《管理运筹学》（第 3 版）章后习题解析

第 2 章　线性规划的图解法

1．解：

（1）可行域为 $OABC$。

（2）等值线为图中虚线部分。

（3）由图 2-1 可知，最优解为 B 点，最优解 $x_1=\frac{12}{7}$， $x_2=\frac{15}{7}$；最优目标函数值 $\frac{69}{7}$。

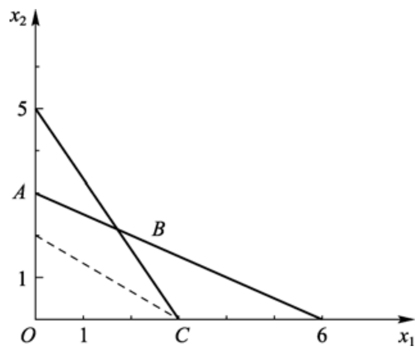

图 2-1

2．解：

（1）如图 2-2 所示，由图解法可知有唯一解 $\begin{cases} x_1=0.2 \\ x_2=0.6 \end{cases}$，函数值为 3.6。

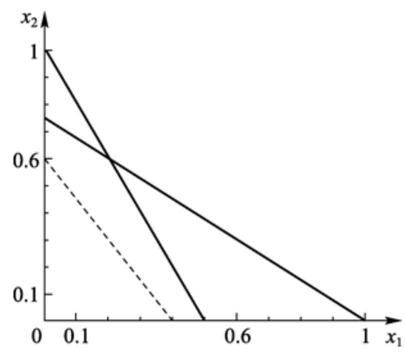

图 2-2

第 9 章　目 标 规 划

1．解：

设工厂生产 A 产品 x_1 件，生产 B 产品 x_2 件。按照生产要求，建立如下目标规划模型。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & P_1(d_1^-)+P_2(d_2^-) \\
\text{s.t} \quad & 4x_1+3x_2 \leqslant 45 \\
& 2x_1+5x_2 \leqslant 30 \\
& 5x_1+5x_2-d_1^+ + d_1^- = 50 \\
& 8x_1+6x_2-d_2^+ + d_2^- = 100 \\
& x_1,x_2,d_i^+,d_i^- \geqslant 0, i=1,2
\end{aligned}
$$

由管理运筹学软件求解得 $x_1=11.25, x_2=0, d_1^-=0, d_2^-=10, d_1^+=6.25, d_2^+=0$

由图解法或进一步计算可知，本题在求解结果未要求整数解的情况下，满意解有无穷多个，为线段 $\alpha(135/14,15/7)+(1-\alpha)(45/4,0), \alpha\in[0,1]$ 上的任一点。

2．解：

设食品厂商在电视上发布广告 x_1 次，在报纸上发布广告 x_2 次，在广播中发布广告 x_3 次。目标规划模型为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & P_1(d_1^-)+P_2(d_2^-)+P_3(d_3^+)+P_4(d_4^+) \\
\text{s.t} \quad & x_1 \leqslant 10 \\
& x_2 \leqslant 20 \\
& x_3 \leqslant 15 \\
& 20x_1+10x_2+5x_3-d_1^+ + d_1^- = 400 \\
& 0.7x_1-0.3x_2-0.3x_3-d_2^+ + d_2^- = 0 \\
& -0.2x_1-0.2x_2+0.8x_3-d_3^+ + d_3^- = 0 \\
& 2.5x_1+0.5x_2+0.3x_3-d_4^+ + d_4^- = 20 \\
& x_1,x_2,x_3,d_i^+,d_i^- \geqslant 0, i=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

用管理运筹学软件先求下述问题。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & d_1^- \\
\text{s.t} \quad & x_1 \leqslant 10 \\
& x_2 \leqslant 20 \\
& x_3 \leqslant 15 \\
& 20x_1+10x_2+5x_3-d_1^+ + d_1^- = 400 \\
& 0.7x_1-0.3x_2-0.3x_3-d_2^+ + d_2^- = 0 \\
& -0.2x_1-0.2x_2+0.8x_3-d_3^+ + d_3^- = 0 \\
& 2.5x_1+0.5x_2+0.3x_3-d_4^+ + d_4^- = 20 \\
& x_1,x_2,x_3,d_i^+,d_i^- \geqslant 0, i=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

得 $d_1^-=0$，将其作为约束条件求解下述问题。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & d_2^- \\
\text{s.t} \quad & x_1 \leqslant 10 \\
& x_2 \leqslant 20 \\
& x_3 \leqslant 15 \\
& 20x_1+10x_2+5x_3-d_1^+ +d_1^- =400 \\
& 0.7x_1-0.3x_2-0.3x_3-d_2^+ +d_2^- =0 \\
& -0.2x_1-0.2x_2+0.8x_3-d_3^+ +d_3^- =0 \\
& 2.5x_1+0.5x_2+0.3x_3-d_4^+ +d_4^- =20 \\
& d_1^- =0 \\
& x_1,x_2,x_3,d_i^+,d_i^- \geqslant 0, i=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

得最优值 $d_2^-=0$，将其作为约束条件计算下述问题。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & d_3^+ \\
\text{s.t} \quad & x_1 \leqslant 10 \\
& x_2 \leqslant 20 \\
& x_3 \leqslant 15 \\
& 20x_1+10x_2+5x_3-d_1^+ +d_1^- =400 \\
& 0.7x_1-0.3x_2-0.3x_3-d_2^+ +d_2^- =0 \\
& -0.2x_1-0.2x_2+0.8x_3-d_3^+ +d_3^- =0 \\
& 2.5x_1+0.5x_2+0.3x_3-d_4^+ +d_4^- =20 \\
& d_1^- =0 \\
& d_2^- =0 \\
& x_1,x_2,x_3,d_i^+,d_i^- \geqslant 0, i=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

得最优值 $d_3^+=0$，将其作为约束条件计算下述问题。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & d_4^+ \\
\text{s.t} \quad & x_1 \leqslant 10 \\
& x_2 \leqslant 20 \\
& x_3 \leqslant 15 \\
& 20x_1+10x_2+5x_3-d_1^+ +d_1^- =400 \\
& 0.7x_1-0.3x_2-0.3x_3-d_2^+ +d_2^- =0 \\
& -0.2x_1-0.2x_2+0.8x_3-d_3^+ +d_3^- =0 \\
& 2.5x_1+0.5x_2+0.3x_3-d_4^+ +d_4^- =20 \\
& d_1^- =0 \\
& d_2^- =0 \\
& d_3^+ =0 \\
& x_1,x_2,x_3,d_i^+,d_i^- \geqslant 0, i=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

得 $x_1=9.474, x_2=20, x_3=2.105, d_1^+=0, d_1^-=0, d_2^+=0, d_2^-=0, d_3^+=0, d_3^-=4.211, d_4^+=14.316, d_4^-=0$。

所以，食品厂商为了依次达到 4 个活动目标，需在电视上发布广告 9.474 次，报纸上发布广告 20 次，广播中发布广告 2.105 次。（使用管理运筹学软件可一次求解上述问题）

3．解：

（1）设该化工厂生产 x_1 升粘合剂 A 和 x_2 升粘合剂 B。则根据工厂要求，建立以下目标规划模型。

$$\min \quad P_1(d_1^- + d_2^+) + P_2(d_3^- + d_4^-) + P_3(d_5^-)$$

$$\text{s.t} \quad \frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{12}x_2 - d_1^+ + d_1^- = 80$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{12}x_2 - d_2^+ + d_2^- = 100$$

$$x_1 - d_3^+ + d_3^- = 100$$

$$x_2 - d_4^+ + d_4^- = 120$$

$$x_1 + x_2 - d_5^- + d_5^+ = 300$$

$$x_1, x_2, x_3, d_i^+, d_i^- \geqslant 0, i = 1,2,3,4,5$$

（2）

图解法求解如图 9-1 所示，目标 1，2 可以达到，目标 3 达不到，所以有满意解为 A 点（150，120）。

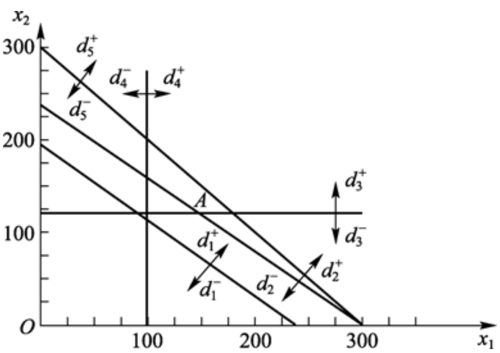

图 9-1　图解法求解

4．解：

设该汽车装配厂为达到目标要求生产产品 A x_1 件，生产产品 B x_2 件。

（1）目标规划模型如下。

$$\min \quad P_1(d_1^+ + d_2^+) + P_2(d_3^-)$$

$$\text{s.t} \quad \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - d_1^+ + d_1^- = 60$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{5}{6}x_2 - d_2^+ + d_2^- = 180$$

$$4x_1 + 3x_2 - d_3^+ + d_3^- = 1\,300$$

$$x_1, x_2, x_3, d_i^+, d_i^- \geqslant 0, i = 1,2,3$$

用图解法求解如图 9-2 所示。

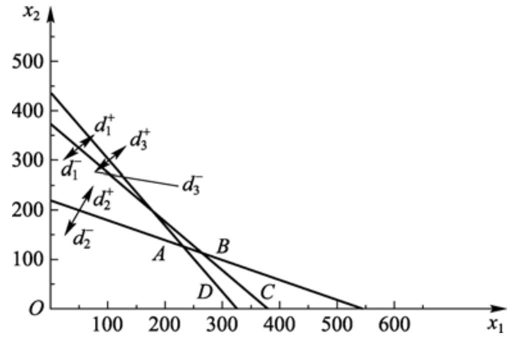

图 9-2

如图 9-2 所示，解为区域 *ABCD*，有无穷多解。

（2）由图 9-2 可知，如果不考虑目标 1 和目标 2，仅仅把它们加工时间的最大限度分别为 60 和 180 小时作为约束条件，而以利润最大化为目标，那么最优解为 *C* 点（360，0），即生产产品 A360 件，最大利润为 1 420 元。结果与（1）是不相同的，原因是追求利润最大化而不仅仅是要求利润不少于 1 300 元。

（3）如果设目标 3 的优先权为 P_1，目标 1 和目标 2 的优先权为 P_2，则由图 9-2 可知，满意解的区域依然是 *ABCD*，有无穷多解，与（1）的解是相同的，原因是（1）和（3）所设定的目标只是优先级别不同，但都能够依次达到。

5．解：

设该纸张制造厂需要生产一般类型纸张 x_1 吨，生产特种纸张 x_2 吨。

（1）目标规划模型如下。

$$
\begin{aligned}
\min\quad & P_1(d_1^-)+P_2(d_2^+)\\
\text{s.t}\quad & 300x_1+500x_2-d_1^++d_1^-=150\,000\\
& 30x_1+40x_2-d_2^++d_2^-=10\,000\\
& x_1,x_2,d_i^+,d_i^-\geqslant 0,i=1,2
\end{aligned}
$$

图解法略，求解得 $x_1=0,x_2=300,d_1^-=0,d_2^-=0,d_1^+=0,d_2^+=2\,000$ 。

（2）目标规划模型如下。

$$
\begin{aligned}
\min\quad & P_1(d_2^+)+P_2(d_1^-)\\
\text{s.t}\quad & 300x_1+500x_2-d_1^++d_1^-=150\,000\\
& 30x_1+40x_2-d_2^++d_2^-=10\,000\\
& x_1,x_2,d_i^+,d_i^-\geqslant 0,i=1,2
\end{aligned}
$$

图解法略，求解得 $x_1=0,x_2=250,d_1^-=25\,000,d_2^-=0,d_1^+=0,d_2^+=0$ 。

由此可见，所得结果与（1）中的解是不相同的。

（3）加权目标规划模型如下，

$$
\begin{aligned}
\min \quad & P_1(5d_2^+ + 2d_1^-) \\
\text{s.t} \quad & 300x_1 + 500x_2 - d_1^+ + d_1^- = 150\,000 \\
& 30x_1 + 40x_2 - d_2^+ + d_2^- = 10\,000 \\
& x_1, x_2, d_i^+, d_i^- \geqslant 0, i = 1,2
\end{aligned}
$$

求解得 $x_1 = 0, x_2 = 300, d_1^- = 0, d_2^- = 0, d_1^+ = 0, d_2^+ = 2\,000$ 。

第10章　动 态 规 划

1．解：

最优解为 $A-B_2-C_1-D_1-E$ 或 $A-B_3-C_1-D_1-E$ 或 $A-B_3-C_2-D_2-E$。

最优值为 13。

2．解：

最优解是项目 A 为 300 万元，项目 B 为 0 万元、项目 C 为 100 万元。

最优值 z=71+49+70=190 万元。

3．解：

设每个月的产量是 x_i 百台（i=1, 2, 3, 4），

最优解：x_1=4，x_2＝0，x_3＝4，x_4＝3。即第一个月生产 4 百台，第二个月生产 0 台，第三个月生产 4 百台，第四个月生产 3 百台。

最优值 z=252 000 元。

4．解：

最优解为运送第一种产品 5 件。

最优值 z=500 元。

5．解：

最大利润 2 790 万元。最优安排如表 10−1 所示。

表 10−1

年　　度	年初完好设备	高负荷工作设备数	低负荷工作设备数
1	125	0	125
2	100	0	100
3	80	0	80
4	64	64	0
5	32	32	0

6．解：

最优解（0，200，300，100）或（200，100，200，100）或者（100，100，300，100）或（200，200，0，200）。总利润最大增长额为 134 万。

7．解：

在一区建 3 个分店，在二区建 2 个分店，不在三区建立分店。最大总利润为 32。

8．解：

最优解为第一年继续使用，第二年继续使用，第三年更新，第四年继续使用，第五年继续使用，总成本=450 000 元。

9．解：

最优采购策略为若第一、二、三周原料价格为 500 元，则立即采购设备，否则在以后的几周内再采购；若第四周原料价格为 500 元或 550 元，则立即采购设备，否则等第五周再采购；

而第五周时无论当时价格为多少都必须采购。期望的采购价格为 517 元。

10．解：

最优解为第一批投产 3 台，如果无合格品，第二批再投产 3 台，如果仍全部不合格，第三批投产 4 台。总研制费用最小为 796 元。

11．解：

表 10-2

月　份	采　购　量	待销数量
1	900	200
2	900	900
3	900	900
4	0	900

最大利润为 13 500。

12．解：

最优策略为（1,2,3）或者（2,1,3），即该厂应订购 6 套设备，可分别分给三个厂 1,2,3 套或者 2,1,3 套。每年利润最大为 18 万元。

第 11 章　图与网络模型

1．解：

这是一个最短路问题，要求我们求出从 v_1 到 v_7 配送的最短距离。用 Dijkstra 算法求解可得到该问题的解为 27。我们也可以用管理运筹学软件进行计算而得出最终结果，计算而得出最终结果如下。

