+c}$$

而 $a * (b \circ c)=a * (b\cdot c)= a^{b\cdot c}\neq a^{b+c}$ 故 * 对 ∘ 是不可分配的。

3. 解 ⑴对于任意 $A\in P(S)$，因为 $A\subseteq S$，所以，$A\cup S=S$，因此，S 是关于∪运算的零元;

⑵对于任意 $A\in P(S)$，因为 $A\subseteq S$，所以，$A\cap S= A$，因此，S 是关于∪运算的零元单。

4. 解 ⑴①因为 $x*y=xy-2x-2y+6$，则 $y*x=yx-2y-2x+6= x*y$，满足交换律;

②任意 $x,y,z\in R$ 有

$x*(y*z)=x*(yz-2y-2z+6)=x(yz-2y-2z+6)-2x-2(yz-2y-2z+6)+6$

$=xyz-2xy-2xz+6x-2x-2yz+4y+4z-12+6= xyz-2xy-2xz-2yz+4x+4y+4z-6.$

$(x*y)*z=(xy-2x-2y+6)*z=(xy-2x-2y+6)z-2(xy-2x-2y+6)-2z+6$

$=xyz-2xz-2yz+6z-2xy+4x+4y-2z-6=x*(y*z).$

故满足结合律。

(2) ①设任意 $a\in R$, 存在 $e\in R$, 要 $e*a= ea-2e-2a+6=a$ ，由于 a 的任意性则 e=3。因此 e=3 是其单位元;

②设任意 $b\in R$, $z\in R$，要有 $z*b= zb-2z-2b+6= z$ ，由于 b 的任意性则 z=2，因此 z=2 是其零元。

（3）因为*是满足交换律，对于 $x\in R$，要存在 $x^{-1}\in R$，须有 $x* x^{-1}= x x^{-1}-2x-2 x^{-1}+6= e=3$, 当 $x\neq 2$ 时，$x^{-1}=\dfrac{2x-3}{x-2}$。即对于任意的 x，当 $x\neq 2$ 时 x 都是可逆的，且 $x^{-1}=\dfrac{2x-3}{x-2}$。

5. 解 f_1,f_2,f_3 都满足交换律，f_4 满足等幂率，f_2 有单位元 a，f_1 有零元 a，f_3 有零元 b。

f_1	a	b
a	a	a
b	a	a

f_2	a	b
a	a	b
b	b	a

f_3	a	b
a	b	a
b	a	a

f_4	a	b
a	a	b
b	a	b

表 8-2

习题 8.2

1. 解 构成代数系统的运算有（2），（3），（4）。

2. 解 $<\{0\},\oplus_4>,<\{0,2\},\oplus_4>,<\{0,1,2,3\},\oplus_4>$

习题 8.3

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	b	c

(a)

$\circ$	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	β	γ
γ	γ	β	γ

(b)

表 8-2

1．证明 作函数 f:{a,b,c}→{α, β, γ}，f(a)= α,f(b)= β,f(c)= γ.显然此映射是双射。由表 8-2 可知对于任意的 x,y∈A 都有

有 f(x * y)=f(x) ° f(y)，故$<A, *>\cong<B, ^\circ>$。

2．解 代数系统$< R,\times >$与$< R,+ >$不可能同构。因为，由同构的性质，如果两个代数系统同构，则两个系统的单位元对应，零元对应，而这里，代数系统<R,×>的零元是 0，而<R,+>没有零元。故代数系统$< R,\times >$与$< R,+ >$不可能同构。

复习题八

1．解 ⑴有单位元 e=<1,0>，因为，对于任意<a,b>∈S，均有

$<<1,0>*<a,b>=<1\cdot a,1\cdot b+0>=<a,b>$，且，

$<a,b>*<1,0>=<a\cdot 1,a\cdot 0+b>=<a,b>$，故<1,0>单位元

⑵对于<a,b>∈S，要<a,b>有逆元，需要有<x,y>∈S 使得，<a,b>*<x,y>=<x,y>*<a,b>=<1, 0>事实上，

即<1, 0>=<a,b>*<x,y>=<ax, ay+b>，因此，ax=1，ay+b=0，当 a≠0 时可解得 $x=\dfrac{1}{a},y=-\dfrac{b}{a}$，且又有

$<\dfrac{1}{a},-\dfrac{b}{a}>*<a,b>=<1,0>$。故当 a≠0 时，形式的元素$<a,b>$都可逆，且

$(<a,b>)^{-1}=<\dfrac{1}{a},-\dfrac{b}{a}>$。

2．解 因为 a*b=b*a ⟹ a=b，则任意 a∈A，而*是可结合的，则有 a*(a*a)=(a*a)*a，因此 a*a=a，即*满足等幂律.