从节点 1 到节点 7 的最短路

****

起点	终点	距离
----	----	----
1	2	4
2	3	12
3	5	6
5	7	5

解为 27，即配送路线为 $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_5 \to v_7$。

2．解：

这是一个最短路的问题，用 Dijkstra 算法求解可得到这问题的解为 4.8，即在 4 年内购买、更换及运行维修最小的总费用为 4.8 万元。

最优更新策略为第一年末不更新，第二年末更新，第三年末不更新，第四年末处理机器。我们也可以用管理运筹学软件进行求解，结果也可以得出此问题的解为 4.8。

3．解：

此题是一个求解最小生成树的问题，根据题意可知它要求出连接 v_1 到 v_8 的最小生成树，结果如下。

最小生成树

****

起点	终点	距离
----	----	----
1	3	2
3	4	2
1	2	4
2	5	2
5	7	3
7	8	2
7	6	3

解为 18。

4．解：

此题是一个求解最大流的问题，根据题意可知它要求出连接 v_1 到 v_6 的最大流量。使用管理运筹学软件，结果如下。

v_1 从节点 1 到节点 6 的最大流

****

起点	终点	距离
1	2	6
1	4	6
1	3	10
2	4	4
2	5	8
3	4	6
3	6	5
4	5	5
4	6	6
5	6	12

解为 22，即从 v_1 到 v_6 的最大流量为 22。

5．解：

此题是一个求解最小费用最大流的问题，根据题意可知它要求出连接 v_1 到 v_6 的最小费用最大流量。使用管理运筹学软件，结果如下。

从节点 1 到节点 6 的最大流

****

起点	终点	流量	费用
1	2	1	3
1	3	4	1
3	2	1	1
2	4	2	4
3	5	3	3
4	6	2	4
5	6	3	2

此问题的最大流为 5。

此问题的最小费用为 39。

第 12 章　排序与统筹方法

1．解：

各零件的平均停留时间为$\dfrac{6p_1+5p_2+4p_3+3p_4+2p_5+p_6}{6}$。

由此公式可知，要让停留的平均时间最短，应该让加工时间越少的零件排在越前面，加工时间越多的零件排在后面。所以，此题的加工顺序为 3，7，6，4，1，2，5。

2．解：

此题为两台机器，n 个零件模型，这种模型加工思路为钻床上加工时间越短的零件越早加工，同时把在磨床上加工时间越短的零件越晚加工。

根据以上思路，则加工顺序为 2，3，7，5，1，6，4。

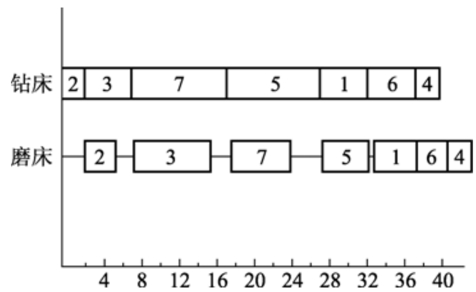

图 12−1

钻床的停工时间是 0，磨床的停工时间是 7.8。

3．解：

（1）工序 j 在绘制上有错，应该加一个虚拟工序来避免 v_3 和 v_4 有两个直接相连的工序。

（2）工序中出现了缺口，应在 v_6 和 v_7 之间加一个虚拟工序避免缺口。

（3）工序 v_1、v_2、v_3 和 v_4 之间存在了闭合回路。

4．解：

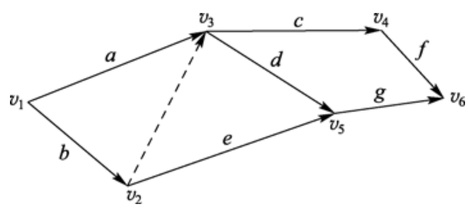

图 12−2

5．解：

由管理运筹学软件可得出如下结果。

工 序 安 排

工序	最早开始时间	最迟开始时间	最早完成时间	最迟完成时间	时差	是否关键工序
A	0	0	2	2	2	—
B	0	0	4	4	0	YES
C	4	5	9	10	1	—
D	4	4	8	8	0	YES
E	4	5	7	8	1	—
F	9	10	11	12	1	—
G	8	8	12	12	0	YES

本问题关键路径是 B—D—G。

本工程完成时间是 12。

6．解：

由管理运筹学软件可得出如下结果。

工序	期望时间	方差
A	2.08	0.07
B	4.17	0.26
C	4.92	0.18
D	4.08	0.18
E	3.08	0.07
F	2.17	0.26
G	3.83	0.26

工 序 安 排

工序	最早开始时间	最迟开始时间	最早完成时间	最迟完成时间	时差	是否关键工序
A	0	0	2.08	2.08	2.08	—
B	0	0	4.17	4.17	0	YES
C	4.17	5	9.08	9.92	0.83	—
D	4.17	4.17	8.25	8.25	0	YES
E	4.17	5.17	7.25	8.25	1	—
F	9.08	9.92	11.25	12.08	0.83	—
G	8.25	8.25	12.08	12.08	0	YES

本问题关键路径是 B—D—G。

本工程完成时间是 12.08。

这个正态分布的均值 $E(T)$=12.08。

其方差为$\sigma^2=\sigma_b{}^2+\sigma_d{}^2+\sigma_g{}^2=0.70$　则$\sigma=0.84$。当以98%的概率来保证工作如期完成时，即$\phi(u)=0.98$，所以u=2.05。此时提前开始工作的时间T满足$\dfrac{T-12.08}{0.84}$=2.05，所以T=13.8≈14

7．解：

最短的施工工时仍为4＋5＋6=15。

具体的施工措施如下。

工序	最早开始时间	最迟开始时间	最早完成时间	最迟完成时间	时差	是否关键工序
A	0	0	1	1	0	—
B	0	0	3	3	0	—
C	7	7	10	10	0	—
D	0	0	4	4	0	YES
E	1	2	3	4	1	—
F	3	3	7	7	0	—
G	3	6	6	9	3	
H	4	4	9	9	0	YES
I	10	10	15	15	0	—
J	7	9	13	15	2	—
K	9	9	15	15	0	YES

本问题关键路径是D—H—K。

本工程最短完成时间是15。

经过这样调整后，任意时间所需要的人力数都不超过15人。

8．解：

此题的网络图如图12−3所示。

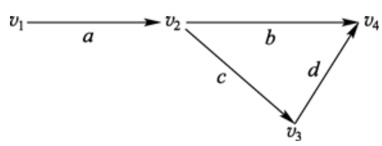

图 12−3

设第i发生的时间为x_i，工序（i,j）提前完工的时间为y_{ij}，

目标函数 $\min f=4.5(x_4-x_1)+4y_{12}+y_{24}+4y_{23}+2y_{34}$

s.t.

$x_2 - x_1 \geqslant 3 - y_{12}$

$x_3 - x_2 \geqslant 4 - y_{23}$

$x_4 - x_2 \geqslant 7 - y_{24}$

$x_4 - x_3 \geqslant 5 - y_{34}$

$x_1 = 0$

$y_{12} \leqslant 2$

$y_{23} \leqslant 2$

$y_{24} \leqslant 4$

$y_{34} \leqslant 3$

$x_i \geqslant 0, y_{ij} \geqslant 0$

以上 i=1，2，3，4；　j=1，2，3，4。

用管理运筹学软件中的线性规划部分求解，得到如下结果。

$$f^{*}=46.5, x_1=0, x_2=1, x_3=5, x_4=7, y_{12}=2, y_{23}=0, y_{24}=1, y_{34}=3。$$

第 13 章　存　储　论

1．解：

运用经济定购批量存储模型，可以得到如下结果。

① 经济订货批量$Q^*=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{c_1}}=\sqrt{\dfrac{2\times 4\,800\times 350}{40\times 25\%}}\approx 579.66$（件）。

② 由于需要提前 5 天订货，因此仓库中需要留有 5 天的余量，故再订货点为$\dfrac{4\,800\times 5}{250}=96$（件）。

③ 订货次数为$\dfrac{4\,800}{579.7}\approx 8.28$（次），故两次订货的间隔时间为$\dfrac{250}{8.28}\approx 30.19$（工作日）。

④ 每年订货与存储的总费用$TC=\dfrac{1}{2}Q^*c_1+\dfrac{D}{Q^*}c_3\approx 5\,796.55$（元）。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

2．解：

运用经济定购批量存储模型，可以得到如下结果。

① 经济订货批量$Q^*=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{c_1}}=\sqrt{\dfrac{2\times 14\,400\times 1800}{1\,500\times 24\%}}\approx 379.47$（吨）

② 由于需要提前 7 天订货，因此仓库中需要留有 7 天的余量，故再订货点为$\dfrac{14\,400\times 7}{365}\approx 276.16$（吨）

③ 订货次数为$\dfrac{14\,400}{379.47}\approx 37.95$（次），故两次订货的间隔时间为$\dfrac{365}{37.95}\approx 9.62$（天）

④ 每年订货与存储的总费用$TC=\dfrac{1}{2}Q^*c_1+\dfrac{D}{Q^*}c_3\approx 136\,610.4$（元）

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

3．解：

运用经济定购批量存储模型，可得如下结果。

① 经济订货批量$Q^*=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{c_1}}=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{p\times 22\%}}=8\,000$，其中 p 为产品单价，变换可得$\dfrac{2Dc_3}{p}=8\,000^2\times 22\%$，

当存储成本率为 27%时，$Q^{*\prime}=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{c_1'}}=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{p\times 27\%}}=\sqrt{\dfrac{8\,000^2\times 22\%}{27\%}}\approx 7\,221$（箱）。

② 存储成本率为 i 时，经济订货批量$Q^*=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{c_1}}=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{p\times i}}$，

其中 p 为产品单价，变换可得$\dfrac{2Dc_3}{p}=Q^{*2}\cdot i$，当存储成本率变为 i'时，

$Q^{*\prime}=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{c_1'}}=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{p\times i'}}=\sqrt{\dfrac{Q^{*2}\cdot i}{i'}}$ 。

4．解：

运用经济生产批量模型，可得如下结果。

① 最优经济生产批量 $Q^*=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{\left(1-\dfrac{d}{p}\right)c_1}}=\sqrt{\dfrac{2\times 18\,000\times 1\,600}{\left(1-\dfrac{18\,000}{30\,000}\right)\times 150\times 18\%}}\approx 2\,309.4$（套）。

② 每年生产次数为 $\dfrac{18\,000}{2\,309.4}\approx 7.79$（次）。

③ 两次生产间隔时间为 $\dfrac{250}{7.79}\approx 32.08$（工作日）。

④ 每次生产所需时间为 $\dfrac{250\times 2\,309.4}{30\,000}\approx 19.25$（工作日）。

⑤ 最大存储水平为 $\left(1-\dfrac{d}{p}\right)Q^*\approx 923.76$（套）。

⑥ 生产和存储的全年总成本为 $TC=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{d}{p})Q^*c_1+\dfrac{D}{Q^*}c_3\approx 24\,941.53$（元）。

⑦ 由于生产准备需要 10 天，因此仓库中需要留有 10 天的余量，故再订货点为 $\dfrac{18\,000\times 10}{250}=720$（套）。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

5．解：

运用经济生产批量模型，可得如下结果。

① 最优经济生产批量 $Q^*=\sqrt{\dfrac{2Dc_3}{\left(1-\dfrac{d}{p}\right)c_1}}=\sqrt{\dfrac{2\times 30\,000\times 1\,000}{\left(1-\dfrac{30\,000}{50\,000}\right)\times 130\times 21\%}}\approx 2\,344.04$（件）。

② 每年生产次数为 $\dfrac{30\,000}{2\,344.04}\approx 12.8$（次）。

③ 两次生产间隔时间为 $\dfrac{250}{12.8}\approx 19.53$（工作日）。

④ 每次生产所需时间为 $\dfrac{250\times 2\,344.04}{50\,000}\approx 11.72$（工作日）。

⑤ 最大存储水平为 $\left(1-\dfrac{d}{p}\right)Q^*\approx 937.62$（件）。

⑥ 生产和存储的全年总成本为 $TC=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{d}{p}\right)Q^*c_1+\dfrac{D}{Q^*}c_3\approx 25\,596.88$（元）。

⑦ 由于生产准备需要 5 天，因此仓库中需要留有 5 天的余量，故再订货点为 $\frac{30\,000\times 5}{250}\approx$ 600（件）。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

6．解：

运用允许缺货的经济定购批量模型，可以得到如下结果。

① 最优订货批量 $Q^*=\sqrt{\frac{2Dc_3(c_1+c_2)}{c_1c_2}}=\sqrt{\frac{2\times 4\,800\times 350(10+25)}{10\times 25}}\approx 685.86$（件）。

② 最大缺货量 $S^*=\sqrt{\frac{2Dc_3c_1}{c_2(c_1+c_2)}}=\sqrt{\frac{2\times 4\,800\times 350\times 10}{25\times(10+25)}}\approx 195.96$（件），

另外由于需要提前 5 天订货，因此仓库中需要留有 5 天的余量，即在习题 1 中所求出的 96 件，故再订货点为−195.96+96=−99.96（件）

③ 订货次数为 $\frac{4\,800}{685.86}\approx 7.0$（次），故两次订货的间隔时间为 $\frac{250}{7}\approx 35.7$（工作日）。

④ 每年订货、存储与缺货的总费用 $TC=\frac{(Q^*-S^*)^2}{2Q^*}c_1+\frac{D}{Q^*}c_3+\frac{S^{*2}}{2Q^*}c_2\approx 4\,898.98$（元）。

⑤ 显然，在允许缺货的情况下，总花费最小。因为在允许缺货时，企业可以利用这个宽松条件，支付一些缺货费，少付一些存储费和订货费，从而可以在总费用上有所节省。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

7．解：

运用允许缺货的经济生产批量模型，可得如下结果。

① 最优经济生产批量 $Q^*=\sqrt{\frac{2Dc_3(c_1+c_2)}{\left(1-\frac{d}{p}\right)c_1c_2}}=\sqrt{\frac{2\times 30\,000\times 1\,000(27.3+30)}{\left(1-\frac{30\,000}{50\,000}\right)\times 27.3\times 30}}\approx 3\,239.52$（件）。

② 最大缺货量 $S^*=\sqrt{\frac{2Dc_3c_1\left(1-\frac{d}{p}\right)}{c_2(c_1+c_2)}}=\sqrt{\frac{2\times 30\,000\times 27.3\times 1\,000\times\left(1-\frac{30\,000}{50\,000}\right)}{30\times(27.3+30)}}\approx 617.37$（件），

另外由于需要 5 天来准备生产，因此要留有 5 天的余量，即在习题 5 中所求出的 600 件，故再生产点为−617.37+600=−17.37（件）

③ 生产次数为 $\frac{30\,000}{3\,239.52}\approx 9.26$（次），故两次订货的间隔时间为 $\frac{250}{9.26}\approx 27$（工作日）。

④ 每年生产准备、存储与缺货的总费用 $TC=\sqrt{\frac{2Dc_1c_2c_3\left(1-\frac{d}{p}\right)}{(c_1+c_2)}}\approx 18\,521.25$（元）。

⑤ 显然，在允许缺货的情况下，总花费最小。因为在允许缺货时，企业可以利用这个宽松条件，支付一些缺货费，少付一些存储费和生产准备费，从而可以在总费用上有所节省。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

8．解：

运用经济订货批量折扣模型，已知根据定购数量不同，有四种不同的价格。我们可以求得这四种情况的最优订货量如下。

当订货量 Q 为 0～99 双时，有

$$Q_1^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1'}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\,000 \times 300}{360 \times 20\%}} \approx 129 \text{（个）；}$$

当订货量 Q 为 100～199 双时，有

$$Q_2^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1''}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\,000 \times 300}{320 \times 20\%}} \approx 137 \text{（个）；}$$

当订货量 Q 为 200～299 双时，有

$$Q_3^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1'''}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\,000 \times 300}{300 \times 20\%}} \approx 141 \text{（个）；}$$

当订货量 Q 大于 300 双时，有

$$Q_4^* = \sqrt{\frac{2Dc_3}{c_1''''}} = \sqrt{\frac{2 \times 2\,000 \times 300}{280 \times 20\%}} \approx 146 \text{（个）。}$$

可以注意到，在第一种情况下，我们用订货量在 0～99 时的价格 360 元/双，计算出的最优订货批量 Q_1^* 却大于 99 个，为 129 个。为了得到 360 元/双的价格，又使得实际订货批量最接近计算所得的最优订货批量 Q_1^*，我们调整其最优订货批量 Q_1^* 的值，得 $Q_1^* = 99$ 双。

同样我们调整第三种和第四种情况得最优订货批量 Q_3^* 和 Q_4^* 的值，得 Q_3^*=200 双， Q_4^* = 300 双。

可以求得当 Q_1^*=99 双，Q_2^*=137 双，Q_3^*=200 双，Q_4^*=300 双时的每年的总费用如表 13−1 所示。

表 13−1

折扣等级	旅游鞋单价	最优订货批量 Q^*	每年费用			
			存储费 $\frac{1}{2}Q^*c_1$	订货费 $\frac{D}{Q^*}c_3$	购货费 DC	总费用
1	360	99	3 564	6 060.606	720 000	729 624.6
2	320	137	4 384	4 379.562	640 000	648 763.6
3	300	200	6 000	3 000	600 000	609 000
4	280	300	8 400	2 000	560 000	570 400

由表 13−1 可知，最小成本的订货批量为 Q^*=300 双，

此时花费的总成本 $TC=\frac{1}{2}Q^*c_1+\frac{D}{Q^*}c_3+D\cdot c$=570 400（元），

若每次的订货量为 500 双，则此时的总成本 $TC=\frac{1}{2}Qc_1+\frac{D}{Q}c_3+D\cdot c$=575 200（元），

这时要比采取最小成本订货时多花费 4 800 元。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

9．解：

① 在不允许缺货时，运用经济订货批量模型，可知此时的最小成本

$TC=\frac{1}{2}Q^*c_1+\frac{D}{Q^*}c_3\approx 848.53$（元）；

在允许缺货时，运用允许缺货的经济订货批量模型，可知此时的最小成本为 $TC=\frac{(Q^*-S^*)^2}{2Q^*}c_1+\frac{D}{Q^*}c_3+\frac{S^{*2}}{2Q^*}c_2\approx 791.26$（元）。

所以，在允许缺货时，可以节约费用 57.27 元。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

②

a．$S^*=\frac{c_1}{c_1+c_2}Q^*$

$$=\frac{3}{3+20}\times 303=\frac{3}{23}\times 303$$

$\frac{S^*}{Q^*}=\frac{3}{23}=13\%\leqslant 15\%$

b．补上的时间不得超过 3 周。

$t_2=\frac{S^*}{d}=\frac{39.5}{\frac{800}{365}}=\frac{39.5\times 365}{800}=18$ 天$\leqslant 21$ 天

故现采用的允许缺货的政策满足补上的数量不超过总量的 15%，补上的时间不超过 3 周的条件，故仍该采用允许缺货的政策。

由于每年的平均需求量为 800 件，可知每年平均订货 $\frac{800}{282.84}\approx 2.83$ 次。

根据服务水平的要求，P(一个月的需求量$\leqslant r$)$=1-\partial=1-0.15=0.85$，其中 r 为再订货点。

由于需求量服从正态分布 N（46，10），上式即为 $\Phi\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)=0.85$。

查标准正态分布表，即得 $\frac{r-\mu}{\sigma}=1.036$，故 $r=1.036\sigma+\mu=1.036\times 10+46\approx 56.36$ 件。

进而可以求得此时的总成本（存储成本和订货成本）为 879.64 元，大于不允许缺货时的总成本 848.53 元。

故公司不应采取允许缺货的政策。

10．解：

运用需求为随机的单一周期的存储模型，已知 k=16，h=22，有 $\dfrac{k}{k+h}=\dfrac{16}{16+22}\approx 0.4\,211$，

Q=11 时，有 $\sum\limits_{d=0}^{10} p(d)=p(8)+p(9)+p(10)=0.33$，

$\sum\limits_{d=0}^{11} p(d)=p(8)+p(9)+p(10)+p(11)=0.53$。

此时满足 $\sum\limits_{d=0}^{10} p(d)<\dfrac{k}{k+h}\leqslant\sum\limits_{d=0}^{11} p(d)$。

故应定购 11 000 瓶，此时赚钱的期望值最大。

11．解：

① 运用需求为随机的单一周期的存储模型，已知 k=1 400，h=1 300，有

$\dfrac{k}{k+h}=\dfrac{1\,400}{1\,400+1\,300}\approx 0.52$，故有 $P(d\leqslant Q^*)=\dfrac{k}{k+h}=0.52$，

由于需求量服从正态分布 N（250，80），上式即为 $\Phi\left(\dfrac{Q^*-\mu}{\sigma}\right)=0.52$。

查标准正态分布表，即得 $\dfrac{Q^*-\mu}{\sigma}=0.05$，故 $Q^*=0.05\sigma+\mu=0.05\times 80+250=254$（台）。

② 商店卖出所有空调的概率是 $P(d>Q^*)=1-0.52=0.48$。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

12．解：

① 运用需求为随机的单一周期的存储模型，

已知 k=1.7，h=1.8，有 $\dfrac{k}{k+h}=\dfrac{1.7}{1.7+1.8}\approx 0.49$，故有 $P(d\leqslant Q^*)=\dfrac{k}{k+h}=0.49$，

由于需求量服从区间（600，1 000）上的均匀分布，则可得 $\dfrac{Q^*-600}{1\,000-600}=0.49$，故 Q^*=796 只。

② 商场缺货的概率是 $P(d>Q^*)=1-0.49=0.51$。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

13．解：

运用需求为随机变量的定货批量、再订货点模型。

首先按照经济订货批量模型来求出最优订货批量 Q^*，已知每年的平均需求量 $\overline{D}=450\times$ 12=5 400（立方米），c_1=175 元/立方米・年，c_3=1 800 元，得 $Q^*=\sqrt{\dfrac{2\overline{D}c_3}{c_1}}\approx 333.3$（立方米）。

由于每年的平均需求量为 5 400 立方米，可知每年平均订货 $\dfrac{5\,400}{333.3}\approx 16.2$（次）。

根据服务水平的要求，P(一个月的需求量$\leqslant r$)$=1-\alpha=1-0.05=0.95$，其中 r 为再订货点。

由于需求量服从正态分布 N（450，70），上式即为 $\Phi\left(\dfrac{r-\mu}{\sigma}\right)=0.95$。

查标准正态分布表，即得 $\frac{r-\mu}{\sigma}=1.645$，故 r=1.645σ+μ=1.645×70+450≈565（立方米）。

综上所述，公司应采取的策略是当仓库里剩下 565 立方米木材时，就应订货，每次的订货量为 333.3 立方米。

（使用管理运筹学软件，可以得到同样的结果。）

14．解：

运用需求为随机变量的定期检查存储量模型。

设该种笔记本的存储补充水平为 M，由统计学的知识可得如下结果。

P(笔记本的需求量 $d \leqslant M$)=1−α=1−0.1=0.9，由于在 17 天内的笔记本需求量服从正态分布 N（280，40），上式即为 $\Phi\left(\frac{M-\mu}{\sigma}\right)=0.9$ 。

查标准正态分布表，得 $\frac{M-\mu}{\sigma}=1.28$，故 M=1.28σ+μ=1.28×40+280≈331.2（立方米）。

第 14 章　排　队　论

1．解：

$M/M/1$ 系统，λ=50 人/小时，μ=80 人/小时。

① 顾客来借书不必等待的概率 P_0=0.375；

② 柜台前的平均顾客数 L_s=1.666 7；

③ 顾客在柜台前平均逗留时间 W_s=0.033 3 小时；

④ 顾客在柜台前平均等候时间 W_q=0.020 8 小时。

2．解：

$M/M/1$ 系统，λ=2 人/小时，μ_1=3 人/小时，μ_2=4 人/小时。

① P_0=0.333 3，L_q=1.333 3，L_s=2，W_q=0.667 小时，W_s=1 小时；

② P_0＝0.5，L_q=0.5，L_s=1，W_q=0.25 小时，W_s=0.5 小时；

③ 因为 Z_1=74 元/小时，Z_2=50 元/小时，故应选择理发师乙。

3．解：

① $M/M/1$ 系统，λ=30 人/小时，μ=40 人/小时，P_0=0.25，L_q=2.25，L_s=3，W_q=0.075 小时，W_s=0.1 小时；

②

a．$M/M/1$ 系统，λ=30 人/小时，μ=60 人/小时，P_0=0.5，L_q=0.5，L_s=1，W_q=0.016 7 小时，W_s=0.033 3 小时；

b．$M/M/2$ 系统，λ=30 人/小时，μ=40 人/小时，P_0=0.454 6，L_q=0.122 7，L_s=0.872 7，W_q=0.004 1 小时，W_s=0.029 1 小时。

系统二明显优于系统一。

4．解：

$M/G/1$ 系统，λ=5 辆/小时，μ=12 辆/小时，P_0=0.583 3，L_q=0.172 6，L_s=0.589 2，W_q=0.034 5 小时，W_s=0.117 9 小时。

5．解：

$M/M/1$ 系统，λ=10 人/小时，μ=20 人/小时，可以得出顾客排队时间为 W_q=3 分钟，因为还有一个人在等候，其通话时间也为 3 分钟，故有 W_q+3 分钟<4 分钟+3 分钟，故不应该去另一电话亭。

6．解：

$M/D/1$ 系统，λ=5 辆/小时，μ=12 辆/小时，P_0=0.583 3，L_q=0.148 8，L_s=0.565 5，W_q=0.029 8 小时，W_s=0.113 1 小时，P_w=0.416 7。

7．解：

$M/G/C/C/\infty$系统，要使接通率为 95%，就是使损失率降到 5%以下，由 λ=(2×0.3+0.7)×300+120=510 次/小时，μ=30 次/小时；要求外线电话接通率为 95%以上，即 P_w＜0.05。

当 n=15 时，P_w=0.244；

当 n=16 时，P_w=0.205 9；

当 n=17 时，P_w=0.170 7；

当 n=18 时，P_w=0.138 8；
当 n=19 时，P_w=0.110 5；
当 n=20 时，P_w=0.085 9；
当 n=21 时，P_w=0.065；
当 n=22 时，P_w=0.047 8；
故系统应设 22 条外线才能满足外线电话接通率为 95%以上。

8．解：

$M/M/n/\infty/M$，λ=1 台/小时，μ=4 台/小时。

至少需要 2 名修理工才能保证及时维修机器故障。

① 假设雇佣 1 名修理工，则系统为 $M/M/1/\infty/10$ 模型，

L_s=6.021 2，W_q=1.263 3 小时，W_s=1.513 3 小时，Z=451.274 元；

假设雇佣 2 名修理工，则系统为 $M/M/2/\infty/10$ 模型，

L_s=3.165 9，W_q=0.213 2 小时，W_s=0.463 2 小时，Z=369.952 元；

假设雇佣 3 名修理工，则系统为 $M/M/3/\infty/10$ 模型，

L_s=2.259 3，W_q=0.041 9 小时，W_s=0.291 9 小时，Z=405.555 元。

故雇佣 2 名修理工时总费用最小，为 369.952 元。

② 等待修理时间不超过 0.5 小时，即要求 W_q<0.5。

当雇佣 2 名修理工时，W_q=0.213 2 小时<0.5 小时。

可得当雇佣人数大于或等于 2 名修理工时可以满足等待修理时间不超过 0.5 小时。

9．解：

① $M/M/1/2$ 系统，λ=3 人/小时，μ=5 人/小时。

λ_e=2.45 人/小时，L_q=0.183 7，L_s=0.673 5，W_q=0.075，W_s=0.275。

② $M/M/1/3$ 系统，λ=3 人/小时，μ=5 人/小时。

λ_e=2.702 人/小时，L_q=0.364，L_s=0.904 4，W_q=0.134 7，W_s=0.334 7。

第 15 章　对　策　论

1．解：

因为 $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 0$，所以最优纯策略为$(\alpha_2, \beta_2)$，对策值为 0。

2．解：

① A、B 两家公司各有 8 个策略，分别表示为α_1或β_1——不做广告；α_2或β_2——做电视广告；α_3或β_3——做电视和报纸广告；α_4或β_4——做电视和广播广告；α_5或β_5——做电视、报纸和广播广告；α_6或β_6——做报纸广告；α_7或β_7——做报纸、广播广告；α_8或β_8——做广播广告。

局中人 A 的损益矩阵如下。

$$
\boldsymbol{A} - 0.5\boldsymbol{E}_{8\times 8} = \begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \beta_8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & -0.25 & -0.4 & -0.35 & -0.5 & -0.15 & -0.25 & -0.1 \\
0.25 & 0 & -0.15 & -0.1 & -0.25 & 0.1 & 0 & 0.15 \\
0.4 & 0.15 & 0 & 0.05 & -0.1 & 0.25 & 0.15 & 0.3 \\
0.35 & 0.1 & -0.05 & 0 & -0.15 & 0.2 & 0.1 & 0.25 \\
0.5 & 0.25 & 0.1 & 0.15 & 0 & 0.35 & 0.25 & 0.4 \\
0.15 & -0.1 & -0.25 & -0.2 & -0.35 & 0 & -0.1 & 0.05 \\
0.25 & 0 & -0.15 & -0.1 & -0.25 & 0.1 & 0 & 0.15 \\
0.1 & -0.15 & -0.3 & -0.25 & -0.4 & -0.05 & -0.05 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

② 由损益矩阵可得，$\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 0$。

故甲应该采取第α_5策略，乙应该采取第β_5策略，对策值为 0。

3．解：

求超市 A 的最优策略的线性规划模型如下。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{s.t} \quad & 3x_1 + 4x_3 - 5x_4 \geqslant 1 \\
& 6x_2 - 2x_3 - x_4 \geqslant 1 \\
& 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 \geqslant 1 \\
& -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \geqslant 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

用管理运筹学软件求得 $x_1 = 0.002, x_2 = 0.275, x_3 = 0.304, x_4 = 0.044$。

由 $\dfrac{1}{v} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ 得 $v = 1.6$。

由 $x_i' = v \cdot x_i$ 可得 $x_1' = 0.003\,2, x_2' = 0.44, x_3' = 0.486\,4, x_4' = 0.070\,4$。

所以超市 A 的最优策略是以 0.003 2 的概率采取策略 α_1，以 0.44 的概率采取策略 α_2，以 0.486 4 的概率采取策略 α_3，以 0.070 4 的概率采取策略 α_4，平均市场份额增加的百分数为 1.6。

求超市 B 的最优策略的线性规划模型如下。

$$
\begin{aligned}
\max\quad & y_1+y_2+y_3+y_4 \\
\text{s.t}\quad & 3y_1+4y_3-2y_4 \leqslant 1 \\
& 6y_2-y_3-3y_4 \leqslant 1 \\
& 4y_1-2y_2+3y_3+5y_4 \leqslant 1 \\
& -5y_1-y_2+8x_3+7y_4 \leqslant 1 \\
& y_1,y_2,y_3,y_4 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

用管理运筹学软件求得 $y_1=0.142, y_2=0.233, y_3=0.18, y_4=0.072$。

由 $\dfrac{1}{v}=y_1+y_2+y_3+y_4$ 得 $v=1.6$。

由 $y_i'=v\cdot y_i$ 可得 $y_1'=0.227\,2, y_2'=0.372\,8, y_3'=0.288\,0, y_4'=0.115\,2$。

所以超市 B 的最优策略是以 0.227 2 的概率采取策略 β_1，以 0.372 8 的概率采取策略 β_2，以 0.288 0 的概率采取策略 β_3，以 0.115 2 的概率采取策略 β_4，平均市场份额增加的百分数为 1.6。

使用管理运筹学软件可从损益矩阵直接求得上述答案如图 15−1 所示，结果差异是由计算误差所致。

对策最优解如下

局中人甲：$X^*=(0,.443,.489,.069)$T

局中人乙：$Y^*=(.227,.371,.288,.114)$T

对策值为：1.576

图 15−1

4．解：

甲、乙两队让自己的运动健将参加三项比赛中的两项的策略各有 $c_3^2=3$ 种，分别为

α_1，β_1——参加 100 米蝶泳和 100 米仰泳；

α_2，β_2——参加 100 米蝶泳和 100 米蛙泳；

α_3，β_3——参加 100 米仰泳和 100 米蛙泳；

则甲队的损益矩阵为

$$
\begin{array}{c}
 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 13 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}
\end{array} = \boldsymbol{A}
$$

$$
\boldsymbol{A}-13.5\boldsymbol{E}_{3\times3}=\begin{pmatrix} -0.5 & -1.5 & -1.5 \\ -1.5 & -1.5 & -0.5 \\ -1.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}，其中\ \boldsymbol{E}_{3\times3}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

采用优超原则简化后得矩阵

$$\begin{array}{c} \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -0.5 & -1.5 \\ -1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \end{array} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

求得

$$x^* = (0.5, 0.5)^{\mathrm{T}},\ y^* = (0.5, 0.5)^{\mathrm{T}},\ V^* = 1,\ V = 1 - 2 = -1。$$

即甲以 0.5 的概率出 α_1 策略，以 0.5 的概率出 α_3 策略，平均得分为 13.5−1=12.5；

乙以 0.5 的概率出 β_1 策略，以 0.5 的概率出 β_2 策略，平均得分为 13.5+1=14.5。

5．解：

设齐王和田忌赛马的策略分别有

α_1，β_1——以上中下的次序出马；

α_2，β_2——以上下中的次序出马；

α_3，β_3——以中上下的次序出马；

α_4，β_4——以中下上的次序出马；

α_5，β_5——以下上中的次序出马；

α_6，β_6——以下中上的次序出马。

齐王的损益矩阵为

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
α_1	6	4	2	4	0	4
α_2	2	6	2	4	2	0
α_3	0	−2	6	4	4	4
α_4	−4	0	2	6	2	2
α_5	0	0	0	−2	6	4
α_6	0	0	−4	0	2	6