3．证明 假设 f: Q→Q-{0}是从<Q，+>到<Q-{0}，×>的同构，则两个系统的单位元对应，即有 f(0)=1。

因为 f 是从 Q 到 Q-{0}的满射，所以，对于任意一个素数 p∈Q-{0}必存在某个 x∈Q，使得 f(x)=p，

又由于 f 是一个同构，因此有 p=f(x)=f((x-1)+1)=f(x-1)×f(1) ，而在 Q-{0}中有无穷多个素数，因此，总可以找到一个素数 p，使得 x-1≠0，则 f(x-1)不是 1，这与 p 是素数矛盾。证毕。

4．证明 因为，$a*a=a$，$(a*b)*(c*d)=(a*c)*(b*d)$，

所以，$a*(b*c)=(a*a)*(b*c)=(a*b)*(a*c)$。

5．证明 对 n 用数学归纳法。当 n=1 时，由幂的定义则$(a*b)^1=a*b=(a^1)*(b^1)$，所以结论成立。

假设 n=k 时结论成立，即$(a*b)^k=a^k*b^k$，下面考察 n=k+1 时，

$(a*b)^{k+1}=(a*b)^k*(a*b)=(a^k*b^k)*(a*b)=(a^k*a)*(b^k*b)=a^{k+1}*b^{k+1}$。

即 n=k+1 时，结论也成立。由归纳法原理，对于任意的正整数 *n*，都有$(a*b)^n=a^n*b^n$。

6．证明 任意 n_1,n_2∈N，只有如下的三种情况：①n_1,n_2都能表示成 2 的幂的形式，②n_1,n_2都不能表示成 2 的幂的形式，③一个能表示成 2 的幂的形式，而另一个不能。下面就这三种情况分别考虑。

①设存在 k_1,k_2∈N，使得 $n_1=2^{k1}$，$n_2=2^{k2}$，则 $n_1\times n_2=2^{k1}\times 2^{k2}=2^{k1+k2}$ ∈N，且 $f(n_1)=f(n_2)=1$，

因此 $f(n_1\times n_2)=f(2^{k1+k2})=1=f(n_1)\times f(n_2)=f(2^{k1})\times f(2^{k2})$;

②n_1,n_2都不能表示成 2 的幂的形式，则 $n_1\times n_2$也不能表示成 2 的幂的形式，

所以，$f(n_1)=f(n_2)=0$，因此 $f(n_1\times n_2)=0=f(n_1)\times f(n_2)$。

③不妨设存在 k∈N，使得 $n_1=2^k$，，而 n_2不能表示成 2 的幂的形式，则 $n_1\times n_2$也不能表示成 2 的幂的形式，

所以，$f(n_1)=1$，$f(n_2)=0$，因此，$f(n_1\times n_2)=0=f(n_1)\times f(n_2)$。

综上所述，代数结构$<N,\times>$ 与$<\{0,1\},\times>$同态。

第九章 特殊的代数系统

习题 9.1

1．解 (1)是半群。显然，二元运算“$\circ$”在 N 上是封闭的， 所以，$<N,\circ>$是一个代数系统，另一方面，$\forall a,b,c\in N$, 有$(a\circ b)\circ c=\max\{a,b\}\circ c=\max\{a,b,c\}$，

而$a\circ(b\circ c)=a\circ\max\{b,c\}=\max\{a,b,c\}$，因此，$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$，所以，运算“$\circ$”满足结合律的，故$<N,\circ>$是半群；

(2)是半群。显然，二元运算“$\circ$”在 N 上是封闭的， 所以，$<N,\circ>$是一个代数系统，另一方面，$\forall a,b,c\in N$，有$(a\circ b)\circ c=b\circ c=c$，而$a\circ(b\circ c)=a\circ c=c$，则$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$，所以，运算“$\circ$”满足结合律，故$<N,\circ>$是半群；

(3)是半群。显然，二元运算“$\circ$”在 N 上是封闭的， 所以，$<N,\circ>$是一个代数系统，另一方面，$\forall a,b,c\in N$，有$(a\circ b)\circ c=(2ab)\circ c=2(2ab)c=4abc$，

$a\circ(b\circ c)=a\circ(2bc)=2a(2bc)=4abc$，即$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ ，所以，运算“$\circ$”满足结合律，故$<N,\circ>$是半群。

(4)不是半群。虽然，二元运算“$\circ$”在 N 上是封闭的，即$<N,\circ>$是一个代数系统，但是对于 5，3，6，因为，$(5\circ 3)\circ 6=|5-3|\circ 6=||5-3|-6|=4$，而

$5\circ(3\circ 6)=5\circ|3-6|=|5-|3-6||=2$，即$(5\circ 3)\circ 6\neq 5\circ(3\circ 6)$，所以，运算“$\circ$”不满足结合律，故$<N,\circ>$不是半群。

2．解 (1)正确。因为，运算显然封闭。

(2)正确。

$(a\circ b)\circ c=(a+b+ab)\circ c=a+b+c+ab+ac+bc+abc$，

$a\circ(b\circ c)=a\circ(b+c+bc)=a+b+c+ab+ac+bc$，

即是$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$，所以$\circ$满足结合律。故$<R,\circ>$是半群。

(3) $\forall a\in N$，有$0\circ a=0+a+0a=a$，又有$a\circ 0=a+0+a=a$,

即存在单位元是 0，故$< R,\circ >$是独异点。

表 1

f_1	a	b
a	a	a
b	a	a

f_2	a	b
a	a	b
b	b	a

f_3	a	b
a	b	a
b	a	a

f_4	a	b
a	a	b
b	a	b

3．解 f_1, f_3, f_4都不能使<{a,b},*>构成独异点，因为没有一个函数存在单位元。而f_2的单位元是 a, <{a,b}, f_2>能构成独异点。