建立相互对偶的线性规划模型，得

$$\text{齐王：}\quad \begin{aligned} \min\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{s.t}\quad & 6x_1 + 2x_2 - 4x_4 \geqslant 1 \\ & 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 \geqslant 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 4x_6 \geqslant 1 \\ & 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 2x_5 \geqslant 1 \\ & 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 2x_6 \geqslant 1 \\ & 4x_1 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 6x_6 \geqslant 1 \\ & x_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots, 6 \end{aligned}$$

由管理运筹学软件求解，得

$x_1 = 0.13, x_2 = 0.109, x_3 = 0.087, x_4 = 0, x_5 = 0.072, x_6 = 0$。

由 $\dfrac{1}{v}=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$ 得 $v=2.512\,6$ 。

由 $x_i'=v\cdot x_i$ 可得 $x_1'=0.326\,6, x_2'=0.273\,9, x_3'=0.218\,6, x_4'=0, x_5'=0.180\,9, x_6'=0$ 。
所以齐王的最优对策是以 0.326 6 的概率出 α_1，以 0.273 9 的概率出 α_2，以 0.218 6 的概率出 α_3，以 0.180 9 的概率出 α_5。

田忌：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6 \\
\text{s.t}\quad & 6y_1+4y_2+2y_3+4y_4+4y_6\leqslant 1 \\
& 2y_1+6y_2+2y_3+4y_4+2y_5\leqslant 1 \\
& -2y_2+6y_3+4y_4+4y_5+4y_6\leqslant 1 \\
& -4y_1+2y_3+6y_4+2y_5+2y_6\leqslant 1 \\
& -2y_4+6y_5+4y_6\leqslant 1 \\
& -4y_3+2y_5+6y_6\leqslant 1 \\
& y_i\geqslant 0, i=1,2,\ldots,6
\end{aligned}
$$

由管理运筹学软件求解，得

$y_1=0.109, y_2=0.051, y_3=0.072, y_4=0, y_5=0.167, y_6=0$ 。

由 $\dfrac{1}{v}=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6$ 得 $v=2.506\,3$（与上面 2.512 6 不同，是由计算误差导致）。
由 $y_i'=v\cdot y_i$ 可得

$y_1'=0.273\,2, y_2'=0.127\,8, y_3'=0.180\,5, y_4'=0, y_5'=0.418\,5, y_6'=0$ 。

所以，田忌的最优对策是以 0.273 2 的概率出 β_1，以 0.127 8 的概率出 β_2，以 0.180 5 的概率出 β_3，以 0.418 5 的概率出 β_5。

使用管理运筹学软件可从损益矩阵直接求得上述问题答案，如图 15−2 所示，结果差异是由计算误差所致。

************************对策最优解如下***************************

局中人甲： X*=(.331,.271,.218,0,.18,0)T

局中人乙： Y*=(.271,.128,.18,0,.421,0)T

对策值为：2.519

图 15−2

第 16 章　决 策 分 析

1．解：

公司收益表如表 16−1 所示。

表 16−1

自然状态 / 方案	N_1	N_2	N_3	N_4
S_1	15	8	0	−6
S_2	4	14	8	3
S_3	1	4	10	12

① S_2 方案最优。

② S_1 方案最优。

③ S_2 方案最优。

④ S_2 方案最优。

⑤ 后悔矩阵如表 16−2 所示。

表 16−2

公司收益值 状态 / 方案	N_1	N_2	N_3	N_4	$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 4} a'_{ij}$
S_1	0	6	10	18	18
S_2	11	0	2	9	11（min）
S_3	14	10	0	0	14

故 S_2 方案最优。

2．解：

① 面包进货问题的收益矩阵为

$N_1=S_5=360$,　$N_2=S_4=300$,　$N_3=S_3=240$,　$N_4=S_2=180$,　$N_5=S_1=120$。

表 16−3

公司收益值 需求量 / 订货量	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
S_1	84	84	84	84	84
S_2	126	126	126	126	60
S_3	168	168	168	102	36
S_4	210	210	144	78	12
S_5	252	186	120	54	−12

② 用最大最小准则得最优方案为 S_1。

用最大最大准则得最优方案为 S_5。

用后悔值法，后悔矩阵如表 16−4 所示。

表 16−4

订货量 \ 公司收益值 \ 需求量	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	$\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 5} a'_{ij}$
S_1	168	126	84	42	0	168
S_2	126	84	42	0	24	126
S_3	84	42	0	24	48	84
S_4	42	0	24	48	72	72（min）
S_5	0	24	48	72	96	96

得最优方案为 S_4，用乐观系数法得最优方案为 S_5。

3．解：

由第 2 题中需求量的分布概率已知，$E(S_1)=84$，$E(S_2)=119.4$，$E(S_3)=141.6$，$E(S_4)=144$，$E(S_5)=126.6$。

故用期望值法得最优方案为 S_4。

4．解：

N_1 表示不合格品的概率为 0.05，N_2 表示不合格品的概率为 0.25，由题可得

$$P(N_1)=0.8,\qquad P(N_2)=0.2,$$

① 用 S_1 表示检验，S_2 表示不检验，则该问题的收益矩阵如表 16−5 所示。

表 16−5

方案 \ 公司费用 \ 自然状态	N_1	N_2
S_1	1 500	1 500
S_2	750	3 750

② $E(S_1)=1\ 500\times0.8+1\ 500\times0.2=1\ 500$（元），

$E(S_2)=750\times0.8+3\ 750\times0.2=1\ 350$（元），

S_2 为最优检验方案。

③ $E(S_1)=1\ 500$，

$E(S_2)=750P+3\ 750(1-P)=3\ 750-3\ 000P$，

当 $E(S_1)=E(S_2)$时，$P=0.75$，

可见，当 $P>0.75$ 时，S_1 为最优方案，当 $P<0.75$ 时，S_2 为最优方案。

5．解：

由前面的数据做出决策树图如图 16−1 所示。

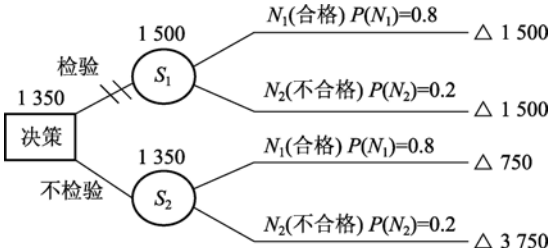

图 16-1

由图可知选定方案 S_2，即不检验。

6．解：

规定 S_1 表示投资开发事业，S_2 表示存放银行。

① $E(S_1)$=50 000×0.2×0.96−50 000×0.04=7 600，

$E(S_2)$=50 000×0.06×1=3 000，

比较可知道 S_1 更优，即选投资开发事业更优，即当我们不掌握全情报用期望值准则来决策时，S_1 是最优行动方案，故 $EV_{wo}PI$=7 600 元。

② EV_WPI=50 000×0.2×0.96+50 000×0.06×0.04=9 720（元），

$EVPI=EV_WPI-EV_{WO}PI$=9 720−7 600=2 120（元）。

③ 用 I_1 表示咨询公司结论为开发，I_2 表示咨询公司结论为不开发，N_1 表示开发，N_2 表示不开发。$P(I_1)$、$P(I_2)$、$P\left(N_1|I_1\right)$、$P\left(N_2|I_1\right)$、$P\left(N_1|I_2\right)$、$P\left(N_2|I_2\right)$ 的值均需要经过计算，由题可知

$$P\left(I_1|N_1\right)=0.9\,,\qquad P\left(I_2|N_1\right)=0.1\,,\qquad P\left(I_1|N_2\right)=0.4\,,$$

$$P\left(I_2|N_2\right)=0.6\,,\qquad P(N_1)=0.96,\qquad P(N_2)=0.04,$$

$$P(I_1)=P(N_1)P\left(I_1|N_1\right)+P(N_2)P\left(I_1|N_2\right)=0.96\times0.9+0.04\times0.4=0.88\,,$$

$$P(I_2)=P(N_2)P\left(I_2|N_2\right)+P(N_1)P\left(I_2|N_1\right)=0.04\times0.6+0.96\times0.1=0.12\,,$$

由贝叶斯公式，我们可求得

$$P\left(N_1|I_1\right)=\frac{P(N_1)P\left(I_1|N_1\right)}{P(I_1)}=\frac{0.96\times0.9}{0.88}=0.981\,8\,,\quad P\left(N_2|I_1\right)=\frac{P(N_2)P\left(I_1|N_2\right)}{P(I_1)}=\frac{0.04\times0.4}{0.88}=0.018\,2\,,$$

$$P\left(N_1|I_2\right)=\frac{P(N_1)P\left(I_2|N_1\right)}{P(I_2)}=\frac{0.96\times0.1}{0.12}=0.8\,,\qquad P\left(N_2|I_2\right)=\frac{P(N_2)P\left(I_2|N_2\right)}{P(I_2)}=\frac{0.04\times0.6}{0.12}=0.2\,。$$

当调查结论为开发时 $E(S_1)$=8 908 元，$E(S_2)$=3 000（元），故此步骤应选择方案 S_1。

当调查结论为不开发时 $E(S_1)$=−2 000 元，$E(S_2)$=3 000（元），故此步骤应选择方案 S_2。

因为当咨询公司调查结论为开发时的概率 $P(I_1)$=0.88，不开发的概率 $P(I_2)$=0.12，故 E(调)＝8 199.04（元）。

当公司委托咨询公司进行市场调查即具有样本情报时，公司的期望收益可达 8 199.04 元，比不进行市场调查公司收益 7 600 元高，故其 $EVSI$=8 199.04−7 600=599.04（元），样本情报效

率$=\frac{EVSI}{EVPI}\times 100\%=28.27\%$，

因为 599.04＜800，所以该咨询服务费用 800 元是不值得的。

7．解：

① 先求各效用值

$U(80)=PU(100)+(1-P)U(-10)=0.9(10)+0.1(0)=9$，

$U(60)=PU(100)+(1-P)U(-10)=0.8(10)+0.1(0)=8$，

$U(10)=PU(100)+(1-P)U(-10)=0.25(10)+0.75(0)=2.5$，

故其效用矩阵如表 16-6 所示。

表 16-6

方案 \ 概率 \ 自然状态	N_1	N_2	N_3
	$P(N_1)=0.2$	$P(N_2)=0.5$	$P(N_3)=0.3$
S_1（现在扩大）	10	9	0
S_2（明年扩大）	9	8	2.5

② $E(S_1)=0.2\times100+0.5\times80+0.3\times(-10)=57$，

$E(S_2)=80\times0.2+60\times0.5+10\times0.3=49$，

故按实际盈利期望值法确定的最优方案为 S_1。

$E\left[U(S_1)\right]=0.2\times10+0.5\times9+0.3\times0=6.5$，

$E\left[U(S_2)\right]=0.2\times9+0.5\times8+0.3\times2.5=6.55$，

因为 $E\left[U(S_1)\right]<E\left[U(S_2)\right]$，

所以按效用期望值法确定的最优方案为 S_2。

第 17 章　预　　测

1．解：

① n=3 时，第 13 个月的销售量为 $\dfrac{85+100+105}{3}\approx 96.7$；

n＝4 时，第 13 个月的销售量为 $\dfrac{100+85+100+105}{4}\approx 97.5$。

② 结果如表 17-1 所示。

表 17-1

月　　份	销售量	α =0.3 时的预测值	α ＝0.5 时的预测值
1	105		
2	135	105	105
3	115	114	120
4	100	114.3	117.5
5	95	110.01	108.75
6	120	105.507	101.875
7	140	109.854 9	110.937 5
8	135	118.898 4	125.468 8
9	100	123.728 9	130.234 4
10	85	116.610 2	115.117 2
11	100	107.127 2	100.058 6
12	105	104.989	100.029 3
下一年 1 月		104.992 3	102.514 6

2．解：

① n=3，比例为 1∶2∶4 时，第 11 周的股票价格为 $\dfrac{1}{7}\times 9.7+\dfrac{2}{7}\times 9.6+\dfrac{4}{7}\times 9.4=9.5$；

② n=3，比例为 1∶3∶5 时，第 11 周的股票价格为 $\dfrac{1}{9}\times 9.7+\dfrac{3}{9}\times 9.6+\dfrac{5}{9}\times 9.4=9.5$。

③ 由①②的结果可以看出，两个结果相同。

3．解：

① 销售情况如图 17-1 所示。

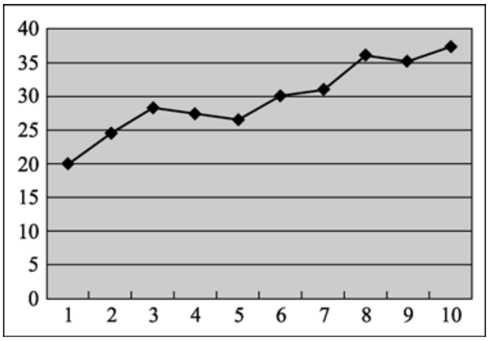

图 17-1

由图 17-1 可以看出，该时间序列有一定的线性趋势。

② 设线性方程为 $T_t = b_0 + b_1 t$，进行如下计算。

表 17-2

	t	Y_t	$t \cdot Y_t$	t^2
	1	20	20	1
	2	24.5	49	4
	3	28.2	84.6	9
	4	27.5	110	16
	5	26.6	133	25
	6	30	180	36
	7	31	217	49
	8	36	288	64
	9	35.2	316.8	81
	10	37.4	374	100
合计	55	296.4	1 772.4	385

$$b_1 = \frac{\sum t \cdot Y_t - (\sum t \cdot \sum Y_t)/n}{\sum t^2 - (\sum t)^2/n} = \frac{1772.4 - (55 \times 296.4)/10}{385 - 55^2/10} = 1.72,$$

$b_0 = \overline{Y} - b_1 \bar{t} = 20.18$，

故所求直线方程为 $T_t = 20.18 + 1.72t$。

t=11 时，$T_t = 20.18 + 1.72 \times 11 = 39.1$，即第 11 年的销售量为 39.1 万台。

4．解：

① 根据销售数据，可以做出图 17-2。

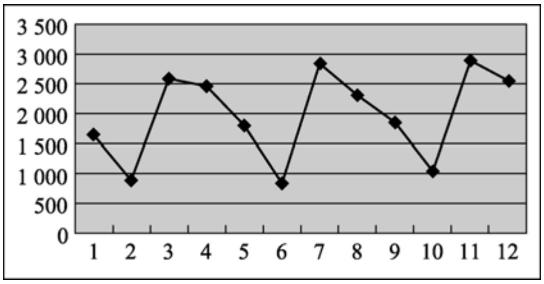

图 17–2

由图 17–2 可看出，销量有较为明显的上升趋势和受季节影响。

② 根据销售数据，可以做出表 17–3。

表 17–3

季度	销售量	四个季度移动平均值	中心移动平均值	季节与不规则因素的指标值
1	1 650			
2	900			
3	2 580	1 897.5	1 916.25	1.346 38
4	2 460	1 935	1 927.5	1.276 265
1	1 800	1 920	1 953.75	0.921 305
2	840	1 987.5	1 967.5	0.426 938
3	2 850	1 947.5	1 953.75	1.458 733
4	2 300	1 960	1 985	1.158 69
1	1 850	2 010	2 013.75	0.918 684
2	1 040	2 017.5	2 050	0.507 317
3	2 880	2 082.5		
4	2 560			

去掉指标值中的不规则因素，第三季度的季节指数为 $\frac{1.346\ 38+1.458\ 733}{2}\approx 1.40$，同理可求得第一、二、四季度的季节指数分别为 0.92，0.47 和 1.22。进行调整后，四个季度的季节指数依次为 0.92，0.47，1.39 和 1.22。

③ 在时间序列中去掉季节因素，可得表 17–4。

表 17-4

季　　度	销售量	季节指数	消除季节因素的销量
1	1 650	0.92	1 793
2	900	0.47	1 915
3	2 580	1.39	1 856
4	2 460	1.22	2 016
1	1 800	0.92	1 957
2	840	0.47	1 787
3	2 850	1.39	2 050
4	2 300	1.22	1 885
1	1 850	0.92	2 011
2	1 040	0.47	2 213
3	2 880	1.39	2 072
4	2 560	1.22	2 098

使用消除季节因素后的时间序列确定时间序列的趋势，可以得到直线方程为

$$T_t = 1805 + 25.5t\text{ 。}$$

在第四年第四个季度，t=16，故 $T_t = 1805 + 25.5 \times 16$ =2 213。

第四季度的季节指数是 1.22，故预测值为 2 213×1.22=2 699.9。

5．解：

① 根据销售数据，可以做出图 17-3。

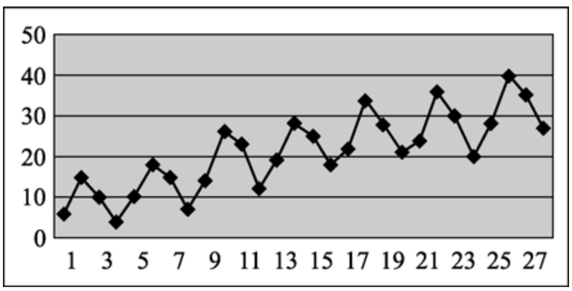

图 17-3

由图 17-3 可以看出，销量有明显的上升趋势和季节影响。

② 根据销售数据，可以做出表 17-5。

表 17-5

季度	销售量	四个季度移动平均值	中心移动平均值	季节与不规则因素的指标值
1	6			
2	15			
3	10	8.75	9.25	1.081 08
4	4	9.75	10.125	0.395 06
1	10	10.5	11.125	0.898 88
2	18	11.75	12.125	1.484 54
3	15	12.5	13	1.153 85
4	7	13.5	14.5	0.482 76
1	14	15.5	16.5	0.848 48
2	26	17.5	18.125	1.434 48
3	23	18.75	19.375	1.187 1
4	12	20	20.25	0.592 59
1	19	20.5	20.75	0.915 66
2	28	21	21.75	1.287 36
3	25	22.5	22.875	1.092 9
4	18	23.25	24	0.75
1	22	24.75	25.125	0.875 62
2	34	25.5	25.875	1.314 01
3	28	26.25	26.5	1.056 6
4	21	26.75	27	0.777 78
1	24	27.25	27.5	0.872 73
2	36	27.75	27.625	1.303 17
3	30	27.5	28	1.071 43
4	20	28.5	29	0.689 66
1	28	29.5	30.125	0.929 46
2	40	30.75	31.625	1.264 82
3	35	32.5		
4	27			

去掉指标值中的不规则因素，并进行调整后，四个季度的季节指数依次为 0.90，1.36，1.12 和 0.62。

③ 在时间序列中去掉季节因素，可得表 17-6。

表 17-6

季　　度	销售量	季节指数	消除季节因素的销量
1	6	0.90	6.7
2	15	1.36	11.0
3	10	1.12	8.9
4	4	0.62	6.5
1	10	0.90	11.1
2	18	1.36	13.2
3	15	1.12	13.4
4	7	0.62	11.3
1	14	0.90	15.6
2	26	1.36	19.1
3	23	1.12	20.5
4	12	0.62	19.4
1	19	0.90	21.1
2	28	1.36	20.6
3	25	1.12	22.3
4	18	0.62	29.0
1	22	0.90	24.4
2	34	1.36	25.0
3	28	1.12	25.0
4	21	0.62	33.9
1	24	0.90	26.7
2	36	1.36	26.5
3	30	1.12	26.8
4	20	0.62	32.3
1	28	0.90	31.1
2	40	1.36	29.4
3	35	1.12	31.3
4	27	0.62	43.5

使用消除季节因素后的时间序列确定时间序列的趋势，可以得到直线方程为

$$T_t = 6.33 + 1.06t$$

在第八年第四个季度，t=32，故 $T_t = 6.33 + 1.06 \times 32 = 40.25$ 。

第四季度的季节指数是 0.62，故预测值为 $40.25 \times 0.62 = 24.96$ 。

（2）无可行解。
（3）无界解。
（4）无可行解。
（5）无穷多解。
（6）有唯一解 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{20}{3} \\ x_2 = \dfrac{8}{3} \end{cases}$，函数值为 $\dfrac{92}{3}$。
3．解：
（1）标准形式
$\max f = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

$9x_1 + 2x_2 + s_1 = 30$
$3x_1 + 2x_2 + s_2 = 13$
$2x_1 + 2x_2 + s_3 = 9$
$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geqslant 0$

（2）标准形式
$\min f = 4x_1 + 6x_2 + 0s_1 + 0s_2$

$3x_1 - x_2 - s_1 = 6$
$x_1 + 2x_2 + s_2 = 10$
$7x_1 - 6x_2 = 4$
$x_1, x_2, s_1, s_2 \geqslant 0$

（3）标准形式
$\min f = x_1' - 2x_2' + 2x_2'' + 0s_1 + 0s_2$
$-3x_1 + 5x_2' - 5x_2'' + s_1 = 70$
$2x_1' - 5x_2' + 5x_2'' = 50$
$3x_1' + 2x_2' - 2x_2'' - s_2 = 30$
$x_1', x_2', x_2'', s_1, s_2 \geqslant 0$
4．解：
标准形式
$\max z = 10x_1 + 5x_2 + 0s_1 + 0s_2$
$3x_1 + 4x_2 + s_1 = 9$
$5x_1 + 2x_2 + s_2 = 8$
$x_1, x_2, s_1, s_2 \geqslant 0$
松弛变量（0，0）
最优解为 x_1=1，x_2=3/2。
5．解：

标准形式

$\min f = 11x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

$10x_1 + 2x_2 - s_1 = 20$

$3x_1 + 3x_2 - s_2 = 18$

$4x_1 + 9x_2 - s_3 = 36$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geqslant 0$

剩余变量（0, 0, 13）

最优解为 x_1=1，x_2=5。

6．解：

（1）最优解为 x_1=3，x_2=7。

（2）$1 < c_1 < 3$。

（3）$2 < c_2 < 6$。

（4）$x_1 = 6$。
$x_2 = 4$。

（5）最优解为 x_1=8，x_2=0。

（6）不变化。因为当斜率$-1 \leqslant -\dfrac{c_1}{c_2} \leqslant -\dfrac{1}{3}$，最优解不变，变化后斜率为 1，所以最优解不变。

7．解：

模型 $\max z = 500x_1 + 400x_2$

$2x_1 \leqslant 300$

$3x_2 \leqslant 540$

$2x_1 + 2x_1 \leqslant 440$

$1.2x_1 + 1.5x_2 \leqslant 300$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

（1）$x_1 = 150$，$x_2 = 70$，即目标函数最优值是 103 000。

（2）2，4 有剩余，分别是 330，15，均为松弛变量。

（3）50，0，200，0。

（4）在$[0,500]$变化，最优解不变；在 400 到正无穷变化，最优解不变。

（5）因为$-\dfrac{c_1}{c_2} = -\dfrac{450}{430} \leqslant -1$，所以原来的最优产品组合不变。

8．解：

（1）模型 $\min f = 8x_{\mathrm{A}} + 3x_{\mathrm{B}}$

$50x_{\mathrm{A}} + 100x_{\mathrm{B}} \leqslant 1\,200\,000$

$5x_{\mathrm{A}} + 4x_{\mathrm{B}} \geqslant 60\,000$

$100x_{\mathrm{B}} \geqslant 300\,000$

$x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}} \geqslant 0$

基金 A，B 分别为 4 000 元，10 000 元，回报额为 60 000 元。

（2）模型变为 $\max z = 5x_{\mathrm{A}} + 4x_{\mathrm{B}}$

$$50x_{\mathrm{A}} + 100x_{\mathrm{B}} \leqslant 1\,200\,000$$
$$100x_{\mathrm{B}} \geqslant 300\,000$$
$$x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}} \geqslant 0$$

推导出 $x_1 = 18\,000$， $x_2 = 3\,000$，故基金 A 投资 90 万元，基金 B 投资 30 万元。

第 3 章　线性规划问题的计算机求解

1．解：

（1）$x_1 = 150$，$x_2 = 70$；目标函数最优值 103 000。

（2）1、3 车间的加工工时数已使用完；2、4 车间的加工工时数没用完；没用完的加工工时数为 2 车间 330 小时，4 车间 15 小时。

（3）50，0，200，0。

含义：1 车间每增加 1 工时，总利润增加 50 元；3 车间每增加 1 工时，总利润增加 200 元；2 车间与 4 车间每增加一个工时，总利润不增加。

（4）3 车间，因为增加的利润最大。

（5）在 400 到正无穷的范围内变化，最优产品的组合不变。

（6）不变，因为在$[0,500]$的范围内。

（7）所谓的上限和下限值指当约束条件的右边值在给定范围内变化时，约束条件 1 的右边值在$[200,440]$变化，对偶价格仍为 50（同理解释其他约束条件）。

（8）总利润增加了 100×50=5 000，最优产品组合不变。

（9）不能，因为对偶价格发生变化。

（10）不发生变化，因为允许增加的百分比与允许减少的百分比之和$\frac{25}{100}+\frac{50}{100}\leqslant 100\%$

（11）不发生变化，因为允许增加的百分比与允许减少的百分比之和$\frac{50}{140}+\frac{60}{140}\leqslant 100\%$，其最大利润为 103 000+50×50−60×200=93 500 元。

2．解：

（1）4 000，10 000，62 000。

（2）约束条件 1：总投资额增加 1 个单位，风险系数则降低 0.057；

约束条件 2：年回报额增加 1 个单位，风险系数升高 2.167；

约束条件 3：基金 B 的投资额增加 1 个单位，风险系数不变。

（3）约束条件 1 的松弛变量是 0，表示投资额正好为 1 200 000；约束条件 2 的剩余变量是 0，表示投资回报额正好是 60 000；约束条件 3 的松弛变量为 700 000，表示投资 B 基金的投资额为 370 000。

（4）当c_2不变时，c_1在 3.75 到正无穷的范围内变化，最优解不变；

当c_1不变时，c_2在负无穷到 6.4 的范围内变化，最优解不变。

（5）约束条件 1 的右边值在$[780\,000, 1\,500\,000]$变化，对偶价格仍为 0.057（其他同理）。

（6）不能，因为允许减少的百分比与允许增加的百分比之和$\frac{4}{4.25}+\frac{2}{3.6}>100\%$，理由见百分之一百法则。

3．解：

（1）18 000，3 000，102 000，153 000。

（2）总投资额的松弛变量为 0，表示投资额正好为 1 200 000；基金 B 的投资额的剩余变量为 0，表示投资 B 基金的投资额正好为 300 000；

（3）总投资额每增加 1 个单位，回报额增加 0.1；

基金 B 的投资额每增加 1 个单位，回报额下降 0.06。

（4）c_1 不变时，c_2 在负无穷到 10 的范围内变化，其最优解不变；

c_2 不变时，c_1 在 2 到正无穷的范围内变化，其最优解不变。

（5）约束条件 1 的右边值在 300 000 到正无穷的范围内变化，对偶价格仍为 0.1；

约束条件 2 的右边值在 0 到 1 200 000 的范围内变化，对偶价格仍为−0.06。

（6）$\dfrac{600\,000}{900\,000}+\dfrac{300\,000}{900\,000}=100\%$故对偶价格不变。

4．解：

（1）$x_1=8.5$，$x_2=1.5$，$x_3=0$，$x_4=0$，最优目标函数 18.5。

（2）约束条件 2 和 3，对偶价格为 2 和 3.5，约束条件 2 和 3 的常数项增加一个单位目标函数分别提高 2 和 3.5。

（3）第 3 个，此时最优目标函数值为 22。

（4）在负无穷到 5.5 的范围内变化，其最优解不变，但此时最优目标函数值变化。

（5）在 0 到正无穷的范围内变化，其最优解不变，但此时最优目标函数值变化。

5．解：

（1）约束条件 2 的右边值增加 1 个单位，目标函数值将增加 3.622。

（2）x_2 目标函数系数提高到 0.703，最优解中 x_2 的取值可以大于零。

（3）根据百分之一百法则判定，因为允许减少的百分比与允许增加的百分比之和 $\dfrac{1}{14.583}+\dfrac{2}{\infty}\leqslant 100\%$，所以最优解不变。

（4）因为 $\dfrac{15}{30-9.189}+\dfrac{65}{111.25-15}>100\,\%$，根据百分之一百法则，我们不能判定其对偶价格是否有变化。

第 4 章　线性规划在工商管理中的应用

1．解：

为了用最少的原材料得到 10 台锅炉，需要混合使用 14 种下料方案。

设按 14 种方案下料的原材料的根数分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8，x_9，x_{10}，x_{11}，x_{12}，x_{13}，x_{14}，模型如表 4-1 所示。

表 4-1　各种下料方式

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2 640 mm	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 770 mm	0	1	0	0	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
1 650 mm	0	0	1	0	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
1 440 mm	0	0	0	1	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3

$\min f=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}$

s.t.　$2x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant 80$

$x_2+3x_5+2x_6+2x_7+x_8+x_9+x_{10}\geqslant 350$

$x_3+x_6+2x_8+x_9+3x_{11}+2x_{12}+x_{13}\geqslant 420$

$x_4+x_7+x_9+2x_{10}+x_{12}+2x_{13}+3x_{14}\geqslant 10$

x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8，x_9，x_{10}，x_{11}，x_{12}，x_{13}，$x_{14}\geqslant 0$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解为

$x_1=40$，$x_2=0$，$x_3=0$，$x_4=0$，$x_5=116.667$，$x_6=0$，$x_7=0$，$x_8=0$，$x_9=0$，$x_{10}=0$，$x_{11}=140$，$x_{12}=0$，$x_{13}=0$，$x_{14}=3.333$

最优值为 300。

2．解：

从上午 11 时到下午 10 时分成 11 个班次，设 x_i 表示第 i 班次安排的临时工的人数，模型如下。

$\min f=16(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11})$

s.t.　$x_1+1\geqslant 9$

$x_1+x_2+1\geqslant 9$

$x_1+x_2+x_3+2\geqslant 9$

$x_1+x_2+x_3+x_4+2\geqslant 3$

$x_2+x_3+x_4+x_5+1\geqslant 3$

$x_3+x_4+x_5+x_6+2\geqslant 3$

$x_4+x_5+x_6+x_7+1\geqslant 6$

$x_5+x_6+x_7+x_8+2\geqslant 12$

$x_6+x_7+x_8+x_9+2\geqslant 12$

$x_7+x_8+x_9+x_{10}+1\geqslant 7$

$x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+1\geqslant 7$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11} \geqslant 0$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解如下。

$x_1=8$，$x_2=0$，$x_3=1$，$x_4=1$，$x_5=0$，$x_6=4$，$x_7=0$，$x_8=6$，$x_9=0$，$x_{10}=0$，$x_{11}=0$，

最优值为 320。

（1）在满足对职工需求的条件下，在 11 时安排 8 个临时工，13 时新安排 1 个临时工，14 时新安排 1 个临时工，16 时新安排 4 个临时工，18 时新安排 6 个临时工可使临时工的总成本最小。

（2）这时付给临时工的工资总额为 80 元，一共需要安排 20 个临时工的班次。

约束	松弛/剩余变量	对偶价格
------	------------	------------
1	0	−4
2	0	0
3	2	0
4	9	0
5	0	−4
6	5	0
7	0	0
8	0	0
9	0	−4
10	0	0
11	0	0

根据剩余变量的数字分析可知，可以让 11 时安排的 8 个人工做 3 小时，13 时安排的 1 个人工作 3 小时，可使得总成本更小。

（3）设 x_i 表示第 i 班上班 4 小时临时工人数，y_j 表示第 j 班上班 3 小时临时工人数。

$$\min f=16(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)+12(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8+y_9)$$

s.t.

$$x_1+y_1+1\geqslant 9$$
$$x_1+x_2+y_1+y_2+1\geqslant 9$$
$$x_1+x_2+x_3+y_1+y_2+y_3+2\geqslant 9$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+y_2+y_3+y_4+2\geqslant 3$$
$$x_2+x_3+x_4+x_5+y_3+y_4+y_5+1\geqslant 3$$
$$x_3+x_4+x_5+x_6+y_4+y_5+y_6+2\geqslant 3$$
$$x_4+x_5+x_6+x_7+y_5+y_6+y_7+1\geqslant 6$$
$$x_5+x_6+x_7+x_8+y_6+y_7+y_8+2\geqslant 12$$
$$x_6+x_7+x_8+y_7+y_8+y_9+2\geqslant 12$$
$$x_7+x_8+y_8+y_9+1\geqslant 7$$
$$x_8+y_9+1\geqslant 7$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9\geqslant 0$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解如下。

x_1=0，x_2=0，x_3=0，x_4=0，x_5=0，x_6=0，x_7=0，x_8=6，y_1=8，y_2=0，y_3=1，y_4=0，y_5=1，y_6=0，y_7=4，y_8=0，y_9=0。