4．解 ⑴是，因为 M={2,3}关于 min 是封闭的，故<M,min>是<S,min>的子代数；

⑵<M,min>是<S,min>的子半群；

⑶不是，因为 S 的单位元是 4，而 4$\notin$M,故<M,min>不是<S,min>的子独异点。

习题 9.2

1．解 ⑴是，因为实数乘法满足结合律，存在单位元 a^0=1，任意元素 a 存在逆元素 a^{-1}；

⑵是，因为有理数乘法满足结合律，存在单位元 1，任意元素 a 存在逆元素 a^{-1}；

（3）是，因为复数乘法满足结合律，存在单位元 1, 任意元素 z 的逆元素是 z 共轭复数；

（4）是，因为多项式的加法满足结合律，多项式关于加法的单位元是 0 多项式，任意元素 P(x)的逆元素是-P(x).

（5）是, 因为向量的加法满足结合律，n 维实向量关于向量的加法的单位元是 n 维零向量，任意的 n 维实向量α的逆元素是-α。

2．解 可以构成群。⑴因为，对于任意的$x, y, z \in I, (x \circ y) \circ z = (x + y - 2) + z - 2 =$ $x + y + z - 4 = x + (y + z - 2) - 2 = x \circ (y \circ z)$，所以，运算°满足结合律；，

⑵关于运算°有单位元 2，这是因为对于任意的 $a \in I$, 都有 $a \circ 2 = a + 2 - 2 = a$，且 $2 \circ a = 2 + a - 2 = a$；

⑶对于任意的 $a \in I$，若要 a 有逆元 b，需要有 a°b=b°a=2，即需要 a+b-2= b+a-2=2，事实上只要 b=a-4 即可。因此，对于任意的 $a \in I$，a 都可逆，且 a 的逆元是 a-4。

综上所述，由⑴，⑵，⑶得出结论 I 与运算°能构成群。

3. 证明 因为对于任意的$a \in G, a * a = 1$，所以 a 可逆,且$a^{-1} = a$，因此，<G,*>是群。要证明<G,*>是 Abel 群，只需证明运算满足交换律，事实上，因为，对于任意的 $x, y \in G, x * x = 1, y * y = 1$，所

以 $(x*x)*(y*y)=1=(x*y)*(x*y)$，因此，由结合律则有 $x*(y*x)*y=x*(x*y)*y$，再由消去律得：$y*x=x*y$。故<G,*>是 Abel 群。

4. 证明 当 $x_0=a^{-1}\circ b\circ c\circ a^{-1}\circ b^{-1}$时，因为，

$$a\circ x_0\circ b\circ a=a(a^{-1}\circ b\circ c\circ a^{-1}\circ b^{-1})\circ b\circ a=b\circ c,$$

所以，$x_0=a^{-1}\circ b\circ c\circ a^{-1}\circ b^{-1}$是方程 $a\circ x\circ b\circ a=b\circ c$的解。下面方程的解是唯一的。

对于 $a,b,c\in G$, 若 $a\circ x\circ b\circ a=b\circ c$解 y，即 $a\circ y\circ b\circ a=b\circ c$，由于群中的任何元素都可逆，则对上式两边同时左乘 a^{-1}，并两边同时右乘 $a^{-1}\circ b^{-1}$则得，

$$a^{-1}\circ(a\circ y\circ b\circ a)\circ(a^{-1}\circ b^{-1})=a^{-1}\circ(b\circ c)\circ(a^{-1}\circ b^{-1})$$

由结合律则有，$y=a^{-1}\circ b\circ c\circ a^{-1}\circ b^{-1}$。证毕。

5. 证明 设 1 是群 G 的单位元，若 G 中存在幂等元 a，即

$$a*a=a$$

因为群中的任何元素都可逆，因此，a 也可逆，则有

$$1=a*a^{-1}=(a*a)*a^{-1}=a*(a*a^{-1})=a*1=a$$

故单位元为 G 中惟一的幂等元。

6. 解 答案是 A，因为存在同态映射 $f:R\to R-\{0\},f(x)=e^x$，但不存在同构映射。

习题 9.3

1. 解 1，5，7，11 为其生成元，任何与 12 互素的正整数都可作<N_{12},$+_{12}$>的生成元。

2. 证明 设 H 是循环群 G 的子群，且 G 的生成元是 a。

若 H={e}，则 H 是循环群。

若 H≠{e}，由于 H 非空，则必存在正整数 m>0 使 a^m∈H。设 m 是使 a^m∈H 的最小的正整数，若对于任何的 a^n∈H(n∈N)，则由带余除法有

$$n=mk+r,0\leq r<m$$

则有 $a^r=a^{n-mk}=a^n*a^{-mk}=a^n*(a^m)^{-k}$ ∈H，而因为 m 是使 a^m∈H 的最小的正整数，且 0≤r<m，所以 r=0。

这样 n=mk, $a^n=a^{mk}=(a^m)^k$，再由 a^n∈H 的任意性知，H 中的任意元素都是 a^m 的幂，故 H=（a^m）,即循环群的任何子群都是循环群。

习题 9.4

1. 证明 ①显然 $H\subseteq G$;

②证明运算*关于 H 的封闭性。任取 $a,b\in H$，对于任意的 $x\in G$有 $a*x=x*a,b*x=x*b$，则 $(a*b)*x=a*(b*x)=a*(x*b)=(a*x)*b=(x*a)*b=x*(a*b)$，因此，$a*b\in H$；

③设 1 是 G 中的单位元，因为对于任意的 $x\in G$有 $x*1=1*x$故，$1\in H$；

④任取 $a\in H\subseteq G$，对于任意的 $x\in G$，则由 H 的定义有, $x*a=a*x$ ，由于群的元素都有逆元，因此 a 也有逆元。等式 $x*a=a*x$ 两边同时左乘、并同时右乘 a 的逆元 a^{-1} 则有，

$$a^{-1}*(x*a)*a^{-1}=a^{-1}*(a*x)*a^{-1}\text{，即 } a^{-1}*x=x*a^{-1}\text{，亦即 } x^{-1}\in H\text{。}$$

综合①、②、③、④，$<H,*>$ 是$<G,*>$ 的子群。

2．解　群$<G,*>$真子群有如下 4 个：$<\{1\},*>$，$<\{1,5\},*>$，$<\{1,7\},*>$，$<\{1,11\},*>$。

习题 9.5

1．解 (1)设 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$，则集合

$G=\{E, A, B, C,-E,-A,-B,-C\}$，$G$ 关于运算∗的运算表如下。

表 2　G 关于运算∗的运算表

∗	E	A	B	C	$-E$	$-A$	$-B$	$-C$
E	E	A	B	C	$-E$	$-A$	$-B$	$-C$
A	A	$-E$	$-C$	B	$-A$	E	C	$-B$
B	B	C	$-E$	$-A$	$-B$	$-C$	E	A
C	C	$-B$	A	$-E$	$-C$	B	$-A$	E
$-E$	$-E$	$-A$	$-B$	$-C$	E	A	B	C
$-A$	$-A$	E	C	$-B$	A	$-E$	$-C$	B
$-B$	$-B$	$-C$	E	A	B	C	$-E$	$-A$
$-C$	$-C$	B	$-A$	E	C	$-B$	A	$-E$

由表 1 可以看出 G 关于运算∗是封闭的。而运算∗是矩阵的乘法运算，因此满足结合律。由表 1 可以看出 G 关于运算∗的单位元是 E。由表 1 可以进一步看出关于运算∗，G 中的每一个元素都有逆元，$E^{-1}=E, A^{-1}=-A, B^{-1}=-B, C^{-1}=-C, (-E)^{-1}=-E, (-A)^{-1}=A, (-B)^{-1}=B, (-C)^{-1}=C$。因此，$<G,*>$是一个群。

(2)G 的所有子群是：$<\{E\},*>,<\{E,-E\},*>,<\{E, A, -A, -E\},*>,<\{E, B, -B,-E\},*>,<\{E, C, -C,-E\},*>$。

(3)**证明**　显然$<\{E\},*>$，$<\{E,-E\},*>$是正规子群，下面证明$<\{E, A, -A, -E\},*>$是正规子群。

设 $H=\{E, A, -A, -E\}$，显然有 $EH=HE=(-E)H=H(-E)=AH=HA=(-A)H=H(-A)=\{E, A, -A, -E\}$。

又 $BH=\{B, C, -C, -B\}$, $HB=\{B, -C,C, -B\}=BH$，因此有 $H(-B)=\{B, -C,C, -B\}=(-B)H$。同理可得，$CH=HC=H(-C)=(-C)H=\{C,-B, B,-C\}$。

综上所述，对于任意的 $a\in G$ 都有 $aH=Ha$，即$<H,*>$是正规子群。同理可证，$<\{E, B, -B,-E\},*>,<\{E, C, -C,-E\},*>$也是正规子群。

2．解 5，{3，7，11}，{0，4，8}。

习题 9.6

1．解 $I[i]$对于普通加法和乘法能构成环。这是因为：

(1)显然 $I[i]$对加法+是封闭的，而复数的加法是满足交换律和结合律的，$<I[i],+>$的单位元是 $0=0+0i$，任意元素 $a+bi$ 的逆元是$-a-bi$。所以，$<I[i],+>$是可交换群。

(2)$I[i]$对复数的加法是封闭的，且复数的乘法是满足结合律的，即$<I[i],\times>$是半群。

(3)复数的乘法对复数的加法满足分配律。

综合(1)(2)(3)，$I[i]$对于普通加法和乘法能否构成环。

2．证明 (1)首先证明$<\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in I\},+,\times>$是一个环。

设 $R=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in I\}$ 对于任意的 $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2}\in R$，因为， $a,b,c,d\in I$，所以，$(a+c)$，$(b+d)$，(ac+2bd)，(ad+bc) $\in I$，因此，$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})$

$=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\in R$，$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in R$，

故 R 对于加法和乘法都是封闭的。另一方面，实数的普通加法满足结合律和交换律，且关于加法单位元是0，每个元素都有逆元，就是相反数。实数的普通乘法也满足结合律。综合上述$<R,+,\times>$是一个环。