最优值为 264。

具体安排如下。

在 11：00－12：00 安排 8 个 3 小时的班，在 13：00－14：00 安排 1 个 3 小时的班，在 15：00－16：00 安排 1 个 3 小时的班，在 17：00－18：00 安排 4 个 3 小时的班，在 18：00－19：00 安排 6 个 4 小时的班。

总成本最小为 264 元，能比第一问节省 320－264=56 元。

3．解：

设生产 A、B、C 三种产品的数量分别为 x_1，x_2，x_3，则可建立下面的数学模型。

$\max z = 10x_1 + 12x_2 + 14x_3$

s.t. $x_1 + 1.5x_2 + 4x_3 \leqslant 2\,000$

$2x_1 + 1.2x_2 + x_3 \leqslant 1\,000$

$x_1 \leqslant 200$

$x_2 \leqslant 250$

$x_3 \leqslant 100$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解如下。

x_1=200，x_2=250，x_3=100，最优值为 6 400。

（1）在资源数量及市场容量允许的条件下，生产 A 200 件，B 250 件，C 100 件，可使生产获利最多。

（2）A、B、C 的市场容量的对偶价格分别为 10 元，12 元，14 元。材料、台时的对偶价格均为 0。说明 A 的市场容量增加一件就可使总利润增加 10 元，B 的市场容量增加一件就可使总利润增加 12 元，C 的市场容量增加一件就可使总利润增加 14 元。但增加一千克的材料或增加一个台时数都不能使总利润增加。如果要开拓市场应当首先开拓 C 产品的市场，如果要增加资源，则应在 0 价位上增加材料数量和机器台时数。

4．解：

设白天调查的有孩子的家庭的户数为 x_{11}，白天调查的无孩子的家庭的户数为 x_{12}，晚上调查的有孩子的家庭的户数为 x_{21}，晚上调查的无孩子的家庭的户数为 x_{22}，则可建立下面的数学模型。

$\min f = 25x_{11} + 20x_{12} + 30x_{21} + 24x_{22}$

s.t. $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \geqslant 2\,000$

$x_{11} + x_{12} = x_{21} + x_{22}$

$x_{11} + x_{21} \geqslant 700$

$x_{12} + x_{22} \geqslant 450$

$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geqslant 0$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解如下。

x_{11}＝700，x_{12}＝300，x_{21}＝0，x_{22}＝1 000，

最优值为 47 500。

（1）白天调查的有孩子的家庭的户数为 700 户，白天调查的无孩子的家庭的户数为 300 户，晚上调查的有孩子的家庭的户数为 0，晚上调查的无孩子的家庭的户数为 1 000 户，可使总调查费用最小。

（2）白天调查的有孩子的家庭的费用在 20～26 元之间，总调查方案不会变化；白天调查的无孩子的家庭的费用在 19～25 元之间，总调查方案不会变化；晚上调查的有孩子的家庭的费用在 29 到正无穷之间，总调查方案不会变化；晚上调查的无孩子的家庭的费用在−20～25 元之间，总调查方案不会变化。

（3）发调查的总户数在 1 400 到正无穷之间，对偶价格不会变化；有孩子家庭的最少调查数在 0 到 1 000 之间，对偶价格不会变化；无孩子家庭的最少调查数在负无穷到 1 300 之间，对偶价格不会变化。

5．解：

设第 i 个月签订的合同打算租用 j 个月的面积为 x_{ij}，则需要建立下面的数学模型：

$\min\ f=2\,800x_{11}+4\,500x_{12}+6\,000x_{13}+7\,300x_{14}+2\,800x_{21}+4\,500x_{22}+6\,000x_{23}+2\,800x_{31}+4\,500x_{32}+2\,800x_{41}$

s.t.　$x_{11}\geqslant 15$

$x_{12}+x_{21}\geqslant 10$

$x_{13}+x_{22}+x_{31}\geqslant 20$

$x_{14}+x_{23}+x_{32}+x_{41}\geqslant 12$

$x_{ij}\geqslant 0$，i，j=1，2，3，4

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解如下。

$x_{11}=15$，$x_{12}=0$，$x_{13}=0$，$x_{14}=0$，$x_{21}=10$，$x_{22}=0$，$x_{23}=0$，$x_{31}=20$，$x_{32}=0$，$x_{41}=12$，

最优值为 159 600，即在一月份租用 1 500 平方米一个月，在二月份租用 1 000 平方米一个月，在三月份租用 2 000 平方米一个月，四月份租用 1 200 平方米一个月，可使所付的租借费最小。

6．解：

设 x_{ij} 表示第 i 种类型的鸡需要第 j 种饲料的量，可建立下面的数学模型。

$\max\ z=9(x_{11}+x_{12}+x_{13})+7(x_{21}+x_{22}+x_{23})+8(x_{31}+x_{32}+x_{33})-5.5(x_{11}+x_{21}+x_{31})-4(x_{12}+x_{22}+x_{32})-5(x_{13}+x_{23}+x_{33})$

s.t.　$x_{11}\geqslant 0.5(x_{11}+x_{12}+x_{13})$

$x_{12}\leqslant 0.2(x_{11}+x_{12}+x_{13})$

$x_{21}\geqslant 0.3(x_{21}+x_{22}+x_{23})$

$x_{23}\leqslant 0.3(x_{21}+x_{22}+x_{23})$

$x_{33}\geqslant 0.5(x_{31}+x_{32}+x_{33})$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}\leqslant 30$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}\leqslant 30$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}\leqslant 30$

$x_{ij}\geqslant 0$，i，j=1，2，3

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解如下。

$x_{11}=30$，$x_{12}=10$，$x_{13}=10$，$x_{21}=0$，$x_{22}=0$，$x_{23}=0$，$x_{31}=0$，$x_{32}=20$，$x_{33}=20$，最优值为 335，即

生产雏鸡饲料 50 吨，不生产蛋鸡饲料，生产肉鸡饲料 40 吨。

7．解：

设 X_i 为第 i 个月生产的产品Ⅰ数量，Y_i 为第 i 个月生产的产品Ⅱ数量，Z_i，W_i 分别为第 i 个月末产品Ⅰ、Ⅱ库存数，S_{1i}，S_{2i} 分别为用于第（i+1）个月库存的自有及租借的仓库容积（立方米），则可以建立如下模型。

$$\min z=\sum_{i=1}^{5}(5x_i+8y_i)+\sum_{i=6}^{12}(4.5x_i+7y_i)+\sum_{i=1}^{12}(S_{1i}+S_{2i})$$

s.t　$X_1-10\ 000=Z_1$

$X_2+Z_1-10\ 000=Z_2$

$X_3+Z_2-10\ 000=Z_3$

$X_4+Z_3-10\ 000=Z_4$

$X_5+Z_4-30\ 000=Z_5$

$X_6+Z_5-30\ 000=Z_6$

$X_7+Z_6-30\ 000=Z_7$

$X_8+Z_7-30\ 000=Z_8$

$X_9+Z_8-30\ 000=Z_9$

$X_{10}+Z_9-100\ 000=Z_{10}$

$X_{11}+Z_{10}-100\ 000=Z_{11}$

$X_{12}+Z_{11}-100\ 000=Z_{12}$

$Y_1-50\ 000=W_1$

$Y_2+W_1-50\ 000=W_2$

$Y_3+W_2-15\ 000=W_3$

$Y_4+W_3-15\ 000=W_4$

$Y_5+W_4-15\ 000=W_5$

$Y_6+W_5-15\ 000=W_6$

$Y_7+W_6-15\ 000=W_7$

$Y_8+W_7-15\ 000=W_8$

$Y_9+W_8-15\ 000=W_9$

$Y_{10}+W_9-50\ 000=W_{10}$

$Y_{11}+W_{10}-50\ 000=W_{11}$

$Y_{12}+W_{11}-50\ 000=W_{12}$

$S_{1i}\leqslant 15\ 000 \quad 1\leqslant i\leqslant 12$

$X_i+Y_i\leqslant 120\ 000 \ 1\leqslant i\leqslant 12$

$0.2Z_i+0.4W_i=S_{1i}+S_{2i} \quad 31\leqslant i\leqslant 12$

$X_i\geqslant 0, Y_i\geqslant 0, Z_i\geqslant 0, W_i\geqslant 0, S_{1i}\geqslant 0, S_{2i}\geqslant 0$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解如下。

最优值为 4 910 500。

X_1=10 000, X_2=10 000, X_3=10 000, X_4=10 000, X_5=30 000, X_6=30 000, X_7=30 000, X_8=45 000, X_9=105 000, X_{10}=70 000, X_{11}=70 000, X_{12}=70 000;

Y_1=50 000, Y_2=50 000, Y_3=15 000, Y_4=15 000, Y_5=15 000

Y_6=15 000, Y_7=15 000, Y_8=15 000, Y_9=15 000, Y_{10}=50 000, Y_{11}=50 000, Y_{12}=50 000;

Z_8=15 000, Z_9=90 000, Z_{10}=60 000, Z_{11}=30 000;

S_{18}=3 000, S_{19}=15 000, S_{110}=12 000, S_{111}=6 000, S_{29}=3 000;

其余变量都等于 0。

8．解：

设第 i 个车间生产第 j 种型号产品的数量为 x_{ij},可以建立下面的数学模型。

$$\max = 25(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51})+20(x_{12}+x_{32}+x_{42}+x_{52})+17(x_{13}+x_{23}+x_{43}+x_{53})+11(x_{14}+x_{24}+x_{44})$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}\leqslant 1\,400\\
& x_{12}+x_{32}+x_{42}+x_{52}\geqslant 300\\
& x_{12}+x_{32}+x_{42}+x_{52}\leqslant 800\\
& x_{13}+x_{23}+x_{43}+x_{53}\leqslant 8\,000\\
& x_{14}+x_{24}+x_{44}\geqslant 700\\
& 5x_{11}+7x_{12}+6x_{13}+5x_{14}\leqslant 18\,000\\
& 6x_{21}+3x_{23}+3x_{24}\leqslant 15\,000\\
& 4x_{31}+3x_{32}\leqslant 14\,000\\
& 3x_{41}+2x_{42}+4x_{43}+2x_{44}\leqslant 12\,000\\
& 2x_{51}+4x_{52}+5x_{53}\leqslant 10\,000\\
& x_{ij}\geqslant 0, i=1,2,3,4,5\quad j=1,2,3,4
\end{aligned}$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解如下。

**********************最优解如下*************************

目标函数最优值为：279 400

变量	最优解	相差值
-------	---------	----------
x_{11}	0	11
x_{21}	0	26.4
x_{31}	1 400	0
x_{41}	0	16.5
x_{51}	0	5.28
x_{12}	0	15.4
x_{32}	800	0
x_{42}	0	11
x_{52}	0	10.56
x_{13}	1 000	0

x_{23}	5 000	0
x_{43}	0	8.8
x_{53}	2 000	0
x_{14}	2 400	0
x_{24}	0	2.2
x_{44}	6 000	0

约束	松弛/剩余变量	对偶价格
-------	-----------	----------
1	0	25
2	500	0
3	0	20
4	0	3.8
5	7 700	0
6	0	2.2
7	0	4.4
8	6 000	0
9	0	5.5
10	0	2.64

目标函数系数范围 :

变量	下限	当前值	上限
-------	-------	-------	-------
x_{11}	无下限	25	36
x_{21}	无下限	25	51.4
x_{31}	19.72	25	无上限
x_{41}	无下限	25	41.5
x_{51}	无下限	25	30.28
x_{12}	无下限	20	35.4
x_{32}	9.44	20	无上限
x_{42}	无下限	20	31
x_{52}	无下限	20	30.56
x_{13}	13.2	17	19.2
x_{23}	14.8	17	无上限
x_{43}	无下限	17	25.8
x_{53}	3.8	17	无上限
x_{14}	9.167	11	14.167
x_{24}	无下限	11	13.2
x_{44}	6.6	11	无上限

常数项数范围：

约束	下限	当前值	上限
-------	-------	-------	-------
1	0	1 400	2 900
2	无下限	300	800
3	300	800	2 800
4	7 000	8 000	10 000
5	无下限	700	8 400
6	6 000	18 000	无上限
7	9 000	15 000	18 000
8	8 000	14 000	无上限
9	0	12 000	无上限
10	0	10 000	15 000

即$x_{11}=0, x_{12}=0, x_{13}=1\,000, x_{14}=2\,400, x_{21}=0, x_{23}=5\,000, x_{24}=0,$

$x_{31}=1\,400, x_{32}=800, x_{41}=0, x_{42}=0, x_{43}=0, x_{44}=6\,000, x_{51}=0,$

$x_{52}=0, x_{53}=2\,000,$

最优值为 279 400。

对 5 个车间的可用生产时间做灵敏度分析可以按照以上管理运筹学软件的计算结果自行进行。

9．解：

设第一个月正常生产 x_1，加班生产 x_2，库存 x_3；第二个月正常生产 x_4，加班生产 x_5，库存 x_6；第三个月正常生产 x_7，加班生产 x_8，库存 x_9；第四个月正常生产 x_{10}，加班生产 x_{11}，可以建立下面的数学模型。

min f=200(x_1+ x_4+ x_7+ x_{10})+300(x_2+ x_5+ x_8+ x_{11})+60(x_3+ x_6+ x_9)

s.t $x_1 \leqslant 4\,000$

$x_4 \leqslant 4\,000$

$x_7 \leqslant 4\,000$

$x_{10} \leqslant 4\,000$

$x_3 \leqslant 4\,000$

$x_6 \leqslant 1\,000$

$x_9 \leqslant 1\,000$

$x_2 \leqslant 1\,000$

$x_5 \leqslant 1\,000$

$x_8 \leqslant 1\,000$

$x_{11} \leqslant 1\,000$

$x_1+x_2-x_3=4\,500$

$x_3+x_4+x_5-x_6=3\,000$

$x_6+x_7+x_8-x_9=5\,500$

$x_9+x_{10}+x_{11}=4\,500$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11} \geqslant 0$$

用管理运筹学软件我们可以求得此问题的解如下。

最优值为 f=3 710 000 元。

x_1=4 000 吨，x_2 =500 吨，x_3=0 吨，x_4=4 000 吨，x_5=0 吨，
x_6=1 000 吨，x_7=4 000 吨，x_8=500 吨，x_9=0 吨，x_{10}=4 000 吨，x_{11}=500 吨。

第 5 章　单 纯 形 法

1．解：

表中 a、c、e、f 是可行解，a、b、f 是基本解，a、f 是基本可行解。

2．解：

（1）该线性规划的标准型如下。

$$\begin{aligned}
\max\quad & 5x_1+9x_2+0s_1+0s_2+0s_3\\
\text{s.t.}\quad & 0.5x_1+x_2+s_1=8\\
& x_1+x_2-s_2=10\\
& 0.25x_1+0.5x_2-s_3=6\\
& x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3\geqslant 0
\end{aligned}$$

（2）有两个变量的值取零，因为有三个基变量、两个非基变量，非基变量取零。

（3）（4，6，0，0，−2）$^{\mathrm{T}}$

（4）（0，10，−2，0，−1）$^{\mathrm{T}}$

（5）不是。因为基本可行解要求基变量的值全部非负。

（6）略

3．解：

（1）

表 5-1

迭代次数	基变量	C_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
			6	30	25	0	0	0	
0	s_1	0	3	1	0	1	0	0	40
	s_2	0	0	2	1	0	1	0	50
	s_3	0	2	[1]	−1	0	0	1	20
	z_j		0	0	0	0	0	0	0
	c_j-z_j		6	30	25	0	0	0	

（2）线性规划模型如下。

$$\begin{aligned}
\max\quad & 6x_1+30x_2+25x_3\\
\text{s.t.}\quad & 3x_1+x_2+s_1=40\\
& 2x_2+x_3+s_2=50\\
& 2x_1+x_2-x_3+s_3=20\\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3\geqslant 0
\end{aligned}$$

（3）初始解的基为（s_1，s_2，s_3）$^{\mathrm{T}}$，初始解为（0，0，0，40，50，20）$^{\mathrm{T}}$，对应的目标函数