⑵ 因为，实数的普通乘法也满足交换律，且 R 关于乘法有单位元 1，又对于 $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2}\in R$，若两者都不为零，则 $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})\neq 0$，即$<R,+,\times>$无零因子。

综合(1)(2)可知，$<R,+,\times>$是一个整环。

3．证明 设 $F=\{a+bi|\ a, b\in Q\}$，对于任意的 $a+bi, c+di\in F$，因为，$a,b, c,d\in Q$，所以，$a+c, b+d, ac-bd, ad+bc\in Q$，因此，$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\in F$，且$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i\in F$，即 F 关于加法和乘法运算都是封闭的；而普通的加法和乘法都满足结合律和交换律；又关于加法+，F 中有单位元 $0=0+0i$，且每个元素 $a+bi$ 都有逆元$-a-bi$。故$<F,+,\times>$是一个环。

另一方面，$<F,\times>$中有单位元 $1=1+0i$；又对于任何的非零元 $a+bi$，因为，a,b 不全为零，所以，$a^2+b^2\neq 0$，因此对于任何的非零元 $a+bi$ 都有逆元。

综上所述，$<F,+,\times>$是一个域。

复习题九

1．解 (1)$<G,*>$ 是半群，但不是独异点，更不是群；

(2)不是半群；

(3)不是半群，

(4)是群，其单位元是$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。

2．证明 对于任意的 $a,b,c\in R$，有 $(a*b)*c=(a+b+ab)*c$

$=a+b+ab+c+ac+bc+abc$

同时，$a*(b*c)=a+b+c+ab+bc+ac+abc$，故 $(a*b)*c=a*(b*c)$，所以满足结合律，故是<R,*>半群；

又存在 $0\in R$，且 $0*a=a*0=0+a+0a=a$ 故 0 是单位元。

综上所述，<R,*>是独异点。

3．证明 对于任意的 $x,y\in S$，因为，$x*y=x\circ a\circ y$，其中 $a\in S$，$\circ$ 为 $<S,\circ>$ 的二元运算，而 $<S,\circ>$ 是半群，又 $a\in S$，所以，$x\circ a\circ y\in S$，即 $<S,\circ>$ 对 $*$ 运算是封闭的。

又因为 $<S,\circ>$ 是半群，所以，$<S,\circ>$ 有结合律，即对于任意的 $x,y,z\in S$ 有，

$$(x*y)*z=(x\circ a\circ y)\circ a\circ z=x\circ a\circ(y\circ a\circ z)=x*(y\circ a\circ z)=x*(y*z)$$

故<S,*>满足结合律，综上所述，<S,*>是半群。

4．证明 对于任意 $a,b,c\in S$，由于<S,*>是半群，所以，<S,*>有结合律，a*c=c*a 且 b*c=c*b，则

$(a*b)*c = a*(b*c) = a*(c*b) = (a*c)*b = (c*a)*b = c*(a*b)$。

5. 证明 对于任意 $a,b \in S$，若 a,b 是<S,*>的幂等元，则 $a*a=a$，$b*b=b$，再由交换律和结合律则，

$$(a*b)*(a*b) = (a*a)*(b*b) = a*b$$

故 $a*b$ 也是<S,*>的幂等元。

6. 证明 对于任意的 $a,b,c,d,e,f \in S$，有 $<a,b>*<c,d>=<a+c,b+d+2bd>$，所以，<S,*>是封闭的，又因为

$$(<a,b>*<c,d>)*<e,f>=<(a+c)+e,(b+d+2bd)+f+2(b+d+2bd)f>$$

$$=<a+c+e,b+d+f+2bd+2bf+2df+4bdf>$$

$$=<a+(c+e),b+(d+f+2df)+2b(d+f+2df)>=<a,b>*(<c,d>*<e,f>)$$

因此，<S,*>是半群；

又取 $<0,0>\in S$，所以，$<a,b>*<0,0>=<0,0>*<a,b>=<a,b>$，故存在单位元<0,0>

所以<S,*>是独异点，且

$$<a,b>*<c,d>=<a+c,b+d+2bd>=<c+a,d+b+2db>=<c,d>*<a,b>$$

即交换律成立，故<S,*>是可交换独异点。

7. 证明 因为，0×0=0∈{0}，所以，运算封闭，又结合律是显然的，故<{0},×>是子半群。

但 $1 \notin \{0\}$，所以，<{0},×>不是子独异点。

8. 证明 $N_4=\{0,1,2,3\}$，则{0}，{1}，{0，1}，{0，2}，{0，1，2}，{0，1，2，3}都能与 $\times_4$ 构成 $<N_4,\times_4>$ 的子半群，其中 $<\{0\},\times_4>$ 是独异点，但不是 $<N_4,\times_4>$ 的子独异点。

9. 证明 对于任意的 $a,b\in G$，由题设则有，

$$a^4*b^4=(a*b)^4=(a*b)^3*(a*b)=a^3*b^3*a*b$$

因此，由消去律可得，

$$a*b^3=b^3*a \qquad ①$$

同理，由 $a^5*b^5=(a*b)^5=(a*b)^4*a*b=a^4*b^4*a*b$ 可得，

$$a*b^4=b^4*a \qquad ②$$

再由①②两式可得，

$$b^4*a=a*b^4=(a*b^3)*b=(b^3*a)*b=b^3*a*b$$

由消去律消去上式中的 b^3 可得，$b*a=a*b$。故<G,*>是可交换群。

10. 解 群 $<N_5,+_5>$ 只有两个子群 $H_1=\{0\}$ 和 $H_2=N_5$，其中 H_1 的左陪集和右陪集如下：

$0H_1=H_10=\{0\}$, $1H_1=H_11=\{1\}$,$2H_1=H_12=\{2\}$,$3H_1=H_13=\{3\}$,$4H_1=H_14=\{4\}$；

H_2 的左陪集和右陪集如下：

$0H_2=H_20=1H_2=H_21=2H_2=H_22=3H_2=H_23=4H_2=H_24=N_5$。

11．证明 任取 $aH,bH\in G/H$，因为，$<G,*>$是可交换群，所以对于 $a,b\in G$，有

$$a*b=b*a$$

又因为，$<H,*>$是$<G,*>$的正规子群，所以，任意的 $a\in G$，都有

$$aH=Ha$$

由以上两式，则有，

$$(aH)*(bH)=a(Hb)*H=a(bH)*H=(ab)(H*H)=(ab)H$$

$$(bH)*(aH)=b(Ha)*H=b(aH)*H=(ba)(H*H)=(ba)H=(ab)H$$

即$(aH)*(bH)=(bH)*(aH)$。由于 aH,bH 的任意性，所以，商群$<G/H,*>$也是可交换群。

12. 证明 ⑴先证明 f 是双射。对任意的 $x_1,x_2\in G$，若 $f(x_1)\neq f(x_2)$，即有 $a*x_1*a^{-1}=a*x_2*a^{-1}$，由群的消去律可得 $x_1=x_2$，所以，f 是单射。

又对于任意的 $y\in G$，则有 $x=a^{-1}*y*a\in G$，使得 $f(x)=a*x*a^{-1}=a*(a^{-1}*y*a)*a^{-1}=y$。即 f 是满射，故 f 是双射。

⑵再证 f 是同态映射。对于任意的 $x_1,x_2\in G$ 有

$$f(x_1*x_2)=a*(x_1*x_2)*a^{-1}=(a*x_1)*(a^{-1}*a)*(x_2*a^{-1})$$

$$=(a*x_1*a^{-1})*(a*x_2*a^{-1})=f(x_1)*f(x_2)$$

综合⑴⑵可知，f 是$<G,*>$到其自身的同构映射。

第十章　格和布尔代数

习题 10.1

1. 解 ⑴不是，因为 L 中的元素对{2, 3}没有最小上界；

⑵是，因为 L= {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} 任何一对元素 a,b，都有最小上界和最大下界；

⑶是，与⑵同理；

⑷不是，因为 L 中的元素对{6, 7}没有最小上界不存在最小上界。

2. 证明 ⑴因为，$a\leqslant b$，所以，$a\vee b=b$；又因为，$b\leqslant c$，所以，$b\wedge c=b$。故 $a\vee b=b\wedge c$；

⑵因为，$a\leqslant b\leqslant c$，所以，$a\wedge b=a$，$b\wedge c=b$，而 $a\vee b=b$，因此，$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=b$；

又 $a\vee b=b$，$b\vee c=c$，而 $b\wedge c=b$，因此，$(a\vee b)\wedge(b\vee c)=b$。即

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(b\vee c)。$$

习题 10.2

1. 解 由图 1 知：$<S_1,\leqslant>$不是$<L,\leqslant>$的子格，这是因为，$e\vee f=g\notin S_1$；

$<S_2,\leqslant>$不是$<L,\leqslant>$的子格， ∵$e\wedge f=c\notin S_2$；

$<S_3,\leqslant>$是$<L,\leqslant>$的子格.

2. 解 S_{24} 的包含 5 个元素的子格有如下的 8 个：

$S_1=\{1, 3, 6, 12, 24\}$， $S_2=\{1, 2, 6, 12, 24\}$， $S_3=\{1, 2, 4, 12, 24\}$， $S_4=\{1, 2, 4, 8, 24\}$，

$S_5=\{1, 2, 3, 6, 12\}$， $S_6=\{1, 2, 4, 6, 12\}$， $S_7=\{2, 4, 6, 12, 24\}$， $S_7=\{2, 4, 8, 12, 24\}$.

3. 证明 因为，一条线上的任何两个元素都有（偏序）关系，所以，都有最大下界和最小上界，故它是格，又因为它是$\langle L, \vee, \wedge\rangle$的子集，即是$\langle L, \vee, \wedge\rangle$的子代数，故是子格。

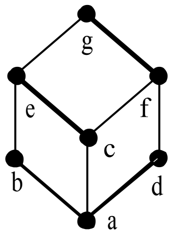


图 1

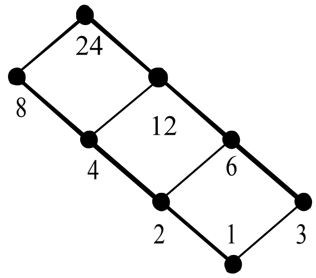


图 2

4. 证明 由(10-4)有，$a\wedge b\leqslant a$, 由已知 $a\leqslant c$, 由偏序关系的传递性有，$a\wedge b\leqslant c$;

同理 $a\wedge b\leqslant d$。

由(10-5)和以上两式有，$a\wedge b\leqslant c\wedge d$.