值为 0。

（4）第一次迭代时，入基变量时 x_2，出基变量为 s_3。

4．解：

最优解为（2.25，0）^{T}，最优值为 9。

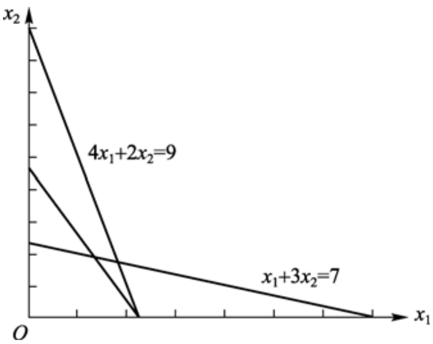

图 5–1

单纯形法如表 5–2 所示。

表 5–2

迭代次数	基变量	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	b
			4	1	0	0	
0	s_1	0	1	3	1	0	7
	s_2	0	[4]	2	0	1	9
	z_j		0	0	0	0	
	c_j-z_j		4	1	0	0	
1	s_1	0	0	2.5	1	−0.25	4.75
	x_1	4	1	0.5	0	0.25	2.25
	z_j		4	2	0	1	
	c_j-z_j		0	−1	0	−1	

5．解：

（1）最优解为（2，5，4）^{T}，最优值为 84。

（2）最优解为（0，0，4）^{T}，最优值为−4。

6．解：

有无界解。

7．解：

（1）无可行解。

（2）最优解为（4，4）^{T}，最优值为 28。

（3）有无界解。

（4）最优解为（4，0，0）^{T}，最优值为 8。

第 6 章　单纯形法的灵敏度分析与对偶

1．解：

（1）$c_1 \leqslant 24$

（2）$c_2 \geqslant 6$

（3）$c_{s2} \leqslant 8$

2．解：

（1）$c_1 \geqslant -0.5$

（2）$-2 \leqslant c_3 \leqslant 0$

（3）$c_{s2} \leqslant 0.5$

3．解：

（1）$b_1 \geqslant 250$

（2）$0 \leqslant b_2 \leqslant 50$

（3）$0 \leqslant b_3 \leqslant 150$

4．解：

（1）$b_1 \geqslant -4$

（2）$0 \leqslant b_2 \leqslant 10$

（3）$b_3 \geqslant 4$

5．解：

（1）利润变动范围 $c_1 \leqslant 3$，故当 $c_1=2$ 时最优解不变。

（2）根据材料的对偶价格为 1 判断，此做法不利。

（3）$0 \leqslant b_2 \leqslant 45$。

（4）最优解不变，故不需要修改生产计划。

（5）此时生产计划不需要修改，因为新的产品计算的检验数为−3 小于零，对原生产计划没有影响。

6．解：

均为唯一最优解，根据从计算机输出的结果看出，如果松弛或剩余变量为零且对应的对偶价格也为零，或者存在取值为零的决策变量并且其相差值也为零时，可知此线性规划有无穷多组解。

7．解：

（1）$\min f = 10y_1+20y_2.$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & y_1+y_2 \geqslant 2 \\
& y_1+5y_2 \geqslant 1 \\
& y_1+y_2 \geqslant 1 \\
& y_1, y_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

（2）$\max z = 100y_1+200y_2.$

$$
\text{s.t.}\quad 1/2y_1+4y_2 \leqslant 4
$$

$2y_1+6y_2 \leqslant 4$

$2y_1+3y_2 \leqslant 2$

$y_1, y_2 \geqslant 0$

8．解：

（1）$\min f=-10y_1+50y_2+20y_3.$

s.t. $-2y_1+3y_2+y_3 \geqslant 1$

$-3y_1+y_2 \quad \geqslant 2$

$-y_1+y_2+y_3 \quad =5$

y_1，$y_2 \geqslant 0$，y_3 没有非负限制。

（2）$\max z= 6y_1-3y_2+2y_3.$

s.t. $y_1-y_2-y_3 \leqslant 1$

$2y_1+y_2+y_3 =3$

$-3y_1+2y_2-y_3 \leqslant -2$

y_1，$y_2 \geqslant 0$，y_3 没有非负限制

9．解：

$\max z=-x_1-2x_2-3x_3$

$$\begin{cases} -x_1+x_2-x_3+x_4 = -4 \\ x_1+x_2+2x_3+x_5 = 8 \\ -x_2+x_3+x_6 = -2 \\ x_j \geqslant 0, j=1,\cdots,6 \end{cases}$$

用对偶单纯形法解如表 6-1 所示。

表 6-1

迭代次数	基变量	C_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
			−1	−2	−3	0	0	0	
0	s_1	0	[−1]	1	−1	1	0	0	−4
	s_2	0	1	1	2	0	1	0	8
	s_3	0	0	−1	1	0	0	1	−2
	z_j		0	0	0	0	0	0	
	c_j-z_j		−1	−2	−3	0	0	0	
1	x_1	−1	1	−1	1	−1	0	0	4
	s_2	0	0	2	1	1	1	0	4
	s_3	0	0	[−1]	1	0	0	1	−2
	z_j		−1	1	−1	1	0	0	
	c_j-z_j		0	−3	−2	−1	0	0	

续表

迭代次数	基变量	C_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b
			−1	−2	−3	0	0	0	
2	x_1	−1	1	0	0	−1	0	−1	6
	s_2	0	0	0	3	1	1	2	0
	x_2	−2	0	1	−1	0	0	−1	2
	z_j		−1	−2	2	1	0	3	
	$c_j - z_j$		0	0	−5	−1	0	−3	

最优解为 x_1=6，x_2=2，x_3=0，目标函数最优值为 10。

第 7 章　运 输 问 题

1．解：

（1）此问题为产销平衡问题。

表 7-1

	甲	乙	丙	丁	产量
1 分厂	21	17	23	25	300
2 分厂	10	15	30	19	400
3 分厂	23	21	20	22	500
销量	400	250	350	200	1 200

```
                 最优解如下
********************************************
起          至   销点
发点          1       2       3       4
--------    --------  --------  --------  --------
1             0      250      0      50
2            400      0       0       0
3             0       0      350     150
```

此运输问题的成本或收益为：19 800。

此问题的另外的解如下。

```
起          至   销点
发点          1       2       3       4
--------    --------  --------  --------  --------
1             0      250      50      0
2            400      0       0       0
3             0       0      300     200
```

此运输问题的成本或收益为：19 800。

（2）如果 2 分厂产量提高到 600，则为产销不平衡问题。

```
                 最优解如下
********************************************
起          至   销点
发点          1       2       3       4
--------    --------  --------  --------  --------
1             0      250      0       0
2            400      0       0      200
3             0       0      350      0
```

此运输问题的成本或收益为：19 050。
注释：总供应量多出总需求量　 200；
　　　第 1 产地的剩余 50；
　　　第 3 个产地剩余 150。
（3）销地甲的需求提高后，也变为产销不平衡问题。

最优解如下

****

起	至 销点			
发点	1	2	3	4
--------	-----	-----	-----	-----
1	50	250	0	0
2	400	0	0	0
3	0	0	350	150

此运输问题的成本或收益为：19 600。
注释：总需求量多出总供应量 150；
　　　第 1 个销地未被满足，缺少 100；
　　　第 4 个销地未被满足，缺少 50；
2．解：
首先，计算本题的利润模型，如表 7-2 所示。

表 7-2

	Ⅰ	Ⅰ′	Ⅱ	Ⅱ′	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
甲	0.3	0.3	0.4	0.4	0.3	0.4	0.1	0.9
乙	0.3	0.3	0.1	0.1	−0.4	0.2	−0.2	0.6
丙	0.05	0.05	0.05	0.05	0.15	0.05	−0.05	0.55
丁	−0.2	−0.2	0.3	0.3	0.1	−0.1	−0.1	0.1

由于目标函数是“max”，将目标函数变为“min”则以上利润模型变为以下模型。

表 7-3

	Ⅰ	Ⅰ′	Ⅱ	Ⅱ′	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
甲	−0.3	−0.3	−0.4	−0.4	−0.3	−0.4	−0.1	−0.9
乙	−0.3	−0.3	−0.1	−0.1	0.4	−0.2	0.2	−0.6
丙	−0.05	−0.05	−0.05	−0.05	−0.15	−0.05	0.05	−0.55
丁	0.2	0.2	−0.3	−0.3	−0.1	0.1	0.1	−0.1

由于管理运筹学软件中要求所输入的数值必须为非负，则将上表中的所有数值均加上 1，因此表 7-3 就变为以下模型。

表 7-4

	Ⅰ	Ⅰ′	Ⅱ	Ⅱ′	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ
甲	0.7	0.7	0.6	0.6	0.7	0.6	0.9	0.1
乙	0.7	0.7	0.9	0.9	1.4	0.8	1.2	0.4
丙	0.95	0.95	0.95	0.95	0.85	0.95	1.05	0.45
丁	1.2	1.2	0.7	0.7	0.9	1.1	1.1	0.9

加入产销量变为运输模型如下。

表 7-5

	Ⅰ	Ⅰ′	Ⅱ	Ⅱ′	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	产量
甲	0.7	0.7	0.6	0.6	0.7	0.6	0.9	0.1	300
乙	0.7	0.7	0.9	0.9	1.4	0.8	1.2	0.4	500
丙	0.95	0.95	0.95	0.95	0.85	0.95	1.05	0.45	400
丁	1.2	1.2	0.7	0.7	0.9	1.1	1.1	0.9	100
销量	150	150	150	100	350	200	250	150	

由于以上模型销量大于产量所以加入一个虚拟产地戊，产量为 200，模型如表 7-6 所示。

表 7-6

	Ⅰ	Ⅰ′	Ⅱ	Ⅱ′	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	产量
甲	0.7	0.7	0.6	0.6	0.7	0.6	0.9	0.1	300
乙	0.7	0.7	0.9	0.9	1.4	0.8	1.2	0.4	500
丙	0.95	0.95	0.95	0.95	0.85	0.95	1.05	0.45	400
丁	1.2	1.2	0.7	0.7	0.9	1.1	1.1	0.9	100
戊	M	0	M	0	0	0	M	0	200
销量	150	150	150	100	350	200	250	150	1 500

用管理运筹学软件计算得出结果如图 7-1 所示。

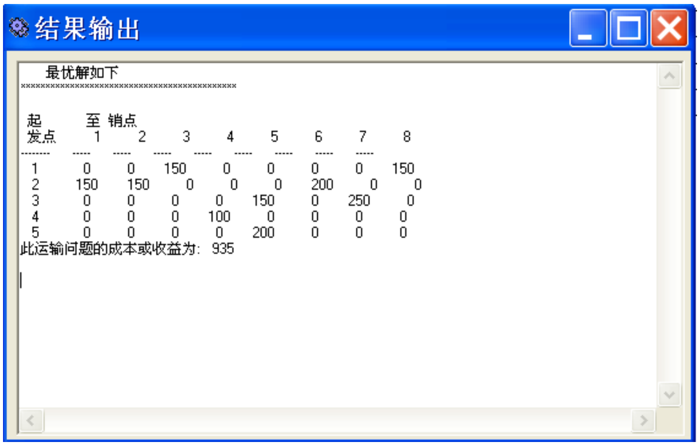

图 7-1

由于计算过程中将表中的所有数值均加上 1，因此应将这部分加上的值去掉，所以 $935-1\,300\times1=-365$，又因为最初将目标函数变为了“min”，因此此利润问题的结果为 365。

3．解：

建立的运输模型如表 7-7。

表 7-7

	1	2	3	
0	60	120	180	2
1	600	600+60	600+60×2	3
1′	600+600×10%	600+600×10%+60	600+600×10%+60×2	3
2	M	700	700+60	4
2′	M	700+700×10%	700+700×10%+60	2
3	M	M	650	2
3′	M	M	650+650×10%	3
	5	5	6	

最优解如下

****

起	至	销点	
发点	1	2	3
--------	-----	-----	-----
1	1	0	1
2	3	0	0
3	1	1	0

4	0	4	0
5	0	0	0
6	0	0	2
7	0	0	3

此运输问题的成本或收益为：9 665

注释：总供应量多出总需求量　3
　　第 3 个产地剩余　1
　　第 5 个产地剩余　2

此问题的另外的解如下。

起	至	销点	
发点	1	2	3
--------	-----	-----	-----
1	2	0	0
2	3	0	0
3	0	2	0
4	0	3	1
5	0	0	0
6	0	0	2
7	0	0	3

此运输问题的成本或收益为：　9 665

注释：总供应量多出总需求量　3
　　第 3 个产地剩余　1
　　第 5 个产地剩余　2

此问题的另外的解如下。

起	至	销点	
发点	1	2	3
--------	-----	-----	-----
1	2	0	0
2	3	0	0
3	0	1	1
4	0	4	0
5	0	0	0

6	0	0	2
7	0	0	3

此运输问题的成本或收益为:　9 665

注释：总供应量多出总需求量　3

第 3 个产地剩余　1

第 5 个产地剩余　2

4．解：

表 7-8

	甲	乙	A	B	C	D	
甲	0	100	150	200	180	240	1 600
乙	80	0	80	210	60	170	1 700
A	150	80	0	60	110	80	1 100
B	200	210	70	0	140	50	1 100
C	180	60	110	130	0	90	1 100
D	240	170	90	50	85	0	1 100
	1 100	1 100	1 400	1 300	1 600	1 200	

最优解如下

****

起	至　销点					
发点	1	2	3	4	5	6
---------	-----	-----	-----	-----	-----	-----
1	1 100	0	300	200	0	0
2	0	1 100	0	0	600	0
3	0	0	1 100	0	0	0
4	0	0	0	1 100	0	0
5	0	0	0	0	1 000	100
6	0	0	0	0	0	1 100

此运输问题的成本或收益为 130 000。

5．解：

建立的运输模型如下。

$\min f = 54x_{11}+49x_{12}+52x_{13}+64x_{14}+57x_{21}+73x_{22}+69x_{23}+65x_{24}$

s.t.　$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leqslant 1\ 100,$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\leqslant 1\ 000,$

$x_{11},x_{12},x_{13},x_{14}, x_{21},x_{22},x_{23},x_{24}\geqslant 0.$

	1	2	3	4	
A	54	49	52	64	1 100
B	57	73	69	61	1 000
	500	300	550	650	

最优解如下

****

起	至	销点		
发点	1	2	3	4
--------	-----	-----	-----	-----
1	250	300	550	0
2	250	0	0	650

此运输问题的成本或收益为：110 700

注释：总供应量多出总需求量　100

第 2 个产地剩余　100

6．解：

（1）最小元素法的初始解如表 7-9 所示。

表 7-9

	1	2	3	产量
甲	8	7	4 15	~~15~~　0
乙	3 10	5 10	9 5	~~25~~　~~15~~　~~5~~　0
丙	0 10	0	0	~~10~~　0
销量	~~20~~ ~~10~~ 0	~~10~~ 0	~~20~~ ~~5~~ 0	

（2）　最优解如下

****

起	至	销点	
发点	1	2	3
--------	-----	-----	-----
1	0	0	15
2	20	5	0

此运输问题的成本或收益为:　145

注释：总需求量多出总供应量　10
第 2 个销地未被满足，缺少　5
第 3 个销地未被满足，缺少　5

（3）该运输问题只有一个最优解，因为其检验数均不为零。

（4）

最优解如下

****

起 发点	至　销点 1	 2	 3
1	0	0	15
2	25	0	0

此运输问题的成本或收益为:　135

注释：总需求量多出总供应量　20
第 1 个销地未被满足，缺少　5
第 2 个销地未被满足，缺少　10
第 3 个销地未被满足，缺少　5

第 8 章　整 数 规 划

1．解：

① max $z=5x_1+8x_2$

s.t.

$x_1+x_2\leqslant 6$，

$5x_1+9x_2\leqslant 45$，

$x_1, x_2\geqslant 0$，且为整数

目标函数最优解为 $x_1^*=0, x_2^*=5, z^*=40$ 。

② max $z=3x_1+2x_2$

s.t.

$2x_1+3x_2\leqslant 14$，

$2x_1+x_2\leqslant 9$，

$x_1, x_2\geqslant 0$，且 x_1 为整数

目标函数最优解为 $x_1^*=3, x_2^*=2.666\,7, z^*=14.333\,4$ 。

③ max $z=7x_1+9x_2+3x_3$

s.t.

$-x_1+3x_2+x_3\leqslant 7$，

$7x_1+x_2+3x_3\leqslant 38$，

$x_1, x_2, x_3\geqslant 0$，且 x_1 为整数，x_3 为 0–1 变量。

目标函数最优解为 $x_1^*=5, x_2^*=3, x_3^*=0, z^*=62$ 。

2．解：

设 x_i 为装到船上的第 i 种货物的件数，i=1, 2, 3, 4, 5。则该船装载的货物取得最大价值目标函数的数学模型可写为

max $z=5x_1+10x_2+15x_3+18x_4+25x_5$

s.t.