5. 证明 因为由(10-4)有，$a\wedge b\leqslant a$，因此，

$$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant a\vee(c\wedge d) \qquad ①$$

由分配不等式有，

$$a\vee(c\wedge d)\leqslant(a\vee c)\wedge(a\vee d) \qquad ②$$

再由由(10-4)有，

$$(a\vee c)\wedge(a\vee d)\leqslant a\vee c \qquad ③$$

由偏序关系的传递性和①②③则有，

$$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant a\vee c$$

同理 $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant b\vee d$

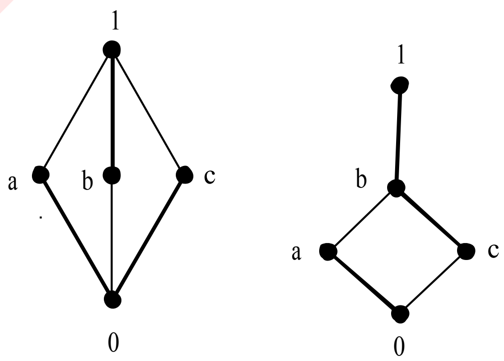
因此有，$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant(a\vee c)\wedge(b\vee d)$。

习题 10.3

1. 解 ⑴ 是，全上界是 24，全下界是 1；

⑵1 的补元是 24；3 的补元是 8；8 的补元是 3，4、6 没有补元。

2. 解 图 3 是两个格的哈斯图，其中图⑴是有补格但不是分配格的例子；图⑵是分配格但不是有补格的例子。



(1) (2)

图 3

3. 证明 先证充分性。由已知条件知，对于任何的 $a, b, c\in L$, 有 $(a\vee b)\wedge c\leqslant a\vee(b\wedge c)$，因此和等幂律、交换律可得，

$$(a\vee b)\wedge c=((b\vee a)\wedge c)\wedge c\leq(b\vee(a\wedge c))\wedge c$$
$$=((a\wedge c)\vee b)\wedge c\leq(a\wedge c)\vee(b\wedge c) \qquad ①$$

又因为，$(a\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$ 且 $(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$，

所以， (a∧c)∨(b∧c)≤(a∨b)∧c ②

由①②可得， (a∧c)∨(b∧c)=(a∨b)∧c

再由交换律得到， c∧(a∨b)=(c∧a)∨(c∧b) ③

由此式容易证明

c∨(a∧b)=(c∨a)∧(c∨b) ④

由③④可知它是分配格。

再证必要性。因为<*L*, ≤>是分配格，则

$(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\leq a\vee(b\wedge c)$。

4. 证明 因为，$(a\wedge b)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b})=(a\wedge b\wedge\overline{a})\vee(a\wedge b\wedge\overline{b})=0\vee 0=0$；

同理有，$(a\wedge b)\vee(\overline{a}\vee\overline{b})=(a\vee\overline{a}\vee\overline{b})\wedge(b\wedge\overline{a}\vee\overline{b})=1\vee 1=1$；

又因为补元素是唯一的，故$\overline{(a\wedge b)}=\overline{a}\vee\overline{b}$成立。

习题 10.4

1. 解 是布尔代数，因为<*A*, ≤>是有补分配格。

2. 证明 因为，<*B*, –, ∨, ∧>是布尔代数，所以，运算–，∨, ∧在 *B* 上都是封闭的，因此，由运算⊕的定义可知，运算⊕在 *B* 上也是封闭的。

又运算∨, ∧都满足交换律。因此，对于任意的 a, b∈B,

$$a\oplus b=(a\wedge\overline{b})\vee(\overline{a}\wedge b)=((a\wedge\overline{b})\vee\overline{a})\wedge((a\wedge\overline{b})\vee b)$$

$$=(\overline{b}\vee\overline{a})\wedge(a\vee b)=(a\vee b)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b})$$

由其对称性可知⊕满足交换律。下面证明运算⊕满足结合律，对于任意的 a,b,c∈B 由上式则有

$$(a\oplus b)\oplus c=[(a\vee b)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b})]\oplus c$$

$$=([(a\vee b)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b})]\vee c)\wedge(\overline{(a\vee b)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b})}\vee\overline{c})$$

$$=(a\vee b\vee c)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b}\vee c)\wedge[(\overline{a}\wedge\overline{b})\vee(a\wedge b)\vee\overline{c}]$$

$$=(a\vee b\vee c)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b}\vee c)\wedge(\overline{a}\vee b\vee\overline{c})\wedge(a\vee\overline{b}\vee\overline{c})$$

同理可得

$$a\oplus(b\oplus c)=(a\vee b\vee c)\wedge(\overline{a}\vee\overline{b}\vee c)\wedge(\overline{a}\vee b\vee\overline{c})\wedge(a\vee\overline{b}\vee\overline{c})$$

即，$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$，亦即⊕满足结合律。

下面再证 0 是关于⊕的单位元。事实上对于任意的 a∈B,

$$a\oplus 0=(a\wedge\overline{0})\vee(\overline{a}\wedge 0)=(a\wedge 1)\vee 0=a。$$

最后证明任意的 a∈B 关于运算⊕都可逆，且其逆元就是 a 自身，事实上

$$a\oplus a=(a\wedge\overline{a})\vee(\overline{a}\wedge a)=0\vee 0=0$$

综上所述，$<B,\oplus>$是交换群。

复习题十

1. 证明 显然，$a, b\in B$，所以，B 非空。

对于任意的 $x, y\in B$，则 $a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b$，由格的保序性和等幂律则有，

$$a\leq x\vee y\leq b,\ a\leq x\wedge y\leq b$$

即集合 B 对于运算$\vee$和$\wedge$是封闭的。

因此，$\langle B, \leqslant\rangle$是$\langle L, \leqslant\rangle$的子格。而子格也是格，故$\langle B, \leqslant\rangle$也是一个格。

2. 证明 因为，$\langle L, \vee, \wedge\rangle$是一个格，由格的分配不等式则得

$$((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))\geqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge b\wedge c)=a\wedge b \quad ①$$

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\leq a\wedge(b\vee c) \quad ②$$

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\leq b\wedge(a\vee c) \quad ③$$

由②③和格的保序性可得，

$$((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))\leq(a\wedge(b\vee c))\wedge(b\wedge(a\vee c)$$

$$=a\wedge b\wedge(b\vee c)\wedge(a\vee c)=a\wedge b \quad ④$$

由①④和反对称性则有，$((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\wedge((a\wedge b)\vee(b\wedge c))= a\wedge b$。

3. 证明 因为$\langle L, \leqslant\rangle$是格，对任意 $a, b, c\in L$,

$$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leq[((a\wedge b)\vee b)\wedge((a\wedge b)\vee c)]\vee(c\wedge a)$$

$$=[b\wedge((a\wedge b)\vee c)]\vee(c\wedge a)\leq[b\wedge(a\vee c)\wedge(b\vee c)]\vee(c\wedge a)$$

$$=[b\wedge(a\vee c)]\vee(c\wedge a)\leq(b\vee(c\wedge a))\wedge((a\vee c)\vee(c\wedge a))$$

$$=(b\vee(c\wedge a))\wedge(a\vee c)\leq(b\vee c)\wedge(b\vee a)\wedge(a\vee c)$$

$$=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)。$$

4. 证明 因为有限格都是有界格，而有界格必存在最大元素和最小元素，故有限格一定有最大元素和最小元素。

5. 证明 因为，$a\leqslant b$, 所以，$a\vee b=b$；因此有，$a\vee(b\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge(a\vee c)=b\wedge(a\vee c)$。

6. 证明 因为，h 将运算$\vee$传送到运算$\cup$，将运算“$-$”传送到运算“$'$”，所以，对于任意的 $x, x_1, x_2\in B_1$ 有：

$$h(x_1\vee x_2)=h(x_1)\cup h(x_2) \quad ①$$

$$h(\overline{x})=(h(x))' \quad ②$$

所以，对于任意的 $a, b\in B_1$, 而 $a\wedge b=\overline{(\overline{a}\vee\overline{b})}$，因此有：

$$h(a\wedge b)=h(\overline{(\overline{a}\vee\overline{b})})=(h(\overline{a}\vee\overline{b}))'=(h(\overline{a})\cup h(\overline{b}))'$$

$$=((h(a))'\cup(h(b))')'=h(a)\cap h(b)。$$

即 h 将运算$\wedge$传送到运算$\cap$。

7. 证明 由习题 10.4 第 2 题可知$\langle B, \oplus\rangle$是一个交换群。由于，在布尔代数$\langle B, -, \vee, \wedge\rangle$中$\wedge$是可结合的且是可交换的，由$*$运算的定义可知，$*$是可结合的且是可交换的。由$*$运算的定义可知可进一步看出，关于$*$运算的单位元是布尔代数$\langle B, -, \vee, \wedge\rangle$的全上界 1。事实上，对于任意的 $a\in B$, 有

$$a*1=a\wedge 1=a$$

因此，要证明$\langle B, \oplus, *\rangle$是一个含幺交换环，只需证明$*$对$\oplus$满足分配律。事实上，对于任意的 $a,b,c\in B$,

$$a*(b\oplus c)=a\wedge[(b\wedge\overline{c})\vee(\overline{b}\wedge c)]=(a\wedge b\wedge\overline{c})\vee(a\wedge\overline{b}\wedge c)$$

$$(a*b)\oplus(a*c)=(a\wedge b)\oplus(a\wedge c)$$

$$=((a \wedge b) \wedge (\overline{a \wedge c})) \vee ((\overline{a \wedge b}) \wedge (a \wedge c))$$

$$=((a \wedge b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{c})) \vee ((\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (a \wedge c))$$

$$=(a \wedge b \wedge \overline{a}) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (\overline{a} \wedge a \wedge c) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge c)$$

$$=(a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge c)$$

即

$$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c)$$

综上所述，$\langle B, \oplus, * \rangle$是一个含幺交换环。