$20x_1+5x_2+10x_3+12x_4+25x_5\leqslant 400\,000$，

$x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5\leqslant 50\,000$，

$x_1+4x_4\leqslant 10\,000$

$0.1x_1+0.2x_2+0.4x_3+0.1x_4+0.2x_5\leqslant 750$,

$x_i\geqslant 0$，且为整数，i=1, 2, 3, 4, 5。

目标函数最优解为 $x_1^*=0, x_2^*=0, x_3^*=0, x_4^*=2\,500, x_5^*=2\,500, z^*=107\,500$ 。

3．解：

设 x_i 为第 i 项工程，i=1, 2, 3, 4, 5，且 x_i 为 0–1 变量，并规定，

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{当第 } i \text{ 项工程被选定时,}\\ 0, & \text{当第 } i \text{ 项工程没被选定时,}\end{cases}$$

根据给定条件，使三年后总收入最大的目标函数的数学模型为

$\max z=20x_1+40x_2+20x_3+15x_4+30x_5$

s.t.

$5x_1+4x_2+3x_3+7x_4+8x_5\leqslant 25$，

$x_1+7x_2+9x_3+4x_4+6x_5\leqslant 25$，

$8x_1+10x_2+2x_3+x_4+10x_5\leqslant 25$，

x_i 为 0–1 变量，$i=1, 2, 3, 4, 5$。

目标函数最优解为 $x_1^*=1, x_2^*=1, x_3^*=1, x_4^*=1, x_5^*=0, z^*=95$。

4．解：

这是一个混合整数规划问题。

设 x_1、x_2、x_3 分别为利用 A、B、C 设备生产的产品的件数，生产准备费只有在利用该设备时才投入，为了说明固定费用的性质，设

$$y_i=\begin{cases}1,\\ 0,\end{cases}$$

故其目标函数为

$\min z=100y_1+300y_2+200y_3+7x_1+2x_2+5x_3$

为了避免没有投入生产准备费就使用该设备生产，必须加以下的约束条件，M 为充分大的数。

$x_1\leqslant y_1M$，

$x_2\leqslant y_2M$，

$x_3\leqslant y_3M$，

设 M=1 000 000

① 该目标函数的数学模型为

$\min z=100y_1+300y_2+200y_3+7x_1+2x_2+5x_3$

s.t.

$x_1+x_2+x_3=2\ 000$，

$0.5x_1+1.8x_2+1.0x_3\leqslant 2\ 000$，

$x_1\leqslant 800$，

$x_2\leqslant 1\ 200$，

$x_3\leqslant 1\ 400$，

$x_1\leqslant y_1M$，

$x_2\leqslant y_2M$，

$x_3\leqslant y_3M$，

$x_1, x_2, x_3\geqslant 0$，且为整数，y_1, y_2, y_3 为 0–1 变量。

目标函数最优解为 x_1^*=370, x_2^*=231, x_3^* =1 399, y_1=1, y_2=1, y_3=1, z^*=10 647。

② 该目标函数的数学模型为

min $z=100y_1+300y_2+200y_3+7x_1+2x_2+5x_3$

s.t.

$x_1+x_2+x_3=2\,000$，

$0.5x_1+1.8x_2+1.0x_3\leqslant 2\,500$，

$x_1\leqslant 800$，

$x_2\leqslant 1\,200$，

$x_3\leqslant 1\,400$，

$x_1\leqslant y_1M$，

$x_2\leqslant y_2M$，

$x_3\leqslant y_3M$，

$x_1, x_2, x_3\geqslant 0$，且为整数，y_1, y_2, y_3 为 0–1 变量。

目标函数最优解为 x_1^*=0, x_2^*=625, x_3^*=1 375, y_1=0, y_2=1, y_3=1, z^* =8 625。

③ 该目标函数的数学模型为

min $z=100y_1+300y_2+200y_3+7x_1+2x_2+5x_3$

s.t.

$x_1+x_2+x_3=2\,000$，

$0.5x_1+1.8x_2+1.0x_3\leqslant 2\,800$，

$x_1\leqslant 800$，

$x_2\leqslant 1\,200$，

$x_3\leqslant 1\,400$，

$x_1\leqslant y_1M$，

$x_2\leqslant y_2M$，

$x_3\leqslant y_3M$，

$x_1, x_2, x_3\geqslant 0$，且为整数，y_1, y_2, y_3 为 0–1 变量。

目标函数最优解为 x_1^*=0, x_2^*=1 000, x_3^*=1 000, y_1=0, y_2=1, y_3=1, z^*=7 500。

④ 该目标函数的数学模型为

min $z=100y_1+300y_2+200y_3+7x_1+2x_2+5x_3$

s.t.

$x_1+x_2+x_3=2\,000$，

$x_1\leqslant 800$，

$x_2\leqslant 1\,200$，

$x_3\leqslant 1\,400$，

$x_1\leqslant y_1M$，

$x_2\leqslant y_2M$，

$x_3\leqslant y_3M$，

$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$，且为整数，$y_1, y_2, y_3$ 为 0–1 变量。

目标函数最优解为 $x_1^* = 0$，$x_2^* = 1\ 200$，$x_3^* = 800, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 1, z^* = 6\ 900$。

5．解：

设 x_{ij} 为从 D_i 地运往 R_i 地的运输量，i=1, 2, 3, 4，j=1, 2, 3 分别代表从北京、上海、广州、武汉运往华北、华中、华南的货物件数，并规定，

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } i \text{ 地被选设库房，} \\ 0, & \text{当 } i \text{ 地没被选设库房。} \end{cases}$$

该目标函数的数学模型为

$$\min z = 45\ 000y_1 + 50\ 000y_2 + 70\ 000y_3 + 40\ 000y_4 + 200x_{11} + 400x_{12} + 500x_{13} + 300x_{21} + 250x_{22} + 400x_{23} + 600x_{31} + 350x_{32} + 300x_{33} + 350x_{41} + 150x_{42} + 350x_{43}$$

s.t.

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 500,$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 800,$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 700,$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 1\ 000y_1,$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 1\ 000y_2,$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leqslant 1\ 000y_3,$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} \leqslant 1\ 000y_4,$

$y_2 \leqslant y_4,$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leqslant 2,$

$y_3 + y_4 \leqslant 1,$

$x_{ij} \geqslant 0$，且为整数，y_i 为 0−1 变量，i=1,2,3,4。

目标函数最优解为

$$x_{11}^* = 500, x_{12}^* = 0, x_{13}^* = 500, x_{21}^* = 0, x_{22}^* = 0, x_{23}^* = 0, x_{31}^* = 0, x_{32}^* = 0, x_{33}^* = 0,$$
$$x_{41}^* = 0, x_{42}^* = 800, x_{43}^* = 200, y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 1, z^* = 625\ 000。$$

也就是说在北京和武汉建库房，北京向华北和华南各发货 500 件，武汉向华中发货 800 件，向华南发货 200 件就能满足要求，即这就是最优解。

6．解：

引入 0−1 变量 x_{ij}，并令 $x_{ij} = \begin{cases} 1\text{，当指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项工作时，} \\ 0\text{，当不指派第 } i \text{ 人去完成第 } j \text{ 项工作时。} \end{cases}$

① 为使总消耗时间最少的目标函数的数学模型为

$$\min z = 20x_{11} + 19x_{12} + 20x_{13} + 28x_{14} + 18x_{21} + 24x_{22} + 27x_{23} + 20x_{24} + 26x_{31} + 16x_{32} + 15x_{33} + 18x_{34} + 17x_{41} + 20x_{42} + 24x_{43} + 19x_{44}$$

s.t.

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1,$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1,$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1,$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1,$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1,$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1,$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1,$

x_{ij} 为 0−1 变量，$i=1,2,3,4,\ j=1,2,3,4$

目标函数最优解为

$x_{11}^*=0,\ x_{12}^*=1,\ x_{13}^*=0,\ x_{14}^*=0,\ x_{21}^*=1,\ x_{22}^*=0,\ x_{23}^*=0,\ x_{24}^*=0,\ x_{31}^*=0,\ x_{32}^*=0,\ x_{33}^*=1,\ x_{34}^*=0, x_{41}^*=0,\ x_{42}^*=0,$
$x_{43}^*=0,\ x_{44}^*=1,\ z^*=71$。

或

$x_{11}^*=0,\ x_{12}^*=1,\ x_{13}^*=0,\ x_{14}^*=0,\ x_{21}^*=0,\ x_{22}^*=0,\ x_{23}^*=0,\ x_{24}^*=1,\ x_{31}^*=0,\ x_{32}^*=0,\ x_{33}^*=1,\ x_{34}^*=0, x_{41}^*=1,\ x_{42}^*=0,$
$x_{43}^*=0,\ x_{44}^*=0,\ z^*=71$。

即安排甲做 B 项工作，乙做 A 项工作，丙做 C 项工作，丁做 D 项工作，或者是安排甲做 B 项工作，乙做 D 项工作，丙做 C 项工作，丁做 A 项工作，最少时间为 71 分钟。也可用管理运筹学软件的整数规划中的指派问题子程序直接求得。

② 为使总收益最大的目标函数的数学模型是

将①中的目标函数改为求最大值即可。

目标函数最优解为

$x_{11}^*=0,\ x_{12}^*=0,\ x_{13}^*=0,\ x_{14}^*=1,\ x_{21}^*=0,\ x_{22}^*=1,\ x_{23}^*=0,\ x_{24}^*=0,\ x_{31}^*=1,\ x_{32}^*=0,\ x_{33}^*=0,\ x_{34}^*=0, x_{41}^*=0,\ x_{42}^*=0,$
$x_{43}^*=1,\ x_{44}^*=0,\ z^*=102$。

即安排甲做 D 项工作，乙做 C 项工作，丙做 A 项工作，丁做 B 项工作，最大收益为 102。

③ 由于工作多人少，我们假设有一个工人戊，他做各项工作所需的时间均为 0，该问题就变为安排 5 个人去做 5 项不同的工作的问题了，其目标函数的数学模型为

$$\min z=20x_{11}+19x_{12}+20x_{13}+28x_{14}+17x_{15}+18x_{21}+24x_{22}+27x_{23}+20x_{24}+20x_{25}+26x_{31}+16x_{32}+15x_{33}$$
$$+18x_{34}+15x_{35}+17x_{41}+20x_{42}+24x_{43}+19x_{44}+16x_{45}$$

s.t.

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=1,$

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=1,$

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=1,$

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=1,$

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}=1,$

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=1,$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=1,$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=1,$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=1,$

$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}=1$,

x_{ij} 为 0−1 变量，i=1,2,3,4,5, j=1,2,3,4,5。

目标函数最优解为

$x_{11}^*=0, x_{12}^*=1, x_{13}^*=0, x_{14}^*=0, x_{15}^*=0, x_{21}^*=1, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{24}^*=0, x_{25}^*=0, x_{31}^*=0, x_{32}^*=0, x_{33}^*=1, x_{34}^*=0,$
$x_{35}^*=0, x_{41}^*=0, x_{42}^*=0, x_{43}^*=0, x_{44}^*=0, x_{45}^*=1, z^*=68$。

即安排甲做 B 项工作，乙做 A 项工作，丙做 C 项工作，丁做 E 项工作，最少时间为 68 分钟。

④ 该问题为人多任务少的问题，其目标函数的数学模型为

$$\min z=20x_{11}+19x_{12}+20x_{13}+28x_{14}+18x_{21}+24x_{22}+27x_{23}+20x_{24}+26x_{31}+16x_{32}+15x_{33}+18x_{34}+17x_{41}$$
$$+20x_{42}+24x_{43}+19x_{44}+16x_{51}+17x_{52}+20x_{53}+21x_{54}$$

s.t.

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\leqslant 1$,

$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}\leqslant 1$,

$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}\leqslant 1$,

$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}\leqslant 1$,

$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}\leqslant 1$,

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=1$,

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=1$,

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=1$,

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=1$,

x_{ij} 为 0−1 变量，i=1,2,3,4, j=1,2,3,4,5。

目标函数最优解为

$x_{11}^*=0, x_{12}^*=0, x_{13}^*=0, x_{14}^*=0, x_{21}^*=0, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{24}^*=1, x_{31}^*=0, x_{32}^*=0, x_{33}^*=1, x_{34}^*=0, x_{41}^*=1, x_{42}^*=0,$
$x_{43}^*=0, x_{44}^*=0, x_{51}^*=0, x_{52}^*=1, x_{53}^*=0, x_{54}^*=0, z^*=69$ 。

或

$x_{11}^*=0, x_{12}^*=0, x_{13}^*=0, x_{14}^*=0, x_{21}^*=1, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{24}^*=0, x_{31}^*=0, x_{32}^*=0, x_{33}^*=1, x_{34}^*=0, x_{41}^*=0, x_{42}^*=0,$
$x_{43}^*=0, x_{44}^*=1, x_{51}^*=0, x_{52}^*=1, x_{53}^*=0, x_{54}^*=0, z^*=69$ 。

或

$x_{11}^*=0, x_{12}^*=1, x_{13}^*=0, x_{14}^*=0, x_{21}^*=0, x_{22}^*=0, x_{23}^*=0, x_{24}^*=0, x_{31}^*=0, x_{32}^*=0, x_{33}^*=1, x_{34}^*=0, x_{41}^*=0, x_{42}^*=0,$
$x_{43}^*=0, x_{44}^*=1, x_{51}^*=1, x_{52}^*=0, x_{53}^*=0, x_{54}^*=0, z^*=69$ 。

即安排乙做 D 项工作，丙做 C 项工作，丁做 A 项工作，戊做 B 项工作；或安排乙做 A 项工作，丙做 C 项工作，丁做 D 项工作，戊做 B 项工作；或安排甲做 B 项工作，丙做 C 项工作，丁做 D 项工作，戊做 A 项工作，最少时间为 69 分钟。

7．解：

设飞机停留一小时的损失为 a 元，则停留两小时损失为 4a 元，停留 3 小时损失为 9a 元，依次类推，对 A、B、C 三个城市建立的指派问题的效率矩阵分别如表 8−1 至表 8−10 所示。

城市 A

表 8-1

到达 \ 起飞	101	102	103	104	105
106	4a	9a	64a	169a	225a
107	361a	400a	625a	36a	64a
108	225a	256a	441a	4a	16a
109	484a	529a	16a	81a	121a
110	196a	225a	400a	625a	9a

解得最优解如表 8-2 所示。

表 8-2

到达 \ 起飞	101	102	103	104	105
106	0	1	0	0	0
107	0	0	0	1	0
108	0	0	0	0	1
109	0	0	1	0	0
110	1	0	0	0	0

城市 B

表 8-3

到达 \ 起飞	101	102	103	104	105
101	256a	529a	9a	625a	36a
102	225a	484a	4a	576a	25a
103	100a	289a	441a	361a	576a
113	64a	225a	361a	289a	484a
114	256a	529a	9a	625a	36a

解得最优解如表 8-4 所示。

表 8-4

到达 \ 起飞	101	102	103	104	105
106	0	0	1	0	0
107	1	0	0	0	0
108	0	1	0	0	0
109	0	0	0	1	0
110	0	0	0	0	1

或如表 8-5 所示。

表 8-5

到达 \ 起飞	101	102	103	104	105
106	0	0	0	0	1
107	1	0	0	0	0
108	0	1	0	0	0
109	0	0	0	1	0
110	0	0	1	0	0

城市 C

表 8-6

到达 \ 起飞	109	110	113	114
104	49a	225a	225a	49a
105	25a	169a	169a	25a
111	169a	441a	441a	169a
112	64a	256a	256a	64a

解得最优解如表 8-7 所示。

表 8-7

到达 \ 起飞	109	110	113	114
104	0	1	0	0
105	0	0	1	0
111	1	0	0	0
112	0	0	0	1

或如表 8-8 所示。

表 8-8

起飞 到达	109	110	113	114
104	0	0	1	0
105	0	1	0	0
111	1	0	0	0
112	0	0	0	1

或如表 8-9 所示。

表 8-9

起飞 到达	109	110	113	114
104	0	1	0	0
105	0	0	1	0
111	0	0	0	1
112	1	0	0	0

或如表 8-10 所示。

表 8-10

起飞 到达	109	110	113	114
104	0	0	1	0
105	0	1	0	0
111	0	0	0	1
112	1	0	0	0